

普通高等教育“十五”国家级规划教材

# 弹性力学简明教程

第三版

徐芝纶

高等教育出版社

## 内容简介

本书是教育部“十五”国家级规划教材。是在第二版的基础上,保持原有的体系和特点,根据教学改革的需要和国家的有关新标准,进行了修订。全书按照由浅入深的原则,安排了平面问题的理论及解答、空间问题的理论及解答和薄板弯曲理论。并着重介绍了弹性力学的近似解法,即差分法、变分法和有限单元法。

本书作为弹性力学的入门教材,注重基本理论(基本概念、基本方程和基本解法)的阐述及其应用,以使学生在掌握基本理论的基础上能阅读和应用弹性力学文献,并能初步应用弹性力学的近似解法解决工程实际问题。

本书可作为高等学校工科本科有关专业的弹性力学课程教材,也可供工程技术人员参考。

## 图书在版编目(CIP)数据

弹性力学简明教程/徐芝纶. —3版. 北京:高等教育出版社,2002.8(2009重印)  
ISBN 978-7-04-010719-7

I.弹… II.徐… III.弹性力学—高等学校—教材 IV.0343

中国版本图书馆CIP数据核字(2002)第030965号

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社 址	北京市西城区德外大街4号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100120	网 址	<a href="http://www.hep.edu.cn">http://www.hep.edu.cn</a>
总 机	010-58581000		<a href="http://www.hep.com.cn">http://www.hep.com.cn</a>
经 销	蓝色畅想图书发行有限公司	网上订购	<a href="http://www.landirao.com.cn">http://www.landirao.com.cn</a>
印 刷	北京嘉实印刷有限公司	畅想教育	<a href="http://www.widedu.com">http://www.widedu.com</a>
开 本	787×960 1/16	版 次	1980年1月第1版
印 张	14.75		2002年8月第3版
字 数	260 000	印 次	2009年8月第14次印刷
		定 价	17.40元

## 第三版前言

徐芝纶教授编著的《弹性力学简明教程》,具有内容精炼、深入浅出、易学易懂等特点,被许多工科院校广泛采用。第二版自1983年出版以来,已有相当长的时间了。为了适应科技的发展和贯彻新的国家标准和规范,及时反映教学实践中的经验,第三版在严格地保持原作的特点和风格下,做了少部分的修订。

本书的修订工作是在高等教育出版社的支持下进行的。河海大学弹性力学教研室曾广泛地征求国内许多院校的教授和专家的意见,并经过多次讨论研究,又在高等教育出版社组织召开的座谈会上进行讨论,最后才将意见归纳,并进行修订的。

修订的具体内容如下:(1)书中的量和单位的名称、符号及书写规则按1993年发布的GB 3100~3102—1993《量和单位》系列国家标准拟定,科技名词术语按全国自然科学名词审定委员会1993年公布的《力学名词》执行。(2)为了更便于初学者掌握弹性力学内容,对基本理论(基本概念、基本方程和基本解法)及其应用作了一些强调和说明,如关于边界条件、圣维南原理的应用、按位移求解、按应力求解、有限单元法的概念、差分法的概念、解题的思路和步骤等,都在叙述上补充了少量说明。修订者认为,这对初学者是有益的。此外,第三版中在一些重点内容和结论性的文字下面加排了波纹线。(3)为加强实践教学环节,习题量增加了近一倍,这样,任课教师根据教学要求,可有较大的选择余地。这些习题的计算工作量不大,但对巩固基本知识很有好处。(4)在有限单元法中,由于多数文献是从变分原理导出公式的,因此,书中补充了从最小势能原理导出三角形单元公式的内容。此外,本书主要是使学生建立有限单元法的基本概念,故不再补充其他更多的内容。关于有限单元法程序,由于各校的计算机及使用的语言多不相同,且大都已经有了自己的程序,故也不作提供。(5)为便于读者阅读弹性力学文献,在附录B中简单地介绍了直角坐标系中的下标记号法。

本书的修订,特别要感谢许多院校教授和专家的支持。张元直编审、姜弘道教授、卓家寿教授等都提出了许多重要意见,徐慰祖教授认真审阅了修订稿,特向他们致以深切的谢意。并希望教师和学生在今后的使用过程中,对修订稿提出宝贵意见,以使徐芝纶教授编著的教科书得到进一步的完善。

本书第三版由河海大学王润富执笔修订。

王润富

2001年8月

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。  
版权所有 侵权必究  
物料号 10719-00

## 第一版前言

本书是为高等院校水利、土建类专业编写的弹性力学教材。书中的内容系摘自编者的高等学校工科力学专业编写的《弹性力学》，以及以华东水利学院的名义编写的《弹性力学问题的有限单元法》，在内容的编排上根据水利、土建类专业需要作了一些变动。

本书全部内容所需的教学时数，可能略多于现行有关专业教学计划中所规定的时数，各专业可根据不同情况对其中部分内容适当取舍。各章之后的习题，数量较多，可按照学生课外学时数的多少，布置其中的一部分。

本书承主审人清华大学龙驭球同志和太原工学院、浙江大学、成都科学技术大学、武汉建筑材料工业学院、北京工业大学、南京工学院、北京建筑工程学院、武汉水利电力学院、华北水利水电学院、西南交通大学参加审稿的同志提出了宝贵的意见，特此表示衷心的感谢。

姜弘道和李昭银两位同志参加了本书的编写工作。

徐芝纶

1979年11月

## 第二版前言

本书的第二版,是参照1980年8月教育部审定的《高等工业学校弹性力学教学大纲(草案)》对第一版进行修订而成的。由于第一版的内容超出该大纲所规定的较多,因此,修订时主要是删繁就简,只是对个别章节中的讲解有所补充。

首先,该大纲完全没有涉及温度应力问题和有关任一点形变状态的问题,对薄壳问题则“建议根据专业的需要情况,另设选修课程”。在第二版中,当然就删去了这三方面的内容。其次,在该大纲的说明书中,变分法和薄板的弯曲问题并没有列入“本课程的基本要求”,因此,第二版中对这两部分内容作了较多的删减。

体系和章节次序的安排,都保持或改为和该大纲一致。

在第二版中,仍然有一些章节的内容是该大纲中没有明确包括、或者虽然明确包括但是加了星号的,如全部讲授,总共约需56至60学时。如专业教学计划中配给本课程的学时只有46至50,上述章节就不一定要讲授,其中包括§2-7, §4-7, §6-9, §8-2, §8-4至§8-8, §9-7至§9-9。

某些专业教学计划只给本课程以30至35学时。对这些专业的学生,可以完全不讲授空间问题和薄板的弯曲问题,还可以不讲变分法的内容。这样,仍然可以达到该大纲中对“本课程的基本要求”。

徐芝纶

1983年5月

## 第一版前言

本书是为高等学校水利、土建类专业编写的弹性力学教材。书中的内容系摘自编者的高等学校工科力学专业编写的《弹性力学》，以及以华东水利学院的名义编写的《弹性力学问题的有限单元法》，在内容的编排上根据水利、土建类专业的需要作了一些变动。

本书全部内容所需的学时数，可能略多于现行有关专业教学计划中所规定的学时数，各专业可根据不同情况对其中部分内容适当取舍。各章之后的习题，数量较多，可按照学生课外学时数的多少，布置其中的一部分。

本书承主审人清华大学龙驭球同志和太原工学院、浙江大学、成都科学技术大学、武汉建筑材料工业学院、北京工业大学、南京工学院、北京建筑工程学院、武汉水利电力学院、华北水利水电学院、西南交通大学参加审稿的同志提出了宝贵的意见，特此表示衷心的感谢。

姜弘道和李昭银两位同志参加了本书的编写工作。

徐芝纶

1979年11月

# 目 录

主要符号表 .....	(1)
第一章 绪论 .....	(1)
§ 1-1 弹性力学的内容 .....	(1)
§ 1-2 弹性力学中的几个基本概念 .....	(2)
§ 1-3 弹性力学中的基本假定 .....	(6)
习题 .....	(7)
第二章 平面问题的基本理论 .....	(9)
§ 2-1 平面应力问题与平面应变问题 .....	(9)
§ 2-2 平衡微分方程 .....	(10)
§ 2-3 平面问题中一点的应力状态 .....	(12)
§ 2-4 几何方程 刚体位移 .....	(15)
§ 2-5 物理方程 .....	(17)
§ 2-6 边界条件 .....	(19)
§ 2-7 圣维南原理及其应用 .....	(21)
§ 2-8 按位移求解平面问题 .....	(24)
§ 2-9 按应力求解平面问题 相容方程 .....	(26)
§ 2-10 常体力情况下的简化 应力函数 .....	(28)
习题 .....	(31)
第三章 平面问题的直角坐标解答 .....	(35)
§ 3-1 逆解法与半逆解法 多项式解答 .....	(35)
§ 3-2 矩形梁的纯弯曲 .....	(37)
§ 3-3 位移分量的求出 .....	(38)
§ 3-4 简支梁受均布荷载 .....	(41)
§ 3-5 楔形体受重力和液体压力 .....	(46)
习题 .....	(48)
第四章 平面问题的极坐标解答 .....	(52)
§ 4-1 极坐标中的平衡微分方程 .....	(52)
§ 4-2 极坐标中的几何方程及物理方程 .....	(54)
§ 4-3 极坐标中的应力函数与相容方程 .....	(57)
§ 4-4 应力分量的坐标变换式 .....	(58)
§ 4-5 轴对称应力和相应的位移 .....	(60)
§ 4-6 圆环或圆筒受均布压力 .....	(63)

§ 4-7 压力隧洞 .....	(64)
§ 4-8 圆孔的孔口应力集中 .....	(67)
§ 4-9 半平面体在边界上受集中力 .....	(72)
§ 4-10 半平面体在边界上受分布力 .....	(76)
习题 .....	(79)
<b>第五章 用差分法和变分法解平面问题</b> .....	(83)
§ 5-1 差分公式的推导 .....	(83)
§ 5-2 应力函数的差分分解 .....	(85)
§ 5-3 应力函数差分分解的实例 .....	(89)
§ 5-4 弹性体的形变势能和外力势能 .....	(93)
§ 5-5 位移变分方程 .....	(95)
§ 5-6 位移变分法 .....	(98)
§ 5-7 位移变分法的例题 .....	(99)
习题 .....	(102)
<b>第六章 用有限单元法解平面问题</b> .....	(105)
§ 6-1 基本量及基本方程的矩阵表示 .....	(105)
§ 6-2 有限单元法的概念 .....	(107)
§ 6-3 单元的位移模式与解答的收敛性 .....	(110)
§ 6-4 单元的应变列阵和应力列阵 .....	(113)
§ 6-5 单元的结点力列阵与刚度矩阵 .....	(115)
§ 6-6 荷载向结点移置 单元的结点荷载列阵 .....	(118)
§ 6-7 结构的整体分析 结点平衡方程组 .....	(120)
§ 6-8 解题的具体步骤 单元的划分 .....	(128)
§ 6-9 计算成果的整理 .....	(132)
§ 6-10 计算实例 .....	(135)
§ 6-11 应用变分原理导出有限单元法基本方程 .....	(139)
习题 .....	(141)
<b>第七章 空间问题的基本理论</b> .....	(144)
§ 7-1 平衡微分方程 .....	(144)
§ 7-2 物体内任一点的应力状态 .....	(145)
§ 7-3 主应力 最大与最小的应力 .....	(147)
§ 7-4 几何方程及物理方程 .....	(149)
§ 7-5 轴对称问题的基本方程 .....	(152)
习题 .....	(155)
<b>第八章 空间问题的解答</b> .....	(157)
§ 8-1 按位移求解空间问题 .....	(157)
§ 8-2 半空间体受重力及均布压力 .....	(158)
§ 8-3 半空间体在边界上受法向集中力 .....	(160)

§ 8-4 按应力求解空间问题 .....	(163)
§ 8-5 等截面直杆的扭转 .....	(165)
§ 8-6 扭转问题的薄膜比拟 .....	(169)
§ 8-7 椭圆截面杆的扭转 .....	(171)
§ 8-8 矩形截面杆的扭转 .....	(173)
习题 .....	(176)
<b>第九章 薄板弯曲问题</b> .....	(178)
§ 9-1 有关概念及计算假定 .....	(178)
§ 9-2 弹性曲面的微分方程 .....	(180)
§ 9-3 薄板横截面上的内力 .....	(183)
§ 9-4 边界条件 扭矩的等效剪力 .....	(187)
§ 9-5 四边简支矩形薄板的重三角级数解 .....	(190)
§ 9-6 矩形薄板的单三角级数解 .....	(192)
§ 9-7 矩形薄板的差分解 .....	(196)
§ 9-8 圆形薄板的弯曲 .....	(198)
§ 9-9 圆形薄板的轴对称弯曲 .....	(200)
习题 .....	(202)
<b>附录 A 变分法简介</b> .....	(206)
<b>附录 B 直角坐标系中的下标记号法</b> .....	(210)
<b>内容索引</b> .....	(212)
<b>外国人名译名对照表</b> .....	(215)
<b>Synopsis</b> .....	(216)
<b>Contents</b> .....	(217)
<b>作者简介</b> .....	(220)

# 主要符号表

## 弹性力学

坐标 直角坐标  $x, y, z$ ; 圆柱坐标  $\rho, \varphi, z$ ; 极坐标  $\rho, \varphi$ 。

体力分量  $f_x, f_y, f_z$  (直角坐标系);  $f_\rho, f_\varphi, f_z$  (圆柱坐标系);  $f_\rho, f_\varphi$  (极坐标系)。

面力分量  $\bar{f}_x, \bar{f}_y, \bar{f}_z$  (直角坐标系);  $\bar{f}_\rho, \bar{f}_\varphi, \bar{f}_z$  (圆柱坐标系);  $\bar{f}_\rho, \bar{f}_\varphi$  (极坐标系)。

位移分量  $u, v, w$  (直角坐标系);  $u_\rho, u_\varphi, u_z$  (圆柱坐标系);  $u_\rho, u_\varphi$  (极坐标系)。

边界约束分量  $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$  (直角坐标系)。

方向余弦  $l, m, n$  (直角坐标系)。

应力分量 正应力  $\sigma$ , 切应力  $\tau$ ; 全应力  $p$ ; 斜面应力分量  $p_x, p_y, p_z$  (直角坐标系);  $\sigma_n, \tau_n$ ; 体积应力  $\Theta$ 。

应变分量 线应变  $\epsilon$ , 切应变  $\gamma$ ; 体应变  $\theta$ 。

势能和功 形变势能  $U$ , 外力势能  $V$ , 总势能  $E_p$ 。功  $W$ 。

艾里应力函数  $\Phi$ 。

弹性模量  $E$ , 切变模量  $G$ , 体积模量  $K$ 。

泊松比  $\mu$ 。

有限单元法 (平面直角坐标系, 三结点三角形单元)

体力列阵  $f = (f_x \ f_y)^T$ 。

面力列阵  $\bar{f} = (\bar{f}_x \ \bar{f}_y)^T$ 。

集中力列阵  $f_p = (f_{px} \ f_{py})^T$ 。

位移函数列阵  $d = (u(x, y) \ v(x, y))^T$ 。

单元结点位移列阵  $\delta^e = (\delta_i \ \delta_j \ \delta_m)^T$ ,  $\delta_i = (u_i \ v_i)^T$  ( $i, j, m$ )。

单元结点力列阵  $F^e = (F_i \ F_j \ F_m)^T$ ,  $F_i = (F_{ix} \ F_{iy})^T$  ( $i, j, m$ )。

单元结点荷载列阵  $F_L^e = (F_{Li} \ F_{Lj} \ F_{Lm})^T$ ,  $F_{Li} = (F_{Lix} \ F_{Liy})^T$  ( $i, j, m$ )。

单元位移矩阵  $d = N\delta^e$  ( $N$  为形函数矩阵)。

单元应变矩阵  $\epsilon = B\delta^e$ 。

单元应力矩阵  $\sigma = De = S\delta^e$  ( $D$  为弹性矩阵,  $S$  为应力转换矩阵)。



单元结点力矩阵  $F^e = k\delta^e$  ( $k$  为单元刚度矩阵)。

单元结点荷载矩阵  $F_L^e = N^T f_{pi} + \int_{\Omega_e} N^T \bar{f} d\Omega + \int_{\Lambda_e} N^T \bar{f} dx dy$ 。

结点平衡方程组  $K\delta = F_L$  ( $K$  为整体刚度矩阵)。

## 第一章 绪 论

### §1-1 弹性力学的内容

弹性体力学,通常简称为弹性力学,又称为弹性理论,是固体力学的一个分支,其中研究弹性体由于受外力作用、边界约束或温度改变等原因而发生的应力、形变和位移。

对工科各专业说来,弹性力学的任务和材料力学、结构力学的任务一样,是分析各种结构物或其构件在弹性阶段的应力和位移,校验它们是否具有所需的强度和刚度,并寻求或改进它们的计算方法。然而,这三门学科在研究对象上有所分工,在研究方法上也有所不同。

在材料力学里,基本上只研究所谓杆状构件,也就是长度远大于高度和宽度的构件。这种构件在拉压、剪切、弯曲、扭转作用下的应力和位移,是材料力学的主要研究内容。在结构力学里,主要是在材料力学的基础上研究杆状构件所组成的结构,也就是所谓杆件系统,例如桁架、刚架等等。至于非杆状的结构,例如板和壳,以及挡土墙、堤坝、地基等实体结构,则在弹性力学里加以研究。对于杆状构件作进一步的、较精确的分析,也须用到弹性力学。

虽然在材料力学和弹性力学里都研究杆状构件,然而研究的方法却不完全相同。在材料力学里研究杆状构件,除了从静力学、几何学、物理学三方面进行分析以外,大都还引用一些关于构件的形变状态或应力分布的假定,这就大大简化了数学推演,但是,得出的解答往往只是近似的。在弹性力学里研究杆状构件,一般都不必引用那些假定,因而得出的结果就比较精确,并且可以用来校核材料力学里得出的近似解答。

例如,在材料力学里研究直梁在横向荷载作用下的弯曲,就引用了平面截面的假定,得出的结果是:横截面上的正应力(弯应力)按直线分布。在弹性力学里研究这同一问题,就无须引用平面截面的假定。相反地,还可以用弹性力学里的分析结果来校验这个假定是否正确,并且由此判明:如果梁的深度并不远小于梁的跨度,而是同等大小的,那么,横截面上的正应力并不按直线分布,而是按曲线变化的,如图 5-4 所示,并且,材料力学里给出的最大正应力将具有很大的误差。

又例如,在材料力学里计算有孔的拉伸构件,通常就假定拉应力在净截面上

均匀分布。弹性力学里的计算结果表明:净截面上的拉应力远不是均匀分布,而在孔的附近发生高度的应力集中,如图 4-8 所示,孔边的最大拉应力会比平均拉应力大出几倍。

虽然在弹性力学里通常并不研究杆件系统,然而有不少人曾经致力于弹性力学和结构力学的综合应用,使得这两门学科越来越密切结合。弹性力学吸收了结构力学中的超静定结构分析法以后,大大扩展了它的应用范围,使得某些比较复杂的本来是无法求解的问题,得到了解答。这些解答虽然在理论上具有一定的近似性,但应用在工程上,通常却是足够精确的。在 20 世纪 50 年代中叶发展起来的有限单元法中,把连续弹性体划分成有限大小的单元构件,然后用结构力学里的位移法、力法或混合法求解,更加显示了弹性力学与结构力学综合应用的良好效果。

此外,对同一结构的各个构件,甚至对同一构件的不同部分,分别用弹性力学和结构力学或材料力学进行计算,常常可以节省很多的工作量,而仍然得到令人满意的结果。

总之,材料力学、结构力学和弹性力学这三门学科之间的界线不是很明显的,更不是一成不变的。我们不应强调它们之间的分工,而应当更多地发挥它们综合应用的威力,才能使它们更好地为我国的经济建设服务。

## §1-2 弹性力学中的几个基本概念

弹性力学中经常用到的基本概念有外力、应力、形变和位移。这些概念,虽然在材料力学和结构力学里都已经用到过,但在这里仍有再加以详细说明的必要。

作用于物体的外力可以分为体积力和表面力,两者也分别简称为体力和面力。

所谓体力,是分布在物体体积内的力,例如重力和惯性力。物体内各点受体力情况,一般是不相同的。为了表明该物体在某一点  $P$  所受体力的大小和方向,在这点取物体的一小部分,它包含着  $P$  点而它的体积为  $\Delta V$ ,图 1-1a。设作用于  $\Delta V$  的体力为  $\Delta F$ ,则体力的平均集度为  $\Delta F/\Delta V$ 。如果把所取的那一小部分物体不断减小,即  $\Delta V$  不断减小,则  $\Delta F$  和  $\Delta F/\Delta V$  都将不断地改变大小、方向和作用点。现在,令  $\Delta V$  无限减小而趋于  $P$  点,假定体力为连续分布,则  $\Delta F/\Delta V$  将趋于一定的极限  $f$ ,即

$$\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta V} = f.$$

这个极限矢量  $f$ ,就是该物体在  $P$  点所受体力的集度。因为  $\Delta V$  是标量,所以  $f$

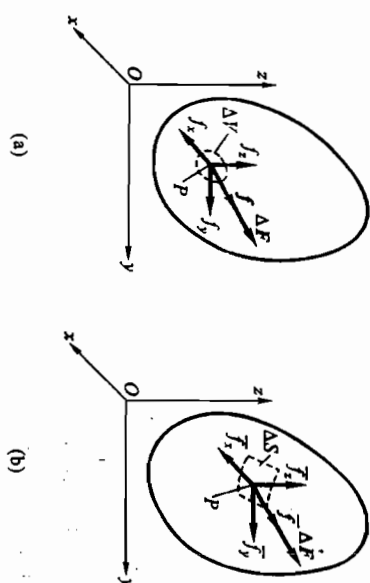


图 1-1

的方向就是  $\Delta F$  的极限方向。矢量  $f$  在坐标轴  $x, y, z$  上的投影  $f_x, f_y, f_z$ , 称为该物体在  $P$  点的体力分量,以沿坐标轴正方向为正,沿坐标轴负方向为负。它们的量纲是  $L^{-2}MT^{-2}$ 。

所谓面力,是分布在物体表面上的力,例如流体压力和接触力。物体在其表面上各点受面力的情况一般也是不相同的。为了表明该物体在表面上某一点  $P$  所受面力的大小与方向,在这点取该物体表面的一小部分,它包含着  $P$  点而它的面积为  $\Delta S$ ,图 1-1b。设作用于  $\Delta S$  的面力为  $\Delta F$ ,则面力的平均集度为  $\Delta F/\Delta S$ 。与上相似,令  $\Delta S$  无限减小而趋于  $P$  点,假定面力为连续分布,则  $\Delta F/\Delta S$  将趋于一定的极限  $\bar{f}$ ,即

$$\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta S} = \bar{f}.$$

这个极限矢量  $\bar{f}$  就是该物体在  $P$  点所受面力的集度。因为  $\Delta S$  是标量,所以  $\bar{f}$  的方向就是  $\Delta F$  的极限方向。矢量  $\bar{f}$  在坐标轴  $x, y, z$  上的投影  $\bar{f}_x, \bar{f}_y, \bar{f}_z$ , 称为该物体在  $P$  点的面力分量,以沿坐标轴正方向为正,沿坐标轴负方向为负。它们的量纲是  $L^{-1}MT^{-2}$ 。

物体受外力以后,其内部将发生内力,即物体本身不同部分之间相互作用的力。为了研究物体在其某一点  $P$  处的内力,假想用经过  $P$  点的一个截面  $mn$  将该物体分为 I 和 II 两部分,而将 II 部分撤开,图 1-2,撤开的部分 II 将在截面  $mn$  上对留下的部分 I 作用一定的内力。取这一截面的一小部分,它包含着  $P$  点而它的面积为  $\Delta A$ 。设作用于  $\Delta A$  上的内力为  $\Delta F$ ,则内力的平均集度,即平均应力,为  $\Delta F/\Delta A$ 。现在,令  $\Delta A$  无限减小而趋于  $P$  点,假定内力连续分布,则  $\Delta F/\Delta A$

将趋于一定的极限  $p$ , 即

$$\lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta A} = p.$$

这个极限矢量  $p$  就是物体在截面  $mnn$  上的、在  $P$  点的应力。因为  $\Delta A$  是标量, 所以应力  $p$  的方向就是  $\Delta F$  的极限方向。

对于应力, 除了在推导某些公式的过程中以外, 通常都不用它沿坐标轴方向的分量, 因为这些分量与物体的形变或材料强度都没有直接的关系。与物体的形变和材料强度直接相关的, 是应力在其作用截面的法线方向及切线方向的分量, 也就是正应力  $\sigma$  及切应力  $\tau$ , 如图 1-2 所示。应力及其分量的量纲是  $L^{-1}MT^{-2}$ 。

显然可见, 在物体内的同一点  $P$ , 不同截面上的应力是不同的。为了分析这一点的应力状态, 即各个截面上应力的方向和大小, 在这一点从物体内取出一个微小的正平行六面体, 它的棱边分别平行于三个坐标轴而长度为  $PA = \Delta x$ ,  $PB = \Delta y$ ,  $PC = \Delta z$ , 如图 1-3 所示。将每一面上的应力分解为一个正应力和两个切应力, 分别与三个坐标轴平行。正应力用  $\sigma$  表示。为了表明这个正应力的作用面和作用方向, 加上一个下标字母。例如, 正应力  $\sigma_x$  是作用在垂直于  $x$  轴的面上, 同时也是沿着  $x$  轴的方向作用的。切应力用  $\tau$  表示, 并加上两个下标字母, 前一个字母表明作用面垂直于哪一个坐标轴, 后一个字母表明作用方向沿着哪一个坐标轴。例如, 切应力  $\tau_{xy}$  是作用在垂直于  $x$  轴的面上而沿着  $y$  轴方向作用的。

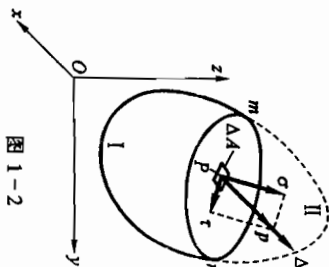


图 1-2

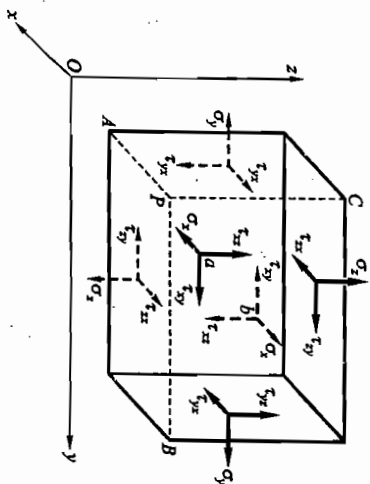


图 1-3

如果某一个截面上的外法线是沿着坐标轴的正方向, 这个截面就称为一个正面, 这个面上的应力就以沿坐标轴正方向为正, 沿坐标轴负方向为负。相反, 如果某一个截面上的外法线是沿着坐标轴的负方向, 这个截面就称为一个负面, 这个面上的应力就以沿坐标轴负方向为正, 沿坐标轴正方向为负。图上所示的应力全都是正的。注意, 虽然上述正负号规定, 对于正应力说来, 结果是和材料力学中的规定相同(拉应力为正而压应力为负), 但是, 对于切应力说来, 结果却和材料力学中的规定不完全相同。

六个切应力之间具有一定的互等关系。例如, 以连接六面体前后两面中心的直线  $ab$  为矩轴, 列出力矩平衡方程, 得

$$2\tau_{yz}\Delta z\Delta x\frac{\Delta y}{2} - 2\tau_{xy}\Delta y\Delta x\frac{\Delta z}{2} = 0.$$

同样可以列出其余两个相似的方程, 简化以后, 得出

$$\tau_{yz} = \tau_{zy}, \quad \tau_{xz} = \tau_{zx}, \quad \tau_{xy} = \tau_{yx}. \quad (1-1)$$

这就证明了切应力互等性: 作用在两个互相垂直的面上并且垂直于该两面交线的切应力是互等的(大小相等, 正负号也相同)。因此, 切应力记号的两个下标字母可以对调。

在这里, 我们没有考虑应力由于位置不同而有的变化, 也就是把六面体中的应力当作均匀应力, 而且也没有考虑体力的作用。以后可见, 即使考虑到应力的变化和体力的作用, 仍然可以推导出切应力的互等性。

附带指出, 如果采用材料力学中的正负号规定, 则切应力的互等性将表示成为  $\tau_{yx} = -\tau_{xy}$ ,  $\tau_{xz} = -\tau_{zx}$ ,  $\tau_{yz} = -\tau_{zy}$ , 显然不如采用上述规定时来得简单。但也应当指出, 在利用莫尔圆(应力圆)时, 就必须采用材料力学中的规定。

可以证明, 在物体的任意一点, 如果已知  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{yx}, \tau_{xz}, \tau_{zy}$ , 这六个应力分量, 就可以求得经过该点的任意截面上的正应力和切应力。因此, 上述六个应力分量可以完全确定该点的应力状态。

所谓形变, 就是形状的改变。物体的形状总可以用它各部分的长度和角度来表示。因此, 物体的形变总可以归结为长度的改变和角度的改变。

为了分析物体在其某一点  $P$  的形变状态, 在这一点沿着坐标轴  $x, y, z$  的正方向取三个微小的线段  $PA, PB, PC$  (图 1-3)。物体变形以后, 这三个线段的长度以及它们之间的直角一般都将有所改变。各线段的每单位长度的伸缩, 即单位伸缩或相对伸缩, 称为线应变, 亦称正应变; 各线段之间的直角的改变, 用弧度表示, 称为切应变。线应变用字母  $\epsilon$  表示:  $\epsilon_x$  表示  $x$  方向的线段  $PA$  的线应变, 余类推。切应变以伸长时为正, 缩短时为负, 与正应力的正负号规定相适应。切应变用字母  $\gamma$  表示:  $\gamma_{yx}$  表示  $y$  与  $z$  两方向的线段(即  $PB$  与  $PC$ )之间的直角的改变, 余类推。切应变以直角变小时为正, 变大时为负, 与切应力的正负号规

定相适应。线应变和切应变都是量纲一的量。

可以证明,在物体的任意一点,如果已知  $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$  这六个应变,就可以求得经过该点的任一线段的线应变;也可以求得经过该点的任意两个线段之间的角度的改变。因此,这六个应变,称为该点的形变分量,可以完全确定该点的形变状态。

所谓位移,就是位置的移动。物体内任意一点的位移,用它在  $x, y, z$  三轴上的投影  $u, v, w$  来表示,以沿坐标轴正方向为正,沿坐标轴负方向为负。这三个投影称为该点的位移分量。位移及其分量的量纲是  $L$ 。

一般而论,弹性体内任意一点的体力分量、面力分量、应力分量、形变分量和位移分量,都是随着该点的位置而变的,因而都是位置坐标的函数。

### §1-3 弹性力学中的基本假定

在弹性力学的问题里,通常是已知物体的形状和大小(即已知物体的边界),物体的弹性常数,物体所受的体力,物体边界上的约束情况或面力,而应力分量、形变分量和位移分量则是需要求解的未知量。

如何由这些已知量求出未知量,弹性力学的研究方法是:在弹性体区域内,考虑静力学、几何学和物理学三方面条件,分别建立三套方程。即根据微分体的平衡条件,建立平衡微分方程;根据微分线段上形变与位移之间的几何关系,建立几何方程;根据应力与形变之间的物理关系,建立物理方程。此外,在弹性体的边界上,还要建立边界条件。在给定面力的边界上,根据边界上的微分体的平衡条件,建立应力边界条件;在给定约束的边界上,根据边界上的约束条件,建立位移边界条件。求解弹性力学问题,即在边界条件下根据平衡微分方程、几何方程、物理方程求解应力分量、形变分量和位移分量。

在导出方程时,如果精确考虑所有各方面的因素,则导出的方程将非常复杂,实际上不可能求解。因此,通常必须按照所研究的物体的性质,以及求解问题的范围,作出若干基本假定,略去一些影响很小的次要因素,使得方程的求解成为可能。本教程中对物体的材料性质采用的基本假定,即弹性力学的基本假定如下:

(1) 连续性——假定物体是连续的,也就是假定整个物体的体积都被组成这个物体的介质所填满,不留下任何空隙。这样,物体内的一些物理量,例如应力、形变、位移等等,才可能是连续的,因而才可能用坐标的连续函数来表示它们的变化规律。实际上,一切物体都是微粒组成的,严格来说,都不符合上述假定。但是,可以想见,只要微粒的尺寸以及相邻微粒之间的距离都比物体的尺寸小得很多,那么,关于物体连续性的假定,就不会引起显著的误差。

(2) 完全弹性——假定物体是完全弹性的。所谓弹性,指的是“物体在引起形变的外力被除去以后能恢复原形”这一性质。所谓完全弹性,指的是物体能完全恢复原形而没有任何残余形变。这样的物体在任一瞬时的形变就完全决定于它在这一瞬时所受的外力,与它过去的受力情况无关。由材料力学已知:塑性材料的物体,在应力未达到屈服极限以前,是近似的完全弹性体;脆性材料的物体,在应力未超过比例极限以前,也是近似的完全弹性体。在一般的弹性力学中,完全弹性的这一假定,还包含形变与引起形变的应力成正比的涵义,亦即两者之间是线性关系的。因此,这种线性的完全弹性体中应力和形变之间服从胡克定律,其弹性常数不随应力或形变的大小而变。

(3) 均匀性——假定物体是均匀的,即整个物体是由同一材料组成的。这样,整个物体的所有各部分才具有相同的弹性,因而物体的弹性才不随位置坐标而变。如果物体是由两种或两种以上的材料组成的,例如混凝土,那么,也只要每一种材料的颗粒远远小于物体而且在物体内部均匀分布,这个物体就可以当作是均匀的。

(4) 各向同性——假定物体是各向同性的,即物体的弹性在所有各个方向都相同。这样,物体的弹性常数才不随方向而变。显然,由木材和竹材制成的构件都不能当做各向同性体。至于由钢材制成的构件,虽然它含有各向异性的晶体,但由于晶体很微小,而且是随机排列的,所以,钢材构件的弹性(包含无数多微小晶体随机排列时的统计弹性),大致是各向相同的。

凡是符合以上四个假定的物体,就称为理想弹性体。

此外,还对物体的变形状态作如下的小变形假定:

(5) 假定位移和形变是微小的。这就是说,假定物体受力以后,整个物体所有各点的位移都远远小于物体原来的尺寸,而且应变和转角都远小于1。这样,在建立物体变形以后的平衡方程时,就可以方便地用变形以前的尺寸来代替变形以后的尺寸,而不致引起显著的误差;并且,在考察物体的形变与位移的关系时,转角和应变的二次和更高次幂或乘积相对于其本身都可以略去不计。例如,

对于微小的转角  $\alpha$ , 有  $\cos \alpha = 1 - \frac{1}{2}\alpha^2 + \dots \approx 1$ ,  $\sin \alpha = \alpha - \frac{1}{3!}\alpha^3 + \dots \approx \alpha$ ,  $\tan \alpha$

$= \alpha + \frac{1}{3}\alpha^3 + \dots \approx \alpha$ ; 对于微小的正应变  $\epsilon_x$ , 有  $\frac{1}{1+\epsilon_x} = 1 - \epsilon_x + \epsilon_x^2 - \epsilon_x^3 + \dots \approx 1$

$-\epsilon_x$ , 等等。这样,弹性力学里的几何方程和平衡微分方程都简化为线性方程。在上述这些假定下,弹性力学问题都化为线性问题,从而可以应用叠加原理。

总之,本教程中所讨论的问题,都是理想弹性体的小变形问题。

### 习 题

1-1 试举例说明,什么是均匀的各向异性体,什么是非均匀的各向同性体,什么是非均

匀的各向异性体。

1-2 一般的混凝土构件和钢筋混凝土构件能否作为理想弹性体? 一般的岩质地基和土质地基能否作为理想弹性体?

1-3 五个基本假定在建立弹性力学基本方程时有什么用途?

1-4 应力和面力的符号规定有什么区别? 试分别画出正面和负面上的正的应力和正的面力的方向。



图 1-4

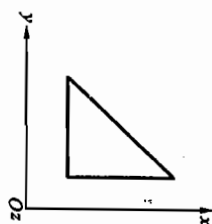


图 1-5

1-5 试比较弹性力学和材料力学中关于切应力的符号规定。

1-6 试举例说明正的应力对应于正的形变。

1-7 试画出图 1-4 中的矩形薄板的正的体力、面力和应力的方向。

1-8 试画出图 1-5 中的三角形薄板的正的面力和体力的方向。

## 第二章 平面问题的基本理论

### §2-1 平面应力问题与平面应变问题

任何一个弹性体都是空间物体,一般的外力都是空间力系。因此,严格说来,任何一个实际的弹性力学问题都是空间问题。但是,如果所考察的弹性体具有某种特殊的形状,并且承受的是某些特殊的外力和约束,就可以把空间问题简化为近似的平面问题。这样处理,分析和计算的工作量将大为减少,而所得的结果却仍然可以满足工程上对精确度的要求。

第一种平面问题是平面应力问题。设有很薄的等厚度薄板,图 2-1,只在板边上受有平行于板面并且不沿厚度变化的面力或约束。同时,体力也平行于板面并且不沿厚度变化。例如图中所示的深梁,以及平板坝的平板支墩,就属于此类问题。

设薄板的厚度为  $\delta$ 。以薄板的中面为  $xy$  面,以垂直于中面的任一直线为  $z$  轴。

因为板面上  $(z = \pm \frac{\delta}{2})$  不受力,所以有

$$(\sigma_z)_{z=\pm \frac{\delta}{2}} = 0, \quad (\tau_{xz})_{z=\pm \frac{\delta}{2}} = 0, \quad (\tau_{zy})_{z=\pm \frac{\delta}{2}} = 0。$$

由于板很薄,外力又不沿厚度变化,应力沿着板的厚度又是连续分布的,因此,可以认为在整个薄板的所有各点都有

$$\sigma_z = 0, \quad \tau_{xz} = 0, \quad \tau_{zy} = 0。$$

注意到切应力的互等性,又可见  $\tau_{xz} = 0, \tau_{yz} = 0$ 。这样,只剩下平行于  $xy$  面的三个平面应力分量,即  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy} = \tau_{yx}$ , 所以这种问题称为平面应力问题。同时,也因为板很薄,作用于板上的外力和约束都不沿厚度变化,这三个应力分量以及相应的形变分量,都可以认为是不沿厚度变化的。这就是说,它们只是  $x$  和  $y$  的函数,不随  $z$  而变化。

第二种平面问题是平面应变问题。与上相反,没有很长的柱形体,它的横截面不沿长度变化,如图 2-2 所示,在柱面上受有平行于横截面而且不沿长度变化的面力或约束,同时,体力也平行于横截面而且不沿长度变化(内在因素和外

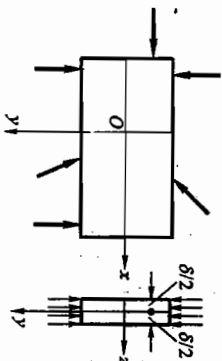


图 2-1

来作用都不沿长度变化)。

假想该柱形体为无限长,以任一横截面为  $xy$  面,任一纵线为  $z$  轴,则所有一切应力分量、形变分量和位移分量都不沿  $z$  方向变化,而只是  $x$  和  $y$  的函数。此外,在这种情况下,由于对称(任一横截面都可以看作是对称面),所有各点都只会沿  $x$  和  $y$  方向移动,即只有  $u$  和  $v$ ,而不会有  $z$  方向的位移,也就是  $w=0$ 。因为所有各点的位移矢量都平行于  $xy$  面,所以这个问题称为平面位移问题。又由对称条件可知,  $\tau_{xz}=0, \tau_{yz}=0$ 。根据切应力的互等性,又可以断定  $\tau_{zx}=0, \tau_{zy}=0$ 。由胡克定律,相应的切应变  $\gamma_{xz}=\gamma_{yz}=0$ 。又由于  $z$  方向的位移  $w$  处处均为零,就有  $\epsilon_z=0$ 。因此,只剩下平行于  $xy$  面的三个形变分量,即  $\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy}$ ,所以这种问题在习惯上称为平面应变问题。由于  $z$  方向的伸缩被阻止,所以  $\sigma_z$  一般并不等于零。

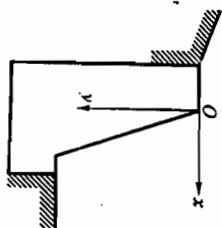


图 2-2

有些问题,例如挡土墙和很长的管道、隧洞问题等等,是很接近于平面应变问题的。虽然由于这些结构不是无限长的,而且在两端面上的条件也与中间截面的情况不同,并不符合无限长柱形体的条件,但是实践证明,对于离开两端较远之处,按平面应变问题进行分析计算,得出的结果却是工程上可用的。

## §2-2 平衡微分方程

前已指出,在弹性力学里分析问题,要考虑静力学、几何学和物理学三方面条件,分别建立三套方程。我们首先考虑平面问题的静力学方面,在弹性体内任一点取出一个微分体,根据平衡条件来导出应力分量与体力分量之间的关系式,也就是平面问题的平衡微分方程。

从图 2-1 所示的薄板,或图 2-2 所示的柱形体,取出一个微小的正平行六面体,它在  $x$  和  $y$  方向的尺寸分别为  $dx$  和  $dy$ ,图 2-3。为了计算简便,它在  $z$  方向的尺寸取为一个单位长度。

一般而言,应力分量是位置坐标  $x$  和  $y$  的函数,因此,作用于左右两对面或上下两对面对面的应力分量不完全相同,而具有微小的差量。例如,设作用于左面的正应力是  $\sigma_x$ ,则作用于右面的正应力,由于  $x$  坐标的

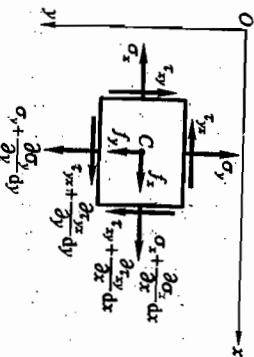


图 2-3

改变,将是  $\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} dx^2 + \dots$ ,

略去二阶以及二阶以上的微量后便是  $\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx$  (若  $\sigma_x$  为常量,则  $\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = 0$ ,而左右两面的正应力将都是  $\sigma_x$ ,这就是 §1-2 中所说的均匀应力的情况)。同样,设左面的切应力是  $\tau_{xy}$ ,则右面的切应力将是  $\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx$ ; 设上面的正应力及

切应力分别为  $\sigma_y$  及  $\tau_{yx}$ ,则下面的正应力及切应力分别为  $\sigma_y + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} dy$  及  $\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy$ 。因为六面体是微小的,所以它在各面上所受的应力可以认为是均匀分布,作用在对面体的中心。同理,六面体所受的体力,也可以认为是均匀分布,用在它的体积的中心。

首先以通过中心  $C$  并平行于  $z$  轴的直线为矩轴,列出力矩的平衡方程  $\sum M_C = 0$ :

$$\left( \tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx \right) dy \times 1 \times \frac{dx}{2} + \tau_{xy} dy \times 1 \times \frac{dx}{2} - \left( \tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) dx \times 1 \times \frac{dy}{2} - \tau_{yx} dx \times 1 \times \frac{dy}{2} = 0。$$

在建立这一方程时,我们按照 §1-3 中的第(5)个基本假定,用了弹性体变形以前的尺寸,而没有用平衡状态下的、变形以后的尺寸。在以后建立任何平衡方程时,都将同样地处理,不再加以说明。将上式除以  $dx dy$ ,并合并相同的项,得到

$$\tau_{xy} + \frac{1}{2} \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx = \tau_{yx} + \frac{1}{2} \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy。$$

略去微量不计(亦即命  $dx, dy$  都趋于零),得出

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}。 \quad (2-1)$$

这不过是再一次证明了切应力的互等性。

其次,以  $x$  轴为投影轴,列出投影的平衡方程  $\sum F_x = 0$ :

$$\left( \sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \right) dy \times 1 - \sigma_x dy \times 1 +$$

$$\left( \tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) dx \times 1 - \tau_{yx} dx \times 1 + f_x dx dy \times 1 = 0。$$

约简以后,两边除以  $dx dy$ ,得

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + f_x = 0。$$

同样,由平衡方程  $\sum F_y = 0$  可得一个相似的微分方程。于是得出平面问题中应力分量与体力分量之间的关系式,即平面问题中的平衡微分方程

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + f_x &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + f_y &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2-2)$$

这2个微分方程中包含着3个未知函数  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy} = \tau_{yx}$ , 因此, 决定应力分量的问题是超静定的, 还必须考虑几何学和物理学方面的条件, 才能解决问题。读者还应注意, 平衡微分方程表示了区域内任一点的微分体的平衡条件, 从而必然保证任一有限大部分和整个区域是满足平衡条件的。因此, 这样考虑的静力学条件是严格和精确的。

对于平面应变问题来说, 在图2-3所示的六面体上, 一般还有作用于前后两面的正应力  $\sigma_z$ , 但它们完全不影响方程(2-1)及(2-2)的建立, 所以上述方程对于两种平面问题都同样适用。

### §2-3 平面问题中一点的应力状态

我们继续考虑平面问题的静力学方面, 假定已知任一点  $P$  处坐标面上的应力分量  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy} = \tau_{yx}$ , 图2-4a, 试求出经过该点的、平行于  $z$  轴而倾斜于  $x$  轴和  $y$  轴的任何斜面上的应力。为此, 在  $P$  点附近取一个平面  $AB$ , 它平行于上述斜面, 并与经过  $P$  点而垂直于  $x$  轴和  $y$  轴的两个平面划出一个微小的三角板或三棱柱  $PAB$ , 图2-4b。当面积  $AB$  无限减小而趋于  $P$  点时, 平面  $AB$  上的应力就成为上述斜面上的应力。

用  $n$  代表斜面  $AB$  的外法线方向, 其方向余弦为

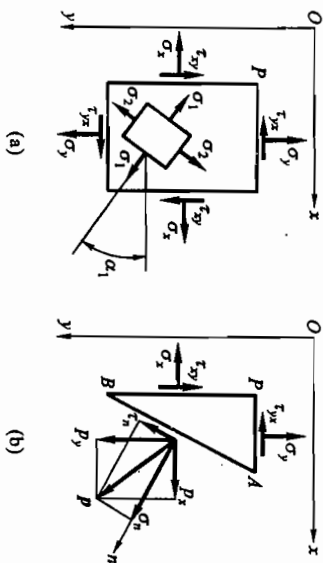


图2-4

并用  $p_x$  及  $p_y$  代表斜面  $AB$  上的全应力  $p$  在  $x$  轴及  $y$  轴上的投影。

设斜面  $AB$  的长度为  $ds$ , 则  $PB$  面及  $PA$  面的长度分别为  $l ds$  及  $m ds$ , 而  $PAB$  的面积为  $l ds m ds / 2$ 。垂直于图平面的尺寸仍然取为一个单位长度。于是由平衡条件  $\sum F_x = 0$  得

$$p_x ds - \sigma_x l ds - \tau_{xy} m ds + f_x \frac{l ds m ds}{2} = 0,$$

其中的  $f_x$  为  $x$  方向的体力分量。将上式除以  $ds$ , 然后令  $ds$  趋于零(命斜面  $AB$  趋于  $P$  点), 即得

$$p_x = l \sigma_x + m \tau_{xy}.$$

同样可以由  $\sum F_y = 0$  得出一个相似的方程, 总共得出两个方程

$$p_x = l \sigma_x + m \tau_{xy}, \quad p_y = m \sigma_y + l \tau_{xy}. \quad (2-3)$$

命斜面  $AB$  上的正应力为  $\sigma_n$ , 则由  $p_x$  及  $p_y$  的投影可得

$$\sigma_n = l p_x + m p_y.$$

将式(2-3)代入, 即得

$$\sigma_n = l^2 \sigma_x + m^2 \sigma_y + 2lm \tau_{xy}. \quad (2-4)$$

命斜面  $AB$  上的切应力为  $\tau_n$ , 则由投影得

$$\tau_n = l p_y - m p_x.$$

将式(2-3)代入, 即得

$$\tau_n = lm(\sigma_y - \sigma_x) + (l^2 - m^2)\tau_{xy}. \quad (2-5)$$

由式(2-4)及(2-5)可见, 如果已知  $P$  点处的应力分量  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ , 就可以求得经过  $P$  点的任一斜面上的正应力  $\sigma_n$  及切应力  $\tau_n$ 。

设经过  $P$  点的某一斜面上的切应力等于零, 则该斜面上的正应力称为在  $P$  点的一个主应力, 而该斜面称为在  $P$  点的一个应力主面, 该斜面的法线方向(即主应力的方向)称为在  $P$  点的一个应力主向。

在一个应力主面上, 由于切应力等于零, 全应力就等于该面上的正应力, 也就等于主应力  $\sigma$ , 因此, 该面上的全应力在坐标轴上的投影成为

$$p_x = l \sigma, \quad p_y = m \sigma.$$

将式(2-3)代入, 即得

$$l \sigma_x + m \tau_{xy} = l \sigma, \quad m \sigma_y + l \tau_{xy} = m \sigma.$$

由两式分别解出比值  $m/l$ , 得到

$$\frac{m}{l} = \frac{\sigma - \sigma_x}{\tau_{xy}}, \quad \frac{m}{l} = \frac{\tau_{xy}}{\sigma - \sigma_y}. \quad (a)$$

由于上列两式的等号左边都是  $\frac{m}{l}$ , 因而它们的等号右边也应相等, 于是可得  $\sigma$  的二次方程



从而求得两个主应力为

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (2-6)$$

由于根号内的数值(两个数的平方之和)总是正的,所以  $\sigma_1$  和  $\sigma_2$  这两个根都是实根。此外,由式(2-6)极易看出下列关系式成立:

$$\sigma_1 + \sigma_2 = \sigma_x + \sigma_y \quad (2-7)$$

下面来求主应力的方向。设  $\sigma_1$  与  $x$  轴的夹角为  $\alpha_1$ , 图 2-4a, 则

$$\tan \alpha_1 = \frac{\sin \alpha_1}{\cos \alpha_1} = \frac{\cos(90^\circ - \alpha_1)}{\cos \alpha_1} = \frac{m_1}{l_1}$$

利用式(a)中的第一式,即得

$$\tan \alpha_1 = \frac{\sigma_1 - \sigma_x}{\tau_{xy}} \quad (b)$$

设  $\sigma_2$  与  $x$  轴的夹角为  $\alpha_2$ , 则

$$\tan \alpha_2 = \frac{\sin \alpha_2}{\cos \alpha_2} = \frac{\cos(90^\circ - \alpha_2)}{\cos \alpha_2} = \frac{m_2}{l_2}$$

利用式(a)中的第二式,即得

$$\tan \alpha_2 = \frac{\tau_{xy}}{\sigma_2 - \sigma_y}$$

再利用由式(2-7)得来的  $\sigma_2 - \sigma_1 = -(\sigma_1 - \sigma_x)$ , 可见有

$$\tan \alpha_2 = -\frac{\tau_{xy}}{\sigma_1 - \sigma_x} \quad (c)$$

于是由式(b)及式(c)可见有  $\tan \alpha_1 \tan \alpha_2 = -1$ , 也就是说,  $\sigma_1$  的方向与  $\sigma_2$  的方向互相垂直, 如图 2-4a 所示。

如果已经求得任一点的两个主应力  $\sigma_1$  和  $\sigma_2$ , 以及与之对应的应力主向, 就极易求得这一点的最大与最小的应力。为了简便, 将  $x$  轴和  $y$  轴分别放在  $\sigma_1$  和  $\sigma_2$  的方向, 于是有

$$\tau_{xy} = 0, \quad \sigma_x = \sigma_1, \quad \sigma_y = \sigma_2 \quad (d)$$

首先来求出最大与最小的正应力。由式(2-4)及式(d)有

$$\sigma_n = l^2 \sigma_1 + m^2 \sigma_2$$

用关系式  $l^2 + m^2 = 1$  消去  $m^2$ , 得到

$$\sigma_n = l^2 \sigma_1 + (1 - l^2) \sigma_2 = l^2 (\sigma_1 - \sigma_2) + \sigma_2$$

因为  $l^2$  的最大值为 1 而最小值为零, 所以  $\sigma_n$  的最大值为  $\sigma_1$  而最小值为  $\sigma_2$ 。这就是说, 两个主应力也就是最大与最小的正应力。

其次来求出最大与最小的切应力。按照式(2-5)及式(d), 任一斜面上的切应力为

$$\tau_n = lm(\sigma_2 - \sigma_1)$$

用关系式  $l^2 + m^2 = 1$  消去  $m$ , 得

$$\begin{aligned} \tau_n &= \pm l \sqrt{1 - l^2} (\sigma_2 - \sigma_1) = \pm \sqrt{l^2 - l^4} (\sigma_2 - \sigma_1) \\ &= \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} - l^2\right)^2} (\sigma_2 - \sigma_1) \end{aligned}$$

由上式可见, 当  $\frac{1}{2} - l^2 = 0$  时  $\tau_n$  为最大或最小, 于是得  $l = \pm \sqrt{\frac{1}{2}}$ , 而最大与最小的切应力为  $\pm \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$ , 发生在与  $x$  轴及  $y$  轴(即应力主向)成  $45^\circ$  的斜面上。

## §2-4 几何方程 刚体位移

现在来考虑平面问题的几何学方面, 导出微分线段上的形变分量与位移分量之间的关系式, 也就是平面问题中的几何方程。

经过弹性体内的任意一点  $P$ , 沿  $x$  轴和  $y$  轴的正方向取两个微小长度的线段  $PA = dx$  和  $PB = dy$ , 图 2-5。假定弹性体受力以后,  $P, A, B$  三点分别移动到  $P', A', B'$ 。

首先来求出线段  $PA$  和  $PB$  的线应变, 即  $\epsilon_x$  和  $\epsilon_y$ , 用位移分量来表示。设  $P$  点在  $x$  方向的位移是  $u$ , 则  $A$  点在  $x$  方向的位移, 由于  $x$  坐标的改变, 将是  $u + \frac{\partial u}{\partial x} dx$ 。可见线段  $PA$  的线应变是

$$\epsilon_x = \frac{\left(u + \frac{\partial u}{\partial x} dx\right) - u}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (a)$$

在这里, 由于位移微小,  $y$  方向的位移  $v$  所引起的  $PA$  的伸缩, 是高一阶的微量, 因此略去不计。同样可见, 线段  $PB$  的线应变是

$$\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (b)$$

现在来求出线段  $PA$  与  $PB$  之间的直角的改变, 也就是切应变  $\gamma_{xy}$ , 用位移分量来表示。由图可见, 这个切应变是由两部分组成的: 一部分是由  $y$  方向的

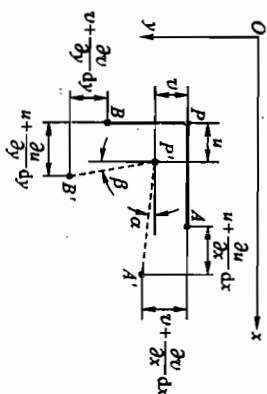


图 2-5



位移  $v$  引起的, 即  $x$  方向的线段  $PA$  的转角  $\alpha$ ; 另一部分是由  $x$  方向的位移  $u$  引起的, 即  $y$  方向的线段  $PB$  的转角  $\beta$ 。

设  $P$  点在  $y$  方向的位移分量是  $v$ , 则  $A$  点在  $y$  方向的位移分量将是  $v + \frac{\partial v}{\partial x} dx$ 。因此, 线段  $PA$  的转角是

$$\alpha = \frac{\left(v + \frac{\partial v}{\partial x} dx\right) - v}{dx} = \frac{\partial v}{\partial x}$$

同样可得线段  $PB$  的转角是

$$\beta = \frac{\partial u}{\partial y}$$

于是可见,  $PA$  与  $PB$  之间的直角的改变(以减小时为正), 也就是切应变  $\gamma_{xy}$ , 为

$$\gamma_{xy} = \alpha + \beta = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \quad (c)$$

综合(a), (b), (c)三式, 就是平面问题中的几何方程:

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \quad (2-8)$$

和平衡微分方程一样, 上列几何方程对两种平面问题同样适用。

由几何方程可见, 当物体的位移分量完全确定时, 形变分量即完全确定。反之, 当形变分量完全确定时, 位移分量却不能完全确定。为了说明这后一点, 试令形变分量等于零, 即

$$\epsilon_x = \epsilon_y = \gamma_{xy} = 0, \quad (d)$$

而求出相应的位移分量。

将式(d)代入几何方程(2-8), 得

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0. \quad (e)$$

将前二式分别对  $x$  及  $y$  积分, 得

$$u = f_1(y), \quad v = f_2(x), \quad (f)$$

其中  $f_1$  及  $f_2$  为任意函数。代入式(e)中的第三式, 得

$$-\frac{df_1(y)}{dy} = \frac{df_2(x)}{dx}$$

这一方程的左边是  $y$  的函数, 只随  $y$  而变, 而右边是  $x$  的函数, 只随  $x$  而变。因此, 只可能两边都等于同一常数  $\omega$ 。于是得

$$\frac{df_1(y)}{dy} = -\omega, \quad \frac{df_2(x)}{dx} = \omega$$

积分以后, 得

$$f_1(y) = u_0 - \omega y, \quad f_2(x) = v_0 + \omega x, \quad (g)$$

其中的  $u_0$  及  $v_0$  为任意常数。将式(g)代入式(f), 得位移分量

$$u = u_0 - \omega y, \quad v = v_0 + \omega x. \quad (2-9)$$

式(2-9)所示的位移, 是“形变为零”时的位移, 也就是所谓“与形变无关的位移”, 因此必然是刚体位移。实际上,  $u_0$  及  $v_0$  分别为物体沿  $x$  轴及  $y$  轴方向的刚体平移, 而  $\omega$  为物体绕  $z$  轴的刚体转动。下面根据平面运动的原理加以证明。

当三个常数中只有  $u_0$  不为零时, 由式(2-9)

可见, 物体中任意一点的位移分量都是  $u = u_0$ ,  $v = 0$ 。这就是说, 物体的所有各点只沿  $x$  方向移动同样的距离  $u_0$ 。由此可见,  $u_0$  代表物体沿  $x$  方向的刚体平移。同样可见,  $v_0$  代表物体沿  $y$  方向的刚体平移。当只有  $\omega$  不为零时, 由式(2-9)可见, 物体中任意一点的位移分量是  $u = -\omega y$ ,  $v = \omega x$ 。据此, 坐标为  $(x, y)$  的任意一点  $P$  沿着  $y$  方向移动  $\omega x$ , 并沿着负  $x$  方向移动  $\omega y$ , 如图 2-6 所示, 而合成位移为

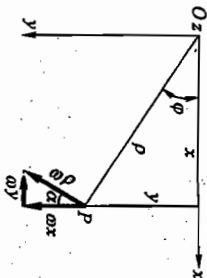


图 2-6

$$\sqrt{u^2 + v^2} = \sqrt{(-\omega y)^2 + (\omega x)^2}$$

$$= \omega \sqrt{x^2 + y^2} = \omega \rho,$$

其中  $\rho$  为  $P$  点至  $z$  轴的距离。命合成位移的方向与  $y$  轴的夹角为  $\alpha$ , 则

$$\tan \alpha = \omega y / \omega x = y / x = \tan \varphi.$$

可见合成位移的方向与径向线段  $OP$  垂直, 也就是沿着切向。既然  $OP$  线上的所有各点移动的方向都是沿着切向, 而且移动的距离等于径向距离  $\rho$  乘以  $\omega$ , 可见(注意位移是微小的)  $\omega$  代表物体绕  $z$  轴的刚体转动。

既然物体在形变为零时可以有刚体位移, 可见, 当物体发生一定的形变时, 由于约束条件的不同, 它可能具有不同的刚体位移, 因而它的位移并不是完全确定的。在平面问题中, 常数  $u_0$ ,  $v_0$ ,  $\omega$  的任意性就反映位移的不确定性, 而为了完全确定位移, 就必须有三个适当的刚体约束条件来确定这三个常数。

## §2-5 物理方程

现在来考虑平面问题的物理学方面, 导出形变分量与应力分量之间的关系式, 也就是平面问题中的物理方程。

在理想弹性体中, 形变分量与应力分量之间的关系极其简单, 已在材料力学中根据胡克定律导出如下:

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{1}{E}[\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)], \\ \epsilon_y &= \frac{1}{E}[\sigma_y - \mu(\sigma_x + \sigma_z)], \\ \epsilon_z &= \frac{1}{E}[\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)], \\ \gamma_{xy} &= \frac{1}{G}\tau_{xy}, \quad \gamma_{xz} = \frac{1}{G}\tau_{xz}, \quad \gamma_{yz} = \frac{1}{G}\tau_{yz} \end{aligned} \right\} \quad (2-10)$$

式中的  $E$  是拉压弹性模量, 简称为弹性模量;  $G$  是切变模量, 又称为刚度模量;  $\mu$  称为泊松系数, 或泊松比。这三个弹性常数之间有如下关系:

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)} \quad (2-11)$$

这些弹性常数不随应力或形变的大小而变, 不随位置坐标而变, 也不随方向而变, 因为我们假定考虑的物体是完全弹性的, 均匀的, 而且是各向同性的。

在平面应力问题中,  $\sigma_z = 0$ 。在式(2-10)的第一式及第二式中删去  $\sigma_z$ , 并将式(2-11)代入式(2-10)中的第六式, 得

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{1}{E}(\sigma_x - \mu\sigma_y), \\ \epsilon_y &= \frac{1}{E}(\sigma_y - \mu\sigma_x), \\ \gamma_{xy} &= \frac{2(1+\mu)}{E}\tau_{xy} \end{aligned} \right\} \quad (2-12)$$

这就是平面应力问题中的物理方程。此外, 式(2-10)中的第三式成为

$$\epsilon_z = -\frac{\mu}{E}(\sigma_x + \sigma_y), \quad (a)$$

$\epsilon_z$  可以直接由  $\sigma_x$  和  $\sigma_y$  得出, 因而不作为独立的未知函数。并由  $\epsilon_z$  可以用来求得薄板厚度的改变。又由式(2-10)中的第四式及第五式可见, 因为在平面应力问题中有  $\tau_{yz} = 0$  和  $\tau_{zx} = 0$ , 所以有  $\gamma_{yz} = 0$  和  $\gamma_{zx} = 0$ 。

在平面应变问题中, 因为物体的所有各点都不沿  $z$  方向移动, 即  $w = 0$ , 所以  $z$  方向的线段都没有伸缩, 即  $\epsilon_z = 0$ 。于是由式(2-10)中的第三式得

$$\sigma_z = \mu(\sigma_x + \sigma_y). \quad (b)$$

同样,  $\sigma_z$  也不作为独立的未知函数。将上式代入式(2-10)中的第一式及第二式, 并结合式(2-10)中的第三式, 得

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{1-\mu^2}{E} \left( \sigma_x - \frac{\mu}{1-\mu} \sigma_y \right), \\ \epsilon_y &= \frac{1-\mu^2}{E} \left( \sigma_y - \frac{\mu}{1-\mu} \sigma_x \right), \\ \gamma_{xy} &= \frac{2(1+\mu)}{E} \tau_{xy} \end{aligned} \right\} \quad (2-13)$$

这就是平面应变问题中的物理方程。此外, 因为在平面应变问题中也有  $\tau_{yz} = 0$  和  $\tau_{zx} = 0$ , 所以也有  $\gamma_{yz} = 0$  和  $\gamma_{zx} = 0$ 。

可以看出, 两种平面问题的物理方程是不一样的。然而, 如果在平面应力问题的物理方程(2-12)中, 将  $E$  换为  $\frac{E}{1-\mu}$ ,  $\mu$  换为  $\frac{\mu}{1-\mu}$ , 就得到平面应变问题的物理方程(2-13), 其中的第三式也并不例外, 因为

$$\frac{2 \left( 1 + \frac{\mu}{1-\mu} \right)}{\frac{E}{1-\mu}} = \frac{2(1+\mu)}{E}.$$

以上导出的三套方程, 就是弹性力学平面问题的基本方程: 2 个平衡微分方程(2-2), 3 个几何方程(2-8), 3 个物理方程(2-12)或(2-13)。这 8 个基本方程中包含 8 个未知函数(坐标的未知函数): 3 个应力分量  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ ; 3 个形变分量  $\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy}$ ; 2 个位移分量  $u, v$ 。此外, 还必须考虑弹性体边界上的条件, 才有可能求出这些未知函数。

## §2-6 边界条件

边界条件表示在边界上位移与约束, 或应力与面力之间的关系式。它可以分为位移边界条件、应力边界条件和混合边界条件。

若在  $s_u$  部分边界上给定了约束位移分量  $\bar{u}(s)$  和  $\bar{v}(s)$ , 则对于此边界上的每一点, 位移函数  $u$  和  $v$  应满足条件

$$(u)_s = \bar{u}(s), \quad (v)_s = \bar{v}(s). \quad (\text{在 } s_u \text{ 上}) \quad (2-14)$$

其中  $(u)_s$  和  $(v)_s$  是位移的边界值,  $\bar{u}(s)$  和  $\bar{v}(s)$  在边界上是坐标的已知函数。式(2-14)称为平面问题的位移(或约束)边界条件。对于完全固定边,  $\bar{u} = \bar{v} = 0$ , 有

$$(u)_s = 0, \quad (v)_s = 0. \quad (\text{在 } s_u \text{ 上}) \quad (a)$$

若在  $s_\sigma$  部分边界上给定了面力分量  $\bar{f}_x(s)$  和  $\bar{f}_y(s)$ , 则可以由边界上任一点微分体的平衡条件, 导出应力与面力之间的关系式。为此, 在边界上任一点  $P$  取出一个相似于图 2-4b 的微分体。这时, 斜面  $AB$  就是边界面, 在此面上的应力分量  $p_x$  和  $p_y$  应代换为面力分量  $\bar{f}_x$  和  $\bar{f}_y$ , 而坐标面上的  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  分别成为应力分量的边界值, 由平衡条件得出平面问题的应力(或面力)边界条件为

$$\left. \begin{aligned} (l\sigma_x + m\tau_{xy})_s &= \bar{f}_x(s), \\ (m\sigma_y + l\tau_{xy})_s &= \bar{f}_y(s), \end{aligned} \right\} \quad (\text{在 } s_\sigma \text{ 上}) \quad (2-15)$$

其中  $\bar{f}_x(s)$  和  $\bar{f}_y(s)$  在边界上是坐标的已知函数,  $l, m$  是边界面外法线的方向

余弦。

读者应注意:在应力边界条件(2-15)中,应力分量和面力分量分别作用于不同的面上,且各有不同的正负号规定。由于微分体是微小的,所以式(2-15)表示在边界点 $P$ ,坐标面上的应力分量与边界面(一般为斜面)上的面力分量之间的关系式。应力边界条件是在边界上建立的,因此,必须把边界 $s$ 的坐标表达式代入到左边的应力分量中,式(2-15)才成立。

当边界面为坐标面时,应力边界条件可以化为简单的形式。例如,若边界面 $x=a$ 为正 $x$ 面(其外法线指向正 $x$ 方向), $l=1, m=0$ ,则在此面上应力边界条件(2-15)简化为

$$(\sigma_x)_{x=a} = \bar{f}_x(y), \quad (\tau_{xy})_{x=a} = \bar{f}_y(y) \quad (b)$$

若边界面 $x=b$ 为负 $x$ 面(其外法线指向负 $x$ 方向), $l=-1, m=0$ ,则在此面上应力边界条件(2-15)简化为

$$(\sigma_x)_{x=b} = -\bar{f}_x(y), \quad (\tau_{xy})_{x=b} = -\bar{f}_y(y) \quad (c)$$

在式(b)和(c)中,正、负 $x$ 面上的面力分量一般为随 $y$ 而变化的函数。由式(b)和(c)可见,由于应力分量和面力分量的正负号规定的不同,在正坐标面上,应力分量与面力分量同号;在负坐标面上,应力分量与面力分量异号。

从上述可见,应力边界条件可以有两种表达方式:一是在边界点取出一个微分体,考虑其平衡条件,得出应力边界条件。另一种表达方式是,在同一边界面上,应力分量的边界值就等于对应的面力分量。由于面力分量是给定的,因此,应力分量的绝对值等于面力分量的绝对值;而面力分量的方向就是应力分量的方向,并可按照应力分量的正负号规定来确定应力分量的正负号。

例如,若边界面 $y=c, d$ 分别为正、负 $y$ 坐标面,按照这种表达方式,就同样有

$$\begin{aligned} (\sigma_y)_{y=c} &= \bar{f}_y(x), & (\tau_{yx})_{y=c} &= \bar{f}_x(x); \\ (\sigma_y)_{y=d} &= -\bar{f}_y(x), & (\tau_{yx})_{y=d} &= -\bar{f}_x(x) \end{aligned}$$

当边界面为斜面时,就有

$$(p_x)_s = \bar{f}_x(s), \quad (p_y)_s = \bar{f}_y(s)。$$

将式(2-3)代入上式的 $p_x, p_y$ ,就得到一般的斜面边界条件(2-15)。

在平面问题中,每边都有表示 $x$ 向和 $y$ 向的两个边界条件。并且,在边界面为正、负 $x$ 面时,应力边界条件中并没有 $\sigma_y$ ;在边界面为正、负 $y$ 面时,应力边界条件中并没有 $\sigma_x$ 。这就是说,平行于边界面的正应力,它的边界值与面力分量并不直接相关。

在平面问题的混合边界条件中,物体的一部分边界具有已知位移,因而具有位移边界条件,如式(2-14)所示;另一部分边界则具有已知面力,因而具有应力

边界条件,如式(2-15)所示。此外,在同一部分边界上还可能出观混合边界条件,即,两个边界条件中的一个为位移边界条件,而另一个则是应力边界条件。例如,设某一个 $x$ 面是连杆支承边,图2-7a,则在 $x$ 方向有位移边界条件 $(u)_x = \bar{u} = 0$ ,而在 $y$ 方向有应力边界条件 $(\tau_{xy})_x = \bar{f}_y = 0$ 。又例如,设某一个 $x$ 面是齿槽边,图2-7b,则在 $x$ 方向有应力边界条件 $(\sigma_x)_x = \bar{f}_x = 0$ ,而在 $y$ 方向有位移边界条件 $(v)_y = \bar{v} = 0$ 。在垂直于 $y$ 轴的边界上,以及与坐标轴斜交的边界上,都可能有与此相似的混合边界条件。

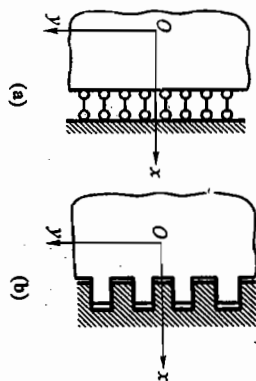


图 2-7

## §2-7 圣维南原理及其应用

在求解弹性力学问题时,应力分量、形变分量和位移分量等必须满足区域内的三套基本方程,还必须满足边界上的边界条件,因此,弹性力学问题属于数学物理方程中的边值问题。但是,要使边界条件得到完全满足,往往遇到很大的困难。这时,圣维南原理可为简化局部边界上的应力边界条件提供很大的方便。

圣维南原理表明:如果把物体的一小部分边界上的面力,变换为分布不同但静力等效的面力(主矢量相同,对于同一点的主矩也相同),那么,近处的应力分布将有显著的改变,但是远处所受的影响可以不计。

应用圣维南原理时必须注意:不仅变换的面力必须与原面力静力等效,而且只能在局部边界上进行静力等效变换。所谓“近处”,是指小边界附近区域。圣维南原理指出,在此范围内,应力将发生显著的变化;但在此范围之外,对应力的影响很小,可以不计。也就是说,在小边界上进行面力的静力等效变换,只改变局部区域的应力分布,对此外的大部分区域的应力没有什么影响。

例如,设有柱形构件,在两端截面的形心受到大小相等而方向相反的拉力 $F$ ,图2-8a。如果把一端或两端的拉力变换为静力等效的力,图2-8b或2-8c,则只有虚线划出的部分的应力分布有显著的改变,而其余部分所受的影响是可以不计的。如果再将两端的拉力变换为均匀分布的拉力,集度等于 $F/A$ ,其中 $A$ 为构件的横截面积,图2-8d,仍然只有靠近两端部分的应力受到显著的影响。这就是说,在上述四种情况下,离开两端较远处的应力分布,并没有显著的差别。

以后可见,在图2-8d所示的情况下,由于面力连续均匀分布,边界条件简单,应力是很容易求得而且解答是很简单的。在其余三种情况下,由于面力并非

连续分布,甚至只知其合力为  $F$  而不知其分布方式,应力是难以求解的。根据圣维南原理,将图 2-8d 所示情况下的应力解答应用到其余三个情况,虽然不能满足两端的应力边界条件,但仍然可以表明离杆端较远处的应力状态,而并没有显著的误差。

必须注意:应用圣维南原理,绝不能离开“静力等效”的条件。例如,在图 2-8a 所示的构件上,如果两端的力  $F$  不是作用于截面的形心,而是具有一定的偏心距离,那么,作用在每一端的面力,不管它的分布方式如何,与作用于截面形心的力  $F$  不是静力等效的。这时的应力,与上述四种情况下的应力相比,就不仅是在靠近两端处有差异,而且在整个构件中都是不相同的。

当物体一小部分边界上的位移边界条件不能满足时,也可以应用圣维南原理而得到有用的解答。例如,设图 2-8 所示构件的右端是固定端,图 2-8e,则在该构件的右端,有位移动边界条件  $(u)_x = \bar{u} = 0$  和  $(v)_x = \bar{v} = 0$ ,把图 2-8d 所示情况下的简单解答应用于这一情况时,这个位移动边界条件是不能满足的。但是,显然可见,右端的面力,一定是合成为经过截面形心的力  $F$ ,和左端的面力成平衡。这就是说,右端(固定端)的面力,静力等效于经过右端截面形心的力  $F$ 。因此,根据圣维南原理,把上述简单解答应用于这一情况时,仍然只是在靠近两端处有显著的误差,而在离两端较远之处,误差是可以不计的。

圣维南原理还可以推广到下列情形:如果物体一小部分边界上的面力是一个平衡力系(主矢量及主矩都等于零),那么,这个面力就只会使近处产生显著的应力,而远处的应力可以不计。这是因为,主矢量和主矩都等于零的面力,与无面力状态是静力等效的,只能在近处产生显著的应力。例如,当没有体力作用时,离边界较远的小孔口边界上有平衡力系作用,只能在小孔口附近产生局部的应力;又如,在结构中开设孔口或不开孔口,两者的应力也只在孔口附近有显著的差别。

下面来考虑在局部边界上如何应用圣维南原理。设图 2-9 所示的厚度  $\delta = 1$  的梁中,左、右端  $x = \pm l$  的边界面是正、负  $x$  面,其上作用有一般分布的面力  $\bar{f}_x(y), \bar{f}_y(y)$ 。按照严格的应力边界条件(2-15),应力分量在边界上应满足条件

$$(\sigma_x)_{x=\pm l} = \pm \bar{f}_x(y), \quad (\tau_{xy})_{x=\pm l} = \pm \bar{f}_y(y). \quad (a)$$

式(a)要求在边界上  $y$  值不同的各点,应力分量与对应的面力分量必须处处相等。这种严格的边界条件是较难满足的。但是,当  $l \gg h$  时,  $x = \pm l$  是梁的边

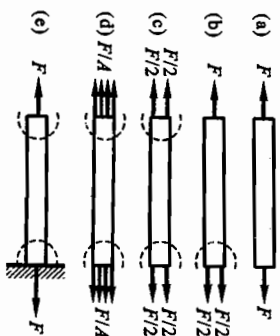


图 2-8

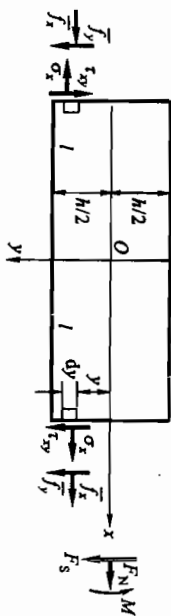


图 2-9

界的一小部分。这时,可以应用圣维南原理,用如下的静力等效条件来代替式(a)的条件,即在这一局部边界面上,使应力的主矢量和主矩分别等于对应的面力的主矢量和主矩。由于面力是已知的,从而面力的主矢量和主矩的绝对值及其方向也是知道的。因此,应力的主矢量和主矩的绝对值,应分别等于面力的主矢量和主矩的绝对值;而面力的主矢量和主矩的方向,就是应力的主矢量和主矩的方向,并可按应力分量的正负号规定来确定应力的主矢量和主矩的正负号。

因此,在  $x = \pm l$  的次要边界上,可以列出三个主矢量和主矩对等的积分边界条件(设梁的宽度,即  $z$  方向的尺寸为 1)代替式(a),即

$$\left. \begin{aligned} \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x)_{x=\pm l} dy &= \pm \int_{-h/2}^{h/2} \bar{f}_x(y) dy, \\ \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x)_{x=\pm l} dy \cdot y &= \pm \int_{-h/2}^{h/2} \bar{f}_x(y) dy \cdot y, \\ \int_{-h/2}^{h/2} (\tau_{xy})_{x=\pm l} dy &= \pm \int_{-h/2}^{h/2} \bar{f}_y(y) dy. \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

如果不是给出面力的分布,而是直接给出单位宽度上面力的主矢量和主矩,如图 2-9 中所示的  $F_N, F_S, M$ , 则在  $x = l$  的小边界上,三个积分边界条件成为

$$\left. \begin{aligned} \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x)_{x=l} dy &= F_N, \\ \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x)_{x=l} dy \cdot y &= M, \\ \int_{-h/2}^{h/2} (\tau_{xy})_{x=l} dy &= F_S. \end{aligned} \right\} \quad (c)$$

将严格的边界条件(a)与近似的边界条件(b)相比,前者是精确的条件,为函数方程,后者是近似的积分条件,为简单的代数方程;前者有两个条件,后者有三个条件;前者不易满足,后者易于满足。因此,在求解弹性力学平面问题时,常常在局部边界上用近似的三个积分的应力边界条件代替严格的边界条件,使问题的求解大为简化,而得出的应力结果只对该局部边界附近的区域有显著影响。

## §2-8 按位移求解平面问题

在以上几节中,已经建立了弹性力学平面问题的基本方程和边界条件,即:平衡微分方程(2-2),几何方程(2-8)和物理方程(2-12)或(2-13),以及边界上的位移边界条件(2-14)和应力边界条件(2-15)。求解弹性力学平面问题,即求解3个应力分量、3个形变分量及2个位移分量的未知函数,这些函数在区域内必须满足基本方程,在边界上必须满足边界条件。由于未知函数及应满足的方程数目较多,问题是难以求解的。为此,通常采用类似于代数方程中的消元法进行求解。

按位移求解的方法,又称为位移法。它是以位移分量为基本未知函数,从方程和边界条件中消去应力分量和形变分量,导出只含位移分量的方程和相应的边界条件,并由此解出位移分量,然后再求出形变分量和应力分量。此解法类似于结构力学中的位移法。

按应力求解的方法,又称为应力法。它是以应力分量为基本未知函数,从方程和边界条件中消去位移分量和形变分量,导出只含应力分量的方程和边界条件,并由此解出应力分量,然后再求出形变分量和位移分量。此解法类似于结构力学中的力法。

现在来导出按位移求解平面问题的方程和边界条件。为此,取位移分量 $u$ 和 $v$ 为基本未知函数。

为了从方程和边界条件中消去形变分量和应力分量,须将它们用基本未知函数——位移分量来表示。首先,几何方程(2-8)就是用位移分量表示形变分量的表达式。其次,对于平面应力问题,从物理方程(2-12)求出应力分量,使它们用形变分量表示,

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\mu^2} (\epsilon_x + \mu \epsilon_y), & \sigma_y &= \frac{E}{1-\mu^2} (\epsilon_y + \mu \epsilon_x), \\ \tau_{xy} &= \frac{E}{2(1+\mu)} \gamma_{xy}. \end{aligned} \right\} \quad (2-16)$$

再将几何方程(2-8)代入,就得到用位移分量表示应力分量的表达式

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\mu^2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \mu \frac{\partial v}{\partial y} \right), & \sigma_y &= \frac{E}{1-\mu^2} \left( \frac{\partial v}{\partial y} + \mu \frac{\partial u}{\partial x} \right), \\ \tau_{xy} &= \frac{E}{2(1+\mu)} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right). \end{aligned} \right\} \quad (2-17)$$

下面来导出求解位移分量的方程和边界条件。在区域内还有两个平衡微分方程(2-2),将其中的应力分量用式(2-17)代入,即得

$$\left. \begin{aligned} \frac{E}{1-\mu^2} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) + f_x &= 0, \\ \frac{E}{1-\mu^2} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) + f_y &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2-18)$$

这是按位移求解平面应力问题时所用的基本微分方程,实际上它就是用位移表示的平衡微分方程。

另一方面,将式(2-17)代入应力边界条件(2-15),简化以后,得

$$\left. \begin{aligned} \frac{E}{1-\mu^2} \left[ l \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \mu \frac{\partial v}{\partial y} \right) + m \frac{1-\mu}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right]_l &= \bar{f}_x, \\ \frac{E}{1-\mu^2} \left[ m \left( \frac{\partial v}{\partial y} + \mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + l \frac{1-\mu}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right]_l &= \bar{f}_y. \end{aligned} \right\} \quad (\text{在 } S_\sigma \text{ 上}) \quad (2-19)$$

这是用位移表示的应力边界条件,也就是按位移求解平面应力问题时所用的应力边界条件。位移边界条件仍然如式(2-14)所示,即

$$(u)_l = \bar{u}, \quad (v)_l = \bar{v}. \quad (\text{在 } S_u \text{ 上}) \quad (2-14)$$

总结起来,按位移求解平面应力问题时,要使得位移分量在区域内满足微分方程(2-18),并在边界上满足位移边界条件(2-14)或应力边界条件(2-19)。求出位移分量以后,即可用几何方程(2-8)求得形变分量,再用式(2-17)求得应力分量。

平面应变问题与平面应力问题相比,除了物理方程不同外,其他的方程与边界条件都相同。只要将上述各方程和边界条件中的 $E$ 换为 $\frac{E}{1-\mu}$ , $\mu$ 换为 $\frac{\mu}{1-\mu}$ ,就可以得出平面应变问题按位移求解的方程和边界条件。同样,如果已求得平面应力问题的解答,只需将 $E, \mu$ 作同样的转换,就可以得出对应的平面应变问题的解答。

位移法能适应各种边界条件问题的求解。其缺点是,从较复杂的方程(2-18)和边界条件(2-19)等具体求解位移函数时,往往遇到很大的困难,因此已得出的函数解答很少。但是,位移法仍然是弹性力学的一种基本解法,它在弹性力学的各种近似数值解法中有着广泛的应用。

为了说明位移法的应用,下面举一个简单的例题:设图2-10a所示的杆件,在 $y$ 方向的上端为固定,而下端为自由,受自重体力 $f_x=0, f_y=\rho g$  ( $\rho$ 是杆的密度,  $g$ 是重力加速度的作用)。试用位移法求解此问题。

为了简化,将这个问题作为一维问题处理,设 $u=0, v=v(y)$ ,泊松比 $\mu=0$ 。将这些量和体力分量代入方程(2-18),其中第一式自然满足,而第二式成为

$$\frac{d^2 v}{dy^2} = -\frac{\rho g}{E}.$$

由此式解出

$$v = -\frac{\rho g}{2E}y^2 + Ay + B. \quad (a)$$

上下边的边界条件分别要求

$$\begin{aligned} (v)_{y=0} &= 0, & (b) \\ (\sigma_y)_{y=h} &= 0. & (c) \end{aligned}$$

将式(a)代入式(b)得  $B=0$ , 将式(a)(取  $B=0$ )代入式(2-17)第二式, 再代入式(c), 即得  $A = \frac{\rho g h}{E}$ 。

由此得出解答

$$v = \frac{\rho g}{2E}(2hy - y^2), \quad \sigma_y = \rho g(h - y).$$

对于图2-10b所示的问题, 读者可以类似地求出其解答。

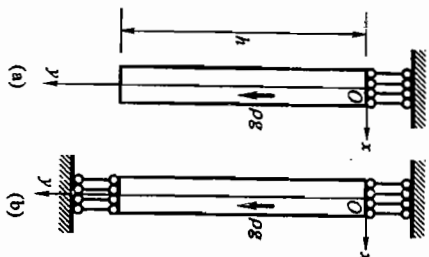


图 2-10

## §2-9 按应力求解平面问题 相容方程

按应力求解平面问题时, 应力分量  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  取为基本未知函数。其他未知函数中形变分量可以简单地用应力分量表示, 即物理方程(2-12)或(2-13)。为了用应力分量表示位移分量, 须将物理方程代入几何方程(2-8), 然后通过积分等运算求出位移分量。因此, 用应力分量表示位移分量的表达式较为复杂, 且其中包含了特定的积分项。从而使位移边界条件(2-14)用应力分量表示的式子十分复杂, 且很难求解。所以在按应力求解函数解答时, 通常只求全部为应力边界条件的问题。

现在同样应用消元法, 来导出按应力求解平面问题的方程。平衡微分方程中应力分量有3个, 而方程只有2个, 还不足以求出应力分量。因此, 需要从几何方程和物理方程中消去位移分量和形变分量, 导出只含应力分量的补充方程。

由于位移分量只在几何方程中存在, 可以先从几何方程中消去位移分量。考察几何方程(2-8), 即

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}.$$

将  $\epsilon_x$  对  $y$  的二阶导数和  $\epsilon_y$  对  $x$  的二阶导数相加, 得

$$\frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 v}{\partial y \partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right).$$

但这个等式右边括弧中的表达式就等于  $\gamma_{xy}$ , 于是得

$$\frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}. \quad (2-20)$$

这个关系式称为形变协调方程或相容方程。上式表示, 在连续性假定下, 物体的变形是满足几何方程的, 并由此可以导出相容方程。也就是说, 连续体的形变分量  $\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy}$  不是互相独立的, 而是相关的, 它们之间必须满足相容方程, 才能保证对应的位移分量  $u$  和  $v$  的存在。如果任意选取函数  $\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy}$ , 而不能满足相容方程, 那么, 由三个几何方程中的任何两个求出的位移分量, 将与第三个几何方程不能相容, 也就是互相矛盾。这就是说, 不满足相容方程的形变分量, 不是物体中实际存在的, 也求不出对应的位移分量。

例如, 试取显然不满足相容方程(2-20)的形变分量

$$\epsilon_x = 0, \quad \epsilon_y = 0, \quad \gamma_{xy} = Cxy, \quad (a)$$

则由几何方程(2-8)中的前二式得

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

从而得

$$u = f_1(y), \quad v = f_2(x). \quad (b)$$

另一方面, 将式(a)中的第三式代入几何方程(2-8)中的第三式, 又得出

$$\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = Cxy. \quad (c)$$

显然, 式(b)和式(c)不能相容, 也就是互相矛盾。

现在, 我们来利用物理方程将相容方程中的形变分量消去, 使相容方程中只包含应力分量(基本未知函数)。

对于平面应力的情况, 将物理方程(2-12)代入式(2-20), 得

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} (\sigma_x - \mu \sigma_y) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\sigma_y - \mu \sigma_x) = 2(1 + \mu) \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y}. \quad (d)$$

利用平衡微分方程, 可以简化上式, 使它只包含正应力而不包含切应力。为此, 将平衡微分方程(2-2)写成

$$\begin{cases} \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = -\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} - f_x, \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = -\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} - f_y. \end{cases}$$

将二式分别对  $x$  及  $y$  求导, 然后相加, 并注意  $\tau_{yx} = \tau_{xy}$ , 得

$$2 \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} - \frac{\partial f_x}{\partial x} - \frac{\partial f_y}{\partial y}.$$

代入式(d), 简化以后得到用应力表示的相容方程



$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(\sigma_x + \sigma_y) = -(1 + \mu) \left(\frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y}\right). \quad (2-21)$$

对于平面应变的情况,进行同样的推导,可以导出一个与此相似的方程

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(\sigma_x + \sigma_y) = -\frac{1}{1-\mu} \left(\frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y}\right). \quad (2-22)$$

但是,也可以不必进行推导,只要如 §2-5 中所述,把方程(2-21)中的  $\mu$  换为  $\frac{\mu}{1-\mu}$ , 就得到这一方程。

归纳起来讲,按应力求解平面问题时,应力分量  $\sigma_x, \sigma_y$  和  $\tau_{xy}$  必须满足下列条件: (1) 在区域内的平衡微分方程(2-2); (2) 在区域内的相容方程(2-21)或(2-22); (3) 在边界上的应力边界条件(2-15), 其中假设只求解全部为应力边界条件的问题。

对于单连体(只有一个连续边界的物体),上述条件就是确定应力的全部条件。对于多连体(具有两个或两个以上的连续边界的物体,如有孔口的物体),还须满足多连体中的位移单值条件。因为对于多连体的情况,应力分量的表达式中常常有待定的项,需要利用“位移必须为单值”这样的所谓位移单值条件,才能完全确定应力分量。这点将在 §4-6 中作深入介绍。

## §2-10 常体力情况下的简化 应力函数

在很多的工程问题中,体力是常量,即体力分量  $f_x$  和  $f_y$  不随坐标  $x$  和  $y$  而变。例如重力和常加速度下平行移动时的惯性力,就是常量的体力。在常体力的情况下,相容方程(2-21)和(2-22)的右边都成为零,因而两种平面问题的相容方程都简化为

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(\sigma_x + \sigma_y) = 0. \quad (2-23)$$

可见,在体力为常量的情况下,  $\sigma_x + \sigma_y$  应当满足拉普拉斯微分方程即调和方程,也就是说,  $\sigma_x + \sigma_y$  应当是调和函数。为了书写简便,下面用记号  $\nabla^2$  代表  $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ , 把方程(2-23)简写为

$$\nabla^2(\sigma_x + \sigma_y) = 0.$$

注意,在体力为常量的情况下,平衡微分方程(2-2)、相容方程(2-23)和应力边界条件(2-15)中都不包含弹性常数,从而对于两种平面问题都是相同的。因此,当体力为常量时,在单连体的应力边界问题中,如果两个弹性体具有相同的边界形状,并受到同样分布的外力,那么,就不管这两个弹性体的材料是否相

同,也不管它们是在平面应力情况下或是在平面应变情况下,应力分量  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  的分布是相同的(两种平面问题中的应力分量  $\sigma_x$ , 以及形变和位移,却不一定相同)。

根据上述结论,针对某种材料的物体而求出的应力分量  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ , 也适用于具有同样边界并受有同样外力的其他材料的物体;针对平面应力问题而求出的这些应力分量,也适用于边界相同、外力相同的平面应变情况下的物体。这对于弹性力学解答在工程上的应用,提供了极大的方便。

另一方面,根据上述结论,在用实验方法量测结构或构件的上述应力分量时,可以用便于量测的材料来制造模型,以代替原来不便于量测的结构或构件材料;还可以用平面应力情况下的薄板模型,来代替平面应变情况下的长柱形的结构或构件。这对于实验应力分析,也提供了极大的方便。

由以上的讨论可见,在体力为常量的情况下,按应力求解应力边界问题时,应力分量  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  应当满足平衡微分方程

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + f_x &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + f_y &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

和相容方程

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(\sigma_x + \sigma_y) = 0, \quad (b)$$

并在边界上满足应力边界条件(2-15)。对于多连体,还须考虑位移单值条件。

首先来考察平衡微分方程(a)。这是一个非齐次微分方程组,它的解答包含两部分,即,它的任意一个特解及下列齐次微分方程的通解:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (c)$$

特解可以取为

$$\sigma_x = -f_x, \quad \sigma_y = -f_y, \quad \tau_{xy} = 0, \quad (d)$$

也可以取为

$$\sigma_x = 0, \quad \sigma_y = 0, \quad \tau_{xy} = -f_x y - f_y x,$$

以及

$$\sigma_x = -f_x x - f_y y, \quad \sigma_y = -f_x x - f_y y, \quad \tau_{xy} = 0,$$

等的形式,因为它们都能满足微分方程(a)。

下面来研究齐次方程(c)的通解。根据微分方程理论,偏导数具有相容性。

若设函数  $f = f(x, y)$ , 则有

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)。$$

假如函数  $C$  和  $D$  满足下列关系式

$$\frac{\partial}{\partial x} (C) = \frac{\partial}{\partial y} (D),$$

那么, 对照上式, 一定存在某一函数  $f$ , 使得

$$C = \frac{\partial f}{\partial y}, \quad D = \frac{\partial f}{\partial x}。$$

为了求得齐次微分方程(c)的通解, 将其中前一个方程改写为

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} (-\tau_{xy})。$$

根据上述微分方程理论, 这就一定存在某一个函数  $A(x, y)$ , 使得

$$\sigma_x = \frac{\partial A}{\partial y}, \quad (e)$$

$$-\tau_{xy} = \frac{\partial A}{\partial x}。 \quad (f)$$

同样, 将式(c)中的第二个方程改写为

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} (-\tau_{xy}),$$

可见也一定存在某一个函数  $B(x, y)$ , 使得

$$\sigma_y = \frac{\partial B}{\partial x}, \quad (g)$$

$$-\tau_{xy} = \frac{\partial B}{\partial y}。 \quad (h)$$

由式(f)及式(h)得

$$\frac{\partial A}{\partial x} = \frac{\partial B}{\partial y},$$

因而又一定存在某一个函数  $\Phi(x, y)$ , 使得

$$A = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad (i)$$

$$B = \frac{\partial \Phi}{\partial x}。 \quad (j)$$

将式(i)代入式(e), 式(j)代入式(g), 并将式(i)代入式(f), 即得通解

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}。 \quad (k)$$

将通解(k)与任一组特解叠加, 例如与特解(d)叠加, 即得平衡微分方程(a)的全解:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - f_x x, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - f_y y, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}。 \quad (2-24)$$

$\Phi$  称为平面问题的应力函数, 又称为艾里应力函数。由于式(2-24)是从平衡微分方程导出的解答, 所以必然满足该方程。同时, 推导解答(2-24)的过程, 也就证明了应力函数  $\Phi$  的存在性。还应指出的是, 虽然  $\Phi$  还是一个待定的未知函数, 但是, 用  $\Phi$  表示 3 个应力分量  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  后, 使得平面问题的求解得到很大的简化: 待求的未知函数从 3 个变换为 1 个, 并从求解应力分量  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  变换为求解应力函数  $\Phi$ 。

为了求解应力函数  $\Phi$ , 下面来分析应力函数应满足的条件。由于式(2-24)所表示的应力分量应该满足相容方程(b), 即方程(2-23), 将式(2-24)代入式(b), 得到

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - f_x x + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - f_y y \right) = 0。$$

注意  $f_x$  及  $f_y$  为常量, 于是上式简化为

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right) = 0, \quad (1)$$

或者展开而成为

$$\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} = 0。 \quad (2-25)$$

这就是用应力函数表示的相容方程。由此可见, 应力函数应当满足重调和方程, 也就是说, 它应当是重调和函数。方程(1)或(2-25)可以简写为  $\nabla^2 \nabla^2 \Phi = 0$ , 或者进一步简写为

$$\nabla^4 \Phi = 0。$$

此外, 将式(2-24)代入应力边界条件(2-15), 则应力边界条件也可以用应力函数  $\Phi$  表示。通常为了书写的简便, 仍然写成为式(2-15)。

综上所述, 在常体力情况下, 弹性力学平面问题中存在着一个应力函数  $\Phi$ 。按应力求解平面问题, 可以归纳为求解一个应力函数  $\Phi$ , 它必须满足在区域内的相容方程(2-25), 在边界上的应力边界条件(2-15) (假设全部都为应力边界条件); 在多连体中, 还须满足位移单值条件。从上述条件求解出应力函数  $\Phi$  后, 便可以由式(2-24)求出应力分量, 然后再求出应变分量和位移分量。

## 习 题

2-1 如果某一问题中,  $\sigma_x = \tau_{xz} = \tau_{xy} = 0$ , 只存在平面应力分量  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ , 且它们不沿  $z$  方向变化, 仅为  $x, y$  的函数, 试考虑此问题是否是平面应力问题?

2-2 如果某一问题中,  $\epsilon_x = \gamma_{xz} = \gamma_{xy} = 0$ , 只存在平面应变分量  $\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy}$ , 且它们不沿  $z$  方向变化, 仅为  $x, y$  的函数, 试考虑此问题是否是平面应变问题?



2-3 试分析说明,在不受任何面力作用的空间体表面附近的薄层中,图2-11,其应力状态接近于平面应力的情况。

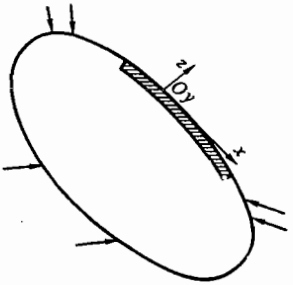


图 2-11

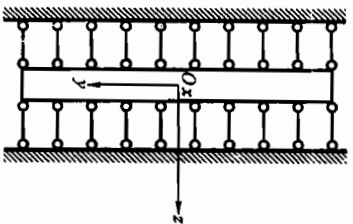


图 2-12

2-4 试分析说明,在板面上处处受法向约束且不受切向面力作用的等厚度薄板中,图2-12,当板边上只受  $x, y$  向的面力或约束,且不沿厚度变化时,其应变状态接近于平面应变的情况。

2-5 在图2-3的微分体中,若将对形心的力矩平衡条件  $\sum M_c = 0$ ,改为对角点的力矩平衡条件,试问将导出什么形式的方程?

2-6 在图2-3的微分体中,若考虑每一面上的应力分量不是均匀分布的,试问将导出什么形式的平衡微分方程?

提示:当考虑至二阶微量的条件下,上两题都将得出相同于式(2-1)和式(2-2)的平衡条件。

2-7 在导出平面问题的三套基本方程时,分别应用了哪些基本假定?这些方程的适用条件是什么?

2-8 试列出图2-13,图2-14所示问题的全部边界条件。在其端部边界上,应用圣维南原理列出三个积分的应力边界条件。

答案:对于图2-14所示问题的边界条件是:在  $y = \pm h/2$  边界上,

$$\begin{aligned} (\sigma_x)_{y=\pm h/2} &= 0, & (\tau_{xy})_{y=\pm h/2} &= -q_1; \\ (\sigma_y)_{y=\pm h/2} &= -q, & (\tau_{yx})_{y=\pm h/2} &= 0. \end{aligned}$$

在  $x=0$  的次要边界上,列出三个积分的应力边界条件,

$$\begin{aligned} \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x)_{x=0} dy &= -F_N, & \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x)_{x=0} y dy &= -M, \\ \int_{-h/2}^{h/2} (\tau_{xy})_{x=0} dy &= -F_s. \end{aligned}$$

在  $x=l$  的次要边界上,  $(u)_{x=l} = 0, (v)_{x=l} = 0$ 。这两个位移边界条件可以改用三个积分的应力边界条件来代替。

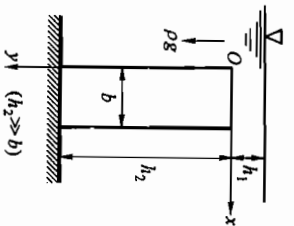


图 2-13

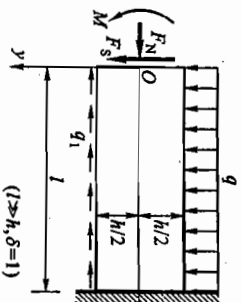


图 2-14

2-9 试应用圣维南原理,列出图2-15所示的两个问题中OA边的三个积分的应力边界条件,并比较两者的面力是否是静力等效?

2-10 检验平面问题中的位移分量是否为正确解答的条件是什么?

2-11 检验平面问题中的应力分量是否为正确解答的条件是什么?

2-12 检验平面问题中的应力函数  $\phi$  是否为正确解答的条件是什么?

2-13 检验下列应力分量是否是图示问题的解答:

$$(a) \text{ 图 2-16, } \sigma_x = \frac{y^2}{b^2} q, \quad \sigma_y = \tau_{xy} = 0.$$

图 2-15

$$(b) \text{ 图 2-17, 由材料力学公式, } \sigma_x = \frac{M}{I} y, \quad \tau_{xy} = \frac{F_s S}{bI} \text{ (取梁的厚度 } b=1), \text{ 得出所示问题的解答:}$$

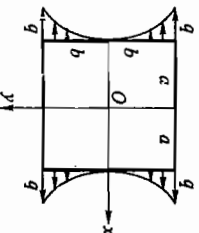


图 2-16

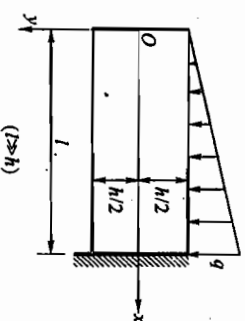


图 2-17

$$\sigma_x = -2q \frac{x^2 y}{h^3}, \quad \tau_{xy} = -\frac{3q x^2}{4 h^3} (h^2 - 4y^2).$$

又根据平衡微分方程和边界条件得出

$$\sigma_y = \frac{3q}{2lh} \frac{xy^2}{3} - 2q \frac{xy}{lh} - \frac{q}{2} \frac{x}{l}。$$

试导出上述公式,并检验解答的正确性。

答案:(a),(b)问题中的应力分量均不满足相容方程,因而不是问题的解答。

2-14 试证明:在发生最大与最小切应力的面上,正应力的数值都等于两个主应力的平均值。

2-15 设已求得一点处的应力分量,试求  $\sigma_1, \sigma_2, \alpha_1$ :

(a)  $\sigma_x = 100, \sigma_y = 50, \tau_{xy} = 10\sqrt{50}$ ;

(b)  $\sigma_x = 200, \sigma_y = 0, \tau_{xy} = -400$ ;

(c)  $\sigma_x = -2000, \sigma_y = 1000, \tau_{xy} = -400$ ;

(d)  $\sigma_x = -1000, \sigma_y = -1500, \tau_{xy} = 500$ 。

答案:(a)  $150, 0, 35.16^\circ$ ; (b)  $512, -312, -37.57^\circ$ ;

(c)  $1052, -2052, -82.32^\circ$ ; (d)  $-691, -1809, 31.43^\circ$ 。

2-16 设有任意形状的等厚度薄板,体力可以不计,在全部边界上(包括孔口边界上)受有均匀压力  $q$ 。试证  $\sigma_x = \sigma_y = -q$  及  $\tau_{xy} = 0$  能满足平衡微分方程、相容方程和应力边界条件,也能满足位移单值条件,因而就是正确的解答。

提示:(1)在校核边界条件时,应考虑边界为任意的斜边界,并应用公式(2-15)。

(2)对于多连体的情况,应由应力分量求出位移分量,再校核位移单值条件是否满足(参考第三章中求位移的方法)。

2-17 设有矩形截面的悬臂梁,在自由端受有集中荷载  $F$ ,图 2-18,体力可以不计。试根据材料力学公式,写出弯应力  $\sigma_x$  和切应力  $\tau_{xy}$  的表达式,并取挤压应力  $\sigma_y = 0$ ,然后证明,这些表达式满足平衡微分方程和相容方程,再说明,这些表达式是否就表示正确的解答。

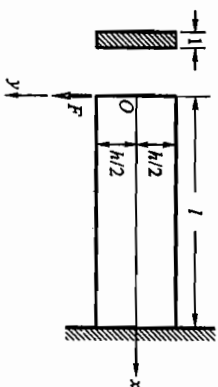


图 2-18

2-18 试证明,如果体力虽然不是常量,但却是有势的力,即体力分量可以表示为

$$f_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad f_y = -\frac{\partial V}{\partial y},$$

其中  $V$  是势函数,则应力分量亦可用应力函数表示成为

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + V, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + V, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}。$$

试导出相应的相容方程。

答案:平面应力问题中的相容方程为  $\nabla^4 \Phi = -(1-\mu)\nabla^2 V$ ,

平面应变问题中的相容方程为  $\nabla^4 \Phi = -\frac{1-2\mu}{1-\mu}\nabla^2 V$ 。

2-19 试证明,§2-4 中所述的刚体位移分量  $u_0, v_0$  及  $\omega$  实际上就是弹性体中坐标原点的位移分量和转动角度。

## 第三章 平面问题的直角坐标解答

### §3-1 逆解法与半逆解法 多项式解答

在上一章中已经得出,当体力为常量时,按应力求解平面问题,最后可以归纳为求解一个应力函数  $\Phi$ ,它必须满足下列条件:

(1) 在区域内的相容方程,即

$$\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} = 0; \quad (2-25)$$

(2) 在边界  $s$  上的应力边界条件(假设全部为应力边界条件),即

$$\left. \begin{aligned} (l\sigma_x + m\tau_{xy})_s &= \bar{f}_x, \\ (m\sigma_y + l\tau_{xy})_s &= \bar{f}_y, \end{aligned} \right\} \quad (\text{在 } s \text{ 上}) \quad (2-15)$$

(3) 对于多连体,还须满足多连体中的位移单值条件。

求出应力函数  $\Phi$  后,可以由下式求得应力分量,即

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - f_x, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - f_y, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}, \quad (2-24)$$

然后再求出形变分量和位移分量。

由于相容方程(2-25)是偏微分方程,它的通解不能写成有限项数的形式,因此,我们一般都不能直接求解问题,而只能采用逆解法或半逆解法。

所谓逆解法,就是先设定各种形式的、满足相容方程(2-25)的应力函数  $\Phi$ ;并由式(2-24)求得应力分量;然后再根据应力边界条件(2-15)和弹性体的边界形状,看这些应力分量对应于边界上什么样的面力,从而得知所选取的应力函数可以解决的问题。

所谓半逆解法,就是针对所要求解的问题,根据弹性体的边界形状和受力情况,假设部分或全部应力分量的函数形式;并从而推出应力函数的形式;然后代入相容方程,求出应力函数的具体表达式;再按式(2-24)由应力函数求得应力分量;并考察这些应力分量能否满足全部应力边界条件(对于多连体,还须满足位移单值条件)。如果所有条件都能满足,自然得出的就是正确解答。如果某方面的条件不能满足,就要另作假设,重新进行求解。

下面先用逆解法求出几个简单平面问题的解答。假定体力可以不计,也就是  $f_x = f_y = 0$ ,应力函数取为多项式。

首先取应力函数为一次式

$$\Phi = a + bx + cy.$$

不论各系数取任何值,相容方程(2-25)总能满足。由式(2-24)得应力分量  $\sigma_x = 0, \sigma_y = 0, \tau_{xy} = \tau_{yx} = 0$ 。不论弹性体为任何形状,也不论坐标轴如何选择,由应力边界条件总是得出  $\bar{f}_x = \bar{f}_y = 0$ 。于是可见:(1) 线性应力函数对应于无体力、无面力、无应力的状态;(2) 把平面问题的应力函数加上一个线性函数,并不影响应力。

其次,取应力函数为二次式

$$\Phi = ax^2 + bxy + cy^2.$$

不论各系数取任何值,相容方程(2-25)也总能满足。为了起见,试分别考察该式中每一项所能解决的问题。

对应于  $\Phi = ax^2$ , 应力分量是  $\sigma_x = 0, \sigma_y = 2a, \tau_{xy} = \tau_{yx} = 0$ 。对于图 3-1a 所示的矩形板和坐标轴,当板内发生上述应力时,由应力边界条件可知左右两边没有面力,而上下两边分别受有向上和向下的均布面力  $2a$ 。可见,应力函数  $\Phi = ax^2$  能解决矩形板在  $y$  方向受均布拉力(设  $a > 0$ )或均布压力(设  $a < 0$ )的问题。

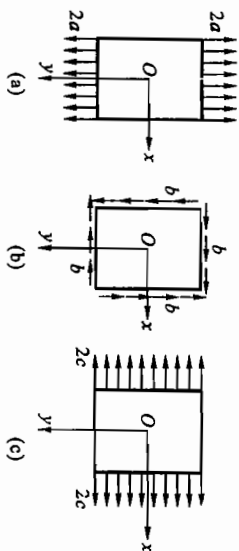


图 3-1

对应于  $\Phi = bxy$ , 应力分量是  $\sigma_x = 0, \sigma_y = 0, \tau_{xy} = \tau_{yx} = -b$ 。对于图 3-1b 所示的矩形板和坐标轴,当板内发生上述应力时,由应力边界条件可知,在左右两边分别有向下和向上的均布面力  $b$ ,而在上下两边分别有向右和向左的均布面力  $b$ ,可见,应力函数  $\Phi = bxy$  能解决矩形板受均布剪力的问题。

同样可见,应力函数  $\Phi = cy^2$  能解决矩形板在  $x$  方向受均布拉力(设  $c > 0$ )或均布压力(设  $c < 0$ )的问题,图 3-1c。

再其次,取三次式

$$\Phi = ay^3.$$

不论系数  $a$  取任何值,相容方程(2-25)也总能满足。

对应的应力分量是  $\sigma_x = 6ay, \sigma_y = 0, \tau_{xy} = \tau_{yx} = 0$ 。对于图 3-2 所示的矩形

板和坐标轴,当板内发生上述应力时,上下两边没有面力;在左右两边,没有铅直面力,有按直线变化的水平面力,而每一边上的水平面力合成为一个力偶。可见,应力函数  $\Phi = ay^3$  能解决矩形梁受纯弯曲的问题,详细的讨论见下节。

如果取应力函数  $\Phi$  为四次或四次以上的多项式,则其中的系数必须满足一定的条件,才能满足相容方程。

图 3-2

## § 3-2 矩形梁的纯弯曲

设有矩形截面的长梁(长度  $l$  远大于深度  $h$ ),它的宽度远小于深度和长度(近似的平面应力情况),或者远大于深度和长度(近似的平面应变情况),在两端受相反的力偶而弯曲,体力可以不计。为了方便,取单位宽度的梁来考察,图 3-3,并命每单位宽度上力偶的矩为  $M$ 。注意,  $M$  的量纲是  $\text{LMT}^{-2}$ 。

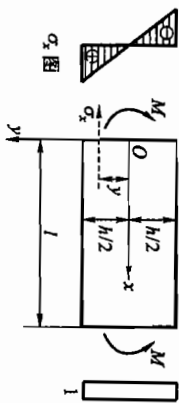


图 3-3

取坐标轴如图所示。由前一节中已知,满足相容方程的应力函数

$$\Phi = ay^3.$$

能解决纯弯曲的问题,而相应的应力分量为

$$\sigma_x = 6ay, \quad \sigma_y = 0, \quad \tau_{xy} = \tau_{yx} = 0. \quad (a)$$

现在来考察,这些应力分量是否能满足边界条件,如果能满足,系数  $a$  应该取什么值。

首先考虑上下两个主要边界(占边界绝大部分)的条件。在下边和上边,都没有面力,要求

$$(\sigma_y)_{y=\pm \frac{h}{2}} = 0, \quad (\tau_{xy})_{y=\pm \frac{h}{2}} = 0.$$

这是能满足的,因为在所有各点都有  $\sigma_y = 0, \tau_{xy} = 0$ 。其次,考虑左右端次要边界(占边界很小部分)的条件。在左端和右端,没有铅直面力,分别要求

$$(\tau_{xy})_{x=0} = 0, \quad (\tau_{xy})_{x=l} = 0,$$

这也是能满足的,因为在所有各点都有  $\tau_{xy} = 0$ 。

此外,由于  $x=0, l$  的两端面是相对较小的边界,可以应用圣维南原理,将关于  $\sigma_x$  的边界条件改用主矢量和主矩的条件代替。即在左端和右端,边界面上  $\sigma_x$  合成的主矢量应为零,而  $\sigma_x$  合成的主矩应等于面力的力偶矩  $M$ ,亦即

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma_x)_{x=0, l} dy = 0, \quad \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma_x)_{x=0, l} y dy = M。$$

将式(a)中的  $\sigma_x$  代入,上列二式成为

$$6a \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y dy = 0, \quad 6a \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 dy = M。$$

前一式总能满足,而后一式要求

$$a = \frac{2M}{h^3}。$$

代入式(a),得

$$\sigma_x = \frac{12M}{h^3} y, \quad \sigma_y = 0, \quad \tau_{xy} = \tau_{yx} = 0。 \quad (b)$$

注意到梁截面的惯矩是  $I = \frac{1 \times h^3}{12}$ , 上式又可以改写成为

$$\sigma_x = \frac{M}{I} y, \quad \sigma_y = 0, \quad \tau_{xy} = \tau_{yx} = 0。 \quad (3-1)$$

这就是矩形梁受纯弯曲时的应力分量,与材料力学中完全相同,即,梁的各纤维只受有按直线分布的所谓弯应力,如图所示。

应当指出,组成梁端力偶的面力必须按如图 3-2 所示的直线分布,解答(3-1)才是完全精确的。如果两端的面力按其他方式分布,解答(3-1)是有误差的。但是,按照圣维南原理,只在梁的两端附近有显著的误差;在离开梁端较远之处,误差是可以不计的。

### §3-3 位移分量的求出

本节中以矩形梁的纯弯曲问题为例,说明如何由应力分量求出位移分量。

假定这里是平面应力的情况。首先,将应力分量(3-1)代入物理方程(2-12),得形变分量

$$\epsilon_x = \frac{M}{EI} y, \quad \epsilon_y = -\frac{\mu M}{EI} y, \quad \gamma_{xy} = 0。 \quad (a)$$

然后,再将式(a)的形变分量代入几何方程(2-8),得

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{M}{EI} y, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\mu M}{EI} y, \quad \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0。 \quad (b)$$

前二式的积分给出

$$u = \frac{M}{EI} xy + f_1(y), \quad v = -\frac{\mu M}{2EI} y^2 + f_2(x), \quad (c)$$

其中的  $f_1$  和  $f_2$  分别是  $y$  和  $x$  的待定函数,可以通过几何方程的第三式来求出。将式(c)代入式(b)中的第三式,得

$$\frac{df_2(x)}{dx} + \frac{M}{EI} x + \frac{df_1(y)}{dy} = 0,$$

将上式移项而得

$$-\frac{df_1(y)}{dy} = \frac{df_2(x)}{dx} + \frac{M}{EI} x。$$

等式左边只是  $y$  的函数,而等式右边只是  $x$  的函数。因此,只可能两边都等于同一常数  $\omega$ 。于是有

$$\frac{df_1(y)}{dy} = -\omega, \quad \frac{df_2(x)}{dx} = -\frac{M}{EI} x + \omega。$$

积分以后得

$$f_1(y) = -\omega y + u_0, \quad f_2(x) = -\frac{M}{2EI} x^2 + \omega x + v_0。$$

代入式(c),得位移分量

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{M}{EI} xy - \omega y + u_0, \\ v &= -\frac{\mu M}{2EI} y^2 - \frac{M}{2EI} x^2 + \omega x + v_0, \end{aligned} \right\} \quad (d)$$

其中表示刚体位移量的常数  $\omega, u_0, v_0$  须由约束条件求得。

由式(d)中的第一式可见,不论约束情况如何(也就是不论  $\omega, u_0, v_0$  取任何值)铅直线段的转角都是(见 §2-4)

$$\beta = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{M}{EI} x - \omega。$$

在同一个横截面上,  $x$  是常量,因而  $\beta$  也是常量。于是可见,同一横截面上的各铅直线段的转角相同,说明横截面保持为平面。

又由式(d)中的第二式可见,不论约束情况如何,梁的各纵向纤维的曲率是

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{M}{EI}。 \quad (3-2)$$

这是材料力学里求梁的挠度时所用的基本公式。

如果梁是简支梁,图 3-4a,则在铰支座  $O$ , 没有水平位移和铅直位移;在连杆支座  $A$ , 没有铅直位移。因此,约束条件是

$$(u)_{x=0} = 0, \quad (v)_{x=0} = 0, \quad (v)_{x=l} = 0。$$

于是由式(d)得出下列方程来决定任意常数  $\omega, u_0, v_0$ :

$$u_0 = 0, \quad v_0 = 0, \quad -\frac{Ml^2}{2EI} + \omega l + v_0 = 0.$$

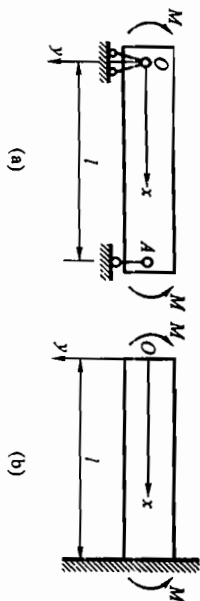


图 3-4

求出各个常数,代入式(d),就得到该简支梁的位移分量。

$$u = \frac{M}{EI} \left( x - \frac{l}{2} \right) y, \quad v = \frac{M}{2EI} (l-x)x - \frac{\mu M}{2EI} y^2. \quad (3-3)$$

梁轴的挠度方程是

$$(v)_{y=0} = \frac{M}{2EI} (l-x)x,$$

和材料力学中的结果相同。

如果梁是悬臂梁,左端自由而右端完全固定,图 3-4b,则在梁的右端( $x=l$ ),对于  $y$  的任何值  $\left(-\frac{h}{2} \leq y \leq \frac{h}{2}\right)$ ,都要求  $u=0$  和  $v=0$ 。在多项式解答中,这个条件是无法满足的。在工程实际上,这种完全固定的约束条件也是不大可能实现的。现在,和材料力学中一样,假定右端截面的中点不移动,该点的水平线段不转动。这样,约束条件是

$$(u)_{x=l} = 0, \quad (v)_{x=l} = 0, \quad \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)_{x=l} = 0.$$

于是由式(d)得出下列三个方程来决定  $\omega, u_0, v_0$ :

$$u_0 = 0, \quad -\frac{Ml^2}{2EI} + \omega l + v_0 = 0, \quad -\frac{Ml}{EI} + \omega = 0.$$

求解以后,得

$$\omega = \frac{Ml}{EI}, \quad u_0 = 0, \quad v_0 = -\frac{Ml^2}{2EI}.$$

代入式(d),得出该悬臂梁的位移分量

$$u = -\frac{M}{EI} (l-x)y, \quad v = -\frac{M}{2EI} (l-x)^2 - \frac{\mu M}{2EI} y^2. \quad (3-4)$$

梁轴的挠度方程是

$$(v)_{y=0} = -\frac{M}{2EI} (l-x)^2,$$

也和材料力学中的解答相同。

对于平面应变情况下的梁,须在以上的变形公式和位移公式中,把  $E$  换为  $\frac{E}{1-\mu^2}$ ,把  $\mu$  换为  $\frac{\mu}{1-\mu}$ 。例如,梁的纵向纤维的曲率公式(3-2),应该变换为

$$\frac{1}{\rho} = \frac{(1-\mu^2)M}{EI}. \quad (3-5)$$

### §3-4 简支梁受均布荷载

设有矩形截面的简支梁,深度为  $h$ ,长度为  $2l$ ,体力可以不计,受均布荷载  $q$ ,由两端的反力  $ql$  维持平衡,图 3-5。为了方便,仍然取单位宽度的梁来考虑。

这个问题用半逆解法求解,步骤如下:

(1) 假设应力分量的函数形式。由材料力学已知:弯应力  $\sigma_x$  主要是由弯矩引起的,切应力  $\tau_{xy}$  主要是由剪力引起的,挤压应力  $\sigma_y$  主要是由直接荷载  $q$  引起的。现在,  $q$  不随  $x$  而变,因而可以假设  $\sigma_y$  不随  $x$  而变,也就是假设  $\sigma_y$  只是  $y$  的函数:

$$\sigma_y = f(y).$$

(2) 推求应力函数的形式。将  $\sigma_y$  代入应力公式(2-24)有

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = f(y).$$

对  $x$  积分,得

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = x f(y) + f_1(y), \quad (a)$$

$$\Phi = \frac{x^2}{2} f(y) + x f_1(y) + f_2(y), \quad (b)$$

其中  $f(y), f_1(y)$  和  $f_2(y)$  都是待定的  $y$  的函数。

(3) 由相容方程求解应力函数。为使应力函数满足相容方程,将式(b)代入式(2-25),得

$$\frac{1}{2} \frac{d^4 f(y)}{dy^4} x^2 + \frac{d^4 f_1(y)}{dy^4} x + \frac{d^4 f_2(y)}{dy^4} = 0.$$

这是  $x$  的二次方程,但相容方程要求它有无数的根(全梁内的  $x$  值都应该满足它),可见它的系数和自由项都必须等于零,即



图 3-5

$$\frac{d^4 f(y)}{dy^4} = 0, \quad \frac{d^4 f_1(y)}{dy^4} = 0, \quad \frac{d^4 f_2(y)}{dy^4} + 2 \frac{d^2 f(y)}{dy^2} = 0.$$

前面两个方程要求

$$f(y) = Ay^3 + By^2 + Cy + D, \quad f_1(y) = Ey^3 + Fy^2 + Gy. \quad (c)$$

在这里,  $f_1(y)$  中的常数项已被略去, 因为这一项在  $\Phi$  的表达式中成为  $x$  的一次项, 不影响应力分量(见 §3-1)。第三个方程则要求

$$\frac{d^4 f_2(y)}{dy^4} = -2 \frac{d^2 f(y)}{dy^2} = -12Ay - 4B,$$

也就是要求

$$f_2(y) = -\frac{A}{10}y^5 - \frac{B}{6}y^4 + Hy^3 + Ky^2, \quad (d)$$

其中的一次项及常数项都被略去, 因为它们不影响应力分量。将式(c)及式(d)代入式(b), 得应力函数

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{x}{2}(Ay^3 + By^2 + Cy + D) + x(Ey^3 + Fy^2 + Gy) - \\ &\quad - \frac{A}{10}y^5 - \frac{B}{6}y^4 + Hy^3 + Ky^2. \end{aligned} \quad (e)$$

(4) 由应力函数求应力分量。将式(e)代入式(2-24), 得应力分量

$$\sigma_x = \frac{x}{2}(6Ay + 2B) + x(6Ey + 2F) -$$

$$2Ay^3 - 2By^2 + 6Hy + 2K, \quad (f)$$

$$\sigma_y = Ay^3 + By^2 + Cy + D, \quad (g)$$

$$\tau_{xy} = -x(3Ay^2 + 2By + C) - (3Ey^2 + 2Fy + G). \quad (h)$$

这些应力分量是满足平衡微分方程和相容方程的。因此, 如果能够适当选择常数  $A, B, \dots, K$ , 使所有的边界条件都被满足, 则应力分量(f), (g), (h)就是正确的解答。

在考虑边界条件以前, 先考虑一下问题的对称性(如果这个问题有对称性的话), 往往可以减少一些运算工作。在这里, 因为  $yz$  面是梁和荷载的对称面, 所以应力分布应当对称于  $yz$  面。这样,  $\sigma_x$  和  $\sigma_y$  应该是  $x$  的偶函数, 而  $\tau_{xy}$  应该是  $x$  的奇函数。于是由式(f)和式(h)可见

$$E = F = G = 0.$$

如果不考虑问题的对称性, 那么, 在考虑过全部边界条件以后, 也可以得出同样的结果, 但运算工作要比较某些。

(5) 考察边界条件。通常, 梁的跨度远大于梁的深度, 梁的上下两个边界占全部边界的绝大部分, 因而上下两个边界是主要的边界。在主要的边界上, 式(2-15)的应力边界条件必须完全得到满足; 在次要的边界上(很小部分的边界

上), 如果边界条件不能完全满足, 就可以引用圣维南原理, 用 §2-7 中的 3 个积分的应力边界条件来代替, 使边界条件得到近似的满足, 仍然可以得出有用的解答。

根据这个理由, 先来考虑上下两边的主要边界条件:

$$(\sigma_y)_{y=\pm\frac{h}{2}} = 0, \quad (\sigma_y)_{y=\pm\frac{h}{2}} = -q, \quad (\tau_{xy})_{y=\pm\frac{h}{2}} = 0.$$

将应力分量(g)和(h)代入, 并注意前面已有  $E = F = G = 0$ , 可见这些边界条件要求

$$\begin{aligned} \frac{h^3}{8}A + \frac{h^2}{4}B + \frac{h}{2}C + D &= 0, \\ -\frac{h^3}{8}A + \frac{h^2}{4}B - \frac{h}{2}C + D &= -q, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -x\left(\frac{3}{4}h^2A + hB + C\right) &= 0 \quad \text{即} \quad \frac{3}{4}h^2A + hB + C = 0, \\ -x\left(\frac{3}{4}h^2A - hB + C\right) &= 0 \quad \text{即} \quad \frac{3}{4}h^2A - hB + C = 0. \end{aligned}$$

由于上列 4 个方程是互不依赖的, 也是不相矛盾的, 而且只包含 4 个未知数, 因此可以联立求解而得出

$$A = -\frac{2q}{h^3}, \quad B = 0, \quad C = \frac{3q}{2h}, \quad D = -\frac{q}{2}.$$

将以上已确定的常数代入(f), (g), (h)三式, 得

$$\sigma_x = -\frac{6q}{h^3}x^2y + \frac{4q}{h^3}y^3 + 6Hy + 2K, \quad (i)$$

$$\sigma_y = -\frac{2q}{h^3}y^3 + \frac{3q}{2h}y - \frac{q}{2}, \quad (j)$$

$$\tau_{xy} = \frac{6q}{h^3}xy^2 - \frac{3q}{2h}x. \quad (k)$$

现在来考虑左右两边的次要边界条件。由于问题的对称性, 只需考虑其中的一边, 例如右边。如果右边的边界条件能满足, 左边的边界条件自然也能满足。

首先, 在梁的右边, 没有水平面力, 这就要求当  $x = l$  时, 不论  $y$  取任何值  $\left(-\frac{h}{2} \leq y \leq \frac{h}{2}\right)$ , 都有  $\sigma_x = 0$ 。由式(i)可见, 这是不可能满足的, 除非是  $q, H, K$  均等于零。因此, 用多项式求解, 只能要求  $\sigma_x$  在这部分边界上合成的主矢量和主矩均为零, 也就是要求

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma_x)_{x=l} dy = 0, \quad (l)$$

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma_x)_{x=1} y dy = 0. \quad (m)$$

将式(i)代入式(i), 得

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left( -\frac{6ql^2}{h^3} y + \frac{4q}{h^3} y^3 + 6Hy + 2K \right) y dy = 0.$$

积分以后得

$$K = 0.$$

将式(i)代入式(m), 并命  $K = 0$ , 得

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left( -\frac{6ql^2}{h^3} y + \frac{4q}{h^3} y^3 + 6Hy \right) y dy = 0,$$

积分以后得

$$H = \frac{ql^2}{h^3} - \frac{q}{10h}.$$

将  $H$  和  $K$  的已知值代入式(i), 得

$$\sigma_x = -\frac{6q}{h^3} x^2 y + \frac{4q}{h^3} y^3 + \frac{6ql^2}{h^3} y - \frac{3q}{5h} y. \quad (n)$$

另一方面, 梁右边的切应力  $\tau_{xy}$  应当合成为反力  $ql$ :

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\tau_{xy})_{x=l} dy = -ql.$$

在  $ql$  前面加了负号, 因为右边的切应力  $\tau_{xy}$  以向下为正, 而  $ql$  是向上的。将式(k)代入, 上式成为

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left( \frac{6ql}{h^3} y^2 - \frac{3ql}{2h} \right) dy = -ql.$$

积分以后, 可见这一条件是满足的。

将(n), (i), (k)三式略加整理, 得应力分量的最后解答

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{6q}{h^3} (l^2 - x^2) y + q \frac{y}{h} \left( 4 \frac{y^2}{h^2} - \frac{3}{5} \right), \\ \sigma_y &= -\frac{q}{2} \left( 1 + \frac{y}{h} \right) \left( 1 - \frac{2y}{h} \right)^2, \\ \tau_{xy} &= -\frac{6q}{h^3} x \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right). \end{aligned} \right\} \quad (o)$$

各应力分量沿铅直方向的变化大致如图 3-6 所示。

注意梁截面的宽度取为一个单位, 可见惯性矩是  $I = \frac{1}{12} h^3$ , 静矩是  $S = \frac{h^2}{8}$

$-\frac{y^2}{2}$ , 而梁的任一横截面上的弯矩和剪力分别为

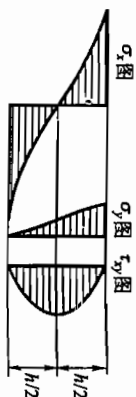


图 3-6

$$\begin{aligned} M &= ql(l+x) - \frac{q}{2}(l+x)^2 = \frac{q}{2}(l^2 - x^2), \\ F_s &= ql - q(l+x) = -qx. \end{aligned}$$

于是式(o)可以写成

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{M}{I} y + q \frac{y}{h} \left( 4 \frac{y^2}{h^2} - \frac{3}{5} \right), \\ \sigma_y &= -\frac{q}{2} \left( 1 + \frac{y}{h} \right) \left( 1 - \frac{2y}{h} \right)^2, \\ \tau_{xy} &= \frac{F_s S}{bI}. \end{aligned} \right\} \quad (3-6)$$

从应力的解答式(o)容易看出, 在长度远大于深度 (即  $l \gg h$ ) 的长梁中, 应力中各项的数量级是: 弯应力  $\sigma_x$  的第一项与  $q \frac{l^2}{h^2}$  同阶大小, 为主要应力; 切应力

$\tau_{xy}$  与  $q \frac{l}{h}$  同阶大小, 为次要应力; 而挤压应力  $\sigma_y$  及弯应力  $\sigma_x$  的第二项均与  $q$  同阶大小, 为更次要应力。

现在来比较一下简支梁受均布荷载下的弹性力学解答和材料力学解答。在弯应力  $\sigma_x$  的表达式中, 第一项是主要项, 和材料力学中的解答相同, 第二项则是弹性力学提出的修正项。对于通常的浅梁, 修正项很小, 可以不计。对于较深的梁, 则须注意修正项。读者试证: 当梁的跨度两倍于深度时, 最大弯应力须修正 1/15; 当梁的跨度四倍于深度时, 最大弯应力只须修正 1/60。因此, 对于跨度与深度之比大于 4 的梁, 材料力学中的解答已经足够精确。

应力分量  $\sigma_y$  乃是梁的各纤维之间的挤压应力, 它的最大绝对值为  $q$ , 发生在梁顶。在材料力学里, 一般不考虑这个应力分量。

切应力  $\tau_{xy}$  的表达式和材料力学里完全一样。

注意: 按照式(o), 在梁的右边和左边, 分别有水平的面力

$$\bar{f}_x = \pm (\sigma_x)_{x=\pm l} = \pm q \frac{y}{h} \left( 4 \frac{y^2}{h^2} - \frac{3}{5} \right).$$

但是, 由式(i)及式(m)可见, 每一边的水平面力是一个平衡力系, 即它的主矢量和主矩均为零。因此, 根据圣维南原理, 不管这些面力是否存在, 离两边较远处

的应力都和式(3-6)所示的一样。

弹性力学解答和材料力学解答的差别,是由于各自的解法不同。简而言之,弹性力学的解法,是严格考虑区域内的平衡微分方程、几何方程和物理方程,以及在边界上的边界条件而求解的,因而得出的解答是较精确的。而在材料力学的解法中,没有严格考虑上述条件,因而得出的是近似的解答。例如,材料力学中引用了平面截面假设而简化了几何关系,但这个假设对于一般的梁是近似的;材料力学中考虑的是有限大部分物体( $h \times dx \times b$ )的平衡条件,而不是微分体的平衡条件,因而也是近似的;材料力学中忽略了 $\sigma_y$ 的影响,并且在主要边界上也没有严格考虑应力边界条件,这些都使材料力学的解答成为近似的解答。一般地说,材料力学的解法只适用于解决杆状构件的问题,这时,它的解答具有足够的精度。对于非杆状构件的问题,不能用材料力学的解法来求解,只能用弹性力学的解法来求解。

### §3-5 楔形体受重力和液体压力

设有楔形体,图3-7a,左面铅直,右面与铅直面成角 $\alpha$ ,下端作为无限长,承受重力及液体压力,楔形体的密度为 $\rho_1$ ,液体的密度为 $\rho_2$ ,试求应力分量。

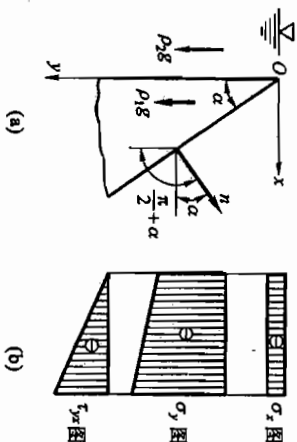


图 3-7

采用半逆解法。首先应用量纲分析方法假设应力分量的函数形式。取坐标轴如图所示。在楔形体的任意一点,每一个应力分量都将由两部分组成:一部分由重力引起,应当与 $\rho_1 g$ 成正比( $g$ 是重力加速度);第二部分由液体压力引起,应当与 $\rho_2 g$ 成正比。此外,每一部分还与 $\alpha, x, y$ 有关。由于应力的量纲是 $L^{-1}MT^{-2}$ , $\rho_1 g$ 和 $\rho_2 g$ 的量纲是 $L^{-2}MT^{-2}$ , $\alpha$ 是量纲一的量,而 $x$ 和 $y$ 的量纲是 $L$ ,因此,如果应力分量具有多项式的解答,那么,它们的表达式只可能是 $A\rho_1 gx, B\rho_1 gy, C\rho_2 gx, D\rho_2 gy$ 四种项的组合,而其中的 $A, B, C, D$ 是量纲一的

量,只与 $\alpha$ 有关。这就是说,各应力分量的表达式只可能是 $x$ 和 $y$ 的纯一次式。其次,由应力函数与应力分量的关系式(2-24)可见,应力函数比应力分量的长度量纲高二次,应该是 $x$ 和 $y$ 的纯三次式。因此,假设

$$\Phi = ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3。$$

不论上式中的系数取何值,纯三次式的应力函数总能满足相容方程(2-25)。并且,注意到体力分量 $f_x=0$ 而 $f_y=\rho_1 g$ ,于是由式(2-24)得应力分量的表达式

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - f_x x = 2cx + 6dy, \\ \sigma_y &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - f_y y = 6ax + 2by - \rho_1 gy, \\ \tau_{xy} &= -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = -2bx - 2cy。 \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

这些应力分量自然是满足平衡微分方程和相容方程的,现在来考察,如果适当选择各个系数,是否也能满足应力边界条件。

在左面( $x=0$ ),应力边界条件是

$$(\sigma_x)_{x=0} = -\rho_2 gy, \quad (\tau_{xy})_{x=0} = 0。$$

将式(a)代入,得

$$6dy = -\rho_2 gy, \quad -2cy = 0,$$

要求 $d = -\frac{\rho_2 g}{6}$ ,  $c=0$ ,而式(a)成为

$$\sigma_x = -\rho_2 gy, \quad \sigma_y = 6ax + 2by - \rho_1 gy, \quad \tau_{xy} = \tau_{yx} = -2bx。 \quad (b)$$

右面是斜边界,它的边界线方程是 $x = y \tan \alpha$ ,在斜面上没有任何面力, $\bar{f}_x = \bar{f}_y = 0$ ,按照一般的应力边界条件(2-15),有

$$\left. \begin{aligned} l(\sigma_x)_{x=y \tan \alpha} + m(\tau_{xy})_{x=y \tan \alpha} &= 0, \\ m(\sigma_y)_{x=y \tan \alpha} + l(\tau_{xy})_{x=y \tan \alpha} &= 0。 \end{aligned} \right\}$$

将式(b)代入,得

$$\left. \begin{aligned} l(-\rho_2 gy) + m(-2by \tan \alpha) &= 0, \\ m(6ay \tan \alpha + 2by - \rho_1 gy) + l(-2by \tan \alpha) &= 0。 \end{aligned} \right\} \quad (c)$$

但由图可见

$$l = \cos(n, x) = \cos \alpha,$$

$$m = \cos(n, y) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha。$$

代入式(c),求解 $b$ 和 $a$ ,即得

$$b = \frac{\rho_2 g}{2} \cot^2 \alpha, \quad a = \frac{\rho_1 g}{6} \cot \alpha - \frac{\rho_2 g}{3} \cot^3 \alpha。$$



将这些系数代入式(b), 得李维解答

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -\rho_2 g y, \\ \sigma_y &= (\rho_1 g \cot \alpha - 2\rho_2 g \cot^3 \alpha)x + (\rho_2 g \cot^2 \alpha - \rho_1 g)y, \\ \tau_{xy} = \tau_{yx} &= -\rho_2 g x \cot^2 \alpha. \end{aligned} \right\} \quad (3-7)$$

各应力分量沿水平方向的变化如图 3-7b 所示。

应力分量  $\sigma_x$  沿水平方向没有变化, 这个结果是不能由材料力学公式求得的。应力分量  $\sigma_y$  沿水平方向按直线变化, 在左边和右边, 它分别为

$$\begin{aligned} (\sigma_y)_{x=0} &= -(\rho_1 g - \rho_2 g \cot^2 \alpha)y, \\ (\sigma_y)_{x=y \tan \alpha} &= -\rho_2 g y \cot^2 \alpha, \end{aligned}$$

与用材料力学里偏心受压公式算得的结果相同。应力分量  $\tau_{xy}$  也按直线变化, 在左边和右边分别为

$$\begin{aligned} (\tau_{xy})_{x=0} &= 0, \\ (\tau_{xy})_{x=y \tan \alpha} &= -\rho_2 g y \cot \alpha, \end{aligned}$$

与等截面梁中的切应力变化规律不同。

以上所得的解答, 一向被当作是三角形重力坝中应力的基本解答。但是, 必须指出下列三点:

(1) 沿着坝轴, 坝身往往具有不同的截面, 而且坝身也不是无限长, 因此, 严格地说来, 这里不是一个平面问题。但是, 如果沿着坝轴, 有一些伸缩缝把坝身分成若干段, 在每一段范围内, 坝身的截面可以当作没有变化, 而且  $\tau_{xz}$  和  $\tau_{yz}$  可以当作等于零, 那么, 在计算时是可以把这个问题当作平面问题的。

(2) 这里假定楔形体在下端是无限长, 可以自由地变形。但是, 实际上坝身是有限高的, 底部与地基相连, 坝身底部的形变受到地基的约束, 因此, 对于底部, 以上所得的解答是不精确的。

(3) 坝顶总具有一定的宽度, 而不会是一个尖顶, 而且顶部通常还受有其他的荷载, 因此, 在靠近坝顶处, 以上所得的解答也不适用。

关于重力坝的较精确的应力分析, 目前大都采用有限单元法来进行。

## 习 题

3-1 试考察应力函数  $\Phi = ax^3$  在图 3-8 所示的矩形板和坐标系中能解决什么问题 (体力不计)。

答案: 能解决偏心受拉及偏心受压的问题。

3-2 取满足相容方程的应力函数为: (1)  $\Phi = ax^2y$ , (2)  $\Phi = bxy^2$ , (3)  $\Phi = cxy^3$ , 试求出应力分量 (不计体力), 画出图 3-9 所示弹性体边界上的面力分布, 并在次要边界上表示出面力的主矢量和主矩。

3-3 试考察应力函数  $\Phi = \frac{F}{2h}xy(3h^2 - 4y^2)$  能满足相容方程, 并求出应力分量 (不计体力), 画出图 3-9 所示矩形体边界上的面力分布 (在次要边界上画出面力的主矢量和主矩), 指出该应力函数所能解决的问题。

答案: 能解决悬臂梁在自由端受集中力作用的问题。



图 3-8

图 3-9

3-4 试证  $\Phi = \frac{q^2 x^2}{4} \left( -4 \frac{y^3}{h^3} + 3 \frac{y}{h} - 1 \right) + \frac{qy^2}{10} \left( 2 \frac{y^3}{h^3} - \frac{y}{h} \right)$  能满足相容方程, 并考察它在图 3-9 所示矩形板和坐标系中能解决什么问题 (设矩形板的长度为  $l$ , 深度为  $h$ , 体力不计)。

答案: 能解决悬臂梁在上边界受均布荷载  $q$  的问题。

3-5 设有矩形截面的长立柱, 密度为  $\rho$ , 在一边侧面上受均布剪力  $q$ , 图 3-10, 试求应力分量。

提示: 可假设  $\sigma_x = 0$ , 或假设  $\tau_{xy} = f(x)$ , 或假设  $\sigma_x$  如材料力学中偏心受压公式所示。上端边界条件如不能精确满足, 可应用圣维南原理。

答案:  $\sigma_x = 0$ ,  $\sigma_y = 2q \frac{y}{b} \left( 1 - 3 \frac{x}{b} \right) - \rho g y$ ,  $\tau_{xy} = q \frac{x}{b} \left( 3 \frac{x}{b} - 2 \right)$ 。

3-6 图 3-11 所示的墙, 高度为  $h$ , 宽度为  $b$ ,  $h \gg b$ , 在两侧面上受到均布剪力  $q$  的作用, 试用应力函数  $\Phi = Axy + Bx^3 + Cx^2y$  求解应力分量。

答案:  $\sigma_x = 0$ ,  $\sigma_y = \frac{12q}{b^3}xy$ ,  $\tau_{xy} = \frac{q}{2} \left( 1 - 12 \frac{x^2}{b^2} \right)$ 。

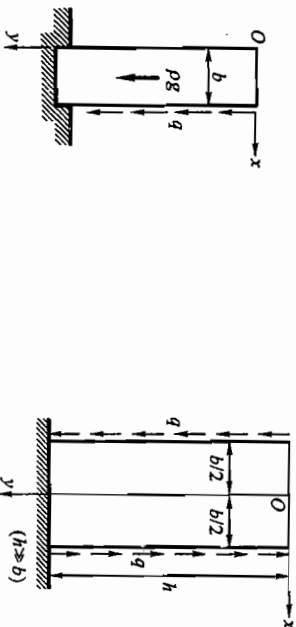


图 3-10

图 3-11

3-7 设单位厚度的悬臂梁在左端受到集中力和力矩作用, 体力可以不计,  $l \gg h$ , 图 3-12, 试用应力函数  $\Phi = Axy + Bx^2 + Cx^3 + Dxy^2$  求解应力分量。

答案:  $\sigma_x = -\frac{F_N}{h} - \frac{12M}{h^3}y - \frac{12F_S}{h^3}xy$ ,

$\sigma_y = 0$ ,

$\tau_{xy} = -\frac{3F_S}{2h}\left(1 - 4\frac{y^2}{h^2}\right)$ 。

3-8 设图 3-13 中的三角形悬臂梁只受重力作用, 而梁的密度为  $\rho$ , 试用纯三次式的应力函数求解。

答案:  $\sigma_x = \rho g x \cot \alpha - 2\rho g y \cot^2 \alpha$ ,  $\sigma_y = -\rho g y$ ,

$\tau_{xy} = -\rho g y \cot \alpha$ 。

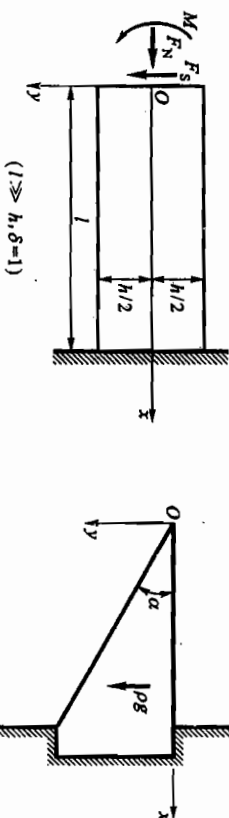


图 3-12

图 3-13

3-9 设图 3-5 中的简支梁只受重力作用, 而梁的密度为  $\rho$ , 试用 §3-4 中的应力函数 (c) 求解应力分量, 并画出截面上的应力分布图。

答案:  $\sigma_x = \frac{M}{I}y + \rho g y \left(4\frac{y^2}{h^2} - \frac{3}{5}\right)$ ,  $\sigma_y = \frac{\rho g}{2}y \left(1 - 4\frac{y^2}{h^2}\right)$ ,  $\tau_{xy} = \frac{F_S S}{bI}$ , 其中  $M = \rho g h (l^2 - x^2)/2$ ,  $F_S = -\rho g h x$ 。

3-10 图 3-14 所示的悬臂梁, 长度为  $l$ , 高度为  $h$ ,  $l \gg h$ , 在上边界受均匀布荷载  $q$ , 试检验应力函数

$$\phi = Ay^3 + Bx^2y^3 + Cy^3 + Dx^2 + Ex^2y$$

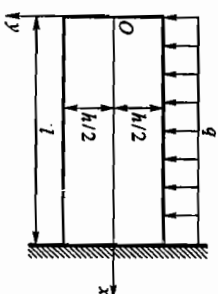
能否成为此问题的解? 如可以, 试求出应力分量。

提示: 先检验相容方程是否满足。

答案:  $\sigma_x = q \frac{y}{h} \left(4\frac{y^2}{h^2} - \frac{3}{5} - 6\frac{x^2}{h^2}\right)$ ,

$\sigma_y = -\frac{q}{2} \left(1 - 3\frac{y}{h} + 4\frac{y^3}{h^3}\right)$ ,

$\tau_{xy} = -\frac{3q}{2} \frac{x}{h} \left(1 - 4\frac{y^2}{h^2}\right)$ 。



(l ≫ h)

3-11 挡水墙的密度为  $\rho_1$ , 厚度为  $b$ , 图 3-15, 水的密度为  $\rho_2$ , 试求应力分量。

图 3-14

提示: 可假设  $\sigma_x = x f(y)$ 。上端的边界条件如不能精确满足, 可应用圣维南原理, 求出近似的解答。

答案:  $\sigma_x = \frac{2\rho_2 g}{b^3}x^3y + \frac{3\rho_2 g}{5b}xy - \frac{4\rho_2 g}{b^3}xy^3 - \rho_1 gx$ ,

$\sigma_y = \rho_2 gx \left(2\frac{y^3}{b^3} - \frac{3y}{2b} - \frac{1}{2}\right)$ ,

$\tau_{xy} = -\rho_2 gx^2 \left(3\frac{y^2}{b^3} - \frac{3}{4b}\right) -$

$\rho_2 g y \left(-\frac{y^3}{b^3} + \frac{3y}{10b} - \frac{b}{80y}\right)$ 。

3-12 为什么在主要边界(占边界绝大部分)上必须满足精确的应力边界条件(2-15), 而在次要边界(占边界很小部分)上可以应用圣维南原理, 用三个积分的应力边界条件(即主矢量、主矩的条件)来代替? 如果在主要边界上用三个积分的应力边界条件代替式(2-15), 将会发生什么问题?

3-13 如果某一应力边界问题中有  $m$  个主要边界和  $n$  个次要边界, 试问在主要、次要边界上各应满足什么类型的应力边界条件, 各有几个条件?

3-14 如果在某一应力边界问题中, 除了一个次要边界外, 所有的方程和边界条件都已满足, 试证: 在最后的这个小边界上, 三个积分的应力边界条件必然是自然满足的, 因而不必校核。

提示: 区域内的每一个微分体均已满足平衡条件, 其余边界上的应力边界条件(平衡条件)也已满足, 因此可以推论出上述结论。

3-15 试分析简支梁受均布荷载时, 平面截面假设是否成立?

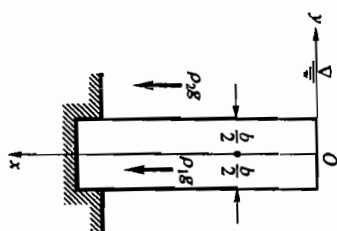


图 3-15

## 第四章 平面问题的极坐标解答

## §4-1 极坐标中的平衡微分方程

对于由径向线和圆弧线围成的圆形、圆环形、楔形、扇形等的弹性体,宜用极坐标求解。因为用极坐标表示其边界线非常方便,从而使边界条件的表示和方程的求解得到很大的简化。在极坐标中,平面内任一点  $P$  的位置,用径向坐标  $\rho$  及环向坐标  $\varphi$  来表示,图 4-1。

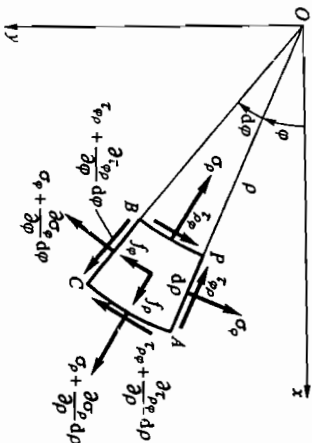


图 4-1

极坐标和直角坐标都是正交坐标系,但两者有如下区别:在直角坐标系中,  $x$  和  $y$  坐标线都是直线,有固定的方向,  $x$  和  $y$  坐标的量纲都是  $L_0$ 。在极坐标系中,  $\rho$  坐标线( $\varphi = \text{常数}$ )和  $\varphi$  坐标线( $\rho = \text{常数}$ )在不同的点有不同的方向;  $\rho$  坐标线是直线,而  $\varphi$  坐标线为圆弧曲线;  $\rho$  坐标的量纲是  $L$ ,而  $\varphi$  坐标为量纲一的量。这些区别将引起弹性力学基本方程的差异。

为了表明极坐标中的应力分量,从所考察的薄板或长柱形体中取出任一厚度等于 1 的微分体  $PACB$ ,在  $xy$  平面上,这个微分体是由两条径向线(夹角为  $d\varphi$ )和两条环向线(距离为  $d\rho$ )所围成,如图所示。沿  $\rho$  方向的正应力称为径向正应力,用  $\sigma_\rho$  代表;沿  $\varphi$  方向的正应力称为环向正应力或切向正应力,用  $\sigma_\varphi$  代表;切应力用  $\tau_{\rho\varphi}$  及  $\tau_{\varphi\rho}$  代表(根据切应力的互等关系,  $\tau_{\rho\varphi} = \tau_{\varphi\rho}$ )。各应力分量的正负号规定和直角坐标中一样,只是  $\rho$  方向代替了  $x$  方向,  $\varphi$  方向代替了  $y$  方向。即正面上的应力以沿正坐标方向为正,负面上的应力以沿负坐标方向为正,

反之为负。图中所示的应力分量都是正的。径向及环向的体力分量分别用  $f_\rho$  及  $f_\varphi$  代表,以沿正坐标方向为正,反之为负。

与直角坐标中相似,由于应力随坐标  $\rho$  的变化,设  $PB$  面上的径向正应力为  $\sigma_\rho$ ,则  $AC$  面上的将为  $\sigma_\rho + \frac{\partial \sigma_\rho}{\partial \rho} d\rho$ ; 同样,这两个面上的切应力分别为  $\tau_{\rho\varphi}$  及  $\tau_{\rho\varphi} + \frac{\partial \tau_{\rho\varphi}}{\partial \rho} d\rho$ 。  $PA$  及  $BC$  两个面上的环向正应力分别为  $\sigma_\varphi$  及  $\sigma_\varphi + \frac{\partial \sigma_\varphi}{\partial \varphi} d\varphi$ ; 这两个面上的切应力分别为  $\tau_{\rho\varphi}$  及  $\tau_{\rho\varphi} + \frac{\partial \tau_{\rho\varphi}}{\partial \varphi} d\varphi$ 。

对于极坐标中所取的微分体,应注意它的两个  $\rho$  面  $PB$  及  $AC$  的面积不相同,分别等于  $\rho d\varphi$  及  $(\rho + d\rho)d\varphi$ ; 两个  $\varphi$  面  $PA$  及  $BC$  的面积都等于  $d\rho$ , 但此两面不平行。微分体的体积等于  $\rho d\varphi d\rho$ 。

将微分体所受各力投影到微分体中心的径向轴上,列出径向的平衡方程,得

$$\begin{aligned} & \left( \sigma_\rho + \frac{\partial \sigma_\rho}{\partial \rho} d\rho \right) (\rho + d\rho) d\varphi - \sigma_\rho \rho d\varphi - \\ & \left( \sigma_\varphi + \frac{\partial \sigma_\varphi}{\partial \varphi} d\varphi \right) d\rho \sin \frac{d\varphi}{2} - \sigma_\varphi d\rho \sin \frac{d\varphi}{2} + \\ & \left( \tau_{\rho\varphi} + \frac{\partial \tau_{\rho\varphi}}{\partial \varphi} d\varphi \right) d\rho \cos \frac{d\varphi}{2} - \tau_{\rho\varphi} d\rho \cos \frac{d\varphi}{2} + f_\rho \rho d\varphi d\rho = 0. \end{aligned}$$

由于  $d\varphi$  微小,可以把  $\sin \frac{d\varphi}{2}$  取为  $\frac{d\varphi}{2}$ , 把  $\cos \frac{d\varphi}{2}$  取为 1。用  $\tau_{\rho\varphi}$  代替  $\tau_{\varphi\rho}$ , 并注意上式中存在一、二、三阶微量,其中一阶微量互相抵消,三阶微量与二阶微量相比,可以略去,再除以  $\rho d\varphi d\rho$ , 得

$$\frac{\partial \sigma_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{\rho\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\sigma_\rho - \sigma_\varphi}{\rho} + f_\rho = 0.$$

将所有各力投影到微分体中心的切向轴上,列出切向的平衡方程,得

$$\begin{aligned} & \left( \sigma_\varphi + \frac{\partial \sigma_\varphi}{\partial \varphi} d\varphi \right) d\rho \cos \frac{d\varphi}{2} - \sigma_\varphi d\rho \cos \frac{d\varphi}{2} + \\ & \left( \tau_{\rho\varphi} + \frac{\partial \tau_{\rho\varphi}}{\partial \rho} d\rho \right) (\rho + d\rho) d\varphi - \tau_{\rho\varphi} \rho d\varphi + \\ & \left( \tau_{\rho\varphi} + \frac{\partial \tau_{\rho\varphi}}{\partial \varphi} d\varphi \right) d\rho \sin \frac{d\varphi}{2} + \tau_{\rho\varphi} d\rho \sin \frac{d\varphi}{2} + f_\varphi \rho d\varphi d\rho = 0. \end{aligned}$$

用  $\tau_{\rho\varphi}$  代替  $\tau_{\varphi\rho}$ , 进行同样的简化以后,得

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial \tau_{\rho\varphi}}{\partial \rho} + \frac{2\tau_{\rho\varphi}}{\rho} + f_\varphi = 0.$$

如果列出该微分体的力矩平衡方程,将得出  $\tau_{\rho\varphi} = \tau_{\varphi\rho}$ , 只是又一次证明切应力的互等关系。

这样,极坐标中的平衡微分方程就是

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \varphi} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{\rho} + f_r &= 0, \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \varphi} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \rho} + \frac{2\tau_{r\theta}}{\rho} + f_\theta &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4-1)$$

这两个平衡微分方程中包含着3个未知函数 $\sigma_r, \sigma_\theta$ 和 $\tau_{r\theta} = \tau_{\theta r}$ 。为了解决问题,还必须应用几何学和物理学方面的条件。

## §4-2 极坐标中的几何方程及物理方程

在极坐标中,用 $\epsilon_r$ 代表径向线应变(径向线段的线应变),用 $\epsilon_\theta$ 代表环向线应变(环向线段的线应变),用 $\gamma_{r\theta}$ 代表切应变(径向与环向两线段之间的直角的改变);用 $u_r$ 代表径向位移,用 $u_\theta$ 代表环向位移。

通过任一点 $P(\rho, \varphi)$ ,分别沿正方向作径向和环向的微分线段,  $PA = d\rho$ ,  $PB = \rho d\varphi$ ,图4-2。现在来分析,微分线段上的形变分量和位移分量之间的几何关系。

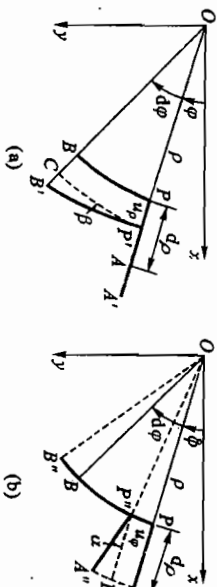


图 4-2

首先,假定只有径向位移而没有环向位移,图4-2a。由于这个径向位移,径向线段 $PA$ 移到 $P'A'$ ,环向线段 $PB$ 移到 $P'B$ ,而 $P, A, B$ 三点的位移分别为

$$PP' = u_r, \quad AA' = u_r + \frac{\partial u_r}{\partial \rho} d\rho, \quad BB' = u_r + \frac{\partial u_r}{\partial \rho} d\rho。$$

可见,径向线段 $PA$ 的线应变为

$$\begin{aligned} \epsilon_r &= \frac{P'A' - PA}{PA} = \frac{AA' - PP'}{PA} \\ &= \frac{\left(u_r + \frac{\partial u_r}{\partial \rho} d\rho\right) - u_r}{d\rho} = \frac{\partial u_r}{\partial \rho}。 \end{aligned} \quad (a)$$

环向线段 $PB$ 移到 $P'B$ 。在图4-2a中,通过 $P'$ 点作圆弧线 $P'C$ 。 $P'B$ 与 $P'C$ 的夹角 $\beta$ 是微小的,因此,略去高阶微量后,得到 $P'B \approx P'C$ (见§2-4)。

由此,环向线段的线应变是

$$\begin{aligned} \epsilon_\theta &= \frac{P'B' - PB}{PB} = \frac{P'C - PB}{PB} \\ &= \frac{(\rho + u_\theta)d\varphi - \rho d\varphi}{\rho d\varphi} = \frac{u_\theta}{\rho}。 \end{aligned} \quad (b)$$

$\frac{u_\theta}{\rho}$ 项可以解释为:由于径向位移引起环向线段的伸长应变。它表示,半径为 $\rho$ 的环向线段 $PB = \rho d\varphi$ ,由于径向位移 $u_r$ 而移到 $P'C$ 时,它的半径成为 $(\rho + u_\theta)$ ,长度成为 $P'C = (\rho + u_\theta)d\varphi$ ,伸长值 $u_\theta d\varphi$ 与原长 $\rho d\varphi$ 之比,便是环向线应变 $\frac{u_\theta}{\rho}$ 。

径向线段 $PA$ 的转角为

$$\alpha = 0。 \quad (c)$$

环向线段 $PB$ 的转角为

$$\beta = \frac{BB' - PP'}{PB} = \frac{\left(u_\theta + \frac{\partial u_\theta}{\partial \varphi} d\varphi\right) - u_\theta}{\rho d\varphi} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_\theta}{\partial \varphi}。 \quad (d)$$

可见切应变为

$$\gamma_{r\theta} = \alpha + \beta = \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_\theta}{\partial \varphi}。 \quad (e)$$

其次,假定只有环向位移而没有径向位移,图4-2b。由于这个环向位移,径向线段 $PA$ 移到 $P'A''$ ,环向线段 $PB$ 移到 $P'B''$ ,而 $P, A, B$ 三点的位移分别为

$$PP'' = u_\theta, \quad AA'' = u_\theta + \frac{\partial u_\theta}{\partial \rho} d\rho, \quad BB'' = u_\theta + \frac{\partial u_\theta}{\partial \rho} d\rho。$$

在图4-2b中,作 $P'D \parallel PA$ ,则 $PA$ 的转角为 $\alpha$ 。由于 $\alpha$ 是微小的,因此,略去高阶微量后得到 $P'A'' \approx PA$ ,由此得出径向线段 $PA$ 的线应变为

$$\epsilon_r = 0。 \quad (f)$$

环向线段 $PB$ 的线应变为

$$\begin{aligned} \epsilon_\theta &= \frac{P'B'' - PB}{PB} = \frac{BB'' - PP''}{PB} \\ &= \frac{\left(u_\theta + \frac{\partial u_\theta}{\partial \rho} d\rho\right) - u_\theta}{\rho d\varphi} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_\theta}{\partial \rho}。 \end{aligned} \quad (g)$$

径向线段 $PA$ 的转角为

$$\alpha = \frac{A'A'' - PP''}{PA} = \frac{\left(u_\theta + \frac{\partial u_\theta}{\partial \rho} d\rho\right) - u_\theta}{d\rho} = \frac{\partial u_\theta}{\partial \rho}。 \quad (h)$$

由于环向位移引起环向线段的转角,可以从图 4-2b 看出:在变形前, \$PB\$ 线上 \$P\$ 点的切线与 \$OP\$ 垂直;在变形后, \$P'B'\$ 线上 \$P'\$ 点的切线与 \$OP'\$ 垂直,这两切线之间的夹角等于圆心角 \$\angle POP'\$, 这就是环向线的转角。这个转角使原直角扩大, 故环向线 \$PB\$ 的转角为

$$\beta = -\angle POP' = -\frac{u_\varphi}{\rho} \quad (i)$$

可见切应变为

$$\gamma_{r\varphi} = \alpha + \beta = \frac{\partial u_r}{\partial \rho} - \frac{u_\varphi}{\rho} \quad (j)$$

因此,如果沿径向和环向都有位移,则由 (a), (b), (e) 三式与 (f), (g), (j) 三式分别叠加而得

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_r &= \frac{\partial u_r}{\partial \rho}, \\ \epsilon_\varphi &= \frac{u_r}{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi}, \\ \gamma_{r\varphi} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial \rho} - \frac{u_\varphi}{\rho} \end{aligned} \right\} \quad (4-2)$$

这就是极坐标中的几何方程。

下面来导出极坐标中平面问题的物理方程。在直角坐标中,物理方程是代数方程,且其中坐标 \$x\$ 和 \$y\$ 的方向是正交的。在极坐标中,坐标 \$\rho\$ 和 \$\varphi\$ 的方向也是正交的,因此极坐标中的物理方程与直角坐标中的物理方程具有同样的形式,只需将角码 \$x\$ 和 \$y\$ 分别改换为 \$\rho\$ 和 \$\varphi\$。据此,得出极坐标中平面应力问题的物理方程是

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_r &= \frac{1}{E}(\sigma_r - \mu\sigma_\varphi), \\ \epsilon_\varphi &= \frac{1}{E}(\sigma_\varphi - \mu\sigma_r), \\ \gamma_{r\varphi} &= \frac{1}{G}\tau_{r\varphi} = \frac{2(1+\mu)}{E}\tau_{r\varphi} \end{aligned} \right\} \quad (4-3)$$

对于平面应变问题,须将上式中的 \$E\$ 换为 \$\frac{E}{1-\mu^2}\$, \$\mu\$ 换为 \$\frac{\mu}{1-\mu}\$, 而物理方程成为

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_r &= \frac{1-\mu^2}{E} \left( \sigma_r - \frac{\mu}{1-\mu} \sigma_\varphi \right), \\ \sigma_r &= \frac{1-\mu^2}{E} \left( \sigma_\varphi - \frac{\mu}{1-\mu} \sigma_r \right), \\ \gamma_{r\varphi} &= \frac{2(1+\mu)}{E} \tau_{r\varphi} \end{aligned} \right\} \quad (4-4)$$

### §4-3 极坐标中的应力函数与相容方程

为了简化公式的推导,可以将直角坐标中的公式直接变换到极坐标中来。下面应用坐标之间的转换关系,把极坐标中的应力分量用应力函数 \$\Phi\$ 来表示。首先,由极坐标与直角坐标之间的关系式

$$\left. \begin{aligned} \rho^2 &= x^2 + y^2, & \varphi &= \arctan \frac{y}{x}; \\ x &= \rho \cos \varphi, & y &= \rho \sin \varphi. \end{aligned} \right\}$$

得 \$\rho, \varphi\$ 对 \$x, y\$ 的导数

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial x} &= \frac{x}{\rho} = \cos \varphi, & \frac{\partial \rho}{\partial y} &= \frac{y}{\rho} = \sin \varphi; \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= -\frac{y}{\rho^2} = -\frac{\sin \varphi}{\rho}, & \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= \frac{x}{\rho^2} = \frac{\cos \varphi}{\rho}. \end{aligned} \right\}$$

将函数 \$\Phi\$ 看成是 \$\rho, \varphi\$ 的函数,即 \$\Phi(\rho, \varphi)\$; 而 \$\rho, \varphi\$ 又是 \$x, y\$ 的函数。因此, \$\Phi\$ 可以认为是通过中间变量 \$\rho, \varphi\$ 的关于 \$x, y\$ 的复合函数。按照复合函数的求导公式,可得一阶导数的变换公式

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial x} &= \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \cos \varphi \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} - \frac{\sin \varphi}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} &= \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \sin \varphi \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} + \frac{\cos \varphi}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}. \end{aligned} \right\}$$

重复以上的运算,得到二阶导数的变换公式

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} &= \left( \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{\sin \varphi}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \left( \cos \varphi \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} - \frac{\sin \varphi}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right) \\ &= \cos^2 \varphi \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \rho^2} + \sin^2 \varphi \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} \right) - \\ &\quad 2 \cos \varphi \sin \varphi \left[ \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right) \right], \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} &= \left( \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\cos \varphi}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \left( \sin \varphi \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} + \frac{\cos \varphi}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right) \\ &= \sin^2 \varphi \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \rho^2} + \cos^2 \varphi \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} \right) + \\ &\quad 2 \cos \varphi \sin \varphi \left[ \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right) \right], \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} &= \left( \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{\sin \varphi}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \left( \sin \varphi \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} + \frac{\cos \varphi}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right) \\ &= \cos \varphi \sin \varphi \left[ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \rho^2} - \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} \right) \right] + \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

$$(\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) \left[ \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right) \right]. \quad (c)$$

由图 4-1 可见,如果把  $x$  轴和  $y$  轴分别转到  $\rho$  和  $\varphi$  的方向,使该微分体的  $\varphi$  坐标成为零,则  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  分别成为  $\sigma_\rho, \sigma_\varphi, \tau_{\rho\varphi}$ 。于是当不计体力时,即可由式 (a) 至式 (c) 得出应力分量用应力函数来表示

$$\left. \begin{aligned} \sigma_\rho &= (\sigma_x)_{\varphi=0} = \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right)_{\varphi=0} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2}, \\ \sigma_\varphi &= (\sigma_y)_{\varphi=0} = \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right)_{\varphi=0} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \rho^2}, \\ \tau_{\rho\varphi} &= (\tau_{xy})_{\varphi=0} = \left( -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \right)_{\varphi=0} = -\frac{\partial}{\partial \rho} \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right). \end{aligned} \right\} \quad (4-5)$$

极易证明,当体力分量  $f_\rho = f_\varphi = 0$  时,这些应力分量确能满足平衡微分方程 (4-1)。

另一方面,将式 (a) 与式 (b) 相加,得到

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2}.$$

于是由直角坐标中的相容方程

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)^2 \Phi = 0,$$

得到极坐标中的相容方程

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right)^2 \Phi = 0. \quad (4-6)$$

由此得出,当不计体力时,在极坐标中按应力求解平面问题,归结为求解一个应力函数  $\Phi(\rho, \varphi)$ , 它必须满足: (1) 在区域内的相容方程 (4-6); (2) 在边界上的应力边界条件 (假设全部为应力边界条件); (3) 如为多连体,还有多连体中的位移单值条件。从上述条件求出应力函数  $\Phi$  后,就可由式 (4-5) 求得应力分量。

## §4-4 应力分量的坐标变换式

在一定的应力状态下,由已知的直角坐标中的应力分量求极坐标中的应力分量,或者由已知的极坐标中的应力分量求直角坐标中的应力分量,就需要建立两个坐标系中应力分量的关系式,即应力分量的坐标变换式。由于应力不仅具有方向性,而且与所在的作用面有关,为了建立应力分量的坐标变换式,应取出包含两种坐标面的微分体,然后考虑其平衡条件,才能得出这种变换式。

首先,设已知直角坐标中的应力分量  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ , 试求极坐标中的应力分量

$\sigma_\rho, \sigma_\varphi, \tau_{\rho\varphi}$ 。为此,在弹性体中取出一个包含  $x$  面、 $y$  面和  $\rho$  面且厚度为 1 的微小三角板 A, 图 4-3, 它的  $ab$  为  $x$  面,  $ac$  为  $y$  面, 而  $bc$  为  $\rho$  面。各面上的应力如图所示。命  $bc$  边的长度为  $ds$ , 则  $ab$  边及  $ac$  边的长度分别为  $ds \cos \varphi$  及  $ds \sin \varphi$ 。

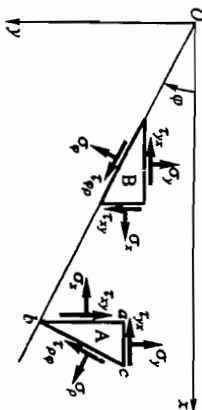


图 4-3

根据三角板 A 的平衡条件  $\sum F_\rho = 0$ , 可以写出平衡方程

$$\sigma_\rho ds - \sigma_x ds \cos \varphi \times \cos \varphi - \sigma_y ds \sin \varphi \times \sin \varphi - \tau_{xy} ds \cos \varphi \times \sin \varphi - \tau_{yx} ds \sin \varphi \times \cos \varphi = 0.$$

用  $\tau_{xy}$  代替  $\tau_{yx}$ , 进行简化, 就得到

$$\sigma_\rho = \sigma_x \cos^2 \varphi + \sigma_y \sin^2 \varphi + 2\tau_{xy} \sin \varphi \cos \varphi. \quad (a)$$

同样可由三角板 A 的平衡条件  $\sum F_\varphi = 0$ , 得到

$$\tau_{\rho\varphi} = (\sigma_y - \sigma_x) \sin \varphi \cos \varphi + \tau_{xy} (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi). \quad (b)$$

类似地取出一个包含  $x$  面、 $y$  面和  $\varphi$  面且厚度为 1 的微小三角板 B, 图 4-3, 根据它的平衡条件  $\sum F_\rho = 0$ , 可以得到

$$\sigma_\varphi = \sigma_x \sin^2 \varphi + \sigma_y \cos^2 \varphi - 2\tau_{xy} \sin \varphi \cos \varphi. \quad (c)$$

并同样由平衡条件  $\sum F_\varphi = 0$ , 可以得到  $\tau_{\rho\varphi}$ , 且  $\tau_{\rho\varphi} = \tau_{\varphi\rho}$ 。

综合以上所得的结果, 就得出应力分量由直角坐标向极坐标的变换式:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_\rho &= \sigma_x \cos^2 \varphi + \sigma_y \sin^2 \varphi + 2\tau_{xy} \sin \varphi \cos \varphi, \\ \sigma_\varphi &= \sigma_x \sin^2 \varphi + \sigma_y \cos^2 \varphi - 2\tau_{xy} \sin \varphi \cos \varphi, \\ \tau_{\rho\varphi} &= (\sigma_y - \sigma_x) \sin \varphi \cos \varphi + \tau_{xy} (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi). \end{aligned} \right\} \quad (4-7)$$

读者试导出应力分量由极坐标向直角坐标的变换式

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_\rho \cos^2 \varphi + \sigma_\varphi \sin^2 \varphi - 2\tau_{\rho\varphi} \sin \varphi \cos \varphi, \\ \sigma_y &= \sigma_\rho \sin^2 \varphi + \sigma_\varphi \cos^2 \varphi + 2\tau_{\rho\varphi} \sin \varphi \cos \varphi, \\ \tau_{xy} &= (\sigma_\rho - \sigma_\varphi) \sin \varphi \cos \varphi + \tau_{\rho\varphi} (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi). \end{aligned} \right\} \quad (4-8)$$

## § 4-5 轴对称应力和相应的位移

所谓轴对称,是指物体的形状或某物理量是绕一轴对称的,凡通过对称轴的任何面都是对称面。若应力是绕 \$z\$ 轴对称的,则在任一环向线上的各点,应力分量的数值相同,方向对称于 \$z\$ 轴。由此可见,绕 \$z\$ 轴对称的应力,在极坐标平面内应力分量仅为 \$\rho\$ 的函数,不随 \$\varphi\$ 而变;切应力 \$\tau\_{\rho\varphi}\$ 为零。

应力函数是标量函数,在轴对称应力状态下,它只是 \$\rho\$ 的函数,即

$$\Phi = \Phi(\rho)。$$

在这一特殊情况下,应力公式(4-5)简化为

$$\sigma_r = \frac{1}{\rho} \frac{d\Phi}{d\rho}, \quad \sigma_\varphi = \frac{d^2\Phi}{d\rho^2}, \quad \tau_{r\varphi} = \tau_{\varphi r} = 0。 \quad (4-9)$$

相容方程(4-6)简化为

$$\left( \frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \right) \left( \frac{d^2\Phi}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d\Phi}{d\rho} \right) = 0。$$

轴对称问题的拉普拉斯算子可以写为

$$\nabla^2 = \left( \frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \right) = \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{d}{d\rho} \right),$$

代入相容方程成为

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left[ \rho \frac{d}{d\rho} \left[ \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{d\Phi}{d\rho} \right) \right] \right] = 0。$$

这是一个四阶常微分方程,它的全部通解只有 4 项。对上式积分 4 次,就得到轴对称应力状态下应力函数的通解

$$\Phi = A \ln \rho + B \rho^2 \ln \rho + C \rho^2 + D, \quad (4-10)$$

其中 \$A, B, C, D\$ 是待定的常数。

将式(4-10)代入式(4-9),得轴对称应力的一般性解答

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{A}{\rho} + B(1 + 2 \ln \rho) + 2C, \\ \sigma_\varphi &= -\frac{A}{\rho} + B(3 + 2 \ln \rho) + 2C, \\ \tau_{r\varphi} &= \tau_{\varphi r} = 0。 \end{aligned} \right\} \quad (4-11)$$

现在来求出与轴对称应力相对应的形变和位移。

对于平面应力的情况,将应力分量(4-11)代入物理方程(4-3),得对应的形变分量

$$\epsilon_r = \frac{1}{E} \left[ (1 + \mu) \frac{A}{\rho^2} + (1 - 3\mu)B + 2(1 - \mu)C \right],$$

$$\epsilon_\varphi = \frac{1}{E} \left[ -(1 + \mu) \frac{A}{\rho^2} + (3 - \mu)B + 2(1 - \mu)C \right],$$

$$\gamma_{r\varphi} = 0。$$

可见,形变也是轴对称的。

将上面的形变分量的表达式代入几何方程(4-2),得

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u_r}{\partial \rho} &= \frac{1}{E} \left[ (1 + \mu) \frac{A}{\rho^2} + (1 - 3\mu)B + 2(1 - \mu)C \right], \\ \frac{u_r}{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} &= \frac{1}{E} \left[ -(1 + \mu) \frac{A}{\rho^2} + (3 - \mu)B + 2(1 - \mu)C \right], \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_r}{\partial \rho} - \frac{u_r}{\rho} &= 0。 \end{aligned} \right\}$$

由式(a)中第一式的积分得

$$u_r = \frac{1}{E} \left[ -(1 + \mu) \frac{A}{\rho} + (1 - 3\mu)B\rho + 2(1 - \mu)C\rho(\ln \rho - 1) + 2(1 - \mu)C\rho \right] + f(\varphi), \quad (b)$$

其中 \$f(\varphi)\$ 是 \$\varphi\$ 的任意函数。

其次,由式(a)中的第二式有

$$\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} = \frac{\rho}{E} \left[ -(1 + \mu) \frac{A}{\rho^2} + (3 - \mu)B + 2(1 - \mu)C \ln \rho + 2(1 - \mu)C \right] - u_r。$$

将式(b)代入,得

$$\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} = \frac{4B\rho}{E} - f(\varphi),$$

积分以后得

$$u_\varphi = \frac{4B\rho^2}{E} - \int f(\varphi) d\varphi + f_1(\rho), \quad (c)$$

其中 \$f\_1(\rho)\$ 是 \$\rho\$ 的任意函数。

再将式(b)及式(c)代入式(a)中的第三式,得

$$\frac{1}{\rho} \frac{df_1(\rho)}{d\rho} + \frac{df_1(\rho)}{d\rho} + \frac{1}{\rho} \int f(\varphi) d\varphi - \frac{f_1(\rho)}{\rho} = 0,$$

把上式分开变数而写成为

$$f_1(\rho) - \rho \frac{df_1(\rho)}{d\rho} = \frac{df_1(\rho)}{d\rho} + \int f(\varphi) d\varphi。$$

这方程的左边只是 \$\rho\$ 的函数,只随 \$\rho\$ 而变;而右边只是 \$\varphi\$ 的函数,只随 \$\varphi\$ 而变,

因此,只可能两边都等于同一常数  $F$ 。于是有

$$f_1(\rho) - \rho \frac{df_1(\rho)}{d\rho} = F, \quad (d)$$

$$\frac{df(\varphi)}{d\varphi} + \int f(\varphi) d\varphi = F. \quad (e)$$

式(d)的解答是

$$f_1(\rho) = H\rho + F, \quad (f)$$

其中  $H$  是任意常数。式(e)可以通过求导变换为微分方程

$$\frac{d^2 f(\varphi)}{d\varphi^2} + f(\varphi) = 0,$$

而它的解答是

$$f(\varphi) = I \cos \varphi + K \sin \varphi, \quad (g)$$

此外,并可由式(e)得

$$\int f(\varphi) d\varphi = F - \frac{df(\varphi)}{d\varphi} = F + I \sin \varphi - K \cos \varphi. \quad (h)$$

将式(g)代入式(b),并将式(h)及式(f)代入式(c),得轴对称应力状态下对应的位移分量

$$\left. \begin{aligned} u_\rho &= \frac{1}{E} \left[ -(1+\mu) \frac{A}{\rho} + 2(1-\mu) B \rho (\ln \rho - 1) + (1-3\mu) B \rho + \right. \\ &\quad \left. 2(1-\mu) C \rho \right] + I \cos \varphi + K \sin \varphi, \\ u_\varphi &= \frac{4B\rho\varphi}{E} + H\rho - I \sin \varphi + K \cos \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (4-12)$$

式中的  $A, B, C, H, I, K$  都是待定的常数,其中的常数  $H, I, K$  和 §2-4 中的  $\omega, u_0, v_0$  同样地代表刚体位移分量。

以上是轴对称应力状态下,应力分量和位移分量的一般性解答,适用于任何轴对称应力问题。应力分量(4-11)和位移分量(4-12)中的待定常数,可以通过应力边界条件和位移边界条件(在多连体中还需考虑位移单值条件)来确定。

对于平面应变的情况,只需将上述形变分量和位移分量中的  $E$  换为  $\frac{E}{1-\mu^2}$ ,

$\mu$  换为  $\frac{\mu}{1-\mu}$ 。

一般而言,产生轴对称应力状态的条件是,弹性体的形状和应力边界条件必须是轴对称的。如果位移边界条件也是轴对称的,则位移也是轴对称的。

## §4-6 圆环或圆筒受均布压力

设有圆环或圆筒,内半径为  $r$ ,外半径为  $R$ ,受内压力  $q_1$  及外压力  $q_2$ ,图 4-4a。显然,应力分布应当是轴对称的。因此,取应力分量表达式(4-11),应当可以求出其中的任意常数  $A, B, C$ 。

内外的应力边界条件要求

$$\left. \begin{aligned} (\tau_{\rho\varphi})_{\rho=r} &= 0, & (\tau_{\rho\varphi})_{\rho=R} &= 0; \\ (\sigma_\rho)_{\rho=r} &= -q_1, & (\sigma_\rho)_{\rho=R} &= -q_2. \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

由表达式(4-11)可见,前两个关于  $\tau_{\rho\varphi}$  的条件是满足的,而后两个条件要求

$$\left. \begin{aligned} \frac{A}{r^2} + B(1+2\ln r) + 2C &= -q_1, \\ \frac{A}{R^2} + B(1+2\ln R) + 2C &= -q_2. \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

现在,边界条件都已满足,但上面 2 个方程不能决定 3 个常数  $A, B, C$ 。因为这里讨论的是多连体,所以我们要考察位移单值条件。

由(4-12)可见,在环向位移  $u_\varphi$  的表达式中,  $\frac{4B\rho\varphi}{E}$  项是多值的,对于同一

个  $\rho$  值,例如  $\rho = \rho_1$ ,在  $\varphi = \varphi_1$  与  $\varphi = \varphi_1 + 2\pi$  时,环向位移相差  $\frac{8\pi B\rho_1}{E}$ 。在圆环或圆筒中,这是不可能的,因为  $(\rho_1, \varphi_1)$  与  $(\rho_1, \varphi_1 + 2\pi)$  是同一点,不可能有不同的位移。于是由位移单值条件可见必须  $B=0$ 。

对于单连体和多连体,位移单值条件都是必须满足的。在按应力求解时,首先求出应力分量,自然取为单值函数;再求形变分量,并由几何方程通过积分求出位移分量。在多连体中,积分时常常会出现多值函数,因此,须要校核位移单值条件,以排除其中的多值项。

命  $B=0$ ,即可由式(b)求得  $A$  和  $2C$ :

$$A = \frac{r^2 R^2 (q_2 - q_1)}{R^2 - r^2}, \quad 2C = \frac{q_1 r^2 - q_2 R^2}{R^2 - r^2}.$$

代入式(4-11),稍加整理,即得圆筒受均布压力的拉梅解答如下:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_\rho &= -\frac{\rho^2}{R^2} - 1 \cdot q_1 - \frac{1 - \frac{r^2}{\rho^2}}{r^2} q_2, \\ \sigma_\varphi &= \frac{\rho^2}{R^2} + 1 - \frac{1 + \frac{r^2}{\rho^2}}{r^2} q_1 - \frac{\rho^2}{r^2} q_2, \end{aligned} \right\} \quad (4-13)$$



为了起见,试分别考察内压力或外压力单独作用时的情况。如果只有内压力  $q_1$  作用,则  $q_2=0$ ,解答(4-13)简化为

$$\sigma_r = -\frac{R^2}{r^2} - 1 \quad q_1, \quad \sigma_\theta = \frac{R^2}{r^2} + 1 \quad q_1。$$

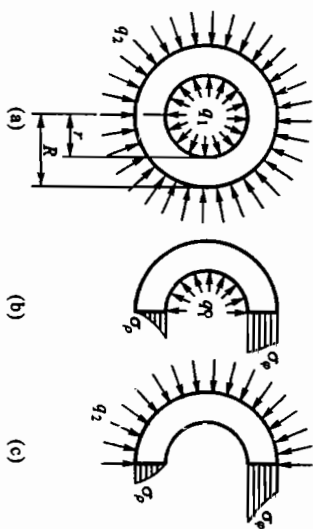


图 4-4

显然,  $\sigma_r$  总是压应力,  $\sigma_\theta$  总是拉应力。应力分布大致如图 4-4b 所示。当圆环或圆筒的外半径趋于无限大时 ( $R \rightarrow \infty$ ), 得到具有圆孔的无限大薄板, 或具有圆形孔道的无限大弹性体, 而上列解答成为

$$\sigma_r = -\frac{r^2}{\rho^2} q_1, \quad \sigma_\theta = \frac{r^2}{\rho^2} q_1。$$

可见应力和  $\frac{r^2}{\rho^2}$  成正比。在  $\rho$  远大于  $r$  之处 (即距圆孔或圆形孔道较远之处), 应力是很小的, 可以不计。这个实例也证实了圣维南原理, 因为圆孔或圆形孔道中的内压力是平衡力系。

如果只有外压力  $q_2$  作用, 则  $q_1=0$ , 解答(4-13)简化为

$$\sigma_r = -\frac{1 - \frac{r^2}{R^2}}{1 - \frac{r^2}{R^2}} q_2, \quad \sigma_\theta = -\frac{1 + \frac{r^2}{R^2}}{1 - \frac{r^2}{R^2}} q_2。 \quad (4-14)$$

显然,  $\sigma_r$  和  $\sigma_\theta$  都总是压应力。应力分布大致如图 4-4c 所示。

## §4-7 压力隧洞

设有圆筒, 埋在无限大弹性体中, 受有均布压力  $q$ , 例如压力隧洞, 图 4-5。

设圆筒和无限大弹性体的弹性常数分别为  $E, \mu$  和  $E', \mu'$ 。由于两者的材料性质不同, 不符合均匀性假定, 因此, 不能用同一个函数表示其解答。本题属于接触问题, 即两个弹性体在边界上互相接触的问题, 必须考虑交界面上的接触条件。

无限大弹性体, 可以看成是内半径为  $R$  而外半径为无限大的圆筒。显然, 圆筒和无限大弹性体的应力分布都是轴对称的, 可以分别引用轴对称应力解答(4-11)和相应的位移解答(4-12), 并注意这里是平面应变的情况。若取圆筒解答中的系数为  $A, B, C$ , 无限大弹性体解答中的系数为  $A', B', C'$ , 由多连体中的位移单值条件, 有

$$\begin{aligned} B &= 0, \\ B' &= 0。 \end{aligned} \quad (a) \quad (b)$$

现在, 取圆筒的应力表达式为

$$\sigma_r = \frac{A}{\rho^2} + 2C, \quad \sigma_\theta = -\frac{A}{\rho^2} + 2C, \quad (c)$$

取无限大弹性体的应力表达式为

$$\sigma'_r = \frac{A'}{\rho^2} + 2C', \quad \sigma'_\theta = -\frac{A'}{\rho^2} + 2C', \quad (d)$$

试考虑边界条件和接触条件来求解常数  $A, C, A', C'$ 。

首先, 在圆筒的内面, 有边界条件  $(\sigma_r)_{\rho=r} = -q$ , 由此得

$$\frac{A}{r^2} + 2C = -q。 \quad (e)$$

其次, 在远离圆筒处, 按照圣维南原理, 应当几乎没有应力, 于是有

$$(\sigma'_r)_{\rho \rightarrow \infty} = 0, \quad (\sigma'_\theta)_{\rho \rightarrow \infty} = 0,$$

由此得

$$2C' = 0。 \quad (f)$$

再其次, 在圆筒和无限大弹性体的接触面上, 应当有

$$(\sigma_r)_{\rho=R} = (\sigma'_r)_{\rho=R} = 0$$

于是由式(c)及式(d)得

$$\frac{A}{R^2} + 2C = \frac{A'}{R^2} + 2C'。 \quad (g)$$

上述条件仍然不足以确定 4 个常数, 下面来考虑位移。

应用式(4-12)中的第一式, 并注意这里是平面应变问题, 而且  $B=0$ , 可以写出圆筒和无限大弹性体的径向位移的表达式

$$u_r = \frac{1-\mu^2}{E} \left[ -\left(1 + \frac{\mu}{1-\mu}\right) \frac{A}{\rho} + 2\left(1 - \frac{\mu}{1-\mu}\right) C \rho \right] + I \cos \varphi + K \sin \varphi,$$

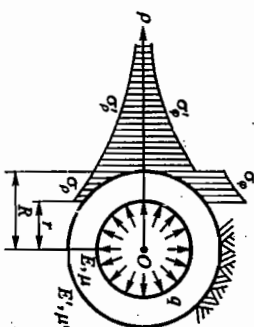


图 4-5

$u'_\rho = \frac{1-\mu'}{E} \left[ - \left( 1 + \frac{\mu'}{1-\mu'} \right) \frac{A'}{\rho} + 2 \left( 1 - \frac{\mu'}{1-\mu'} \right) C' \rho \right] + I' \cos \varphi + K' \sin \varphi$ ,  
 将上列二式稍加简化,得

$$\left. \begin{aligned} u_\rho &= \frac{1+\mu}{E} \left[ 2(1-2\mu) C \rho - \frac{A}{\rho} \right] + I \cos \varphi + K \sin \varphi, \\ u'_\rho &= \frac{1+\mu'}{E} \left[ 2(1-2\mu') C' \rho - \frac{A'}{\rho} \right] + I' \cos \varphi + K' \sin \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (h)$$

在接触面上,圆筒和无限大弹性体应当具有相同的位移,即

$$(u_\rho)_{\rho=R} = (u'_\rho)_{\rho=R}.$$

将式(h)代入,得

$$\begin{aligned} \frac{1+\mu}{E} \left[ 2(1-2\mu) C R - \frac{A}{R} \right] + I \cos \varphi + K \sin \varphi \\ = \frac{1+\mu'}{E} \left[ 2(1-2\mu') C' R - \frac{A'}{R} \right] + I' \cos \varphi + K' \sin \varphi. \end{aligned}$$

因为这一方程在接触面上的任意一点都应成立,也就是在 $\varphi$ 取任何数值时都应当成立,所以方程两边的自由项必须相等(当然,两边 $\cos \varphi$ 的系数及 $\sin \varphi$ 的系数也必须相等)。于是得

$$\frac{1+\mu}{E} \left[ 2(1-2\mu) C R - \frac{A}{R} \right] = \frac{1+\mu'}{E} \left[ 2(1-2\mu') C' R - \frac{A'}{R} \right].$$

经过简化并利用式(f),得

$$n \left[ 2C(1-2\mu) - \frac{A}{R^2} \right] + \frac{A'}{R^2} = 0, \quad (i)$$

其中

$$n = \frac{E'(1+\mu')}{E(1+\mu)}. \quad (4-15)$$

由方程(e),(f),(g),(i)求出 $A, C, A', C'$ ,然后代入式(c)及式(d),得圆筒及无限大弹性体的应力分量表达式:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_\rho &= -q \frac{[1+(1-2\mu)n] \frac{R^2}{\rho^2} - (1-n)}{[1+(1-2\mu)n] \frac{R^2}{r^2} - (1-n)}, \\ \sigma_\theta &= q \frac{[1+(1-2\mu)n] \frac{R^2}{\rho^2} + (1-n)}{[1+(1-2\mu)n] \frac{R^2}{r^2} - (1-n)}, \\ \sigma'_\rho &= -\sigma'_\theta = -q \frac{2(1-\mu')n \frac{R^2}{\rho^2}}{[1+(1-2\mu')n] \frac{R^2}{r^2} - (1-n)}. \end{aligned} \right\} \quad (4-16)$$

当 $n < 1$ 时,应力分布大致如图4-5所示。

读者可以检查,由于本题是轴对称问题,因此,关于 $\rho = r$ 面上切应力等于零的边界条件、 $\rho = R$ 边界上环向的应力和位移的接触条件都是自然满足的。

这个问题是最简单的一个接触问题。在一般的接触问题中,通常都假定各弹性体在接触面上保持“完全接触”,即,既不互相脱离也不互相滑动。这样,在接触面上,应力方面的接触条件是:两弹性体在接触面上的正应力相等,切应力也相等。位移方面的接触条件是:两弹性体在接触面上的法向位移相等,切向位移也相等。以前已经看到,对平面问题说来,在通常的边界面上,有两个边界条件。现在看到,在接触面上,有四个接触条件,条件并没有增多或减少,因为接触面是两个弹性体的共同的边界。

“光滑接触”是“非完全接触”。在光滑接触面上,也有四个接触条件:两个弹性体的切应力都等于零,两个弹性体的正应力相等,法向位移也相等(由于有滑动,切向位移并不相等)。此外,还有“摩擦滑动接触”。即在接触面上,法向仍保持接触,两弹性体的正应力相等,法向位移也相等;而在环向,则达到极限滑动状态而产生移动,这时,两弹性体的切应力都等于极限摩擦力。

接触问题中若有“局部脱离接触”,则在此局部接触面上,由于两弹性体互相脱离,各自的两个正应力和两个切应力都等于零。

## §4-8 圆孔的孔口应力集中

在本节我们研究所谓“小孔口问题”,即孔口的尺寸远小于弹性体的尺寸,并且孔边缘弹性体的边界比较远(约大于1.5倍孔口尺寸。否则孔口应力分布将受边界条件的影响)。

在许多工程结构中,常常根据需要在一些孔口。由于开孔,孔口附近的应力将远大于无孔时的应力,也远大于距孔口较远处的应力。这种现象称为孔口应力集中。孔口应力集中,不是简单地由于减少了截面尺寸(由于开孔而减少的截面尺寸一般是很小的),而是由于开孔后发生的应力扰动所引起的。因为孔口应力集中的程度比较高,所以在结构设计中应充分注意。孔口应力集中还具有局部性,一般孔口的应力集中区域约在距孔边1.5倍孔口尺寸(例如圆孔的直径)的范围内。

下面介绍圆孔口的一些解答。

首先,设有矩形薄板(或长柱)在离开边界较远处有半径为 $r$ 的小圆孔,在四边受均布拉力,集度为 $q$ ,图4-6a。坐标原点取在圆孔的中心,坐标轴平行于边界。

就直边的边界条件而论,宜用直角坐标;就圆孔的边界条件而论,宜用极坐

标。因为这里主要是考察圆孔附近的应力,所以用极坐标求解,而首先将直边换为圆边。为此,以远大于 $r$ 的某一长度 $R$ 为半径,以坐标原点为圆心,作一个大圆,如图中虚线所示。由应力集中的局部性可见,在大圆周处,例如在 $A$ 点,应力情况与无孔时相同,也就是, $\sigma_r = q$ ,  $\sigma_\theta = q$ ,  $\tau_{r\theta} = 0$ 。代入坐标变换式(4-7),得到该处的极坐标应力分量为 $\sigma_\rho = q$ ,  $\tau_{\rho\phi} = 0$ 。于是,原来的问题变换为这样一个新问题:内半径为 $r$ 而外半径为 $R$ 的圆环或圆筒,在外边界上受均布拉力 $q$ 。

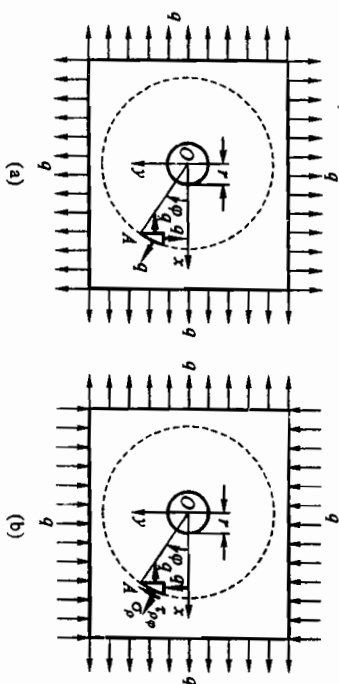


图 4-6

为了得出这个新问题的解答,只需在圆环(或圆筒)受均布外压力时的解答(4-14)中令 $-q_2 = q$ 。于是得

$$\sigma_\rho = q \frac{1 - \frac{r^2}{\rho^2}}{1 - \frac{r^2}{R^2}}, \quad \sigma_\theta = q \frac{1 + \frac{r^2}{\rho^2}}{1 - \frac{r^2}{R^2}}, \quad \tau_{\rho\phi} = \tau_{\phi\rho} = 0。$$

既然 $R$ 远大于 $r$ ,可以取 $\frac{r}{R} = 0$ ,从而得到解答

$$\sigma_\rho = q \left(1 - \frac{r^2}{\rho^2}\right), \quad \sigma_\theta = q \left(1 + \frac{r^2}{\rho^2}\right), \quad \tau_{\rho\phi} = \tau_{\phi\rho} = 0。 \quad (4-17)$$

其次,设该矩形薄板(或长柱)在左右两边受有均布拉力 $q$ 而在上下两边受有均布压力 $q$ ,图4-6b。进行与上相同的处理和分析,可见在大圆周处,例如在点 $A$ ,应力情况与无孔时相同,也就是 $\sigma_r = q$ ,  $\sigma_\theta = -q$ ,  $\tau_{r\theta} = 0$ 。利用坐标变换式(4-7),可得

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_\rho)_{\rho=R} &= q \cos^2 \phi - q \sin^2 \phi = q \cos 2\phi, \\ (\tau_{\rho\phi})_{\rho=R} &= -2q \sin \phi \cos \phi = -q \sin 2\phi。 \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

而这也正是外边界上的边界条件。在孔边,边界条件是

$$(\sigma_\rho)_{\rho=r} = 0, \quad (\tau_{\rho\phi})_{\rho=r} = 0。 \quad (b)$$

由边界条件(a)和(b)可见,用半逆解法时,可以假设 $\sigma_\rho$ 为 $\rho$ 的某一函数乘以 $\cos 2\phi$ ,而 $\tau_{\rho\phi}$ 为 $\rho$ 的另一函数乘以 $\sin 2\phi$ 。但

$$\sigma_\rho = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2}, \quad \tau_{\rho\phi} = -\frac{\partial}{\partial \rho} \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} \right),$$

因此可以假设

$$\Phi = f(\rho) \cos 2\phi。 \quad (c)$$

将式(c)代入相容方程(4-6),得

$$\cos 2\phi \left[ \frac{d^4 f(\rho)}{d\rho^4} + \frac{2}{\rho} \frac{d^3 f(\rho)}{d\rho^3} - \frac{9}{\rho^2} \frac{d^2 f(\rho)}{d\rho^2} + \frac{9}{\rho^3} \frac{df(\rho)}{d\rho} \right] = 0。$$

删去因子 $\cos 2\phi$ 以后,求解这个常微分方程,得

$$f(\rho) = A\rho^4 + B\rho^2 + C + \frac{D}{\rho^2},$$

其中 $A, B, C, D$ 为待定常数。代入式(c),得应力函数

$$\Phi = \cos 2\phi \left( A\rho^4 + B\rho^2 + C + \frac{D}{\rho^2} \right),$$

从而由式(4-5)得应力分量

$$\left. \begin{aligned} \sigma_\rho &= -\cos 2\phi \left( 2B + \frac{4C}{\rho^2} + \frac{6D}{\rho^4} \right), \\ \sigma_\theta &= \cos 2\phi \left( 12A\rho^2 + 2B + \frac{6D}{\rho^4} \right), \\ \tau_{\rho\phi} &= \sin 2\phi \left( 6A\rho^2 + 2B - \frac{2C}{\rho^2} - \frac{6D}{\rho^4} \right)。 \end{aligned} \right\} \quad (d)$$

将式(d)代入边界条件式(a)和(b),得

$$\left. \begin{aligned} 2B + \frac{4C}{R^2} + \frac{6D}{R^4} &= -q, \\ 6AR^2 + 2B - \frac{2C}{R^2} - \frac{6D}{R^4} &= -q, \\ 2B + \frac{4C}{r^2} + \frac{6D}{r^4} &= 0, \\ 6Ar^2 + 2B - \frac{2C}{r^2} - \frac{6D}{r^4} &= 0。 \end{aligned} \right\}$$

求解 $A, B, C, D$ ,然后令 $\frac{r}{R} \rightarrow 0$ ,得

$$A = 0, \quad B = -\frac{q}{2}, \quad C = qr^2, \quad D = -\frac{qr^4}{2}。$$

再将各已知值代入式(d),得应力分量的最后表达式

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= q \cos 2\varphi \left(1 - \frac{r^2}{\rho^2}\right) \left(1 - 3\frac{r^2}{\rho^2}\right), \\ \sigma_\varphi &= -q \cos 2\varphi \left(1 + 3\frac{r^4}{\rho^4}\right), \\ \tau_{r\varphi} &= \tau_{\varphi r} = -q \sin 2\varphi \left(1 - \frac{r^2}{\rho^2}\right) \left(1 + 3\frac{r^2}{\rho^2}\right). \end{aligned} \right\} \quad (4-18)$$

如果该矩形薄板(或长柱)在左右两边受有均布拉力  $q_1$ , 在上下两边受有均布拉力  $q_2$ , 图 4-7a, 可以将荷载分解为两部分: 第一部分是四边的均布拉力  $\frac{q_1+q_2}{2}$ , 图 4-7b, 第二部分是左右两边的均布拉力  $\frac{q_1-q_2}{2}$  和上下两边的均布压力  $\frac{q_1-q_2}{2}$ , 图 4-7c。对于第一部分荷载, 可应用解答(4-17)而令  $q = \frac{q_1+q_2}{2}$ ; 对于第二部分荷载, 可应用解答(4-18)而令  $q = \frac{q_1-q_2}{2}$ 。将两部分解答叠加, 即得原荷载作用下的应力分量。

例如, 设该矩形薄板(或长柱)只在左右两边受有均布拉力  $q$ , 图 4-8, 则由上述叠加法得出基尔斯的解答:

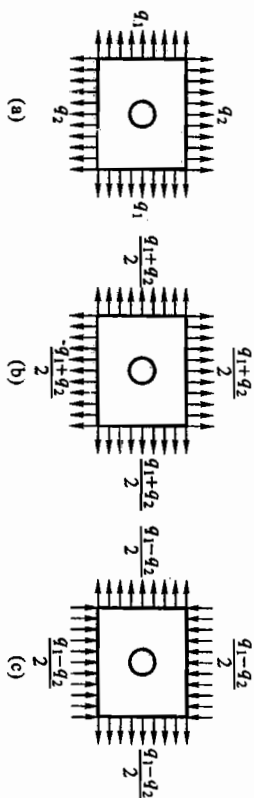


图 4-7

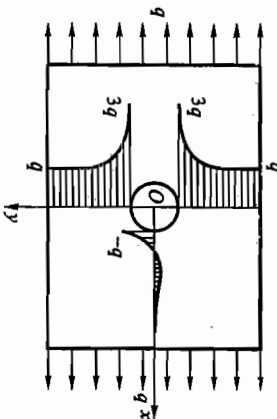


图 4-8

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{q}{2} \left(1 - \frac{r^2}{\rho^2}\right) + \frac{q}{2} \cos 2\varphi \left(1 - \frac{r^2}{\rho^2}\right) \left(1 - 3\frac{r^2}{\rho^2}\right), \\ \sigma_\varphi &= \frac{q}{2} \left(1 + \frac{r^2}{\rho^2}\right) - \frac{q}{2} \cos 2\varphi \left(1 + 3\frac{r^4}{\rho^4}\right), \\ \tau_{r\varphi} &= \tau_{\varphi r} = -\frac{q}{2} \sin 2\varphi \left(1 - \frac{r^2}{\rho^2}\right) \left(1 + 3\frac{r^2}{\rho^2}\right). \end{aligned} \right\} \quad (4-19)$$

沿着孔边,  $\rho = r$ , 环向正应力是

$$\sigma_\varphi = q(1 - 2\cos 2\varphi),$$

它的几个重要数值如下表所示。

$\varphi$	0°	30°	45°	60°	90°
$\sigma_\varphi$	-q	0	q	2q	3q

沿着  $y$  轴,  $\varphi = 90^\circ$ , 环向正应力是

$$\sigma_\varphi = q \left(1 + \frac{1}{2} \frac{r^2}{\rho^2} + \frac{3}{2} \frac{r^4}{\rho^4}\right).$$

它的几个重要数值如下表所示。

$\rho$	r	2r	3r	4r
$\sigma_\varphi$	3q	1.22q	1.07q	1.04q

可见应力在孔边达到均匀拉力的 3 倍, 但随着远离孔边而急剧趋近于  $q$ , 如图 4-8 所示。

沿着  $x$  轴,  $\varphi = 0^\circ$ , 环向正应力是

$$\sigma_\varphi = -\frac{q}{2} \frac{r^2}{\rho^2} \left(3\frac{r^2}{\rho^2} - 1\right).$$

在  $\rho = r$  处,  $\sigma_\varphi = -q$ ; 在  $\rho = \sqrt{3}r$  处,  $\sigma_\varphi = 0$ , 如图 4-8 所示。在  $\rho = r$  与  $\rho = \sqrt{3}r$  之间, 压应力的合力为

$$P = \int_r^{\sqrt{3}r} (\sigma_\varphi)_{\varphi=0} d\rho = -0.1924qr.$$

显然, 当  $q$  为均布压力时, 在  $\rho = r$  与  $\rho = \sqrt{3}r$  之间将发生拉应力, 其合力为  $0.1924qr$ 。

对于其他各种形状的孔口, 大多是应用弹性理论中的复变函数解法求解的。由圆孔和其他孔口的解答可见, 这些小孔口问题的应力集中现象具有共同的特点: 一是集中性, 孔附近的应力远大于较远处的应力, 且最大和最小的应力一般都发生在孔边上。二是局部性, 由于开孔引起的应力扰动, 主要发生在距孔边 1.5 倍孔口尺寸(例如圆孔的直径)的范围内。在此区域外, 由于开孔引起的应力扰动值一般小于 5%, 可以忽略不计。

孔口应力集中与孔口的形状有关, 圆孔的应力集中程度较低, 应尽可能采用圆孔型式。此外, 对于具有凹尖角的孔口, 在尖角处会发生高度的应力集中, 因

此,在孔口中应尽量避免出现凹尖角。

根据以上所述,如果有任何形状的薄板(或长柱),受有任意面力,而在距边界较远处有一小圆孔,那么,只要有了无孔时的应力解答,也就可以计算孔边的应力。为此,只须先求出无孔时相应于圆孔中心处的应力分量,从而求出相应的两个应力主向以及主应力  $\sigma_1$  和  $\sigma_2$ 。如果圆孔确实很小,圆孔的附近部分就可以当做是沿两个主向分别受均布拉力  $q_1 = \sigma_1$  及  $q_2 = \sigma_2$ ,也就可以应用前面所说的叠加法。这样求得的孔边应力,当然会有一定的误差,但在工程实际上却有参考价值。

### §4-9 半平面体在边界上受集中力

设有半平面体,在其直边界上受有集中力,与边界法线成角  $\beta$ ,图4-9,取单位厚度的部分来考虑,并命单位厚度上所受的力为  $F$ ,它的量纲是  $\text{MT}^{-2}$ 。取坐标轴如图所示。

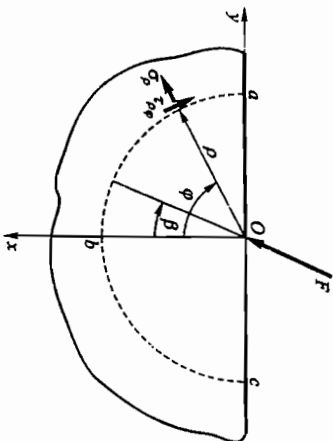


图4-9

用半逆解法求解。首先按量纲分析法来假设应力分量的函数形式。在这里,半平面体内任意一点的应力分量决定于  $\beta, F, \rho, \varphi$ ,因而各应力分量的表达式中只会包含这几个量。但是,应力分量的量纲是  $\text{L}^{-1}\text{MT}^{-2}$ ,  $F$  的量纲是  $\text{MT}^{-2}$ ,而  $\beta$  和  $\varphi$  是量纲一的量。因此,各应力分量的表达式只可能取  $\frac{F}{\rho}$  的形式,其中  $N$  是由量纲一的量  $\beta$  和  $\varphi$  组成的量纲一的量。这就是说,在各应力分量的表达式中,  $\rho$  只可能以负一次幂出现。由式(4-5)又可看出,应力函数  $\Phi$  中的  $\rho$  的幂次应当比各应力分量中的  $\rho$  的幂次高出两次。因此,可以假设应力函数  $\Phi$  是  $\varphi$  的某一函数乘以  $\rho$  的一次幂,即

$$\Phi = \rho f(\varphi). \quad (\text{a})$$

将式(a)代入相容方程(4-6),得

$$\frac{1}{\rho^3} \left[ \frac{d^4 f(\varphi)}{d\varphi^4} + 2 \frac{d^2 f(\varphi)}{d\varphi^2} + f(\varphi) \right] = 0.$$

删去因子  $\frac{1}{\rho^3}$ , 求解这一常微分方程,得

$$f(\varphi) = A \cos \varphi + B \sin \varphi + \varphi (C \cos \varphi + D \sin \varphi),$$

其中  $A, B, C, D$  是待定常数。代入式(a),得

$$\Phi = A \rho \cos \varphi + B \rho \sin \varphi + \rho \varphi (C \cos \varphi + D \sin \varphi).$$

由 §3-1 中已知,式中的前两项  $A \rho \cos \varphi + B \rho \sin \varphi = A x + B y$ , 不影响应力,可以删去。因此,只须取

$$\Phi = \rho \varphi (C \cos \varphi + D \sin \varphi). \quad (4-20)$$

于是由式(4-5)得

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\rho\rho} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} = \frac{2}{\rho} (D \cos \varphi - C \sin \varphi), \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \rho^2} = 0, \\ \tau_{\rho\varphi} &= \tau_{\varphi\rho} = -\frac{\partial}{\partial \rho} \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (\text{b})$$

下面来考察应力边界条件,并求解上式中的待定系数。除了原点之外,在  $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$  的边界面上,没有任何法向和切向面力,因而应力边界条件要求

$$(\sigma_{\varphi\varphi})_{\varphi=\pm\frac{\pi}{2}, \rho \neq 0} = 0, \quad (\tau_{\rho\varphi})_{\varphi=\pm\frac{\pi}{2}, \rho \neq 0} = 0.$$

由式(b)可见,这两个边界条件是满足的。

此外,还须考虑在点  $O$  有集中力  $F$  的作用。集中力  $F$ , 可以看成是下列荷载的抽象化: 在点  $O$  附近的一小部分边界面上,受有一组面力。这组面力向点  $O$  简化后,成为主矢量  $F$ , 而主矩为零。为了考虑点  $O$  附近小边界上的应力边界条件,按照圣维南原理,以点  $O$  为中心,以  $\rho$  为半径作圆弧线  $abc$ , 在点  $O$  附近割出一小部分脱离体  $Oabc$ , 图4-9, 然后考虑此脱离体的平衡条件, 列出三个平衡方程,

$$\left. \begin{aligned} \sum F_x &= 0, \int_{-\pi/2}^{\pi/2} [(\sigma_{\rho\rho})_{\rho=\rho} \cos \varphi \rho d\varphi - (\tau_{\rho\varphi})_{\rho=\rho} \sin \varphi \rho d\varphi] + F \cos \beta = 0, \\ \sum F_y &= 0, \int_{-\pi/2}^{\pi/2} [(\sigma_{\rho\rho})_{\rho=\rho} \sin \varphi \rho d\varphi + (\tau_{\rho\varphi})_{\rho=\rho} \cos \varphi \rho d\varphi] + F \sin \beta = 0, \\ \sum M_O &= 0, \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\tau_{\rho\varphi})_{\rho=\rho} \rho d\varphi \cdot \rho = 0. \end{aligned} \right\} \quad (\text{c})$$

将应力分量(b)代入,由于  $\tau_{\rho\varphi} = 0$ , 式(c)中的第三式自然满足,而第一、二式得出

由此得

$$\pi D + F \cos \beta = 0, \quad -\pi C + F \sin \beta = 0,$$

$$D = -\frac{F}{\pi} \cos \beta, \quad C = \frac{F}{\pi} \sin \beta.$$

代入式(b), 即得应力分量的最后解答

$$\sigma_r = -\frac{2F}{\pi\rho}(\cos\beta\cos\varphi + \sin\beta\sin\varphi), \quad \sigma_\varphi = 0, \quad \tau_{r\varphi} = \tau_{\varphi r} = 0. \quad (4-21)$$

由上式可见, 当  $\rho$  趋于无限小时,  $\sigma_r$  无限增大。实际上, 一当最大的  $\sigma_r$  超过半平面体材料的比例极限, 弹性力学的基本方程就不再适用, 以上的解答也就不适用。因此, 我们必须这样来理解: 半平面体在  $O$  点附近受有一定的面力, 这个面力以及所引起应力的最大集度不超过比例极限, 而面力的合成是图中所示的力  $F$ 。当然, 面力分布的方式不同, 应力分布也就不同。但是, 按照圣维南原理, 不论这个面力如何分布, 在离开面力稍远的处所, 应力分布都相同, 也就和式(4-21)所示的分布相同。

当力  $F$  垂直于直线边界时, 图4-10, 解答最为有用。为了得出这一情况下的应力分量, 只需在式(4-21)中取  $\beta = 0$ , 于是得

$$\sigma_r = -\frac{2F}{\pi} \frac{\cos\varphi}{\rho}, \quad \sigma_\varphi = 0, \quad \tau_{r\varphi} = \tau_{\varphi r} = 0.$$

(4-22)

应用坐标变换式(4-8), 可由上式求得直角坐标中的应力分量:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_r \cos^2\varphi = -\frac{2F}{\pi} \frac{\cos^3\varphi}{\rho}, \\ \sigma_y &= \sigma_r \sin^2\varphi = -\frac{2F}{\pi} \frac{\sin^2\varphi \cos\varphi}{\rho}, \\ \tau_{xy} &= \sigma_r \sin\varphi \cos\varphi = -\frac{2F}{\pi} \frac{\sin\varphi \cos^2\varphi}{\rho}. \end{aligned} \right\} \quad (4-23)$$

这是把直角坐标中的应力分量用极坐标表示。也可以把式(4-23)中的极坐标变换为直角坐标而得

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{2F}{\pi} \frac{x^3}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}, \\ \sigma_y &= -\frac{2F}{\pi} \frac{xy^2}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}, \\ \tau_{xy} &= \tau_{yx} = -\frac{2F}{\pi} \frac{x^2 y}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned} \right\} \quad (4-24)$$

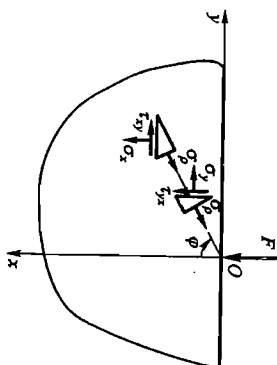


图 4-10

现在来求出位移, 先假定这里是平面应力情况。将应力分量(4-22)代入物理方程(4-3), 得形变分量

$$\epsilon_r = -\frac{2F}{\pi E} \frac{\cos\varphi}{\rho}, \quad \epsilon_\varphi = \frac{2\mu F}{\pi E} \frac{\cos\varphi}{\rho}, \quad \gamma_{r\varphi} = 0.$$

再将这形变分量代入几何方程(4-2), 得

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u_r}{\partial \rho} &= -\frac{2F}{\pi E} \frac{\cos\varphi}{\rho}, \\ \frac{u_r}{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} &= \frac{2\mu F}{\pi E} \frac{\cos\varphi}{\rho}, \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial \rho} - \frac{u_\varphi}{\rho} &= 0. \end{aligned} \right\}$$

进行和 § 4-5 中相同的运算, 可以得出位移分量

$$\left. \begin{aligned} u_r &= -\frac{2F}{\pi E} \cos\varphi \ln \rho - \frac{(1-\mu)F}{\pi E} \varphi \sin\varphi + I \cos\varphi + K \sin\varphi, \\ u_\varphi &= \frac{2F}{\pi E} \sin\varphi \ln \rho + \frac{(1+\mu)F}{\pi E} \sin\varphi - \frac{(1-\mu)F}{\pi E} \varphi \cos\varphi + H\rho - I \sin\varphi + K \cos\varphi, \end{aligned} \right\} \quad (c)$$

其中的  $H, I, K$  都是待定常数。

由问题的对称条件有

$$(u_\varphi)_{\varphi=0} = 0.$$

将式(c)中的  $u_\varphi$  代入, 得  $H = K = 0$ 。于是式(c)成为

$$\left. \begin{aligned} u_r &= -\frac{2F}{\pi E} \cos\varphi \ln \rho - \frac{(1-\mu)F}{\pi E} \varphi \sin\varphi + I \cos\varphi, \\ u_\varphi &= \frac{2F}{\pi E} \sin\varphi \ln \rho - \frac{(1-\mu)F}{\pi E} \varphi \cos\varphi + \frac{(1+\mu)F}{\pi E} \sin\varphi - I \sin\varphi. \end{aligned} \right\} \quad (d)$$

如果半平面体不受沿铅直方向的约束, 则常数  $I$  不能确定, 因为常数  $I$  就代表铅直方向( $x$  方向)的刚体平移。如果半平面体受有铅直方向的约束, 就可以根据这个约束条件来确定常数  $I$ 。

为了求得边界上任意一点  $M$  向下的铅直位移, 即所谓沉降, 可应用式(d)中的第二式。注意, 位移分量  $u_\varphi$  是以沿  $\varphi$  正方向的为正, 因此,  $M$  点的沉降是

$$-(u_\varphi)_{\varphi=\frac{\pi}{2}} = -\frac{2F}{\pi E} \ln \rho - \frac{(1+\mu)F}{\pi E} + I. \quad (e)$$

如果常数  $I$  未能确定, 则沉降(e)也不能确定。这时, 只能求得相对沉降。试在边界上取一个基点  $B$ , 图 4-11, 它距荷载作用点  $O$  的水平距离为  $s$ 。边界上任

意一点  $M$  对于基点  $B$  的相对沉降, 等于  $M$  点的沉降减去  $B$  点的沉降, 即

$$\eta = \left[ -\frac{2F}{\pi E} \ln \rho - \frac{(1+\mu)F}{\pi E} + I \right] - \left[ -\frac{2F}{\pi E} \ln s - \frac{(1+\mu)F}{\pi E} + I \right].$$

简化以后, 得

$$\eta = \frac{2F}{\pi E} \ln \frac{s}{\rho}. \quad (4-25)$$

对于平面应变情况下的半平面体, 在以上关于形变或位移的公式中, 须将  $E$  换

为  $\frac{E}{1-\mu^2}$ , 将  $\mu$  换为  $\frac{\mu}{1-\mu}$ 。

本节中的解答, 是由符拉芒首先得出的, 故称符拉芒解答。

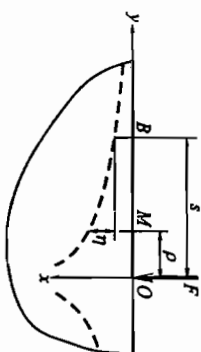


图 4-11

## § 4-10 半平面体在边界上受分布力

有了上一节中关于半平面体在边界上受集中力作用时的应力公式和沉降公式, 即可通过叠加而得出分布力作用时的应力和沉降。设半平面体在其边界的  $AB$  一段上受有铅直分布力, 它在各点的集度为  $q$ , 图 4-12。为了求出半平面体内某一点  $M$  处的应力, 取坐标轴如图所示, 命  $M$  点的坐标为  $(x, y)$ 。在  $AB$  一段上距坐标原点  $O$  为  $\xi$  处取微小长度  $d\xi$ , 将其上所受的力  $dF = q d\xi$  看作一个微小集中力。对于这个微小集中力引起的应力, 即可应用式 (4-24)。注意, 在式 (4-24) 中,  $x$  和  $y$  分别为欲求应力之点与集中力  $F$  作用点的铅直和水平距离, 而在图 4-12 中,  $M$  点与微小集中力  $dF$  的铅直及水平距离分别为  $x$  及  $y - \xi$ 。因此, 微小集中力  $dF = q d\xi$  在  $M$  点引起的应力为

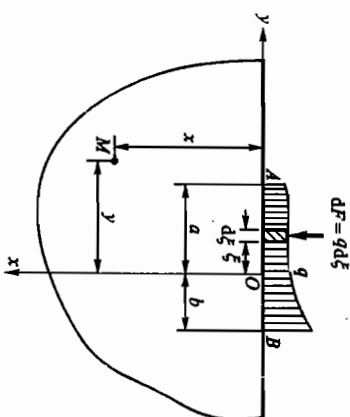


图 4-12

## § 4-10 半平面体在边界上受分布力

77

$$\begin{aligned} d\sigma_x &= -\frac{2qd\xi}{\pi} \frac{x^3}{[x^2 + (y-\xi)^2]^2}, \\ d\sigma_y &= -\frac{2qd\xi}{\pi} \frac{x(y-\xi)^2}{[x^2 + (y-\xi)^2]^2}, \\ d\tau_{xy} &= -\frac{2qd\xi}{\pi} \frac{x^2(y-\xi)}{[x^2 + (y-\xi)^2]^2}. \end{aligned}$$

为了求出全部分布力引起的应力, 只需将所有各个微小集中力引起的应力叠加, 也就是求上列三式的积分, 从  $\xi = -b$  到  $\xi = a$ :

$$\begin{cases} \sigma_x = -\frac{2}{\pi} \int_{-b}^a \frac{qx^3 d\xi}{[x^2 + (y-\xi)^2]^2}, \\ \sigma_y = -\frac{2}{\pi} \int_{-b}^a \frac{qx^2(y-\xi)^2 d\xi}{[x^2 + (y-\xi)^2]^2}, \\ \tau_{xy} = -\frac{2}{\pi} \int_{-b}^a \frac{qx^2(y-\xi) d\xi}{[x^2 + (y-\xi)^2]^2}. \end{cases} \quad (4-26)$$

在应用上列公式时, 须将分布力的集度  $q$  表示成为  $\xi$  的函数, 然后再进行积分。

对于均布荷载,  $q$  是常量, 应用式 (4-26), 得

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{2q}{\pi} \int_{-b}^a \frac{x^3 d\xi}{[x^2 + (y-\xi)^2]^2} = -\frac{q}{\pi} \left[ \arctan \frac{y+b}{x} - \arctan \frac{y-a}{x} \right. \\ &\quad \left. + \frac{y-a}{x^2 + (y+b)^2} - \frac{y+b}{x^2 + (y-a)^2} \right], \\ \sigma_y &= -\frac{2q}{\pi} \int_{-b}^a \frac{x(y-\xi)^2 d\xi}{[x^2 + (y-\xi)^2]^2} = -\frac{q}{\pi} \left[ \arctan \frac{y+b}{x} - \arctan \frac{y-a}{x} \right. \\ &\quad \left. + \frac{y-a}{x^2 + (y+b)^2} + \frac{x(y-a)}{x^2 + (y-a)^2} \right], \\ \tau_{xy} &= -\frac{2q}{\pi} \int_{-b}^a \frac{x^2(y-\xi) d\xi}{[x^2 + (y-\xi)^2]^2} = \frac{q}{\pi} \left[ \frac{x^2}{x^2 + (y+b)^2} - \frac{x^2}{x^2 + (y-a)^2} \right]. \end{aligned} \quad (4-27)$$

下面再来导出半平面体在边界上受有均布单位力作用时的沉降公式。

设有单位力均匀分布在半平面体边界的长度  $c$  上面 (分布集度为  $\frac{1}{c}$ ), 图 4-13。为了求得距均布力中点  $I$  为  $x$  的一点  $K$  的沉降, 将这均布力分为微分

力  $dF = \frac{1}{c} dr$ , 其中  $r$  为该微分力至  $K$  点的距离。应用半平面体的沉降公式 (4-25), 得出  $K$  点由于  $dF$  作用而引起的微分沉降

$$d\eta_K = \frac{2dF}{\pi E} \ln \frac{s}{r} = \frac{2}{\pi E c} \ln \frac{s}{r} dr, \quad (a)$$

其中  $s$  是微分力与基点  $B$  之间的距离。将式 (a) 对  $r$  进行积分, 即可求得沉降  $\eta_K$ 。





4-7 实心圆盘在  $\rho=r$  的周界上受有均布压力  $q$  的作用,试导出其解答。

提示:在弹性力学中,除了应力集中点外,应考虑所谓“应力有限值条件”,即应力应保持为有限值,或  $\sigma \neq \infty$ 。在一般情况下,应力有限值条件是自然满足的。但如  $\rho=0$  和  $\rho=\infty$  处,应检查此条件是否满足。

答案:  $\sigma_r = \sigma_\theta = -q$ ,  $\tau_{r\theta} = 0$ 。

4-8 试考察应力函数  $\Phi = \frac{q}{6a} \rho^3 \cos 3\varphi$ ,能解决图 4-14 所示弹性体的何种受力问题?

提示:按逆解法求解。

答案:  $(\sigma_r)_{\rho=a} = 0$ ,  $(\tau_{r\theta})_{\theta=\pm 30^\circ} = \pm \frac{q}{a} q$ ;

$(\sigma_\theta)_{\rho=a} = -q \cos 3\varphi$ ,  $(\tau_{r\theta})_{\rho=a} = q \sin 3\varphi$ 。

4-9 半平面体表面上受有均布水平力  $q$ ,试用应力函数  $\Phi = \rho^2 (B \sin 2\varphi + C\varphi)$  求解应力分量,图 4-15。

答案:  $\sigma_r = q \sin 2\varphi$ ,  $\sigma_\theta = -q \sin 2\varphi$ ,  $\tau_{r\theta} = q \cos 2\varphi$ 。

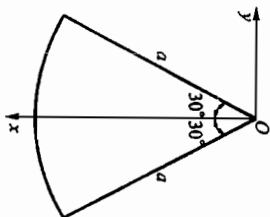


图 4-14

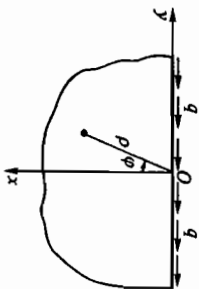


图 4-15

4-10 试证应力函数  $\Phi = \frac{M}{2\pi} \varphi$  能满足相容方程,并求出对应的应力分量。若在半径为  $r$ 、外半径为  $R$  且厚度为 1 的圆环中发生上述应力,试求出边界上的面力。

答案:  $\sigma_r = \sigma_\theta = 0$ ,  $\tau_{r\theta} = \frac{1}{\rho^2} \frac{M}{2\pi}$ 。

4-11 设上题所述的圆环在  $\rho=r$  处被固定,试求位移分量。

提示:由应力求出位移,并应用约束条件。

答案:  $u_r = 0$ ,  $u_\varphi = \frac{M}{4\pi G r} \left( \frac{\rho}{r} - \frac{r}{\rho} \right)$ 。

4-12 楔形体在两侧面上受有均布剪力  $q$ ,图 4-16,试求其应力分量。

提示:应用半逆解法,可假设应力中含有  $q$  及  $\rho$  的零次幂,应力函数  $\Phi = \rho^2 f(\varphi)$ 。

或直接用  $\Phi = A \cos 2\varphi + B \sin 2\varphi + C\varphi + D$  进行求

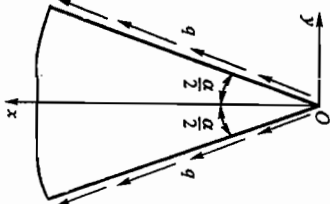


图 4-16

解,并注意问题的对称性。

答案:  $\sigma_r = -q \left( \frac{\cos 2\varphi}{\sin \alpha} + \cot \alpha \right)$ ,

$\sigma_\theta = q \left( \frac{\cos 2\varphi}{\sin \alpha} - \cot \alpha \right)$ ,

$\tau_{r\theta} = \tau_{\theta r} = q \frac{\sin 2\varphi}{\sin \alpha}$ 。

4-13 设有内半径为  $r$  而外半径为  $R$  的圆筒受内压力  $q$ ,试求内半径和外半径的改变,并求圆筒厚度的改变。

答案:  $\frac{qr(1-\mu^2)}{E} \left( \frac{R^2+r^2}{R^2-r^2} + \frac{1}{1-\mu} \right)$ ,  $\frac{qr(1-\mu^2)}{E} \frac{2rR}{R^2-r^2}$ ,

$-\frac{qr(1-\mu^2)}{E} \left( \frac{R-r}{R+r} + \frac{\mu}{1-\mu} \right)$ 。

4-14 设有一刚体,具有半径为  $R$  的圆柱形孔道,孔道内放置外半径为  $R$  而内半径为  $r$  的圆筒,圆筒受内压力  $q$ ,试求圆筒的应力。

答案:  $\sigma_r = \frac{\rho^2}{1-2\mu} \frac{1}{R^2} q$ ,  $\sigma_\theta = -\frac{\rho^2}{1-2\mu} \frac{1}{R^2} q$ 。

4-15 在薄板内距边界较远的某一点处,应力分量为  $\sigma_x = \sigma_y = 0$ ,  $\tau_{xy} = q$ ,如该处有一小圆孔,试求孔边的最大正应力。

答案:  $4q$ 。

4-16 同习题 4-15,但  $\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = q$ 。

答案:  $6q$ 。

4-17 在距表面为  $h$  的弹性地基中,挖一直径为  $d$  的水平圆形孔道,设  $h \gg d$ ,弹性地基的密度为  $\rho$ ,弹性模量为  $E$ ,泊松比为  $\mu$ 。试求小圆孔附近的最大最小应力。

提示:距地表为  $h$  处,无孔时的铅直应力  $\sigma_z = -\rho gh$ ,由水平向条件  $\epsilon_z = 0$ ,可得  $\sigma_z = -\frac{\mu}{1-\mu} \rho gh$ 。

答案: 圆孔中的最大、最小环向应力分别发生在孔顶和孔侧,其值为  $\frac{1-4\mu}{1-\mu} \rho gh$ ,  $-\frac{3-4\mu}{1-\mu} \rho gh$ 。

4-18 设半平面体在直边界上受有集中力偶,单位宽度上力偶矩为  $M$ ,图 4-17,试求应力分量。

提示:单位厚度上的力偶矩  $M$  的量纲是  $\text{LMT}^{-2}$ ,应力只能是  $\frac{M}{\rho^2}$  的形式,所以可假设应力函数  $\Phi = \Phi(\varphi)$ 。

答案:  $\sigma_r = \frac{2M \sin 2\varphi}{\pi \rho^2}$ ,  $\sigma_\theta = 0$ ,  $\tau_{r\theta} = -\frac{M(\cos 2\varphi + 1)}{\pi \rho^2}$ 。

4-19 设有厚度为 1 的无限大薄板,在板内小孔中受集中力  $F$ ,图 4-18,试用如下的应力函数求解:

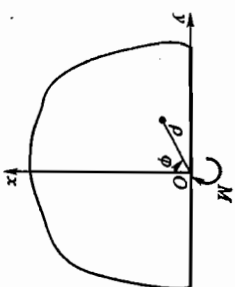


图 4-17

$$\varphi = A_0 \ln \rho \cos \varphi + B_0 \rho \sin \varphi.$$

提示：须考虑位移单值条件。

$$\text{答案：} \sigma_r = -\frac{(3+\mu)F}{4\pi} \frac{\cos \varphi}{\rho},$$

$$\sigma_\varphi = \frac{(1-\mu)F}{4\pi} \frac{\cos \varphi}{\rho},$$

$$\tau_{r\varphi} = \frac{(1-\mu)F}{4\pi} \frac{\sin \varphi}{\rho}.$$

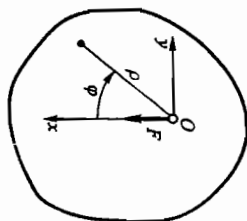


图 4-18

## 第五章 用差分法和变分法解平面问题

### §5-1 差分公式的推导

自从弹性力学基本方程建立以后, 这些方程在各种问题的边界条件下如何求解, 曾经是很多数学家和力学家研究的内容。但是, 对于工程上许多重要的问题, 由于边界条件较为复杂, 并没有能够得出函数式解答。因此, 弹性力学问题的各种数值解法便具有重要的实际意义。差分法和变分法是沿用较久的两种数值解法。

差分法是微分方程的一种近似数值解法。它不是去寻求函数式的解答, 而是去求出函数在一些网格结点上的数值。具体地讲, 差分法就是把微分用有限差分代替, 把导数用有限差商代替, 从而把基本方程和边界条件(一般均为微分方程)近似地改用差分方程(代数方程)来表示, 把求解微分方程的问题改换成为求解代数方程的问题。因此, 在讲述差分法之前, 先来导出弹性力学中常用的一些导数的差分公式, 以便使用它们来建立差分方程。

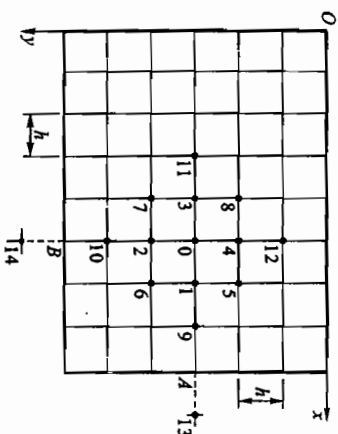


图 5-1

我们在弹性体上用相隔等间距  $h$  而平行于坐标轴的两组平行线织成网格, 图 5-1。网格的交点称为结点, 网格的间距称为步长。设  $f = f(x, y)$  为弹性体内的某一个连续函数, 它可能是某一个应力分量或者位移分量, 也可能是应力函数, 等等。这个函数, 在平行于  $x$  轴的一根网线上, 例如在 3-0-1 上, 只随  $x$

坐标的改变而变化。为了导出导数的差分公式,在结点0的近处,将函数 $f$ 展为泰勒级数如下:

$$f = f_0 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 (x - x_0) + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_0 (x - x_0)^2 + \frac{1}{3!} \left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\right)_0 (x - x_0)^3 + \frac{1}{4!} \left(\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}\right)_0 (x - x_0)^4 + \dots \quad (a)$$

在结点3及结点1,  $x$  分别等于  $x_0 - h$  及  $x_0 + h$ , 即  $x - x_0$  分别等于  $-h$  及  $h$ 。

代入式(a), 得

$$f_3 = f_0 - h \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 + \frac{h^2}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_0 - \frac{h^3}{6} \left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\right)_0 + \frac{h^4}{24} \left(\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}\right)_0 - \dots, \quad (b)$$

$$f_1 = f_0 + h \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 + \frac{h^2}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_0 + \frac{h^3}{6} \left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\right)_0 + \frac{h^4}{24} \left(\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}\right)_0 + \dots \quad (c)$$

假定网格间距  $h$  是充分小的, 因而不计它的三次幂及更高次幂的各项, 则式(b)及式(c)简化为

$$f_3 = f_0 - h \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 + \frac{h^2}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_0, \quad (d)$$

$$f_1 = f_0 + h \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 + \frac{h^2}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_0. \quad (e)$$

联立求解  $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0$  及  $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_0$ , 得一阶和二阶导数的差分公式

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 = \frac{f_1 - f_3}{2h}, \quad (5-1)$$

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_0 = \frac{f_1 + f_3 - 2f_0}{h^2}. \quad (5-2)$$

同样可以得到

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 = \frac{f_2 - f_4}{2h}, \quad (5-3)$$

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_0 = \frac{f_2 + f_4 - 2f_0}{h^2}. \quad (5-4)$$

式(5-1)至(5-4)是基本差分公式, 可以从而导出其他的差分公式。例如, 利用式(5-1)及(5-3), 可以导出混合二阶导数的差分公式如下:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)_0 &= \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\right]_0 = \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_1 - \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_3}{2h} \\ &= \frac{f_6 - f_3 - f_1 - f_8}{2h} = \frac{1}{4h^2} [(f_6 + f_8) - (f_3 + f_1)]. \quad (5-5) \end{aligned}$$

又例如, 用同样的方法, 由式(5-2)及(5-4)可以导出四阶导数的差分公式如下:

$$\left(\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}\right)_0 = \frac{1}{h^4} [6f_0 - 4(f_1 + f_3) + (f_6 + f_{11})], \quad (5-6)$$

$$\left(\frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2}\right)_0 = \frac{1}{h^4} [4f_0 - 2(f_1 + f_2 + f_3 + f_4) + (f_5 + f_6 + f_7 + f_8)], \quad (5-7)$$

$$\left(\frac{\partial^4 f}{\partial y^4}\right)_0 = \frac{1}{h^4} [6f_0 - 4(f_2 + f_4) + (f_{10} + f_{12})]. \quad (5-8)$$

建议读者自行推导这些公式, 以资练习。

以上在导出基本差分公式(5-1)至(5-4)时, 在式(a)中略去了  $x - x_0$  的三次幂及更高次幂的各项。这样, 就把函数  $f$  简化为  $x$  的二次函数, 也就是说, 在连续两段网格间距之内, 把  $f$  看做按抛物线变化。因此, 基本差分公式(5-1)至(5-4)常称为抛物线差分公式。

## §5-2 应力函数的差分解

在§2-9中已知, 在不计体力的情况下, 平面问题中的应力分量  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  可以用应力函数  $\Phi$  的二阶导数表示如下:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}. \quad (a)$$

如果在弹性体上织成如图5-1所示的网格, 应用差分公式(5-4), (5-2), (5-5), 就可以把任一结点0处的应力分量表示成为

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_x)_0 &= \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}\right)_0 = \frac{1}{h^2} [(\Phi_2 + \Phi_4) - 2\Phi_0], \\ (\sigma_y)_0 &= \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}\right)_0 = \frac{1}{h^2} [(\Phi_1 + \Phi_3) - 2\Phi_0], \\ (\tau_{xy})_0 &= \left(-\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}\right)_0 = \frac{1}{4h^2} [(\Phi_5 + \Phi_7) - (\Phi_6 + \Phi_8)]. \end{aligned} \right\} \quad (5-9)$$

可见, 如果已知各结点处的  $\Phi$  值, 就可以求得各结点处的应力分量。

为了求得弹性体边界以内各结点处的  $\Phi$  值, 须利用应力函数的重调和方程, 但须首先把它变换为差分方程。为此, 要把差分公式(5-6)至(5-8)代入  $(\nabla^2 \Phi)_0 = 0$ , 即

$$\left(\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4}\right)_0 + 2 \left(\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2}\right)_0 + \left(\frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4}\right)_0 = 0.$$

这样就得出

$$20\Phi_0 - 8(\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 + \Phi_4) + 2(\Phi_5 + \Phi_6 + \Phi_7 + \Phi_8) +$$

$$(\Phi_9 + \Phi_{10} + \Phi_{11} + \Phi_{12}) = 0. \quad (5-10)$$

对于弹性体边界以内的每一结点,其 $\Phi$ 值取为基本未知值,并可以建立这样一个差分方程。但是,对于边界内一行的(距边界为 $h$ 的)结点,差分方程中还须包含边界上各结点处的 $\Phi$ 值,并包含边界外一行的虚结点处的 $\Phi$ 值。

为了求得边界上各结点处的 $\Phi$ 值,须要应用应力边界条件

$$l(\sigma_x)_i + m(\tau_{xy})_i = \bar{f}_x, \quad m(\sigma_y)_i + l(\tau_{xy})_i = \bar{f}_y.$$

利用式(a),可将它变换成为

$$l\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}\right)_i - m\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}\right)_i = \bar{f}_x, \quad m\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}\right)_i - l\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}\right)_i = \bar{f}_y. \quad (b)$$

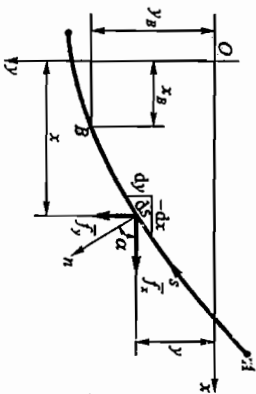


图 5-2

但由图 5-2 可见,沿 $s$ 的正方向(与坐标 $\varphi$ 的方向一致,在图中即为顺时针方向)移动 $ds$ 长度时,相应的 $dy$ 为正值而 $dx$ 本身为负值。由此,外法线 $n$ 的方向余弦为

$$l = \cos(n, x) = \cos \alpha = \frac{dy}{ds},$$

$$m = \cos(n, y) = \sin \alpha = -\frac{dx}{ds}.$$

因此,式(b)可以改写成

$$\frac{dy}{ds} \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right)_i + \frac{dx}{ds} \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \right)_i = \bar{f}_x, \quad -\frac{dx}{ds} \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right)_i - \frac{dy}{ds} \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \right)_i = \bar{f}_y,$$

或表达为

$$\frac{d}{ds} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_i = \bar{f}_x, \quad -\frac{d}{ds} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_i = \bar{f}_y. \quad (c)$$

将上列二式对 $s$ 积分,从固定的基点 $A$ 到边界 $s$ 上任一点 $B$ ,得

$$\left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_A^B = \int_A^B \bar{f}_x ds, \quad -\left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_A^B = \int_A^B \bar{f}_y ds,$$

或

$$\left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_B = \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_A + \int_A^B \bar{f}_x ds, \quad \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_B = \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_A - \int_A^B \bar{f}_y ds. \quad (d)$$

另一方面,注意 $d\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y} dy$ ,对 $s$ 积分,从点 $A$ 到点 $B$ ,则由分部积分得

$$(\Phi)_A^B = \left( x \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_A^B - \int_A^B x \frac{d}{ds} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_i ds + \left( y \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_A^B - \int_A^B y \frac{d}{ds} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_i ds,$$

或将式(c)代入而得

$$(\Phi)_A^B = \left( x \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_A^B + \int_A^B x \bar{f}_x ds + \left( y \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_A^B - \int_A^B y \bar{f}_y ds,$$

也就是

$$\Phi_B - \Phi_A = x_B \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_B - x_A \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_A + \int_A^B x \bar{f}_x ds +$$

$$y_B \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_B - y_A \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_A - \int_A^B y \bar{f}_y ds.$$

再将式(d)代入,得

$$\Phi_B - \Phi_A = x_B \left[ \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_A - \int_A^B \bar{f}_x ds \right] - x_A \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_A + \int_A^B x \bar{f}_x ds +$$

$$y_B \left[ \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_A + \int_A^B \bar{f}_y ds \right] - y_A \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_A - \int_A^B y \bar{f}_y ds,$$

或

$$\Phi_B = \Phi_A + (x_B - x_A) \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_A + (y_B - y_A) \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_A +$$

$$\int_A^B (y_B - y) \bar{f}_x ds + \int_A^B (x - x_B) \bar{f}_y ds. \quad (e)$$

由式(e)及式(d)可见,设已知固定基点 $A$ 的 $\Phi_A$ ,  $\left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_A$ ,  $\left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_A$ ,即可根据面力分量 $\bar{f}_x$ 及 $\bar{f}_y$ 求得边界 $s$ 上任一点 $B$ 的 $\Phi_B$ ,  $\left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_B$ ,  $\left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_B$ 。但在§3-1中已经说明,把应力函数 $\Phi$ 加上一个线性函数,并不影响应力。因此,我们可以假想把函数 $\Phi$ 加上 $a+bx+cy$ ,并调整 $a, b, c$ 三个系数,使得 $\Phi_A=0$ ,  $\left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_A=0$ ,  $\left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_A=0$ 。这样就可以使得式(d)及式(e)简化为

$$\left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_B = \int_A^B \bar{f}_x ds, \quad (5-11)$$

$$\left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_B = -\int_A^B \bar{f}_y ds, \quad (5-12)$$

$$\Phi_B = \int_A^B (y_B - y) \bar{f}_x ds + \int_A^B (x - x_B) \bar{f}_y ds. \quad (5-13)$$

观察图 5-2, 可见式(5-11)右边的积分式表示 A 与 B 之间的、x 方向的面力之和; 式(5-12)右边的积分式表示 A 与 B 之间的、y 方向的面力之和和改号; 式(5-13)右边的积分式表示 A 与 B 之间的面力对于 B 点的力矩之和(在如图 5-2 所示的 x 轴向右而 y 轴向下的坐标系中, 这个力矩以顺时针转向为正)。

以上是针对单连体导出的结果。对于多连体, 情况就不像这样简单。虽然在多连体的每一个连续边界上, 式(d)和式(e)都仍然适用, 但是, 当我们在某一个连续边界 s 上任意选定基点 A 并取  $\Phi_A = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)_A = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)_A = 0$  以后, 应力函数  $\Phi$  就不再具有任意性, 它在弹性体的任何一点都有了一定的数值。因此, 对于另一个连续边界  $s_1$  上任选的基点  $A_1$ , 就不能再取

$$\Phi_{A_1} = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)_{A_1} = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)_{A_1} = 0。$$

只有应用位移单值条件, 才能确定  $\Phi_{A_1}$ ,  $\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)_{A_1}$ ,  $\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)_{A_1}$ , 从而求出  $s_1$  上其它各点的  $\Phi$  值,  $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$  值,  $\frac{\partial \Phi}{\partial y}$  值, 而且由于  $\Phi_{A_1}$ ,  $\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)_{A_1}$ ,  $\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)_{A_1}$ , 一般都不等于零, 于是只能直接应用公式(d)和(e), 而不能应用简化了的式(5-11)至(5-13)。这就使得差分法在多连体问题中应用起来很不方便。本教程以后所讨论的对象只以单连体为限。

至于边界外一行的(距边界为 h 的)虚结点处的  $\Phi$  值, 则可以用函数  $\Phi$  在边界上的导数值和边界内一行的各结点处的  $\Phi$  值来表示。例如, 对于图 5-1 中的虚结点 13 及 14, 因为

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)_A = \frac{\Phi_{13} - \Phi_9}{2h}, \quad \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)_B = \frac{\Phi_{14} - \Phi_{10}}{2h},$$

所以有

$$\Phi_{13} = \Phi_9 + 2h \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)_A, \quad \Phi_{14} = \Phi_{10} + 2h \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)_B。 \quad (5-14)$$

在实际计算时, 可采取如下的步骤: (1) 在边界上任意选定一个结点作为基点 A, 取  $\Phi_A = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)_A = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)_A = 0$ , 然后由面力的矩及面力之和算出边界上所有各结点处的  $\Phi$  值, 以及应用式(5-14)时所必需的一些  $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$  值及  $\frac{\partial \Phi}{\partial y}$  值。(2) 应用式(5-14), 将边界外一行各虚结点处的  $\Phi$  值用边界内的相应结点处的  $\Phi$  值来表示。(3) 对边界内的各结点建立差分方程(5-10), 联立求解, 从而求出这些结点处的  $\Phi$  值。(4) 按照式(5-14), 算出边界外一行的各虚结点处的  $\Phi$  值。

### (5) 按照式(5-9)计算应力分量。

如果一部分边界是曲线, 或是不与坐标轴正交, 则边界附近将出现不规则的内结点, 如图 5-3 中的结点 0。对于这样的结点, 差分方程(5-10)必须加以修正。至于更靠近边界的结点 1, 则根本把这个结点处的  $\Phi$  值(即  $\Phi_1$ )作为一个独立的基本未知值, 而把它用  $\Phi_0$  来表示, 进行如下。

在 B 点附近, 把应力函数  $\Phi$  展为泰勒级数:

$$\Phi = \Phi_B + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)_B (x - x_B) + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}\right)_B (x - x_B)^2 + \dots,$$

图 5-3

对图中的结点 0, 1 和 0, x 依次等于  $x_B - \xi h$ ,  $x_B - \xi h + h$ ,  $x_B - \xi h$ ,  $x_B - (h + \xi h)$ , 也就是命  $x - x_B$  依次等于  $(1 - \xi)h$ ,  $-\xi h$ ,  $-(1 + \xi)h$ , 得出

$$\Phi_0 = \Phi_B + (1 - \xi)h \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)_B + \frac{1}{2} (1 - \xi)^2 h^2 \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}\right)_B + \dots, \quad (f)$$

$$\Phi_1 = \Phi_B - \xi h \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)_B + \frac{1}{2} \xi^2 h^2 \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}\right)_B - \dots, \quad (g)$$

$$\Phi_0 = \Phi_B - (1 + \xi)h \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)_B + \frac{1}{2} (1 + \xi)^2 h^2 \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}\right)_B - \dots。 \quad (h)$$

不计 h 的三次幂及更高次幂的各项, 首先从式(f)及式(h)中消去  $\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}\right)_B$ , 然后

从式(g)及式(h)中消去  $\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)_B$ , 得

$$\Phi_0 = \frac{4\xi}{(1 + \xi)^2} \Phi_B + \frac{2(1 - \xi)}{1 + \xi} h \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)_B + \frac{(1 - \xi)^2}{(1 + \xi)^2} \Phi_0, \quad (i)$$

$$\Phi_1 = \frac{1 + 2\xi}{(1 + \xi)^2} \Phi_B - \frac{\xi}{1 + \xi} h \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)_B + \frac{\xi^2}{(1 + \xi)^2} \Phi_0, \quad (j)$$

仍取  $\Phi_0$  为基本未知值, 对结点 0 列差分方程(5-10)时, 其中的  $\Phi$ , 及  $\Phi_1$  应当如式(i)及式(j)所示。当  $\xi = 0$  时, 结点 B 与结点 1 重合, 式(i)成为  $\Phi_1 = \Phi_B$ , 不起作用, 而式(j)成为  $\Phi_0 = \Phi_0 + 2h \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)_B$ , 与式(5-14)中第一式的意义相同。

## §5-3 应力函数差分解的实例

设有正方形的混凝土深梁, 图 5-4, 上边受有均布向下的铅直荷载 q, 由下

角点处的反力维持平衡,试用应力函数的差分解求出应力分量。

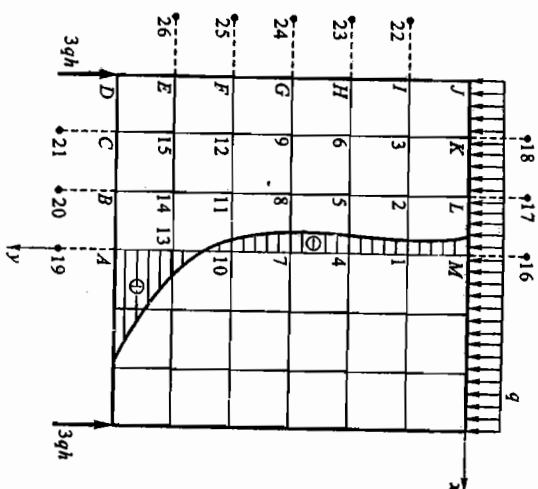


图 5-4

在这里,假定反力集中作用在一点,一般不能符合实际情况。但是,这里的主要问题在于求出梁底中点 A 附近的拉应力,而反力的分布方式对于这个拉应力的影响是比较小的。因此,为了计算简便,就假定反力是集中力。

取坐标轴如图所示,并取网格间距  $h$  等于六分之一边长。由于对称,只须计算梁的一半,例如左一半。现在按前一节末尾所说的步骤进行计算如下。

(1) 为了反映对称性,取梁底中点 A 作为基点,取  $\Phi_A = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)_A = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)_A = 0$ , 计算边界上所有各结点处的  $\Phi$  值以及必需的  $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$  值和  $\frac{\partial \Phi}{\partial y}$  值,列表如下(不必

需的导数值没有计算,在表中用短横线表示)。

结 点	A	B, C	D	E, F, G, H, I	J	K	L	M
$\frac{\partial \Phi}{\partial x}$	0	—	—	—	—	—	—	—
$\frac{\partial \Phi}{\partial y}$	0	0	—	—	—	0	0	0
$\Phi$	0	0	0	0	0	$2.5qh^2$	$4.0qh^2$	$4.5qh^2$

(2) 将边界外一行各个虚结点处的  $\Phi$  值( $\Phi_{16}$  至  $\Phi_{26}$ )用边界内一行各结点

处的  $\Phi$  值表示。在上下两边,  $\frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0$ , 所以有

$$\left. \begin{aligned} \Phi_{16} &= \Phi_1, & \Phi_{17} &= \Phi_2, & \Phi_{18} &= \Phi_3, \\ \Phi_{19} &= \Phi_{13}, & \Phi_{20} &= \Phi_{14}, & \Phi_{21} &= \Phi_{15}. \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

在左边,  $\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 3qh$ , 所以有

$$\Phi_3 = \Phi_{22} + 2h \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_1 = \Phi_{22} + 2h(3qh) = \Phi_{22} + 6qh^2,$$

即

$$\Phi_{22} = \Phi_3 - 6qh^2. \quad (b)$$

同样有

$$\Phi_{23,24,25,26} = \Phi_{5,9,12,15} - 6qh^2. \quad (c)$$

(3) 对边界内的各结点建立差分方程。例如,对结点 1, 注意对称性,由式(5-10)得

$$20\Phi_1 - 8(2\Phi_2 + \Phi_4 + \Phi_M) + 2(2\Phi_5 + 2\Phi_L) + (2\Phi_3 + \Phi_7 + \Phi_{16}) = 0.$$

将上表中  $\Phi_M$  及  $\Phi_L$  的已知值代入,并注意式(a)中的  $\Phi_{16} = \Phi_1$ , 得

$$21\Phi_1 - 16\Phi_2 + 2\Phi_3 - 8\Phi_4 + 4\Phi_5 + \Phi_7 - 20qh^2 = 0. \quad (d)$$

又例如,对结点 15, 得

$$20\Phi_{15} - 8(\Phi_{12} + \Phi_{14} + \Phi_C + \Phi_E) + 2(\Phi_{11} + \Phi_B + \Phi_D + \Phi_F) + (\Phi_9 + \Phi_{13} + \Phi_{21} + \Phi_{26}) = 0.$$

将上表中的  $\Phi_C, \Phi_E, \Phi_B, \Phi_D, \Phi_F$  代入,并注意式(a)中的  $\Phi_{21} = \Phi_{15}$  及式(c)中的  $\Phi_{26} = \Phi_{15} - 6qh^2$ , 得

$$\Phi_9 + 2\Phi_{11} - 8\Phi_{12} + \Phi_{13} - 8\Phi_{14} + 22\Phi_{15} - 6qh^2 = 0. \quad (e)$$

像式(d)和(e)这样的方程共有 15 个,其中包含 15 个未知值  $\Phi_1$  至  $\Phi_{15}$ 。联立求解,得(以  $qh^2$  为单位):

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= 4.36, & \Phi_2 &= 3.89, & \Phi_3 &= 2.47, \\ \Phi_4 &= 3.98, & \Phi_5 &= 3.59, & \Phi_6 &= 2.35, \\ \Phi_7 &= 3.29, & \Phi_8 &= 3.03, & \Phi_9 &= 2.10, \\ \Phi_{10} &= 2.23, & \Phi_{11} &= 2.13, & \Phi_{12} &= 1.63, \\ \Phi_{13} &= 0.92, & \Phi_{14} &= 0.94, & \Phi_{15} &= 0.88. \end{aligned}$$

(4) 计算边界外一行各结点处的  $\Phi$  值。由(a),(b),(c)三式得(以  $qh^2$  为单

$$\begin{aligned} \Phi_{16} &= 4.36, & \Phi_{17} &= 3.89, & \Phi_{18} &= 2.47, \\ \Phi_{19} &= 0.92, & \Phi_{20} &= 0.94, & \Phi_{21} &= 0.88, \end{aligned}$$

$$\Phi_{22} = -3.53, \quad \Phi_{23} = -3.65, \quad \Phi_{24} = -3.90, \\ \Phi_{25} = -4.37, \quad \Phi_{26} = -5.12.$$

(5) 计算应力。例如,在结点  $M$ ,按式(5-9)可得

$$(\sigma_x)_M = \frac{1}{h^2} [(\Phi_1 + \Phi_{16}) - 2\Phi_M] \\ = (4.36 + 4.36 - 2 \times 4.50)q = -0.28q.$$

同样可以得出

$$(\sigma_x)_{1,4,7,10,13,A} = -0.24q, -0.31q, -0.37q, -0.25q, 0.39q, 1.84q.$$

沿着梁的中线  $MA$ ,  $\sigma_x$  的变化如图 5-4 中曲线所示。

如果按照材料力学中的公式计算弯应力  $\sigma_x$ ,则得

$$(\sigma_x)_M = -0.75q, \quad (\sigma_x)_A = 0.75q.$$

可见,对于象本例题中这样的深梁,用材料力学公式算出的应力,是远远不能反映实际情况的。

如果弹性体的形状对称于  $xz$  面和  $yz$  面,而且面力的分布也对称于这两个平面,图 5-5,那么,为了减少独立未知值的数目,我们自然要使得网格也对称于这两个平面。这时,应力函数  $\Phi$  在结点处的数值应当对称于这两个平面。但是,如果按照通常的办法计算边界上各结点处的  $\Phi$  值及其导数值,就不能保证它们具有这种对称性,于是也就不能保证由差分方程解出的内结点  $\Phi$  值具有这种对称性。

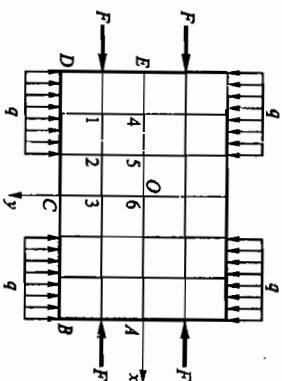


图 5-5

为了保证上述对称性,宜将面力分为  $x$  方向的和  $y$  方向的两组,图 5-6。对于前一组面力,图 5-6a,以  $x$  轴上的  $A$  点为基点,取  $\Phi_A = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)_A = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)_A$

$= 0$ , 计算边界上各结点处的  $\Phi$  值及其导数值,算得的结果必然是对称于  $xz$  面和  $yz$  面。对于后一组面力,图 5-6b,则以  $y$  轴上的  $C$  点为基点,取  $\Phi_C =$

$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)_C = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)_C = 0$ , 进行同样的计算,其结果也必然具有上述对称性。然后将

两方面的结果相叠加,得出边界上各结点处总的  $\Phi$  值及其导数值,它们也必然具有上述对称性。在实际计算时,只需对 1/4 边界上的结点进行计算,因为我们只需计算弹性体的 1/4 部分。以图 5-6 所示的网格为例,只须对 CDE 部分边界上的结点进行计算,然后只需为结点 1 至 6 列出 6 个差分方程。

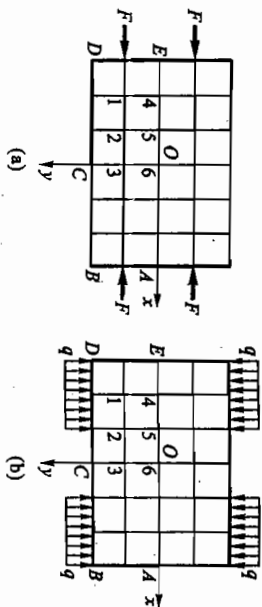


图 5-6

## § 5-4 弹性体的形变势能和外力势能

变分法,主要是研究泛函及其极值的求解方法。所谓泛函,就是以函数为自变量的一类函数,简单地讲,泛函就是函数的函数。弹性力学变分法中所研究的泛函,就是弹性体的能量,如形变势能、外力势能等。因此,弹性力学中的变分法又称为能量法。本章只介绍变分法中按位移求解的方法,其中取位移为基本未知函数。

按照材料力学里的论证,设弹性体只在某一个方向,例如  $x$  方向,受有均匀的正应力  $\sigma_x$ ,相应的线应变为  $\epsilon_x$ ,则其每单位体积中具有形变势能(形变势能,又称为应变能或内力势能),即所谓形变势能密度,为  $\sigma_x \epsilon_x / 2$ 。这里假定,弹性体在受力作用的过程中始终保持平衡,因而没有动能的改变,而且弹性体的非机械能也没有变化,于是,应力所做的功完全转换为物体的形变势能,存贮于体积内。读者还应注意,应力分量  $\sigma_x$  及其相应的形变分量  $\epsilon_x$  都是从 0 增长到最终值  $\sigma_x$  和  $\epsilon_x$  的,且两者之间成线性关系,图 5-7。由于应力不是恒力,它所做的功是  $\int_0^{\epsilon_x} \sigma_x d\epsilon_x = \frac{1}{2} \sigma_x \epsilon_x$ 。同样,设弹性体只在某两个互相垂直的方向,例如  $x$  和  $y$  方向,受有均匀的切应力  $\tau_{xy}$ ,相应的切应变为  $\gamma_{xy}$ ,则其形变能密度为  $\tau_{xy} \gamma_{xy} / 2$ 。

设弹性体受有全部六个应力分量  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$ ,则形变势能的计算似乎很复杂,因为这时的每一个应力分量会引起与另一个应力分量相应的形变分量(例如  $\sigma_x$  会引起  $\epsilon_x$ ,等等),好像形变势能将随着弹性体受力的次序不同而不同。但是,根据能量

图 5-7

守恒定理, 形变势能的多少与弹性体受力的次序无关, 而完全确定于应力及形变的最终大小(要不然, 我们按某一种次序对弹性体加载, 而按另一种次序卸载, 就将在一个循环中使弹性体增加或减少一定的能量, 而这是不可能的)。因此, 我们假定六个应力分量和六个形变分量全都同时按同样的比例增加到最后的大小, 这样就可以很简单地算出相应于每一个应力分量的形变势能密度, 然后把它们相加, 从而得出弹性体的全部形变势能密度

$$U_1 = \frac{1}{2}(\sigma_x \epsilon_x + \sigma_y \epsilon_y + \sigma_z \epsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{xz} \gamma_{xz} + \tau_{yz} \gamma_{yz}) \quad (a)$$

在平面问题中,  $\tau_{yz} = 0, \tau_{xz} = 0$ 。在平面应力问题中还有  $\sigma_z = 0$ ; 在平面应变问题中, 还有  $\epsilon_z = 0$ 。因此, 在两种平面问题中, 弹性体的形变势能密度的表达式都简化为

$$U_1 = \frac{1}{2}(\sigma_x \epsilon_x + \sigma_y \epsilon_y + \tau_{xy} \gamma_{xy}) \quad (b)$$

在一般的平面问题中, 弹性体各部分的受力并非均匀, 各个应力分量和形变分量都是坐标  $x$  和  $y$  的函数, 因而形变势能密度  $U_1$  一般也是坐标  $x$  和  $y$  的函数。为了得出整个弹性体具有的形变势能  $U$ , 必须将形变势能密度  $U_1$  在整个弹性体内积分。和以前一样, 为了简便, 在  $z$  方向取一个单位长度。这样就得到(在平面区域  $A$  内)

$$U = \iint_A U_1 dx dy = \frac{1}{2} \iint_A (\sigma_x \epsilon_x + \sigma_y \epsilon_y + \tau_{xy} \gamma_{xy}) dx dy \quad (c)$$

形变势能可以单用形变分量来表示。为此, 利用平面应力问题的物理方程(2-16), 即

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\mu^2}(\epsilon_x + \mu \epsilon_y), & \sigma_y &= \frac{E}{1-\mu^2}(\epsilon_y + \mu \epsilon_x), \\ \tau_{xy} &= \frac{E}{2(1+\mu)} \gamma_{xy} \end{aligned} \right\} \quad (d)$$

代入式(b), 得

$$U_1 = \frac{E}{2(1-\mu^2)} \left[ \epsilon_x^2 + \epsilon_y^2 + 2\mu \epsilon_x \epsilon_y + \frac{1-\mu}{2} \gamma_{xy}^2 \right] \quad (e)$$

试将式(e)分别对  $\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy}$  求导, 再参阅式(d), 可见有

$$\frac{\partial U_1}{\partial \epsilon_x} = \sigma_x, \quad \frac{\partial U_1}{\partial \epsilon_y} = \sigma_y, \quad \frac{\partial U_1}{\partial \gamma_{xy}} = \tau_{xy} \quad (5-15)$$

它们表示: 弹性体每单位体积中的形变势能对于任一形变分量的改变率, 就等于相应的应力分量。

形变势能还可以用位移分量来表示。为此, 只需将几何方程(2-8)代入式(e), 得

$$U_1 = \frac{E}{2(1-\mu^2)} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1-\mu}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] \quad (f)$$

并由式(c)得

$$U = \frac{E}{2(1-\mu^2)} \iint_A \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1-\mu}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy \quad (5-16)$$

在上式中, 只需将  $E$  换为  $\frac{E}{1-\mu}$ , 将  $\mu$  换为  $\frac{\mu}{1-\mu}$ , 就得出平面应变问题中的相应公式。

由式(e)和(f)可见, 形变势能是形变分量或位移分量的二次泛函。因此, 叠加原理不再适用。例如, 设弹性体中先发生位移  $u_1$ , 再发生位移  $u_2$ , 则  $U(u_1 + u_2) \neq U(u_1) + U(u_2)$ 。由上两式还可见, 当形变或位移发生时, 形变势能总是正的, 即  $U \geq 0$ 。

若弹性体受体力 and 面力作用, 平面区域  $A$  内的体力分量为  $f_x, f_y, s_z$ , 边界上的面力分量为  $\bar{f}_x, \bar{f}_y$ , 则外力(体力 and 面力)在实际位移上所做的功称为外力功, 是

$$W = \iint_A (f_x u + f_y v) dx dy + \int_s (\bar{f}_x u + \bar{f}_y v) ds \quad (5-17)$$

取位移  $u = v = 0$  (或形变  $\epsilon_x = \epsilon_y = \gamma_{xy} = 0$ ) 的自然状态下外力的功和势能为零。由于外力做了功, 消耗了外力势能, 因此, 在发生实际位移时, 弹性体的外力势能是

$$V = -W = - \iint_A (f_x u + f_y v) dx dy - \int_s (\bar{f}_x u + \bar{f}_y v) ds \quad (5-18)$$

## §5-5 位移变分方程

设有平面问题中的任一单位厚度的弹性体, 在一定的外力作用下处于平衡状态。命  $u, v$  为该弹性体中实际存在的位移分量, 它们满足用位移分量表示的平衡微分方程, 并满足位移边界条件以及用位移分量表示的应力边界条件。现在, 假想这些位移分量发生了位移边界条件所容许的微小改变, 即所谓虚位移或位移变分  $\delta u, \delta v$ , 这时, 弹性体从实际位移状态进入邻近的所谓虚位移状态,

$$u' = u + \delta u, \quad v' = v + \delta v$$

例如, 图 5-8 中的梁在外力作用下的实际位移为  $v$ , 它满足平衡微分方程、位移边界条件和应力边界条件。假设在实际位移状态附近发生了约束条件(位移边界条件)容许的虚位移  $\delta v$ , 则梁进入邻近的虚位移状态  $v' = v + \delta v$ 。由于虚位



移是满足约束条件的,因此在边界的约束处,即A和B点, $\delta v=0$ 。

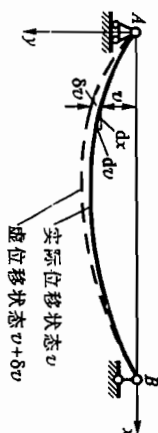


图 5-8

从图 5-8 还可以看出,微分和变分的运算对象是不同的。在微分运算中,自变量一般是坐标等变量,因变量是函数。例如, $v=v(x)$ ,由于坐标的微分  $dx$  引起函数的微分是  $dv = \frac{\partial v}{\partial x} dx$ 。在变分运算中,自变量是函数,因变量是泛函。例如,形变势能  $U$  是位移函数  $v$  的函数,由于位移的变分  $\delta v$  引起形变势能的变分是  $\delta U = \frac{\partial U}{\partial v} \delta v$ 。但是,微分和变分都是微量,它们的运算方法是相同的。

现在我们来考察,由于弹性体发生了虚位移,所引起的外力势能和形变势能的变化。

由于位移的变分  $\delta u, \delta v$ , 引起的外力功的变分  $\delta W$  (即外力虚功) 和外力势能的变分  $\delta V$  为

$$\delta W = \iint_A (f_x \delta u + f_y \delta v) dx dy + \int_s (\bar{f}_x \delta u + \bar{f}_y \delta v) ds, \quad (5-19)$$

$$\delta V = - \iint_A (f_x \delta u + f_y \delta v) dx dy - \int_s (\bar{f}_x \delta u + \bar{f}_y \delta v) ds. \quad (5-20)$$

其中的二重积分须包括弹性体在  $xy$  面内的全部面积  $A$ , 线积分须包括全部受面力的边界  $s$ 。在虚位移发生之前,这些外力已经存在,并且由于虚位移是微小的,因此,在虚位移过程中,外力的大小和方向可以认为保持不变。这样,在上两式中,外力是作为恒力计算的。

由于位移的变分,引起应变的变分(虚应变)是

$$\delta \epsilon_x = \frac{\partial}{\partial x} (\delta u), \quad \delta \epsilon_y = \frac{\partial}{\partial y} (\delta v), \quad \delta \gamma_{xy} = \frac{\partial}{\partial x} (\delta v) + \frac{\partial}{\partial y} (\delta u).$$

从而引起形变势能的变分为

$$\delta U = \iint_A (\sigma_x \delta \epsilon_x + \sigma_y \delta \epsilon_y + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy}) dx dy. \quad (5-21)$$

上式中的应力分量,也是在位移变分发生之前已经存在的,应作为恒力计算,故上式中没有如上节式(c)中的系数  $1/2$ 。

假定弹性体在虚位移过程中并没有温度的变化和速度的改变,也就是,没有热能或动能的改变。这样,按照能量守恒定理,形变势能的增加应当等于外力势

能的减少,也就等于外力所做的功,即外力虚功。于是得

$$\delta U = \delta W.$$

将式(5-19)代入,得到

$$\delta U = \iint_A (f_x \delta u + f_y \delta v) dx dy + \int_s (\bar{f}_x \delta u + \bar{f}_y \delta v) ds. \quad (5-22)$$

这就是所谓位移变分方程。它表示:在实际平衡状态发生位移的变分时,所引起的形变势能的变分,等于外力功的变分。有的文献把它叫做拉格朗日变分方程。

从位移变分方程(5-22)出发,可以导出弹性力学中的极小势能原理。为此,将式(5-22)写成

$$\delta U - \left[ \iint_A (f_x \delta u + f_y \delta v) dx dy + \int_s (\bar{f}_x \delta u + \bar{f}_y \delta v) ds \right] = 0. \quad (a)$$

上式的第二项中外力是恒力,可以将变分记号  $\delta$  提到积分号前面,因此,第二项就是外力势能  $V$  [式(5-18)] 的变分,即

$$\delta [V] = - \left[ \iint_A (f_x \delta u + f_y \delta v) dx dy + \int_s (\bar{f}_x \delta u + \bar{f}_y \delta v) ds \right].$$

而式(a)的第一项又正是形变势能  $U$  [§ 5-4 中式(c)] 的变分。证明如下:

$$\delta [U] = \delta \left[ \iint_A U dx dy \right] = \iint_A \left( \frac{\partial U}{\partial \epsilon_x} \delta \epsilon_x + \frac{\partial U}{\partial \epsilon_y} \delta \epsilon_y + \frac{\partial U}{\partial \gamma_{xy}} \delta \gamma_{xy} \right) dx dy.$$

注意形变势能密度  $U$ , 对形变分量的改变率等于对应的应力分量,即式(5-15),代入上式即得

$$\delta [U] = \iint_A (\sigma_x \delta \epsilon_x + \sigma_y \delta \epsilon_y + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy}) dx dy.$$

因此,式(a)可以写成为

$$\delta (U + V) = 0. \quad (5-23)$$

因为  $U + V$  是形变势能与外力势能的总和,即弹性体的总势能,所以由此可见,在给定的外力作用下,实际存在的位移应使总势能的变分成为零。这就推出这样一个原理:在给定的外力作用下,在满足位移边界条件的所有各组位移状态中,实际存在的一组位移应使总势能成为极值。如果考虑二阶变分总是大于或等于零,即  $\delta^2 (U + V) \geq 0$ , 就可以证明:对于稳定平衡状态,这个极值是极小值。因此,上述原理称为极小势能原理。

应用位移变分方程,还可以导出另一个重要方程,即弹性力学的虚功方程。为此,将  $\delta U$  用式(5-21)表示,再代入位移变分方程(5-22),得到

$$\begin{aligned} & \iint_A (\sigma_x \delta \epsilon_x + \sigma_y \delta \epsilon_y + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy}) dx dy \\ &= \iint_A (f_x \delta u + f_y \delta v) dx dy + \int_s (\bar{f}_x \delta u + \bar{f}_y \delta v) ds. \end{aligned} \quad (5-24)$$

这就是虚功方程。它表示：如果在虚位移发生之前，弹性体处于平衡状态，那么，在虚位移过程中，外力在虚位移上所做的虚功就等于应力在虚应变上所做的虚功。

从以上的讨论可知，位移变分方程(5-22)，极小势能原理的表达式(5-23)以及虚功方程(5-24)，这三者的本质是一样的。它们都是弹性体从实际平衡状态发生虚位移时，能量守恒定理的具体应用，只是表达方式有所不同而已。

我们以前已经得出，实际存在的位移，必须满足位移边界条件，以及用位移表示的平衡微分方程和应力边界条件。现在我们又得出，实际存在的位移，除了预先满足位移边界条件外，还必然满足位移变分方程(或极小势能原理，或虚功方程)。而且，通过进一步的运算，还可以从位移变分方程(或极小势能原理，或虚功方程)导出平衡微分方程和应力边界条件。这就证明，位移变分方程(或极小势能原理，或虚功方程)等价于平衡微分方程和应力边界条件，或者说，可以代替平衡微分方程和应力边界条件。

## §5-6 位移变分法

由上节的结论，可以得出弹性力学的一种变分解法：若设定一组包含若干待定系数的位移分量的表达式，并使它们预先满足位移边界条件，然后再令其满足位移变分方程(用来代替平衡微分方程和应力边界条件)并求出待定系数，就同样地能得出实际位移的解答。

试取位移分量的表达式如下：

$$u = u_0 + \sum_m A_m u_m, \quad v = v_0 + \sum_m B_m v_m, \quad (5-25)$$

其中  $u_0, v_0$  和  $u_m, v_m$  均为设定的坐标函数，并在约束边界  $s_n$  上，令  $u_0, v_0$  分别等于给定的约束位移值  $\bar{u}, \bar{v}$ ，令  $u_m, v_m$  分别等于零。这样，位移分量  $u$  和  $v$  预先满足了  $s_n$  上的位移边界条件。而  $A_m, B_m$  为互不依赖的  $2m$  个待定的系数，用来反映位移状态的变化，即位移的变分是由系数  $A_m, B_m$  的变分来实现。

于是，按照表达式(5-25)，位移分量的变分是

$$\delta u = \sum_m u_m \delta A_m, \quad \delta v = \sum_m v_m \delta B_m, \quad (a)$$

而形变势能的变分是：

$$\delta U = \sum_m \left( \frac{\partial U}{\partial A_m} \delta A_m + \frac{\partial U}{\partial B_m} \delta B_m \right). \quad (b)$$

将式(b)及(a)代入位移变分方程(5-22)，整理以后，得

$$\sum_m \left( \frac{\partial U}{\partial A_m} \delta A_m + \frac{\partial U}{\partial B_m} \delta B_m \right)$$

$$= \sum_m \left[ \int_A (f_x u_m \delta A_m + f_y v_m \delta B_m) dx dy + \sum_m \int_{s_t} (\bar{f}_x u_m \delta A_m + \bar{f}_y v_m \delta B_m) ds \right]$$

进行移项，将每个系数的变分归并，得到

$$\sum_m \left[ \frac{\partial U}{\partial A_m} - \int_A f_x u_m dx dy - \int_{s_t} \bar{f}_x u_m ds \right] \delta A_m + \sum_m \left[ \frac{\partial U}{\partial B_m} - \int_A f_y v_m dx dy - \int_{s_t} \bar{f}_y v_m ds \right] \delta B_m = 0.$$

因为变分  $\delta A_m, \delta B_m$  是完全任意的，而且是互不依赖的，所以在上式中它们的系数必须等于零。于是得出求解  $A_m, B_m$  的位移变分方程，即

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial A_m} &= \int_A f_x u_m dx dy + \int_{s_t} \bar{f}_x u_m ds, \\ \frac{\partial U}{\partial B_m} &= \int_A f_y v_m dx dy + \int_{s_t} \bar{f}_y v_m ds. \end{aligned} \right\} \quad (m = 1, 2, \dots) \quad (5-26)$$

由形变势能的表达式(5-16)及位移分量的表达式(5-25)可见，形变势能  $U$  是系数  $A_m, B_m$  的二次函数，因而方程(5-26)将是各个系数的一次方程。既然各个系数是互不依赖的，就总可以由这些方程求得各个系数，从而由表达式(5-25)求得位移分量。很多文献上把这个方法称为瑞利-里茨法。

用位移变分法求得位移以后，不难通过几何方程求得形变，进而通过物理方程求得应力，但往往出现这样的情况：取不多的系数  $A_m, B_m$ ，就可以求得较精确的位移，而通过求导数后得出的应力却很不精确。为了使求得的应力充分精确，必须取更多的系数。

## §5-7 位移变分法的例题

作为第一个例题，设有宽度为  $a$  而高度为  $b$  的矩形薄板，图 5-9，在左边及下边受连杆支承，在右边及上边分别受有均布压力  $q_1$  及  $q_2$ ，不计体力，试求薄板的位移。

取坐标轴如图 5-9 所示。按照式(5-25)的形式，把位移分量设定为

$$u = x(A_1 + A_2 x + A_3 y + \dots), \quad (a)$$

$$v = y(B_1 + B_2 x + B_3 y + \dots).$$

不论式中各个系数的数值如何，都可以满足左边及下边的位移边界条件，即

$$(u)_{x=0} = 0, \quad (v)_{y=0} = 0.$$

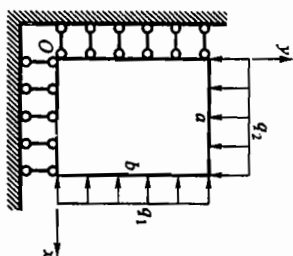


图 5-9

在这里,因为各个边界上都没有不等于零的已知位移,所以在式(5-25)中取  $u_0 = 0, v_0 = 0$ 。现在,试在式(a)中只取  $A_1$  及  $B_1$  两个待定系数,也就是取

$$u = A_1 u_1 = A_1 x, \quad v = B_1 v_1 = B_1 y_0 \quad (b)$$

于是有

$$\frac{\partial u}{\partial x} = A_1, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = B_1_0$$

代入式(5-16),得到

$$U = \frac{E}{2(1-\mu^2)} \int_0^a \int_0^b (A_1^2 + B_1^2 + 2\mu A_1 B_1) dx dy_0$$

进行积分以后,得到

$$U = \frac{Eab}{2(1-\mu^2)} (A_1^2 + B_1^2 + 2\mu A_1 B_1)_0 \quad (c)$$

在这里,因为不计体力,所以有  $f_x = 0, f_y = 0$ 。再注意到位移中所取的项数  $m=1$ ,可见式(5-26)简化为

$$\frac{\partial U}{\partial A_1} = \int_{\bar{s}} \bar{f}_x u_1 ds, \quad (d)$$

$$\frac{\partial U}{\partial B_1} = \int_{\bar{s}} \bar{f}_y v_1 ds_0 \quad (e)$$

计算式(d)右边的积分时,只须考虑  $s_0$  边界上  $\bar{f}_x$  和  $u_1$  都不等于零的部分边界。在薄板的右边有

$$\bar{f}_x = -q_1, \quad u_1 = x = a, \quad ds = dy,$$

从而有

$$\int_{\bar{s}} \bar{f}_x u_1 ds = \int_0^b (-q_1) a dy = -q_1 ab_0$$

在其余三个边界上,不是  $\bar{f}_x = 0$ ,就是  $u_1 = 0$ ,因而积分值都等于零。

计算式(e)右边的积分时,只须考虑  $s_0$  边界上  $\bar{f}_y$  和  $v_1$  都不等于零的部分边界。在薄板的上边有

$$f_y = -q_2, \quad v_1 = y = b, \quad ds = dx,$$

从而有

$$\int_{\bar{s}} \bar{f}_y v_1 ds = \int_0^a (-q_2) b dx = -q_2 ab_0$$

在其余三个边界上,不是  $\bar{f}_y = 0$ ,就是  $v_1 = 0$ ,因而积分值都等于零。

于是由式(d)及式(e)得

$$\frac{\partial U}{\partial A_1} = -q_1 ab, \quad \frac{\partial U}{\partial B_1} = -q_2 ab_0 \quad (f)$$

将式(c)代入式(f),得出决定  $A_1$  及  $B_1$  的方程

$$\frac{Eab}{2(1-\mu^2)} (2A_1 + 2\mu B_1) = -q_1 ab, \\ \frac{Eab}{2(1-\mu^2)} (2B_1 + 2\mu A_1) = -q_2 ab_0$$

求解  $A_1$  及  $B_1$ , 得到

$$A_1 = -\frac{q_1 - \mu q_2}{E}, \quad B_1 = -\frac{q_2 - \mu q_1}{E} \quad (g)$$

从而由式(b)得到位移分量的解答

$$u = -\frac{q_1 - \mu q_2}{E} x, \quad v = -\frac{q_2 - \mu q_1}{E} y_0 \quad (h)$$

如果在式(a)中除了  $A_1$  和  $B_1$  以外再取一些其他的待定系数,例如  $A_2$  和  $B_2$  等等,则在进行与上相似的计算以后,可见这些系数都等于零,而  $A_1$  和  $B_1$  仍然如式(g)所示,从而可见,位移分量的解答仍然如式(h)所示。

读者试证:按照几何方程及物理方程由位移分量(h)求出的应力分量,可以满足平衡微分方程和应力边界条件。这就是说,式(h)所示的位移分量就是精确解答。当然,这只是一个非常特殊的情况。在一般的情况下,如果在设定的位移分量表达式中只取少数几个待定系数,是不可能求得精确解答的,也就是说,这些解答不可能精确满足平衡微分方程和应力边界条件。

作为第二个例题,设有宽度为  $2a$  而高度为  $b$  的矩形薄板,图 5-10,它的左边、右边和下边均被固定,而上边(自由边)具有给定的位移,如下式所示:

$$u = 0, \quad v = -\eta \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)_0 \quad (i)$$

不计体力,试求薄板的位移。

取坐标轴如图所示。按照式(5-25)的形式,但只取项数  $m=1$ ,把位移分量的表达式设定为

$$u = A_1 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) \frac{x}{a} \frac{y}{b} \left(1 - \frac{y}{b}\right), \quad (j)$$

$$v = -\eta \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) \frac{y}{b} + B_1 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) \frac{y}{b} \left(1 - \frac{y}{b}\right), \quad (k)$$

可以满足全部位移边界条件,即

$$(u)_{x=\pm a} = 0, \quad (u)_{y=0} = 0, \quad (u)_{y=b} = 0,$$

$$(v)_{x=\pm a} = 0, \quad (v)_{y=0} = 0, \quad (v)_{y=b} = -\eta \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)_0$$

此外,由于  $u$  是  $x$  的奇函数而  $v$  是  $x$  的偶函数,所以位移的对称性也是满足的。

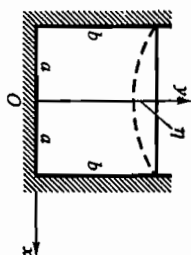


图 5-10

在这里,因为不计体力,所以有  $f_x=0, f_y=0$ ; 因为没有应力边界条件,即  $s_0=0$ ,相应的线积分也不存在。于是式(5-26)简化为

$$\frac{\partial U}{\partial A_1} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial B_1} = 0. \quad (1)$$

应用式(5-16),注意位移的对称性,可见

$$U = \frac{E}{2(1-\mu^2)} 2 \int_0^a \int_0^a \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1-\mu}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy. \quad (m)$$

按照式(j)及式(k)求出位移分量的导数,代入式(m),进行积分,再将  $U$  的表达式代入式(1),得到  $A_1$  及  $B_1$  的两个线性方程,从而求得  $A_1$  及  $B_1$ ,最后由式(i)及式(k)得出位移分量的解答如下:

$$u = \frac{35(1+\mu)\eta}{42\frac{b}{a} + 20(1-\mu)} \left( 1 - \frac{x^2}{a^2} \right) \frac{x}{a} \frac{y}{b} \left( 1 - \frac{y}{b} \right),$$

$$v = -\eta \left( 1 - \frac{x^2}{a^2} \right) \frac{y}{b} + \frac{5(1-\mu)\eta}{16\frac{a}{b^2} + 2(1-\mu)} \left( 1 - \frac{x^2}{a^2} \right) \frac{y}{b} \left( 1 - \frac{y}{b} \right).$$

## 习 题

5-1 试导出四阶导数的差分公式(5-6)至(5-8)。

5-2 对于图 5-4 所示的梁,试建立结点 11, 12 处的差分方程,并将  $\phi$  的解答代入,以资校核。

5-3 用差分法计算图 5-11 所示基础的拉应力,并与材料力学给出的解答对比。采用  $2 \times 4$  的网格,如图示。

答案: 差分法给出  $(\sigma_x)_{\max} = (\sigma_x)_A = 1.28q$ , 材料力学公式给出  $\sigma_{\max} = (\sigma_x)_A = 2.25q$ 。

5-4 用  $2 \times 4$  的网格计算应力,图 5-12。

答案:  $(\sigma_x)_1 = -0.49q$ 。

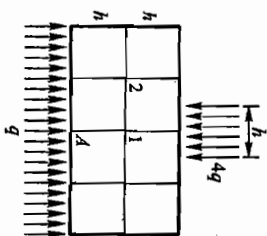


图 5-11

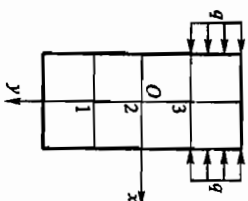


图 5-12

5-5 用  $4 \times 4$  的网格计算应力,图 5-13。

5-6 用  $4 \times 4$  的网格计算应力,图 5-14。

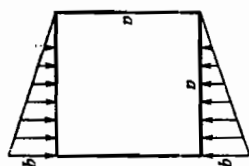


图 5-13

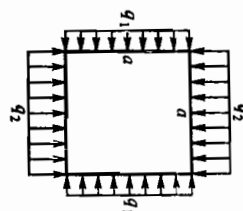


图 5-14

5-7 试比较弹性力学中的瑞利-里茨变分法和按位移求解微分方程解法的区别。

5-8 根据弹性力学中的形变势能公式[§5-4式(c)],求出材料力学中在一定假设下的拉伸、弯曲、扭转的形变势能公式。

答案:

$$U_{(伸)} = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{F_N^2(x)}{EA} dx = \frac{1}{2} \int_0^l EA \left( \frac{du}{dx} \right)^2 dx,$$

$$U_{(弯)} = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M^2(x)}{EI} dx = \frac{1}{2} \int_0^l EI \left( \frac{d^2 v}{dx^2} \right)^2 dx,$$

$$U_{(扭)} = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{T^2(x)}{GI_p} dx = \frac{1}{2} \int_0^l GI_p \left( \frac{d\phi}{dx} \right)^2 dx.$$

5-9 若应用瑞利-里茨变分法求解图 5-15、图 5-16、图 5-17 所示的问题时,应如何设定位移试函数?

提示: 应满足全部位移边界条件。

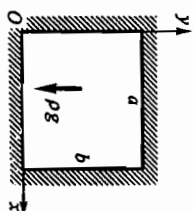


图 5-15

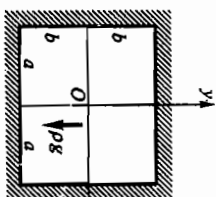


图 5-16

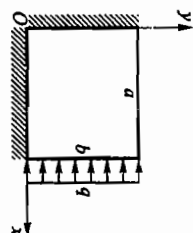


图 5-17

5-10 设图 5-17 所示的薄板为正方形,边长  $a=b$ ,厚度为一个单位,  $\mu=0$ 。在  $x=a$  边界上受有均布压力  $q$  作用,试用瑞利-里茨变分法求解位移。

答案: 设  $u = A_1 xy$ ,  $v = B_1 xy$ , 求得的位移分量为

$$u = -\frac{192}{55} \frac{q}{Ea}, \quad v = \frac{72}{55} \frac{q}{Ea}.$$

5-11 铅直平面内的正方形薄板,边长为  $2a$ ,四边固定,图 5-18,只受重力的作用。

设  $\mu=0$ , 试取位移分量的表达式为

$$u = \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) \left(1 - \frac{y^2}{a^2}\right) \frac{x}{a} \left(A_1 + A_2 \frac{x^2}{a^2} + A_3 \frac{y^2}{a^2} + \dots\right),$$

$$v = \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) \left(1 - \frac{y^2}{a^2}\right) \left(B_1 + B_2 \frac{x^2}{a^2} + B_3 \frac{y^2}{a^2} + \dots\right),$$

用瑞利-里茨法求解。

答案: 当只取  $A_1$  项及  $B_1$  项时, 得

$$a_1 = +\frac{450}{533} \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) \text{ rad}.$$

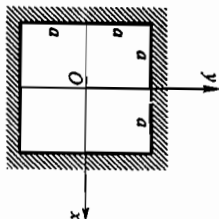


图 5-18

## 第六章 用有限单元法解平面问题

### §6-1 基本量及基本方程的矩阵表示

前已指出, 对于许多实际的弹性力学问题, 由于荷载及边界条件较为复杂, 难以求出函数式的解答。因此, 对于实际的工程问题, 常常采用近似的数值解法。但是, 从上一章对差分法和变分法的讨论可以看出, 当问题的边界条件比较复杂时, 用这两种数值解法求出解答, 仍然是比较困难的。有限单元法是 20 世纪 50 年代以来随着电子计算机的广泛应用而发展起来的又一种数值解法, 它具有极大的通用性和灵活性, 因而可以有效地用来求解弹性力学中的各种复杂边界问题。

在有限单元法中, 为了简洁清晰地表示各个基本量以及它们之间的关系, 也为了便于编制程序以便应用电子计算机进行计算, 广泛地采用矩阵表示和矩阵运算。可以说, 用有限单元法求解弹性力学问题, 实际上就是结构力学的矩阵方法在弹性力学中的推广和发展。因此, 在这一节中, 先来介绍一些基本量和基本方程的矩阵表示。

在平面问题中, 不论是平面应力问题还是平面应变问题, 物体所受的体力只有  $f_x$  和  $f_y$  2 个分量, 可用体力列阵表示为

$$f = \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \end{bmatrix} = (f_x \quad f_y)^T. \quad (6-1)$$

同样, 物体所受的面力也只有  $\bar{f}_x$  和  $\bar{f}_y$  2 个分量, 可用面力列阵表示为

$$\bar{f} = \begin{bmatrix} \bar{f}_x \\ \bar{f}_y \end{bmatrix} = (\bar{f}_x \quad \bar{f}_y)^T. \quad (6-2)$$

与此相似, 3 个应力分量可用应力列阵表示为

$$\sigma = (\sigma_x \quad \sigma_y \quad \tau_{xy})^T. \quad (6-3)$$

3 个形变分量可用应变列阵表示为

$$\varepsilon = (\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \gamma_{xy})^T. \quad (6-4)$$

2 个位移分量可用位移列阵表示为

$$d = (u \quad v)^T. \quad (6-5)$$

现在把本章中要用到的几个基本方程用矩阵来表示。参照式(6-4), 可以

把几何方程(2-8)表示为

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \end{pmatrix}^T \quad (6-6)$$

按照矩阵运算规则,平面应力问题的物理方程(2-16)可用矩阵表示为

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{1-\mu^2} \begin{bmatrix} 1 & \mu \\ \mu & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}, \quad (6-7)$$

或利用式(6-3)及(6-4)简写为

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}, \quad (6-8)$$

其中的矩阵

$$\mathbf{D} = \frac{E}{1-\mu^2} \begin{bmatrix} 1 & \mu \\ \mu & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{对} \\ \text{称} \end{matrix} \quad (6-9)$$

只与弹性常数  $E$  及  $\mu$  有关,称为平面应力问题的弹性矩阵。平面应变问题的物理方程也可以用式(6-8)表示,但须将式(6-9)所示弹性矩阵  $\mathbf{D}$  中的  $E$  换为  $\frac{E}{1-\mu^2}$ ,  $\mu$  换为  $\frac{\mu}{1-\mu}$ 。

用  $u^*$ ,  $v^*$  表示虚位移(即第五章中的  $\delta u$ ,  $\delta v$ ),用  $\varepsilon_x^*$ ,  $\varepsilon_y^*$ ,  $\gamma_{xy}^*$  表示与该虚位移相应的虚应变[可由  $u^*$ ,  $v^*$  通过式(6-6)求出,即第五章中的  $\delta \varepsilon_x$ ,  $\delta \varepsilon_y$ ,  $\delta \gamma_{xy}$ ]。根据虚功方程:在虚位移过程中,外力在虚位移上所做的虚功等于应力在虚应变上所做的虚功,对于厚度为  $t$  的薄板,虚功方程(5-24)可用矩阵表示为

$$\iint_A (\mathbf{d}^*)^T f dx dy + \int_{\Gamma} (\mathbf{d}^*)^T \bar{f} ds = \iint_A (\boldsymbol{\varepsilon}^*)^T \boldsymbol{\sigma} dx dy, \quad (6-10)$$

其中  $f$ ,  $\bar{f}$ ,  $\boldsymbol{\sigma}$  分别如式(6-1), (6-2), (6-3)所示,而虚位移和虚应变的列阵为

$$\mathbf{d}^* = (u^* \ v^*)^T, \quad (6-11)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^* = (\varepsilon_x^* \ \varepsilon_y^* \ \gamma_{xy}^*)^T. \quad (6-12)$$

在有限单元法中,作用于弹性体的各种外力常以作用于某些点的等效集中力来代替。在厚度为  $t$  的薄板上,图 6-1,设作用于  $i$  点的集中力沿  $x$  及  $y$  方向的分量为  $F_{ix}$ ,  $F_{iy}$ , 作用于  $j$  点的为  $F_{jx}$ ,  $F_{jy}$  等等。这些集中力以及和它们相应的虚位移可用列阵表

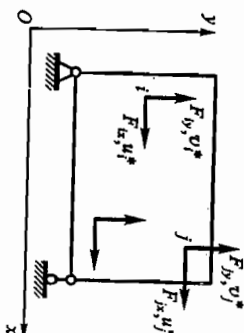


图 6-1

示为

$$\mathbf{F} = (F_{ix} \ F_{iy} \ F_{jx} \ F_{jy} \ \dots)^T, \quad (6-13)$$

$$\boldsymbol{\delta}^* = (u_i^* \ v_i^* \ u_j^* \ v_j^* \ \dots)^T. \quad (6-14)$$

于是各外力在虚位移上的虚功为

$$F_{ix}u_i^* + F_{iy}v_i^* + F_{jx}u_j^* + F_{jy}v_j^* + \dots = (\boldsymbol{\delta}^*)^T \mathbf{F}.$$

代入式(6-10)的左边,即得

$$(\boldsymbol{\delta}^*)^T \mathbf{F} = \iint_A (\boldsymbol{\varepsilon}^*)^T \boldsymbol{\sigma} dx dy. \quad (6-15)$$

这就是集中力作用下的虚功方程。

## § 6-2 有限单元法的概念

有限单元法,简单地说,就是用结构力学方法求解弹性力学问题。即首先将连续体变换成为离散化结构,然后再用结构力学方法进行求解。下面来介绍平面问题的有限单元法。

首先,将连续体变换成为离散化结构。就是将连续体划分为有限多个有限大小的单元,这些单元仅在一些结点连接起来,构成一个所谓离散化结构。

对于平面问题,最简单而常用的单元是三角形单元:在平面应力问题中,它们是三角板,见图 6-2 所示的深梁;在平面应变问题中,它们是三棱柱,见

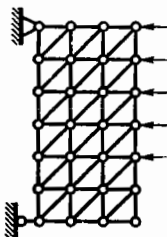


图 6-2

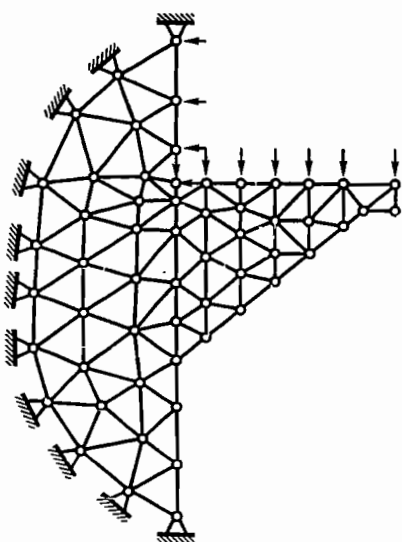


图 6-3

图 6-3 所示的重力坝。此外也常采用矩形单元和任意四边形单元。

在平面问题中,所有的结点一般都作为铰结(也可以作为刚接)。三角形单元,大都只在顶点被设置结点,成为三结点三角形单元;但有时在三边的中点也被设置结点,成为六结点三角形单元。在约束边界处,可视约束情况在该处的结点上设置铰支座或连杆支座。每一单元所受的体力 and 面力,都按静力等效的原则移到结点上,成为结点荷载。这样,平面弹性体就通过离散化而得出一个由若干个单元在结点处铰接而成的离散化结构,它受有已知的结点荷载和若干个边界结点约束,如图 6-2 及图 6-3 所示。这样的离散化结构与桁架相比,其区别仅在于:桁架的单元是杆件,而图 6-2 和图 6-3 的离散化结构的单元是三角形块体。

其次,应用结构力学的位移法,求解离散化结构。以三结点三角形单元(图 6-4)组成的离散化结构(如图 6-2、图 6-3)为例,求解的具体步骤如下:

(1) 取三角形单元的结点位移为基本未知量,它们是

$$\delta^e = (\delta_1, \delta_2, \delta_3)^T = (u_1, v_1, u_2, v_2, u_3, v_3)^T, \quad (a)$$

$\delta^e$  称为单元的结点位移列阵。

(2) 应用插值公式,由单元的结点位移求出单元的位移函数,即求出关系式

$$d = \begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix} = N\delta^e. \quad (b)$$

这种插值公式表示单元中的位移分布形式,在有限单元法中称为位移模式,其中  $N$  称为形函数矩阵。

(3) 应用几何方程,由单元的位移函数求出单元的应变,即求出关系式

$$\varepsilon = B\delta^e, \quad (c)$$

其中  $B$  是表示  $\varepsilon$  与  $\delta^e$  之间关系的矩阵。

(4) 应用物理方程,由单元的应变求出单元的应力,即求出关系式

$$\sigma = S\delta^e, \quad (d)$$

其中  $S$  称为应力转换矩阵。

(5) 应用虚功方程,由单元的应力求出单元的结点力。现在来分析单元和结点之间的相互作用力。假设把单元和结点切开,如图 6-4 中的  $i$  结点,它们之间就有互相作用的力:结点单元的作用力为结点力  $F_i = (F_{ix}, F_{iy})^T$ , 作用

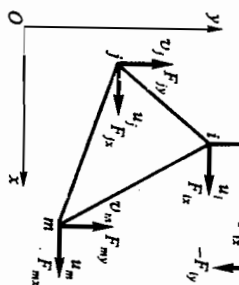


图 6-4

于单元上,以沿坐标正向为正;单元对结点的反作用力,其绝对值与  $F_i$  相同而方向相反;为  $-F_i = (-F_{ix}, -F_{iy})^T$ , 作用于结点  $i$  上。

这样,对三角形单元本身而言,结点力

$$F^e = (F_i, F_j, F_m)^T = (F_{ix}, F_{iy}, F_{jx}, F_{jy}, F_{mx}, F_{my})^T \quad (e)$$

是作用于单元的外力;另外,单元内部还作用有应力。根据虚功方程(6-15),就可以将单元的结点力  $F^e$  用应力来表示,从而得出结点力公式

$$F^e = k\delta^e, \quad (f)$$

其中  $k$  称为单元刚度矩阵。

(6) 应用虚功方程,将单元中的各种外力荷载向结点移置,化为结点荷载(类似于桁架、刚架上的荷载化为结点荷载),即求出单元的结点荷载

$$F_L^e = (F_{L1}, F_{L2}, F_{L3})^T = (F_{L1x}, F_{L1y}, F_{L2x}, F_{L2y}, F_{L3x}, F_{L3y})^T. \quad (g)$$

(7) 列出各结点的平衡方程,组成整个结构的平衡方程组。由于结点  $i$  受有环绕结点的那些单元移置而来的结点荷载  $F_{Li} = (F_{Lix}, F_{Liy})^T$  和结点力  $F_i = (F_{ix}, F_{iy})^T$ , 因而  $i$  结点的平衡方程为

$$\sum_e F_i = \sum_e F_{Li}, \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (h)$$

或者写为标量形式,

$$\sum_e F_{Lix} = \sum_e F_{Lix}, \quad \sum_e F_{Liy} = \sum_e F_{Liy}, \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (i)$$

其中  $\sum_e$  表示对那些环绕  $i$  结点的单元求和,  $n$  表示所有应列平衡方程的结点数。式(h)或式(i)的右边为已知的结点荷载;左边是结点力,其中包含基本未知量——结点位移。将式(i)代入式(h)或(i),经过整理,上述平衡方程组可以表示为

$$K\delta = F_L, \quad (j)$$

其中  $K$  称为整体刚度矩阵,  $F_L$  是整体结点荷载列阵,  $\delta$  是整体结点位移列阵。由式(j)求出  $\delta$ , 从而可以由式(b)和式(d)分别求出单元中的位移  $d$  和应力  $\sigma$ 。

在上述求解步骤中, (2)至(6)是针对每个单元进行的,称为单元分析; (7)是对整个结构进行的,称为整体分析。

## §6-3 单元的位移模式与解答的收敛性

从本节开始,我们对三结点三角形单元组成的离散化结构进行有限单元法分析。在分析中,虽然整个连续弹性体已经变换为离散化结构,但每个单元仍然作为一个连续的、均匀的、各向同性的完全弹性体。

对于每个单元,从弹性力学基本理论可见,只要求得单元中的位移函数,就可以应用几何方程求得应变,再应用物理方程求得应力。在有限单元法中,是取结点位移为基本未知量的。因此,如何由结点位移求出单元中的位移函数是首先必须解决的问题。为此,可以假定一个位移模式,来表示单元中的位移函数,当然,这个函数在单元的结点上应当等于结点位移值。因此,位移模式也就是根据结点位移值在单元中作出的位移插值函数。

在三结点三角形单元中,可以假定位移分量只是坐标的线性函数,也就是假定

$$u = a_1 + a_2x + a_3y, \quad v = a_4 + a_5x + a_6y. \quad (a)$$

在  $i, j, m$  三个结点,图 6-4,位移函数应当等于该结点位移值,即

$$\begin{aligned} a_1 + a_2x_i + a_3y_i &= u_i, & a_4 + a_5x_i + a_6y_i &= v_i, \\ a_1 + a_2x_j + a_3y_j &= u_j, & a_4 + a_5x_j + a_6y_j &= v_j, \\ a_1 + a_2x_m + a_3y_m &= u_m, & a_4 + a_5x_m + a_6y_m &= v_m. \end{aligned}$$

由左边三个方程求解  $a_1, a_2, a_3$ , 由右边三个方程求解  $a_4, a_5, a_6$ , 再代回式(a), 整理以后,可以写成

$$\begin{cases} u = N_i u_i + N_j u_j + N_m u_m, \\ v = N_i v_i + N_j v_j + N_m v_m, \end{cases} \quad (6-16)$$

其中

$$N_i = \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{vmatrix} \quad (i, j, m) \quad (6-17)$$

上式也可以改写成

① 公式后面附有记号  $(i, j, m)$ , 表示这个公式实际上代表三个公式, 其余两个公式系由下标  $i, j, m$  轮换得来。以后将经常采用这种表示法, 以节省篇幅。

$N_i = (a_1 + b_i x + c_i y)/2A$ ,  $(i, j, m)$  (6-18)  
其中的系数  $a_i, b_i, c_i$  是

$$\begin{aligned} a_i &= \begin{vmatrix} x_j & y_j \\ x_m & y_m \end{vmatrix}, & b_i &= - \begin{vmatrix} 1 & y_j \\ 1 & y_m \end{vmatrix}, \\ c_i &= \begin{vmatrix} 1 & x_j \\ 1 & x_m \end{vmatrix}, & (i, j, m) \end{aligned} \quad (6-19)$$

而其中的  $A$  就等于三角形  $ijm$  的面积:

$$A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{vmatrix}. \quad (6-20)$$

按照解析几何学,在图 6-4 所示的坐标系中,为了得出的面积  $A$  不致成为负值,结点  $i, j, m$  的次序必须是逆时针转向的。

式(6-17)或式(6-18)所示的  $N_i, N_j, N_m$  这三个函数,表明了单元  $ijm$  的位移形态(也就是位移在单元内的变化规律),因而称为形态函数,简称为形函数。根据行列式的性质,由式(6-17)不难看出

$$(N_i)_i = 1, \quad (N_i)_j = 0, \quad (N_i)_m = 0. \quad (i, j, m) \quad (6-21)$$

再注意到  $N_i$  是  $x$  和  $y$  的线性函数,可见  $N_i$  在单元上的分布规律(变化规律)如图 6-5a 中的三角锥所示,从而可见,在  $ij$  及  $im$  两边的中点,  $N_i = 1/2$ ; 在三角形  $ijm$  的形心,  $N_i = 1/3$ 。此外,也不难看出下列公式成立:

$$\iint_A N_i dx dy = \frac{A}{3}, \quad \int_{ij} N_i ds = \frac{1}{2} \bar{ij}, \quad (6-22)$$

其中  $\bar{ij}$  是  $ij$  边的长度。

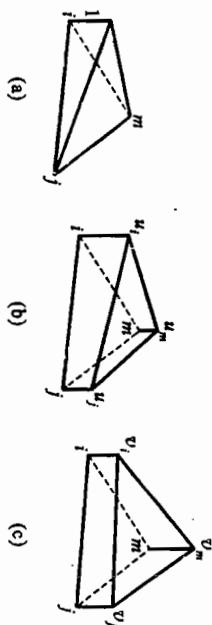


图 6-5

根据形函数的上述性质,并注意到位移分量  $u, v$  都是三个形函数的线性组合,可见  $u$  及  $v$  的变化规律如图 6-5b 及 6-5c 中的斜截三棱柱所示。位移模式的表示式(6-16)可用矩阵表示为



$$d = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 u_1 + N_j u_j + N_m u_m \\ N_1 v_1 + N_j v_j + N_m v_m \end{bmatrix},$$

还可以简写为

$$d = N \delta^e, \quad (6-23)$$

其中

$$\delta^e = (\delta_1, \delta_j, \delta_m)^T = (u_1, v_1, u_j, v_j, u_m, v_m)^T \quad (6-24)$$

是单元的结点位移列阵,而

$$N = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_j & 0 & N_m & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_j & 0 & N_m \end{bmatrix} \quad (6-25)$$

称为形态矩阵或形函数矩阵。

在有限单元法中,应力转换矩阵和刚度矩阵的建立以及荷载的移置等等,都依赖于位移模式。因此,为了能从有限单元法得出正确的解答,首先必须使位移模式能够正确反映弹性体中的真实位移形态,具体说来,就是要满足下列三方面的条件。

(1) 位移模式必须能反映单元的刚体位移。每个单元的位移一般总是包含着两部分:一部分是由本单元的形状变化引起的,另一部分是与本单元的形状无关的,即刚体位移,它是由于其他单元发生了形变而连带引起的。甚至,在弹性体的某些部位,例如在靠近悬臂梁的自由端处,单元的形状变化很小,单元的位移主要是由于其他单元发生形变而引起的刚体位移。因此,为了正确反映单元的位移形态,位移模式必须能反映该单元的刚体位移。

(2) 位移模式必须能反映单元的常量应变。每个单元的应变一般总是包含着两个部分:一个部分是与该单元中各点的位置坐标有关的,是各点不相同的,即所谓变量应变;另一部分是与位置坐标无关的,是各点相同的,即所谓常量应变。而且,当单元的尺寸较小时,单元中各点的应变趋于相等,也就是单元的形状趋于均匀,因而常量应变就成为应变的主要部分。因此,为了正确反映单元的形状状态,位移模式必须能反映该单元的常量应变。

(3) 位移模式应当尽可能反映位移的连续性。在连续弹性体中,位移是连续的,不会发生两相邻部分互相脱离或互相侵入的现象。为了使得单元内部的位移保持连续,必须把位移模式取为坐标的单值连续函数。为了使得相邻单元的位移保持连续,就不仅要使它们在公共结点处具有相同的位移时,也能在整个公共边界上具有相同的位移。这样就能使得相邻单元在受力以后既不互相脱离,也不互相侵入,因而代替原为连续弹性体的那个离散化结构仍然保持为连续弹性体。不难想象,如果单元很小很小,而且相邻单元在公共结点处具有相同的位移,也就能保证它们在整个公共边界上大致具有相同的位移。但是,在实际计

算时,不大可能把单元取得如此之小,因此,我们在选取位移模式时,还是应当尽可能使它反映出位移的连续性。

理论和实践都已证明:为了有限单元法的解答在单元的尺寸逐步减小时能够收敛于正确解答,反映刚体位移和常量应变是必要条件,加上反映相邻单元的位移连续性,就是充分条件。

现在来说明,式(a)所示的位移是反映了三角形单元的刚体位移和常量应变的。为此,把式(a)改写成

$$\left. \begin{aligned} u &= \alpha_1 + \alpha_2 x - \frac{\alpha_3 - \alpha_3}{2} y + \frac{\alpha_5 + \alpha_3}{2} y, \\ v &= \alpha_4 + \alpha_6 y + \frac{\alpha_3 - \alpha_3}{2} x + \frac{\alpha_5 + \alpha_3}{2} x. \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

与式(2-9)对比,可见

$$u_0 = \alpha_1, \quad v_0 = \alpha_4, \quad \omega = \frac{\alpha_5 - \alpha_3}{2},$$

它们反映了刚体平移和刚体转动。另一方面,将式(b)代入几何方程(2-8),可见

$$\epsilon_x = \alpha_2, \quad \epsilon_y = \alpha_6, \quad \gamma_{xy} = \alpha_3 + \alpha_5.$$

它们反映了常量的线应变和切应变。总之,6个参数 $\alpha_1$ 到 $\alpha_6$ ,反映了3个刚体位移和3个常量应变。

现在来说明,式(a)所示的位移模式也反映了相邻单元之间位移的连续性。任意两个相邻的单元,如图6-6中的 $ijm$ 和 $ipj$ ,它们在 $i$ 点的位移相同(都是 $u_i$ 和 $v_i$ ),在 $j$ 点的位移也相同(都是 $u_j$ 和 $v_j$ )。由于式(a)所示的位移分量在每个单元中都是坐标的线性函数,在公共边界 $ij$ 上当然也是线性变化,所以上述两个相邻单元在 $ij$ 上的任意一点都具有相同的位移,这就保证了相邻单元之间位移的连续性。附带指出,在每一单元的内部,位移也是连续的,因为式(a)所示的线性函数当然是单值连续函数。

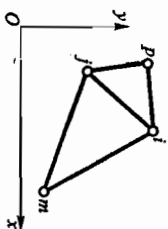


图 6-6

## §6-4 单元的应变列阵和应力列阵

上节中已经由单元的结点位移得出单元的位移函数,即单元的位移模式。因此,可以利用弹性力学中的几何方程和物理方程,分别求出单元中的应变和应力,也用结点位移来表示。

将位移函数式(6-16)以及式(6-18)代入几何方程,便可得出用结点位移

表示单元中应变的表达式:

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} b_i & 0 & b_j & 0 & b_m & 0 \\ 0 & c_i & 0 & c_j & 0 & c_m \\ c_i & b_i & c_j & b_j & c_m & b_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_m \\ v_m \end{bmatrix}$$

或者简写为

$$\varepsilon = B\delta^e, \quad (6-26)$$

其中的矩阵  $B$  可写成分块形式

$$B = (B_i \quad B_j \quad B_m), \quad (6-27)$$

而其子矩阵为

$$B_i = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} b_i & 0 \\ 0 & c_i \\ c_i & b_i \end{bmatrix} \quad (i, j, m) \quad (6-28)$$

由于矩阵  $B$  的元素都是常量, 可见应变  $\varepsilon$  的元素  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$  也是常量。因此, 这里所采用的三结点三角形单元, 也称为平面问题的常应变单元。

再将单元的应变式(6-26)代入物理方程(6-8), 就得到用结点位移表示单元中应力的表达式

$$\sigma = D\varepsilon = DB\delta^e. \quad (6-29)$$

可见, 在每一个单元中, 应力分量也是常量。当然, 相邻单元一般将具有不同的应力, 因而在它们的公共边上, 应力并不连续。

将式(6-29)简写为

$$\sigma = S\delta^e, \quad (6-30)$$

则有

$$S = DB. \quad (6-31)$$

将弹性矩阵的表达式(6-9)及本节中的式(6-27)代入, 即得平面应力问题中的应力转换矩阵, 写成分块形式

$$S = (S_i \quad S_j \quad S_m), \quad (6-32)$$

其中的子矩阵为

$$S_i = \frac{E}{2(1-\mu^2)A} \begin{bmatrix} b_i & \mu c_i \\ \mu b_i & c_i \\ \frac{1-\mu}{2} c_i & \frac{1-\mu}{2} b_i \end{bmatrix} \quad (i, j, m) \quad (6-33)$$

对于平面应变问题, 要把  $E$  换为  $\frac{E}{1-\mu^2}$ ,  $\mu$  换为  $\frac{\mu}{1-\mu}$ 。

在三结点三角形单元中, 当位移函数取为线性位移模式时, 也就是将位移函数在单元中用泰勒级数展开, 略去其中  $\Delta x$  及  $\Delta y$  二次以上的项而得出的结果。再经过求导运算得出的应变和应力都成为常量。由此可见, 线性位移模式的误差量级是  $\Delta x$  或  $\Delta y$  的二阶小量, 而应变和应力的误差量级是  $\Delta x$  或  $\Delta y$  的一阶小量, 因此, 应力的精度低于位移的精度。这点在划分单元和整理成果时应该加以注意。

为了提高有限单元法分析的精度, 一般可以采用两种方法: 一是将单元的尺寸减小, 以便较好地反映位移和应力的变化情况; 二是采用包含更高次项的位移模式, 使位移和应力的精度提高。

## §6-5 单元的结点力列阵与劲度矩阵

现在来导出单元的结点力列阵。对于任一个单元, 均假设所受的外力荷载已经移到结点上, 并且单元和结点已经切开, 如图 6-4 所示。因此, 该单元只受到结点对单元的作用力, 即结点力

$$F^e = (F_i \quad F_j \quad F_m)^T = (F_{ix} \quad F_{iy} \quad F_{jx} \quad F_{jy} \quad F_{mx} \quad F_{my})^T. \quad (6-34)$$

对于单元本身而言, 这些结点力是一种外力。在结点力的作用下, 单元内部产生应力  $\sigma$ 。

假想在单元的结点  $i, j, m$  发生了虚位移, 即

$$(\delta^e)^* = (u_i^* \quad v_i^* \quad u_j^* \quad v_j^* \quad u_m^* \quad v_m^*)^T. \quad (a)$$

则由式(6-26), 引起相应的虚应变为

$$\varepsilon^* = B(\delta^e)^*. \quad (b)$$

于是, 该单元在虚位移过程中, 结点力在虚位移上的虚功应当等于应力在虚应变上的虚功, 即由虚功方程(6-15)得

$$[(\delta^e)^*]^T F^e = \iint_A (\varepsilon^*)^T \sigma dx dy.$$

将虚应变式(b)及应力表达式(6-29)代入, 得

$$\begin{aligned} [(\delta^e)^*]^T F^e &= \iint_A [B(\delta^e)^*]^T D B \delta^e dx dy \\ &= \iint_A [(\delta^e)^*]^T B^T D B \delta^e dx dy. \end{aligned}$$

由于  $(\delta^e)^*$  中的元素是常量, 上式右边的  $[(\delta^e)^*]^T$  可以提到积分号的前面去。又由于虚位移可以是任意的, 从而矩阵  $[(\delta^e)^*]^T$  也是任意的, 所以等式两边与

它相乘的矩阵应当相等,于是得

$$F^e = \iint_A B^T D B dx dy \delta^e. \quad (c)$$

命

$$k = \iint_A B^T D B dx dy, \quad (6-35)$$

则式(c)可以简写为

$$F^e = k \delta^e. \quad (6-36)$$

这就建立了该单元上的结点力与结点位移之间的关系。对于三结点三角形单元,  $B$  中的元素都是常量, 而  $\iint_A dx dy = A$ , 因此, 式(6-35)可以简写为

$$k = B^T D B t A. \quad (d)$$

矩阵  $k$  称为单元的刚度矩阵<sup>①</sup>。从式(6-36)可见, 它的元素表明该单元的各结点沿坐标方向发生单位位移时引起的结点力, 它决定于该单元的形状、方位和弹性常数, 而与单元的位置无关, 即不随单元或坐标轴的平行移动而改变。

将式(6-27)及(6-9)代入式(d), 即得平面应力问题中三结点三角形单元的刚度矩阵, 写成分块形式如下:

$$k = \begin{bmatrix} k_{ii} & k_{ij} & k_{im} \\ k_{ji} & k_{jj} & k_{jm} \\ k_{mi} & k_{mj} & k_{mm} \end{bmatrix}, \quad (6-37)$$

其中

$$k_{rs} = \frac{Et}{4(1-\mu^2)A} \begin{bmatrix} b_r b_s + \frac{1-\mu}{2} c_r c_s & \mu b_r c_s + \frac{1-\mu}{2} c_r b_s \\ \mu c_r b_s + \frac{1-\mu}{2} b_r c_s & c_r c_s + \frac{1-\mu}{2} b_r b_s \end{bmatrix}, \quad (6-38)$$

注意到  $k_{rs} = k_{sr}$ , 可见  $k$  是对称矩阵。对于平面应变问题, 须将上式中的  $E$  换为  $\frac{E}{1-\mu^2}$ ,  $\mu$  换为  $\frac{\mu}{1-\mu}$ 。从式(6-38)还可见,  $k$  与单元的大小无关, 即放大或缩小单元的尺寸, 其  $k$  值不变。

作为简例, 设有平面应力情况下的等腰直角三角形单元  $ijm$ , 图 6-7。在所选的坐标系中,

① 在中文中, 通常用“刚度”表示力与形变之间关系的量, 用“劲度”表示力与位移之间关系的量。按此处表示结点力与结点位移之间关系的矩阵称为劲度矩阵, 但在许多有限单元法书中均已习惯地称为刚度矩阵。

$$x_i = a, \quad x_j = 0, \quad x_m = 0,$$

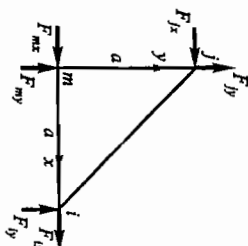
$$y_i = 0, \quad y_j = a, \quad y_m = 0.$$

应用式(6-19)及(6-20), 得

$$b_i = a, \quad b_j = 0, \quad b_m = -a,$$

$$c_i = 0, \quad c_j = a, \quad c_m = -a,$$

$$A = \frac{a^2}{2}.$$



应用式(6-32)及(6-33), 得该单元的应力转换矩阵

$$S = \frac{E}{(1-\mu^2)a} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \mu & -1 & -\mu \\ \mu & 0 & 0 & 1 & -\mu & -1 \\ 0 & \frac{1-\mu}{2} & \frac{1-\mu}{2} & 0 & -\frac{1-\mu}{2} & -\frac{1-\mu}{2} \end{bmatrix}. \quad (e)$$

应用式(6-37)及(6-38), 得该单元的刚度矩阵

$$k = \frac{Et}{2(1-\mu^2)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1-\mu}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1-\mu}{2} & 0 & \frac{1-\mu}{2} & 0 & 0 \\ \mu & 0 & 0 & 1 & -\mu & -\mu \\ -1 & -\frac{1-\mu}{2} & -\frac{1-\mu}{2} & 0 & \frac{3-\mu}{2} & \frac{3-\mu}{2} \\ -\mu & \frac{1-\mu}{2} & -\frac{1-\mu}{2} & -1 & \frac{1+\mu}{2} & \frac{3-\mu}{2} \end{bmatrix} \quad \text{对} \quad \text{称} \quad (f)$$

现在, 通过这个简例, 试考察一下结点力与单元中的应力这两者之间的关系。为简单明了起见, 假定只有结点  $i$  发生位移  $u_i$ , 图 6-8a。由式(f)得相应的结点力为

$$\begin{aligned} (F_{ix} \quad F_{iy} \quad F_{jx} \quad F_{jy} \quad F_{mx} \quad F_{my})^T \\ = \frac{Et}{2(1-\mu^2)} (1 \quad 0 \quad 0 \quad \mu \quad -1 \quad -\mu)^T u_i \\ = F(1 \quad 0 \quad 0 \quad \mu \quad -1 \quad -\mu)^T, \end{aligned}$$

其中  $F = \frac{Eu_i}{2(1-\mu^2)}$ 。相应的结点位移及结点力如图 6-8b 所示。

另一方面, 由于这个位移  $u_i$ , 由式(e)得相应的应力分量为

$$(\sigma_x \quad \sigma_y \quad \tau_{xy})^T = \frac{E u_i}{(1-\mu^2)a} (1 \quad \mu \quad 0)^T = \frac{2F}{a} (1 \quad \mu \quad 0)^T,$$

如图 6-8b 中  $ijm$  及  $mi$  二面上所示。根据该单元的平衡条件, 还可得出  $ij$  面

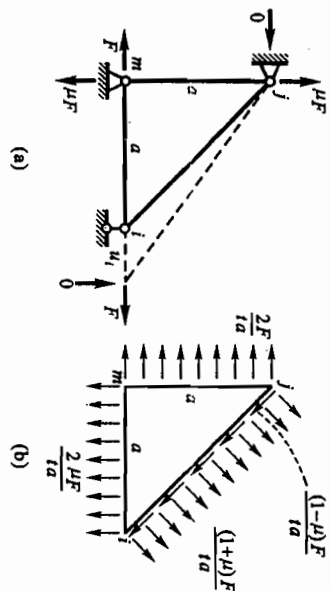


图 6-8

上的应力,如图中所示。现在,将这三面上的应力分别按静力等效原则移置到结点上,可见将得出与图 6-8a 中相同的结点力。例如,在  $mi$  边上,移置到结点  $m$  的力是向下的

$$\frac{2\mu F}{3a} \cdot \frac{1}{2} = \mu F,$$

等等。

由这个简例可见,在有限单元法中,作用在单元上各结点处的结点力,就是单元边界上的应力向结点等效移置的结果。

## §6-6 荷载向结点移置 单元的结点荷载列阵

为了简化每个单元的受力情况,便于分析,我们把单元所受的外力荷载都向结点移置而成为结点荷载。这种移置必须按照静力等效的原则来进行。对于变形体,包括弹性体在内,所谓静力等效,是指原荷载与结点荷载在任何虚位移上的虚功都相等。在一定的位移模式之下,这样移置的结果是唯一的,而且总能符合通常所理解的、对刚体而言的静力等效原则;即,原荷载与结点荷载在任一轴上的投影之和相等,对任一轴的力矩之和也相等,也就是,在向任一点简化时,它们具有相同的主矢量及主矩。

设单元  $ijm$  在坐标为  $(x, y)$  的任意一点  $M$ , 在单位厚度上受有集中荷载  $f_p$ , 其坐标方向的分量为  $f_{px}$  及  $f_{py}$ , 图 6-9, 用矩阵表示为  $f_p = (f_{px} \ f_{py})^T$ 。将此集中力移置到单元的结点处,转换为

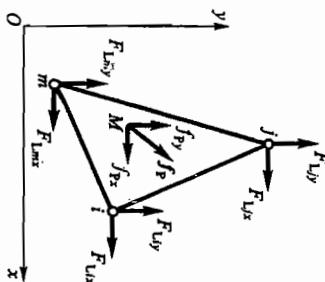


图 6-9

结点荷载,并用单元结点荷载列阵表示为

$$F_L^e = (F_{Lix} \ F_{Liy} \ F_{Ljx} \ F_{Ljy} \ F_{Lmx} \ F_{Lmy})^T \quad (6-39)$$

现在,假想单元的各结点发生了虚位移

$$(\delta^*)^e = (u_i^* \ v_i^* \ u_j^* \ v_j^* \ u_m^* \ v_m^*)^T, \quad (a)$$

由位移模式(6-23),相应于集中力  $f_p$  的作用点  $(x, y)$  的虚位移为

$$d^* = (u^*(x, y) \ v^*(x, y))^T = N(\delta^*)^e. \quad (b)$$

按照静力等效原则,结点荷载在结点虚位移上的虚功,应当等于原荷载集中力在其作用点的虚位移上的虚功,即

$$[(\delta^*)^e]^T F_L^e = (d^*)^T f_p t_0$$

将式(b)代入,得

$$[(\delta^*)^e]^T F_L^e = [N(\delta^*)^e]^T f_p t_0 \\ = [(\delta^*)^e]^T N^T f_p t_0$$

由于虚位移可以是任意的,从而矩阵  $[(\delta^*)^e]^T$  也是任意的,等式两边与它相乘的矩阵应当相等,于是得

$$F_L^e = N^T f_p t_0. \quad (6-40)$$

利用式(6-25),可将上式改写为

$$F_L^e = (F_{Lix} \ F_{Liy} \ F_{Ljx} \ F_{Ljy} \ F_{Lmx} \ F_{Lmy})^T \\ = t(N_j f_{px} \ N_j f_{py} \ N_i f_{px} \ N_i f_{py} \ N_m f_{px} \ N_m f_{py})^T, \quad (6-41)$$

其中的  $N_i, N_j, N_m$  应当是它们在  $M$  点的函数值。

设上述单元受有分布体力  $f = (f_x \ f_y)^T$ , 可将微分体积  $t dx dy$  上的体力  $f dx dy$  当作集中力,利用式(6-40)的积分,得到

$$F_L^e = t \iint_A N^T f dx dy. \quad (6-42)$$

利用式(6-25),可将它改写为

$$F_L^e = (F_{Lix} \ F_{Liy} \ F_{Ljx} \ F_{Ljy} \ F_{Lmx} \ F_{Lmy})^T \\ = t \iint_A (N_i f_x \ N_i f_y \ N_j f_x \ N_j f_y \ N_m f_x \ N_m f_y)^T dx dy. \quad (6-43)$$

例如,设单元  $ijm$  的密度为  $\rho$ , 试求自重的等效结点荷载。因为  $f_x = 0, f_y = -\rho g$ , 故由式(6-43)得  $F_{Lix} = F_{Ljx} = F_{Lmx} = 0$ , 及

$$F_{Liy} = -\rho g t \iint_A N_i dx dy. \quad (i, j, m)$$

应用式(6-22)中的第一式,即得

$$F_{Liy} = -\frac{1}{3} \rho g t A, \quad (i, j, m)$$

注意单元的自重为  $-\rho g t A$ , 可见移到每个结点的荷载均为  $1/3$  自重。

设单元  $ijm$  的某一边上受有分布面力  $\bar{f} = (\bar{f}_x \quad \bar{f}_y)^T$ , 可将微分面积  $t ds$  上的面力  $\bar{f}_i t ds$  当作集中荷载, 由式(6-40)得

$$F_L^i = t \int_{\bar{f}_i} N^T \bar{f} ds. \quad (6-44)$$

利用式(6-25), 可将它改写为

$$\begin{aligned} F_L^i &= (F_{Lix} \quad F_{Liy} \quad F_{Liz} \quad F_{Lmx} \quad F_{Lmy})^T \\ &= t \int_{\bar{f}_i} (N_{\bar{f}_x} \quad N_{\bar{f}_y} \quad N_{\bar{f}_z} \quad N_{\bar{f}_m} \quad N_{\bar{f}_n})^T ds. \end{aligned} \quad (6-45)$$

例如, 设在  $ij$  边上受有沿  $x$  方向的均布面力  $q$ , 试求等效结点荷载。因为面力分量  $\bar{f}_x = q, \bar{f}_y = 0$ , 故由式(6-45)得

$$F_{Lix} = q t \int_{ij} N_i ds, \quad F_{Liy} = q t \int_{ij} N_j ds, \quad F_{Liz} = q t \int_{ij} N_m ds,$$

$$F_{Liy} = F_{Liz} = F_{Lmy} = 0.$$

利用式(6-22)中的第二式及式(6-21)中的第三式, 即得

$$F_{Lix} = F_{Liz} = \frac{1}{2} q t \bar{ij}, \quad F_{Lmx} = 0,$$

其中  $\bar{ij}$  为  $ij$  边的长度。读者试证: 若在  $ij$  边上受有  $x$  方向的线性分布面力, 在  $i$  点为  $q$ , 在  $j$  点为 0, 则按式(6-45)求得的结点荷载为

$$\begin{aligned} F_{Lix} &= \frac{1}{3} q t \bar{ij}, & F_{Liz} &= \frac{1}{6} q t \bar{ij}, & F_{Lmx} &= 0; \\ F_{Liy} &= F_{Liz} = F_{Lmy} = 0. \end{aligned}$$

## §6-7 结构的整体分析 结点平衡方程组

以上几节的分析, 都是针对单元进行的。即一方面将单元上的外力荷载都向结点移置而成为结点荷载  $F_L^i = (F_{Lix} \quad F_{Liy} \quad F_{Liz})^T$ ; 另一方面求出结点与单元之间的相互作用力, 如图 6-4 所示: 结点对单元的作用力是结点力  $F^i = (F_x \quad F_y \quad F_z)^T$ ; 相反, 单元对结点的作用力是  $F^*$  的负值。于是, 作用于结点  $i$  上的力, 有结点荷载  $F_L^i$ , 和结点力的负值, 即

$$\begin{aligned} -F_i &= -(k_{ix} \delta_i + k_{iy} \delta_j + k_{im} \delta_m) \\ &= -\sum_{n=i,j,m} k_{in} \delta_n. \end{aligned}$$

因此, 结点  $i$  的平衡方程是

$$\sum_e F_i = \sum_e F_{Li}, \quad (6-46)$$

其中  $\sum_e$  是对环绕结点  $i$  的单元求和。上式也可写为

$$\sum_e \left( \sum_{n=i,j,m} k_{in} \delta_n \right) = \sum_e F_{Li}. \quad (6-47)$$

或者写为标量形式, 即

$$\sum_e F_{ix} = \sum_e F_{Lix}, \quad \sum_e F_{iy} = \sum_e F_{Liy}. \quad (6-48)$$

注意式(6-46)至(6-48)中的编码  $i, j, m$  仅是每个单元内部的局部编码。对于整个结构, 若整体结点编码为  $1, 2, \dots, n$ , 则将结点平衡方程按整体结点编码排列起来, 就组成整个结构的结点平衡方程组

$$K \delta = F_L, \quad (6-49)$$

其中

$$\delta = (\delta_1 \quad \delta_2 \quad \dots \quad \delta_n)^T \quad (6-50)$$

是整体结点位移列阵;

$$F_L = (F_{L1} \quad F_{L2} \quad \dots \quad F_{Ln})^T \quad (6-51)$$

是整体结点荷载列阵;  $K$  是整体刚度矩阵, 其元素是

$$K_{rs} = \sum_e k_{rs}. \quad (6-52)$$

即整体刚度矩阵的元素, 例如  $K_{rs}$ , 就是按整体结点编码的、同下标  $rs$  的单元刚度矩阵元素叠加而得到的。

从整体平衡方程组解出结点位移  $\delta$ , 便可由式(6-23)和式(6-30)分别求出每个单元的位移函数和应力。

下面将通过一个简例来说明, 如何对一个结构进行整体分析: 建立整体刚度矩阵和整体结点荷载列阵, 建立整体结点平衡方程组, 解出结点位移, 从而求出单元的应力。

设有对角受压的正方形薄板, 图 6-10a, 荷载沿厚度均匀分布, 为  $2 N/m$ 。由于  $xz$  面和  $yz$  面均为该薄板的对称面, 所以只须取四分之一部分作为计算对象, 图 6-10b。将该对象划分为 4 个单元, 共有 6 个结点。单元和结点均编上号码, 其中结点的整体编码 1 至 6, 以及各单元的结点局部编码  $i, j, m$ , 均示于图中, 两者的对应关系如下:

单元号	I	II	III	IV
局部编码	整体编码			
$i$	3	5	2	6
$j$	1	2	5	3
$m$	2	4	3	5

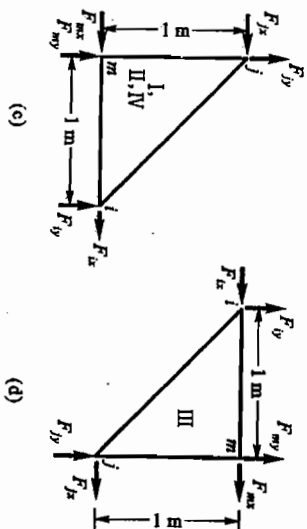
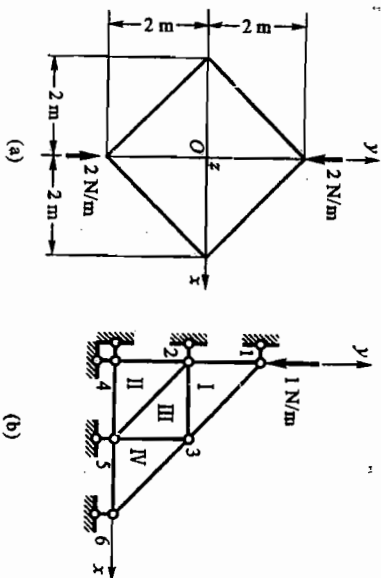


图 6-10

对称面上的结点没有垂直于对称面的位移分量,因此,在 1, 2, 4 三个结点设置了水平连杆支座,在 4, 5, 6 三个结点设置了铅直连杆支座。这样就得出如图 6-10b 所示的离散化结构。

对于每个单元,由于结点的局部编码与整体编码的对应关系已经确定,每个单元刚度矩阵中任一子矩阵在整体刚度矩阵中的位置及其力学意义也就明确了。例如,单元 I 的  $k_{ii}$ , 即  $k_{33}$ , 它的四个元素就是当结构的结点 3 沿  $x$  或  $y$  方向有单位位移时,由于单元 I 的刚度而在结点 3 的  $x$  或  $y$  方向引起的结点的力,

等等。据此,各个单元的刚度矩阵中 9 个子矩阵的力学意义可表示如下:

单元 I

$$\begin{bmatrix} F_3 \\ F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{ii} & k_{ij} & k_{im} \\ k_{ji} & k_{jj} & k_{jm} \\ k_{mi} & k_{mj} & k_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_3 \\ \delta_1 \\ \delta_2 \end{bmatrix} \quad (a)$$

单元 II

$$\begin{bmatrix} F_5 \\ F_2 \\ F_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{ii} & k_{ij} & k_{im} \\ k_{ji} & k_{jj} & k_{jm} \\ k_{mi} & k_{mj} & k_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_5 \\ \delta_2 \\ \delta_4 \end{bmatrix} \quad (b)$$

单元 III

$$\begin{bmatrix} F_2 \\ F_5 \\ F_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{ii} & k_{ij} & k_{im} \\ k_{ji} & k_{jj} & k_{jm} \\ k_{mi} & k_{mj} & k_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_2 \\ \delta_5 \\ \delta_3 \end{bmatrix} \quad (c)$$

单元 IV

$$\begin{bmatrix} F_6 \\ F_3 \\ F_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{ii} & k_{ij} & k_{im} \\ k_{ji} & k_{jj} & k_{jm} \\ k_{mi} & k_{mj} & k_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_6 \\ \delta_3 \\ \delta_5 \end{bmatrix} \quad (d)$$

现在,暂不考虑位移边界条件,把图 6-10b 所示结构的整体结点平衡方程组  $K\delta = F_L$  写成

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} & K_{15} & K_{16} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} & K_{25} & K_{26} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} & K_{35} & K_{36} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} & K_{45} & K_{46} \\ K_{51} & K_{52} & K_{53} & K_{54} & K_{55} & K_{56} \\ K_{61} & K_{62} & K_{63} & K_{64} & K_{65} & K_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \\ \delta_5 \\ \delta_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{L1} \\ F_{L2} \\ F_{L3} \\ F_{L4} \\ F_{L5} \\ F_{L6} \end{bmatrix} \quad (e)$$

在这里,整体刚度矩阵  $K$  系按分块形式写成  $6 \times 6$  的矩阵,但它的每一个子块是  $2 \times 2$  的矩阵,因此,它实际上是  $12 \times 12$  的矩阵。矩阵  $K$  中的任意一个子矩阵,例如  $K_{23}$ , 它的四个元素乃是结构的结点 3 沿  $x$  或  $y$  方向有单位位移而在结点 2 的  $x$  或  $y$  方向引起的结点的力。

由于结点 3 与结点 2 在结构中是通过 I 和 III 这两个单元相联系,因而  $K_{23}$  应是单元 I 的  $k_{23}$  与单元 III 的  $k_{23}$  之和。由式(a)可见,单元 I 的  $k_{23}$  是它的  $k_{jm}$ ; 由式(c)可见,单元 III 的  $k_{23}$  是它的  $k_{im}$ 。因此,  $K$  中的  $K_{23}$  应是单元 I 的刚度矩阵中的  $k_{jm}$  与单元 III 的刚度矩阵中的  $k_{im}$  之和。换句话说,单元 I 的  $k_{mi}$  及单元 III 的  $k_{im}$  都应叠加到  $K$  中  $K_{23}$  的位置上去。同样不难找到各个单元刚度矩阵中



由于有位移边界条件  $u_1 = u_2 = u_4 = u_5 = v_3 = v_6 = 0$ , 未知的整体结点位移列阵就简化为

$$\delta = (v_1, v_2, u_3, v_3, u_5, u_6)^T \quad (i)$$

由此可以得出, 与这六个零位移分量相应的六个平衡方程不必建立, 因此, 须将式(h)中的第一、三、七、八、十、十二各行以及同序号的各列划去, 而式(h)的整体刚度矩阵简化为

$$K = E \begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.5 & 1.5 & -0.25 & -0.5 & 0.25 & 0 \\ 0 & -0.25 & 1.5 & 0.25 & -0.5 & 0 \\ 0 & -0.5 & 0.25 & 1.5 & -0.25 & 0 \\ 0 & 0.25 & -0.5 & -0.25 & 1.5 & -0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \quad (j)$$

现在来建立结构的整体结点荷载列阵。在确定了每个单元的结点荷载列阵  $F_L^e = (F_{L1}, F_{L2}, F_{Lm})^T = (F_{L1x}, F_{L1y}, F_{L2x}, F_{L2y}, F_{Lmx}, F_{Lmy})^T$  以后, 根据各个单元的结点局部编码与整体编码的对应关系, 不难确定其三个子块  $F_{L1}, F_{L2}, F_{Lm}$  在  $F_L$  中的位置。例如, 对于图 6-10b 所示的结构, 在不考虑位移边界条件的情况下, 有

$$F_L = \begin{bmatrix} F_{L1} \\ F_{L2} \\ F_{L3} \\ F_{L4} \\ F_{L5} \\ F_{L6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{L1}^I & F_{L1}^{II} + F_{L1}^{III} & F_{L1}^{IV} \\ F_{L2}^I & F_{L2}^{II} + F_{L2}^{III} & F_{L2}^{IV} \\ F_{L3}^I & F_{L3}^{II} + F_{L3}^{III} & F_{L3}^{IV} \\ F_{L4}^I & F_{L4}^{II} + F_{L4}^{III} & F_{L4}^{IV} \\ F_{L5}^I & F_{L5}^{II} + F_{L5}^{III} & F_{L5}^{IV} \\ F_{L6}^I & F_{L6}^{II} + F_{L6}^{III} & F_{L6}^{IV} \end{bmatrix}$$

现在, 由于该结构只是在结点 1 受有向下的荷载  $1 \text{ N/mm}$ , 因而上式中具有非零元素的子块只有

$$F_{L1} = F_{L1}^I = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

在考虑了位移边界条件以后, 与式(i)相应的简化了的整体结点荷载列阵即成为

$$F_L = (-1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)^T \quad (k)$$

按照式(j)所示的  $K$ , 及式(i), (k)所示的  $\delta, F_L$  得出结构的整体平衡方程组

$$E \begin{bmatrix} 0.5 & 1.5 & 1.5 & 1.5 \\ -0.5 & -0.25 & 0.25 & 1.5 \\ 0 & -0.5 & 0.25 & 1.5 \\ 0 & 0.25 & -0.5 & 1.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

求解以后, 得结点位移:

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} -3.253 \\ -1.253 \\ -0.088 \\ -0.374 \end{bmatrix}$$

根据  $\mu = 0$  以及已求出的  $A$  值、 $b$  值和  $c$  值, 可由式(6-32)及(6-33)得出单元的应力转换矩阵如下: 对于单元 I, II, IV,

$$S = E \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0.5 & 0.5 & 0 & -0.5 & -0.5 \end{bmatrix};$$

对于单元 III,

$$S = E \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -0.5 & -0.5 & 0 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$$

于是可用式(6-30)求得各单元中的应力如下:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}_I = E \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0.5 & 0.5 & 0 & -0.5 & -0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_3 \\ v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -0.088 \\ -2.000 \\ 0.440 \end{bmatrix} \text{ Pa},$$



$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}_n = E \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0.5 & 0.5 & 0 & -0.5 & -0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.176 \\ -1.253 \\ 0 \end{bmatrix} \text{Pa},$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}_n = E \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -0.5 & -0.5 & 0 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.088 \\ -0.374 \\ 0.308 \end{bmatrix} \text{Pa},$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}_n = E \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0.5 & 0.5 & 0 & -0.5 & -0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.374 \\ -0.132 \end{bmatrix} \text{Pa}.$$

## §6-8 解题的具体步骤 单元的划分

在应用有限单元法求解问题时,计算工作量是很大的,因此,一般只能利用事先编好的计算程序,在电子计算机上进行计算。具体的计算步骤大致如下。

(1) 将计算对象划分成许多三角形单元,也就是织成三角形网格,并按照一定的规律将所有的结点和单元分别编上号码。

(2) 选定一个直角坐标系。按照计算程序的要求,填写各种输入信息。主要的信息有:每个结点的坐标值,即  $x_1, y_1, x_2, y_2$  等等;每个单元的单元信息,即单元  $i, j, m$  三个结点的整体编码;材料的弹性常数  $E$  和  $\mu$  也是常量。(2) 厚度  $t$  的点号及荷载大小等等;约束信息,即哪些结点哪个方向上的位移为零或为某已知值。将这些信息按照计算程序规定的格式输入。

(3) 使用已经编好的计算程序上机计算。计算程序中对输入的各种信息进行加工、运算,一般均有如下几步:输入初始数据,形成整体刚度矩阵  $K$ ;形成整体结点荷载列阵  $F_L$ ;求解线性代数方程组,解得结构的整体结点位移列阵  $\delta$ ;计算各单元的应力分量及主应力、主向;打印计算成果。

(4) 对计算成果进行整理、分析,用表格或图线示出所需的位移及应力。

在以上的步骤中,工作量最大的步骤(3),可由计算机来完成。但是,其他三步工作或多或少须用人工进行,而且这三步工作的好坏,对于计算结果的好坏起着决定性的作用。下面来说明单元划分中的一些问题。关于计算成果的整理分析,另在下一节中加以讨论。

在划分单元时,就整体来说,单元的大小(即网格的疏密)要根据精度的要求和计算机的速度及容量来确定。根据误差分析,应力的误差与单元的尺寸成正比,位移的误差与单元的尺寸的平方成正比,可见单元分得越小,计算结果越精确。但在另一方面,单元越多,计算时间越长,要求的计算机容量也越大。因此,必须在计算机容量的范围以内,根据合理的计算时间,考虑工程上对精度的要求,来决定单元的大小。

在单元划分图上,对于不同部位的单元,可以采用不同的大小,也应当采用不同的大小。例如,在边界比较曲折的部位,单元必须小一些;在边界比较平直的部位,单元可以大一些。又例如,对于应力和位移状态需要详细了解的重要部位,以及应力和位移变化得比较剧烈的部位,单元必须小一些;对于次要的部位,以及应力和位移变化得比较平缓的部位,单元可以大一些。如果应力和位移的变化情况不易事先预估,有时不得不先用比较均匀的单元,进行一次计算,然后根据结果重新划分单元,进行第二次计算。

根据误差分析,应力及位移的误差都和单元的最小内角的正弦成反比。据此,只要有可能,应使三角形的三个内角大小比较接近。

当结构具有对称面而荷载对称于该面或反对称于该面时,应当利用对称性或反对称性,只对结构的  $1/2$  或  $1/4$  进行计算,以减少计算工作量。对于具有对称面的结构,即使荷载并不对称于该面,也不反对称于该面,我们也宁愿把荷载分解成为对称的和反对称的两组,分别计算,然后将计算结果进行叠加。

如果计算对象的厚度有突变之处,图 6-11a,或者它的弹性有突变之处,图 6-11b,除了应当把这种部位的单元取得较小些以外,还应当把突变线作为单元的界线(不要使突变线穿过单元)。这是因为:(1) 我们对每个单元进行弹性力学分析时,曾假定该单元的厚度  $t$  是常量,弹性常数  $E$  和  $\mu$  也是常量。(2) 厚度或弹性的突变,必然伴随着应力的突变,而应力的这种突变不可能在一个单元中得到反映,只可能在不同的单元中得到一定程度的反映(当然不可能得到完全的反映)。

如果计算对象受有集度突变的分布荷载,图 6-11c,或受有集中荷载,图 6-11d,也应当把这种部位的单元取得小一些,并在荷载突变或集中之处布置结点,以使应力的突变得到一定程度的反映。

在计算闸坝等结构时,为了使得地基弹性对结构应力的影响能反映出来,必

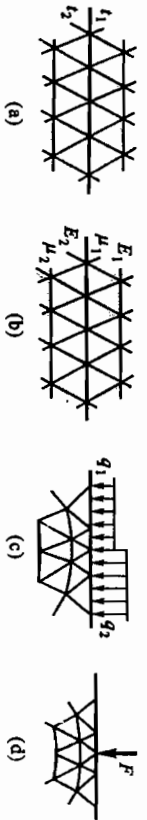


图 6-11

须把那和结构相连的一部分地基取为弹性体,和结构一起作为计算对象。按照弹性力学中关于接触应力的理论,所取地基范围的大小,应视结构底部的宽度如何而定(与结构的高度完全无关)。在早期的文献中,一般都建议,在结构的两边和下方,把地基范围取为大致等于结构底部的宽度,即  $l = b$ , 图 6-12a。但在后来的一些文献中,大都把所取的范围扩大为  $l = 2b$ , 在个别的文献中还把它扩大为  $l = 4b$ , 此外,还有一些文献作者认为,应当把地基范围取为矩形区域,图 6-12b,以便将铰支座改为连杆支座,以减少对地基的人为约束。最近的大量分析指出:在地基比较均匀而且结构与地基的弹性相差不大的情况下,并没有必要使  $l$  超过  $2b$ ; 用连杆支座还不如用铰支座更接近实际情况;地基范围的形状,影响也并不大。

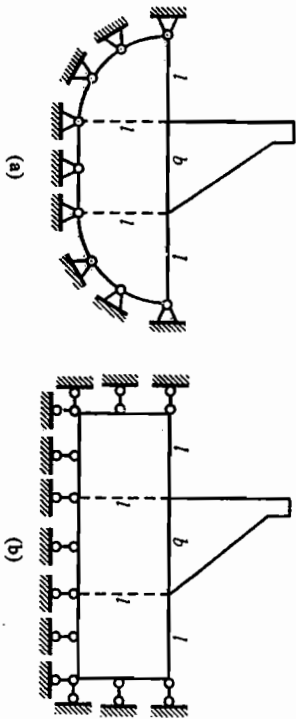


图 6-12

如果地基很不均匀,需要在地基中布置很多的单元,而计算机的容量又不允许,则可将计算分两次进行。在第一次计算时,考虑较大范围地基的弹性,并尽量在这范围内多布置单元,而在结构内部仅布置较少的单元,如图 6-13a 所示。这时,主要的目的在于算出地基内靠近结构处 ABCD 线上各结点的位移。在第二次计算时,把结构内的网格加密,如图 6-13b 所示,放弃 ABCD 以下的地基,而将第一次计算所得的 ABCD 线上各结点的位移作为已知量输入,算出坝体中的应力及位移,作为最后成果。在两次计算中,最好是使 ABCD 线上结点的布置相同,而且使邻近 ABCD 的一排单元的布置也相同,如图所示,这样

就避免输入位移时的插值计算,从而避免引进误差,而且,上述邻近 ABCD 那一排单元的应力在两次计算中的差距,可以指示出最后计算成果的精度如何。

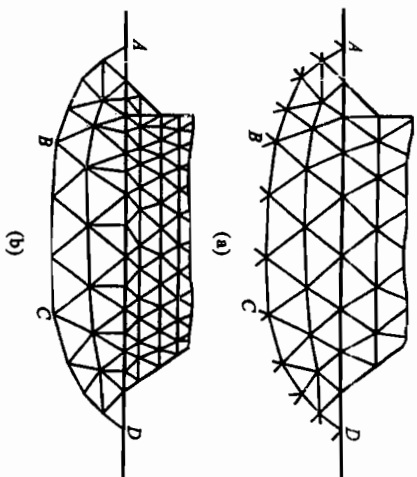


图 6-13

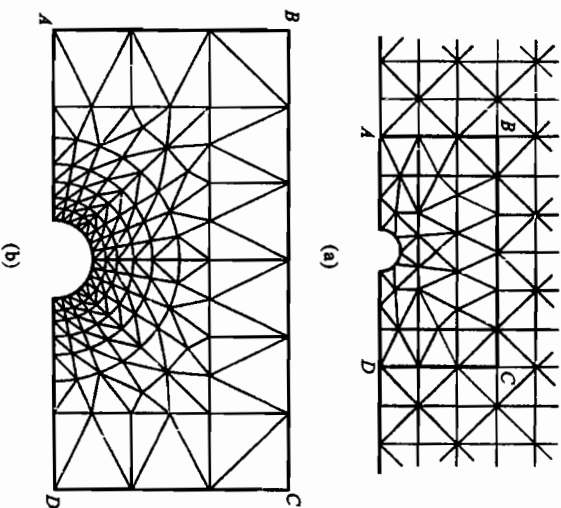


图 6-14

当结构具有凹槽或孔洞时,在凹槽或孔洞附近将发生应力集中,即,该处的应力很大而且变化剧烈。为了正确反映此项应力,必须把该处的网格画得很密,

但这样就可能超出计算机的容量,而且单元的尺寸相差悬殊,可能还会引起很大的计算误差。在这种情况下,也可以把计算分两次进行。第一次计算时,把凹槽或孔洞附近的网格画得比别处仅仅稍为密一些,以约略反映凹槽或孔洞对应力分布的影响,如图 6-14a 所示半圆凹槽附近的 ABCD 部分,甚至可以根本不管凹槽或孔洞的存在,而把 ABCD 部分的网格画得和别处大致同样疏密。这时,主要的目的在于算出别处的应力,并算出 ABCD 线上各结点的位移。第二次计算时,把凹槽或孔洞附近的网格画得充分细密,图 6-14b,就以 ABCD 部分为计算对象,而将前一次计算所得的 ABCD 线上各结点的位移作为已知量输入,即可将凹槽或孔洞附近的局部应力算得充分精确。

## §6-9 计算成果的整理

计算成果包括位移和应力两个方面。在位移方面,一般都不须进行什么整理工作,利用计算成果中的结点位移分量,就可以画出结构的位移图线。下面仅针对应力方面的计算成果进行讨论。

在 §6-4 中已经指出,三结点三角形单元是常应变单元,因而也是常应力单元。算出的这个常量应力,就被认为是三角形单元形心处的应力。据此就得出一个图示应力的通用办法:在每个单元的形心,沿着应力主向,以一定的比例尺标出主应力的方向,拉应力用箭头表示,压应力用平头表示,图 6-15。就整个结构物的应力概况说来,这是一个很好的图示方法,因为应力的方向和方向在整个结构物中的变化规律都可以约略地表示出来。但是,由于三结点三角形单元的精度较低,为了由计算成果推出结构内某一点的接近实际的应力,必须通过某种平均计算,通常可采用环绕结点平均法或二单元平均法。

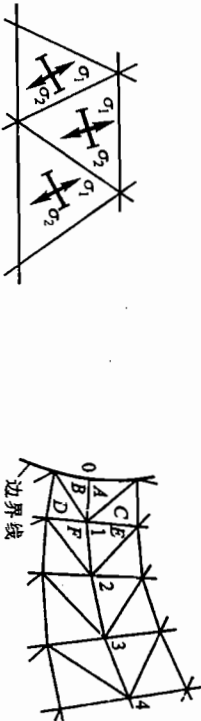


图 6-15

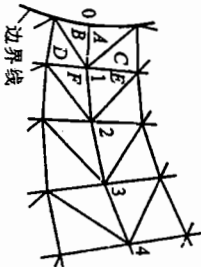


图 6-16

所谓环绕结点平均法,就是把环绕某一结点的各单元中的常量应力加以平均,用来表征该结点处的应力。以图 6-16 中结点 1 处的  $\sigma_x$  为例,就是取

$$(\sigma_x)_1 = \frac{1}{6} [(\sigma_x)_A + (\sigma_x)_B + (\sigma_x)_C +$$

$$(\sigma_x)_D + (\sigma_x)_E + (\sigma_x)_F]$$

为了这样平均得来的应力能够较好地表征结点处的实际应力,环绕该结点的各单元,它们的面积不能相差太大,它们在该结点所张的角度也不能相差太大。

用环绕结点平均法计算出来的结点应力,在内结点处具有较好的表征性,但在边界结点处则可能表征性很差。因此,边界结点处的应力不宜直接由单元应力的平均得来,而要由内结点处的应力应用插值公式向外推算得来。以图 6-16 中边界结点 0 处的应力为例,就是要由内结点 1, 2, 3 处的应力用抛物线插值公式推算得来,这样可以大大改进它的表征性。据此,为了整理某一截面上的应力,在这个截面上至少要布置五个结点。

所谓二单元平均法,就是把两个相邻单元中的常量应力加以平均,用来表征公共边中点处的应力。以图 6-17 所示的情况为例,就是取

$$(\sigma_x)_1 = \frac{1}{2} [(\sigma_x)_A + (\sigma_x)_B],$$

$$(\sigma_x)_2 = \frac{1}{2} [(\sigma_x)_C + (\sigma_x)_D],$$

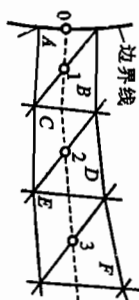


图 6-17

等等,为了这样平均得来的应力具有较好的表征性,两个相邻单元的面积不能相差太大。

如果内点 1, 2, 3 等的光滑连线与边界相交在 0 点,图 6-17,则边界上的 0 点处的应力可由上述几个内点处的应力用插值公式向外推算得来,其表征性一般也是很好的。

在应力变化并不剧烈的部位,由环绕结点平均法和二单元平均法得来的应力,表征性不相上下。在应力变化比较剧烈的部位,特别是在应力集中之处,由环绕结点平均法得来的应力,其表征性就比较差了。

主应力及应力主向,可以由平均后的应力分量算得,也可以直接对主应力或应力主向加以平均。只要用来平均的各个单元的应力主向比较接近,两种平均的结果相差不大。

在推算边界点或边界结点处的应力时,可以先推算应力分量再求主应力,也可以对主应力进行推算。在一般情况下,前者的精度比较高一些,但差异并不是很明显的。

注意:如果相邻的单元具有不同的厚度或不同的弹性常数,则在理论上应力应当有突变。因此,只容许对厚度及弹性常数都相同的单元进行平均计算,以免完全失去这种应有的突变。

在弹性体的凹槽附近,平行于边界的主应力往往是数值较大而且变化比较剧烈。在推算最大的主应力时,必须充分注意如何达到最高的精度,例如

6-18a所示的凹槽,设边界点或边界结点1,2,3,4等处平行于边界的主应力 $(\sigma)_1, (\sigma)_2, (\sigma)_3, (\sigma)_4$ 等,已经用上列方法求得,可以把凹槽处的一段边界曲线展为直线轴 $x$ ,图6-18b,点绘 $(\sigma)_1, (\sigma)_2, (\sigma)_3, (\sigma)_4$ 等,画出平滑的图线。如果图线的坡度不太陡,就可以由图线上量得最大主应力 $(\sigma)_{\max}$ 的数值。但是,如果图线的坡度很陡,则须按照 $(\sigma)_1, (\sigma)_2, (\sigma)_3, (\sigma)_4$ 的数值,为 $\sigma$ 取插值函数 $\sigma = f(x)$ ,然后令 $\frac{d}{dx} f(x) = 0$ ,求出 $x$ 在这一范围内的实根,再代入 $f(x)$ ,以求出 $(\sigma)_{\max}$ 。

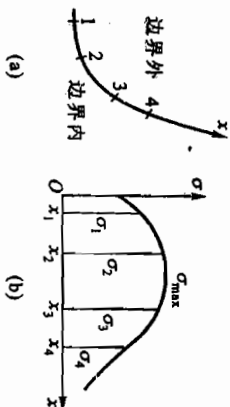


图 6-18

当弹性体具有凹尖角时,尖角处的应力是很大的(在完全弹性体的假定下,它在理论上是无限大)。因此,在用有限单元法进行计算时,围绕尖角的一些单元中的应力就会很大,而且,尖角处的网格越密(即该处的单元越小),这些单元中的应力就越大,可能大到惊人的程度。实际上,由于尖角处的材料已经发生局部的屈服、开裂或滑移,在完全弹性体的假定之下算出的这些大应力是不存在的。为了正确估算尖角处的应力,必须考虑局部屈服、开裂或滑移的影响。在没有条件考虑这些影响时,可以这样较简单地处理:把围绕尖角的单元取得充分小(例如在坝体中可取为十几厘米或几十厘米),而在分析安全度时,对这些单元中的大应力不予理会,只要其他单元中的应力不超过材料的容许应力,就认为该处是安全的。如果其他单元中的应力超过容许应力,就要采取适当的措施。最有效的措施是把凹尖角改为凹圆角,即,对局部问题进行局部处理,可以有效地减少应力集中现象。不要企图用加大整体尺寸来降低局部应力,因为那样做往往是徒劳的,至少是在经济上完全不合理的。

用有限单元法计算弹性力学问题时,特别是采用常应变单元时,应当在计算之前精心划分网格,在计算之后精心整理成果。这样来提高所得应力的精度,不会增大所需的计算机容量,而且往往比简单地加密网格更为有效。

随着计算机的迅速发展,计算机的容量及计算速度比前一二十年大大地提高了。相应地,有限单元法也得到迅速而深入的发展。因此,上面提到的一些问

题,如有限单元法分析的精度、信息的容量、计算速度、问题的复杂性等等,现在都已经比较容易地解决了。但上面总结的一些经验,仍然可供分析时参考。

## § 6-10 计算实例

为了具体说明用三结点三角形单元进行计算时如何整理应力成果,以及成果的精度如何,下面介绍几个计算实例,并将计算结果与函数解进行对比。

### 1. 楔形体受自重及顶水压

因为只有当楔形体为无限长时才有简单的函数解,而有限单元法只能以有限长的楔形体作为计算对象,所以我们截取无限长楔形体的10 m长的部分,图6-19,而把函数解中对 $y=0$ 处给出的位移作为已知,用有限单元法进行计算。为了便于说明问题,这里采用了均匀而且比较疏的网格,如图6-19所示。楔形体的弹性模量取为 $E=2 \times 10^9$  Pa,泊松比取为 $\mu=0.167$ ,厚度取为 $t=1$  m(作为平面应力问题),自重 $p=2.4 \times 10^4$  N/m<sup>3</sup>,水的密度取为 $\rho=10^3$  kg/m<sup>3</sup>。

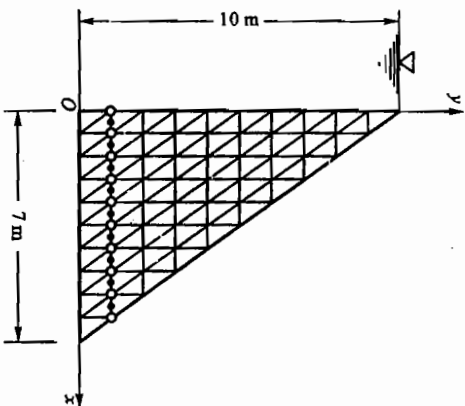


图 6-19

用二单元平均法整理 $y=1$  m的截面上的 $\sigma_x$ 时,结果如表6-1所示, $\sigma_x$ 的单位为 $10^4$  Pa。这里不用图线而用表格,是因为在图线上很难把较小的误差表示出来。表中所列的考察点,在图6-19上用圆点表示。表中所列有限单元解的应力数值,是位于考察点上方及下方的两单元中 $\sigma_x$ 的平均值。对于左边界上 $x=0$ 处的 $\sigma_x$ ,我们根据表6-1中 $x=0.35$  m, 1.05 m, 1.75 m三点处的 $\sigma_x$ 进行推算,得出该处的 $\sigma_x = -3.75 \times 10^4$  Pa,与函数解 $-3.23 \times 10^4$  Pa相比,误差

为  $-0.52 \times 10^4 \text{ Pa}$ 。对于右边界上  $x = 6.3 \text{ m}$  处的  $\sigma_y$ ，我们根据表 6-1 中  $x = 5.95 \text{ m}, 5.25 \text{ m}, 4.55 \text{ m}$  三处的  $\sigma_y$  进行推算，得出该处的  $\sigma_y = -18.22 \times 10^4 \text{ Pa}$ ，与函数解  $-18.35 \times 10^4 \text{ Pa}$  相比，误差为  $0.13 \times 10^4 \text{ Pa}$ 。

表 6-1

考察点的 $x/\text{m}$	0.35	1.05	1.75	2.45	3.15	3.85	4.55	5.25	5.95
有限单元解	-4.52	-6.07	-7.62	-9.17	-10.75	-12.35	-13.99	-15.66	-17.36
函数解	-4.07	-5.75	-7.44	-9.12	-10.80	-12.48	-14.15	-15.83	-17.51
误差	-0.45	-0.32	-0.18	-0.05	0.05	0.13	0.16	0.17	0.15

表 6-2

结点的 $x/\text{m}$	0	0.7	1.4	2.1	2.8	3.5	4.2	4.9	5.6	6.3
有限单元解	-4.35	-5.30	-6.84	-8.39	-9.96	-11.55	-13.17	-14.82	-16.51	-17.73
函数解	-3.23	-4.91	-6.59	-8.28	-9.96	-11.64	-13.32	-14.99	-16.67	-18.35
误差	-1.12	-0.39	-0.25	-0.11	0	0.09	0.15	0.17	0.16	0.62

用绕结点平均法整理  $y = 1 \text{ m}$  的截面上的  $\sigma_y$ ，结果如表 6-2 所示， $\sigma_y$  的单位为  $10^4 \text{ Pa}$ ，表中所列的结点在图 6-19 中用圆圈表示。可见在边界结点处，结点平均应力的表征性是比较差的。但是，根据表 6-2 中  $x = 0.7 \text{ m}, 1.4 \text{ m}, 2.1 \text{ m}$  三个结点处的平均应力进行推算，得出边界结点  $x = 0$  处的  $\sigma_y = -3.77 \times 10^4 \text{ Pa}$ ，则误差仅为  $-0.54 \times 10^4 \text{ Pa}$ ；根据  $x = 5.6 \text{ m}, 4.9 \text{ m}, 4.2 \text{ m}$  三结点处的平均应力进行推算，得出边界结点  $x = 6.3 \text{ m}$  处的  $\sigma_y = -18.24 \times 10^4 \text{ Pa}$ ，误差只有  $0.11 \times 10^4 \text{ Pa}$ 。这样，用绕结点平均法和用二单元平均法整理出来的成果，它们的表征性就不相上下了。

## 2. 简支梁受均布荷载

图 6-20a 所示一简支梁，高  $3 \text{ m}$ ，长  $18 \text{ m}$ ，承受均布荷载  $10 \text{ N/m}^2$ ， $E = 2 \times 10^{10} \text{ Pa}$ ， $\mu = 0.167$ ，取  $t = 1 \text{ m}$ ，作为平面应力问题。由于对称，只对右边一半进行有限单元计算，图 6-20b，而在  $y$  轴上的各结点处布置水平连杆支座。

用二单元平均法整理  $x = 0.375 \text{ m}$  的截面上的弯应力  $\sigma_x$  时（考察点在图上用圆点表示），整理结果如表 6-3 所示， $\sigma_x$  的单位为  $\text{Pa}$ 。之所以选取这个截面，是因为其上的  $\sigma_x$  接近最大。表中  $y = 1.50 \text{ m}$ （梁顶）及  $y = -1.50 \text{ m}$ （梁底）处的有限单元解，是由三个考察点处的  $\sigma_x$  用插值公式推算得来的。表中的函数解，是指按弹性力学平面问题计算的结果，但和材料力学中按浅梁计算的结果很相近，基本上是随着  $y$  按直线变化的。

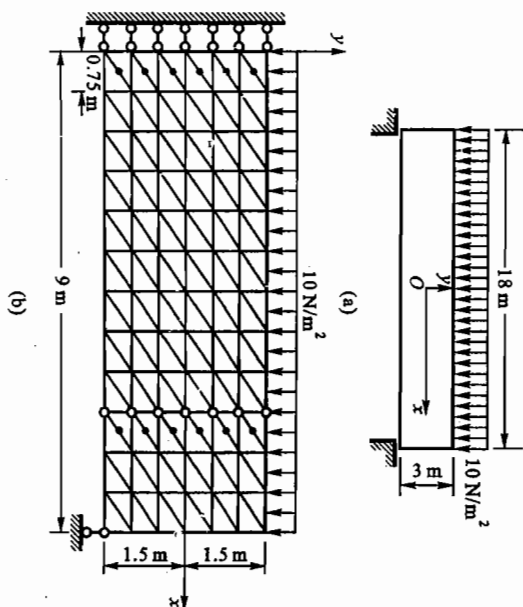


图 6-20

表 6-3

考察点的 $y/\text{m}$	1.50	1.25	0.75	0.25	-0.25	-0.75	-1.25	-1.50
有限单元解	-235	-196	-119	-41	38	117	201	245
函数解	-272	-225	-134	-44	44	134	225	272
误差	37	29	15	3	-6	-17	-24	-27

对于切应力  $\tau_{xy}$ ，弹性力学函数解给出的数值和材料力学中关于浅梁的解答相同，在横截面上是按抛物线变化的。我们用二单元平均法整理  $x = 7.125 \text{ m}$  的截面上的  $\tau_{xy}$  时（考察点在图上用圆点表示），得出该截面上  $y = 0$  处的最大切应力为  $31.9 \text{ Pa}$ ，与函数解  $33.8 \text{ Pa}$  相比，误差也只有  $-1.9 \text{ Pa}$ 。但是，对于靠近梁顶及梁底处，用两种方法整理出来的切应力却都具有较大的误差。因此，如果要使边界附近的切应力  $\tau_{xy}$  具有与弯应力  $\sigma_x$  相同的精度，就要把这里的网格画得密一些。但一般并不这样做，因为边界附近的切应力是次要的。

整理挤压应力  $\sigma_y$  时，不论用二单元平均法或是用绕结点平均法，所得的结果都和函数解相差很大。这是符合下述一般规律的一个实例：如果弹性体在某方向具有特别小的尺寸，则这一方向的正应力的有限单元解将具有特别大的

误差。但是,这个正应力一般都是最次要的应力,因而完全没有必要为这个应力而特别加密网格。

### 3. 圆孔附近的应力集中

图 6-21 表示一块带圆孔的方板的四分之一,它在  $x$  方向受有均布压力  $25 \text{ N/m}^2$ 。方板边长之半为  $24 \text{ m}$ ,圆孔的半径为  $3 \text{ m}$ ,板的厚度取为  $1 \text{ m}$ ,作为平面应力问题。由于对称,在  $x$  轴上的各结点处安置  $y$  方向的连杆支座,在  $y$  轴上的各结点处安置  $x$  方向的连杆支座。在计算中取  $E = 2 \times 10^{10} \text{ Pa}$ ,  $\mu = 0.20$ 。由于孔边附近有应力集中,所以在孔边附近采用了较密的网格。

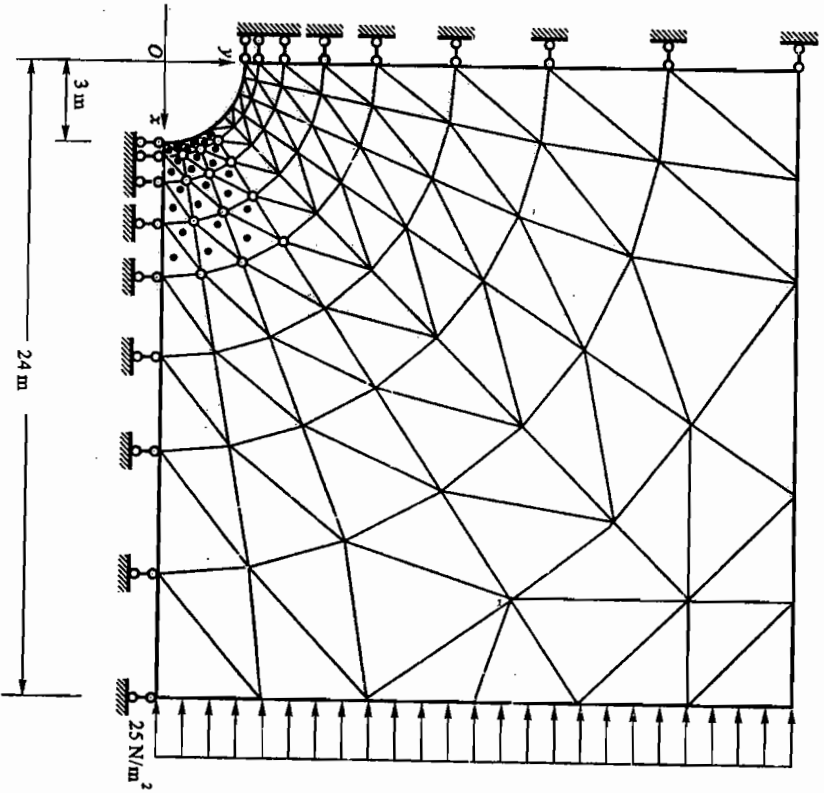


图 6-21

最大正应力  $\sigma_{\max}$  是  $x$  轴与孔边相交之处的  $\sigma_x$ 。用二单元平均法推求这个最大正应力时,我们取靠近孔边的四排单元,如圆点所示,根据每一排上三对单

元的三个平均  $\sigma_x$  值沿环向推算,得出  $x$  轴上一点处的  $\sigma_x$  值,再根据这样得来的四个  $\sigma_x$  值沿径向推算,得出  $\sigma_{\max} = 24.2 \text{ Pa}$ ,与函数解给出的  $25.0 \text{ Pa}$  相比,误差为  $0.8 \text{ Pa}$ 。用绕结点平均法推算时,我们取图中用圆圈表示的四排结点,根据每一排上三个结点处的平均  $\sigma_x$  值沿环向推算,得出  $x$  轴上一个结点处的  $\sigma_x$  值,再根据这样得来的四个  $\sigma_x$  值沿径向推算,得出边界结点处的  $\sigma_{\max} = 17.7 \text{ Pa}$ ,与函数解给出的  $25.0 \text{ Pa}$  相比,误差为  $-7.3 \text{ Pa}$ ,表征性仍然远远不如二单元平均法。最小正应力  $\sigma_{\min}$  是  $y$  轴与孔边相交之处的  $\sigma_x$ 。与上相似的用二单元平均法进行整理时,得出  $\sigma_{\min} = -76.4 \text{ Pa}$ ,与函数解给出的  $-75.0 \text{ Pa}$  相比,误差为  $-1.4 \text{ Pa}$ 。与上相似的用绕结点平均法进行整理时,得出  $\sigma_{\min} = -63.1 \text{ Pa}$ ,与函数解  $-75.0 \text{ Pa}$  相比,误差为  $11.9 \text{ Pa}$ ,表征性也远远不如二单元平均法。

## § 6-11 应用变分原理导出有限单元法基本方程

上面导出的有限单元法,可以看成是结构力学位移法在离散化结构中的推广应用。其中导出的求解结点位移的基本方程,是结点的平衡方程组。这种导出方法的特点是,物理概念明确,步骤清晰,容易为工程技术人员所理解。

但在有限单元法中,应用更为广泛的是从变分原理导出有限单元法的基本方程。这就是,将连续体中的经典变分原理推广应用到离散化结构。下面来说明,如何将位移变分法应用到三结点三角形单元组成的离散化结构。

根据 § 5-5 所述,经典变分法可以表示如下:平面弹性体中的形变势能(内力势能),可以用矩阵表示为

$$U = \frac{1}{2} \iint_A \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dx dy \quad (a)$$

外力势能可以用矩阵表示为

$$V = - \left( \boldsymbol{d}^T \boldsymbol{f}_p + \int_V \boldsymbol{d}^T \bar{\boldsymbol{f}} ds + \int_A \boldsymbol{d}^T \boldsymbol{f} dx dy \right) \quad (b)$$

其中  $\boldsymbol{f}$  是体力,  $\bar{\boldsymbol{f}}$  是面力;  $\boldsymbol{f}_p$  是单位厚度上作用的集中外力,作用于  $(x, y)$  点,相应的位移是  $\boldsymbol{d}$ 。  $A$  是平面弹性体的面积,  $s$  是受面力  $\bar{\boldsymbol{f}}$  作用的边界线。弹性体的总势能是

$$E_p = U + V \quad (c)$$

极小势能原理可以表达为

$$E_p = \min, \quad \text{或} \quad \delta E_p = 0, \quad \text{或} \quad \frac{\partial E_p}{\partial \boldsymbol{d}} = 0 \quad (d)$$

其中泛函  $E_p$  的自变量是位移函数  $\boldsymbol{d} = (u \quad v)^T$ 。

现在,应用极小势能原理来导出有限单元法的基本方程。首先,由§6-2, (1)取结点位移为基本未知量,对一个单元,  $\delta^e = (\delta_1, \delta_2, \delta_3)^T$ ; (2)建立单元的位移模式,  $d = N\delta^e$ ; (3)由几何方程求出单元的应变,  $\epsilon = B\delta^e$ ; (4)由物理方程求出单元的应力,  $\sigma = S\delta^e = DB\delta^e$ 。

由于连续体已经变换为离散化结构,它的势能应当是各单元的势能的总和。因此,离散化结构的形变势能是

$$\begin{aligned} U &= \sum_e U^e = \sum_e \frac{1}{2} \iint_{A_e} \epsilon^T \sigma dx dy \\ &= \sum_e \frac{1}{2} \iint_{A_e} (B\delta^e)^T D B \delta^e dx dy \\ &= \sum_e \frac{1}{2} (\delta^e)^T \left( \iint_{A_e} B^T D B dx dy \right) \delta^e, \end{aligned}$$

其中  $A_e$  是三角形单元的面积。引用式(6-35)的记号,得

$$U = \sum_e \frac{1}{2} (\delta^e)^T k \delta^e. \quad (6-53)$$

同样,外力势能是

$$\begin{aligned} V &= \sum_e V^e = - \sum_e \left( d^T f_{pi} + \int_{\Gamma_e} d^T \bar{f} ds + \iint_{A_e} d^T f dx dy \right) \\ &= - \sum_e (\delta^e)^T \left( N^T f_{pi} + \int_{\Gamma_e} N^T \bar{f} ds + \iint_{A_e} N^T f dx dy \right), \end{aligned}$$

其中  $s_e$  是三角形单元中受面力  $\bar{f}$  的边界。引用式(6-40), (6-42), (6-44)中的记号,都用  $F_L^e$  表示上式右边括号内的项,则

$$V = - \sum_e (\delta^e)^T F_L^e. \quad (6-54)$$

将式(6-53), (6-54)代入总势能式(c),得到

$$E_p = U + V = \sum_e \left[ \frac{1}{2} (\delta^e)^T k \delta^e - (\delta^e)^T F_L^e \right]. \quad (6-55)$$

并注意对于离散化结构,泛函  $E_p$  的自变量为结点位移  $\delta_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ), 因此,极小势能原理可表达为

$$\frac{\partial E_p}{\partial \delta_i} = 0. \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (6-56)$$

引用矩阵的运算公式:设  $a, c$  为列矩阵,  $b$  为实对称矩阵,则

$$\frac{\partial}{\partial a} (a^T b a) = 2ba, \quad (e)$$

$$\frac{\partial}{\partial a} (a^T c) = c. \quad (f)$$

总势能  $E_p$  [式(6-55)] 可以看成是  $\delta^e$  的函数,而  $\delta^e = (\delta_1, \delta_2, \delta_3)^T$ 。因此,极值条件(6-56)成为

$$\left( \frac{\partial E_p}{\partial \delta^e} \right)^T \frac{\partial \delta^e}{\partial \delta_i} = 0. \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (g)$$

应用式(e), (f), 将式(6-55)的总势能  $E_p$  对  $\delta^e$  求导,得出

$$\frac{\partial E_p}{\partial \delta^e} = \sum_e (k\delta^e - F_L^e) = \sum_e \left[ \begin{bmatrix} F_i \\ F_j \\ F_m \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} F_{Li} \\ F_{Lj} \\ F_{Lm} \end{bmatrix} \right], \quad (h)$$

以及  $\delta^e$  对  $\delta_i$  求导,得

$$\frac{\partial \delta^e}{\partial \delta_i} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (i)$$

再将式(h)的转置及式(i)代入式(g),便得到

$$\sum_e (F_i - F_{Li}) = 0, \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

或者

$$\sum_e F_i = \sum_e F_{Li}. \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (j)$$

从上式可见,原来连续体的总势能极值条件,已经代替为总势能在所有结点处的极值条件。式(j)与前面导出的有限单元法基本方程(6-46)及(6-49)完全一致。

由此可见,对于各种力学问题,只要存在与微分方程对应的变分原理,都可以从变分原理导出有限单元法的基本方程,并进行求解。

### 习 题

6-1 试证:在三结点三角形单元内的任意一点,有

$$\begin{aligned} N_1 + N_2 + N_3 &= 1, \\ N_1 x_i + N_2 x_j + N_3 x_m &= x, \\ N_1 y_i + N_2 y_j + N_3 y_m &= y. \end{aligned}$$

形单元,其边长为  $a, \mu=1/6$ 。

(1) 试求出应力转换矩阵  $S$  及单元刚度矩阵  $k$ 。

(2) 试求出  $k$  中的每行之和及每列之和,并说明其原因。

(3) 设该单元发生结点位移  $u_i = u_j = u_m = 1, v_i = v_j = v_m$

$= 0$ , 或发生结点位移  $u_i = u_j = v_i = 0, v_j = 1, u_m = -\sqrt{3}/2, v_m = 1/2$ , 试求单元中的应力,并说明其原因。

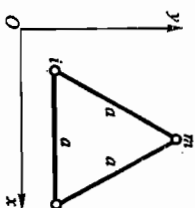


图 6-22



(4) 设该单元在  $jm$  边上受有线性分布的压力, 其在  $j$  点及  $m$  点的集度分别为  $q_j$  及  $q_m$ , 试求等效结点荷载。

答案: (4)  $F_{1,x} = F_{1,y} = 0$ ,  $F_{1,z} = -\frac{\sqrt{3}la}{12}(2q_j + q_m)$ ,

$F_{2,x} = -\frac{la}{12}(2q_j + q_m)$ ,  $F_{2,y} = -\frac{\sqrt{3}la}{12}(q_j + 2q_m)$ ,

$F_{3,x} = -\frac{la}{12}(q_j + 2q_m)$ 。

6-3 对于图 6-10 所示的简例, 试由结点位移的解答求出各个连杆反力。

答案:  $F_{1,x} = 0.220 \text{ N}$ ,  $F_{1,y} = -0.132 \text{ N}$ ,  $F_{2,x} = -0.088 \text{ N}$ ,

$F_{2,y} = 0.626 \text{ N}$ ,  $F_{3,x} = 0.440 \text{ N}$ ,  $F_{3,y} = -0.066 \text{ N}$ 。

6-4 对于图 6-23 所示的离散结构, 试求结点 1, 2 的位移及铰支座 3, 4, 5 的反力(按平面应力问题计算, 取  $\mu = 1/6$ )。

答案:  $v_1 = -\frac{77}{69} \frac{F}{Ez}$ ,  $v_2 = -\frac{14}{23} \frac{F}{Ez}$ ;  $F_{3,x} = -\frac{11}{46} F$ ,  $F_{3,y} = \frac{11}{46} F$ ,

$F_{4,x} = \frac{7}{46} F$ ,  $F_{4,y} = \frac{6}{23} F$ ,  $F_{5,x} = \frac{3}{23} F$ ,  $F_{5,y} = 0$ 。

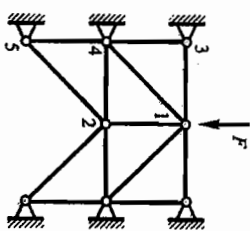


图 6-23

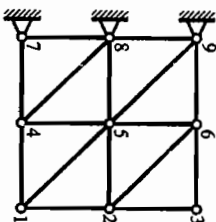


图 6-24

6-5 对于图 6-24 所示的结构, 试求整体刚度矩阵  $K$  中的子矩阵  $K_{11}$ ,  $K_{12}$ ,  $K_{14}$ ,  $K_{16}$ 。

答案:  $K_{11} = Ez \begin{pmatrix} -0.50 & -0.25 \\ 0 & -0.25 \end{pmatrix}$ ,  $K_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,

$K_{14} = Ez \begin{pmatrix} 1.50 & 0.25 \\ 0.25 & 1.50 \end{pmatrix}$ ,  $K_{16} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  (取  $\mu = 0$ )。

6-6 试求图 6-25 所示结构的结点位移和应力, 取  $t = 1 \text{ m}$ ,  $\mu = 0$ 。

答案:  $u_1 = \frac{1}{2E}(3F_1 + F_2)$ ,

$v_2 = -\frac{1}{2E}(F_1 + 3F_2)$ 。

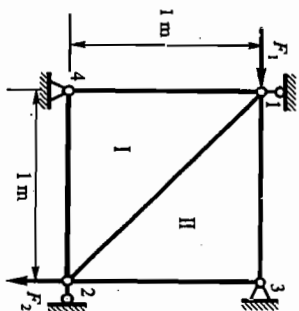


图 6-25

6-7 试按图 6-26 所示的网格求解结点位移, 取  $t = 1 \text{ m}$ ,  $\mu = 0$ 。

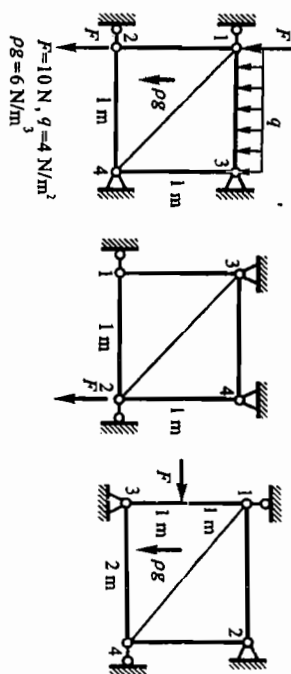


图 6-26

答案: (a)  $v_1 = -\frac{1}{5} \frac{4 \times 64}{5}$ ,  $v_2 = -\frac{1}{5} \frac{4 \times 61}{5}$ 。

(b)  $v_1 = -\frac{3F}{2E}$ ,  $v_2 = -\frac{3F}{2E}$ 。

(c)  $u_1 = \frac{1}{12E}(9F + 8\rho g)$ ,  $v_4 = -\frac{1}{4E}(F + 8\rho g)$ 。

6-8 试按图 6-27 所示网格求解结点位移, 取  $t = 1 \text{ m}$ ,  $\mu = 0$ 。

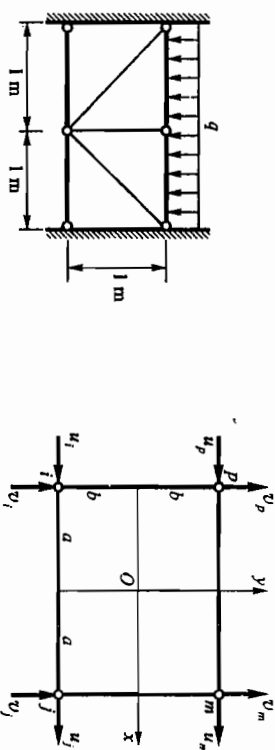


图 6-27

图 6-28

6-9 对于图 6-28 所示的四结点平面四边形单元, 若取位移模式为

$$u = a_1 + a_2x + a_3y + a_4xy,$$

$$v = a_5 + a_6x + a_7y + a_8xy,$$

试考察此位移模式的收敛性条件, 并列求解其系数  $a_1 \sim a_8$  的方程。



## 第七章 空间问题的基本理论

### § 7-1 平衡微分方程

在一般空间问题中, 包含有 15 个未知函数, 即 6 个应力分量、6 个形变分量和 3 个位移分量, 而且它们都是  $x, y, z$  坐标变量的函数。对于空间问题, 在弹性体区域内, 仍然要考虑静力学、几何学和物理学三方面条件, 分别建立三套方程; 并在给定约束或面力的边界上, 建立位移边界条件或应力边界条件。然后在边界条件下求解这些方程, 得出应力分量、形变分量和位移分量。

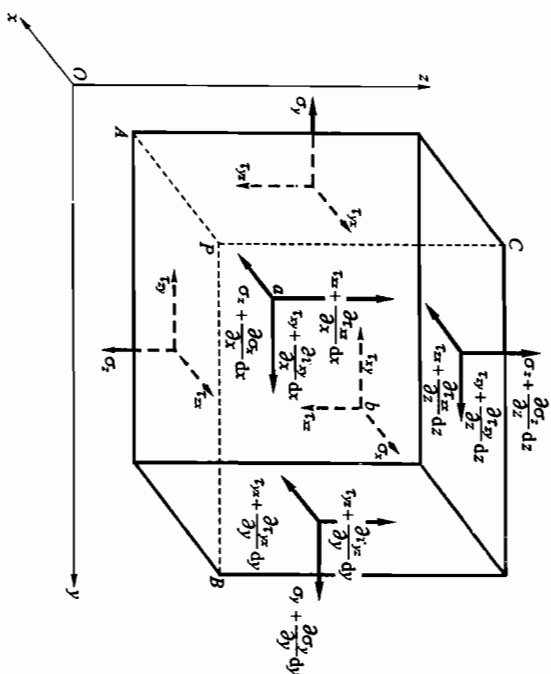


图 7-1

现在首先来考虑区域内的静力学方面条件, 导出空间问题的平衡微分方程。在物体内的任意一点  $P$ , 割取一个微小的平行六面体, 它的六面垂直于坐标轴, 而棱边的长度为  $PA = dx$ ,  $PB = dy$ ,  $PC = dz$ , 图 7-1。一般而论, 应力分量是位置坐标的函数。因此, 作用在这六面体两对面上的应力分量不完全相同,

而具有微小的差量。例如, 作用在后面的正应力是  $\sigma_x$ , 由于坐标  $x$  改变了  $dx$ , 作用在前面的正应力应当是  $\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx$ , 余类推。由于所取的六面体是微小的, 因而可以认为体力是均匀分布的。

首先, 以连接六面体前后两面中心的直线  $ab$  为矩轴, 列出力矩的平衡方程  $\sum M_{ab} = 0$ :

$$\left( \tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) dx dz \frac{dy}{2} + \tau_{yx} dx dz \frac{dy}{2} - \left( \tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx \right) dx dy \frac{dz}{2} - \tau_{xy} dx dy \frac{dz}{2} = 0.$$

除以  $dx dy dz$ , 合并相同的项, 得

$$\tau_{yx} + \frac{1}{2} \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy - \tau_{xy} - \frac{1}{2} \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx = 0.$$

略去微量以后, 得

$$\tau_{yx} = \tau_{xy}.$$

同样可以得出

$$\tau_{xz} = \tau_{zx}, \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}.$$

这些是以前已有的结果, 只是又一次证明了切应力的互等性。

其次, 以  $x$  轴为投影轴, 列出投影的平衡方程  $\sum F_x = 0$ , 得

$$\left( \sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \right) dy dz - \sigma_x dy dz + \left( \tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) dx dz - \tau_{yx} dx dz + \left( \tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz \right) dx dy - \tau_{zx} dx dy + f_x dx dy dz = 0.$$

由其余 2 个平衡方程,  $\sum F_y = 0$  和  $\sum F_z = 0$ , 可以得出与此相似的 2 个方程。将这 3 个方程约简以后, 除以  $dx dy dz$ , 得

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + f_x &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + f_y &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + f_z &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (7-1)$$

这就是空间问题的平衡微分方程。

### § 7-2 物体内任一点的应力状态

现在, 假定物体在任一点  $P$  的 6 个直角坐标面上的应力分量  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yx}, \tau_{xz}, \tau_{zx}, \tau_{yz}, \tau_{zy}$ ,

$\tau_{yx} = \tau_{xy}$ ,  $\tau_{zx} = \tau_{xz}$ ,  $\tau_{zy} = \tau_{yz}$  为已知, 试求经过  $P$  点的任一斜面上的应力。为此, 在  $P$  点附近取一个平面  $ABC$ , 平行于这一斜面, 并与经过  $P$  点而平行于坐标面的三个平面形成一个微小的四面体  $PABC$ , 图 7-2。当四面体  $PABC$  无限减小而趋于  $P$  点时, 平面  $ABC$  上的应力就成为该斜面上的应力。

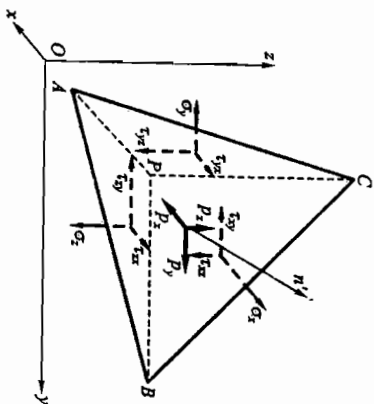


图 7-2

命平面  $ABC$  的外法线为  $n'$ , 其方向余弦为

$$\cos(n', x) = l, \quad \cos(n', y) = m, \quad \cos(n', z) = n.$$

设三角形  $ABC$  的面积为  $dS$ , 则三角形  $BPC$ ,  $CPA$ ,  $APB$  的面积分别为  $ldS$ ,  $mdS$ ,  $ndS$ 。四面体  $PABC$  的体积用  $dV$  代表。三角形  $ABC$  上的全应力  $p$  在坐标轴上的投影用  $p_x$ ,  $p_y$ ,  $p_z$  代表。根据四面体的平衡条件  $\sum F_x = 0$ , 得

$$p_x dS - \sigma_x ldS - \tau_{yx} mdS - \tau_{zx} ndS + f_x dV = 0.$$

除以  $dS$ , 并移项, 得

$$p_x + f_x \frac{dV}{dS} = l\sigma_x + m\tau_{yx} + n\tau_{zx}.$$

当四面体  $PABC$  无限减小而趋于  $P$  点时, 由于  $dV$  是比  $dS$  更高一阶的微量, 所以  $\frac{dV}{dS}$  趋近于零。于是得出下面式(7-2)中的第一式。其余二式可分别由平衡条件  $\sum F_y = 0$  及  $\sum F_z = 0$  同样地得出

$$\left. \begin{aligned} p_x &= l\sigma_x + m\tau_{yx} + n\tau_{zx}, \\ p_y &= m\sigma_y + n\tau_{xy} + l\tau_{xy}, \\ p_z &= n\sigma_z + l\tau_{xz} + m\tau_{yz}. \end{aligned} \right\} \quad (7-2)$$

设三角形  $ABC$  上的正应力为  $\sigma_n$ , 则

$$\sigma_n = lp_x + mp_y + np_z.$$

将式(7-2)代入, 并分别用  $\tau_{yx}$ ,  $\tau_{xz}$ ,  $\tau_{xy}$  代替  $\tau_{xy}$ ,  $\tau_{xz}$ ,  $\tau_{yx}$ , 即得

$$\sigma_n = l^2 \sigma_x + m^2 \sigma_y + n^2 \sigma_z + 2mn\tau_{yz} + 2nl\tau_{xz} + 2lm\tau_{xy}. \quad (7-3)$$

设三角形  $ABC$  上的切应力为  $\tau_n$ , 则由于

$$p^2 = \sigma_n^2 + \tau_n^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2$$

而有

$$\tau_n^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - \sigma_n^2. \quad (7-4)$$

由式(7-3)及(7-4)可见, 在物体的任意一点, 如果已知 6 个坐标面上的应力分量  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yx}$ , 就可以求得任一斜面上的正应力和切应力。因此, 可以说, 6 个应力分量完全决定了一点的应力状态。

在特殊情况下, 如果  $ABC$  是物体上受面力作用的边界面  $s_s$ , 则  $p_x, p_y, p_z$  成为面力分量  $\bar{f}_x, \bar{f}_y, \bar{f}_z$ , 于是由式(7-2)得出

$$\left. \begin{aligned} (l\sigma_x + m\tau_{yx} + n\tau_{zx})_s &= \bar{f}_x, \\ (m\sigma_y + n\tau_{xy} + l\tau_{xy})_s &= \bar{f}_y, \\ (n\sigma_z + l\tau_{xz} + m\tau_{yz})_s &= \bar{f}_z. \end{aligned} \right\} \quad (\text{在 } s_s \text{ 上}) \quad (7-5)$$

其中  $(\sigma_x)_s, \dots, (\tau_{yz})_s$  是应力分量的边界值。这就是空间问题的应力边界条件, 它表明应力分量的边界值与面力分量之间的关系。

### § 7-3 主应力 最大与最小的应力

设经过任一点  $P$  的某一斜面上的切应力等于零, 则该斜面上的正应力称为在  $P$  点的一个主应力, 该斜面称为在  $P$  点的一个应力主面, 而该斜面的法线方向称为在  $P$  点的一个应力的主向。

假设在  $P$  点有一个应力主面存在。这样, 由于该面上的切应力等于零, 所以该面上的全应力就等于该面上的正应力, 也就等于主应力  $\sigma$ 。于是该面上的全应力在坐标轴上的投影成为

$$p_x = l\sigma, \quad p_y = m\sigma, \quad p_z = n\sigma.$$

将式(7-2)代入, 即得

$$\left. \begin{aligned} l\sigma_x + m\tau_{yx} + n\tau_{zx} &= l\sigma, \\ m\sigma_y + n\tau_{xy} + l\tau_{xy} &= m\sigma, \\ n\sigma_z + l\tau_{xz} + m\tau_{yz} &= n\sigma. \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

此外还有方向余弦的关系式

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1. \quad (b)$$

如果将式(a)与(b)联立求解, 能够得出  $\sigma, l, m, n$  的一组解答, 就得到  $P$  点的一

个主应力以及与之对应的应力主面和应力主向。用下述方法求解,比较方便。

将式(a)改写为

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_x - \sigma)l + \tau_{yz}m + \tau_{zx}n &= 0, \\ \tau_{xy}l + (\sigma_y - \sigma)m + \tau_{yz}n &= 0, \\ \tau_{xz}l + \tau_{yz}m + (\sigma_z - \sigma)n &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (c)$$

这是  $l, m, n$  的 3 个齐次线性方程。因为由式(b)可见  $l, m, n$  不能全等于零, 所以这三个方程的系数的行列式应该等于零, 即

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{yz} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma \end{vmatrix} = 0.$$

用  $\tau_{yz}, \tau_{xz}, \tau_{xy}$  代替  $\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$ , 将行列式展开, 得  $\sigma$  的三次方程

$$\begin{aligned} & \sigma^3 - (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)\sigma^2 + \\ & (\sigma_x\sigma_y + \sigma_x\sigma_z + \sigma_y\sigma_z - \tau_{yz}^2 - \tau_{xz}^2 - \tau_{xy}^2)\sigma - \\ & (\sigma_x\sigma_y\sigma_z - \sigma_x\tau_{yz}^2 - \sigma_y\tau_{xz}^2 - \sigma_z\tau_{xy}^2 + 2\tau_{yz}\tau_{xz}\tau_{xy}) \\ & = 0. \end{aligned} \quad (7-6)$$

求解这个方程, 如果能得出  $\sigma$  的三个实根  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ , 这些就是  $P$  点的 3 个主应力。为了求得与主应力  $\sigma_1$  相应的方向余弦  $l_1, m_1, n_1$ , 可以利用式(c)中的任意两式, 例如其中的前两式。由此得

$$\begin{aligned} (\sigma_x - \sigma_1)l_1 + \tau_{yz}m_1 + \tau_{xz}n_1 &= 0, \\ \tau_{xy}l_1 + (\sigma_y - \sigma_1)m_1 + \tau_{yz}n_1 &= 0. \end{aligned}$$

将上列两式均除以  $l_1$ , 得

$$\begin{aligned} \frac{m_1}{l_1} + \tau_{xz} \frac{n_1}{l_1} + (\sigma_x - \sigma_1) &= 0, \\ (\sigma_y - \sigma_1) \frac{m_1}{l_1} + \tau_{xy} \frac{n_1}{l_1} + \tau_{xy} &= 0, \end{aligned}$$

可以从而解出比值  $\frac{m_1}{l_1}$  及  $\frac{n_1}{l_1}$ 。于是可由式(b)得出

$$l_1 = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{m_1}{l_1}\right)^2 + \left(\frac{n_1}{l_1}\right)^2}},$$

并由已知的比值  $m_1/l_1$  及  $n_1/l_1$  求得  $m_1$  及  $n_1$ 。同样可以求得与主应力  $\sigma_2$  相应的  $l_2, m_2, n_2$ , 以及  $\sigma_3$  相应的  $l_3, m_3, n_3$ 。

下面来考察: 在受力物体内的任意一点, 究竟是否存在主应力? 存在着几个主应力? 它们之间又有什么关系?

我们知道, 实系数的三次方程(7-6)至少有 1 个实根, 因而至少存在着 1 个主应力以及与之对应的应力主面。把这个主应力称为  $\sigma_3$ , 并将  $z$  轴放在这个应力主向, 则  $\sigma_z = \sigma_3$  而  $\tau_{xz} = \tau_{zx} = 0, \tau_{yz} = \tau_{zy} = 0$ 。于是平行六面体上的应力如图 7-3 所示(垂直于图平面的  $\sigma_z = \sigma_3$  没有画出)。根据 § 2-3 中的分析, 可以断定有两个主应力  $\sigma_1$  和  $\sigma_2$ , 作用在互相垂直而且垂直于图平面的两个应力主面上, 如图所示。这就证明: 在受力物体内的任意一点, 一定存在三个互相垂直的应力主面以及对应的三个主应力。

三次方程(7-6)又可以写成根式方程, 即

$$(\sigma - \sigma_1)(\sigma - \sigma_2)(\sigma - \sigma_3) = 0. \quad (d)$$

将式(d)展开, 并与式(7-6)比较  $\sigma^2$  项的系数, 就有

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z. \quad (7-7)$$

显然, 在一定的应力状态下, 物体内任一点处的主应力不会随着坐标系而改变(尽管应力分量随着坐标系而改变), 所以方程(7-7)左边的  $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$  不会随坐标系而改变, 因而右边的  $\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$ , 也不会随坐标系而改变。于是可见, 在受力物体内的任意一点, 三个互相垂直的面上的正应力之和是不变量(不随坐标系而变的量), 并且等于该点的三个主应力之和。

可以证明, 三个主应力中最大的一个就是该点的最大正应力, 而三个主应力中最小的一个就是该点的最小正应力。由此又可见, 在三个主应力相等的特殊情况下, 所有各截面上的正应力都相同(也就等于主应力), 而切应力都等于零。还可以证明, 最大与最小的切应力, 在数值上等于最大主应力与最小主应力之差的一半, 作用在通过中间主应力并且“平分最大主应力与最小主应力的夹角”的平面上。

## § 7-4 几何方程及物理方程

现在来考虑空间问题的几何学方面。在空间问题中, 形变分量与位移分量应当满足下列六个方程, 即空间问题的几何方程:

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, & \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}, & \epsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z}, \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, & \gamma_{xz} &= \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x}, & \gamma_{yz} &= \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial y}, \end{aligned} \right\} \quad (7-8)$$

其中的第一式、第二式和第六式已在 § 2-4 中导出, 其余三式可用同样的方法

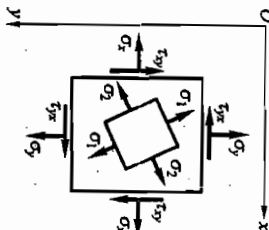


图 7-3

导出。

此外,在物体的给定约束位移的边界  $s_u$  上,位移分量还应当满足下列三个位移边界条件,即空间问题的位移边界条件:

$$(u)_s = \bar{u}, \quad (v)_s = \bar{v}, \quad (w)_s = \bar{w} \quad (\text{在 } s_u \text{ 上}) \quad (7-9)$$

此三式的等号左边是位移分量的边界值,等号右边是该边界上的约束位移分量的已知值。

附带说明一下体应变的概念。设有微小的正平行六面体,其棱边的长度为  $dx, dy, dz$ 。在变形之前,它的体积是  $dx dy dz$ ;在变形之后,它的体积将成为  $(dx + \epsilon_x dx)(dy + \epsilon_y dy)(dz + \epsilon_z dz)$ 。

因此,它的每单位体积的体积改变,也就是所谓体应变,是

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{(dx + \epsilon_x dx)(dy + \epsilon_y dy)(dz + \epsilon_z dz) - dx dy dz}{dx dy dz} \\ &= (1 + \epsilon_x)(1 + \epsilon_y)(1 + \epsilon_z) - 1 \\ &= \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z + \epsilon_x \epsilon_y + \epsilon_x \epsilon_z + \epsilon_y \epsilon_z + \epsilon_x \epsilon_y \epsilon_z \end{aligned}$$

由位移和形变是微小的假定,可略去线应变的乘积项(更高阶的微量),则上式简化为

$$\theta = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z \quad (7-10)$$

将几何方程(7-8)中的前三式代入,得

$$\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \quad (7-11)$$

它表明体应变与位移分量之间的简单微分关系。

现在来考虑空间问题的物理学方面。各向同性体中的形变分量与应力分量之间的关系已在 §2-5 中给出如下:

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{1}{E}[\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)], \\ \epsilon_y &= \frac{1}{E}[\sigma_y - \mu(\sigma_x + \sigma_z)], \\ \epsilon_z &= \frac{1}{E}[\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)], \\ \gamma_{yz} &= \frac{2(1+\mu)}{E}\tau_{yz}, \\ \gamma_{xz} &= \frac{2(1+\mu)}{E}\tau_{xz}, \\ \gamma_{xy} &= \frac{2(1+\mu)}{E}\tau_{xy} \end{aligned} \right\} \quad (7-12)$$

这是空间问题的物理方程的基本形式,其中形变分量是用应力分量表示的,可用

于按应力求解的方法。

将式(7-12)中的前三式相加,得

$$\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z = \frac{1-2\mu}{E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)。$$

应用式(7-10)并命  $\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \Theta$ , 则上式可以简写为

$$\theta = \frac{1-2\mu}{E}\Theta \quad (7-13)$$

前面已经说明,  $\theta = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z$  是体应变。现在又看到,体应变  $\theta$  是和  $\Theta$  成正比的。因此,  $\Theta = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$  也就称为体积应力,而  $\Theta$  与  $\theta$  之间的比例常数  $\frac{E}{1-2\mu}$  也就称为体积模量。

为了以后用起来方便,下面来导出物理方程的另一种形式,即将应力分量用形变分量来表示。

由方程(7-12)中的第一式可得

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{1}{E}[(1+\mu)\sigma_x - \mu(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)] \\ &= \frac{1}{E}[(1+\mu)\sigma_x - \mu\Theta]。 \end{aligned}$$

求解  $\sigma_x$ , 得

$$\sigma_x = \frac{1}{1+\mu}(E\epsilon_x + \mu\Theta)。$$

将由式(7-13)得来的  $\Theta = \frac{E\theta}{1-2\mu}$  代入,得

$$\sigma_x = \frac{E}{1+\mu} \left( \frac{\mu}{1-2\mu} \theta + \epsilon_x \right)。$$

对于  $\sigma_y$  和  $\sigma_z$ , 也可以导出与此相似的两个方程。此外,再由式(7-12)中的后三式求解切应力分量,总共得出如下的 6 个方程:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1+\mu} \left( \frac{\mu}{1-2\mu} \theta + \epsilon_x \right), \\ \sigma_y &= \frac{E}{1+\mu} \left( \frac{\mu}{1-2\mu} \theta + \epsilon_y \right), \\ \sigma_z &= \frac{E}{1+\mu} \left( \frac{\mu}{1-2\mu} \theta + \epsilon_z \right), \\ \tau_{yz} &= \frac{E}{2(1+\mu)} \gamma_{yz}, \\ \tau_{xz} &= \frac{E}{2(1+\mu)} \gamma_{xz}, \\ \tau_{xy} &= \frac{E}{2(1+\mu)} \gamma_{xy}。 \end{aligned} \right\} \quad (7-14)$$

这是空间问题物理方程的第二种形式,其中应力分量是用形变分量表示的,可用于按位移求解的方法。

总结起来,对于空间问题,我们共有 15 个未知函数:6 个应力分量  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$ ; 6 个形变分量  $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$ ; 3 个位移分量  $u, v, w$ 。这 15 个未知函数在弹性体区域内应当满足 15 个基本方程:3 个平衡微分方程(7-1);6 个几何方程(7-8);6 个物理方程(7-12)或者(7-14)。此外,在给定约束位移的边界  $s_u$  上,还应当满足位移边界条件(7-9);在给定面力的边界  $s_s$  上,还应当满足应力边界条件(7-5)。

## § 7-5 轴对称问题的基本方程

在空间问题中,如果弹性体的几何形状、约束情况,以及所受的外力作用,都是对称于某一轴(通过这个轴的任一平面都是对称面),则所有的应力、形变和位移也就对称于这一轴。这种问题称为空间轴对称问题。

在描述轴对称问题中的应力、形变及位移时,宜采用圆柱坐标  $\rho, \varphi, z$ 。这首先是因为,如果以弹性体的对称轴为  $z$  轴,图 7-4,则所有的应力分量、形变分量和位移分量都将是  $\rho$  和  $z$  的函数,不随  $\varphi$  而变。其次,具有方向性的各物理量应当通过对称于  $z$  轴的任何平面,凡不符合对称性的物理量必然不存在,它们应当等于零。

首先来导出轴对称问题的平衡微分方程。

用相距  $d\rho$  的两个圆柱面,互成  $d\varphi$  角的两个铅直面及相距  $dz$  的两个水平面,从弹性体割取一个微小六面体 PABC,图 7-4。沿  $\rho$  方向的正应力,称为径向正应力,用  $\sigma_\rho$  代表;沿  $\varphi$  方向的正应力,称为环向正应力,用  $\sigma_\varphi$  代表;沿  $z$  方向的正应力,称为轴向正应力,仍然用  $\sigma_z$  代表;作用在圆柱面上而沿  $z$  方向作用的切应力用  $\tau_{\rho z}$  代表,作用在水平面上而沿  $\rho$  方向作用的切应力用  $\tau_{\varphi\rho}$  代表。根据切应力的互等性,  $\tau_{\varphi\rho} = \tau_{\rho\varphi}$ 。由于对称性,  $\tau_{\rho\varphi} = \tau_{\varphi\rho} = \tau_{\rho z}$  及  $\tau_{z\rho} = \tau_{z\varphi}$  都不存在。这样,总共只有四个应力分量:  $\sigma_\rho, \sigma_\varphi, \sigma_z, \tau_{\rho z}$ , 一般都是  $\rho$  和  $z$  的函数。

如果六面体的内圆柱面上的正应力是  $\sigma_\rho$ , 则外圆柱面上的正应力应当是  $\sigma_\rho + \frac{\partial \sigma_\rho}{\partial \rho} d\rho$ 。由于对称,  $\sigma_\varphi$  在水平面之内没有增量。如果六面体下面的正应力是  $\sigma_z$ , 则上面的正应力应当是  $\sigma_z + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} dz$ 。同样,内面及外面的切应力分别为  $\tau_{\rho z}$

及  $\tau_{\rho z} + \frac{\partial \tau_{\rho z}}{\partial \rho} d\rho$ , 下面及上面的切应力分别为  $\tau_{z\rho}$  及  $\tau_{z\rho} + \frac{\partial \tau_{z\rho}}{\partial z} dz$ 。径向的体力用  $f_\rho$  代表,轴向的体力,即  $z$  方向的体力,用  $f_z$  代表。

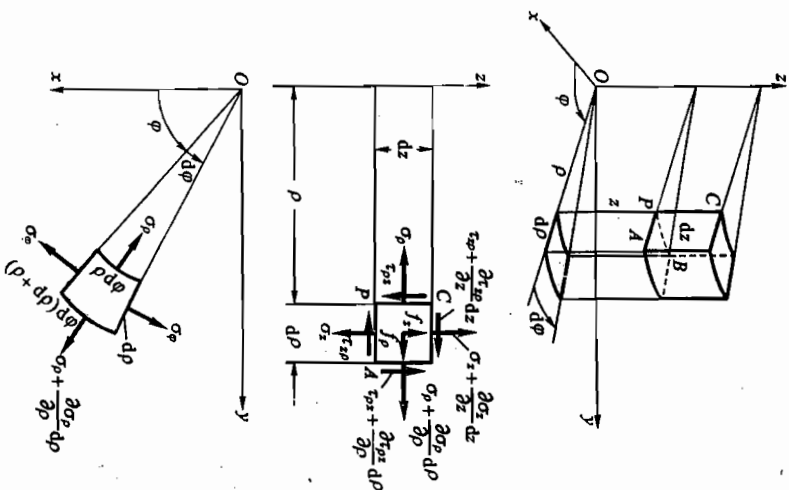


图 7-4

将六面体所受的各力投影到六面体中心的径向轴上,取  $\sin \frac{d\varphi}{2}$  及  $\cos \frac{d\varphi}{2}$  分别近似地等于  $\frac{d\varphi}{2}$  及 1, 得平衡方程

$$\left( \sigma_\rho + \frac{\partial \sigma_\rho}{\partial \rho} d\rho \right) (\rho + d\rho) d\varphi dz - \sigma_\rho \rho d\varphi dz - 2\sigma_\varphi d\rho dz \frac{d\varphi}{2} + \left( \tau_{\rho z} + \frac{\partial \tau_{\rho z}}{\partial z} dz \right) \rho d\varphi d\rho - \tau_{\rho z} \rho d\varphi d\rho + f_\rho \rho d\varphi dz = 0.$$

归项以后,除以  $\rho d\varphi d\rho dz$ , 然后略去微量,得

$$\frac{\partial \sigma_\rho}{\partial \rho} + \frac{\partial \tau_{\rho z}}{\partial z} + \frac{\sigma_\rho - \sigma_\varphi}{\rho} + f_\rho = 0.$$

将六面体所受的各力投影到  $z$  轴上, 得平衡方程

$$\left( \tau_{rz} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial \rho} d\rho \right) (\rho + d\rho) d\phi dz - \tau_{rz} \rho d\phi dz + \left( \sigma_z + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} dz \right) \rho d\phi d\rho - \sigma_z \rho d\phi d\rho + f_z \rho d\phi d\rho dz = 0.$$

归项以后, 除以  $\rho d\phi d\rho dz$ , 然后略去微量, 得

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial \rho} + \frac{\tau_{rz}}{\rho} + f_z = 0.$$

于是得空间轴对称问题的平衡微分方程如下:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_\rho}{\partial \rho} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{\rho} + f_\rho &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial \rho} + \frac{\tau_{rz}}{\rho} + f_z &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (7-15)$$

现在来导出轴对称问题的几何方程。

沿  $\rho$  方向的线应变, 称为径向线应变, 用  $\epsilon_\rho$  代表; 沿  $\phi$  方向的线应变, 称为环向线应变, 用  $\epsilon_\theta$  代表; 沿  $z$  方向的线应变, 称为轴向线应变, 仍然用  $\epsilon_z$  代表;  $\rho$  方向与  $z$  方向之间的直角的改变用  $\gamma_{\rho z}$  代表。由于对称,  $\gamma_{\rho\theta}$  及  $\gamma_{\theta z}$  都等于零。沿  $\rho$  方向的位移分量称为径向位移, 用  $u_\rho$  代表; 沿  $z$  方向的位移分量称为轴向位移, 用  $u_z$  代表。由于对称, 环向位移  $u_\theta = 0$ 。

通过与 §2-4 及 §4-2 中同样的分析, 可见, 由于径向位移  $u_\rho$  引起的形变是

$$\epsilon_\rho = \frac{\partial u_\rho}{\partial \rho}, \quad \epsilon_\theta = \frac{u_\rho}{\rho}, \quad \gamma_{\theta\rho} = \frac{\partial u_\theta}{\partial z};$$

由于轴向位移  $u_z$  引起的形变是

$$\epsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z}, \quad \gamma_{\rho z} = \frac{\partial u_\rho}{\partial z}.$$

将以上两组形变相加, 得空间轴对称问题的几何方程

$$\epsilon_\rho = \frac{\partial u_\rho}{\partial \rho}, \quad \epsilon_\theta = \frac{u_\rho}{\rho}, \quad \epsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z}, \quad \gamma_{\rho z} = \frac{\partial u_\rho}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial \rho}. \quad (7-16)$$

由于柱坐标和直角坐标同样也是正交坐标, 所以物理方程的基本形式可以直接根据胡克定律得来:

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_\rho &= \frac{1}{E} [\sigma_\rho - \mu(\sigma_\theta + \sigma_z)], \\ \epsilon_\theta &= \frac{1}{E} [\sigma_\theta - \mu(\sigma_\rho + \sigma_z)], \\ \epsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_\rho + \sigma_\theta)], \\ \gamma_{\rho z} &= \frac{1}{G} \tau_{\rho z} = \frac{2(1+\mu)}{E} \tau_{\rho z}. \end{aligned} \right\} \quad (7-17)$$

将式(7-17)中的前三式相加, 仍然得到

$$\theta = \frac{1-2\mu}{E} \Theta,$$

其中的体应变为

$$\theta = \epsilon_\rho + \epsilon_\theta + \epsilon_z = \frac{\partial u_\rho}{\partial \rho} + \frac{u_\rho}{\rho} + \frac{\partial u_z}{\partial z}, \quad (7-18)$$

而体积应力为

$$\Theta = \sigma_\rho + \sigma_\theta + \sigma_z. \quad (7-19)$$

通过与 §7-4 中同样的处理, 也可以同样地把应力分量用形变分量来表示:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_\rho &= \frac{E}{1+\mu} \left( \frac{\mu}{1-2\mu} \theta + \epsilon_\rho \right), \quad \sigma_\theta = \frac{E}{1+\mu} \left( \frac{\mu}{1-2\mu} \theta + \epsilon_\theta \right), \\ \sigma_z &= \frac{E}{1+\mu} \left( \frac{\mu}{1-2\mu} \theta + \epsilon_z \right), \quad \tau_{\rho z} = \frac{E}{2(1+\mu)} \gamma_{\rho z}. \end{aligned} \right\} \quad (7-20)$$

## 习 题

7-1 试证明: 在与三个主应力成相同角度的面上, 正应力等于三个主应力的平均值。

7-2 设某一物体发生如下的位移:

$$\begin{aligned} u &= a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 z, \\ v &= b_0 + b_1 x + b_2 y + b_3 z, \\ w &= c_0 + c_1 x + c_2 y + c_3 z. \end{aligned}$$

试证明: 各个形变分量在物体内部为常量(即所谓均匀形变); 在变形以后, 物体内的平面保持为平面, 直线保持为直线, 平行面保持平行, 平行线保持平行, 正平行六面体变成斜平行六面体, 圆球面变成椭球面。

7-3 在直角坐标系中, 试从平面问题的基本方程和边界条件推广得出空间问题的基本方程和边界条件, 并说明理由。

7-4 试从平面轴对称问题的基本方程推广得出空间轴对称问题的基本方程, 并说明理由。

7-5 试导出空间圆柱坐标系中非轴对称问题的平衡微分方程。

答案:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_x}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{\varphi x}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + \frac{\sigma_\rho - \sigma_x}{\rho} + f_\rho &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{\varphi x}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_x}{\partial \varphi} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + \frac{2\tau_{\varphi x}}{\rho} + f_\varphi &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{\varphi x}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_x}{\partial z} + \frac{\tau_{xz}}{\rho} + f_z &= 0.\end{aligned}$$

## 第八章 空间问题的解答

### §8-1 按位移求解空间问题

按位移求解问题,是取位移分量为基本未知函数,并要通过消元法,导出弹性体区域内求解位移的基本微分方程和相应的边界条件。对空间问题说来,这就要从 15 个基本方程中消去应力分量和形变分量,得出只包含 3 个位移分量的微分方程,推导如下。

将几何方程(7-8)代入物理方程(7-14),得出用位移分量表示应力分量的弹性方程如下:

$$\left. \begin{aligned}\sigma_x &= \frac{E}{1+\mu} \left( \frac{\mu}{1-2\mu} \theta + \frac{\partial u}{\partial x} \right), \\ \sigma_y &= \frac{E}{1+\mu} \left( \frac{\mu}{1-2\mu} \theta + \frac{\partial v}{\partial y} \right), \\ \sigma_z &= \frac{E}{1+\mu} \left( \frac{\mu}{1-2\mu} \theta + \frac{\partial w}{\partial z} \right), \\ \tau_{yx} &= \frac{E}{2(1+\mu)} \left( \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \right), \\ \tau_{xz} &= \frac{E}{2(1+\mu)} \left( \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial x} \right), \\ \tau_{xy} &= \frac{E}{2(1+\mu)} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right),\end{aligned} \right\} \quad (8-1)$$

其中

$$\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}.$$

再将上面的弹性方程(8-1)代入平衡微分方程(7-1),并采用记号  $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} +$

$\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ , 得到

$$\left. \begin{aligned}\frac{E}{2(1+\mu)} \left( \frac{1}{1-2\mu} \frac{\partial \theta}{\partial x} + \nabla^2 u \right) + f_x &= 0, \\ \frac{E}{2(1+\mu)} \left( \frac{1}{1-2\mu} \frac{\partial \theta}{\partial y} + \nabla^2 v \right) + f_y &= 0, \\ \frac{E}{2(1+\mu)} \left( \frac{1}{1-2\mu} \frac{\partial \theta}{\partial z} + \nabla^2 w \right) + f_z &= 0.\end{aligned} \right\} \quad (8-2)$$

这是用位移分量表示的平衡微分方程,也就是按位移求解空间问题时所需用的基本微分方程。

如果将式(8-1)代入式(7-5),就能把应力边界条件用位移分量来表示,但由于这样得出的方程太长,我们宁愿把应力边界条件保留为式(7-5)的形式,而理解其中的应力分量系通过式(8-1)用位移分量表示。位移边界条件则仍然如式(7-9)所示。

对于轴对称问题,也可以进行与上相同的推导,得出相应的微分方程。为此,首先将几何方程(7-16)代入物理方程(7-20),得出弹性方程

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{E}{1+\mu} \left( \frac{\mu}{1-2\mu} \theta + \frac{\partial u_r}{\partial r} \right), & \sigma_\theta &= \frac{E}{1+\mu} \left( \frac{\mu}{1-2\mu} \theta + \frac{u_r}{r} \right), \\ \sigma_z &= \frac{E}{1+\mu} \left( \frac{\mu}{1-2\mu} \theta + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right), & \tau_{rz} &= \frac{E}{2(1+\mu)} \left( \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right), \end{aligned} \right\} \quad (8-3)$$

其中  $\theta = \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_z}{\partial z}$ 。再将式(8-3)代入平衡微分方程(7-15),并采用记号  $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ , 得出

$$\left. \begin{aligned} \frac{E}{2(1+\mu)} \left( \frac{1}{1-2\mu} \frac{\partial \theta}{\partial r} + \nabla^2 u_r - \frac{u_r}{r^2} \right) + f_r &= 0, \\ \frac{E}{2(1+\mu)} \left( \frac{1}{1-2\mu} \frac{\partial \theta}{\partial z} + \nabla^2 u_z \right) + f_z &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (8-4)$$

这就是按位移求解空间轴对称问题时的基本微分方程。

此外,由于轴对称问题中的边界面多为坐标面,位移和应力边界条件都较简单,而应力边界条件同样可以通过式(8-3)用位移分量来表示。

## §8-2 半空间体受重力及均布压力

设有半空间体,密度为  $\rho$ , 在水平边界上受均布压力  $q$ , 图 8-1, 以边界面为  $xy$  面,  $z$  轴铅直向下。这样,体力分量就是  $f_x = 0, f_y = 0, f_z = \rho g$ 。

采用按位移求解。由于对称(任一铅直平面都是对称面),试假设

$$u = 0, \quad v = 0, \quad w = w(z). \quad (a)$$

这样就得到

$$\left. \begin{aligned} \theta &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{dw}{dz}, \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} &= 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial z} = \frac{d^2 w}{dz^2}. \end{aligned} \right\}$$

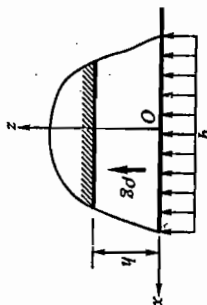


图 8-1

可见基本微分方程(8-2)中的前二式自然满足,而第三式成为

$$\frac{E}{2(1+\mu)} \left( \frac{1}{1-2\mu} \frac{d^2 w}{dz^2} + \frac{d^2 w}{dz^2} \right) + \rho g = 0,$$

简化以后得

$$\frac{d^2 w}{dz^2} = - \frac{(1+\mu)(1-2\mu)\rho g}{E(1-\mu)}. \quad (b)$$

积分以后得

$$\theta = \frac{dw}{dz} = - \frac{(1+\mu)(1-2\mu)\rho g}{E(1-\mu)} (z + A), \quad (c)$$

$$w = - \frac{(1+\mu)(1-2\mu)\rho g}{2E(1-\mu)} (z + A)^2 + B, \quad (d)$$

其中  $A$  和  $B$  是待定常数。

现在,试根据边界条件来决定常数  $A$  和  $B$ 。将以上的结果代入弹性方程(8-1),得

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_y = - \frac{\mu}{1-\mu} \rho g (z + A), & \sigma_z &= - \rho g (z + A), \\ \tau_{xz} &= \tau_{yz} = \tau_{xy} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (e)$$

在  $z=0$  的边界面上,  $l=m=0$  而  $n=-1$ 。因为  $\bar{f}_x = \bar{f}_y = 0$  而  $\bar{f}_z = q$ , 所以应力边界条件(7-5)中的前三式自然满足,而第三式要求

$$(-\sigma_z)_{z=0} = q.$$

将式(e)中  $\sigma_z$  的表达式代入,得  $\rho g A = q$ , 即  $A = q/\rho g$ 。再代回式(e),即得应力分量的解答

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_y = - \frac{\mu}{1-\mu} (q + \rho g z), & \sigma_z &= - (q + \rho g z), \\ \tau_{xz} &= \tau_{yz} = \tau_{xy} = 0, \end{aligned} \right\} \quad (f)$$

并由式(d)得出铅直位移

$$w = - \frac{(1+\mu)(1-2\mu)\rho g}{2E(1-\mu)} \left( z + \frac{q}{\rho g} \right)^2 + B. \quad (g)$$

为了决定常数  $B$ , 必须利用位移边界条件。假定半空间体在距边界为  $h$  处没有位移, 图 8-1, 则有位移边界条件

$$(w)_{z=h} = 0.$$

将式(g)代入,得

$$B = \frac{(1+\mu)(1-2\mu)\rho g}{2E(1-\mu)} \left( h + \frac{q}{\rho g} \right)^2.$$

再代回式(g),简化以后,得

$$w = \frac{(1+\mu)(1-2\mu)}{E(1-\mu)} \left[ q(h-z) + \frac{\rho g}{2}(h^2 - z^2) \right]. \quad (h)$$



现在,应力分量和位移分量都已经完全确定,并且所有一切条件都已经满足,可见式(a)所示的假设完全正确,而所得的应力和位移就是正确解答。

显然,最大的位移发生在边界上,由式(h)可得

$$u_{\max} = (u)_{z=0} = \frac{(1+\mu)(1-2\mu)}{E(1-\mu)} \left( \eta h + \frac{1}{2} \rho g h^2 \right)。$$

在式(i)中,  $\sigma_z$  和  $\sigma_r$  是铅直截面上的水平正应力,  $\sigma_r$  是水平截面上的铅直正应力,而它们的比值是

$$\frac{\sigma_z}{\sigma_r} = \frac{\sigma_z}{\sigma_r} = \frac{\mu}{1-\mu}。 \quad (8-5)$$

这个比值在土力学中称为侧压力系数。

### §8-3 半空间体在边界上受法向集中力

设有半空间体,体力不计,在水平边界上受有法向集中力  $F$ , 图8-2。这是一个轴对称的空间问题,而对称轴就是力  $F$  的作用线。因此,把  $z$  轴放在  $F$  的作用线上。坐标原点就放在  $F$  的作用点。

采用按位移求解。在这里,由于不计体力,所以位移分量应当满足基本微分方程(8-4)的简化形式

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{1-2\mu} \frac{\partial \theta}{\partial \rho} + \nabla^2 u_r - \frac{u_r}{\rho} &= 0, \\ \frac{1}{1-2\mu} \frac{\partial \theta}{\partial z} + \nabla^2 u_z &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

其中  $\theta = \frac{\partial u_r}{\partial \rho} + \frac{u_r}{\rho} + \frac{\partial u_z}{\partial z}$ 。

在  $z=0$  的边界面上,除了原点  $O$  以外的应力边界条件要求

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_z)_{z=0, \rho \neq 0} &= 0, \\ (\tau_{z\rho})_{z=0, \rho \neq 0} &= 0。 \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

此外,在  $z=0$  表面的原点  $O$  附近,可以看成是一个局部的小边界面,作用有面力分量,其合力为作用于  $O$  点的集中力  $F$ , 而合力矩为0。应用圣维南原理,取出一个  $z=0$  至  $z=z$  的平板脱离体,然后考虑此平板脱离体的平衡条件

$$\sum F_z = 0, \quad \int_0^\infty (\sigma_z)_{z=z} 2\pi \rho d\rho + F = 0。 \quad (c)$$

由于轴对称,其余的平衡条件均自然满足。

布西内斯克得出满足上述一切条件的如下解答,称为布西内斯克解答:

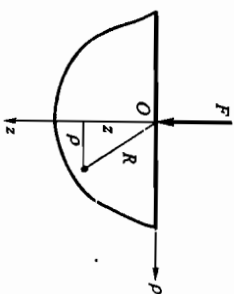


图8-2

$$\left. \begin{aligned} u_r &= \frac{(1+\mu)F}{2\pi ER} \left[ \frac{\rho z}{R^2} - \frac{(1-2\mu)\rho}{R+z} \right], \\ u_z &= \frac{(1+\mu)F}{2\pi ER} \left[ 2(1-\mu) + \frac{z^2}{R^2} \right]; \\ \sigma_r &= \frac{F}{2\pi R^2} \left[ \frac{(1-2\mu)R}{R+z} - \frac{3\rho^2 z}{R^3} \right], \\ \sigma_z &= \frac{(1-2\mu)F}{2\pi R^2} \left( \frac{z}{R} - \frac{R}{R+z} \right), \\ \sigma_\theta &= -\frac{3Fz^3}{2\pi R^5}, \quad \tau_{z\rho} = \tau_{\rho z} = -\frac{3F\rho z^2}{2\pi R^5}。 \end{aligned} \right\} \quad (8-7)$$

其中  $R = (\rho^2 + z^2)^{1/2}$ , 如图8-2所示。

读者试行验证:位移分量(8-6)满足基本微分方程(a),位移分量(8-6)和应力分量(8-7)满足弹性方程(8-3),应力分量满足边界条件(b)和平衡方程(c),因而解答(8-6)和(8-7)是正确的。验证时,注意有导数公式

$$\frac{\partial R}{\partial \rho} = \frac{\rho}{R}, \quad \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{z}{R}。$$

由式(8-6)中的第二式可见,水平边界上任一点的沉降是

$$\eta = (u_z)_{z=0} = \frac{F(1-\mu^2)}{\pi E \rho}， \quad (8-8)$$

它和距集中力作用点的距离  $\rho$  成反比。

本节中解出的问题,其应力分布具有如下的特征:

(1) 当  $R \rightarrow \infty$  时,各应力分量都趋于零;当  $R \rightarrow 0$  时,各应力分量都趋于无限大。这就是说,在离开集中力作用点非常远处,应力非常小;在靠近集中力作用点处,应力非常大。

(2) 水平截面上的应力( $\sigma_z$  及  $\tau_{z\rho}$ )与弹性常数无关,因而在任何材料的弹性体中都是同样地分布。其他截面上的应力,一般都随  $\mu$  而变。

(3) 水平截面上的全应力,都指向集中力的作用点,因为由式(8-7)中的后二式有  $\sigma_z, \tau_{z\rho} = z/\rho$ 。

有了上述半空间体在边界上受法向集中力时的解答,就可以用叠加法求得由法向分布力引起的位移和应力。

例如,设有单位力均匀分布在半空间体边界的矩形面积上,矩形面积的边长为  $a$  和  $b$ , 图8-3,现在来求出矩形的对称轴上距矩形中心为  $x$  的一点  $K$  的沉降  $\eta_K$ 。

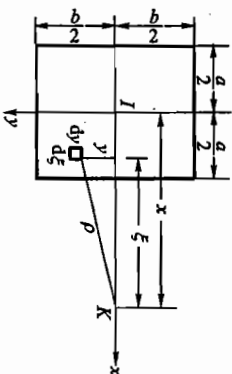


图8-3

为此,将这均布单位力分为微分力  $dF = \frac{1}{b\alpha} d\xi dy$ , 代入半空间体的沉降公式(8-

8), 对  $\xi$  和  $y$  进行积分。在这里  $\rho = \sqrt{\xi^2 + y^2}$ 。

设  $K$  点在矩形之外, 则沉降为

$$\eta_{K1} = \frac{1 - \mu^2}{\pi E} \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} \frac{1}{\sqrt{\xi^2 + y^2}} \frac{1}{b\alpha} d\xi dy。$$

积分的结果可以写成

$$\eta_{K1} = \frac{1 - \mu^2}{\pi E \alpha} F_{K1}, \quad (8-9)$$

其中

$$F_{K1} = \left[ \frac{2 \frac{x}{a} + 1}{\frac{b}{a}} \operatorname{arsinh} \frac{\frac{b}{a}}{2 \frac{x}{a} + 1} + \operatorname{arsinh} \frac{2 \frac{x}{a} + 1}{\frac{b}{a}} \right] - \left[ \frac{2 \frac{x}{a} - 1}{\frac{b}{a}} \operatorname{arsinh} \frac{\frac{b}{a}}{2 \frac{x}{a} - 1} + \operatorname{arsinh} \frac{2 \frac{x}{a} - 1}{\frac{b}{a}} \right]。$$

设  $K$  点恰在矩形的中心  $I$ , 则沉降为

$$\eta_{K1} = \frac{1 - \mu^2}{\pi E} \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} \frac{1}{\sqrt{\xi^2 + y^2}} \frac{1}{b\alpha} d\xi dy。$$

积分的结果仍然可以写成式(8-9)的形式, 但

$$F_{K1} = 2 \left( \frac{a}{b} \operatorname{arsinh} \frac{b}{a} + \operatorname{arsinh} \frac{a}{b} \right)。$$

表 8-1 半空间体沉降公式中的  $F_{K1}$  值

$\frac{x}{a}$	$\frac{a}{x}$	$\frac{b}{a} = \frac{2}{3}$	$\frac{b}{a} = 1$	$\frac{b}{a} = 2$	$\frac{b}{a} = 3$	$\frac{b}{a} = 4$	$\frac{b}{a} = 5$
0	$\infty$	4.265	3.525	2.406	1.867	1.543	1.322
1	1	1.069	1.038	0.929	0.829	0.746	0.678
2	0.500	0.508	0.505	0.490	0.469	0.446	0.246
3	0.333	0.336	0.335	0.330	0.323	0.314	0.305
4	0.250	0.251	0.251	0.249	0.246	0.242	0.237
5	0.200	0.200	0.200	0.199	0.197	0.196	0.193
6	0.167	0.167	0.167	0.166	0.165	0.164	0.163
7	0.143	0.143	0.143	0.143	0.142	0.141	0.140
8	0.125	0.125	0.125	0.125	0.124	0.124	0.123
9	0.111	0.111	0.111	0.111	0.111	0.111	0.110
10	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.099

当  $\frac{x}{a}$  值为整数时 (包括  $\frac{x}{a}$  为零时), 对于比值  $\frac{b}{a}$  的几个常用数值, 可以从表

8-1 中查得公式(8-9)中的  $F_{K1}$  的数值。如果  $\frac{x}{a}$  大于 10, 不论  $\frac{b}{a}$  的数值如何, 都

可以取  $F_{K1} = \frac{a}{x}$ 。

在用连杆法计算基础梁的空间问题时, 要用到沉降公式(8-9)和表 8-1。

## § 8-4 按应力求解空间问题

按应力求解问题, 是取应力分量为基本未知函数。现在来导出求解应力的基本微分方程; 对空间问题说来, 这就要从 15 个基本方程中消去位移分量和形变分量, 得出只包含 6 个应力分量的方程。因为平衡微分方程中本来就不包含位移分量和形变分量, 所以只需从几何方程和物理方程中消去这些分量。

首先从几何方程中消去位移分量。为此, 将式(7-8)中第二式左边对  $z$  的二阶导数与第三式左边对  $y$  的二阶导数相加, 得

$$\frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^3 u}{\partial y \partial z^2} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)。 \quad (a)$$

由式(7-8)中的第四式可见, 式(a)右边括弧内的表达式就是  $\gamma_{yz}$ , 于是从方程(a)及其余两个相似的方程得

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z}, \\ \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial z}, \\ \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}。 \end{aligned} \right. \quad (8-10)$$

这是表明形变协调条件的一组方程, 也就是一组所谓相容方程。

将式(7-8)中的后三式分别对  $x, y, z$  求导, 得

$$\begin{aligned} \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} &= \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z}, & \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z}, \\ \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} &= \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z}, \end{aligned}$$

并由此而得

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( 2 \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} \right) = 2 \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)。 \quad (b)$$

由式(7-8)中的第一式可见,式(b)右边括弧内的表达式就是 $\epsilon_x$ ,于是从方程(b)和其余两个相似的方程得

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{\partial \gamma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y \partial z}, \\ \frac{\partial}{\partial y} \left( -\frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial z \partial x}, \\ \frac{\partial}{\partial z} \left( -\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (8-11)$$

这是又一组相容方程。

通过与上相似的分步步骤,可以导出无数多的相容方程,都是形变分量所应当满足的。但是,可以证明,如果6个形变分量满足了相容方程(8-10)和(8-11),就可以保证位移分量的存在,也就可以用几何方程(7-8)求得位移分量。

将物理方程(7-12)代入相容方程(8-10)及(8-11),整理以后,得出用应力分量表示的相容方程如下:

$$\left. \begin{aligned} (1+\mu) \left( \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial y^2} \right) - \mu \left( \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y^2} \right) &= 2(1+\mu) \frac{\partial^2 \tau_{yz}}{\partial y \partial z}, \\ (1+\mu) \left( \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial z^2} \right) - \mu \left( \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} \right) &= 2(1+\mu) \frac{\partial^2 \tau_{xz}}{\partial z \partial x}, \\ (1+\mu) \left( \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial x^2} \right) - \mu \left( \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} \right) &= 2(1+\mu) \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y}, \end{aligned} \right\} \quad (c)$$

$$\left. \begin{aligned} (1+\mu) \frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial z} \right) &= \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} [(1+\mu)\sigma_x - \mu\Theta], \\ (1+\mu) \frac{\partial}{\partial y} \left( -\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} \right) &= \frac{\partial^2}{\partial z \partial x} [(1+\mu)\sigma_y - \mu\Theta], \\ (1+\mu) \frac{\partial}{\partial z} \left( -\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} \right) &= \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} [(1+\mu)\sigma_z - \mu\Theta]. \end{aligned} \right\} \quad (d)$$

利用平衡微分方程(7-1),可以简化上列各式,使每一式中只包含体积应力和一个应力分量。当然,体力分量将在所有各式中出现。这样就得出米歇尔所导出的相容方程,称为米歇尔相容方程:

$$\left. \begin{aligned} (1+\mu) \nabla^2 \sigma_x + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} &= -\frac{1+\mu}{1-\mu} \left[ (2-\mu) \frac{\partial f_x}{\partial x} + \mu \frac{\partial f_y}{\partial y} + \mu \frac{\partial f_z}{\partial z} \right], \\ (1+\mu) \nabla^2 \sigma_y + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y^2} &= -\frac{1+\mu}{1-\mu} \left[ (2-\mu) \frac{\partial f_y}{\partial y} + \mu \frac{\partial f_x}{\partial x} + \mu \frac{\partial f_z}{\partial z} \right], \\ (1+\mu) \nabla^2 \sigma_z + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} &= -\frac{1+\mu}{1-\mu} \left[ (2-\mu) \frac{\partial f_z}{\partial z} + \mu \frac{\partial f_x}{\partial x} + \mu \frac{\partial f_y}{\partial y} \right], \\ (1+\mu) \nabla^2 \tau_{yz} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y \partial z} &= -(1+\mu) \left( \frac{\partial f_x}{\partial y} + \frac{\partial f_y}{\partial z} \right), \\ (1+\mu) \nabla^2 \tau_{xz} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z \partial x} &= -(1+\mu) \left( \frac{\partial f_x}{\partial z} + \frac{\partial f_z}{\partial x} \right), \\ (1+\mu) \nabla^2 \tau_{xy} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x \partial y} &= -(1+\mu) \left( \frac{\partial f_y}{\partial x} + \frac{\partial f_x}{\partial y} \right). \end{aligned} \right\} \quad (8-12)$$

在体力为零或为常量的情况下,方程(8-12)简化为贝尔特拉米所导出相容方程,称为贝尔特拉米相容方程:

$$\left. \begin{aligned} (1+\mu) \nabla^2 \sigma_x + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} &= 0, \\ (1+\mu) \nabla^2 \sigma_y + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y^2} &= 0, \\ (1+\mu) \nabla^2 \sigma_z + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} &= 0, \\ (1+\mu) \nabla^2 \tau_{yz} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y \partial z} &= 0, \\ (1+\mu) \nabla^2 \tau_{xz} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z \partial x} &= 0, \\ (1+\mu) \nabla^2 \tau_{xy} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x \partial y} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (8-13)$$

按应力求解空间问题时,须要使得6个应力分量在弹性体区域内满足平衡微分方程(7-1),满足相容方程(8-12)或者(8-13),并在边界上满足应力边界条件(7-5)。

由于位移边界条件难以用力分量及其导数来表示,因此,位移边界问题和混合边界问题一般都不能按应力求解而得出精确的函数式解答。

此外,按应力求解多连体问题时,仍然应考虑位移的单值条件。

## §8-5 等截面直杆的扭转

本节研究等截面直杆的扭转。设有等截面直杆,体力可以不计,在两端平面

内受有转向相反的两个力偶,每个力偶的矩为  $M$ ,图 8-4a。取杆的上端平面为  $xy$  面, $z$  轴铅直向下。

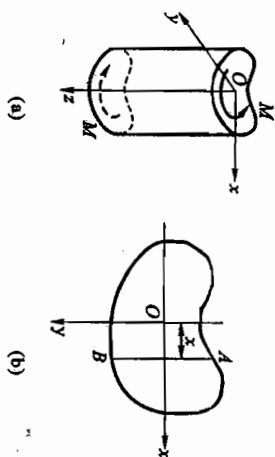


图 8-4

应用按应力求解空间问题的基本微分方程,并采用半逆解法求解。首先,依照材料力学对于圆截面杆的解答,这里也假设:除了横截面上的切应力以外,其他的应力分量都等于零,即

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = \tau_{yz} = 0. \quad (8-14)$$

代入平衡微分方程(7-1),并注意在这里体力  $f_x = f_y = f_z = 0$ ,即得

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} = 0. \quad (a)$$

由前两个方程可见, $\tau_{xz}$  和  $\tau_{xy}$  应当只是  $x$  和  $y$  的函数,不随  $z$  而变。第三个方程可以写成

$$\frac{\partial}{\partial x}(\tau_{xz}) = \frac{\partial}{\partial y}(-\tau_{yx}).$$

根据微分方程理论,一定存在一个函数  $\Phi(x, y)$ ,使得

$$\tau_{xz} = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad -\tau_{yx} = \frac{\partial \Phi}{\partial x}.$$

由此得出用应力函数  $\Phi$  表明应力分量的表达式

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad \tau_{yx} = \tau_{xy} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}. \quad (8-15)$$

将式(8-14)代入相容方程(8-13),可见其中的前三式及最后一式总能满足,而其余二式成为

$$\nabla^2 \tau_{yx} = 0, \quad \nabla^2 \tau_{xz} = 0.$$

将式(8-15)代入,得

$$\frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \Phi = 0, \quad \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 \Phi = 0.$$

这就是说, $\nabla^2 \Phi$  应当是常量,即

其中  $C$  为待定的常数。  $\nabla^2 \Phi = C, \quad (8-16)$

现在来考虑边界条件。在杆的侧面,  $n = 0$ , 面力  $\bar{f}_x = \bar{f}_y = \bar{f}_z = 0$ , 可见应力边界条件(7-5)中的前三式总能满足,而第三式成为

$$l(\tau_{xx})_s + m(\tau_{yz})_s = 0,$$

或将表达式(8-15)代入而得

$$l\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)_s - m\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)_s = 0.$$

因为在边界上有  $l = \frac{dy}{ds}, m = -\frac{dx}{ds}$ , (见 §5-2, 图 5-2) 所以由上式得出

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)_s \frac{dy}{ds} + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)_s \frac{dx}{ds} = \frac{d\Phi}{ds} = 0.$$

这就是说,在杆的侧面上(在横截面的边界线上),应力函数  $\Phi$  所取的边界值  $\Phi$ , 应当是常量。

由式(8-15)可见,当应力函数  $\Phi$  增加或减少一个常数时,应力分量并不受影响。因此,在单连截面的情况下,即实心杆的情况下,为了简便,应力函数  $\Phi$  的边界值可以取为零,即

$$\Phi_s = 0. \quad (8-17)$$

在多连截面(空心杆)的情况下,虽然应力函数  $\Phi$  在每一边界上都是常数,但各个常数一般并不相同,因此,只能把其中一个边界上的  $\Phi$ , 取为零。

在杆的任一端,例如  $z = 0$  的上端,  $l = m = 0$ , 而  $n = -1$ , 应力边界条件(7-5)中的第三式总能满足,而前二式成为

$$-(\tau_{xz})_{z=0} = \bar{f}_x, \quad -(\tau_{xy})_{z=0} = \bar{f}_y. \quad (b)$$

由于  $z = 0$  的边界面上的面力分量  $\bar{f}_x, \bar{f}_y$  并不知道,只知道其主矢量为 0 而主矩为扭矩  $M$ , 因此,式(b)的应力边界条件无法精确满足。由于  $z = 0$  的是次要边界,可应用圣维南原理,将式(b)的边界条件改用主矢量、主矩的条件来代替,即

$$-\iint_A (\tau_{xz})_{z=0} dx dy = \iint_A \bar{f}_x dx dy = 0, \quad (c)$$

$$-\iint_A (\tau_{xy})_{z=0} dx dy = \iint_A \bar{f}_y dx dy = 0, \quad (d)$$

$$-\iint_A (y\tau_{xz} - x\tau_{xy})_{z=0} dx dy = \iint_A (y\bar{f}_x - x\bar{f}_y) dx dy = M, \quad (e)$$

其中  $A$  为上端面的面积。显然,在等截面直杆中,式(c),(d),(e)在  $z$  为任意值的横截面上都应当满足。

根据式(8-15),式(c)左边的积分式可以写成

$$-\iint_A \tau_{xz} dx dy = -\iint_A \frac{\partial \Phi}{\partial y} dx dy$$

$$= -\int dx \int \frac{\partial \Phi}{\partial y} dy = -\int (\Phi_B - \Phi_A) dx,$$

其中  $\Phi_B$  及  $\Phi_A$  是截面边界上 B 点及 A 点的  $\Phi$  值, 图 8-4b, 应当等于零, 可见式 (c) 是满足的。同样可见式 (d) 也是满足的。

根据式 (8-15), 式 (e) 左边的积分式可以写成

$$-\iint_A (y\tau_{xz} - x\tau_{xy}) dx dy$$

$$= -\iint_A \left( y \frac{\partial \Phi}{\partial y} + x \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) dx dy = -\int dx \int y \frac{\partial \Phi}{\partial y} dy - \int dy \int x \frac{\partial \Phi}{\partial x} dx.$$

进行分部积分, 可见

$$-\int dx \int y \frac{\partial \Phi}{\partial y} dy = -\int dx [(y_B \Phi_B - y_A \Phi_A) - \int \Phi dy]$$

$$= \iint_A \Phi dx dy,$$

因为  $\Phi_B = \Phi_A = 0$ 。同样可见

$$-\int dy \int x \frac{\partial \Phi}{\partial x} dx = \iint_A \Phi dx dy.$$

于是式 (e) 成为

$$2 \iint_A \Phi dx dy = M. \quad (8-18)$$

总结起来, 为了求得应力, 只需求出应力函数  $\Phi$ , 使它能满足方程 (8-16) 至 (8-18), 然后由式 (8-15) 求应力分量。

现在来导出有关位移的公式。将应力分量 (8-14) 及 (8-15) 代入物理方程 (7-12), 得

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= 0, \quad \epsilon_y = 0, \quad \epsilon_z = 0, \\ \gamma_{yz} &= -\frac{1}{G} \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad \gamma_{xz} = \frac{1}{G} \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = 0. \\ \frac{\partial u}{\partial x} &= 0, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} &= -\frac{1}{G} \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{1}{G} \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \\ \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (f)$$

再将这些表达式代入几何方程 (7-8), 得

$$u = u_0 + \omega_y z - \omega_z y - K y z,$$

$$v = v_0 + \omega_z x - \omega_x z + K x z,$$

其中的积分常数  $u_0, v_0, \omega_x, \omega_y, \omega_z$  和以前一样也代表刚体位移,  $K$  也是积分常数。如果不计刚体位移, 只保留与形变有关的位移, 则

$$u = -K y z, \quad v = K x z. \quad (8-19)$$

用圆柱坐标表示, 就是

$$u_r = 0, \quad u_\theta = K \rho z.$$

可见每个横截面在  $xy$  面上的投影不改变形状, 而只是转动一个角度  $\alpha = K z$ 。由此又可见, 杆的单位长度内的扭角是  $\frac{d\alpha}{dz} = K$ 。

将式 (8-19) 代入式 (f) 中第五式及第四式, 得

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{1}{G} \frac{\partial \Phi}{\partial y} + K y, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = -\frac{1}{G} \frac{\partial \Phi}{\partial x} - K x, \quad (8-20)$$

可以用来求得位移分量  $w$ 。将上列二式分别对  $y$  及  $x$  求导, 然后相减, 移项以后即得

$$\nabla^2 \Phi = -2GK. \quad (8-21)$$

于是可见, 方程 (8-16) 中常数  $C$  具有物理意义, 它可以表示为

$$C = -2GK. \quad (8-22)$$

## § 8-6 扭转问题的薄膜比拟

普朗特指出, 薄膜在均匀压力下的垂度, 与等截面直杆扭转问题中的应力函数, 在数学上是相似的。用薄膜来比拟扭杆, 有助于寻求扭转问题的解答, 这称为薄膜比拟。

设有一块均匀薄膜, 张在一个水平边界上, 图 8-5, 这水平边界的形状与某一扭杆的横截面边界形状相同。当薄膜承受微小的气体压力时, 薄膜的各点将发生微小的垂度。以边界所在的水平面为  $xy$  面, 命薄膜的垂度为  $z$ 。由于薄膜的柔顺性, 可以假定它不承受弯矩、扭矩、剪力和压力, 而只承受均匀的拉力  $F_\tau$  (好像液膜的表面张力)。

从薄膜取一个微小的单元  $abcd$ , 它在  $xy$  面上的投影是一个矩形, 而矩形的边长是  $dx$  及  $dy$ 。在  $ab$  边上的拉力是  $F_\tau dy$  ( $F_\tau$  是薄膜每单位宽度上的拉力), 它在  $z$  轴上的投影是  $-F_\tau dy \frac{\partial z}{\partial x}$ ; 在  $cd$  边上的拉力也是  $F_\tau dy$ , 但它在  $z$  轴上的投影是  $F_\tau dy \frac{\partial z}{\partial x} \left( z + \frac{\partial z}{\partial x} dx \right)$ 。在  $ad$  边上的拉力是  $F_\tau dx$ , 它在  $z$  轴上的投

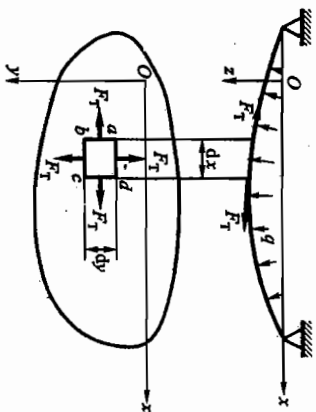


图 8-5

影是  $-F_T dx \frac{\partial z}{\partial y}$ ; 在  $bc$  边上的拉力也是  $F_T dx$ , 但它在  $z$  轴上的投影是  $F_T dx \cdot \frac{\partial}{\partial y} \left( z + \frac{\partial z}{\partial y} dy \right)$ 。单元  $abcd$  所受的压力是  $q dx dy$ 。于是由平衡条件  $\sum F_z = 0$  得

$$-F_T dy \frac{\partial z}{\partial x} + F_T dy \frac{\partial}{\partial x} \left( z + \frac{\partial z}{\partial y} dy \right) - F_T dx \frac{\partial z}{\partial y} + F_T dx \frac{\partial}{\partial y} \left( z + \frac{\partial z}{\partial y} dy \right) + q dx dy = 0。$$

简化以后, 除以  $dx dy$ , 得

$$F_T \left( \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right) + q = 0,$$

即

$$\nabla^2 z = -\frac{q}{F_T}。 \quad (8-23)$$

此外, 薄膜在边界上的垂度显然等于零, 即

$$z_r = 0。 \quad (8-24)$$

将薄膜垂度  $z$  的微分方程(8-23)与扭杆应力函数  $\Phi$  的微分方程(8-21)对比, 并将  $z$  的边界条件(8-24)与扭杆应力函数  $\Phi$  的边界条件(8-17)对比, 显然可见, 如果使薄膜的  $q/F_T$  相当于扭杆的  $2GK$ , 薄膜的垂度  $z$  就相当于扭杆的应力函数  $\Phi$ 。

因为扭杆横截面上的扭矩是

$$M = 2 \iint_A \Phi dx dy,$$

而薄膜与边界平面( $xy$  面)之间的体积的2倍是

$$2V = 2 \iint_A z dx dy,$$

可见, 为了使得薄膜的垂度  $z$  相当于扭杆的应力函数  $\Phi$ , 也可以使薄膜与边界平面之间的体积的2倍相当于扭矩。

在扭杆的横截面上, 沿  $x$  方向的切应力为

$$\tau_{xz} = \frac{\partial \Phi}{\partial y}。$$

另一方面, 薄膜沿  $y$  方向的斜率为

$$i_y = \frac{\partial z}{\partial y}。$$

于是可见, 扭杆横截面上沿  $x$  方向的切应力相当于薄膜沿  $y$  方向的斜率。但是,  $x$  轴和  $y$  轴可以取在任意两个互相垂直的方向, 所以又由此可见, 在扭杆横截面上某一点的、沿任一方向的切应力, 就等于薄膜在对应点的、沿垂直方向的斜率。

为了决定扭杆横截面上的最大切应力, 只须求出对应薄膜的最大斜率。但须注意, 虽然最大切应力的所在点是和最大斜率的所在点相对应, 但是, 最大切应力的方向是和最大斜率的方向互相垂直的。

## § 8-7 椭圆截面杆的扭转

设有等截面直杆, 它的横截面具有一个椭圆边界, 椭圆的半轴是  $a$  和  $b$ , 图 8-6。

因为椭圆的方程可以写成

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0, \quad (a)$$

而应力函数  $\Phi$  在横截面的边界上应当等于零, 所以, 我们假设应力函数

$$\Phi = m \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right), \quad (b)$$

其中  $m$  是一个常数, 然后来考察, 是否可以满足一切条件。

将式(b)代入微分方程(8-16), 得

$$\frac{2m}{a^2} + \frac{2m}{b^2} = C。$$

可见, 取

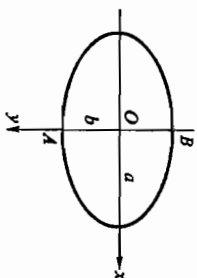


图 8-6

$$m = \frac{2}{a^2 + b^2} C = \frac{a^2 b^2}{2(a^2 + b^2)} C,$$

可以满足基本微分方程(8-16), 而式(b)应取为

$$\Phi = \frac{a^2 b^2}{2(a^2 + b^2)} C \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right). \quad (c)$$

现在由方程(8-18)来求出常数  $C$ 。将式(c)代入式(8-18), 得

$$\frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} C \left( \frac{1}{a^2} \iint_A x^2 dx dy + \frac{1}{b^2} \iint_A y^2 dx dy - \iint_A dx dy \right) = M, \quad (d)$$

其中  $A$  为椭圆截面的面积。由材料力学已知

$$\iint_A x^2 dx dy = I_y = \frac{\pi a^3 b}{4}, \quad \iint_A y^2 dx dy = I_x = \frac{\pi a b^3}{4},$$

$$\iint_A dx dy = \pi a b.$$

代入式(d), 即得

$$C = -\frac{2(a^2 + b^2)M}{\pi a^3 b^3}. \quad (e)$$

再代回式(c), 得确定的应力函数

$$\Phi = -\frac{M}{\pi a b} \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right). \quad (f)$$

这个应力函数已经满足了所有一切条件。

将应力函数的表达式(f)代入式(8-15), 得应力分量

$$\tau_{xz} = -\frac{2M}{\pi a b^3} y, \quad \tau_{xy} = \frac{2M}{\pi a^3 b} x. \quad (8-25)$$

横截面上任意一点的合切应力是

$$\tau = (\tau_{xz}^2 + \tau_{xy}^2)^{1/2} = \frac{2M}{\pi a b} \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right)^{1/2}. \quad (8-26)$$

假想有一薄膜张在如图 8-6 所示的椭圆边界上, 并受有气体压力, 若  $a \geq b$ , 则显然可见, 薄膜的最大斜率将发生在  $A$  点与  $B$  点, 而方向垂直于边界。根据薄膜比拟, 扭杆横截面上最大的切应力也将发生在  $A$  点与  $B$  点, 而方向平行于边界。将  $A$  点或  $B$  点的坐标  $(0, \pm b)$  代入式(8-26), 得出这个最大切应力

$$\tau_{\max} = \tau_A = \tau_B = \frac{2M}{\pi a b^2}. \quad (8-27)$$

当  $a = b$  时(圆截面杆), 应力的解答与材料力学中完全相同。

现在来求形变和位移。由式(8-22)及式(e)得转角

$$K = -\frac{C}{2G} = \frac{(a^2 + b^2)M}{\pi a^3 b^3 G}. \quad (8-28)$$

于是由式(8-19)得

$$u = -\frac{(a^2 + b^2)M}{\pi a^3 b^3 G} yz, \quad v = \frac{(a^2 + b^2)M}{\pi a^3 b^3 G} xz. \quad (8-29)$$

再将式(f)及式(8-28)代入式(8-20), 得

$$\frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{(a^2 - b^2)M}{\pi a^3 b^3 G} y, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = -\frac{(a^2 - b^2)M}{\pi a^3 b^3 G} x.$$

注意  $w$  只是  $x$  和  $y$  的函数, 对上列二式进行积分, 得

$$w = -\frac{(a^2 - b^2)M}{\pi a^3 b^3 G} xy + f_1(y),$$

$$w = -\frac{(a^2 - b^2)M}{\pi a^3 b^3 G} xy + f_2(x).$$

由此可见  $f_1(y)$  及  $f_2(x)$  应等于同一常量  $w_0$ , 而  $w_0$  就是  $z$  方向的刚体平移。不计这个刚体平移, 即由上式得

$$w = -\frac{a^2 - b^2}{\pi a^3 b^3 G} Mxy. \quad (8-30)$$

这个公式表明: 扭杆的横截面并不保持为平面, 而将翘成曲面。曲面的等高线在  $xy$  面上的投影是双曲线, 而这些双曲线的渐近线是  $x$  轴及  $y$  轴。只有当  $a = b$  时(圆截面杆), 才有  $w = 0$ , 横截面才保持为平面。

## §8-8 矩形截面杆的扭转

现在来分析矩形截面杆的扭转, 矩形的边长为  $a$  及  $b$ , 如图 8-7 所示。

首先, 假定矩形是很狭的, 即  $a \gg b$ 。在这一情况下, 由薄膜比拟可以推断, 应力函数  $\Phi$  在绝大部分横截面上几乎与  $x$  无关, 因为对应的薄膜几乎不受短边约束的影响, 近似于柱面。于是可以近似地取  $\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0$ ,  $\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{d\Phi}{dy}$ , 而式(8-16)成为

$$\frac{d^2 \Phi}{dy^2} = C.$$

进行积分, 并注意边界条件  $(\Phi)_{y=\pm b/2} = 0$ , 即得

$$\Phi = \frac{C}{2} \left( y^2 - \frac{b^2}{4} \right). \quad (a)$$

为了求出常数  $C$ , 将式(a)代入式(8-18), 得

$$2 \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} \frac{C}{2} \left( y^2 - \frac{b^2}{4} \right) dx dy = M.$$

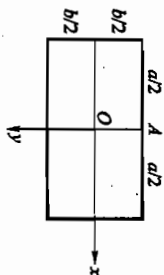


图 8-7

积分以后,得  $-\frac{ab^3}{6}C = M$ , 从而得

$$C = -\frac{6M}{ab^3} \quad (b)$$

于是由式(a)得确定的应力函数

$$\Phi = \frac{3M}{ab^3} \left( \frac{b^2}{4} - y^2 \right) \quad (c)$$

将式(c)代入式(8-15),得应力分量

$$\tau_{xz} = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{6M}{ab^3}y, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0 \quad (8-31)$$

由薄膜比拟可以推断,最大切应力发生在矩形截面的长边上,例如 A 点  $(y = -\frac{b}{2})$ , 其大小为

$$\tau_{\max} = (\tau_{xz})_{y=-b/2} = \frac{3M}{ab^2} \quad (8-32)$$

将式(b)代入式(8-22),得扭转角

$$K = -\frac{C}{2G} = \frac{3M}{ab^3G} \quad (8-33)$$

对于任意矩形杆(横截面的边长比值  $a/b$  为任意数值),通过进一步的分析,可见式(8-32)及(8-33)须修正成为

$$\tau_{\max} = \frac{M}{ab^2\beta}, \quad (8-34)$$

$$K = \frac{M}{ab^3G\beta_1}, \quad (8-35)$$

其中的因子  $\beta$  及  $\beta_1$  只与比值  $a/b$  有关,数值如下表所示。

$a/b$	$\beta$	$\beta_1$	$a/b$	$\beta$	$\beta_1$
1.0	0.208	0.141	3.0	0.267	0.263
1.2	0.219	0.166	4.0	0.282	0.281
1.5	0.230	0.196	5.0	0.291	0.291
2.0	0.246	0.229	10.0	0.312	0.312
2.5	0.258	0.249	很大	0.333	0.333

由上表可见,对于很狭的矩形横截面的扭杆( $a/b$  很大), $\beta$  及  $\beta_1$  趋于  $1/3$ , 式(8-34)及(8-35)分别简化为式(8-32)及(8-33)。

很多薄壁杆的横截面是由等宽度的狭矩形组成的。这些狭矩形可能是直的或是弯的,图 8-8。

从薄膜可以想象,如果一个直的狭矩形和一个弯的狭矩形具有相同的长度

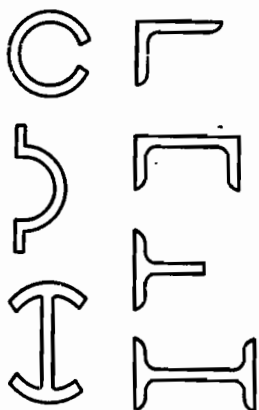


图 8-8

$a$  和宽度  $b$ , 则当这两个狭矩形上的薄膜具有相同的张力  $F_\tau$  并受相同的压力  $q$  时(这时它们的  $q/F_\tau$  相同), 两个薄膜的体积  $V$  和斜率  $i$  将没有多大的差别。由此可推断, 如果有两个狭矩形截面的扭杆, 它们的扭角  $K$  相同, 切变模量  $G$  也相同(因而它们的  $2GK$  相同), 则两个扭杆的扭矩  $M$  及切应力  $\tau$  也就没有多大的差别。因此, 一个弯的狭矩形截面可以用一个同宽同长的直的狭矩形截面来代替, 而不引起多大的误差。

用  $a_i$  及  $b_i$  分别代表扭杆横截面的第  $i$  个狭矩形的长度及宽度,  $M_i$  代表该矩形上承受的扭矩(是整个横截面上的扭矩  $M$  的一部分),  $\tau_i$  代表该矩形长边中点附近的切应力,  $K$  代表该扭杆的扭角(组成扭杆横截面的各部分狭矩形, 具有相同的扭角  $K$ )。根据式(8-32)及(8-33), 我们有

$$\tau_i = \frac{3M_i}{a_i b_i^2}, \quad (d)$$

$$K = \frac{3M_i}{a_i b_i^3 G} \quad (e)$$

由式(e)得

$$M_i = \frac{GK a_i b_i^3}{3}, \quad (f)$$

所以扭杆的整个横截面上扭矩

$$M = \sum M_i = \frac{GK}{3} \sum a_i b_i^3 \quad (g)$$

由式(f)及式(g)消去  $K$ , 得  $M_i = \frac{a_i b_i^3}{\sum a_i b_i^3} M$ 。代入式(d)及式(e), 得

$$\tau_i = \frac{3M b_i}{\sum a_i b_i^3}, \quad (8-36)$$

$$K = \frac{3M}{G \sum a_i b_i^3} \quad (8-37)$$



这些公式是近似的,因为我们应用了狭矩形的近似公式,而且没有考虑圆角的影响和两个矩形连接处的局部影响。

## 习 题

8-1 设有任意形状的等截面杆,密度为  $\rho$ , 上端悬挂, 下端自由, 如图 8-9 所示。试考察应力分量  $\sigma_x = 0, \sigma_y = 0, \sigma_z = \rho g z, \tau_{yz} = 0, \tau_{zx} = 0, \tau_{xy} = 0$  是否能满足所有一切条件。

提示: 应校核按应力求解空间问题的条件。

8-2 设有任意形状的空间弹性体, 在全部边界上(包括在孔洞边界上)受有均布压力  $q$ , 试证应力分量

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -q, \quad \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$$

能满足一切条件, 因而就是正确的解答。

提示: 应校核按应力求解空间问题的条件, 其中须考虑一般的应力边界条件(7-5)。对于多连体, 还应考虑位移单值条件。

8-3 试由式(8-5)的侧压力系数分析, 当  $\mu$  接近于 0 或  $\frac{1}{2}$  时, 此弹性体分别接近于什么样的物体?

8-4 当体力不计, 试证体应变为调和函数, 位移分量和应力分量为重调和函数, 即它们满足下列方程:

$$\nabla^2 \theta = 0, \quad \nabla^4(u, v, w) = 0, \\ \nabla^4(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}) = 0.$$

提示: 应用式(8-2)和式(8-12)。

8-5 半空间体在边界平面的一个圆面积上受有均布压力  $q$ 。设圆面积的半径为  $a$ , 试求圆心下方距边界为  $h$  处的位移。

提示: 可考虑微分集中力  $dF = q2\pi\rho d\rho$  作用下的位移并进行积分。

$$\text{答案: } \frac{(1+\mu)q}{E} \left[ \frac{2(1-\mu)a^2 + (1-2\mu)h^2}{\sqrt{a^2 + h^2}} - (1-2\mu)h \right].$$

8-6 半空间体在边界平面的一个矩形面积上受均布压力  $q$ 。设矩形面积的边长为  $a$  及  $b$ , 试求矩形中心及四角处的沉降。

$$\text{答案: } \frac{2(1-\mu^2)q}{\pi E} \left( b \operatorname{arsinh} \frac{a}{b} + a \operatorname{arsinh} \frac{b}{a} \right),$$

$$\frac{(1-\mu^2)q}{\pi E} \left( b \operatorname{arsinh} \frac{a}{b} + a \operatorname{arsinh} \frac{b}{a} \right).$$

8-7 扭杆的横截面为等边三角形  $OAB$ , 其高度为  $a$ , 图 8-10, 取坐标轴如图所示, 则  $AB, OA, OB$  三边的方程分别为  $x-a=0, x-\sqrt{3}y=0, x+\sqrt{3}y=0$ 。试证应力函数

$$\Phi = m(x-a)(x-\sqrt{3}y)(x+\sqrt{3}y)$$

能满足一切条件, 并求出最大切应力及扭角。

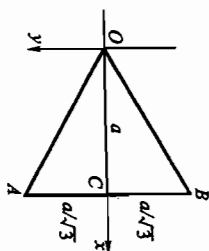


图 8-10

$$\text{答案: } |\tau_{\max}| = \frac{15\sqrt{3}M}{2a^3}, \quad K = \frac{15\sqrt{3}M}{Ga^4}.$$

8-8 半径为  $R$  的圆截面扭杆, 有半径为  $r$  的圆弧形槽, 图 8-11。取坐标轴如图所示, 则圆截面边界的方程为  $x^2 + y^2 - 2Rz = 0$ , 圆弧形槽的方程为  $x^2 + y^2 - r^2 = 0$ 。试证应力函数

$$\Phi = -GK \frac{(x^2 + y^2 - r^2)(x^2 + y^2 - 2Rz)}{2(x^2 + y^2)} \\ = -\frac{GK}{2} \left[ x^2 + y^2 - r^2 - \frac{2Rz(x^2 + y^2 - r^2)}{x^2 + y^2} \right]$$

能满足式(8-17)及(8-21)。试求最大切应力和边界上离圆弧形槽较远处(例如  $B$  点)的应力。设圆弧形槽很小( $r$  远小于  $R$ ), 试求槽边的应力集中因子  $f$ 。

$$\text{答案: } |\tau_{\max}| = GK(2R-r), \quad \tau_B = GK \left( R - \frac{r^2}{4R} \right), \quad f = 2.$$

8-9 设有一边长为  $a$  的正方形截面杆, 与一面积相同的圆截面杆, 受有相同的扭矩  $M$ , 试比较两者的最大切应力和单位长度的扭角。

答案: 正方形截面和等面积的圆形截面的最大切应力之比为 1.3562, 单位长度的扭角之比为 1.1288。

8-10 设有闭口薄壁杆, 杆壁具有均匀厚度  $\delta$ , 杆壁中线的长度为  $s$ , 而中线包围的面积为  $A$ 。另有一开口薄壁杆, 是由此闭口薄壁杆切开而成。设两杆受有相同的扭矩  $M$ , 试求两杆的最大切应力之比和单位长度的扭角之比。

提示: 设闭口薄壁杆截面的外边界上  $(\Phi)_1 = 0$ , 内边界上  $(\Phi)_2 = h$ , 内边界内相当于一块无重量的水平钢板。由数学比拟, 扭矩  $M$  相当于  $2V = 2 \iint_A z dx dy$ , 即  $M = 2hA$ , 可求出  $h$ 。再由无重钢板的平衡条件  $F_T \cdot \frac{h}{\delta} s = qA$ , 可求出压力  $q$  与薄壁张力  $F_T$  的比值  $q/F_T$ , 并由此得出  $2GK = q/F_T$ 。

$$\text{答案: 闭口薄壁杆 } \tau_1 = M/2A\delta, \quad k_1 = M\delta/4GA^2\delta; \\ \text{开口薄壁杆 } \tau_2 = 3M/\delta^3, \quad k_2 = 3M/G\delta^3; \\ \text{二者之比 } \tau_1/\tau_2 = \delta^3/6A, \quad k_1/k_2 = \delta^3/12A^2.$$

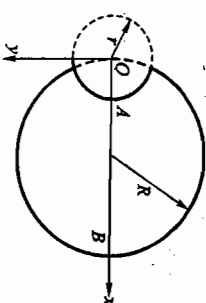


图 8-11

## 第九章 薄板弯曲问题

## §9-1 有关概念及计算假定

在弹性力学里,两个平行面和垂直于这两个平行面的柱面或棱柱面所围成的物体,称为平板,或简称为板,图9-1。这两个平行面称为板面,而这个柱面或棱柱面称为侧面或板边。两个板面之间的距离 $\delta$ 称为板的厚度,而平分厚度 $\delta$ 的平面称为板的中间平面,或简称为中面。如果板的厚度 $\delta$ 远小于中面的最小尺寸 $b$ ,这个板就称为薄板,否则就称为厚板。

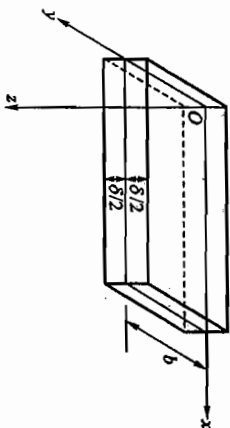


图 9-1

对于薄板的弯曲问题,已经引用一些计算假定而建立了一套完整的理论,可以用来计算工程上的问题。对于厚板,虽然也有这样或那样的计算方案被提出,但还不便应用于工程实际问题。

当薄板受有一般荷载时,总可以把每个荷载分解为两个分荷载,一个是平行于中面的所谓纵向荷载,另一个是垂直于中面的所谓横向荷载。对于纵向荷载,可以认为它们沿薄板厚度均匀分布,因而它们所引起的应力、形变和位移,可以按平面应力问题进行计算,如第二章至第六章所述。横向荷载将使薄板弯曲,它们所引起的应力、形变和位移,可按薄板弯曲问题进行计算。

当薄板弯曲时,中面所弯成的曲面,称为薄板弹性曲面,而中面内各点在垂直于中面方向的位移,称为挠度。

本章中只讲述薄板的小挠度弯曲理论,也就是只讨论这样的薄板:它虽然很薄,但仍然具有相当的弯曲刚度,因而它的挠度远小于它的厚度(因此,位移和形变是微小的基本假定仍然符合)。如果薄板的弯曲刚度较小,以致挠度与厚度属

于同阶大小,则须另行建立所谓大挠度弯曲理论。如果薄板的弯曲刚度很小,以致挠度远大于厚度,则薄板成为薄膜。

薄板弯曲问题属于空间问题。为了建立薄板的小挠度弯曲理论,除了引用弹性力学的5个基本假定外,还补充提出了3个计算假定,用来简化空间问题的基本方程(这些计算假定,已被大量的实验证实是合理的)。取薄板的中面为 $xy$ 面,图9-1,薄板的计算假定可以陈述如下:

(1) 垂直于中面方向的线应变,即 $\epsilon_z$ ,可以不计。取 $\epsilon_z=0$ ,则由几何方程(7-8)中的第三式得 $\frac{\partial w}{\partial z}=0$ ,从而得

$$w = w(x, y)。$$

这就是说,横向位移 $w$ 只是 $x, y$ 的函数,不随 $z$ 而变。因此,在中面的任一横法线上各点都具有相同的横向位移,也就等于挠度。

(2) 应力分量 $\tau_{xz}, \tau_{yz}$ 和 $\sigma_z$ 远小于其余3个应力分量,因而是次要的,它们所引起的形变可以不计(注意:这3个次要应力分量本身都是维持平衡所必需的,不能不计)。

这是因为,薄板弯曲问题与梁的弯曲问题(见§3-4)相似,由各应力分量的数量级大小可见,弯应力 $\sigma_x, \sigma_y$ 和扭应力 $\tau_{xy}$ 为主要应力,横向的切应力 $\tau_{xz}, \tau_{yz}$ 为次要应力,而挤压应力 $\sigma_z$ 为更次要应力。因此,上述假定中认为 $\tau_{xz}, \tau_{yz}$ 和 $\sigma_z$ 是次要的,它们引起的形变可以不计。

因为不计 $\tau_{xz}$ 及 $\tau_{yz}$ 所引起的形变,所以有

$$\gamma_{xz}=0, \quad \gamma_{yz}=0。$$

于是由几何方程(7-8)的第四式及第五式得

$$\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0,$$

从而得

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial w}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{\partial w}{\partial y}。 \quad (9-1)$$

由于 $\epsilon_z=0, \gamma_{xz}=0, \gamma_{yz}=0$ ,可见中面的法线在薄板弯曲时保持不伸缩,并且成为弹性曲面的法线。

还应注意,在上述计算假定中虽然采用了 $\epsilon_z=0, \gamma_{xz}=0, \gamma_{yz}=0$ ,但在以后考虑平衡条件时,仍然必须计入3个次要的应力分量 $\tau_{xz}, \tau_{yz}$ 和 $\sigma_z$ 。因此,在薄板的小挠度弯曲理论中,放弃了关于 $\epsilon_z, \gamma_{xz}$ 和 $\gamma_{yz}$ 的物理方程,即式(7-12)中的第三、第四和第五方程。

因为不计 $\sigma_z$ 所引起的形变,所以薄板的物理方程成为

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{1}{E}(\sigma_x - \mu\sigma_y), \\ \epsilon_y &= \frac{1}{E}(\sigma_y - \mu\sigma_x), \\ \gamma_{xy} &= \frac{2(1+\mu)}{E}\tau_{xy}. \end{aligned} \right\} \quad (9-2)$$

这就是说,薄板小挠度弯曲问题中的物理方程和薄板平面应力问题中的物理方程是相同的(以后可见,这两种问题中的应力分量和形变分量沿板厚度方向的分布是不同的)。

(3) 薄板中面内的各点都没有平行于中面的位移,即

$$(u)_{z=0} = 0, \quad (v)_{z=0} = 0. \quad (9-3)$$

因为  $\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$ ,  $\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}$ ,  $\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$ , 所以由上式得出中面内的形变分量均为零,即

$$(\epsilon_x)_{z=0} = 0, \quad (\epsilon_y)_{z=0} = 0, \quad (\gamma_{xy})_{z=0} = 0.$$

这就是说,中面的任意一部分,虽然弯曲成为弹性曲面的一部分,但它在  $xy$  面上的投影形状却保持不变。

在材料力学里分析直梁的弯曲问题时,也采用了与上相似的计算假定,只是在这里,薄板的中面代替了直梁的轴线,薄板的弹性曲面代替了直梁的弹性曲线,薄板的双向弯曲(实际是连弯带扭)代替了直梁的单向弯曲。

## §9-2 弹性曲面的微分方程

薄板的小挠度弯曲问题是按位移求解的,只取挠度  $w = w(x, y)$  作为基本未知函数。下面根据空间问题的基本方程和边界条件,以及上述的三个计算假定,将其他未知函数——纵向位移  $u, v$ , 主要应变分量  $\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy}$ , 主要应力分量  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ , 次要应力分量  $\tau_{xz}, \tau_{yx}$  及次要应力分量  $\sigma_z$ , 分别都用挠度  $w$  来表示,并导出求解挠度的方程。

(1) 将纵向位移  $u, v$  用挠度  $w$  表示。上节中已应用计算假定和几何方程(7-8)中的第四、第五式得出式(9-1),把此式对  $z$  积分,并注意  $w$  只是  $x, y$  的函数,即得

$$\begin{aligned} v &= -\frac{\partial w}{\partial y}x + f_1(x, y), & u &= -\frac{\partial w}{\partial x}x + f_2(x, y). \\ u &= -\frac{\partial w}{\partial x}x, & v &= -\frac{\partial w}{\partial y}x. \end{aligned}$$

应用计算假定式(9-3),得  $f_1(x, y) = 0, f_2(x, y) = 0$ 。于是纵向位移表示为

(2) 将主要应变分量  $\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy}$  用  $w$  表示。把上式的  $u, v$  代入几何方程(7-8)中的第一、第二、第六式,就得到

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}x, & \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}x, \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}x. \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

(3) 将主要应力分量  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  用  $w$  表示。由薄板的物理方程(9-2)求解应力分量,得

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\mu^2}(\epsilon_x + \mu\epsilon_y), & \sigma_y &= \frac{E}{1-\mu^2}(\epsilon_y + \mu\epsilon_x), \\ \tau_{xy} &= \frac{E}{2(1+\mu)}\gamma_{xy}. \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

再把式(a)的应变分量代入上式,就得出

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{Ez}{1-\mu^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \\ \sigma_y &= -\frac{Ez}{1-\mu^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \\ \tau_{xy} &= -\frac{Ez}{1+\mu} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (9-4)$$

由于  $w$  不随  $z$  而变,可见这三个主要应力分量都和  $z$  成正比,与材料力学中梁的弯应力相似。

(4) 将次要应力分量  $\tau_{xz}, \tau_{yx}$  用  $w$  表示。由于次要应力分量  $\tau_{xz}, \tau_{yx}$  引起的形变略去不计,相应的物理方程也已放弃。为了求出  $\tau_{xz}, \tau_{yx}$ , 可以应用平衡微分方程(7-1)的前两式,并由于不存在纵向荷载,体力分量  $f_x = 0, f_y = 0$ , 由此得

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} = -\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}, \quad \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} = -\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x}.$$

把  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  的表达式(9-4)代入,得

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} &= \frac{Ez}{1-\mu^2} \left( \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right) = \frac{Ez}{1-\mu^2} \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w, \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} &= \frac{Ez}{1-\mu^2} \left( \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2} \right) = \frac{Ez}{1-\mu^2} \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 w, \end{aligned}$$

其中引用记号  $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ 。将上两式对  $z$  积分,得

$$\tau_{xz} = \frac{Ez^2}{2(1-\mu^2)} \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w + F_1(x, y),$$

$$\tau_{xy} = \frac{Ex^2}{2(1-\mu^2)} \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 w + F_2(x, y).$$

其中的待定函数  $F_1(x, y)$ ,  $F_2(x, y)$ , 可以根据薄板的上、下板面的边界条件来求出, 即

$$(\tau_{xz})_{z=\pm\frac{\delta}{2}} = 0, \quad (\tau_{xy})_{z=\pm\frac{\delta}{2}} = 0.$$

应用这两个边界条件求出  $F_1(x, y)$ ,  $F_2(x, y)$  以后, 即得  $\tau_{xz}$ ,  $\tau_{xy}$  的表达式

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xz} &= \frac{E}{2(1-\mu^2)} \left( z^2 - \frac{\delta^2}{4} \right) \frac{\partial^2}{\partial x} \nabla^2 w, \\ \tau_{xy} &= \frac{E}{2(1-\mu^2)} \left( z^2 - \frac{\delta^2}{4} \right) \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 w. \end{aligned} \right\} \quad (9-5)$$

这两个切应力沿横向为抛物线分布, 与材料力学中梁的切应力相似。

(5) 最后, 将更次要应力分量  $\sigma_z$  用  $w$  表示。应用平衡微分方程(7-1)中的第三式, 并取体力分量  $f_z = 0$ , 得

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = -\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y}. \quad (c)$$

如果体力分量  $f_z$  并不等于零, 我们可以把薄板的每单位面积内的体力 and 面力都归入到上板面的面力中去, 一并用  $q$  表示, 即

$$q = (\bar{f}_z)_{z=-\frac{\delta}{2}} - (\bar{f}_z)_{z=\frac{\delta}{2}} + \int_{-\frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}} f_z dz. \quad (d)$$

这只会对最次要的应力分量  $\sigma_z$  引起误差, 对其他的应力分量则没有影响。这样处理, 和材料力学中对梁的处理相同。

注意  $\tau_{xz} = \tau_{zx}$ ,  $\tau_{yz} = \tau_{zy}$ , 将这两个应力分量的表达式(9-5)代入式(c), 得

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = -\frac{E}{2(1-\mu^2)} \left( \frac{\delta^2}{4} - z^2 \right) \nabla^4 w.$$

对  $z$  进行积分, 得到

$$\sigma_z = \frac{E}{2(1-\mu^2)} \left( \frac{\delta^2}{4} z - \frac{z^3}{3} \right) \nabla^4 w + F_3(x, y). \quad (e)$$

其中待定函数  $F_3(x, y)$  可以由薄板的下板面的边界条件来确定, 即

$$(\sigma_z)_{z=\frac{\delta}{2}} = 0.$$

将式(e)代入, 求出  $F_3(x, y)$ , 再代回到式(e), 即得  $\sigma_z$  的表达式

$$\begin{aligned} \sigma_z &= \frac{E}{2(1-\mu^2)} \left[ \frac{\delta^2}{4} \left( z - \frac{\delta}{2} \right) - \frac{1}{3} \left( z^3 - \frac{\delta^3}{8} \right) \right] \nabla^4 w \\ &= -\frac{E\delta^3}{6(1-\mu^2)} \left( \frac{1}{2} - \frac{z}{\delta} \right)^2 \left( 1 + \frac{z}{\delta} \right) \nabla^4 w. \end{aligned} \quad (9-6)$$

现在来导出  $w$  的微分方程。由薄板的上板面的边界条件

$$(\sigma_z)_{z=\frac{\delta}{2}} = -q, \quad (f)$$

其中  $q$  是薄板每单位面积内的横向荷载, 包括横向面力及横向体力, 如式(d)所示。将  $\sigma_z$  的表达式(9-6)代入式(f), 即得

$$\frac{E\delta^3}{12(1-\mu^2)} \nabla^4 w = q, \quad (9-7)$$

或

$$D \nabla^4 w = q, \quad (9-8)$$

其中的

$$D = \frac{E\delta^3}{12(1-\mu^2)} \quad (9-9)$$

称为薄板的弯曲刚度, 它的量纲是  $L^2 MT^{-2}$ 。方程(9-8)称为薄板的弹性曲面微分方程, 或挠曲微分方程。

读者可以看出: 在上面的推导过程中, 已经考虑并完全满足了空间问题的平衡微分方程、几何方程和物理方程, 以及薄板的上、下板面的主要应力边界条件, 并得出了求解挠度  $w$  的基本微分方程。此外, 还应考虑薄板侧面(即板边)上的边界条件。由基本微分方程(9-8)并结合这些板边的边界条件, 可以求出挠度  $w$ , 然后就可以按式(9-4)至(9-6)求得应力分量。

### §9-3 薄板横截面上的内力

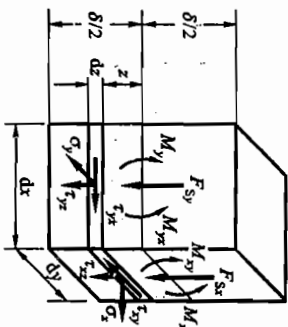
薄板横截面上的内力, 称为薄板内力, 是指薄板横截面的每单位宽度上, 由应力合成的主矢量和主矩。由于薄板是按内

力来设计的, 因此, 需要求出内力。又由于在板的侧面上, 通常很难使应力分量精确地满足应力边界条件, 但板的侧面是板的次要边界, 可应用圣维南原理, 用内力的边界条件来代替应力的边界条件。

为了求出薄板横截面上的内力, 从薄板内取出一个平行六面体, 它的三边的长度分别为  $dx$ ,  $dy$  和板的厚度  $\delta$ , 图 9-2。

在  $x$  为常量的横截面上, 作用着  $\sigma_x$ ,

图 9-2



$\tau_{xy}$  和  $\tau_{yx}$ 。因为  $\sigma_x$  及  $\tau_{xy}$  都和  $z$  成正比, 且在中面上为零, 所以它们在薄板全厚度上的主矢量和主矩都等于零, 只可能分别合成为弯矩和扭矩。

在该横截面的每单位宽度上, 应力分量  $\sigma_x$  对  $z$  中面合成为弯矩

$$M_x = \int_{-\frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}} \sigma_x dx.$$

将式(9-4)中的第一式代入,对  $z$  进行积分,得

$$\begin{aligned} M_x &= -\frac{E}{1-\mu^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \int_{-\frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}} x^2 dz \\ &= -\frac{E\delta^3}{12(1-\mu^2)} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right). \end{aligned} \quad (a)$$

与此相似,应力分量  $\tau_{xy}$  将合成为横截面内的扭矩

$$M_{xy} = \int_{-\frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}} z\tau_{xy} dz.$$

将式(9-4)中的第三式代入,对  $z$  进行积分,得

$$\begin{aligned} M_{xy} &= -\frac{E}{1+\mu} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \int_{-\frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}} z^2 dz \\ &= -\frac{E\delta^3}{12(1+\mu)} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \quad (b)$$

应力分量  $\tau_{xz}$  只可能合成为横向剪力,在每单位宽度上为

$$F_{sx} = \int_{-\frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}} \tau_{xz} dz.$$

将式(9-5)中的第一式代入,对  $z$  进行积分,得

$$\begin{aligned} F_{sx} &= \frac{E}{2(1-\mu^2)} \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w \int_{-\frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}} \left( x^2 - \frac{\delta^2}{4} \right) dz \\ &= -\frac{E\delta^3}{12(1-\mu^2)} \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w. \end{aligned} \quad (c)$$

同样,在  $y$  为常量的横截面上,每单位宽度内的  $\sigma_y$ ,  $\tau_{yx}$  和  $\tau_{yz}$  也分别合成为如下的弯矩、扭矩和横向剪力:

$$M_y = \int_{-\frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}} \sigma_y z dz = -\frac{E\delta^3}{12(1-\mu^2)} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \quad (d)$$

$$M_{yx} = \int_{-\frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}} z\tau_{yx} dz = -\frac{E\delta^3}{12(1+\mu)} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = M_{xy}, \quad (e)$$

$$F_{sy} = \int_{-\frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}} \tau_{yz} dz = -\frac{E\delta^3}{12(1-\mu^2)} \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 w. \quad (f)$$

将式(9-9)代入式(a)至式(f),薄板横截面上的内力可以简写为

$$\left. \begin{aligned} M_x &= -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), M_y = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \\ M_{xy} &= M_{yx} = -D(1-\mu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \\ F_{sx} &= -D \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w, F_{sy} = -D \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 w. \end{aligned} \right\} \quad (9-10)$$

薄板内力的正负方向的规定,是从应力的正负方向的规定得出的:正的应力合成的主矢量为正,正的应力乘以正的矩臂合成的主矩为正,反之则为负。所有薄板内力的正方向,如图9-3所示。

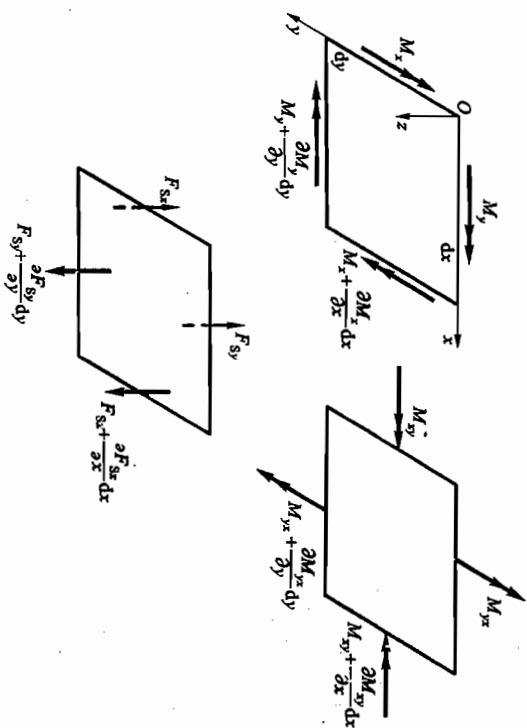


图 9-3

利用式(a)至(f),从式(9-4)及(9-5)中消去  $w$ ,并利用式(9-8)从式(9-6)中消去  $w$ ,可以得出各应力分量与弯矩、扭矩、横向剪力或荷载之间的关系如下:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{12M_x}{\delta^3} z, \sigma_y = \frac{12M_y}{\delta^3} z, \\ \tau_{xy} &= \tau_{yx} = \frac{12M_{xy}}{\delta^3} z, \\ \tau_{xz} &= \frac{6F_{sx}}{\delta^3} \left( \frac{\delta^2}{4} - z^2 \right), \tau_{yz} = \frac{6F_{sy}}{\delta^3} \left( \frac{\delta^2}{4} - z^2 \right), \\ \sigma_z &= -2q \left( \frac{1}{2} - \frac{z}{\delta} \right)^2 \left( 1 + \frac{z}{\delta} \right). \end{aligned} \right\} \quad (9-11)$$

沿着薄板的厚度,应力分量  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  的最大值发生在板面,  $\tau_{xx}$  及  $\tau_{yy}$  的最大值发生在中面,而  $\sigma_x$  的最大值发生在板的上面,各个最大值为

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_x)_{z=\frac{\delta}{2}} &= -(\sigma_x)_{z=-\frac{\delta}{2}} = \frac{6M_x}{\delta^2}, \\ (\sigma_y)_{z=\frac{\delta}{2}} &= -(\sigma_y)_{z=-\frac{\delta}{2}} = \frac{6M_y}{\delta^2}, \\ (\tau_{xy})_{z=\frac{\delta}{2}} &= -(\tau_{xy})_{z=-\frac{\delta}{2}} = \frac{6M_{xy}}{\delta^2}, \\ (\tau_{xz})_{z=0} &= \frac{3F_{Sx}}{2\delta}, \quad (\tau_{xy})_{z=0} = \frac{3F_{Sy}}{2\delta}, \\ (\sigma_x)_{z=-\frac{\delta}{2}} &= -q_0. \end{aligned} \right\} \quad (9-12)$$

注意:以上所提到的内力,都是作用在薄板每单位宽度上的内力,所以弯矩和扭矩的量纲都是  $\text{LMT}^{-2}$ ,而不是  $\text{L}^2\text{MT}^{-2}$ ;横向剪力的量纲是  $\text{MT}^{-2}$ ,而不是  $\text{LMT}^{-2}$ 。

正应力  $\sigma_x$  及  $\sigma_y$  分别与弯矩  $M_x$  及  $M_y$  成正比,因而称为弯应力;切应力  $\tau_{xy}$  与扭矩  $M_{xy}$  成正比,因而称为扭应力;切应力  $\tau_{xz}$  及  $\tau_{yx}$  分别与横向剪力  $F_{Sx}$  及  $F_{Sy}$  成正比,因而称为横向切应力;正应力  $\sigma_x$  与荷载  $q$  成正比,称为挤压应力。

上面已经说明:在薄板弯曲问题中,弯应力和扭应力在数值上最大,因而是主要的应力;横向切应力在数值上较小,是次要的应力;挤压应力在数值上更小,是更次要的应力。因此,在计算薄板的内力时,主要是计算弯矩和扭矩,横向剪力一般都不须计算。根据这个理由,在工程手册中,只给出弯矩和扭矩的计算公式或计算图表,而并不提到横向剪力。又由于目前在钢筋混凝土建筑结构的设计中,大都按照双向的弯矩来配置双向的钢筋,而并不考虑扭矩的作用,因此,在一般的工程手册中也就给不出扭矩的计算公式和计算图表。

若在中面上取出宽度为  $dx$  而长度为  $dy$  的矩形单元,并将薄板内力表示在各边上,如图 9-3 所示。读者试证:由绕  $y$  轴和  $x$  轴的力矩平衡条件,即  $\Sigma(M)_y=0$ ,  $\Sigma(M)_x=0$ ,可以得到

$$F_{Sx} = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y}, \quad F_{Sy} = \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x}. \quad (g)$$

又由力的平衡条件,  $\Sigma F_x=0$ ,可以得到

$$\frac{\partial F_{Sx}}{\partial x} + \frac{\partial F_{Sy}}{\partial y} + q = 0. \quad (h)$$

将式(g)代入式(h),得出

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + q = 0. \quad (i)$$

再将式(9-10)中的弯矩、扭矩代入式(g),便可得出横向剪力  $F_{Sx}$ ,  $F_{Sy}$  用挠度  $w$  表示的式子;将式(9-10)代入式(i),则又一次得出薄板的挠曲微分方程。

## §9-4 边界条件 扭矩的等效剪力

现在来讨论薄板板边上的边界条件。与薄板的上、下板面相比,板边是次要的边界面。因此,在板边可以应用圣维南原理,把应力边界条件替换为内力的边界条件,即横向剪力及弯矩的条件。同时,板边的位移边界条件也相应地替换为中面的挠度及转角的条件。

本节中以图 9-4 所示的矩形薄板为例,说明各种边界处的边界条件。假定该薄板的  $OA$  边是固定边,  $OC$  边是简支边,  $AB$  边和  $BC$  边是自由边。

沿着固定边  $OA$  ( $x=0$ ),薄板的挠度  $w$  等于零,弹性曲面的斜率  $\frac{\partial w}{\partial x}$  (即转角)也等于零,所以边界条件是

$$(w)_{x=0} = 0, \quad \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{x=0} = 0. \quad (9-13)$$

沿着简支边  $OC$  ( $y=0$ ),薄板的挠度  $w$  等于零,弯矩  $M_y$  也等于零,所以边界条件是

$$(w)_{y=0} = 0, \quad (M_y)_{y=0} = 0. \quad (a)$$

利用(9-10)中的第二式,条件(a)可以全部用  $w$  表示为

$$(w)_{y=0} = 0, \quad \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_{y=0} = 0. \quad (b)$$

但是,如果前一条条件得到满足,即挠度  $w$  在整个边界上都等于零,则  $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$  也在整个边界上都等于零,所以简支边  $OC$  的边界条件(b)可以简写为

$$(w)_{y=0} = 0, \quad \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_{y=0} = 0. \quad (9-14)$$

如果在这个简支边上有分布的力矩荷载  $M$  (一般是  $x$  的函数),则边界条件(a)中第二式的右边将不等于零,而等于这个力矩荷载  $M$ 。这样,(b)中的第二式及(9-14)中的第二式都不适用,但仍然可以通过表达式(9-10)把上述边界条件

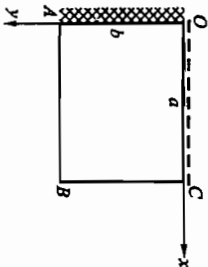


图 9-4

用  $w$  来表示。

沿着自由边,例如  $AB$  边( $y=b$ ),薄板的弯矩  $M_y$  和扭矩  $M_{yx}$  以及横向剪力  $F_{sy}$  都应等于零,因而有三个边界条件

$$(M_y)_{y=b} = 0, \quad (M_{yx})_{y=b} = 0, \quad (F_{sy})_{y=b} = 0. \quad (c)$$

但是,薄板任一边界上的扭矩都可以变换为等效的横向剪力,即扭矩的等效剪力,和原来的横向剪力合并,因而式(c)中后二式所示的两个条件可以归并为一个条件,分析如下。

假定  $AB$  边为任意边界(不一定是自由边),在其一段微小长度  $EF=dx$  上

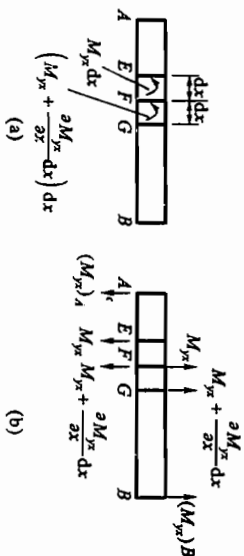


图 9-5

面,有扭矩  $M_{yx}dx$  作用着,图 9-5a。将这个扭矩  $M_{yx}dx$  变换为等效的两个力  $M_{yx}$ ,一个在  $E$  点,向下,另一个在  $F$  点,向上,图 9-5b。根据圣维南原理,这样的等效变换,只会显著影响这一边界近处的应力,而其余各处的应力不会受到显著的影响。同样,在相邻的微小长度  $FG=dx$  上面,扭矩  $(M_{yx} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial x}dx)$  也可以变换为两个力  $M_{yx} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial x}dx$ ,一个在  $F$  点,向下,另一个在  $G$  点,向上。这样,在  $F$  点的两个力合成为向下的集中力  $\frac{\partial M_{yx}}{\partial x}dx$ 。将此集中力化为  $dx$  长度上的横向分布剪力,即为  $\frac{\partial M_{yx}}{\partial x}$ 。从而边界  $AB$  上的分布扭矩就变换为等效的分布剪力  $\frac{\partial M_{yx}}{\partial x}$ 。因此,在边界  $AB$  上( $y=b$ ),总的分布剪力(也就等于分布反力)是

$$F_{sy}^i = F_{sy} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial x}.$$

此外,由图 9-5b 可见,在  $A$  点和  $B$  点,还有未被抵消的集中剪力(也就等于集中反力)

$$F_{RAB} = (M_{yx})_A, \quad F_{RBA} = (M_{yx})_B. \quad (d)$$

现在,如果  $AB$  是自由边,按照以上所述,它的边界条件(c)就可以变换成为

$$(M_y)_{y=b} = 0, \quad (F_{sy}^i)_{y=b} = \left( F_{sy} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial x} \right)_{y=b} = 0, \quad (e)$$

其中前一个条件仍然表示弯矩等于零,而后一个条件则表示总的分布剪力等于零,即分布反力等于零(但是  $F_{sy}$  和  $M_{yx}$  一般并不分别等于零)。通过式(9-10),自由边  $AB$  的边界条件(e)可以改用挠度  $w$  表示成为

$$\left\{ \begin{aligned} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_{y=b} &= 0, \\ \left[ \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2-\mu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right]_{y=b} &= 0. \end{aligned} \right. \quad (9-15)$$

如果在这个自由边上有分布的力矩荷载  $M$  和分布的横向荷载  $F_s^i$ (它们一般是  $x$  的函数),则(e)中两式的右边将不等于零,而分别等于  $M$  及  $F_s^i$ 。这时,边界条件式(9-15)将不适用,但也不准利用表达式(9-10)导出用  $w$  表示的边界条件。

同样,沿着边界  $BC(x=a)$ ,扭矩  $M_{xy}$  也可以变换为等效的分布剪力  $\frac{\partial M_{xy}}{\partial y}$ ,而总的分布剪力为

$$F_{sx}^i = F_{sx} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y}. \quad (9-16)$$

此外,在点  $C$  和点  $B$ ,还分别有集中剪力(即集中反力)

$$F_{RCB} = (M_{xy})_C, \quad F_{RBC} = (M_{xy})_B. \quad (f)$$

因此,如果  $BC$  是自由边,则边界条件也可以变换成为

$$(M_x)_{x=a} = 0, \quad (F_{sx}^i)_{x=a} = \left( F_{sx} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \right)_{x=a} = 0, \quad (g)$$

或再通过表达式(9-10)改用挠度  $w$  表示成为

$$\left\{ \begin{aligned} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{x=a} &= 0, \\ \left[ \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2-\mu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right]_{x=a} &= 0. \end{aligned} \right. \quad (9-17)$$

当然,如果这个自由边上有分布的力矩荷载  $M$  及分布的横向荷载  $F_s^i$ ,则(g)中两式的右边就不等于零,而分别等于  $M$  及  $F_s^i$ ,边界条件(9-17)就要作相应的修改。

在两边相交的一点,例如图 9-3 中的点  $B$ ,由式(d)中的第二式及(f)中的第二式可见,总的集中反力是

$F_{RB} = F_{RBA} + F_{RBC} = (M_{yz})_B + (M_{xy})_B = 2(M_{xy})_B$ ,  
或过式(9-10)中的第三式改写为

$$F_{RB} = -2D(1-\mu) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)_B \quad (9-18)$$

如果点B是自由边AB和自由边BC的交点,而在点B并没有任何支柱对薄板施以此项集中反力,则在点B还须补充以角点条件  $F_{RB} = 0$ ,亦即

$$\left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)_B = \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)_{x=a, y=b} = 0 \quad (9-19)$$

如果在点B有支柱阻止挠度发生,则上述角点条件应改为

$$(w)_B = (w)_{x=a, y=b} = 0, \quad (9-20)$$

而支柱对薄板所施的反力如式(9-18)所示。

### §9-5 四边简支矩形薄板的重三角级数解

在§9-2中已经指出,求解薄板的小挠度弯曲问题,首先要在板边的边界条件下,由弹性曲面微分方程(9-8)求出挠度  $w$ 。

对四边简支的矩形薄板,图9-6,边界条件是

$$\left. \begin{aligned} (w)_{x=0} &= 0, & \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_{x=0} &= 0, \\ (w)_{x=a} &= 0, & \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_{x=a} &= 0, \\ (w)_{y=0} &= 0, & \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{y=0} &= 0, \\ (w)_{y=b} &= 0, & \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{y=b} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

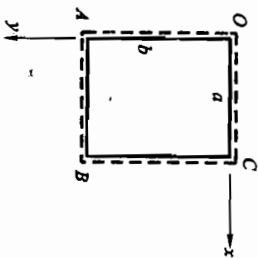


图 9-6

纳维把挠度  $w$  的表达式取为如下的重三角级数,求得了重三角级数解。

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \quad (b)$$

其中的  $m$  和  $n$  是正整数。代入式(a),可见全部边界条件都能满足。

为了求出系数  $A_{mn}$ ,将式(b)代入微分方程(9-8),得

$$\pi^4 D \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} = q. \quad (c)$$

现在,我们把上式右边的  $q = q(x, y)$  展为重三角级数:

$$q = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (d)$$

由傅里叶级数的展开公式得出

$$C_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b q \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy.$$

代回式(d),并将式(c)两边  $\sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$  的系数进行对比,即得系数

$$A_{mn} = \frac{4 \int_0^a \int_0^b q \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy}{\pi^4 ab D \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2}. \quad (e)$$

对上式中分子进行积分,求出  $A_{mn}$ ,再代入式(b),即可得出挠度  $w$  的表达式,再应用式(9-10)便可求得内力。

当薄板受均布荷载时,  $q$  成为常量  $q_0$ ,式(e)中的积分式成为

$$\begin{aligned} & \int_0^a \int_0^b q_0 \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy \\ &= q_0 \int_0^a \sin \frac{m\pi x}{a} dx \int_0^b \sin \frac{n\pi y}{b} dy \\ &= \frac{q_0 ab}{\pi^2 mn} (1 - \cos m\pi) (1 - \cos n\pi). \end{aligned}$$

于是由式(e)得到

$$A_{mn} = \frac{4q_0 (1 - \cos m\pi)(1 - \cos n\pi)}{\pi^6 D mn \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2},$$

或

$$A_{mn} = \frac{16q_0}{\pi^6 D mn \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2}.$$

$$(m=1,3,5,\dots; n=1,3,5,\dots)$$

代入式(b),即得挠度的表达式

$$w = \frac{16q_0}{\pi^6 D} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}}{mn \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2}. \quad (f)$$

由此可以用式(9-10)求得内力。

当薄板在任意一点  $(\xi, \eta)$  受集中荷载  $F$  时,可以用微分面积  $dx dy$  上的均布荷载  $\frac{F}{dx dy}$  来代替分布荷载  $q$ 。于是,式(e)中的  $q$  除了在  $(\xi, \eta)$  处的微分面积

上等于  $\frac{F}{dx dy}$  以外,在其余各处都等于零。因此,式(e)成为



$$A_m = \frac{4}{\pi^4 a b D} \frac{1}{\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2} \frac{F}{dx dy} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy$$

$$= \frac{4F}{\pi^4 a b D \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}.$$

代入式(b), 即得挠度的表达式

$$w = \frac{4F}{\pi^4 a b D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}}{\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (g)$$

由此可以用式(9-10)求得内力。

## §9-6 矩形薄板的单三角级数解

对于有两个对边被简支的矩形薄板, 可求得单三角级数解。

设图 9-7 所示的矩形薄板具有两个简支边  $x=0$  及  $x=a$ , 其余两边  $y=\pm b/2$  是任意边, 承受任意横向荷载  $q(x, y)$ 。来维把挠度的表达式取为如下的单三角级数:

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} Y_m \sin \frac{m\pi x}{a}, \quad (a)$$

其中  $Y_m$  是  $y$  的任意函数, 而  $m$  为正整数。极易看出, 级数(a)能满足  $x=0$  及  $x=a$  两边的边界条件, 即

$$(w)_{x=0}=0, \quad \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_{x=0}=0,$$

$$(w)_{x=a}=0, \quad \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_{x=a}=0.$$

因此, 只须选择函数  $Y_m$ , 使式(a)能满足弹性曲面的微分方程

$$\nabla^4 w = q/D, \quad (b)$$

并在  $y=\pm b/2$  的两边上满足边界条件。

将式(a)代入式(b), 得

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left[ \frac{d^4 Y_m}{dy^4} - 2 \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 \frac{d^2 Y_m}{dy^2} + \left( \frac{m\pi}{a} \right)^4 Y_m \right] \sin \frac{m\pi x}{a} = \frac{q}{D}. \quad (c)$$

现在, 把式(c)右边的  $q/D$  展为  $\sin \frac{m\pi x}{a}$  的级数。由傅里叶级数展开公式得

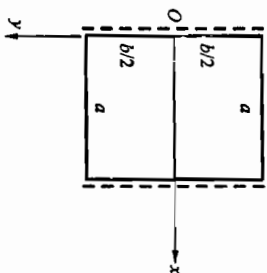


图 9-7

$\frac{q}{D} = \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \int_0^a \frac{q}{D} \sin \frac{m\pi x}{a} dx \right] \sin \frac{m\pi x}{a}$ 。与式(c)对比, 可见有

$$\frac{d^4 Y_m}{dy^4} - 2 \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 \frac{d^2 Y_m}{dy^2} + \left( \frac{m\pi}{a} \right)^4 Y_m = \frac{2}{aD} \int_0^a q \sin \frac{m\pi x}{a} dx. \quad (d)$$

这一常微分方程的解法是

$$Y_m = A_m \cosh \frac{m\pi y}{a} + B_m \frac{m\pi y}{a} \sinh \frac{m\pi y}{a} + C_m \sinh \frac{m\pi y}{a} + D_m \frac{m\pi y}{a} \cosh \frac{m\pi y}{a} + f_m(y),$$

其中  $f_m(y)$  是非齐次方程(d)的任意一个特解, 可按照式(d)右边积分以后的结果来选择; 而前四项是相应的齐次方程的通解, 系数  $A_m, B_m, C_m, D_m$  是待定的常数, 决定于  $y=\pm b/2$  两边的边界条件。将上式代入式(a), 即得挠度  $w$  的表达式

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \left[ A_m \cosh \frac{m\pi y}{a} + B_m \frac{m\pi y}{a} \sinh \frac{m\pi y}{a} + C_m \sinh \frac{m\pi y}{a} + D_m \frac{m\pi y}{a} \cosh \frac{m\pi y}{a} + f_m(y) \right] \sin \frac{m\pi x}{a}. \quad (e)$$

作为例题, 设图 9-7 中的矩形薄板是四边简支的, 受有均布荷载  $q=q_0$ 。这时, 微分方程(d)的右边成为

$$\frac{2q_0}{aD} \int_0^a \sin \frac{m\pi x}{a} dx = \frac{2q_0}{\pi D m} (1 - \cos m\pi).$$

于是微分方程(d)的特解可以取为

$$f_m(y) = \left( \frac{a}{m\pi} \right)^4 \frac{2q_0}{\pi D m} (1 - \cos m\pi) = \frac{2q_0 a^4}{\pi^5 D m^5} (1 - \cos m\pi).$$

代入式(e), 并注意由于对称, 薄板的挠度  $w$  应当是  $y$  的偶函数, 因而有  $C_m=0, D_m=0$ , 即得

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \left[ A_m \cosh \frac{m\pi y}{a} + B_m \frac{m\pi y}{a} \sinh \frac{m\pi y}{a} + \frac{2q_0 a^4}{\pi^5 D m^5} (1 - \cos m\pi) \right] \sin \frac{m\pi x}{a}. \quad (f)$$

由于  $y=\pm b/2$  的两边也是简支边, 边界条件为

$$(w)_{y=\pm b/2}=0, \quad \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_{y=\pm b/2}=0.$$

将式(f)代入上式, 得出决定  $A_m$  及  $B_m$  的联立方程

$$\left. \begin{aligned} A_m \cosh \alpha_m + B_m \alpha_m \sinh \alpha_m + \frac{4q_0 a^4}{\pi^3 D m^3} &= 0, \\ (A_m + 2B_m) \cosh \alpha_m + B_m \alpha_m \sinh \alpha_m &= 0. \end{aligned} \right\} \\ (m=1, 3, 5, \dots)$$

以及

$$\left. \begin{aligned} A_m \cosh \alpha_m + B_m \alpha_m \sinh \alpha_m &= 0, \\ (A_m + 2B_m) \cosh \alpha_m + B_m \alpha_m \sinh \alpha_m &= 0. \end{aligned} \right\} \\ (m=2, 4, 6, \dots)$$

其中  $\alpha_m = \frac{m\pi b}{2a}$ 。由此求出系数

$$A_m = -\frac{2(2 + \alpha_m \tanh \alpha_m) q_0 a^4}{\pi^3 D m^3 \cosh \alpha_m},$$

$$B_m = \frac{2q_0 a^4}{\pi^3 D m^3 \cosh \alpha_m} \quad (m=1, 3, 5, \dots)$$

以及

$$A_m = 0, \quad B_m = 0. \quad (m=2, 4, 6, \dots)$$

将求出的系数代入式(f), 得挠度  $w$  的最后表达式

$$w = \frac{4q_0 a^4}{\pi^3 D} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \left( \frac{1}{m^3} \right) \left( 1 - \frac{2 + \alpha_m \tanh \alpha_m}{2 \cosh \alpha_m} \cosh \frac{2\alpha_m y}{b} + \frac{\alpha_m}{2 \cosh \alpha_m} \frac{2y}{b} \sinh \frac{2\alpha_m y}{b} \right) \sin \frac{m\pi x}{a}, \quad (g)$$

并可以从而求得内力的表达式。

矩形薄板的重三角级数解与单三角级数解相比, 前者的方法简单方便, 后者的方法稍微复杂; 前者只适用于四边简支的矩形板, 后者可以适用于更一般的边界情况; 前者的级数收敛性较慢, 而后者的级数收敛性较快。例如, 应用重三角级数解时, 求  $w$  需取十多项, 求内力需取二三十项; 而应用单三角级数解时, 求  $w$  只需取几项, 求内力只需取十多项。

应用本节中所述的莱维解法, 可以得出四边简支的矩形薄板在受各种横向荷载时的解答, 还可以得出这种薄板在某一边界上受分布力矩荷载或发生挠度(沉降)时的解答, 以及在角点发生沉降时的解答。利用这些解答, 采用结构力学里的力法、位移法或混合法, 以四边简支的矩形薄板为基本系, 可以得出任意矩形薄板受任意横向荷载时的解答。但是, 求解时的运算是比较繁杂的。

对于在各种边界条件下承受各种横向荷载的矩形薄板, 很多专著和手册中给出了关于挠度和弯矩的表格, 可供工程设计之用。

为了节省篇幅, 对于只具有简支边和固定边而不具有自由边的矩形薄板, 表格或图线中大都只给出泊松比等于某一指定数值时的弯矩。但是, 我们极易由此求得泊松比等于任一其他数值时的弯矩, 说明如下。

薄板的弹性曲面微分方程(9-8)可以改写成为

$$\nabla^4(Dw) = q_0. \quad (h)$$

固定边及简支边的边界条件不外乎如下的形式:

$$\left. \begin{aligned} (Dw)_{x=x_1} &= 0, \quad \left( \frac{\partial}{\partial x} Dw \right)_{x=x_1} = 0, \quad \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} Dw \right)_{x=x_1} = 0, \\ (Dw)_{y=y_1} &= 0, \quad \left( \frac{\partial}{\partial y} Dw \right)_{y=y_1} = 0, \quad \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} Dw \right)_{y=y_1} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (i)$$

把  $Dw$  看做基本未知函数, 则由式(h)及式(i)可见,  $Dw$  的微分方程及边界条件中都不包含  $\mu$ 。因此,  $Dw$  的解答也不会包含  $\mu$ , 于是  $\frac{\partial^2}{\partial x^2} Dw$  及  $\frac{\partial^2}{\partial y^2} Dw$  都不随  $\mu$  而变。

现在, 根据式(9-10), 当泊松比为  $\mu$  时, 弯矩为

$$M_x = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} Dw - \mu \frac{\partial^2}{\partial y^2} Dw, \quad M_y = -\frac{\partial^2}{\partial y^2} Dw - \mu \frac{\partial^2}{\partial x^2} Dw; \quad (j)$$

当泊松比为  $\mu'$  时, 弯矩为

$$M'_x = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} Dw - \mu' \frac{\partial^2}{\partial y^2} Dw, \quad M'_y = -\frac{\partial^2}{\partial y^2} Dw - \mu' \frac{\partial^2}{\partial x^2} Dw. \quad (k)$$

由式(j)解出  $\frac{\partial^2}{\partial x^2} Dw$  及  $\frac{\partial^2}{\partial y^2} Dw$ , 然后代入式(k), 得到关系式

$$\left. \begin{aligned} M'_x &= \frac{1}{1-\mu'} [(1-\mu\mu')M_x + (\mu' - \mu)M_y], \\ M'_y &= \frac{1}{1-\mu'} [(1-\mu\mu')M_y + (\mu' - \mu)M_x]. \end{aligned} \right\} \quad (9-21)$$

于是可见, 如果已知泊松比为  $\mu$  时的弯矩  $M_x$  及  $M_y$ , 就很容易求得泊松比为  $\mu'$  时的弯矩  $M'_x$  及  $M'_y$ 。在  $\mu=0$  的情况下(即表格或图线所示的  $M_x$  及  $M_y$  是取  $\mu=0$  而算出的), 上式简化为

$$M'_x = M_x + \mu' M_y, \quad M'_y = M_y + \mu' M_x. \quad (9-22)$$

注意, 如果薄板具有自由边, 则由于自由边的边界条件方程中包含着泊松比  $\mu$ , 因而  $Dw$  的解答将随  $\mu$  而变。于是, 式(j)中的  $Dw$  与式(k)中的  $Dw$  一般并不相同, 因而就得出关系式(9-21)及(9-22)。

## §9-7 矩形薄板的差分解

对于矩形薄板的弯曲问题,用差分法求解是比较简便的。求解时,和平面问题一样,也在薄板的中面上织成网格,图9-8。按照弹性曲面的微分方程(9-8),在任一结点0,我们有

$$(\nabla^4 w)_0 = q_0/D,$$

其中 $(\nabla^4 w)_0$ 为 $\nabla^4 w$ 在结点0的值, $q_0$ 为分布荷载在结点0的值。利用差分公式(5-6)至(5-8),可由上式得差分方程

$$\begin{aligned} & 20w_0 - 8(w_1 + w_2 + w_3 + w_4) + \\ & 2(w_5 + w_6 + w_7 + w_8) + \\ & (w_9 + w_{10} + w_{11} + w_{12}) \\ & = \frac{q_0 h^4}{D}. \end{aligned} \quad (a)$$

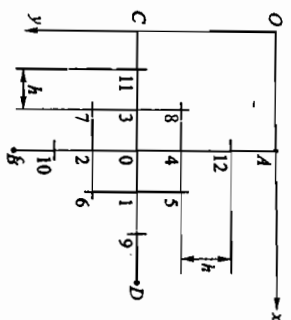


图9-8

设薄板的边界只有简支边和固定边而没有自由边,则边界上结点处的 $w$ 都等于零。至于边界外一行虚结点处的 $w$ ,则可用边界内一行结点处的 $w$ 来表示。例如,设AB边为简支边(结点5,1,6在边界外而结点8,3,7在边界内),则在该边界上的任一结点0处,有边界条件

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_0 = \frac{w_1 + w_3 - 2w_0}{h^2} = 0.$$

注意 $w_0=0$ ,可见 $w_1=-w_3$ 。又例如,设AB边为固定边,则在结点0处有边界条件

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_0 = \frac{w_1 - w_3}{2h} = 0.$$

由这一关系式可见 $w_1=w_3$ 。这样,取内结点处的 $w$ 值为未知值,为各个内结点列出式(a)型的差分方程,联立求解,就可以求出这些未知值。

设薄板具有自由边,则自由边上各结点处的 $w$ 也须取为未知值,并须为这些结点列出式(a)型的差分方程。这些方程中将包含边界外第一行及第二行虚结点处的 $w$ 。但是,利用边界条件,可以把这些虚结点处的 $w$ 用边界上及边界内各结点处的 $w$ 来表示。这样就可使差分方程中只包含自由边上及边界以内各结点处的 $w$ ,从而联立求解这些 $w$ 值。

不论边界如何,求出各结点处的 $w$ 值以后,就可以用差分公式求得内力及反力。例如,结点0处的弯矩 $M_x$ 是

$$\begin{aligned} (M_x)_0 &= -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_0 \\ &= -D \left( \mu \frac{w_1 + w_3 - 2w_0}{h^2} + \mu \frac{w_2 + w_4 - 2w_0}{h^2} \right) \\ &= \frac{D}{h^2} [2(1+\mu)w_0 - (w_1 + w_3) - \mu(w_2 + w_4)]. \end{aligned} \quad (b)$$

同样可得该结点处的弯矩 $M_y$ 是

$$(M_y)_0 = \frac{D}{h^2} [2(1+\mu)w_0 - (w_2 + w_4) - \mu(w_1 + w_3)]. \quad (c)$$

作为例题,设有正方形薄板,边长为 $a$ ,四边简支,图9-9,受有均布荷载 $q_0$ 。

取 $h = \frac{a}{4}$ 。由于对称,只须取 $w_1, w_2,$

$w_3$ 为未知值。为结点1,2,3列出式(a)

型的差分方程,并应用边界条件,得

$$20w_1 - 8(4w_2) + 2(4w_3) = q_0 h^4/D,$$

$$20w_2 - 8(w_1 + 2w_3) + 2(2w_2) +$$

$$(w_2 - w_2) = q_0 h^4/D,$$

$$20w_3 - 8(2w_2) + 2(w_1) +$$

$$(w_3 - w_3 + w_3 - w_3) = q_0 h^4/D.$$

联立求解,得

$$w_1 = \frac{33}{32} \frac{q_0 h^4}{D}, \quad w_2 = \frac{3}{4} \frac{q_0 h^4}{D}, \quad w_3 = \frac{35}{64} \frac{q_0 h^4}{D}.$$

从而由式(b)或式(c)得

$$(M_x)_1 = (M_y)_1 = \frac{9(1+\mu)}{16} q_0 h^2.$$

由对称性可见,最大挠度及最大弯矩都发生在结点1处。最大挠度为

$$w_{\max} = w_1 = \frac{33}{32} \frac{q_0 h^4}{D} = 0.00402 \frac{q_0 a^4}{D},$$

与精确值 $0.00406 \frac{q_0 a^4}{D}$ 只相差1%。最大弯矩为

$$M_{\max} = (M_x)_1 = (M_y)_1 = \frac{9(1+\mu)}{16} q_0 h^2 = \frac{9(1+\mu)}{256} q_0 a^2.$$

设 $\mu=0.3$ ,则得 $M_{\max}=0.0457 q_0 a^2$ ,与精确值 $0.0479 q_0 a^2$ 相差约5%。从许多类似的例子可见,对于边界为简支或固定的薄板,采用差分法求解是简单而有效的。

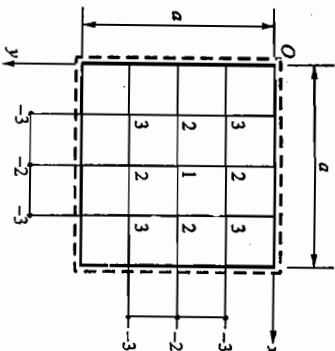


图9-9

## §9-8 圆形薄板的弯曲

求解圆形薄板的弯曲问题时,和求解圆形边界的平面问题一样,用极坐标比较方便。这时,我们把挠度  $w$  和横向荷载  $q$  都看做是极坐标  $\rho$  和  $\varphi$  的函数,即  $w = w(\rho, \varphi)$ ,  $q = q(\rho, \varphi)$ 。进行与 §4-3 中相同的运算,可以得出下列的导数变换式:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial x} &= \cos \varphi \frac{\partial w}{\partial \rho} - \frac{\sin \varphi}{\rho} \frac{\partial w}{\partial \varphi}, \\ \frac{\partial w}{\partial y} &= \sin \varphi \frac{\partial w}{\partial \rho} + \frac{\cos \varphi}{\rho} \frac{\partial w}{\partial \varphi}, \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= \cos^2 \varphi \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \rho^2} \right) + \sin^2 \varphi \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial w}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right) - 2 \cos \varphi \sin \varphi \left[ \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right) \right], \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} &= \sin^2 \varphi \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \rho^2} \right) + \cos^2 \varphi \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial w}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right) + 2 \cos \varphi \sin \varphi \left[ \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right) \right], \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} &= \cos \varphi \sin \varphi \left[ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \rho^2} \right) - \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial w}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right) \right] + \\ &\quad (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) \left[ \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right) \right], \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

$$\nabla^2 w = \frac{\partial^2 w}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial w}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2}. \quad (c)$$

应用式(c),薄板弹性曲面的微分方程(9-8)可以变换为

$$D \left( \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial w}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right) = q. \quad (9-23)$$

为了导出用挠度  $w$  表示内力的表达式,从薄板内取出一个微分块,如图 9

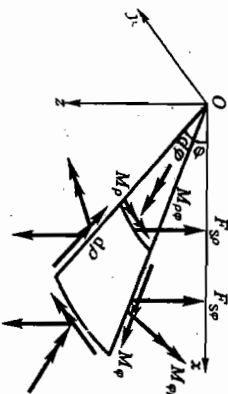


图 9-10

-10 所示。在  $\rho$  为常量的横截面上,应力分量  $\sigma_\rho$ ,  $\tau_{\rho\phi}$  和  $\tau_{\phi\rho}$  分别合成为弯矩  $M_\rho$ 、扭矩  $M_{\rho\phi}$  和横向剪力  $F_{s\rho}$ ; 在  $\varphi$  为常量的横截面上,应力分量  $\sigma_\varphi$ ,  $\tau_{\phi\rho}$  和  $\tau_{\rho\phi}$  分别

合成为弯矩  $M_\varphi$ 、扭矩  $M_{\phi\rho}$  和横向剪力  $F_{s\varphi}$ 。若上述各个内力均为正号,则对应的正方向用力矢和矩矢表示如图 9-10 所示。

现在,把  $x$  轴和  $y$  轴分别转到这个微分块的  $\rho$  方向和  $\varphi$  方向,使该微分块的  $\varphi$  坐标成为零,则该微分块处的  $M_\rho$ ,  $M_\varphi$ ,  $M_{\rho\phi}$ ,  $M_{\phi\rho}$ ,  $F_{s\rho}$ ,  $F_{s\varphi}$  分别成为  $M_x$ ,  $M_y$ ,  $M_{xy}$ ,  $M_{yx}$ ,  $F_{sx}$ ,  $F_{sy}$ 。于是,利用导数的变换式(b)和(a),令  $\varphi = 0$ ,即由式(9-10)得到极坐标中薄板内力公式:

$$\left. \begin{aligned} M_\rho &= (M_x)_{\varphi=0} = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{\varphi=0} \\ &= -D \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial \rho^2} + \mu \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial w}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right) \right], \\ M_\varphi &= (M_y)_{\varphi=0} = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_{\varphi=0} \\ &= -D \left[ \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial w}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right) + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial \rho^2} \right], \\ M_{\rho\phi} &= (M_{xy})_{\varphi=0} = -D(1-\mu) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)_{\varphi=0} \\ &= -D(1-\mu) \left[ \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right) \right], \\ F_{s\rho} &= (F_{sx})_{\varphi=0} = -D \left( \frac{\partial}{\partial x} V^2 w \right)_{\varphi=0} = -D \frac{\partial}{\partial \rho} V^2 w, \\ F_{s\varphi} &= (F_{sy})_{\varphi=0} = -D \left( \frac{\partial}{\partial y} V^2 w \right)_{\varphi=0} = -D \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} V^2 w, \end{aligned} \right\} \quad (9-24)$$

其中  $V^2 w$  是用式(c)表示的。

现在来列出圆板的边界条件(坐标原点取在圆板的中心):

设  $\rho = a$  处为固定边,则该边界上的挠度  $w$  等于零,薄板弹性曲面的斜率

(即转角)  $\frac{\partial w}{\partial \rho}$  也等于零,即

$$(w)_{\rho=a} = 0, \quad \left( \frac{\partial w}{\partial \rho} \right)_{\rho=a} = 0. \quad (9-25)$$

设  $\rho = a$  处为简支边,则该边界上的挠度  $w$  等于零,弯矩  $M_\rho$  也等于零,即

$$(w)_{\rho=a} = 0, \quad (M_\rho)_{\rho=a} = 0. \quad (9-26)$$

如果这个简支边上受有分布的力矩荷载  $M$ ,则式(9-26)中第二式的右边就不等于零而等于  $M$ 。将式(9-24)的  $M_\rho$  代入式(9-26),由于  $(w)_{\rho=a} = 0$ ,必然导致  $\rho = a$  的边界上  $w$  对  $\varphi$  的导数均为零,因此,式(9-26)可以表示为

$$(w)_{\rho=a} = 0, \quad \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \rho^2} + \mu \frac{1}{\rho} \frac{\partial w}{\partial \rho} \right)_{\rho=a} = 0. \quad (d)$$

和 §9-4 中相似, 在  $\rho$  为常量的横截面上, 扭矩  $M_{\theta\rho}$  可以变换为等效的剪力  $\frac{1}{\rho} \frac{\partial M_{\theta\rho}}{\partial \varphi}$ , 与横向剪力  $F_{s\rho}$  合并而成为总的剪力

$$F'_{s\rho} = F_{s\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial M_{\theta\rho}}{\partial \varphi}. \quad (9-27)$$

由于在圆板中,  $\rho$  为常量的截面是一个连续而没有角点的截面, 所以不存在集中剪力  $F_{R0}$ 。

这样, 设  $\rho = a$  处为自由边, 则该边界上的边界条件成为

$$(M_r)_{\rho=a} = 0, \quad (F'_{s\rho})_{\rho=a} = \left( F_{s\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial M_{\theta\rho}}{\partial \varphi} \right)_{\rho=a} = 0, \quad (9-28)$$

其中前一个条件仍然表示弯矩等于零, 而后一个条件则表示总的分布剪力等于零。如果这个自由边上受有分布的力矩荷载  $M$  及横向荷载  $F'_s$ , 则上述两式的右边将不等于零而分别等于  $M$  及  $F'_s$ 。将式(9-24)中的内力用  $w$  表示的式子代入式(9-28), 则自由边的边界条件便可以直接用挠度  $w$  来表示。

### §9-9 圆形薄板的轴对称弯曲

如果圆形薄板所受的横向荷载  $q$  和边界条件是绕  $z$  轴对称的, 则该薄板的挠度和内力也将是绕  $z$  轴对称的, 这类问题就是圆板的轴对称弯曲问题。这时, 横向荷载  $q = q(\rho)$ , 挠度  $w = w(\rho)$ 。因此, 弹性曲面的微分方程(9-23)简化为常微分方程

$$D \left( \frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \right) \left( \frac{d^2 w}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dw}{d\rho} \right) = q. \quad (a)$$

在 §4-5 中已经说明, 轴对称情形下的算子  $\nabla^2 = \frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} = \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{d}{d\rho} \right)$ , 因此, 式(a)可以写为

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left[ \rho \frac{d}{d\rho} \left[ \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{dw}{d\rho} \right) \right] \right] = q/D.$$

对上式积分四次, 便得到轴对称弯曲问题的挠度解答

$$w = C_1 \ln \rho + C_2 \rho^2 \ln \rho + C_3 \rho^2 + C_4 + w_1, \quad (b)$$

其中特解  $w_1$  为

$$w_1 = \frac{1}{D} \int \frac{1}{\rho} \left[ \int \rho \left[ \int \frac{1}{\rho} q \rho d\rho \right] d\rho \right] d\rho; \quad (c)$$

$C_1$  至  $C_4$  为待定的系数, 决定于边界条件。式(b)表示的挠度  $w$  便是薄板轴对称弯曲问题的普遍适用的解答。

对于受均布荷载  $q = q_0$  的薄板, 由式(c)得特解  $w_1 = \frac{q_0}{64D} \rho^4$ , 于是挠度解答(b)为

$$w = C_1 \ln \rho + C_2 \rho^2 \ln \rho + C_3 \rho^2 + C_4 + \frac{q_0}{64D} \rho^4. \quad (d)$$

如果薄板是带孔的, 内外边界分别为  $\rho = a$  和  $\rho = b$ , 则可以由内外边界的两个边界条件来确定系数  $C_1$  至  $C_4$ 。

如果薄板是无孔的, 仅有外边界  $\rho = a$  的边界条件。这时, 还须考虑薄板中心点( $\rho = 0$ )的挠度及内力的有限值条件, 即在  $\rho = 0$  处, 挠度和内力不可能为无限大, 但式(d)中的第一、第二项将成为无限大, 因此, 常数  $C_1$  和  $C_2$  都应当等于零。于是得

$$w = C_3 \rho^2 + C_4 + \frac{q_0 \rho^4}{64D}, \quad \frac{dw}{d\rho} = 2C_3 \rho + \frac{q_0 \rho^3}{16D}, \quad (e)$$

并由式(9-24)得出弯矩和扭矩

$$\left. \begin{aligned} M_r &= -2(1 + \mu)DC_3 - \frac{3 + \mu}{16} q_0 \rho^2, \\ M_\theta &= -2(1 + \mu)DC_3 - \frac{1 + 3\mu}{16} q_0 \rho^2, \\ M_{r\theta} &= M_{\theta r} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (f)$$

剪力  $F_{s\rho}$  可直接由平衡条件得到, 而不必利用式(9-24); 剪力  $F_{s\theta}$  则由于对称而为零。系数  $C_3$  和  $C_4$  决定于边界条件。

例如, 设半径为  $a$  的薄板具有固定边, 则边界条件为

$$\begin{aligned} (w)_{\rho=a} &= 0, & \left( \frac{dw}{d\rho} \right)_{\rho=a} &= 0. \end{aligned}$$

将式(e)代入上面边界条件, 得

$$\begin{aligned} a^2 C_3 + C_4 + \frac{q_0 a^4}{64D} &= 0, & 2aC_3 + \frac{q_0 a^3}{16D} &= 0, \end{aligned}$$

由此求得

$$C_3 = -\frac{q_0 a^2}{32D}, \quad C_4 = \frac{q_0 a^4}{64D}.$$

代入式(e)及式(f), 即得

$$\left. \begin{aligned} w &= \frac{q_0 a^4}{64D} \left( 1 - \frac{\rho^2}{a^2} \right)^2, \\ M_r &= \frac{q_0 a^2}{16} \left[ (1 + \mu) - (3 + \mu) \frac{\rho^2}{a^2} \right], \\ M_\theta &= \frac{q_0 a^2}{16} \left[ (1 + \mu) - (1 + 3\mu) \frac{\rho^2}{a^2} \right], \\ M_{r\theta} &= M_{\theta r} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (g)$$

此外,取出半径为  $\rho$  的中间部分的薄板,由平衡条件  $\sum F_z = 0$ ,得

$$2\pi\rho F_{sz} + q_0\pi\rho^2 = 0,$$

从而得

$$F_{sz} = -\frac{q_0\rho}{2}. \quad (h)$$

在薄板的中心,由式(g)得

$$(w)_{\rho=0} = \frac{q_0 a^4}{64D}, \quad (i)$$

$$(M_\rho)_{\rho=0} = (M_\rho)_{\rho=0} = \frac{(1+\mu)q_0 a^2}{16}.$$

在薄板的边界上,由式(g)及式(h)得

$$(M_\rho)_{\rho=a} = -\frac{q_0 a^2}{8}, \quad (F_{sz})_{\rho=a} = -\frac{q_0 a}{2}. \quad (j)$$

应用轴对称弯曲问题的挠度解答(b),可以求解各种荷载和各种边界条件下的轴对称弯曲问题。很多专著和手册中给出了关于挠度和弯矩的公式,可供工程设计之用。

## 习 题

9-1 设有半椭圆形薄板,图9-11,边界AOB为简支边,ACB为固定边,受有荷载  $q = q_1 \frac{x^2}{a}$ 。试证  $w = mx \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right)^2$  能满足一切条件,其中  $m$  是待定系数。试求挠度和弯矩以及它们的最大值。

$$\text{答案: } w_{\max} = \frac{2\sqrt{5}q_1 a^4}{375 \left( 5 + 2\frac{a^2}{b^2} + \frac{a^4}{b^2} \right) D},$$

$$(M_x)_{x=a,y=0} = -\frac{q_1 a^2}{3 \left( 5 + 2\frac{a^2}{b^2} + \frac{a^4}{b^2} \right)}.$$

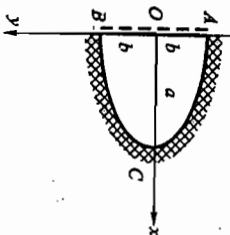


图 9-11

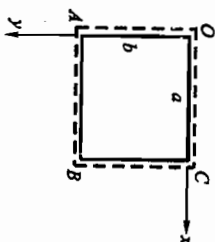


图 9-12

9-2 四边简支的矩形薄板,图9-12,边长为  $a$  和  $b$ ,受有荷载

$$q = q_0 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}.$$

试证  $w = m \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}$  能满足一切条件,并求出挠度、弯矩和反力。

$$\text{答案: } w_{\max} = \frac{q_0 a^4}{\pi^4 \left( 1 + \frac{a^2}{b^2} \right)^2} D, \quad (M_x)_{\max} = \frac{q_0 a^2 \left( 1 + \mu \frac{a^2}{b^2} \right)}{\pi^2 \left( 1 + \frac{a^2}{b^2} \right)^2},$$

$$(F_{sz})_{\max} = \frac{q_0 a \left[ 1 + (2-\mu) \frac{a^2}{b^2} \right]}{\pi \left( 1 + \frac{a^2}{b^2} \right)^2}, \quad F_R = \frac{2(1-\mu)q_0 a^2}{\pi^2 \left( 1 + \frac{a^2}{b^2} \right)^2} \frac{b}{a}.$$

角点反力公式是  $F_{R1} = 2(M_{x1})$ , 因此,角点反力的正负方向根据扭矩的正负方向规定来确定。在图9-12中,  $F_{R0}$ ,  $F_{RB}$  以上为正,  $F_{RA}$ ,  $F_{RC}$  以下为正。本题的角点反力解答是  $F_{R0} = F_{RB} = -F_R$  (向下),  $F_{RA} = F_{RC} = F_R$  (向下)。

9-3 矩形薄板OABC的OA边和OC边是简支边,AB边和CB边是自由边,图9-13,在B点受有横向集中力  $F$ ,试证  $w = mxy$  能满足一切条件,其中  $m$  是待定系数。试求挠度、内力和反力。

$$\text{答案: } w_{\max} = \frac{Fb^3}{2(1-\mu)D}, \quad M_x = M_y = 0, \quad M_{xy} = -\frac{F}{2}, \quad F_{sx} = F_{sy} = F'_{sx} = F'_{sy} = 0,$$

$F_{RA} = F_{RC} = -F$  (与荷载反向,向上),  $F_{R0} = -F$  (与荷载同向,向下)。



图 9-13

图 9-14

9-4 矩形薄板OABC的OA边和BC边是简支边,OC边和AB边是自由边,图9-14,不受横向荷载( $q=0$ ),但在两个简支边上受均布力矩  $M$ ,在两个自由边上受均布力矩  $\mu M$ 。试证  $w = f(x)$  能满足一切条件,并求出挠度、弯矩和反力。

$$\text{答案: } w_{\max} = \frac{Ma^2}{8D}, \quad M_x = M, \quad M_y = \mu M, \quad M_{xy} = 0, \quad F'_{sx} = F'_{sy} = 0, \quad F_R = 0.$$

9-5 正方形薄板,边长为  $a$ ,四边固定,受均布荷载  $q_0$ ,取  $h = a/4$ ,用差分法求解。  
答案:  $w_{\max} = 0.0018 q_0 a^4 / D$ 。

9-6 四边简支的矩形板,图9-15,在  $0 \leq x \leq \frac{a}{2}$  和  $0 \leq y \leq \frac{b}{2}$  的范围内受均布荷载  $q_0$ ,试用重三角级数求解挠度。  
答案: 其中的积分项

$$\int_0^a \int_0^b q \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy = q_0 \int_0^{a/2} \sin \frac{m\pi x}{a} dx \int_0^{b/2} \sin \frac{n\pi y}{b} dy$$

$$= \frac{q_0 ab}{\pi^2 mn} \times \left\{ \begin{aligned} &1, \\ &[1 - (-1)^m][1 - (-1)^n] \end{aligned} \right\}_0 \quad (m = 1, 3, 5, \dots; n = 1, 3, 5, \dots)$$

代入  $A_{mn}$ , 最后得挠度表达式

$$w = \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{A_{mn}}{\pi^4 Dmn \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} + \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{16q_0}{\pi^4 Dmn \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

9-7 圆形薄板, 半径为  $a$ , 边界简支, 受均布荷载  $q_0$ , 试求挠度及弯矩, 并求出它们的最大值

答案:  $w_{\max} = \frac{(5+\mu)q_0 a^4}{64(1+\mu)D}$ ,  $M_{\max} = \frac{(3+\mu)q_0 a^2}{16}$ 。

图 9-15

9-8 固定边圆形薄板, 半径为  $a$ , 受轴对称荷载  $q = q_1 \frac{r^2}{a^2}$ , 试求挠度、弯矩和反力以及它们的最大值。

答案:  $w_{\max} = \frac{q_1 a^4}{150D}$ ,  $(M_r)_{r=a} = -\frac{q_1 a^2}{15}$ ,  $(M_\theta)_{r=0} = (M_\theta)_{r=a} = \frac{(1+\mu)q_1 a^2}{45}$ ,

$$(F_{sr}^i)_{r=a} = -\frac{q_1 a}{3}。$$

9-9 极坐标中的应力变换式是

$$\sigma_r = \sigma_\rho \cos^2 \varphi + \sigma_\varphi \sin^2 \varphi - 2\tau_{\rho\varphi} \cos \varphi \sin \varphi,$$

将上式两边乘以  $z \cdot dz$ , 并沿板厚从  $-\frac{\delta}{2}$  到  $\frac{\delta}{2}$  积分, 便可得出薄板弯矩的变换式

$$M_r = M_\rho \cos^2 \varphi + M_\varphi \sin^2 \varphi - 2M_{\rho\varphi} \cos \varphi \sin \varphi。$$

而弯矩  $M_r$  又可以表示为

$$M_r = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)。 \quad (b)$$

试证: 将挠度  $w$  的二阶导数变换式代入式(b), 并与式(a)相比, 便可导出极坐标中薄板的  $M_\rho$ ,  $M_\varphi$  及  $M_{\rho\varphi}$  的公式, 即式(9-10)中的弯矩、扭矩公式。

9-10 在  $z$  面上, 切应力之间有关系式

$$\tau_{rz} = \tau_{r\varphi} \cos \varphi - \tau_{\varphi\theta} \sin \varphi,$$

或由切应力互等关系写成

$$\tau_{rz} = \tau_{r\varphi} \cos \varphi - \tau_{\varphi\theta} \sin \varphi,$$

将上式两边乘以  $dz$ , 并沿板厚从  $-\frac{\delta}{2}$  到  $\frac{\delta}{2}$  积分, 得出横向剪力的变换式

$$F_{Sx} = F_{S\rho} \cos \varphi - F_{S\varphi} \sin \varphi。 \quad (c)$$

而  $F_{Sx}$  又可以表示为

$$F_{Sx} = -D \frac{\partial}{\partial x} (\nabla^2 w)。 \quad (d)$$

试证: 将一阶导数  $\frac{\partial}{\partial x}$  的变换式代入式(d), 并与式(c)相比, 便可导出极坐标中薄板的横向剪力公式, 即式(9-10)中的  $F_{S\rho}$  和  $F_{S\varphi}$  的公式。

## 附录 A 变分法简介

### (一) 函数的变分

如果对于变量  $x$  在某一变域上的每一个值, 变量  $y$  有一个值和它对应, 则变量  $y$  称为变量  $x$  的函数, 记为

$$y = y(x).$$

如果由于自变量  $x$  有微小增量  $dx$ , 函数  $y$  也有对应的微小增量  $dy$ , 则增量  $dy$  称为函数  $y$  的微分, 而

$$dy = y'(x)dx,$$

其中  $y'(x)$  为  $y$  对于  $x$  的导数。图 1 中的曲线  $AB$  示出  $y$  与  $x$  的函数关系并示出微分  $dy$ 。

现在, 假想函数  $y(x)$  的形式发生改变而成为新函数  $Y(x)$ 。如果对应于  $x$  的一个定值,  $y$  具有微小的增量

$$\delta y = Y(x) - y(x), \quad (a)$$

则增量  $\delta y$  称为函数  $y(x)$  的变分。显然,  $\delta y$  一般也是  $x$  的函数。在图 A-1 中, 用  $CD$  表示相应于新函数  $Y(x)$  的曲线, 并示出变分  $\delta y$ 。

例如, 假定  $AB$  表示某个梁的一段挠度曲线而  $y$  是梁截面的真实位移, 则  $CD$  可以表示该梁发生虚位移以后的挠度曲线, 而虚位移  $\delta y$  就是真实位移  $y(x)$  的变分。

当  $y$  有变分  $\delta y$  时, 导数  $y'$  一般也将有变分  $\delta(y')$ , 它等于新函数的导数与原函数的导数这两者之差, 即

$$\delta(y') = Y'(x) - y'(x).$$

但由式(a)有

$$(\delta y)' = Y'(x) - y'(x),$$

于是可见有关系式  $\delta(y') = (\delta y)'$ , 或

$$\delta\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}(\delta y).$$

这就是说, 导数的变分等于变分的导数, 因此, 微分的运算和变分的运算可以交换次序。

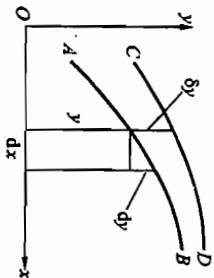


图 A-1

### (二) 泛函及其变分

如果对于某一类函数  $y(x)$  中的每一个函数  $y(x)$ , 变量  $I$  有一个值和它对应, 则变量  $I$  称为依赖于函数  $y(x)$  的泛函, 记为

$$I = I[y(x)]. \quad (b)$$

简单地讲, 泛函就是函数的函数。

例如, 设  $xy$  面内有给定的两点  $A$  和  $B$ , 图 A-2, 则连接这两点的任一曲线的长度为

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx. \quad (c)$$

显然长度  $l$  依赖于曲线的形状, 也就是依赖于函数  $y(x)$  的形式。因此, 长度  $l$  就是函数  $y(x)$  的泛函。

在较一般的情况下, 泛函具有如下的形式:

$$I[y(x)] = \int_a^b f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) dx,$$

或者简写为

$$I = \int_a^b f(x, y, y') dx, \quad (d)$$

其中的被积函数  $f(x, y, y')$  是  $x$  的复合函数。

首先来考察函数  $f(x, y, y')$ 。当函数  $y(x)$  具有变分  $\delta y$  时, 导函数  $y'$  也将随着具有变分  $\delta y'$ 。这时, 按照泰勒级数展开法则, 函数  $f$  的增量可以写成

$$\begin{aligned} f(x, y + \delta y, y' + \delta y') - f(x, y, y') \\ = \frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial y'} \delta y' + (\delta y \text{ 及 } \delta y' \text{ 的高阶项}). \end{aligned}$$

上式右边的前两项是函数  $f$  的增量的主部, 定义为函数  $f$  的变分, 表示为

$$\delta f = \frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial y'} \delta y'. \quad (e)$$

现在来进一步考察式(d)所示的泛函  $I$ 。当函数  $y(x)$  及导函数  $y'(x)$  分别具有变分  $\delta y$  及  $\delta y'$  时, 泛函  $I$  的增量显然为

$$\begin{aligned} \delta I &= \int_a^b f(x, y + \delta y, y' + \delta y') dx - \int_a^b f(x, y, y') dx \\ &= \int_a^b [f(x, y + \delta y, y' + \delta y') - f(x, y, y')] dx \\ &= \int_a^b [\delta f + (\delta y \text{ 及 } \delta y' \text{ 的高阶项})] dx. \end{aligned}$$

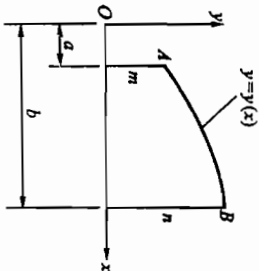


图 A-2



同样引用上述泛函变分的定义, 则  $I$  的变分为

$$\delta I = \int_a^b (\delta f) dx. \quad (1)$$

将式(e)代入, 即得泛函变分的表达式

$$\delta I = \int_a^b \left( \frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial y'} \delta y' \right) dx. \quad (g)$$

由式(d)及式(f), 可见有关系式

$$\delta \int_a^b f dx = \int_a^b (\delta f) dx. \quad (h)$$

这就是说, 只要积分的上下限保持不变, 变分的运算与定积分的运算可以交换次序。

### (三) 泛函的极值问题——变分问题

如果函数  $y(x)$  在  $x = x_0$  的邻近任一点上的值都不大于或都不小于  $y(x_0)$ , 也就是

$$dy = y(x) - y(x_0) \leq 0 \text{ 或 } \geq 0,$$

则称函数  $y(x)$  在  $x = x_0$  处达到极大值或极小值, 而必要的极值条件为  $\frac{dy}{dx} = 0$  或  $dy = 0$ 。

对于式(b)所示形式的泛函  $I[y(x)]$ , 也可以通过分析而得出相似的结论如下: 如果泛函  $I[y(x)]$  在  $y = y_0(x)$  的邻近任意一根曲线上的值都不大于或都不小于  $I[y_0(x)]$ , 也就是

$$\delta I = I[y(x)] - I[y_0(x)] \leq 0 \text{ 或 } \geq 0,$$

则称泛函  $I[y(x)]$  在曲线  $y = y_0(x)$  上达到极大值或极小值, 而必要的极值条件为

$$\delta I = 0. \quad (i)$$

曲线  $y = y_0(x)$  称为泛函  $I[y(x)]$  的极值曲线。

凡是有关泛函极值的问题, 都称为变分问题, 而变分法主要就是研究如何求泛函极值的方法。

下面来讨论这样一个典型的变分问题: 设图 A-2 中  $y = y(x)$  所示的曲线被指定通过 A, B 两点, 也就是  $y(x)$  具有边界条件

$$y(a) = m, \quad y(b) = n, \quad (j)$$

试由泛函  $I = \int_a^b f(x, y, y') dx$  的极值条件求出函数  $y(x)$ 。

首先来导出这一变分问题中的极值条件  $\delta I = 0$  的具体形式。在变分  $\delta f$  的表达式(g)中, 右边的第二部分是

进行分部积分, 得

$$\int_a^b \frac{\partial f}{\partial y'} \delta y' dx = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{d}{dx} (\delta y) dx.$$

$$\int_a^b \frac{\partial f}{\partial y'} \delta y' dx = \left[ \frac{\partial f}{\partial y'} \delta y \right]_a^b - \int_a^b \delta y \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right) dx.$$

但是, 按照边界条件(j), 在  $x = a$  及  $x = b$  处,  $y$  不变, 因而有  $\delta y = 0$ , 可见

$$\int_a^b \frac{\partial f}{\partial y'} \delta y' dx = - \int_a^b \delta y \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right) dx.$$

代入式(g)的右边, 得出

$$\delta I = \int_a^b \left[ \frac{\partial f}{\partial y} \delta y - \delta y \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right) \right] dx = \int_a^b \delta y \left[ \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right) \right] dx.$$

于是, 根据  $\delta y$  的任意性, 由  $\delta I = 0$  得到极值条件

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0. \quad (k)$$

由此可以得出函数  $y(x)$  的微分方程, 而这一微分方程的解答将给出函数  $y(x)$ 。

注意: 在式(k)中, 偏导数只表示  $x, y, y'$  三者互不依赖时的运算, 而在  $\frac{d}{dx}$  的运算中, 必须考虑  $y$  及  $y'$  均为  $x$  的函数。

作为简例, 试求图 A-2 中 AB 曲线为最短时的函数  $y(x)$ 。在这里,

$$I = l = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2} dx.$$

于是由式(d)得  $f = \sqrt{1 + (y')^2}$ , 从而由式(k)得极值条件

$$0 - \frac{d}{dx} \left[ \frac{y'}{\sqrt{1 + (y')^2}} \right] = 0, \quad \text{即} \quad \frac{y'}{\sqrt{1 + (y')^2}} = C,$$

其中  $C$  是任意常数。求解这一方程, 得  $y' = C_1$ , 从而得

$$y = y(x) = C_1 x + C_2.$$

可见最短曲线为一直线。任意常数  $C_1$  及  $C_2$  可由边界条件(j)求得。

## 附录 B 直角坐标系中的下标记号法

在一些弹性力学图书及论文中,采用简洁的直角坐标系中的下标记号法,为便于读者阅读文献,简介如下。

## (一) 下标记号法

1. 物理量的表示:在空间问题中,凡数字下标 1,2,3 专门表示相应于  $x, y, z$  的量,凡文字下标  $i, j, k$  等则泛指下标 1,2,3 中的任一个。由此,弹性力学中的一些物理量可以表达为:

坐标  $x, y, z$  表示为  $x_i (i=1,2,3)$ ,

体力分量  $f_x, f_y, f_z$  表示为  $f_i (i=1,2,3)$ ,

面力分量  $\bar{f}_x, \bar{f}_y, \bar{f}_z$  表示为  $\bar{f}_i (i=1,2,3)$ ,

方向余弦  $l, m, n$  表示为  $n_i (i=1,2,3)$ ,

位移分量  $u, v, w$  表示为  $u_i (i=1,2,3)$ ,

应力分量表示为  $\sigma_{ij} (i=1,2,3; j=1,2,3)$ , 且  $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ ,

应变分量表示为  $\epsilon_{ij} (i=1,2,3; j=1,2,3)$ , 且  $\epsilon_{ij} = \epsilon_{ji}$ 。

2. 求和约定:凡文字下标重复二次时,表示对该下标求和,如

$$\sigma_{ii} = \sum_{i=1,2,3} \sigma_{ii} = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = \Theta,$$

$$\epsilon_{ii} = \sum_{i=1,2,3} \epsilon_{ii} = \epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33} = \theta,$$

$$\sigma_{ij} n_j = \sum_{j=1,2,3} \sigma_{ij} n_j = \sigma_{i1} n_1 + \sigma_{i2} n_2 + \sigma_{i3} n_3,$$

$$\sigma_{ij} \epsilon_{ij} = \sum_{i=1,2,3} \sum_{j=1,2,3} \sigma_{ij} \epsilon_{ij} = \sigma_{11} \epsilon_{11} + \sigma_{12} \epsilon_{12} + \sigma_{13} \epsilon_{13} + \sigma_{21} \epsilon_{21} + \sigma_{22} \epsilon_{22} + \sigma_{23} \epsilon_{23} + \sigma_{31} \epsilon_{31} + \sigma_{32} \epsilon_{32} + \sigma_{33} \epsilon_{33}.$$

3. 导数记号:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = f_{,i}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = f_{,ij}$$

$$\nabla^2 f = f_{,ii}$$

4.  $\delta$  符号:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{当 } i = j, \\ 0 & \text{当 } i \neq j. \end{cases}$$

## (二) 弹性力学的基本方程

平衡微分方程

$$\sigma_{ij,j} + f_i = 0. \quad (\text{a})$$

几何方程

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad (\text{b})$$

注意上式与式(7-8)的几何方程不完全相同:即两者的线应变相同,如  $\epsilon_{11} = \epsilon_x$ ; 而切应变只有原来的  $\frac{1}{2}$ , 如  $\epsilon_{12} = \frac{1}{2}\gamma_{xy}$ 。

物理方程,其中应变用应力表示式为

$$\epsilon_{ij} = \frac{1+\mu}{E}\sigma_{ij} - \frac{\mu}{E}\sigma_{kk}\delta_{ij}, \quad (\text{c})$$

用于按应力求解;而应力用应变表示式为

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1+\mu}\left(\epsilon_{ij} + \frac{\mu}{1-2\mu}\epsilon_{kk}\delta_{ij}\right), \quad (\text{d})$$

用于按位移求解。体积应力和体应变的关系式是

$$\sigma_{kk} = \frac{E}{1-2\mu}\epsilon_{kk}. \quad (\text{e})$$

位移边界条件

$$u_i|_s = \bar{u}_i, \quad \text{在 } s_u \text{ 上}. \quad (\text{f})$$

应力边界条件

$$\sigma_{ij} n_j|_s = \bar{f}_i, \quad \text{在 } s_\sigma \text{ 上}. \quad (\text{g})$$

上面公式中,  $i, j, k=1,2,3$  时,对应于空间问题。而  $i, j, k=1,2$  时,对应于平面问题,其中式(c)对应于平面应力问题,式(d)对应于平面应变问题。

## (三) 平面问题的变分法

总势能

$$E_p = U + V, \quad (\text{h})$$

其中形变势能

$$U = \frac{1}{2} \iint_A \sigma_{ij} \epsilon_{ij} dx dy, \quad (\text{i})$$

外力势能

$$V = - \left( \iint_A f_i u_i dx dy + \int_{s_f} \bar{f}_i u_i ds \right). \quad (\text{j})$$

虚功方程为

$$\iint_A f_i \delta u_i dx dy + \int_{s_f} \bar{f}_i \delta u_i ds = \iint_A \sigma_{ij} \delta \epsilon_{ij} dx dy. \quad (\text{k})$$

变分法中常用的面积分与曲线积分之间的关系式是

$$\iint_A f_{,i} dx dy = \int_s f n_i ds, \quad (\text{l})$$

其中  $s$  为平面域  $A$  的边界。

# 内容索引 (按照汉语拼音字母顺序排列)

- A**
- 艾里应力函数 (Airy stress function) § 2-10
- B**
- 半空间体 (semi-infinite body) § 8-2, § 8-3
- 半逆解法 (semi-inverse method) § 3-1
- 半平面体 (semi-infinite plane) § 4-9, § 4-10
- 贝尔特拉米相容方程 (Beltrami consistency equations) § 8-4
- 边界条件 (boundary condition) § 1-3, § 2-6
- 变分法 (能量法) (variational method, energy method) § 5-4
- 薄板 (thin plate) § 9-1
- 薄板内力 (internal forces of thin plate) § 9-3
- 薄板弹性曲面 (elastic surface of thin plate) § 9-1
- 薄板弹性曲面微分方程 (differential equation of elastic surface of thin plate) § 9-2
- 薄板弯曲刚度 (flexural rigidity of thin plate) § 9-2
- 薄膜比拟 (membrane analogy) § 8-6
- 布西内斯克解答 (Boussinesq solution) § 8-3
- C**
- 侧压力系数 (coefficient of lateral pressure)
- D**
- 单连体 (simply connected body) § 2-9
- 单三角级数解 (single triangle series) § 9-6
- 单元分析 (analysis of an element) § 6-2
- 单元结点荷载列阵 (elemental nodal load matrix) § 6-6
- 单元刚度矩阵 (elemental stiffness matrix) § 6-2, § 6-5
- 多连体 (multiply connected body) § 2-9, § 4-6
- E**
- 符拉芒解答 (Flamant solution) § 4-9
- F**
- 刚体位移 (rigid body displacement) § 2-4
- 各向同性 (isotropy) § 1-3
- G**
- 胡克定律 (Hooke law) § 1-3, § 2-5
- 混合边界条件 (mixed boundary condition) § 2-6
- H**
- 基尔斯解答 (Kirsch solution) § 4-8
- 极小势能原理 (principle of minimum potential energy) § 5-5
- 几何方程 (geometrical equation) § 1-3, § 2-4, § 4-2, § 7-4
- 接触问题 (contact problem) § 4-7
- 结点荷载 (nodal load) § 6-2, § 6-6
- 结点力 (nodal force) § 6-2, § 6-5
- 结点位移 (nodal displacement) § 6-2
- 均匀性 (homogeneity) § 1-3
- I**
- 空间轴对称问题 (spatial axisymmetry problem) § 7-5
- 孔口应力集中 (stress concentration of holes) § 4-8
- J**
- 拉梅解答 (Lamé solution) § 4-6
- 离散化结构 (discretization structure) § 6-2
- 理想弹性体 (perfect elastic body) § 1-3
- 连续性 (continuity) § 1-3
- K**
- 圣维南原理 (Saint-Venant principle) § 2-7
- L**
- 弹性力学 (elasticity) § 1-1
- 弹性力学基本假定 (basic assumptions of elasticity) § 1-3
- 体积模量 (bulk modulus) § 7-4
- 体积应力 (volumetric stress) § 7-4
- 体力 (body force) § 1-2
- 体应变 (volumetric strain) § 7-4
- M**
- 外力 (external force) § 1-2
- 外力功 (work of external force) § 5-4
- 外力势能 (potential energy of external force) § 5-4
- N**
- 完全弹性 (perfect elasticity) § 1-3
- 位移 (displacement) § 1-2
- 位移变分方程 (variational equation of displacement) § 5-5
- 位移边界条件 (displacement boundary condition) § 1-3, § 2-6, § 7-4, § 9-4
- 位移单值条件 (condition of single-valued displacement) § 2-9, § 2-10, § 4-6
- 位移法 (displacement method) § 2-8
- 位移模式 (displacement model) § 6-3
- 物理方程 (physical equation) § 2-5, § 4-2, § 7-4
- O**
- 切应变 (shear strain) § 1-2
- 切应力 (shear stress) § 1-2
- 切应力互等性 (reciprocal theorem of shear stress) § 1-2
- P**
- 平衡微分方程 (differential equation of equilibrium) § 1-3, § 2-2, § 4-1, § 7-1
- Q**
- 切应力互等性 (reciprocal theorem of shear stress) § 1-2
- R**
- 圣维南原理 (Saint-Venant principle) § 2-7
- S**
- 弹性力学 (elasticity) § 1-1
- 弹性力学基本假定 (basic assumptions of elasticity) § 1-3
- 体积模量 (bulk modulus) § 7-4
- 体积应力 (volumetric stress) § 7-4
- 体力 (body force) § 1-2
- 体应变 (volumetric strain) § 7-4
- T**
- 外力 (external force) § 1-2
- 外力功 (work of external force) § 5-4
- 外力势能 (potential energy of external force) § 5-4
- U**
- 完全弹性 (perfect elasticity) § 1-3
- 位移 (displacement) § 1-2
- 位移变分方程 (variational equation of displacement) § 5-5
- 位移边界条件 (displacement boundary condition) § 1-3, § 2-6, § 7-4, § 9-4
- 位移单值条件 (condition of single-valued displacement) § 2-9, § 2-10, § 4-6
- 位移法 (displacement method) § 2-8
- 位移模式 (displacement model) § 6-3
- 物理方程 (physical equation) § 2-5, § 4-2, § 7-4

## X

线应变 (normal strain) § 1-2  
 相容方程 (consistency equation) § 2-9, § 2-10, § 4-3, § 8-4  
 小变形假定 (infinitesimal deformation assumption) § 1-3  
 形变 (deformation) § 1-2  
 形变势能 (strain energy) § 5-4  
 形函数 (shape function) § 6-2  
 形函数矩阵 (shape function matrix) § 6-3  
 虚功方程 (virtual work equation) § 5-5  
 虚位移 (virtual displacement) § 5-5  
 虚应变 (virtual strain) § 5-5

## Y

压力隧洞 (pressure tunnel) § 4-7  
 应力 (stress) § 1-2  
 应力边界条件 (stress boundary condition)

§ 1-3, § 2-6, § 7-2

应力法 (stress method) § 2-9, § 8-4

应力主面 (principal plane of stress) § 2-3, § 7-2

应力主向 (principal direction of stress) § 2-3, § 7-3

有限单元法 (finite element method) § 6-1

## Z

整体分析 (global analysis) § 6-2, § 6-7

整体结点荷载列阵 (global nodal load matrix) § 6-7

整体结点位移列阵 (global nodal displacement matrix) § 6-7

整体刚度矩阵 (global stiffness matrix) § 6-2, § 6-7

正应力 (normal stress) § 1-2

轴对称 (axisymmetry) § 4-5, § 7-5

主应力 (principal stress) § 2-3, § 7-3

## 外国人名译名对照表

Airy, G. B.	艾里
Beltrami, E.	贝尔特拉米
Boussinesq, J. V.	布西内斯克
Flamant, A.	符拉芒
Fourier, J. B. J.	傅里叶
Hooke, R.	胡克
Kirsch, G.	基尔斯
Lagrange, J. - L.	拉格朗日
Lamé, G.	拉梅
Laplace, P. - S.	拉普拉斯
Lévy, M.	莱维
Michell, J. H.	米歇尔
Navier, C. - L. - M. - H.	纳维
Prandtl, L.	普朗特
Poisson, S. D.	泊松
Rayleigh, D. C. L.	瑞利
Ritz, W.	里茨
Saint-Venant, A. J. C. B. de	圣维南
Taylor, B.	泰勒

# Synopsis

This book is a textbook for the course of "Theory of Elasticity" provided for universities and colleges of engineering.

The contents of the book involved the basic concepts, theory of plane problems and its solutions, theory of spatial problems, and bending of thin plates; moreover, the numerical methods in Elasticity, i. e. Finite-Difference Method, Variational Method (Energy Method), and Finite-Element Method have been introduced in the book.

The author arranges the contents gradually from the basic and the easy, to the complex and the difficult, and emphasizes to present the basic theories (basic concepts, basic equations, and basic problem-solving methods) and its applications. Therefore, after understanding the preliminary knowledge, readers could read and apply more solutions of Elasticity, and solve practice engineering problems by the numerical methods of Elasticity.

This book has been widely used in China's universities and colleges of engineering.

# Contents

## Main List of Symbols

### Chapter 1. Introduction

- § 1-1 Contents of Theory of Elasticity
- § 1-2 Some Basic Concepts in Theory of Elasticity
- § 1-3 Basic Assumptions in Theory of Elasticity

### Problems

### Chapter 2. Theory of Plane Problems

- § 2-1 Plane Stress and Plane Strain
- § 2-2 Differential Equations of Equilibrium
- § 2-3 Stress at a Point
- § 2-4 Geometrical Equations. Rigid-Body Displacements
- § 2-5 Physical Equations
- § 2-6 Boundary Conditions
- § 2-7 Saint-Venant's Principle and its Application
- § 2-8 Solution of Plane Problem in Terms of Displacements
- § 2-9 Solution of Plane Problem in Terms of Stresses. Consistency Equation
- § 2-10 Case of Constant Body Force. Stress Function

### Problems

### Chapter 3. Solution of Plane Problems in Rectangular Coordinates

- § 3-1 Inverse Method and Semi-inverse Method. Solution by Polynomials
- § 3-2 Pure Bending of Rectangular Beam
- § 3-3 Determination of Displacements
- § 3-4 Bending of a Simply Supported Beam under Uniform Load
- § 3-5 Wedge Subjected to the Gravity and Liquid Pressure

### Problems

### Chapter 4. Solution of Plane Problems in Polar Coordinates

- § 4-1 Differential Equations of Equilibrium in Polar Coordinates
- § 4-2 Geometrical and Physical Equations in Polar Coordinates
- § 4-3 Stress Function and Consistency Equation in Polar Coordinates
- § 4-4 Coordinate Transformation of Stress Components
- § 4-5 Axisymmetrical Stresses and Corresponding Displacements
- § 4-6 Hollow Cylinder Subjected to Uniform Pressures

- § 4 - 7 Tunnel Subjected to Uniform Pressure
- § 4 - 8 Stress Concentration of the Circular Hole
- § 4 - 9 Concentrated Normal Load on Boundary of a Semi-Infinite Plane
- § 4 - 10 Distributed Normal Load on Boundary of a Semi-Infinite Plane

#### Problems

### Chapter 5. Solution of Plane Problems by Finite-Difference Method and Variational Method

#### Problems

- § 5 - 1 Finite-Difference Formulae
- § 5 - 2 Finite-Difference Method of Stress Function
- § 5 - 3 Example of Finite-Difference Method of Stress Function
- § 5 - 4 Strain Energy of Elastic Body
- § 5 - 5 Equation of Displacement Variation
- § 5 - 6 Method of Displacement Variation
- § 5 - 7 Examples of Method of Displacement Variation

#### Problems

### Chapter 6. Solution of Plane Problems by Finite-Element Method

- § 6 - 1 Matrix Representations of Basic Quantities and Equations
- § 6 - 2 Conception of Finite-Element Method
- § 6 - 3 Elemental Displacement Model and the Convergence of Solution
- § 6 - 4 Elemental Stress Matrix and Strain Matrix
- § 6 - 5 Elemental Nodal Force Matrix and Stiffness Matrix
- § 6 - 6 Load Translated into Nodal Load. Elemental Nodal Load Matrix
- § 6 - 7 Global Analysis of Structure. Equations of Nodal Equilibrium
- § 6 - 8 Steps of Solving Practical Problems. Dissecting of Elements
- § 6 - 9 Analysis of Calculating Results
- § 6 - 10 Examples
- § 6 - 11 Finite-Element Method Derived from Variational Theorem

#### Problems

### Chapter 7. Theory of Spatial Problems

- § 7 - 1 Differential Equations of Equilibrium
- § 7 - 2 State of Stress at a Point
- § 7 - 3 Principal Stresses. Maximum and Minimum Stresses
- § 7 - 4 Geometrical Equations and Physical Equations
- § 7 - 5 Basic Equations of Axisymmetrical Problem

#### Problems

### Chapter 8. Solution of Spatial Problems

- § 8 - 1 Solution in Terms of Displacements

- § 8 - 2 Semi-Infinite Body Subjected to Gravity and Uniform Pressure on Boundary
- § 8 - 3 Semi-Infinite Body Subjected Concentrated Normal Load on Boundary
- § 8 - 4 Solution in Terms of Stresses
- § 8 - 5 Torsion of Prismatical Bars
- § 8 - 6 Membrane Analogy of Torsion
- § 8 - 7 Elliptic Bars in Torsion
- § 8 - 8 Rectangular Bars in Torsion

#### Problems

### Chapter 9. Bending of Thin Plates

- § 9 - 1 Some Concepts and Calculating Assumptions
- § 9 - 2 Differential Equation of Deflection
- § 9 - 3 Internal Forces of Thin Plate on Transverse Sections
- § 9 - 4 Boundary Conditions. Equivalent Shear Force
- § 9 - 5 Navier's Solution by Double Trigonometric Series
- § 9 - 6 Lévy's Solution by Single Trigonometric Series
- § 9 - 7 Solution by Finite-Difference Method in Rectangular Plates
- § 9 - 8 Bending of Circular Plates
- § 9 - 9 Axisymmetrical Bending of Circular Plates

#### Problems

### Appendix A. Introduction of Variational Method

### Appendix B. Subscript Notation in Rectangular Coordinates

#### Index

#### Foreign-Chinese Bilingual Name-List

#### Synopsis

#### Contents

#### A Brief Introduction to the Author

## 作者简介



徐芝纶(1911—1999),江苏省江都县人。中国科学院资深院士,河海大学教授,曾任中国力学学会第一、二届理事,河海大学副校长等职。徐芝纶是著名的力学家和教育家,一生共编著出版教材11种15册,翻译出版教材6种7册。其中,《弹性力学》获“全国优秀科技图书”奖、“全国优秀教材特等奖”;《弹性力学问题的有限单元法》是我国第一本有限单元法的教科书,“Applied Elasticity”是我国第一本英文版力学教材。徐芝纶编著的力学教材被我国工科院校广泛采用,为培养科技人才起到了重要作用。徐芝纶在基础梁板的科研工作作出了许多重大成果,并在我国引进、推广、研究有限单元法作出了突出贡献。徐芝纶一生为人正直、品德高尚,以“学无止境,教亦无止境”为座右铭,严谨治学、严格教学,数十年如一日为国家培养建设人才贡献了毕生的精力。

责任编辑 黄于文  
封面设计 朱静  
责任绘图 史新薇  
责任式设计 王效珍  
责任印制 毛斯璐

## 郑重声明

高等教育出版社依法对本书享有专有出版权。任何未经许可的复制、销售行为均违反《中华人民共和国著作权法》，其为人将承担相应的民事责任和行政责任，构成犯罪的，将被依法追究刑事责任。为了维护市场秩序，保护读者的合法权益，避免读者误用盗版书造成不良后果，我社将配合行政执法部门和司法机关对违法犯罪的单位和个人给予严厉打击。社会各界人士如发现上述侵权行为，希望及时举报，本社将奖励举报有功人员。

反盗版举报电话：(010) 58581897/58581896/58581879

传 真：(010) 82086060

E - mail: dd@hep.com.cn

通信地址：北京市西城区德外大街 4 号

高等教育出版社打击盗版办公室

邮 编：100120

购书请拨打电话：(010)58581118