АЛГЕБРА ЛОГИКИ

Краткий экскурс в историю логики высказываний

Логика известна человечеству с древних времён и представляет собой искусство правильно рассуждать. Термин «логика» (происходит от греч. ”*logos*”) означает слово, понятие, рассуждение. Родоначальником науки о логике является греческий философ Аристотель (384-322 г. до н.э.). Он, используя законы человеческого мышления, формализовал известные до него правила рассуждений. Лишь в конце XVII века немецкий математик Г. Лейбниц предложил математизировать формальные рассуждения Аристотеля, вводя символьное обозначение для основных понятий и используя особые правила, близкие к вычислениям. Лейбниц утверждал, что «мы употребляем знаки не только для того, чтобы передать наши мысли другим лицам, но и для того, чтобы облегчить сам процесс нашего мышления».

Вообще говоря, способность к рассуждениям – это именно искусство. Имея в распоряжении какие-либо утверждения, истинность которых проверена, к примеру, экспериментально, логик может через умозрительные построения прийти к другому утверждению. Оно, в свою очередь, при искусстве правильно рассуждать, также оказывается истинным (но, вполне возможно, не во всех случаях).

Существует логика формальная, логика диалектическая, логика исследования и др. Данный курс посвящен формальной, а именно математической логике. Математическое описание рассуждений позволило получить точные утверждения и эффективные процедуры в решении конкретных задач логики. Рассуждения в математической логике изучаются с точки зрения формы описания процесса, явления или события и формального преобразования этого описания. Такой процесс называют *выводом заключения*. Иногда математическое описание рассуждений называют логико-математическим моделированием.

Основными объектами при изучении математической логики являются формальный язык логики и правила вывода. Формальный язык необходим для символьного описания процессов, явлений или событий и логических связей между ними. Правила вывода необходимы для формирования процедуры рассуждения. Для обеспечения вывода вводится система аксиом, формализующая весь механизм вывода заключения.

Математическое описание логики следует воспринимать, как некую формальную систему, оперирующую с символами по определенным правилам, облегчающим интерпретацию в реальном мире.

Первые учения о формах и способах рассуждений возникли в странах Древнего Востока: (Китай, Индия), но в основе современной логики лежат учения созданные в 4 веке до нашей эры древнегреческими мыслителями (главным образом Аристотелем). Аристотелю принадлежит исторически первое отделение логической формы речи от её содержания.

Он, в частности, открыл атрибутивную форму высказывания как утверждения или отрицания «чего-то о чем-то» и определил простое суждение (т.е. высказывание) как атрибутивное отношение двух терминов. Он также описал основные виды атрибутивных суждений и правильных способов их обращения.

Аристотель рассмотрел конкретные виды рассуждений, которые назвал силлогизмами. Более конкретно, он рассмотрел так называемые категорические утверждения следующих четырех видов:

– все A обладают свойством B (все A суть B);

– некоторые A обладают свойством B (некоторые A суть B);

– все A не обладают свойством B (все A суть не B);

– некоторые A не обладают свойством B (некоторые A суть не B).

Пример: Все люди смертны. Сократ – человек. Следовательно, Сократ смертен.

<u>Пример:</u> Все дикари раскрашивают свои лица. Некоторые современные женщины тоже раскрашивают свои лица. Следовательно, некоторые современные женщины – дикари.

Первое рассуждение правильно, оно подходит под один из образцов силлогизмов Аристотеля. Второе рассуждение неправильно, хотя все, входящие в него рассуждения истинны.

В начале 17 века Г. Галилей вводит в научный обиход понятие о гипотетико-дедуктивном методе: он восстанавливает права абстракции, обосновывает потребность в абстракциях, которые могут «восполнять» данные опытных наблюдений. Он указывает на необходимость введения этих абстракций в систему логических функций в качестве гипотез, с последующим сравнением результатов дедукции с результатами наблюдений.

Очевидным успехом движения за математическую логику явилось его признание на Втором Философском Конгрессе в Женеве в 1904г. Главным идейным противником применения математических методов к системе логических понятий был *психологизм* в логике. Психологизм в логике воспринимал математизацию логики как своего рода возрождение схоластики, которое менее всего было способно поставить логические исследования на научный фундамент. Борьба за математизацию логики и привела к мощному развитию этой науки.

Решающий шаг в создании математической логики как направления математики, посвященного изучению математических доказательств и вопросов обоснования математики, был сделан Джорджем Булем в 1847 г. Начало алгебраизации аристотелевой логики было положено шотландским математиком и логиком Огастесом Морганом в 1858 г.

Логика отношений была развита в серии статей, опубликованных в 1870—1893 гг. американским философом, логиком и математиком Чарлзом Сандерсом Пирсом, и систематизирована немецким математиком и логиком Эрнстом Шредером. Пирс ввел специальную символику для обозначений высказываний, выражающих отношения, в частности предикаты и кванторы $\forall x$ (квантор общности) и $\exists x$ (квантор существования), которые позволяют достичь однозначности высказываний.

Последний шаг в математизации логики в XIX в. был сделан профессором математики Иенского университета Готлобом Фреге. Восприняв идеи логики высказываний, логики отношений, пропозициональные функции и кванторы, Фреге ввел различие между простым утверждением высказывания и утверждением, что данное высказывание истинно. Он также предложил аксиоматический подход к логике.

Значительную роль в использовании математической логики для достижения большей математической строгости сыграл итальянский математик Джузеппе Пеано. Занимаясь преподаванием математики, он, как и до него Дедекинд, обнаружил недостаточность строгости существовавших ранее доказательств и посвятил свою жизнь усовершенствованию основ математики. Символику математической логики он применил для записи не только законов логики, но и математических аксиом. В полной мере она использована им для вывода теорем из аксиом. Аксиомы арифметики были введены в 1888 г. Дедекиндом и в 1891 г. Пеано, причем аксиоматика Пеано была более удобной для логического языка. Считая необходимым отказаться от интуитивных представлений, Пеано ввел собственные символы для обозначения понятий, кванторов и таких связок, как «и», «или», «не».

Логический язык был усовершенствован в основополагающей совместной работе английского философа и математика Бертрана Рассела и англо-американского философа и математика Алфреда Норта Уайтхеда «Основания математики». В этой работе была предпринята попытка свести всю математику к логике, которая, однако, не увенчалась успехом, так как невозможно вывести существование бесконечных множеств из чисто логических аксиом. Рассел заявлял: «Тот факт, что вся математика есть не что иное, как символическая логика, — величайшее открытие нашего века».

В работах Фреге и Рассела был создан богатый логический аппарат, в результате чего математическая логика стала полноценной математической дисциплиной.

Начиная с 1930-х годов, закладываются основы так называемого «машинного мышления» – теории алгоритмов. Её выдающиеся деятели: Курт Гедель, Стивен Коул Клини, Алан Тьюринг, Алонзо Чёрч, Эмиль Пост, Андрей Марков, Андрей Колмогоров и др. И несмотря на то, что, была выяснена ограниченность такого мышления, что проявилось в установлении алгоритмической неразрешимости ряда логических проблем (знаменитая теорема Геделя о неполноте символических логик и обоснование алгоритмически неразрешимых задач), все же существенно вырос спрос на применение логики в вычислительной математике и технической кибернетике.

На сегодняшний день в многообразии логических теорий выражаются требования, предъявляемые логике современной наукой и практикой. Важнейшим из них является требование в содействии точной постановке и формулировке научно-технических задач и разысканию возможных путей их разрешения. Предлагая строгие методы анализа определенных аспектов рассуждений, логические теории одновременно содействуют и объективному анализу положения вещей в той области знания, которая находит отражение в соответствующих мыслительных процессах.

Результаты, полученные с помощью математической логики и теории алгоритмов, легли в основу проектирования и создания компьютеров и программного обеспечения к ним, нашли широчайшее применение в областях информатики и систем искусственного интеллекта.

Алгебра высказываний. Простые и составные высказывания

Рассмотрим двухэлементное множество *B* и двоичные переменные принимающие значения из *B*. Его элементы часто обозначают 0 и 1, однако они не являются числами в обычном смысле. Наиболее распространенная интерпретация двоичных переменных: «*да*» – «*нет*», «*истинно*» (И) –

«*ложно*» (Л). Поэтому будем считать, что $B=\{0,1\}$, рассматривая 0 и 1 как некоторые формальные символы.

Алгебра образованная двухэлементным множеством $B=\{0,1\}$вместе со всеми возможными операциями на нем, называется *алгеброй логики*.

Функцией алгебры логики (логической функцией) от n-переменных называется n-арная операция на множестве $\{0,1\}$. Логическая функция $f\,(x_1, x_2, x_3, \ldots x_n)$ – это функция, принимающая значения 0,1. Множество всех логических функций обозначается P_2, множество всех логических функций n переменных $P_2(n)$.

Исходным понятием математической логики является «высказывание». *Высказыванием* называется повествовательное предложение, о котором можно сказать в данный момент, что оно истинно или ложно, но не то и другое одновременно. Логическим значением высказывания являются «*истина*» или «*ложь*».

<u>*Например*</u>, повествовательное предложение «*3 это простое число*» является истинным, а «*3.14… – рациональное число*» – ложным, «*Юго-восточный берег озера Виви является географическим центром России*» – истинным, а «*Красноярск – столица России*» – ложным, «*Число 8 делится на 2 и на 4*» – истинным, а «*Сумма чисел 2 и 3 равна 6*» – ложным и т.п.

Такие высказывания называют простыми или элементарными. При формальном исследовании сложных текстов понятия «простые высказывания» замещают понятием «*пропозициональные переменные*» (от лат. *propositio* – предложение), которые обозначают прописными буквами латинского алфавита «*A*», «*B*», «*C*»,…

«*Истинность*» или «*ложность*» предложения есть истинностное значение высказывания. Сопоставим каждому высказыванию переменную, равную 1, если высказывание истинно, и равную 0, если высказывание ложно.

<u>*Пример:*</u>

1. Если A:=«*3 это простое число*», то $A = 1$;

2. Если B:= «*Красноярск – столица России*», то $B = 0$;

Примечание: символ «:=» означает, что пропозициональной переменной, стоящей слева, присвоить значение высказывания, стоящего справа от символа.

Высказывания, которые получаются из простых предложений с помощью грамматических связок «*не*», «*и*», «*или*», «*если…*, *то…*», «*… тогда и только тогда, когда…*» и т.п., называют ***сложными или составными***. Для обозначения грамматических связок вводят символы, которые называют ***логическими*** (или ***пропозициональными***) ***связками***.

Обычно рассматривают следующие логические связки:

отрицание (читается «НЕ», обозначается "$\neg$"),

конъюнкция (читается «И», обозначается "$\wedge$"),

дизъюнкция (читается «ИЛИ», обозначается "$\vee$"),

импликация (читается «ЕСЛИ … ТО …», обозначается "$\rightarrow$"),

эквивалентность (читается «…ТОГДА И ТОЛЬКО ТОГДА, КОГДА…», обозначается "$\leftrightarrow$").

Для построения сложных пропозициональных высказываний используют вспомогательные символы «(»,«)» – скобки.

Пример:

Если A_1:= «*3 – вещественное число*», то $A_1 = 1$;

Если A_2:= «*3 – целое число*», то $A_2 = 1$;

Если высказывание «*3 – вещественное или целое число*», то формула $(A_1 \vee A_2) = 1$;

Правила построения сложных высказываний в виде последовательности пропозициональных переменных, логических связок и вспомогательных символов определяют возможность формального описания любого текста.

При формальной записи сложного высказывания всегда нужно исходить из его содержания. До тех пор пока не определена логическая структура сложного высказывания, его нельзя формально описывать.

Правила исполнения логических операций над сложными высказываниями на основе заданных логических связок и пропозициональных переменных формирует алгебру высказываний.

Правила вывода новых высказываний, основанные на известных отношениях между заданными пропозициональным переменными, формируют исчисление высказываний. Высказывания, из которых делают вывод новых высказываний, называют ***посылками***, а получаемое высказывание – ***заключением***.

Математическая логика рассматривает формальный способ рассуждения, встречающийся не только в математике, но и в повседневной жизни.

Множество пропозициональных переменных $T=\{A, B, C,\dots\}$ с заданными над ними логическими операциями $F=\{\rceil; \wedge; \vee; \rightarrow; \leftrightarrow\}$ формируют ***алгебру высказываний***, т.е. $A_в=<T; F;>$

Символы логических операций заданы логическими связками:

Таблицы истинности

Для определения истинности сложного суждения необходимо анализировать значение истинности каждого составного высказывания и формировать последовательно значение истинности каждой подформулы, входящей в формулу сложного суждения.

Логическое значение формулы алгебры логики полностью определяется логическими значениями входящих в нее пропозициональных переменных. Все возможные логические значения формулы в зависимости от значений входящих в нее элементарных высказываний, могут быть полностью описаны с помощью таблицы истинности.

Таблица, в которой рассматриваются любые наборы пропозициональных переменных и определяются значения всех подформул формулы, называют ***таблицей истинности***.

Любое высказывание f может быть задано в виде таблиц истинности. Каждой строке таблицы истинности взаимно однозначно соответствует набор значений составляющих высказываний и соответствующее значение составного высказывания. В таблицах 1-3 представлены таблицы истинности операций «отрицание», «конъюнкция» и «дизъюнкция» соответственно.

Таблица 1 – Таблица истинности «отрицание»

A	**$\neg$A**
0	1
1	0

Таблица 2 – Таблица истинности «конъюнкция»

A	**B**	**A $\wedge$ B**
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Таблица 3 – Таблица истинности «дизъюнкция»

A	**B**	**A $\vee$ B**
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Конечность области определения функции имеет важное преимущество: такие функции можно задавать перечислением значений при различных значениях аргументов. Для того, чтобы задать значение функции от n переменных, надо определить значения для каждого из 2^n наборов. Эти значения записывают в таблицу в порядке соответствующих двоичных чисел. В результате получается таблица следующего вида, таблица 4.

Таблица 4 – Таблица истинности функции от *n*-переменных

x_1	x_2	...	x_{n-1}	x_n	f
0	0	...	0	0	f(0,0,...,0,0)
0	0	...	0	1	f(0,0,...,0,1)
0	0	...	1	0	f(0,0,...,1,0)
0	0	...	1	1	f(0,0,...,1,1)
...	...	...	...	...	...
1	1	...	0	0	f(1,1,...,0,0)
1	1	...	0	1	f(1,1,...,0,1)
1	1	...	1	0	f(1,1,...,1,0)
1	1	...	1	1	f(1,1,...,1,1)

Раз у нас есть стандартный порядок записывания наборов, то для того, чтобы задать функцию, нам достаточно выписать значения $f(0,0,...,0,0)$, $f(0,0,...,0,1)$, $f(0,0,...,1,0)$, $f(0,0,...,1,1)$,..., $f(1,1,...,0,0)$, $f(1,1,...,0,1)$, $f(1,1,...,1,0)$, $f(1,1,...,1,1)$. Этот набор называют ***вектором значений функции***.

Если значение высказывания зависит от *n* составляющих высказываний x_1, x_2, x_3, … x_n, то таблица истинности содержит 2^n строк.

Число функций от n-переменных $P_2(n)$ определяется как 2^{2^n}.

Логических функций одной переменной $2^{2^1}=4$, представим их в виде таблицы 5.

Таблица 5 – Таблица логических функций одной переменной

x	f_0	f_1	f_2	f_3
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

Функции f_0 и f_3 константы 0 и 1 соответственно, их значения не зависят от значения переменной, и, следовательно, переменная x для них не существенна. Функция f_1 «повторяет» x: $f_1(x)=x$. Функция $f_2(x)$ является отрицанием x. Ее значение противоположно значению x.

Логических функций двух переменных $2^{2^2}=16$.

Классификация функций 2-х переменных

Рассмотрим классификацию функций 2-х переменных, таблица 1.5.

Таблица 1.5. Классификация функций 2-х переменных

x	y	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Функция $f_0(x,y)$ – константа 0, то есть функция с двумя несущественными переменными.

Функция $f_1(x,y)$ – конъюнкция x и y. Она равна 1 если только x и y равны 1, поэтому ее часто называют функцией И. Еще одно название «логическое умножение», поскольку ее таблица действительно совпадает с таблицей обычного умножения для чисел 0 и 1. На естественном языке эта операция выражается соединительными словами: «..и..», «..также..», «как ..,так..», «..несмотря на ..» и т.п.

Функция $f_2(x,y)=x\wedge\neg y$ – Левая компликация.

Функция $f_3(x,y)=x\neg y \vee xy=x$ (y – несущественная переменная).

Функция $f_4(x,y)= \neg x\wedge y$ – Правая компликация.

Функция $f_5(x,y)= \neg xy\vee xy=y$ (x – несущественная переменная).

Функция $f_6(x,y)$ – сложение по модулю 2. Ее обозначения: $x\oplus y$, $x\Delta y$. Она равна 1, когда значения ее аргументов различны, и равна 0, когда они равны. Поэтому функцию часто называют неравнозначностью.

Функция $f_7(x,y)$ – дизъюнкция x и y, ее обозначения: $x\vee y$, $x+y$. Она равна 1 если x или y равны 1 (или здесь понимается в неразделительном смысле – хотя бы один из двух), поэтому ее часто называют функцией ИЛИ. В естественном языке эта операция выражается разъединительными словами «..или..», «..либо..» и т.п.

Функция $f_8(x,y) = \neg x \neg y$ – стрелка Пирса, обозначение $x \downarrow y$.

Функция $f_9(x,y)$ называется эквивалентностью, или равнозначностью. Ее обозначения $x \sim y$, $x \equiv y$. Она равна 1, когда значения ее аргументов равны, и равна 0, когда они различны. $f_9(x,y) = \neg x \neg y \vee xy = x \equiv y$. На естественном языке это выражается словами «для того чтобы…, необходимо и достаточно…», «… лишь при условии...» и т. п..

Функция $f_{10}(x,y) = \neg x \neg y \vee x \neg y = \neg y$ (x – несущественная переменная)

Функция $f_{11}(x,y) = x \vee \neg y$ – Правая импликация

Функция $f_{12}(x,y) = \neg x \neg y \vee \neg xy = \neg x$ (y – несущественная переменная)

Функция $f_{13}(x,y) = \neg x \vee y$ – импликация (левая импликация). Ее обозначение $x \rightarrow y$, $x \supset y$, читается «если x, то y». На естественном языке эта операция выражается словами «если ..., то ...», «тогда ..., когда ...», «постольку ..., поскольку ...», «при наличии ..., следует ...», «... есть достаточное условие для ...», «... есть необходимое условие для ...», «... при условии, что ...» и т. п.

Функция $f_{14}(x,y) = \neg x \vee \neg y$ – штрих Шеффера, обозначение $x \mid y$.

Функция $f_{15}(x,y)$ – константа 1, то есть функция с двумя несущественными переменными.