ФОРМАЛЬНЫЕ ТЕОРИИ

Понятие формальной теории

Формальная теория строится следующим образом.

1. Определяется *множество формул*, или правильно построенных выражений, образующих язык теории.

2. Выделяется подмножество формул, называемых *аксиомами* теории.

3. Задаются *правила вывода теории*. Правило вывода $R(F_1,\ldots,F_n,G)$ – это вычислимое отношение на множестве формул. Часто правила записываются в виде: $\dfrac{F_1,\ldots F_n}{G}$. Это также может обозначаться: $F_1,\ldots,F_n \vdash G$.

Формулы $F_1,\ldots,F_n$ называются *посылками* правила R или *гипотезами*, а G – его *следствием* или *заключением*.

В формальной теории существует два типа высказываний: *высказывания самой теории (теоремы)*, которые рассматриваются как чисто формальные объекты, определенные ранее и *высказывания о теории* (о свойствах ее теорем, доказательств и т.д.), которые формулируются на языке, внешнем по отношению к теории, – метаязыке и называются *метатеоремами*.

Формула G называется *теоремой теории* T, если в T существует вывод G из пустого множества формул.

Формальная теория T называется *разрешимой*, если существует алгоритм, позволяющий отличить теорему от не теоремы.

Формальная теория T называется *непротиворечивой*, если в ней нельзя одновременно доказать формулу F и ее отрицание.

Формальная теория T называется *полной* относительно содержательной теории S, если каждое истинное высказывание S отображается в некоторую теорему теории T.

Исчисление высказываний как формальная теория

Исчисление высказываний как формальная теория определяется следующим образом.

1. *Алфавит исчисления высказываний* состоит из переменных высказываний: A, B, C…, знаков логических связок: $\vee,\wedge,\neg,\rightarrow$ и скобок (,).

2. *Формулы исчисления высказываний:*

– переменное высказывание является формулой;

– если А и В формулы, то $(A\vee B)$, $(A\wedge B)$,$(A\rightarrow B)$, $\overline{A}$ – также формулы;

– других формул нет.

3. *Аксиомы* – тождественно-истинные высказывания, входящие в любую теорию в качестве законов.

Рассмотрим две системы аксиом. Первая непосредственно использует все логические связки.

Система аксиом 1.

$A1.1$ $A\rightarrow(B\rightarrow A)$;

$A1.2$ $(A\rightarrow B)\rightarrow(A\rightarrow(B\rightarrow C))\rightarrow(A\rightarrow C))$;

$A1.3$ $(A\wedge B)\rightarrow A$;

$A1.4$ $(A\wedge B)\rightarrow B$;

$A1.5$ $A\rightarrow(B\rightarrow(A\wedge B))$;

$A1.6$ $A\rightarrow(A\vee B)$;

$A1.7$ $B\rightarrow(A\vee B)$;

$A1.8$ $(A\rightarrow C)\rightarrow((B\rightarrow C)\rightarrow((A\vee B)\rightarrow C))$;

$A1.9$ $(A\rightarrow B)\rightarrow((A\rightarrow\neg B)\rightarrow\neg A)$;

$A1.10$ $\neg\neg A\rightarrow A$.

Другая система использует только две связки: $\to$ и $\neg$. При этом сокращается алфавит исчисления (выбрасываются знаки $\vee$, &) и соответственно определение формулы.

Система аксиом 2.

$A2.1$ $A\to(B\to A)$;

$A2.2$ $(A\to(B\to C))\to((A\to B))\to(A\to C))$;

$A2.3$ $(\neg A\to\neg B)\to((\neg A\to B)\to A)$.

Приведенные системы аксиом равносильны, так как порождают одно и то же множество формул.

Возможны и другие системы аксиом, равносильные приведенным выше системам. Если сравнить эти систем аксиом. Система аксиом 2 является более компактной и обозримой. Система аксиом 1 более богата и выводе различных формул короче.

4. *Правила вывода*.

Правило подстановки. Если выводимая формула F содержит некоторую переменную A (обозначим этот факт $F(A)$) и существует произвольная формула B, то формула $F(B)$, получающаяся заменой всех вхождений A на формулу B, также выводима в исчислении высказываний: $B:\dfrac{F(A)}{F(B)}$.

<u>*Пример:*</u> Пусть даны формулы $F=A\wedge C\to A$ и $B=C\to\rceil A$.

Если выполнить подстановку формулы B в формулу F вместо формулы A, то получим новую формулу F`.

$$F':\frac{A\wedge C\to A}{(C\to\overline{A})\wedge(C\to\overline{A})}.$$

Если проверить значения двух формул F и F' по таблицам истинности, то мы получим тождество двух формул.

Правила заключения. При выводе формулы из множества аксиом и посылок используют два основных правила заключения: modus ponens и modus tollens.

Правило *Modus Ponens*: если A и $A \to B$ есть выводимые формулы, то B также выводимая формула, т.е. $\dfrac{A, A \to B}{B}$.

Формальная запись высказывания (умозаключения, рассуждения) в виде формулы $(A \cdot (A \to B)) \to B$. Проверка правильности рассуждения проводится по таблице истинности.

Проверка тавтологии при помощи эквивалентных преобразований:

$$(((A \to B) \cdot A) \to B) = \overline{((\overline{A} \vee B) \cdot A)} \vee B = (A \cdot \overline{B} \vee \overline{A}) \vee B = \overline{A} \vee \overline{B} \vee B = \overline{A} \vee 1 \equiv 1.$$

Пример: Дано суждение: «Сумма внутренних углов многоугольника равна 180° (A). Если сумма внутренних углов многоугольника равна 180° (A), то многоугольник есть треугольник (B). Следовательно, дан треугольник ()».

$$\frac{A, A \to B}{B}.$$

Пример: Дано суждение: «Если лекция скучная (A), то студент спит (B). Лекция скучная (A)». Необходимо сделать вывод.

$$\frac{A, A \to B}{B}$$

Следовательно, студент спит (B).

Правило *Modus Tollens*: если формулы $\overline{A}$ и $B \to A$ есть выводимые формулы, то $\overline{B}$ также выводимая формула, т.е $\dfrac{\overline{A}, B \to A}{\overline{B}}$.

Пример: Дано суждение: «Если лекция скучная (B), то студент спит (A). Студент не спит($\overline{A}$)». Необходимо сделать вывод.

$$\frac{\overline{A}, B \to A}{\overline{B}}$$

Следовательно, лекция не скучная (B).

Для построения выводов в исчислении высказываний применяется метод дедукции, основанный на выявлении общих закономерностей в процессе построения доказательств вывода формул.

Теорема дедукции. Если $F_1,\dots,F_{n-1},F_n \vdash G$, то $F_1,\dots,F_{n-1} \vdash F_n \to G$.

В частности, если $F \vdash G$, то $\vdash F \to G$.

Например, покажем с применением теоремы дедукции, что аксиома 2.3 выводима из системы аксиом 1.

1. Подставим в аксиому 1.9 $\neg A$ вместо A: $(\neg A\to B)\to((\neg A\to\neg B)\to \neg\neg A)$.
2. Затем применяем два раза правило заключения (*Modus Ponens*) и получаем $(\neg A\to B), ((\neg A\to\neg B)\vdash\neg\neg A)$.
3. Так как из аксиомы 1.10 следует по правилу заключения, что $\neg\neg A\vdash A$, то получаем $(\neg A\to B), ((\neg A\to\neg B)\vdash A)$.
4. Переставим гипотезы в полученной выводимости, так их порядок неважен по определению выводимости: $(\neg A\to\neg B), ((\neg A\to B)\vdash A)$.
5. Затем двойное применение теоремы дедукции дает аксиому 2.3: $(\neg A\to\neg B)\to((\neg A\to B)\to A)$.

Рассмотрим теперь *примеры вывода в исчислении высказываний*.

Пример: Покажем, что формула $A\to A$ выводима из системы аксиом 2:

$$\vdash A\to A.$$

1. $(A\to((A\to A)\to A))\to((A\to(A\to A))\to(A\to A))$

(подстановка в аксиому A2.2 $A\to A$ вместо B и A вместо C)

2. $A\to((A\to A)\to A$ *(подстановка в аксиому A2.1 $A\to A$ вместо B)*
3. $(A\to(A\to A))\to(A\to A)$

(из шагов 2,1 по правилу заключения Modus Ponens)

4. $A\to(A\to A)$ (*подстановка в аксиому A2.1 A вместо B)*

5. $A \to A$ (*из шагов 4,3 по правилу заключения Modus Ponens)*

Пример: Докажем, что $A \vdash B \to A$

Пусть А выводима. Тогда из A и аксиомы А2.1 по правилу заключения получаем $\dfrac{A, A \to (B \to A)}{B \to A}$, что и доказывает искомую выводимость.

Полученную выводимость $A \vdash B \to A$ вместе с правилом подстановки можно рассматривать, как правило $\dfrac{A}{B \to A}$: «если формула A выводима, то выводима и формула $B \to A$, где B – любая формула».

Метод дедуктивного вывода

Теорема дедукции $F_1, F_2, ..., F_n \vdash B$ равносильна доказательству $\vdash (F_1 \wedge F_2 \wedge ... \wedge F_n \to B)$. Если каждая F_i=И, то $F_1 \wedge F_2 \wedge ... \wedge F_n$=И, а если $(F_1 \wedge F_2 \wedge ... \wedge F_n \to B)$ =И, то B=И.

Следовательно, при истинности всех посылок и истинности импликации (по правилу m.p.), заключение всегда будет истинным.

Для исчисления предикатов также имеет место теорема дедукции: если $A_1, A_2, \ldots, A_n \vdash B$, то $\vdash A_1 \to (A_2 \to (\ldots, (A_n \to B)\ldots))$.

Используя правила эквивалентных преобразований алгебры высказываний, можно показать дедуктивный характер вывода заключения:

1) $\vdash (F_1 \wedge F_2 \wedge ... \wedge F_n \to B)$;

2) $\vdash (\neg(F_1 \wedge F_2 \wedge ... \wedge F_n) \vee B)$;

3) $\vdash (\neg F_1 \vee \neg F_2 \vee ... \vee \neg F_n \vee B)$;

4) $\vdash (\neg F_1 \vee \neg F_2 \vee ... \vee \neg F_{n-1} \vee (F_n \to B))$;

5) $\vdash (\neg F_1 \vee \neg F_2 \vee ... \vee (F_{n-1} \to (F_n \to B)))$;

6) $\vdash (\neg F_1 \vee (F_2 \to ... \to (F_{n-1} \to (F_n \to B))...))$;

7) $\vdash (F_1 \to (F_2 \to \ldots \to (F_{n-1} \to (F_n \to B))\ldots)$

Так формируется система дедуктивного вывода от посылок до заключения.

Пример: Дано суждение: «Всякое общественно опасное деяние (A) наказуемо (B). Преступление (C) есть общественно опасное деяние (A). Дача взятки (D) - преступление (C)**.** Следовательно, дача взятки наказуема?”.

$$\frac{A \to B, C \to A, D \to C}{D \to B}$$

1) $F_1 = A \to B$ посылка;

2) $F_2 = C \to A$ посылка;

3) $F_3 = D \to C$ посылка;

4) $F_4 = C \to B$ заключение по правилу подстановки;

5) $F_5 = D \to B$ заключение по правилу подстановки.

Следовательно, дача взятки (D) наказуема (B).