Алгоритм построения таблицы истинности

Для построения таблицы истинности формулы алгебры логики выполняется последовательность следующих шагов алгоритма:

1. Определение количество переменных n в формуле;
2. Определение числа строк в таблице $m= 2^n$;
3. Подсчет количества логических операций в формуле;
4. Установление последовательности выполнения логических операций с учетом скобок и приоритетов;
5. Определение количество столбцов в таблице: число переменных и число операций;
6. Определение наборов входных переменных с учетом того, что они представляют собой натуральный ряд n-разрядных двоичных чисел от 0 до 2^n-1;
7. Заполнение таблицы истинности по столбцам, выполняя логические операции в соответствии с установленной в п. 4 последовательностью.

Наборы входных переменных во избежание ошибок иногда рекомендуют перечислять следующим образом:

- определить количество наборов входных переменных;
- разделить колонку значений первой переменной пополам и заполнить верхнюю часть колонки 0, а нижнюю - 1;
- разделить колонку значений второй переменной на четыре части и заполнить каждую четверть чередующимися группами 0 или 1, начиная с группы 0;
- продолжать деление колонок значений последующих переменных на 8, 16 и т.д. частей, заполняя их группами 0 или 1 до тех пор, пока группы 0 и 1 не будут состоять из одного символа.

Пример: Построить таблицу истинности для формулы:

$$((P\to Q) \vee (P\to (Q\wedge P)))$$

P	Q	$P\to Q$	$Q\wedge P$	$(P\to (Q\wedge P))$	$((P\to Q) \vee (P\to (Q\wedge P)))$ результат
0	0	1	0	1	1
0	1	1	0	1	1
1	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1

Для различных значений истинности пропозициональных переменных и подформул, построенных на логических связках, можно последовательно определить значение истинности формулы F.

Существенные и несущественные перемененные

По определению переменная x_{i} называется ***существенной***, если $f(x_1, \ldots,0, \ldots, x_n)\neq f(x_1, \ldots, 1, \ldots, x_n)$, хотя бы для одного набора значений $x_1, \ldots,x_{i-1}, x_{i+1},\ldots, x_n$. $f = f(x_1,\ldots x_n)$ – булева функция.

Переменная x_i в функции $f(x_1, \ldots,x_{i-1}, x_i, x_{i+1},\ldots, x_n)$ называется ***несущественной (или фиктивной)***, если $f(x_1, \ldots,x_{i-1}, 0, x_{i+1},\ldots, x_n)= f(x_1, ..,x_{i-1}, 1, x_{i+1},\ldots, x_n)$ при любых значениях остальных переменных, т.е. если изменение значения x_i в любом наборе значений $x_1, \ldots, x_n$ не меняет значения функции.

В этом случае функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ по существу зависит от n-1 переменной, т.е. представляет собой функцию $g(x_1, ..,x_{i-1}, x_{i+1},\ldots, x_n)$ от n-1 переменной. Говорят, что функция g получена из функции f удалением фиктивной переменной, а функция f получена из g введением фиктивной переменной, причем эти функции по определению считаются равными.

Например, $f(x_1,x_2,x_3)=g(x_1,x_2)$ означает, что при любых значениях x_1 и x_2 $f=g$ независимо от значения x_3.

Пример:

Необходимо доказать, что в функции $f(x_1\vee\neg x_2)(x_3\vee\neg x_3)$ переменная x_3 является несущественной.

$f(x_1,x_2,0)\equiv(x_1\vee\neg x_2)(0\vee\neg 0)\equiv x_1\vee\neg x_2\ (0\vee\neg 0=1)$

$f(x_1,x_2,1)\equiv(x_1\vee\neg x_2)(1\vee\neg 1)\equiv x_1\vee\neg x_2\ (1\vee\neg 1=1)$

Отсюда следует, что x_1, x_2 – существенные переменные.

Формулы в логике высказываний

Всякое сложное высказывание, которое может быть получено из элементарных высказываний посредством применения логических связок отрицания, конъюнкции, дизъюнкции, импликации и эквивалентности, называют ***формулой*** алгебры логики.

Символы x_1, …, x_n будем считать формулами глубины 0. Формула $F=f(F_1, \ldots, F_n)$ имеет глубину $k+1$, если f – функция, а $F_1, \ldots F_n$ – формулы, максимальная из глубин которых равна k. При этом $F_1, \ldots F_n$ называются ***подформулами*** F, а f – внешней или главной операцией F.

Определение:

Любую пропозициональную переменную можно назвать формулой нулевого порядка, т. е. $A_i=F_i$.

Если F_1 и F_2 – пропозициональные формулы, то $\rceil F_1$; $\rceil F_2$; $F_1\wedge F_2$; $F_1\vee F_2$; $F_1\rightarrow F_2$ и $F_1\leftrightarrow F_2$ также пропозициональные формулы.

Никаких других формул в исчислении высказываний нет.

Множество формул образуют язык математической логики. Это множество перечислимо и разрешимо.

Подформула формулы **–** любая ее часть, которая сама является формулой.

Для формирования сложных формул используют вспомогательные символы «(» и «)».

Так при записи сложных высказываний следует обращать внимание, чтобы в формулах не было двух рядом стоящих логических связок – они должны быть разъединены формулами либо вспомогательными символами и не было двух рядом стоящих формул – они должны быть разъединены логической связкой.

Для записи формул, как правило, используют инфиксную форму записи, при которой знаки операций стоят между аргументами.

При записи сложных формул следует помнить, что

1) каждое вхождение логической связки «$\neg$» относится к пропозициональной переменной или формуле, следующей непосредственно за логической связкой справа;

2) каждое вхождение логической связки «$\wedge$» после расстановки скобок связывает пропозициональные переменные или формулы, непосредственно окружающие логическую связку;

3) каждое вхождение логической связки «$\vee$» после расстановки скобок связывает пропозициональные переменные или формулы, непосредственно окружающие эту связку и т.д.

При использовании этих правил к одной и той же формуле скобки следует расставлять постепенно, продвигаясь слева направо.

Логические связки по силе и значимости могут быть упорядочены так: $\neg$; $\wedge$; $\vee$; $\rightarrow$; $\leftrightarrow$. То есть самой сильной связкой является отрицание, затем конъюнкция, дизъюнкция, импликация и, наконец, эквивалентность. Зная правила о силе логических связок, можно опускать те пары скобок, без которых ясен порядок исполнения логических операций.

Пример: пусть дана формула F=$(((F_1\vee(\rceil F_2))\rightarrow F_3)\leftrightarrow F_4)$.

Необходимо удалить лишние скобки.

1) убрать внешние скобки для формулы, так как они не определяют старшинство никаких операций:

$$F=((F_1\vee(\rceil F_2))\rightarrow F_3)\leftrightarrow F_4;$$

2) убрать скобки, охватывающие формулу импликации, так как операция эквивалентности будет исполняться только после выполнения операции импликации:

$$F=(F_1\vee(\rceil F_2))\rightarrow F_3\leftrightarrow F_4;$$

3) убрать скобки, охватывающие формулу дизъюнкции, так как операция импликации будет исполняться только после выполнения операции дизъюнкции:

$$F=F_1\vee(\neg F_2)\to F_3\leftrightarrow F_4;$$

4) убрать скобки, охватывающие формулу отрицания, так как операция дизъюнкции будет исполняться только после выполнения операции отрицания:

$$F=F_1\vee\neg F_2\to F_3\leftrightarrow F_4;$$

Итак, последовательность исполнения операций после задания значений пропозициональных переменных следующая: сначала необходимо определить значение формулы $(\neg F_2)$, затем $(F_1\vee(\neg F_2))$ затем $((F_1\vee(\neg F_2))\to F_3)$ и, наконец, $(((F_1\vee(\neg F_2))\to F_3)\leftrightarrow F_4)$.

Пример: Дана формула $F=F_1\wedge F_2\wedge F_3\vee\neg F_1\to F_3\leftrightarrow F_1$. Необходимо расставить все скобки.

1) поставить скобки на формулу, реализующую операцию отрицания:

$F=F_1\wedge F_2\wedge F_3\vee(\neg F_1)\to F_3\leftrightarrow F_1$

2) поставить скобки на формулу, реализующую операцию конъюнкции:

$F=((F_1\wedge F_2)\wedge F_3)\vee(\neg F_1)\to F_3\leftrightarrow F_1$

3) поставить скобки на формулу, реализующую операцию дизъюнкции:

$F=(((F_1\wedge F_2)\wedge F_3)\vee(\neg F_1))\to F_3\leftrightarrow F_1$

4) поставить скобки на формулу, реализующую операцию импликации:

$F=((((F_1\wedge F_2)\wedge F_3)\vee(\neg F_1))\to)F_3\leftrightarrow F_1$

5) поставить скобки на формулу, реализующую операцию эквивалентности:

$F=(((((F_1\wedge F_2)\wedge F_3)\vee(\neg F_1))\to)F_3\leftrightarrow F_1)$.

Формулы F и G называются ***равносильными***, если для любой интерпретации φ выполняется равенство $\varphi(F)=\varphi(G)$.

Формула F называется ***тождественно истинной*** если для любой интерпретации φ выполняется равенство $\varphi(F)=1$.

Например, формула $F=X\wedge Y\rightarrow X$ является тождественно истинной. Для проверки равенства $\varphi(F)=1$ не надо рассматривать все интерпретации, а лишь четыре, которые различаются на атомарных формулах X и Y. Для таких интерпретаций надо вычислить значение формулы F, т.е. составить таблицу истинности формулы F.

X	Y	$X\wedge Y$	$F=X\wedge Y\rightarrow X$
0	0	0	1
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	1

Мы видим, что столбец формулы F состоит из одних единиц. Это означает, что формула F тождественно истинна.

Формула F называется ***тождественно ложной*** если для любой интерпретации φ выполняется равенство $\varphi(F)=0$.

Формула F называется ***выполнимой*** если существует интерпретация, при которой формула F истинна. Эта терминология применима также к множествам формул: множество Q формул *выполнимо*, если существует интерпретация, при которой истинны все формулы Q.

Формула F *(логически) следует* из множества формул Q (или множество формул Q *влечёт* формулу F, символически, $Q \models F$), если для каждой интерпретации, при которой все формулы Q истинны, формула F также истинна.

Формулы, содержащие кроме переменных только знаки логических функций $\vee,\wedge,\neg$, называют булевыми формулами.

Алгебра $(P_2;\vee,\wedge,\neg)$ над множеством логических функций с тремя операциями называется булевой алгеброй, а операции $\vee,\wedge,\neg$, называют булевыми операциями.

Способы задания логической функции

Существует ряд способов задания логической функции. Рассмотрим важнейшие из них.

1. Формула, указывающая последовательность логических операций, которые нужно произвести над высказываниями – аргументами, чтобы получить значение функции. Например, $F(X_1, X_2, X_3) = X_1 \cdot \overline{X}_2 \rightarrow X_3.$

2. Таблица истинности. В таблице указываются значения функции в зависимости от значений истинности аргументов. Если функция зависит от n аргументов, то число всех наборов аргументов равно 2^n. Про таблицы истинности мы уже говорили.

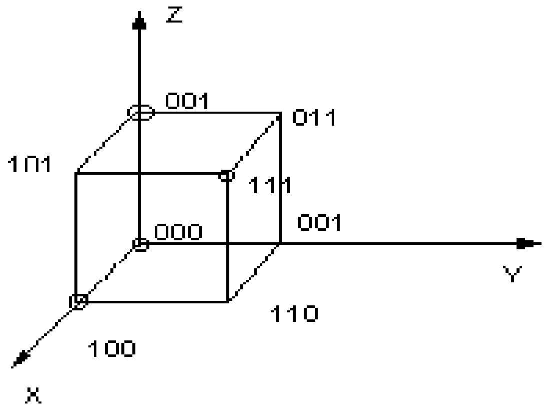
3. Числовой способ задания функции. Каждой независимой переменной-аргументу функции ставится в соответствие число 2^k (k = 0, 1, 2,...). Аргументы функции записываются в виде упорядоченного множества, например, $F(X_1, X_2, X_3)$. При этом переменная, записанная крайней справа, получает коэффициент $2^0 = 1$, переменная, стоящая рядом слева, получает коэффициент $2^1=2$ и т. д. Так, для функции $F(X_1, X_2, X_3)$ независимые переменные получают следующие коэффициенты: X_3-1, X_2-2. X_1-4. Для каждого набора независимых переменных определяется число номер N по формуле

$N = 4 \cdot X_1 + 2 \cdot X_2 + 1 \cdot X_3$

При задании функции указывают номера тех наборов, на которых функция равна единице, и перед списком номеров единичных наборов ставят знак дизъюнкции. Можно также указать те номера наборов, на которых функция равна нулю, но при этом перед списком нулевых наборов ставят знак конъюнкции. Например, функция, заданная таблицей истинности может быть записана следующим образом: $F(X,Y,Z) = \vee(0,1,4,7) = \wedge(2,3,5,6)$

N	X	Y	Z	F
0	0	0	0	1
1	0	0	1	1
2	0	1	0	0
3	0	1	1	0
4	1	0	0	1
5	1	0	1	0
6	1	1	0	0
7	1	1	1	1

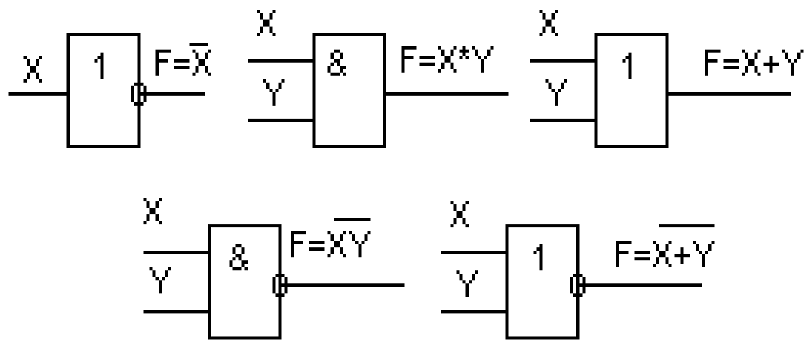
<u>4. Геометрический способ задания логической функции</u>. Для функции *n* – независимых логических переменных рассматривается единичный *n*- мерный куб. Вершины куба соответствуют наборам независимых переменных. Каждой вершине приписывают значение функции на соответствующем наборе. На рисунке единичные наборы помечают, например, кружками.



Геометрический способ задания логической функции

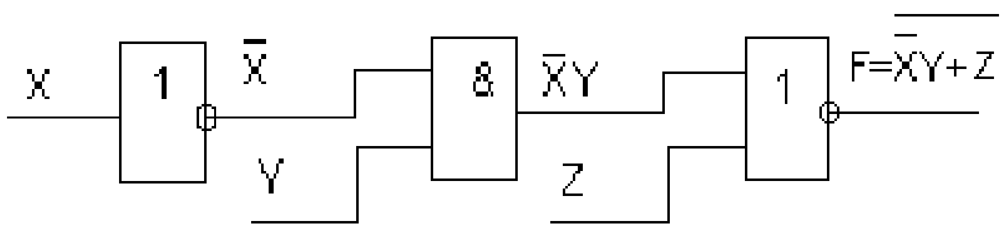
<u>5. Логическая схема</u>, представляющая собой условное графическое обозначение логических функций.

На рисунке показаны графические обозначения некоторых элементарных логических функций.



Графические обозначения элементарных логических функций.

На рисунке показан пример логической схемы.



Логическая схема.

Законы алгебры логики

Рассмотрим основные законы, определяющие логические операции (свойства булевых операций):

1. Ассоциативность:

1а) $x(yz) = (xy)z;$

1б) $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z.$

2. Коммутативность:

2а) $xy = yx;$

2б) $x \vee y = y \vee x.$

3. Дистрибутивность:

3а) $x(y \vee z) = xy \vee xz;$

3б) $x \vee (yz) = (x \vee y)(x \vee z).$

4. Идемпотентность:

4а) $xx = x;$

4б) $x \vee x = x.$

5. Двойное отрицание:

$\overline{\overline{x}} = x.$

6. Свойства констант:

6а) $x \wedge 1 = x;$ 6б) $x \wedge 0 = 0;$

6в) $x \vee 1 = 1;$ 6г) $x \vee 0 = x;$

6д) $\overline{1} = 0;$ 6е) $\overline{0} = 1.$

7. Закон противоречия:

$x\overline{x} = 0.$

8. Закон исключения третьего:

$x \vee \overline{x} = 1.$

9. Законы де Моргана:

9а) $\overline{xy} = \overline{x} \vee \overline{y};$ 9б) $\overline{x \vee y} = \overline{x}\ \overline{y}.$

Эквивалентные преобразования логических формул

Знание законов алгебры высказываний позволяет выполнять эквивалентные преобразования любых логических формул, сохраняя их значения для любых наборов пропозициональных переменных.

Законы алгебры логики остаются справедливыми при подстановке вместо переменных любых логических функций, и, следовательно, любых формул.

Правило подстановки формулы вместо переменной: при подстановке формулы F вместо переменной x все вхождения переменных x в исходное соотношение должны быть заменены формулой F.

Правило замены подформул: если F_1=F_2 и F содержит подформулу F_1, то замена F_1 на F_2 даст формулу F' – эквивалентную F.

Эквивалентные преобразования – преобразования, использующие эквивалентные соотношения и правило замены (правила упрощения булевых формул).

Правила упрощения булевых формул:

1. Правило поглощения:

1а) $x \vee xz = x;$

1б) $x(x \vee y) = x.$

2. Правило склеивания:

$$xy \vee x\bar{y} = x.$$

3. Правило раскрепощения (обратное к склеиванию):

$$x = xy \vee x\bar{y}.$$

4. Обобщенное склеивание:

$$xz \vee y\bar{z} \vee xy = xz \vee y\bar{z}.$$

5. Удаление отрицания:

$$x \vee \bar{x}y = x \vee y.$$

Преобразования основных логических операций к булевым операциям осуществляются следующим образом:

$$x \to y = \bar{x} \vee y = (\overline{x\bar{y}});$$

$$x \leftrightarrow y = (x \to y)(y \to x) = (\bar{x} \vee y)(\bar{y} \vee x) = \bar{x}\,\bar{y} \vee xy;$$

$$x \oplus y = \bar{x}y \vee x\bar{y};\ x \downarrow y = \bar{x}\,\bar{y};\ x | y = \bar{x} \vee \bar{y}.$$

Всякую формулу алгебры логики можно заместить равносильной ей формулой, содержащей вместо импликации или эквивалентности только две логических операции: дизъюнкцию и отрицание или конъюнкцию и отрицание. Этот факт показывает, что множество логических связок дизъюнкции и отрицания, конъюнкции и отрицания формируют функционально полные алгебраические системы. Они достаточны для выражения любой логической функции, любой таблицы истинности.

Пример:

Дано $F=(F_1 \to F_2) \to ((F_2 \to F_3) \to (F_1 \vee F_2 \to F_3)$.

Выполнить преобразования для упрощения алгебраического выражения.

Удалить всюду логическую связку “$\to$”:

$F= \rceil(\rceil F_1 \vee F_2) \vee (\rceil(\rceil F_2 \vee F_3) \vee (\rceil(F_1 \vee F_2) \vee F_3)$;

Опустить отрицание на элементарные формулы по закону де Моргана:

$F=F_1 \wedge \rceil F_2 \vee F_2 \wedge \rceil F_3 \vee \rceil F_1 \wedge \rceil F_2 \vee F_3$;

Выполнить преобразование по закону дистрибутивности:

$F=(F_1 \vee \rceil F_1) \wedge \rceil F_2 \vee F_2 \wedge \rceil F_3 \vee F_3$;

Удалить член $(F_1 \vee \rceil F_1)$, так как $(F_1 \vee \rceil F_1)=1$:

$F= \rceil F_2 \vee F_2 \wedge \rceil F_3 \vee F_3$;

Выполнить преобразование по закону дистрибутивности:

$F= \rceil F_2 \vee (F_2 \vee F_3) \wedge (\rceil F_3 \vee F_3)$;

Удалить член $(F_3 \vee \rceil F_3)=1$:

$F= \rceil F_2 \vee (F_2 \vee F3)$;

Применить закон ассоциативности:

$F=(\rceil F_2 \vee F_2) \vee F_3$;

Приравнять «*истине*» значение формулы F, т.к. $(\rceil F_2 \vee F_2)=1$:

$F=1 \vee F_3=1$.