Komplexe Zahlen

$w = u + iv \quad z = x + iy \quad wz = (ux - vy) + i(vx + uy)$. $z = x + iy \quad x = \mathrm{Re}\, z,\ y = \mathrm{Im}\, z$

$\bar{z} = x - iy$ (Konjugiert-komplex). $z\bar{z} = x^2 + y^2 \geq 0 \quad |z| = \sqrt{z\bar{z}}$

Regeln: 1.) $|z+w| \leq |z| + |w|$ 2.) $|zw| = |z||w|$ 3.) $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$

Lineare Gleichungssysteme / Gauss-Elimination

Vorgehen Gauss-Elimination:

1.) Erweiterte Koeffizientenmatrix $(A|b)$ aufstellen.

2.) Zeilen vertauschen und Vielfache der Pivot-Zeile von anderen Zeilen substrahieren, um Zeilenstufenform zu erreichen

Rang: Die Anzahl Pivotelemente in Zeilenstufenform. Verträglichkeitsbedingungen: Die im Falle $m > r$ für eine Lösung notwendigen Bedingungen $c_{r+1} = \dots = c_m = 0$. Ein System mit n Variablen und m Gleichungen hat (mindestens) eine Lösung, wenn entweder $r = m$ ist oder $r < m$ und $c_{r+1} = c_{r+2} = \dots = c_m = 0$. Gibt es Lösungen, so ist die Lösung bei $r = n$ eindeutig. Falls $r < n$, gibt es eine $(n-r)$-parametrige Lösungsschar. (c_{r+1} sind Koordinaten der rechten Seite b!). Es gilt:

1) $Ax = b$ hat genau eine Lösung $\Leftrightarrow r = n = m$ oder $r = n < m$ und $c_{r+1} = c_{r+2} = c_m = 0$.

2) $Ax = b$ hat für jedes b (mindestens) eine Lösung $\Leftrightarrow r = m$. 3.) $Ax = b$ hat für jedes b genau eine Lösung $\Leftrightarrow r = n = m$. Somit ist die Lösung eines LGS genau dann eindeutig, wenn es für beliebige rechte Seiten lösbar ist.

Homogen: LGS, bei dem die rechte Seite aus Nullen besteht. Hat immer die triviale Lösung $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$. Ein homogenes System hat genau dann nicht-triviale Lösungen, wenn $r < n$ ist. Ein homogenes System mit $m < n$ hat immer eine $(n-m)$-parametrige Schar nichttrivialer Lösungen. Ein quadratisches LGS ist genau dann für beliebige rechte Seiten lösbar, wenn das zugehörige homogene System nur die triviale Lösung besitzt. Zusammenfassend gilt für quadratische Gleichungssysteme:

- $r = \text{Rang } A = n$ (A ist regulär)	- $r = \text{Rang } A < n$ (A ist singulär)
- Für jedes b gibt es genau eine Lösung	- Für gewisse b gibt es keine Lösung
- Das entsprechende homogene System hat nur die triviale Lösung.	- Für keine b gibt es eine eindeutige Lös.
	- Das entsprechende homogene System hat nicht-triviale Lösungen

Matrizen und Vektoren

Eine $m \times n$-Matrix hat m Zeilen/Reihen und n Spalten/Kolonnen. Mit A_{ij} ist der Eintrag in der i-ten Reihe und j-ten Spalte gemeint.

Skalarmultiplikation: Komponentenweise Addition: Komponentenweise Eigenschaften:

1.) $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$ 2.) $(\alpha A)B = \alpha(AB) = A(\alpha B)$ 3.) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$

4.) $\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B$ 5.) $A + B = B + A$ 6.) $(A+B)+C = A+(B+C)$ 7.) $A(BC) = (AB)C$

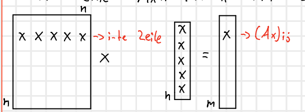
8.) $(A+B)C = AC + BC$ 9.) $A(B+C) = AB + AC$

Multiplikation: Eine $m \times n$ Matrix kann mit einer $n \times p$ Matrix multipliziert werden, wobei das Produkt AB eine $m \times p$ Matrix ist. Die Multiplikation ist wie folgt definiert: $AB_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}$ $(i = 1 \dots m,\ j = 1 \dots p)$

Dies kann auch als Skalarprodukt der einzelnen Zeilen- und Spaltenvektoren aufgefasst werden. Beispiel: $A = \begin{bmatrix} \boxed{2 \quad 3 \quad -1} \\ 6 \quad 1 \quad 2 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ -3 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ $AB = \begin{bmatrix} \boxed{-2} & \square \\ \square & \square \end{bmatrix}$ $8 - 9 - 1 = -2$

Matrix-Vektorprodukt:

Produkt einer $m \times n$-Matrix mit einem $n \times 1$ Vektor (Kolonnenvektor):



$A = \left(a_1 \middle| a_2 \middle| \dots \middle| a_n \right)$ Fassen wir die Matrix A mit n Kolonnenvektoren auf, so gilt:

$Ax = a_1x_1 + \dots + a_nx_n = x_1a_1 + \dots x_na_n$. Somit gilt auch:

$Ae_j = a_j$

Ist A eine $m \times n$-Matrix und $B = (b_1\ b_2 \dots b_p)$ eine $n \times p$-Matrix, so ist: $AB = (Ab_1\ Ab_2 \dots Ab_n)$. Es folgt, dass $Ax = b$ genau dann eine Lösung hat, wenn b eine Linearkombination der Kolonnen von A ist.

Transponierte Matrix: Spiegeln an Diagonale, $(A^T)_{ij} = (A)_{ji}$. Konjugiert-komplexe/Hermitesch-transponierte: $(A^H) = \overline{A^T}$ Symmetrische Matrix: Wenn $A^T = A$ Hermitesche Matrix: Wenn $A^H = A$ (hat zwingend reelle Diagonalelemente). Schiefsymmetrisch: $A^T = -A$. Regeln: 1.) $(A^T)^T = A$, $(A^H)^H = A$

2.) $(\alpha A)^T = \alpha A^T$, $(\alpha A^H) = \bar{\alpha} A^H$ 3.) $(A+B)^T = A^T + B^T$, $(A+B)^H = A^H + B^H$ 4.) $(AB)^T = B^T A^T$, $(AB)^H = B^H A^H$

Nilpotent: Eine ihrer Potenzen ergibt Nullmatrix, $A^k = 0$. Für symmetrische (quadratische) Matrizen gilt: 1.) $AB = BA \Leftrightarrow AB$ symmetrisch 2.) A^TA und AA^T symmetrisch.

Die Überlegungen zur Matrizenmultiplikation können transponiert werden: Betrachtet man die Zeilenvektoren von A und B und ist $\underline{y}$ ein Zeilenvektor, so gilt: $\underline{y}B = y_1\underline{b_1} + y_2\underline{b_2} + \dots y_n\underline{b_n}$ $\quad e_i^T B = \underline{b_i} \quad AB = \begin{pmatrix} \underline{a_1}B \\ \vdots \\ \underline{a_n}B \end{pmatrix}$

Euklidsches Skalarprodukt/inneres Produkt: $\langle x, y \rangle = x^H y = \sum_{k=1}^{n} \overline{x_k} y_k = \overline{x_1} y_1 + \dots \overline{x_n} y_n$

Es gelten alle Eigenschaften (siehe Kapitel Skalarprodukt). Länge/2-Norm: $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \dots + |x_n|^2}$. Erfüllt die Norm-Axiome (siehe Kapitel Skalarprodukt).

Winkel: $\cos\varphi = \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\|\|y\|}$ Cauchy-Schwarz: $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$ p-Norm: $\|x\|_p = (|x_1|^p + |x_2|^p + \dots + |x_n|^p)^{1/p}$ $(1 \leq p \leq \infty)$. $\|x\|_\infty = \max_{k=1 \dots n} |x_k|$ Äussere Produkt: m-Vektor x, n-Vektor y. xy^H ergibt eine $m \times n$-Matrix. Orthogonale Projektion: Orthogonale Projektion $P_y x$ des n-Vektors x auf die durch die Vielfachen von y erzeugte Gerade: $P_y x = \frac{1}{\|y\|^2} yy^H x$

Für die Projektionsmatrix gilt: $P_y^H = P_y$ und $P_y^2 = P_y$. Inverse einer Matrix: Eine $n \times n$-Matrix ist invertierbar, wenn es eine $n \times n$-Matrix A^{-1} gibt so dass $AA^{-1} = I_n = A^{-1}A$. Ist A invertierbar, so ist die Inverse eindeutig bestimmt und A ist regulär (Rang n). Die Inverse kann wie folgt berechnet werden:

1.) Schema $(A|I)$ schreiben 2.) Gaussen, um $(I|A^{-1})$ zu erhalten 3.) Testen, ob $AA^{-1} = I$. Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 3 \\ -3 & -2 & -5 \end{pmatrix} \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 2 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 2 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 1 & -\frac{1}{3} & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \dots \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Sind A und B reguläre $n\times n$-Matrizen, so gilt: 1) A^{-1} ist regulär und $(A^{-1})^{-1}=A$ 2.) AB ist regulär und $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$ 3.) A^T / A^H sind regulär und $(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T$, $(A^H)^{-1}=(A^{-1})^H$. Wenn A regulär ist, so gilt $x=A^{-1}b$ für alle b. Unitär: Quadratische Matrix für die $A^HA=I$. Reelle unitäre Matrizen ($A^T=A$) werden orthogonal genannt. Für unitäre/orthogonale Matrizen A und B gilt: 1.) A ist regulär und $A^{-1}=A^H / A^{-1}=A^T$ 2.) $AA^H=I_n$ / $AA^T=I_n$ 3.) A^{-1} ist unitär/orthogonal 4.) AB ist unitär/orthogonal. Für die durch unitäre/orthogonale Matrizen definierten Abbildungen gilt: $\|Ax\|=\|x\|$, $\langle Ax,Ay\rangle=\langle x,y\rangle$ (Längentreue/Winkeltreue).

LR-Zerlegung

Matrizen P, L, R so dass $PA=LR$. Dann gilt: $Lc=Pb$ und $Rx=c$.
Vorgehen: 1.) Das Schema $(I|A|I)$ schreiben. 2.) Index $i_p\in\{j,j+1,\dots,n\}$ mit $|a_{i_pj}|=\max_{i\in\{j,j+1,\dots,n\}}|a_{ij}|$ bestimmen und als Pivot nutzen (tauschen). Links ebenfalls tauschen und rechts die Verhältnisse tauschen 3.) A mithilfe von Gauss-Elimination umformen, jeweils tauschen bei neuem Pivot (gemäss 2). Auf der rechten Seite die Verhältnisse $\left(l_{ij}=\frac{a_{in}}{a_{jj}}\right)$ aufschreiben. Am Ende hat man $(P|L|R)$. Beispiel:

$$A=\begin{pmatrix}3&1&6\\-6&0&16\\0&8&17\end{pmatrix}\quad b=\begin{pmatrix}40\\-86\\-29\end{pmatrix}\quad \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc}1&&&3&1&6&1&&\\&1&&-6&0&16&&1&\\&&1&0&8&17&&&1\end{array}\right)\rightsquigarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc}&1&&-6&0&16&1&&\\1&&&3&1&6&&1&\\&&1&0&8&-17&&&1\end{array}\right)\rightsquigarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc}&1&&-6&0&16&1&&\\1&&&0&1&6&-\frac{1}{2}&1&\\&&1&0&8&-17&&&1\end{array}\right)\rightsquigarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc}&1&&-6&0&16&1&&\\&&1&0&8&-17&&1&\\1&&&0&1&-2&-\frac{1}{2}&&1\end{array}\right)\rightsquigarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc}&1&&-6&0&16&1&&\\&&1&0&8&-17&&1&\\1&&&0&0&\frac{1}{8}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{8}&1\end{array}\right)$$

$$PA=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&1&6\\-6&0&16\\0&8&-17\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{8}&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-6&0&16\\0&8&-17\\0&0&\frac{1}{8}\end{pmatrix}=LR\quad Lc=Pb\Rightarrow c=\begin{pmatrix}-86\\-29\\\frac{5}{8}\end{pmatrix}\quad Rx=c\Rightarrow x=\begin{pmatrix}1\\7\\5\end{pmatrix}$$

Vektorräume

Definition: Nichtleere Menge über einen Körper $\mathbb{E}$ (normalerweise $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$) auf der eine Addition ($x,y\in V$, $x+y\in V$) und eine skalare Multiplikation ($\alpha\in\mathbb{E}, x\in V$, $\alpha x\in V$) definiert sind. Es gelten die Eigenschaften: V1) $x+y=y+x$ V2) $(x+y)+z=x+(y+z)$ V3) Es gibt ein Element $o\in V$ mit $x+o=x$ $(\forall x\in V)$ V4) Zu jedem x gibt es ein eindeutig bestimmtes $-x\in V$ mit $x+(-x)=o$ V5) $\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$ V6) $(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$ V7) $(\alpha\beta)x=\alpha(\beta x)$ V8) $1x=x$ Die Elemente von V bezeichnet man als Vektoren, die von $\mathbb{E}$ als Skalare. Das Element $o\in V$ ist der Nullvektor. Ist $\mathbb{E}=\mathbb{R}$, ist der Vektorraum reell, bei $\mathbb{E}=\mathbb{C}$ komplex. Aus den Axiomen lässt sich ableiten: S1) $0x=o$ S2) $\alpha o=o$ S3) $\alpha x=o \Rightarrow \alpha=0$ oder $x=o$ S4) $(-\alpha)x=\alpha(-x)=-(\alpha x)$ S5) Zu $x,y\in V$ existiert $z\in V$ mit $x+z=y$, wobei z eindeutig ist und gilt: $z=y+(-x)$. Körper: Nichtleere Menge $\mathbb{E}$ auf der eine Addition ($\alpha,\beta\in\mathbb{E}\to\alpha+\beta\in\mathbb{E}$) und eine Multiplikation ($\alpha,\beta\in\mathbb{E}\to\alpha\cdot\beta\in\mathbb{E}$) definiert ist, wobei die Axiome gelten: K1) $\alpha+\beta=\beta+\alpha$ K2) $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$ K3) Es gibt ein Element $0\in\mathbb{E}$ mit $\alpha+0=\alpha$ $(\forall\alpha\in\mathbb{E})$ K5) $\alpha\cdot\beta=\beta\cdot\alpha$ K6) $(\alpha\cdot\beta)\cdot\gamma=\alpha\cdot(\beta\cdot\gamma)$ K7) Es gibt ein Element $1\in\mathbb{E}$, $1\neq0$ mit $\alpha\cdot1=\alpha$ K8) Zu jedem $\alpha\in\mathbb{E}$, $\alpha\neq0$ gibt es ein eindeutiges $\alpha^{-1}\in\mathbb{E}$ mit $\alpha\cdot(\alpha^{-1})=1$ K9) $\alpha\cdot(\beta+\gamma)=\alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\gamma$ K10) $(\alpha+\beta)\gamma=\alpha\gamma+\beta\gamma$ Unterraum: Eine nichtleere Teilmenge U eines Vektorraums heisst Unterraum, falls sie bzgl. der Addition und skalaren Multiplikation geschlossen ist, d.h. $x+y\in U$, $\alpha x\in U$ $(\forall x,y\in U, \forall\alpha\in\mathbb{E})$. Ein Untervektorraum muss also zwingend den Nullvektor enthalten. Ein Unterraum ist selbst ein Vektorraum! Wenn $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ eine reelle Matrix ist und L_0 die Menge der Lösungsvektoren $x\in\mathbb{R}^n$ des homogenen Gleichungssystems $Ax=0$, so ist L_0 ein Unterraum von $\mathbb{R}^n$. Span: Die Menge aller Linearkombinationen von $a_1,\dots,a_l$ heisst der von $a_1,\dots,a_l$ aufgespannte Unterraum oder die lineare Hülle von $a_1,\dots,a_l$. Er wird mit $\operatorname{span}\{a_1,\dots,a_l\}$ oder $\langle a_1,\dots,a_l\rangle$ bezeichnet. Die Vektoren $a_1,\dots,a_l$ heissen Erzeugendensystem von $\operatorname{span}\{a_1,\dots,a_l\}$. Lineare Abhängigkeit: Die Vektoren $a_1,\dots,a_l$ heissen linear abhängig, wenn es Skalare $\gamma_1,\dots,\gamma_l$ gibt, die nicht alle 0 sind und gilt: $\gamma_1a_1+\dots+\gamma_la_l=0$. Die $l\geq2$ Vektoren sind linear abhängig, wenn sich einer dieser Vektoren als Linearkombination der Anderen schreiben lässt. Basis: Ein linear unabhängiges Erzeugendensystem eines Vektorraums V heisst Basis von V. B ist ein minimales Erzeugendensystem, d.h. $\operatorname{span}(B)=V$, aber $\operatorname{span}(B\setminus\{b_i\})\neq V$ $\forall b_i\in B$. B ist eine maximal linear unabhängige Teilmenge von V, d.h. $(b_i)_{i\in I}$ sind linear unabhängig, aber $(b_i)_{i\in I}\cup\{v\}$ sind nicht mehr linear abhängig.
Die n Kolonnen $b_1,\dots,b_n\in\mathbb{E}^n$ einer Matrix bilden genau dann eine Basis von $\mathbb{E}^n$, wenn B regulär ist. Gibt es zu einem Vektorraum ein endliches Erzeugendensystem, so besitzt er eine Basis, die eine Teilmenge des EZ ist.
Besitzt ein Vektorraum ein endliches EZ, so besteht jede Basis aus derselben Zahl an Vektoren. Dimension: Die Zahl der Basisvektoren wird mit $\dim V$ bezeichnet. Bei $\dim V=n$ sagt man V ist n-dimensional. Beispiel: $\dim(P_n)=n+1$, $B(P_n)=\{1,x,x^2,\dots,x^n\}$. Einige Sätze zu Basen: B1) Wenn $\{b_1,\dots,b_m\}$ ein EZ von V ist, so ist jede Menge $\{a_1,\dots,a_l\}\subset V$ von $l>m$ linear abhängig. B2) Jede Menge linear unabhängiger Vektoren lässt sich zu einer Basis von V ergänzen B3) Jede Menge von $n=\dim V$ linear unabhängigen Vektoren ist eine Basis von V. B4) $\{b_1,\dots,b_n\}\subset V$ ist eine Basis von V, wenn sich jeder Vektor eindeutig als LK von $b_1,\dots,b_n$ darstellen lässt ($x=\sum_{k=1}^{n}\xi_kb_k$) Die Koeffizienten ξ_k aus B4 heissen Koordinaten von x bezüglich der Basis $\{b_1,\dots,b_n\}$. Der Vektor $\xi=(\xi_1\dots\xi_n)^T$ ist der Koordinatenvektor. Prüfen, ob Basis/abhängig: 1.) Schreibe $\begin{pmatrix}v_1^T\\\vdots\\v_k^T\end{pmatrix}=A$ in eine Matrix mit n Zeilen. 2.) Führe Gauss-Elimination auf A durch. 3.) Ziehe Fazit:
- $\operatorname{Rang}(A)=k\Rightarrow v_1,\dots,v_k$ sind linear unabhängig - $\operatorname{Rang}(A)<k\Rightarrow v_1,\dots,v_k$ sind lin. abhängig
- $\operatorname{Rang}(A)=\dim(V)\Rightarrow v_1,\dots,v_k$ sind erzeugend - $\operatorname{Rang}(A)=\dim V=k\Rightarrow$ Bilden Basis für $\mathbb{R}^n$

Komplementär: Zwei Unterräume U und U' heissen komplementär, wenn jeder $x\in V$ eine eindeutige Darstellung $x=u+u'$ mit $u\in U$ und $u'\in U'$ hat. V ist die direkte Summe von U/U' und man schreibt $V = U \oplus U'$. **Transformationsmatrix:** Neue Basen lassen sich als LK der alten Basen darstellen: $b_k' = \sum_{i=1}^{n} T_{ik} b_i$. Die $n \times n$-Matrix $T = (T_{ik})$ heisst Transformationsmatrix. In der k-ten Kolonne von T stehen die Koordinaten des k-ten neuen Basisvektors bzgl. der alten Basis. Beispiel: $V = P_2$ $B_p = \{p_1, p_2, p_3\}$ mit $p_1(t) = t^2$, $p_2(t) = (t-1)^2$, $p_3(t) = (t+1)^2$. Die Transformationsmatrix T bzgl. der Monombasis sieht so aus: $T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Für eine Transformationsmatrix gilt: $\xi = T\xi'$. Die Matrix ist regulär, es gilt also auch $\xi' = T^{-1}\xi$

Lineare Abbildungen

Definition: $F: X \to Y$ sei irgend eine Abbildung. Die Menge $F(X)$ ist der Wertebereich von F oder Bild von F und wird auch mit $\operatorname{Im} F$ bezeichnet. **Surjektiv:** $F(X) = Y$ (F ist eine Abbildung auf Y, „ganzes Y" wird erreicht). **Injektiv:** $F(x) = F(x') \Rightarrow x = x'$ (es gibt keine „Kollisionen"). **Bijektiv:** Surjektiv und injektiv. Für bijektive Abbildungen ist F^{-1} definiert! **Lineare Abbildung:** Eine Abbildung $F: X \to Y$ heisst linear, wenn für alle $x, \tilde{x} \in X$ und alle $\gamma \in \mathbb{E}$ gilt:
$F(x + \tilde{x}) = Fx + F\tilde{x}$ $\quad F(\gamma x) = \gamma(Fx)$ Diese Eigenschaften sind gleichwertig mit:
$F(\beta x + \gamma \tilde{x}) = \beta Fx + \gamma F\tilde{x}$ **Definitionsraum:** X **Bildraum:** Y **Rang:** Der Rang einer linearen Abbildung ist: $\operatorname{rang}(F) = \dim(\operatorname{Im} F)$ Er ist gleich dem Rang ihrer Abbildungsmatrix. **Abbildungsmatrix:** Die Bilder $Fb_l \in Y$ der Basis von X lassen sich als LK der Basisvektoren von Y (c_k) darstellen. $Fb_l = \sum_{k=1}^{m} a_{kl} c_k$. Die $m \times n$-Matrix $A = (a_{kl})$ heisst Abbildungsmatrix von F bzgl. den Basen in X und Y. Die Abbildungsmatrix enthält in der l-ten Kolonne die Koordinaten (bzgl. der Basis in Y) des Bildes des l-ten Basisvektors. **Vorgehen Abbildungsmatrix:** Gegeben sind zwei Vektorräume V und W mit Basis $V = A$ und Basis $W = B$ sowie eine lin. Abbildung $F: V \to W$. 1) Schreibe $F(a_i), i \in \{1, \dots, n\}$ in Koordinaten der Basis B. 2) Erstelle $M_B^A(F) = (F(a_1), \dots, F(a_n))$ **Isomorphismus:** Bijektive Abbildung von X auf Y. Ist $F: X \to Y$ ein Isomorphismus, so ist die inverse Abbildung $F^{-1}: Y \to X$ linear und auch ein Isomorphismus. Es gibt zu jeder Basis einen Isomorphismus, der x seinen Koordinaten bzgl. der Basis B zuordnet. Seien $M(F)$ und $M(G)$ die Matrizen von $F: V \to W$ isomorph und $G: W \to V$. Dann gilt: 1) $\dim(V) = \dim(W)$ 2.) $M(F) \cdot M(G) = M(G) \cdot M(F) = I_{\dim(V)} \Leftrightarrow M(F) = (M(G))^{-1}$
Automorphismus: Isomorphismus mit $X = Y$. **Komposition:** Sind X, Y, Z Vektorräume und $F: X \to Y$, $G: Y \to Z$ lineare Abbildungen, so ist auch $G \circ F: X \to Z$ linear. Wenn A und B die Abbildungsmatrizen bzgl. festen Basen sind, so hat $G \circ F$ die Matrix BA. **Kern:** $\ker F$ ist das Urbild von $0 \in Y$. $\ker F := \{x \in X; Fx = 0\} \subseteq X$. $\ker F$ ist ein Unterraum von X und $\operatorname{im} F$ ist ein Unterraum von Y. Für lineare Abbildungen gilt immer $F(0) = 0$. **Unterräume:** Wenn U ein UR von X ist, so ist dessen Bild ein UR von Y. Ist W ein UR von $\operatorname{im} F$, so ist dessen Urbild ein UR von X. **Injektivität/Kern:** F ist genau dann injektiv, wenn $\ker F = \{0\}$ ist. **Dimensionsformel:** $\dim X - \dim \ker F = \dim \operatorname{Im} F$.
Da $\operatorname{Rang} F = \dim \operatorname{Im} F$ gilt: $\dim X - \dim \ker F = \operatorname{Rang} F$ **Äquivalenzen injektiv/surjektiv:**
1) $F: X \to Y$ injektiv $\Leftrightarrow \operatorname{Rang} F = \dim X$ 1a) $F: X \to Y$ surjektiv $\Leftrightarrow \operatorname{Rang} F = \dim \operatorname{Im} X = \dim Y$
2) $F: X \to Y$ bijektiv, d.h. Isomorphismus $\Leftrightarrow \operatorname{Rang} F = \dim X = \dim Y$
3) $F: X \to X$ bijektiv, d.h. Automorphismus $\Leftrightarrow \operatorname{Rang} F = \dim X \Leftrightarrow \ker F = \{0\}$
Isomorphe Vektorräume: Zwei VR sind isomorph, wenn es einen Isomorphismus zwischen ihnen gibt (bei endlichen VR genau dann, wenn sie die gleiche Dimension haben). **Rangregeln:** Sind $F: X \to Y$, $G: Y \to Z$ lineare Abbildungen so gilt:
i) $\operatorname{Rang} FG \leq \min\{\operatorname{Rang} F, \operatorname{Rang} G\}$ ii) G injektiv $\to \operatorname{Rang} GF = \operatorname{Rang} F$ iii) F surjektiv $\to \operatorname{Rang} GF = \operatorname{Rang} G$ **Kolonnenraum:** $A = (a_1\ a_2\ \dots\ a_n)$ Der von den Kolonnen von A aufgespannte Unterraum $\mathcal{R}(A) = \operatorname{span}\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ heisst Kolonnenraum oder Wertebereich von A. Der Lösungsraum $\mathcal{L}_0$ des homogenen Systems $Ax = 0$ heisst **Nullraum** $\mathcal{N}(A)$. Das Bild von A ist gleich dem Kolonnenraum von A, der Kern von A ist gleich dem Nullraum von A:
$\operatorname{im} A = \mathcal{R}(A)$, $\ker A = \mathcal{N}(A)$. $Ax = b$ ist genau dann lösbar, wenn b im Kolonnenraum von A liegt. Eine Lösung ist dann eindeutig, wenn $\mathcal{N}(A) = \{0\}$ ist. Es gilt:
$\dim \mathcal{L}_0 = \dim \mathcal{N}(A) = \dim \ker A = n - r$. Für den Kolonnenraum einer $m \times n$-Matrix gilt: $\operatorname{im} A \equiv \mathcal{R}(A) \equiv \mathcal{R}(\tilde{A}) \equiv \operatorname{span}\{a_{n_1}, \dots, a_{n_r}\}$ wobei $a_{n_1}, \dots, a_{n_r}$ die Pivot-Kolonnen von A sind und $\tilde{A}$ die daraus gebildete Matrix bezeichnet. **Rang einer $m \times n$-Matrix (zusammenfassend):** Der Rang einer $m \times n$-Matrix ist gleich: 1) Die Anzahl der Pivotelemente in Zeilenstufenform 2) Dem Rang der linearen Abbildung $A: \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^m$, definiert als $\dim \operatorname{Im} A$. 3) Der Dimension des Kolonnenraums, definiert als Anzahl linear unabhängiger Kolonnen ($\in \mathbb{E}^m$) 4) Der Dimension des Zeilenraums, definiert als Anzahl linear unabhängiger Zeilen ($\in \mathbb{E}^n$). Es folgt: $\operatorname{Rang} A^T = \operatorname{Rang} A^H = \operatorname{Rang} A$
Es seien $A \in \mathbb{E}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{E}^{p \times n}$. Dann gilt: 1) $\operatorname{Rang} BA \leq \min\{\operatorname{Rang} B, \operatorname{Rang} A\}$
2) $\operatorname{Rang} B = m\ (\leq p) \Rightarrow \operatorname{Rang} BA = \operatorname{Rang} A$ 3) $\operatorname{Rang} A = m\ (\leq p) \Rightarrow \operatorname{Rang} BA = \operatorname{Rang} B$.
Äquivalente Aussagen über reguläre Matrizen: Für $A \in \mathbb{E}^{n \times n}$ sind folgende Aussagen äquivalent: 1) A ist invertierbar 2) A ist regulär 3) $\operatorname{Rang} A = n$
4) Die n Kolonnenvektoren von A sind lin. unabhängig 5) Die n Zeilenvektoren von A sind lin. unabhängig. 6) $\operatorname{im} A \equiv \mathcal{R}(A) = \mathbb{E}^n$ 7) $\ker(A) \equiv \mathcal{N}(A) = \{0\}$
8) Die lineare Abbildung $A: \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^n$ ist ein Automorphismus. 9) A ist die Transformationsmatrix eine Koordinatentransformation in $\mathbb{E}^n$. **Affiner Teilraum:** $u_0 + U := \{u_0 + u; u \in U\}$ ist ein affiner Teilraum. Wenn $u_0 \notin U$, ist ein affiner Teilraum kein Unterraum. **Affine Abbildung:** Ist $F: X \to Y$ eine lineare Abbildung und $y_0 \in Y$, so ist $H: X \to y_0 + Y$ $\quad x \to y_0 + Fx$ eine affine Abbildung. Wenn $y_0 \neq 0$, ist eine affine Abbildung nicht linear. **Lösungsmenge $\mathcal{L}_b$:** x_0 sei irgendeine Lösung von $Ax = b$ und $\mathcal{L}_0$ der Lösungsraum von $Ax = 0$. Die Lösungsmenge $\mathcal{L}_b$ ist gleich dem affinen Teilraum $\mathcal{L}_b = x_0 + \mathcal{L}_0$. x_0 kann folgendermassen gefunden werden:
Rückwärtseinsetzen in die ZS-Form (alle freien Variablen = 0 setzen)

Diagramm Koordinatentransformation / Lineare Abbildungen:

$$\begin{tikzcd}
x \in X \arrow[rrr, "F", "\text{Lin. Abbildung}"'] \arrow[d, shift right, "K_x"'] & & & y \in Y \arrow[d, shift right, "K_Y"'] \\
\xi \in \mathbb{E}^n \arrow[u, shift right, "K_x^{-1}"'] \arrow[rrr, "A", "\text{Abb. Matrix}"'] \arrow[d, shift right, "T^{-1}"'] & & & \eta \in \mathbb{E}^n \arrow[u, shift right, "K_Y^{-1}"'] \arrow[d, shift right, "S^{-1}"'] \\
\xi \in \mathbb{E}^n \arrow[u, shift right, "T"'] \arrow[rrr, "B", "\text{Abb. Matrix}"'] & & & \eta' \in \mathbb{E}^n \arrow[u, shift right, "S"']
\end{tikzcd}$$

(Koordinatenabbildung bzgl. alten Basen)

(Koordinaten bzgl. alten Basen)

(Koordinatentransformationen)

(Koordinaten bzgl. neuen Basen)

$B = S^{-1}AT$ / $A = SBT^{-1}$ / $F = K_Y^{-1} A K_x$ / $A = K_Y F K_x^{-1}$

Ähnliche Matrizen: Die $n\times n$-Matrizen A und B heissen ähnlich, wenn es eine reguläre Matrix T gibt, so dass $B = T^{-1}AT$ / $A = TBT^{-1}$. $A \to B = T^{-1}AT$ heisst **Ähnlichkeitstransformation.** **Erstellung Transformationsmatrix:** Gegeben $A = (a_1, \dots, a_n)$ und $B = (b_1, \dots, b_n)$ sind Basen von V: $(B \mid A) \Leftrightarrow (b_1 \dots b_n \mid a_1 \dots a_n) \xrightarrow[\text{Zeilenvertauschung}]{\text{Gaussen ohne}} (I \mid T_B^A)$
$(A \mid B) \Leftrightarrow (a_1 \dots a_n \mid b_1 \dots b_n) \xrightarrow[\text{Zeilenvertauschung}]{\text{Gaussen ohne}} (I \mid T_A^B)$ T_B^A konvertiert dabei einen Vektor von der Basis A in die Basis B!

Vektorräume mit Skalarprodukt

Norm: Eine Norm in einem Vektorraum ist eine Funktion $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$, $x \to \|x\|$ mit den folgenden Eigenschaften: N1) Sie ist positiv definit. $\|x\| \geq 0$ für alle $x \in V$, $\|x\| = 0$ für $x = 0$ N2) Sie ist dem Betrag nach homogen: $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$ für alle $x \in V$, $\alpha \in \mathbb{R}$ N3) Die Dreiecksungleichung gilt: $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$
Ein Vektorraum mit einer Norm heisst **normierter Vektorraum.** In einem Vektorraum mit Skalarprodukt ist die Norm $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$. **Skalarprodukt:** Ein Skalarprodukt in einem reellen / komplexen Vektorraum ist eine Funktion von zwei Variablen $\langle \cdot , \cdot \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{E}$, $x, y \to \langle x, y\rangle$ mit den folgenden Eigenschaften:
S1) Es ist linear im zweiten Faktor: $\langle x, y+z\rangle = \langle x,y\rangle + \langle x, z\rangle$ und $\langle x, \alpha y\rangle = \alpha \langle x, y\rangle$
S2) Falls $\mathbb{E} = \mathbb{R}$, ist es symmetrisch: $\langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle$. Falls $\mathbb{E} = \mathbb{C}$, ist es hermitesch: $\langle x,y\rangle = \overline{\langle y,x\rangle}$
S3) Es ist positiv definit: $\langle x,x\rangle \geq 0$, $\langle x,x\rangle = 0 \Rightarrow x = 0$. Es folgt:
1) $\langle x, \alpha y + \beta z\rangle = \alpha\langle x,y\rangle + \beta\langle x,z\rangle$ 2) $\langle \alpha w + \beta x, y\rangle = \overline{\alpha}\langle w,y\rangle + \overline{\beta}\langle x,y\rangle$
Cauchy-Schwarz: Gilt für alle Skalarprodukte / Normen. **Satz von Pythagoras:** In einem Vektorraum mit Skalarprodukt gilt: $x \perp y \Rightarrow \|x \pm y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$
Orthogonal: Eine Basis heisst orthogonal, wenn die Basisvektoren paarweise orthogonal sind (Eine Menge M von paarweise orthogonalen Vektoren ist linear unabhängig, wenn $o \notin M$). Sie heisst **orthonormal / orthonormiert**, wenn zusätzlich die Basisvektoren die Länge 1 haben, d.h. wenn $\forall k \ \langle b_k, b_k\rangle = 1$ ist. In einem n-dimensionalen Vektorraum mit einer Orthonormalbasis und einem Skalarprodukt gilt:
$x = \sum_{k=1}^{n} \langle b_k, x\rangle b_k$. Die k-te Koordinate $\xi_k = \langle b_k, x\rangle$ entspricht dem Skalarprodukt des k-ten Basisvektors und x. **Parsevalsche Formel:** Mit $\xi_k := \langle b_k, x\rangle$ und $\eta_k = \langle b_k, y\rangle$ gilt: $\langle x,y\rangle = \sum_{k=1}^{n} \overline{\xi_k}\eta_k = \xi^H \eta = \langle \xi, \eta\rangle$. Das Skalarprodukt zweier Vektoren in V ist also gleich dem Skalarprodukt ihrer Koordinatenvektoren in $\mathbb{E}^n$. Somit gilt auch:
1) $\|x\| = \|\xi\|$ 2) $\sphericalangle(x,y) = \sphericalangle(\xi,\eta)$ 3) $x \perp y \Leftrightarrow \xi \perp \eta$ **Gram-Schmidt Verfahren:**
Es sei $\{a_1, a_2, \dots\}$ eine endliche oder abzählbare, linear unabhängige Menge von Vektoren. Wir berechnen eine gleich grosse Menge $\{b_1, b_2, \dots\}$ gemäss:
$b_1 :\equiv \frac{a_1}{\|a_1\|}$, $\tilde{b}_k :\equiv a_k - \sum_{j=1}^{k-1} \langle b_j, a_k\rangle b_j$, $b_k :\equiv \frac{\tilde{b}_k}{\|\tilde{b}_k\|}$ $(k = 2, 3, \dots)$
Die so konstruierten Vektoren $b_1, b_2, \dots$ sind normiert und paarweise orthogonal. Nach k Schritten gilt: $\operatorname{span}\{a_1, a_2, \dots, a_k\} = \operatorname{span}\{b_1, b_2, \dots, b_k\}$ Ist $\{a_1, a_2, \dots\}$ eine Basis von V, so ist $\{b_1, b_2, \dots\}$ eine Orthonormalbasis von V. Es folgt, dass man in einem Vektorraum mit endlicher Dimension und Skalarprodukt jede Menge orthonormaler Vektoren zu einer orthogonalen Basis ergänzen kann. **Orthogonales Komplement:** In einem Vektorraum V mit Skalarprodukt heisst der zu einem Unterraum U orthogonal komplementäre Unterraum das orthogonale Komplement ($U^\perp$) von U. Es ist folgendermassen charakterisiert: $V = U \oplus U^\perp$, $U \perp U^\perp$ / $U^\perp :\equiv \{x \in V \mid x \perp U\}$
Für eine $m\times n$-Matrix gilt: $\mathcal{N}(A) = (\mathcal{R}(A^H))^\perp \subset \mathbb{E}^n$, $\mathcal{N}(A^H) = (\mathcal{R}(A))^\perp \subset \mathbb{E}^m$. Sowie: $\mathcal{N}(A) \oplus \mathcal{R}(A^H) = \mathbb{E}^n$, $\mathcal{N}(A^H) \oplus \mathcal{R}(A) = \mathbb{E}^m$ und $\dim \mathcal{R}(A) = r$ / $\dim \mathcal{R}(A) = r$
$\dim \mathcal{N}(A) = n - r$ / $\dim \mathcal{N}(A^H) = m - r$ **Orthogonale / Unitäre Transformationen:** Die Transformationsmatrix einer Basistransformation zwischen orthonormierten Basen ist unitär (falls $\mathbb{E} = \mathbb{C}$) bzw. orthogonal (falls $\mathbb{E} = \mathbb{R}$). Somit gilt: $\xi = T\xi'$ / $\xi' = T^H \xi$
Bei orthogonalen / unitären Transformationen bleiben die Winkel / Längen erhalten.
Orthogonale / Unitäre Abbildungen: Es seien X und Y zwei unitäre / orthogonale Vektorräume. Eine Abbildung $F : X \to Y$ heisst unitär / orthogonal, wenn gilt: $\langle Fx, Fy\rangle_Y = \langle x,y\rangle_X$
Für diese Abbildungen gilt: 1) $\|Fx\|_Y = \|x\|_X$ (längentreu) 2) $x \perp y \Rightarrow Fx \perp Fy$ (winkeltreu) 3) $\ker F = \{o\}$ d.h. F ist injektiv 4) F ist ein Isomorphismus
5) Ist $\{b_1, \dots, b_n\}$ eine Orthonormalbasis von X, so ist $\{Fb_1, \dots, Fb_n\}$ eine von Y.
6) F^{-1} ist unitär / orthogonal 7) Die Abbildungsmatrix A bzgl. den orthonormierten Basen in X und Y ist unitär / orthogonal. 8) Sind $F : X \to Y$ und $G : Y \to Z$ zwei unitäre / orthogonale Isomorphismen, so auch $G \circ F : X \to Z$. 9) Ist V ein n-dimensionaler unitärer / orthogonaler Vektorraum mit Orthonormalbasis, so ist die Koordinatenabbildung $K_V : V \to \mathbb{C}^n$ ein unitärer / orthogonaler Isomorphismus. 10) Die Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ist genau dann unitär / orthogonal, wenn dies die Abbildung $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ ist. **Beschränkte Abbildung:**
Eine lineare Abbildung zwischen zwei normierten Vektorräumen heisst beschränkt, wenn es ein $\gamma_F \geq 0$ gibt mit $\|F(x)\|_Y \leq \gamma \|x\|_X$. Die Gesamtheit solcher linearer Abbildungen (Operatoren) zwischen X und Y heisst $\mathcal{L}(X,Y)$ (selber ein Vektorraum).
Induzierte Operatornorm: Die auf $\mathcal{L}(X,Y)$ durch die Normen $\|\cdot\|_X$ und $\|\cdot\|_Y$ induzierte Operatornorm ist wie folgt definiert:

$\|\cdot\|: \mathcal{L}(X,Y) \to \mathbb{R}$, $F \to \|F\| :\equiv \sup_{x\neq 0} \frac{\|Fx\|_Y}{\|x\|_X}$. Ist $X = Y = \mathbb{E}^n$, so dass F durch eine quadratische Matrix gegeben ist, heisst $\|A\|$ die induzierte Matrixnorm. Es genügt, Vektoren mit Länge 1 zu betrachten, somit ist $\|A\| :\equiv \sup_{\|x\|_X = 1} \|Ax\|$

Eigenschaften der induzierten Operatornorm: Op1) Sie ist positiv definit: $\|F\| \geq 0$, $\|F\| = 0 \Rightarrow F = O$ Op2) Sie ist dem Betrag nach homogen: $\|\alpha F\| = |\alpha| \, \|F\|$ Op3) Die Dreiecksungleichung gilt: $\|F + G\| \leq \|F\| + \|G\|$ Op4) Für zusammengesetzte Abbildungen gilt: $\|G \circ F\| \leq \|G\| \, \|F\|$ Op5) Sie ist kompatibel mit den Vektornormen in X, Y: $\|Fx\|_Y \leq \|F\| \, \|x\|_X$ Supremum: Die kleinste obere Schranke ($b \in \mathbb{R}, \forall a: a \leq b$) einer Menge A. Ist $\sup(A) \in A$, entspricht es dem Maximum. Matrixnorm: Eine Funktion $\|\cdot\|: \mathbb{E}^{n \times n} \to \mathbb{R}$, $A \to \|A\|$ mit den Eigenschaften Op1-Op4 und: $\|Ax\| \leq \|A\| \, \|x\|$.

Beispiele: Spektralnorm / 2-Norm: Induzierte Matrixnorm der 2-Norm: $\|A\|_2 = \sup_{\|x\|_2 = 1} \|Ax\|_2$

Maximumsnorm: $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ $\|A\|_\infty = \max\{\|a_1\|_1, \ldots, \|a_n\|_1\} = \max\{|a_{11}| + \ldots + |a_{n1}|, \ldots, |a_{n1}| + \ldots + |a_{nn}|\}$

Frobeniusnorm: $A_F = \sqrt{\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n |a_{kl}|^2}$ Konditionszahl: $\mathcal{K}(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$ bzgl. einer gewissen Norm. $\mathcal{K}(A)$ gross $\to$ kleine Fehler in b bewirken grosse Fehler in x.

Methode der Kleinsten Quadrate

Gegeben ist das überbestimmte System $Ax = y$. Der Residuenvektor $r = y - Ax$ soll die minimale 2-Norm haben. Dies wird erreicht, indem das System $A^H A x = A^H y$ gelöst wird. $(A^H A)^{-1} A^H$ heisst Pseudoinverse von A. $x = (A^H A)^{-1} A^H y$

Beispiel: Bestmögliche Gerade durch $P_1 = (0,6)$, $P_2 = (1,0)$, $P_3 = (2,0)$, $P_4 = (3,-4)$. LGS:

$$\begin{aligned} 6 &= a \cdot 0 + b \\ 0 &= a \cdot 1 + b \\ 0 &= a \cdot 2 + b \\ -4 &= a \cdot 3 + b \end{aligned} \iff \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}}_{=x} = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$A^T A = \begin{bmatrix} 14 & 6 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} \quad (A^T A)^{-1} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 7 \end{bmatrix}$$

$$A^T y = \begin{bmatrix} -12 \\ 2 \end{bmatrix} \quad x = (A^T A)^{-1} A^T y = \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \end{bmatrix} \quad y = -3x + 5$$

QR-Zerlegung: Gegeben: A, gesucht Q und R so dass $A = QR$.

Q: Wende Gram-Schmidt auf $\{a_1, \ldots, a_n\}$ an um $Q = (q_1 \cdots q_n)$ zu erhalten.

R:

$$r_{ij} = \begin{cases} 0, & i > j \\ \langle a_i, a_j \rangle, & i < j \\ \|\tilde{a}_j\| = \sqrt{\langle \tilde{a}_j, \tilde{a}_j \rangle}, & i = j \end{cases}$$

Lösen des Systems mittels $Rx = Q^H y$.

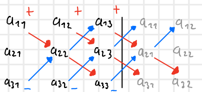
Determinanten

Permutationen: Jede Permutation kann mittels ν Transpositionen dargestellt werden. Die Darstellung ist nicht eindeutig, aber die Anzahl Transpositionen ist gerade oder ungerade. Signum: Das Signum einer Permutation $\operatorname{sign} p$ ist $+1$, falls ν gerade ist und -1 falls ν ungerade ist. Determinante: $\det A = \sum \operatorname{sign} p \cdot a_{1,p(1)} \cdots a_{n,p(n)}$ über die $n!$ Permutationen $p: (1, 2, \ldots, n) \to (p(1), p(2), \ldots, p(n))$ Regeln:

1x1-Matrix: $\det(a_{11}) = a_{11}$ 2x2-Matrix: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12}$

3x3-Matrix:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} a_{33} + a_{21} a_{32} a_{13} + a_{31} a_{12} a_{23} - a_{31} a_{22} a_{13} - a_{21} a_{12} a_{33} - a_{11} a_{32} a_{23}$$



Für eine Dreiecksmatrix reduziert sich die Determinante auf das Produkt der Diagonaleinträge. Eigenschaften der Determinante: 1) det ist eine lineare Funktion jeder einzelnen Zeilen/Spalten der Matrix, d.h. für alle γ, γ' gilt:

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ \gamma a_{l1} + \gamma' a'_{l1} & \gamma a_{l2} + \gamma' a'_{l2} & & \gamma a_{ln} + \gamma' a'_{ln} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{bmatrix} = \gamma \det \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{l1} & \cdots & a_{ln} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} + \gamma' \det \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a'_{l1} & \cdots & a'_{ln} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

2) Werden in A zwei Zeilen/Spalten vertauscht, so wechselt $\det A$ das Vorzeichen. 3) $\det(I) = 1$ 4) Hat A eine Zeile/Spalte aus lauter Nullen, so ist $\det A = 0$ 5) $\det(\gamma A) = \gamma^n \det A$ 6) Hat A zwei gleiche Zeilen/Spalten, so ist $\det A = 0$. 7) Addiert man zu einer Zeile/Spalte das Vielfache einer anderen Zeile/Spalte, so ändert sich $\det A$ nicht. 8) Ist A eine Diagonal-/Dreiecksmatrix, so ist die Determinante gleich dem Produkt der Diagonaleinträgen. 9) $\det(AB) = \det A \cdot \det B$ 10) $\det A^T = \det A$, $\det A^H = \overline{\det A}$ 11) Ist A regulär, so gilt: $\det A^{-1} = (\det A)^{-1} = \frac{1}{\det A}$ 12) $\det(A) = \prod_{i=1}^n \lambda_i$, wobei λ_i ein Eigenwert von A ist 13) Für hermitesche Matrizen ($A^H = A$) gilt: $\det A \in \mathbb{R}$ 14) Orthogonale/Unitäre Matrizen haben: $\det A = \pm 1$ 15) Ist $A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{pmatrix}$ so ist $\det A = \det A_1 \cdot \det A_3$ 16) Die Eigenschaften 1-3 sind charakteristisch für die Determinante, es gibt kein anderes Funktional auf $\mathbb{E}^{n \times n}$ mit diesen Eigenschaften. Regulär / Determinante: Für jede $n \times n$-Matrix gilt:

$\det A \neq 0 \iff \operatorname{Rang} A = n \iff A$ ist regulär ($\det A = 0 \iff A$ ist singulär).

Gauss: Wendet man auf A den Gauss-Algorithmus an und ist $\operatorname{Rang} A = n$, so entspricht $\det A$ dem Produkt der Pivotelemente mal $(-1)^\nu$, wobei ν für die Anzahl der Zeilenvertauschungen steht. $\det A = (-1)^\nu \prod_{k=1}^n r_{kk}$ Laplace Entwicklung: Nach der i-ten Zeile: $\det A = \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot (-1)^{i+j} \cdot D_{ij}$ (wobei D_{ij} für die Unterdeterminante, die durch Streichen der i-ten Zeile und j-ten Spalte entsteht, steht). Nach der j-ten Spalte: $\det A = \sum_{i=1}^n a_{ij} \cdot (-1)^{i+j} \cdot D_{ij}$. Dies ist insbesondere nützlich, wenn eine Zeile/Spalte viele Nullen enthält.

Eigenwerte und Eigenvektoren

Die Zahl $\lambda \in \mathbb{E}$ heisst Eigenwert der linearen Abbildung, wenn es einen Eigenvektor v gibt, so dass $Fv = \lambda v$. Ist λ ein Eigenwert, so ist der dazugehörige Eigenraum E_λ gleich der um null erweiterten Menge der Eigenvektoren zu λ: $E_\lambda :\equiv \{v \in V; Fv = \lambda v\}$. Es sei $F: V \to V$ eine lineare Abbildung, $\kappa_V: V \to \mathbb{E}^n$, $x \to \xi$ eine Koordinatenabbildung von V und $A = \kappa_V F \kappa_V^{-1}$ die entsprechende Abbildungsmatrix von F. Dann gilt: λ EW von $F \iff \lambda$ EW von A. x EV von $F \iff \xi$ EV von A. Spektrum von A: $\sigma(A) := \{\lambda \mid \lambda$ Eigenwerte von $A\}$ λ ist genau dann ein Eigenwert von $F: V \to V$, wenn der Kern von $F - \lambda I$ nicht nur aus dem Nullvektor besteht. Der Eigenraum E_λ zu einem Eigenwert λ von F ist ein vom Nullraum verschiedener Unterraum von V, nämlich: $E_\lambda = \ker(F - \lambda I)$ Geometrische Vielfachheit eines Eigenwertes λ ist gleich der Dimension E_λ. Eigenwerte von Matrizen:

λ ist genau dann ein Eigenwert von A, wenn $A-\lambda I$ singulär ist. Der Eigenraum E_λ entspricht: $E_\lambda = \ker(A-\lambda I)$. E_λ besteht also aus allen Lösungen des LGS $(A-\lambda I)v = 0$. Die geometrische Vielfachheit von λ beträgt: $\dim E_\lambda = \ker(A-\lambda I) = n - \text{Rang}(A-\lambda I)$. $A-\lambda I$ ist genau dann singulär, wenn $\det(A-\lambda I) = 0$ ist. **Charakteristisches Polynom:** Das Polynom $\chi_A(\lambda) := \det(A-\lambda I)$ heisst charakteristisches Polynom und die Gleichung $\chi_A(\lambda) = 0$ ist die charakteristische Gleichung. λ ist genau dann ein EW, wenn es eine Lösung der charakteristischen Gleichung ist. **Spur:** $\text{Spur}\, A := a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$ **Form charakteristisches Polynom:** Es hat allgemein die Form: $\chi_A(\lambda) = (-\lambda)^n + \text{Spur}\, A\,(-\lambda)^{n-1} + \dots + \det A$ **Char. Polynom für spezielle Matrizen:** $2\times 2: \lambda^2 - \text{spur}\, A \cdot \lambda + \det A$ $3\times 3: \lambda^3 - \text{spur}\, A \cdot \lambda^2 + (D_{11} + D_{22} + D_{33}) \cdot \lambda - \det A$ **Algebraische Vielfachheit:** Die Vielfachheit von λ als Nullstelle des charakteristischen Polynoms. **Singuläre Matrizen:** Eine Matrix ist genau dann singulär, wenn sie 0 als Eigenwert hat: A singulär $\Leftrightarrow 0 \in \sigma(A)$ **Vorgehen Berechnung von Eigenwerten/Eigenvektoren:** 1) Berechne $\chi_A(\lambda) = \det(A-\lambda I)$ 2) Setze $\chi_A(\lambda) = 0$ und erhalte n (nicht unbedingt verschiedene) Nullstellen. $\sigma(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ 3) Bestimme für jeden EW $E_{\lambda_k}(A) = \ker(A - \lambda_k I)$ 4) Die Menge aller EV ist die Vereinigung der Basen von E_{λ_k} ohne Null-Vektor. Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

1) $\chi(A) = \det(A-\lambda I) = -(\lambda-5)^2(\lambda+1)$ 2) $\chi_A(\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 5,\ \lambda_3 = -1$
$\sigma(A) = \{5, -1\}$ 3) $E_5(A) = \ker(A - 5\cdot I) = \ker\begin{pmatrix} -4 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$

$$E_{-1}(A) = \ker(A - (-1)\cdot I) = \ker\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

Menge der EV: $\text{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$

Ähnliche Matrizen: Ähnliche Matrizen haben dasselbe char. Polynom, die gleiche Determinante, die gleiche Spur und die gleichen Eigenwerte. Die geometrischen und algebraischen Vielfachheiten der Eigenwerte sind gleich. **Diagonale Matrix:** Eine zu $F: V \to V$ gehörende Matrix ist genau dann diagonal, wenn die gewählte Basis von V aus lauter Eigenvektoren von F besteht. **Eigenbasis:** Eine Basis aus Eigenvektoren von F (bzw. A) heisst Eigenbasis. Gibt es eine Eigenbasis, so gilt die einfache Abbildungsformel: $x = \sum_{k=1}^n \xi_k v_k \longmapsto Fx = \sum_{k=1}^n \lambda_k \xi_k v_k$ **Spektralzerlegung:** Zu einer Matrix $A \in \mathbb{E}^{n\times n}$ gibt es genau dann eine ähnliche Diagonalmatrix Λ, wenn es eine Eigenbasis von A gibt. Für die reguläre Matrix $V := (v_1 \dots v_n)$ mit dieser Eigenbasis als Kolonnen gilt dann: $AV = V\Lambda$, d.h. $A = V\Lambda V^{-1}$. Wenn es umgekehrt eine reguläre Matrix $V \in \mathbb{E}^{n\times n}$ und eine Diagonalmatrix $\Lambda \in \mathbb{E}^{n\times n}$ mit obigen Gleichheiten gibt, so sind die Diagonalelemente von Λ Eigenwerte von A und die Kolonnen von V entsprechende Eigenvektoren, die eine Eigenbasis bilden. $A = V\Lambda V^{-1}$ heisst die Spektralzerlegung/Eigenwertzerlegung von A. Eine Matrix, zu der eine Spektralzerlegung existiert, heisst diagonalisierbar. Es gilt, dass Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten linear unabhängig sind. Für jeden Eigenwert gilt, dass die geometrische Vielfachheit kleiner gleich der algebraischen Vielfachheit ist. **Diagonalisierbarkeit:** Eine Matrix ist genau dann diagonalisierbar, wenn für jeden Eigenwert die geometrische gleich der algebraischen Vielfachheit ist. **Hermitesche/Symmetrische Matrizen:** Ist $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ hermitesch/$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch, gilt: 1) Alle Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sind reell (auch für hermitesche) 2) Die Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind paarweise orthogonal in $\mathbb{C}^n/\mathbb{R}^n$. 3) Es gibt eine orthonormale Basis des $\mathbb{C}^n/\mathbb{R}^n$ aus Eigenvektoren $u_1, \dots, u_n$ von A 4) Für die unitäre/orthogonale Matrix $U = (u_1 \dots u_n)$ gilt: $U^H A U = \Lambda := \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ **Vorgehen Spektralzerlegung:** 1) Finde die Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ und finde die dazugehörigen Eigenvektoren $v_1, \dots, v_n$ 2) Prüfe alg. = geom. Vielfachheit 3) Definiere die Diagonalmatrix Λ wie folgt:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

mit $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$

4) Schreibe die Eigenvektoren $V = (v_1 | \cdots | v_n)$ in eine Matrix. 5) Berechne Inverse V^{-1} und teste $A = V\Lambda V^{-1}$

Spektralnorm: Die Spektralnorm einer Matrix ist gleich der Wurzel aus dem grössten Eigenwert von $A^H A$: $\|A\|_2 = \max\{\sqrt{\omega};\ \omega \text{ Eigenwert von } A^H A\}$. Im Falle von unitären/orthogonalen Matrizen ist also $\|A\|_2 = 1$. Die Spektralnorm einer hermiteschen/symmetrischen Matrix ist gleich dem Betrag des grössten Eigenwerts: $\|A\|_2 = \max\{|\omega|;\ \omega \text{ Eigenwert von } A\}$ **der Inversen:** Im normalen Fall:

$$\|A^{-1}\|_2 = \max\left\{\frac{1}{\sqrt{\omega}};\ \omega \text{ Eigenwert von } A^H A\right\} = \frac{1}{\min\{\sqrt{\omega};\ \text{EW von } A^H A\}}$$

Wenn A hermitesch/symmetrisch ist: $\|A^{-1}\|_2 = \max\left\{\frac{1}{|\omega|};\ \omega \text{ Eigenwert von } A\right\} = \frac{1}{\min\{|\omega|;\ \omega \text{ Eigenwert von } A\}}$

2-Norm-Konditionszahl:

$$\kappa_2(A) = \frac{\max\{\sqrt{\omega};\ \omega \text{ Eigenwert von } A^H A\}}{\min\{\sqrt{\omega};\ \omega \text{ Eigenwert von } A^H A\}}$$

Für Hermitesche/symmetrische Matrizen:

$$\kappa_2(A) = \frac{\max\{|\omega|;\ \omega \text{ Eigenwert von } A\}}{\min\{|\omega|;\ \omega \text{ Eigenwert von } A\}}$$

Spektralzerlegung für A^n: $A^n = V\Lambda^n V^{-1}$ **Spektralzerlegung für A^{-1}:** $A^{-1} = V\Lambda^{-1}V^{-1}$
Spektralsatz: Für eine Matrix D existiert genau dann eine Orthonormalbasis von Eigenvektoren, wenn D normal ist ($DD^T = D^T D$).

Anhang

Mitternachtsformel: $ax_2 + bx + c = 0$ $\quad x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Trigonometrische Werte:

Bogenmass	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
Winkel	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$120°$	$135°$	$150°$	$180°$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\tan x$	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	$-$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$	$-$

Cramersche Regel: Gegeben ist ein LGS $Ax = b$. Die Lösungen $x_1, x_2, \dots, x_n$ können folgendermassen ermittelt werden: $x_i = \dfrac{\det(A_i)}{\det(A)}$ Wobei A_i die Matrix A ist, in der die i-te Spalte durch b ersetzt wurde.

Beispiel: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ $b = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}$ $A_1 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}$ $A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$ $\det(A) = -3$, $\det(A_1) = 3$, $\det(A_2) = -6$. $x_1 = -1$, $x_2 = 2$

Inverse von 2x2-Matrizen: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $\quad A^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

Beweis Cauchy-Schwarz Ungleichung: $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$. Für beliebiges $\alpha \in \mathbb{E}$ gilt:
$0 \leq \langle \alpha x + y, \alpha x + y \rangle = \alpha\bar{\alpha}\langle x, x \rangle + \bar{\alpha}\langle x, y \rangle + \alpha\overline{\langle x, y \rangle} + \langle y, y \rangle$. Für $x = 0$ gilt die Ungleichung trivialerweise (mit dem Gleichheitszeichen). Somit kann $x \neq 0$ angenommen werden und $\alpha = -\dfrac{\langle x, y \rangle}{\langle x, x \rangle}$ gewählt werden. Nach Multiplikation mit $\langle x, x \rangle$ folgt:
$0 \leq |\langle x, y \rangle|^2 - |\langle x, y \rangle|^2 - |\langle x, y \rangle|^2 + \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle$ und somit $|\langle x, y \rangle|^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle$, was gleich dem Quadrat der CSU ist.

Additionstheoreme trigonometrische Funktionen: $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta$
$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta$