МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА И ТЕОРИЯ АЛГОРИТМОВ

Лекция 3

Нормальные формы формул алгебры логики

Дизъюнктивная нормальная форма (ДНФ) формулы есть формула, равносильная формуле исходной логической функции и записанная в виде дизъюнкции элементарных конъюнкций, построенных на пропозициональных переменных

$$F = K_1 \vee K_2 \vee K_3 \vee \ldots,$$

где $K_i = (A \wedge B \wedge C \wedge \ \ldots)$.

Элементарной конъюнкцией или ***конъюнктивным одночленом*** от переменных *A*,*B*,C,… называется конъюнкция каких-либо из этих переменных или их отрицаний.

- В элементарной конъюнкции нет двух одинаковых пропозициональных переменных, т.к. по закону идемпотентности $F \wedge F = F$.
- В ДНФ нет двух одинаковых элементарных конъюнкций, т.к. по закону идемпотентности $F \vee F = F$.
- Если одна из элементарных конъюнкций содержит F и $\neg F$, то элементарную конъюнкцию следует удалить, т.к. $F \wedge \neg F = 0$.

Пример:

Дано выражение: $F = F_1 \wedge (F_1 \vee F_2) \vee F_2 \wedge (F_1 \vee \overline{F_2})$

- по закону дистрибутивности:

$$F = F_1 \wedge F_1 \vee F_1 \wedge F_2 \vee F_1 \wedge F_2 \vee F_2 \wedge \overline{F_2}$$

- по законам идемпотентности и противоречия:

$$F = F_1 \vee F_1 \wedge F_2$$

- по закону поглощения:

$$F = F_1$$

Конъюнктивная нормальная форма

Конъюнктивная нормальная форма (КНФ) формулы есть формула, равносильная формуле исходной логической функции и записанная в виде конъюнкции элементарных дизъюнкций, построенных на пропозициональных переменных, т.е.

$$F = D_1 \wedge D_2 \wedge D_3 \wedge \ldots \quad ,$$

$$\text{где } D_i = (A \vee B \vee C \vee \ldots).$$

Элементарной дизъюнкцией или ***дизъюнктивным одночленом*** от переменных *A*,*B*,C,… называется дизъюнкция каких-либо из этих переменных или их отрицаний.

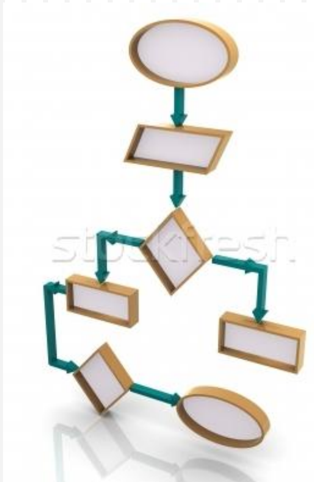
- В элементарной дизъюнкции нет двух одинаковых пропозициональных переменных, т.к. по закону идемпотентности $F \vee F = F$.
- В КНФ нет двух одинаковых элементарных дизъюнкций, т.к. по закону идемпотентности $F \wedge F = F$.
- Если одна из элементарных дизъюнкций содержит F и $\neg F$, то ее следует удалить, т.к. $F \vee \neg F =$ и.

Алгоритм приведения к нормальной форме

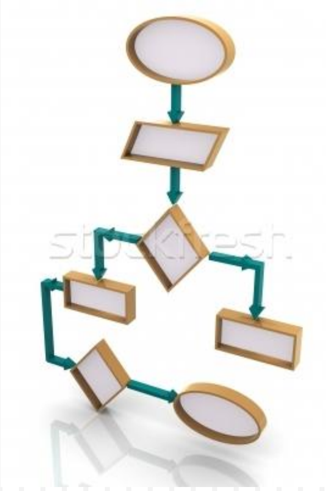
Шаг 1. Устранить логические связки “↔” и “→” по правилам:

$$F_1 \leftrightarrow F_2 = (F_1 \to F_2)(F_2 \to F_1) =$$
$$= (\overline{F_1} \vee F_2)(\overline{F_2} \vee F_1) =$$
$$= \overline{F_1}\,\overline{F}_2 \vee F_1F_2;$$

$$F_1 \to F_2 = \overline{F_1} \vee F_2 = (\overline{F_1\overline{F_2}})$$



Шаг 2. Продвинуть отрицание до элементарной формулы (пропозициональной переменной) по законам де Моргана и двойного отрицания.



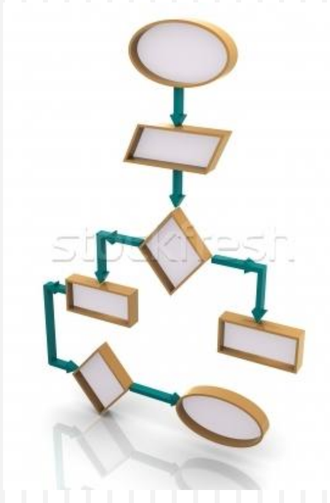
Шаг 3. Применить закон дистрибутивности:

- для КНФ –

$$F_1 \vee (F_2 F_3) = (F_1 \vee F_2)(F_1 \vee F_3);$$

- для ДНФ –

$$F_1(F_2 \vee F_3) = F_1 F_2 \vee F_1 F_3.$$



Пример:

Дана формула $F=((F_1\to(F_2\vee\overline{F_3}))\to F_4)$

Необходимо привести формулу к виду КНФ.

$$F=(\overline{F_1}\vee(F_2\vee\overline{F_3}))\to F_4)$$

$$F=(\overline{\overline{F_1}\vee(F_2\vee\overline{F_3}))}\vee F_4)$$

$$F=F_1\wedge\overline{F_2}\wedge F_3\vee F_4$$

$$F=(F_1\vee F_4)\wedge(\overline{F_2}\vee F_4)\wedge(F_3\vee F_4)$$

Пример:

Дана формула $F = ((\overline{F_1 \wedge F_2}) \wedge (F_1 \vee F_2))$

Необходимо привести формулу к виду ДНФ.

$$F = (\overline{F_1} \vee \overline{F_2}) \wedge (F_1 \vee F_2)$$

$$F = ((\overline{F_1} \vee \overline{F_2}) \wedge F_1) \vee ((\overline{F_1} \vee \overline{F_2}) \wedge F_2))$$

$$F = (\overline{F_1} \wedge F_1) \vee (\overline{F_2} \wedge F_1) \vee (\overline{F_1} \wedge F_2) \vee (\overline{F_2} \wedge F_2)$$

$$F = (\overline{F_2} \wedge F_1) \vee (\overline{F_1} \wedge F_2)$$

Совершенные нормальные формы

Если каждая элементарная конъюнкция (или элементарная дизъюнкция) формулы содержат символы всех пропозициональных переменных, то такая формула называется *совершенной*.

Алгоритм преобразования ДНФ к виду СДНФ

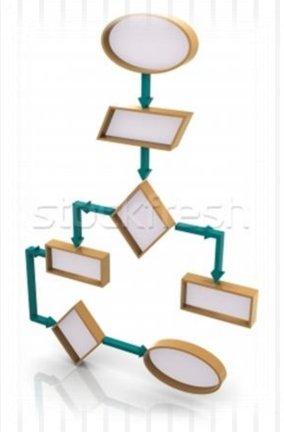
Шаг 1: если в элементарную конъюнкцию F не входит подформула F_i или $\overline{F_i}$, то дополнить элементарную конъюнкцию высказыванием $F_i \vee \overline{F_i}$ и выполнить преобразование формулы по закону дистрибутивности:

$$F(F_i \vee \overline{F_i}) = FF_i \vee F\overline{F_i};$$

Шаг 2: если в элементарную конъюнкцию F не входит подформула F_i или $\overline{F_i}$, то повторить ш. 1

Шаг 3: Упрощаем полученную формулу,

используя равносильности: $F \wedge F = F$; $F \vee F = F$.



Пример:

Дано $F = F_1\overline{F_2} \vee F_1\overline{F_3}F_4 \vee F_1F_2F_3\overline{F_4}$

Необходимо преобразовать формулу к виду СДНФ.

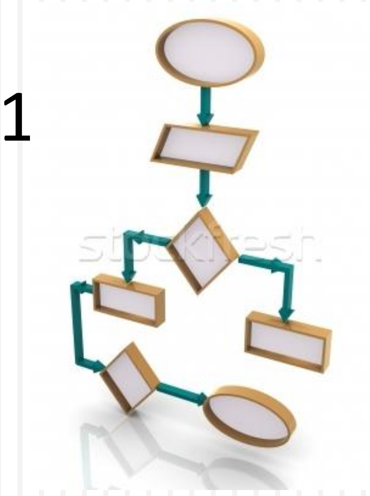
Алгоритм преобразования КНФ к виду СКНФ

Шаг 1: если в элементарную дизъюнкцию F не входит подформула F_i или $\neg F_i$, то дополнить элементарную дизъюнкцию высказыванием $(F_i \wedge \neg F_i)$ и выполнить преобразование формулы по закону дистрибутивности:

$$F \vee (F_i \wedge \neg F_i) = (F \vee F_i) \wedge (F \vee \neg Fi);$$

Шаг 2: если в элементарную конъюнкцию F не входит подформула F_i или $\neg F_i$, то повторить ш. 1

Шаг 3: Упрощаем полученную формулу, используя равносильности: $F \wedge F = F$; $F \vee F = F$.



Пример:

Дано $F = (F_1 \vee F_2) \wedge (\overline{F_1} \vee \overline{F_2} \vee F_3 \vee F_4)$

Необходимо преобразовать формулу к виду СКНФ.

Построение совершенных нормальных форм по таблицам истинности

Запись СДНФ: Элементарные конъюнкции СДНФ формируются для значений формулы “и”.

Пропозициональные переменные, входящие в элементарную конъюнкцию, записываются без изменений, если их значение равно “и” и с логической связкой “$\rceil$”, если их значение равно “л”.

Запись СКНФ: Элементарные дизъюнкции СКНФ формируются для значений формулы “л”.

Пропозициональные переменные, входящие в элементарную дизъюнкцию, записываются без изменений, если их значение равно “л” и с логической связкой “$\urcorner$”, если их значение равно “и”.

- СДНФ для всякой логической функции единственна. Для тождественно ложной функции СДНФ не существует.
- СКНФ для всякой логической функции единственна. Единственная функция, не имеющая СДНФ – тождественно истинная.

Пример:

Пример: Записать СДНФ и СКНФ для функции, заданной таблицей истинности

A	*B*	*C*	*F(A,B,C)*
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

Формула СДНФ:

$$F(A,B,C)=\overline{A}\wedge\overline{B}\wedge\overline{C}\vee\overline{A}\wedge B\wedge\overline{C}\vee$$
$$\vee A\wedge\overline{B}\wedge\overline{C}\vee A\wedge B\wedge C$$

Формула СКНФ:

$$F(A,B,C)=(A\vee B\vee\overline{C})\wedge(A\vee\overline{B}\vee C)\wedge$$
$$\wedge(\overline{A}\vee B\vee\overline{C})\wedge(\overline{A}\vee\overline{B}\vee C)$$

Принцип суперпозиций.
Замкнутые классы логических функций

Суперпозицией булевых функций f_0 и $f_1,\ldots,f_n$ называется функция

$$f(x_1,\ldots,x_m) = f_0(g_1(x_1,\ldots,x_m),\ldots,g_k(x_1,\ldots,x_m)),$$

где каждая из функций $g_i(x_1, \ldots,x_m)$ либо совпадает с одной из переменных (тождественная функция),
либо – с одной из функций $f_1,\ldots,f_n$.

Например:

- Функция $f(x,y) = \neg(x \wedge y)$ является суперпозицией функций $\neg$ и $\wedge$;

Замыкание класса

Рассмотрим множество A логических функций, обладающих некоторым свойством. Пусть $G(Y_1,Y_2,\ldots,Y_k)\in A$ и $F_i(X_1,X_2,\ldots,X_n)\in A$, $i=1,2,\ldots,k$. Произведем суперпозицию функций G и F:

$$G[F_1(X_1,\ldots,X_n),\ldots,F_k(X_1,\ldots,X_n)] = H(X_1,\ldots,X_n)$$

Если $H(X_1,\ldots,X_n)\in A$, то A называется *замкнутым классом логических функций* по отношению к рассматриваемому свойству.

Замыкание класса

То есть, множество *A* логических функций называют *замкнутым классом*, если любая суперпозиция функций из *A* снова принадлежит *A*.

«Замечательные» свойства

1. Свойство сохранять 0

Функция $F(X_1,\dots,X_n)$ называется сохраняющей 0, если $F(0,\dots,0)=0$.

Функции X_1X_2, X_1+X_2, $X_1\oplus X_2$ сохраняют 0, а $X_1\to X_2$, $X_1\sim X_2$, $X_1|X_2$ не сохраняют.

$C_0=\{F(X_1,\dots,X_n)\mid F(0,\dots,0)=0\}$.

Докажем замкнутость класса функций, сохраняющих 0.

Пусть $G(0,...,0)=0$ и $F_i(0,...,0)=0$.

Произведем суперпозицию функций G и F_i:

$G[F_1(X_1,...,X_n),...,F_k(X_1,...,X_n)]$

Определим значение функции на нулевом наборе: $G[F_1(0,...,0),...,F_k(0,...,0)]=G(0,...,0)=0$, т.е. $H(0,...,0)=0$.

1. Свойство сохранять 1

Функция $F(X_1,\ldots,X_n)$ называется *сохраняющей единицу*, если $F(1,\ldots,1)=1$.

Функции X_1X_2, X_1+X_2, $X_1\rightarrow X_2$ сохраняют единицу, а $X_1\oplus X_2$, $X_1|X_2$ не сохраняют.

$C_1=\{F(X_1,\ldots,X_n)\mid F(1,\ldots,1)=1\}$.

Класс C_1 является замкнутым.

3. Самодвойственность

Самодвойственной функцией

называется такая функция, для которой справедливо равенство $F(X_1,X_2,...,X_n)= F^*(X_1,X_2,...,X_n)$,

где F^*– двойственная функция по отношению к функции F.

Двойственная функция определяется следующим образом: $F^*(X_1,X_2,...,X_n)=\overline{F}(\overline{X_1},\overline{X_2},...,\overline{X_n})$

Пример

$$F=X_1X_2+X_1X_3+X_2X_3$$

$$F^*=\overline{\overline{X}_1\overline{X}_2+\overline{X}_1\overline{X}_3+\overline{X}_2\overline{X}_3}=\overline{\overline{X}_1\overline{X}_2}\cdot\overline{\overline{X}_1\overline{X}_3}\cdot\overline{\overline{X}_2\overline{X}_3}=$$

$$=(X_1+X_2)(X_1+X_3)(X_2+X_3)=X_1X_2+X_1X_3+X_2X_3=F$$

C_C – класс всех самодвойственных функций

X	Y	$F=X\wedge Y$	$\neg X\wedge\neg Y$	$\neg(\neg X\wedge\neg Y)$
0	0	0	1	0
0	1	0	0	1
1	0	0	0	1
1	1	1	0	1

Функции $x \wedge y$ и $x \vee y$, задаваемые векторами значений (0,0,0,1) и (0,1,1,1) двойственны друг к другу.

Также двойственными являются $x \oplus y$ и $x \leftrightarrow y$, задаваемые векторами (0,1,1,0) и (1,0,0,1).

Доказательство замкнутости класса самодвойственных функций.

Пусть $G(Y_1,\ldots,Y_n)$ и $F_i(X_1,\ldots,X_n)$ – самодвойственные функции.

Произведем суперпозицию функций G и F_i:

$$G[F_1(X_1,\ldots X_n),\ldots F_n(X_1,\ldots,X_n)]$$

и определим двойственную функцию к ней:

$$\overline{G[F_1(\overline{X}_1,\ldots\overline{X}_n),\ldots F_n(\overline{X}_1,\ldots,\overline{X}_n)]} = \overline{G[\overline{F_1(X_1,\ldots X_n)},\ldots\overline{F_n(X_1,\ldots,X_n)}]} =$$

$$= G[F_1(X_1,\ldots X_n),\ldots F_n(X_1,\ldots,X_n)]$$

$\Rightarrow C_C$ – замкнутый класс.

4. Монотонность

Критерий сравнения двух наборов аргументов:

- Если значение каждого аргумента одного набора больше или равно значению того же аргумента второго набора, то говорят, что первый набор не меньше второго.

При этом предполагается, что $0 \geq 0$; $1 \geq 0$; $1 \geq 1$.

Например, $(1,1,0,1) \geq (0,1,0,1)$.

Наборы: $(0,1)$ и $(1,0)$

$(0,1,0,1)$ и $(1,0,1,0)$ несравнимы

Логическая функция называется *монотонной*, если при любом возрастании набора значение этой функции не убывает.

(рассматриваются только сравнимые наборы)

Функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ *монотонна*, если для любых двоичных наборов δ и τ длины n, при условии $\delta \le \tau$, выполняется условие $f(\delta) \le f(\tau)$.

C_M - класс всех монотонных функций

Например, монотонные функции: X&Y, X∨Y

немонотонные функции: X↔Y, X→Y, X⊕Y

Доказательство замкнутости $C_м$:

Пусть $G(Y_1,\ldots, Y_n)$ и $F_i(X_1,\ldots, X_n)$ - монотонные.

Произведем суперпозицию функций G и F :

$$G[F_1(X_1,\ldots, X_n),\ldots, F_k(X_1,\ldots, X_n)] = H(X_1,\ldots, X_n)$$

Найдем значения функций F_i и G на некотором наборе $X_1,\ldots, X_n$, а затем увеличим этот набор.

Так как функции F_i монотонные, то их значения либо увеличатся, либо останутся без изменения.

Так как функция G монотонная, то ее значение либо увеличится, либо останется без изменения.

$\Rightarrow$значение функции H при увеличении набора либо увеличится, либо останется без изменения,

т.е. функция H тоже является монотонной.

5. Линейность

Логическая функция называется *линейной*, если она может быть представлена полиномом первой степени, т.е. записана в виде $F(X_1,X_2,...,X_n)=A_0\oplus A_1X_1\oplus A_2X_2\oplus...\oplus A_nX_n$,

где A_0, A_1,..., A_n – коэффициенты, равные нулю или единице.

C_L – класс всех линейных функций.

Например, линейные функции:

$$\mathrm{X} \oplus \mathrm{Y}, \quad \mathrm{X} \leftrightarrow \mathrm{Y} = 1 \oplus \mathrm{X} \oplus \mathrm{Y}.$$

Доказательство замкнутости Сл:

Пусть функции $G(Y_1,\ldots, Y_k)$ и $F_i(X_1,\ldots, X_n)$ – линейные. Представим их в виде линейных полиномов:

$$G = A_0 \oplus A_1 Y_1 \oplus A_2 Y_2 \oplus \ldots \oplus A_k Y_k,$$

$$F_i = B_{0i} \oplus B_{1i} X_1 \oplus B_{2i} X_2 \oplus \ldots \oplus B_{ni} X_n.$$

Подставив функции F_i вместо аргументов Y_i в функцию G получим выражение, в котором постоянные коэффициенты A_i умножаются на линейные функции.

При этом получатся снова линейные функции.

Приведя подобные члены, получим функцию $H(X_1,\ldots, X_n)$ в виде линейного полинома.

$\Rightarrow$, что по свойству линейности функции образуют замкнутый класс.