МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА И ТЕОРИЯ АЛГОРИТМОВ

Лекция 5

ФОРМАЛЬНЫЕ ТЕОРИИ

Формальная теория строится следующим образом:

1. Определяется *множество формул*, или правильно построенных выражений, образующих язык теории.

2. Выделяется подмножество формул, называемых *аксиомами* теории.

3. Задаются *правила вывода теории*. Правило вывода $R(F_1,\ldots,F_n,G)$ – это вычислимое отношение на множестве формул.

Высказывания формальной теории

Высказывания теории (***теоремы***)

формальные объекты, определенные ранее

Высказывания о теории (***метатеоремы***)

о свойствах теорем, доказательств и т.д., Формула *G* называется *теоремой теории T*, если в *T* существует вывод *G* из пустого множества формул.

Формальная теория *T* называется *разрешимой*, если существует алгоритм, позволяющий отличить теорему от не теоремы.

Формальная теория *T* называется *непротиворечивой*, если в ней нельзя одновременно доказать формулу *F* и ее отрицание.

Формальная теория *T* называется *полной* относительно содержательной теории *S*, если каждое истинное высказывание *S* отображается в некоторую теорему теории *T*.

Исчисление высказываний как формальная теория

Построение ИВ:

1. Алфавит исчисления высказываний состоит из переменных высказываний: *A*, *B*, *C*…, знаков логических связок: $\vee, \wedge, \neg, \rightarrow$ и скобок (,).

Формулы исчисления высказываний:

- переменное высказывание является формулой;
- если А и В формулы, то ($A \vee B$), ($A \wedge B$),($A \rightarrow B$), $\overline{A}$ - также формулы;
- других формул нет.

2. *Аксиомы* – тождественно-истинные высказывания, входящие в любую теорию в качестве законов.

Система аксиом 1.

$A1.1\ A \to (B \to A)$;

$A1.2\ (A \to B) \to (A \to (B \to C)) \to (A \to C))$;

$A1.3\ (A \wedge B) \to A$;

$A1.4\ (A \wedge B) \to B$;

$A1.5\ A \to (B \to (A \wedge B))$;

$A1.6\ A \to (A \vee B)$;

$A1.7\ B \to (A \vee B)$;

$A1.8\ (A \to C) \to ((B \to C) \to ((A \vee B) \to C))$;

$A1.9\ (A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A)$;

$A1.10\ \neg\neg A \to A$.

Система аксиом 2.

- $A2.1\ A \to (B \to A)$;
- $A2.2\ (A \to (B \to C)) \to ((A \to B)) \to (A \to C))$;
- $A2.3\ (\neg A \to \neg B) \to ((\neg A \to B) \to A)$.

3. Правила вывода

Правило подстановки

Если выводимая формула *F* содержит некоторую переменную *A* (обозначим *F*(*A*)) и существует произвольная формула *B*, то формула *F*(*B*), получающаяся заменой всех вхождений *A* на формулу *B*, также выводима в исчислении высказываний:

$$B:\frac{F(A)}{F(B)}$$

Правила заключения

- *Modus Ponens:*

если *A* и *A*→*B* - выводимые формулы, то *B* также выводимая формула, т.е.

$$\frac{A, A \to B}{B}$$

- *Modus Tollens:*

если *формулы* $\overline{A}$ и *B*→*A* есть выводимые формулы, то $\overline{B}$ также выводимая формула, т.е

$$\frac{\overline{A}, B \to A}{\overline{B}}$$

Теорема дедукции

Если $F_1,\dots ,F_{n-1},F_n \vdash G$,

то $F_1,\dots, F_{n-1} \vdash F_n \to G$.

В частности, если $F \vdash G$, то $\vdash F \to G$.