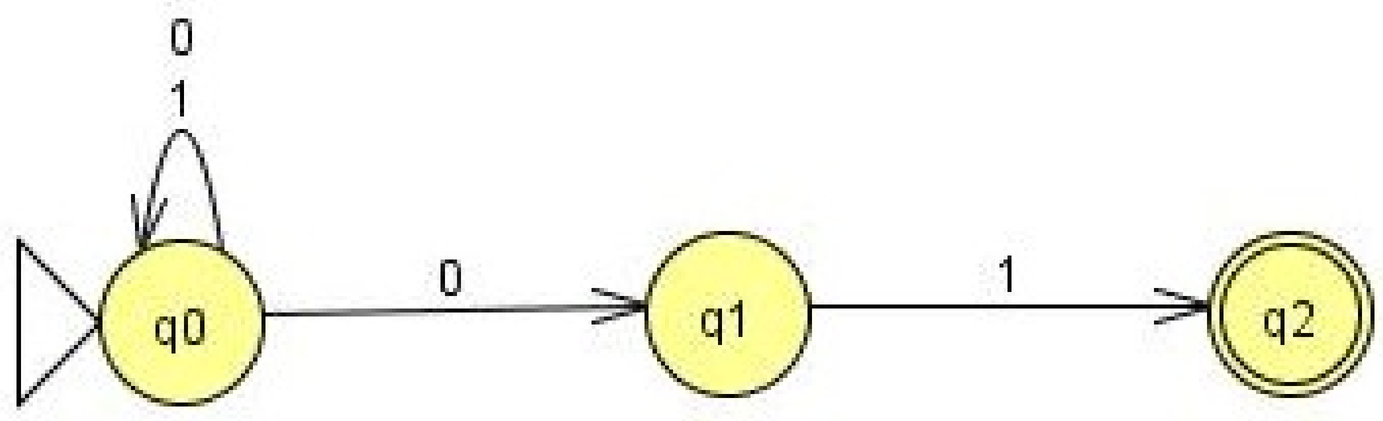
3. Недетерминированные конечные автоматы

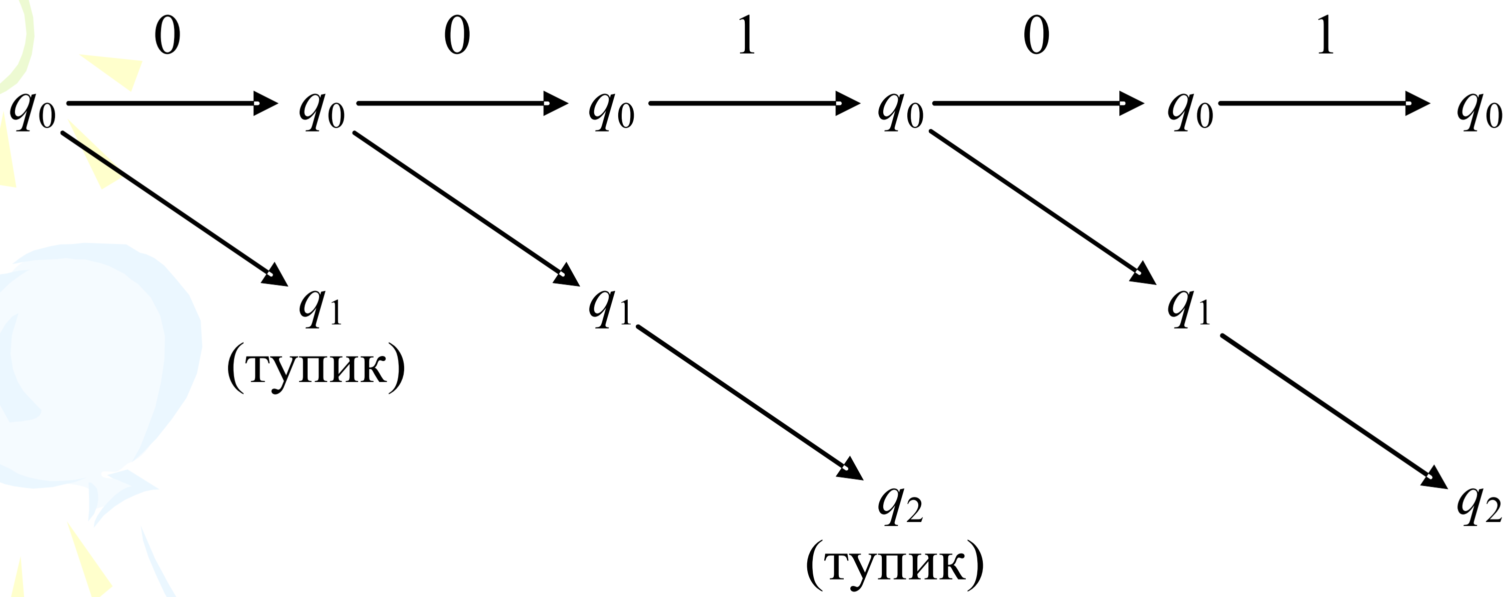
Разделы:

- Неформальное описание и формальное определения НКА
- Язык НКА
- Эквивалентность ДКА и НКА
- НКА с эпсилон-переходами

Недетерминированные КА



Недетерминированные КА



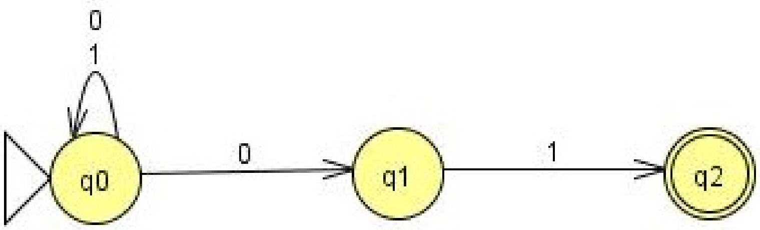
Формальное определение НКА

$$A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$$

- Q – конечное множество состояний
- Σ – конечное множество входных символов
- $\delta(q,a)$ – функция переходов
  - q – состояние
  - a – входной символ (или сигнал)
  - Значение функции – множество состояний
- q_0 – начальное состояние
- F – множество заключительных состояний
- Отличие от ДКА только в результате функции переходов

Формальное определение НКА

- НКА со слайда 2



$$A = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{0,1\}, \delta, q_0, \{q_2\})$$

	0	1
$\to q_0$	$\{q_1, q_2\}$	$\{q_0\}$
q_1	$\varnothing$	q_2
$*q_2$	$\varnothing$	$\varnothing$

Формальное определение НКА

- Аргументами расширенной функции переходов являются состояние q и цепочка входных символов w, значением – множество состояний, в которые НКА попадает из состояния q, обработав строку w
- Это столбец состояний, которые получаются при чтении строки w, при условии, что q – единственное состояние в первом столбце
- Для НКА со слайда 2, получающего на вход строку 001, можно определить эту функцию следующим образом

$$\hat{\delta}(q_0, 001) = \{q_0, q_2\}$$

Формальное определение НКА

$$\hat{\delta}(q, \varepsilon) = \{q\}$$

- **СТУДЕНТАМ**: Почему так?

$w = xa$

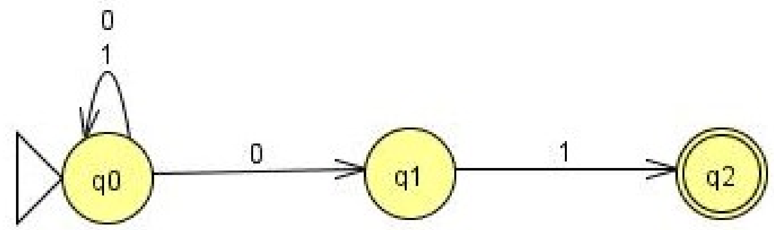
$$\hat{\delta}(q, x) = \{p_1, p_2, \ldots, p_k\}$$

$$\bigcup_{i=1}^{k} \delta(p_i, a) = \{r_1, r_2, \ldots, r_\mathrm{m}\}$$

$$\hat{\delta}(q, w) = \{r_1, r_2, \ldots, r_m\}$$

Формальное определение НКА

- Используем РФП для описания того, как НКА со слайда 2 обрабатывает строку 00101



$$\hat{\delta}(q_0, \varepsilon) = \{q_0\}$$

$$\hat{\delta}(q_0, 0) = \delta(q_0, 0) = \{q_0, q_1\}$$

$$\hat{\delta}(q_0, 00) = \delta(q_0, 0) \cup \delta(q_1, 0) = \{q_0, q_1\} \cup \varnothing = \{q_0, q_1\}$$

$$\hat{\delta}(q_0, 001) = \delta(q_0, 1) \cup \delta(q_1, 1) = \{q_0\} \cup \{q_2\} = \{q_0, q_2\}$$

$$\hat{\delta}(q_0, 0010) = \delta(q_0, 0) \cup \delta(q_2, 0) = \{q_0, q_1\} \cup \varnothing = \{q_0, q_1\}$$

$$\hat{\delta}(q_0, 00101) = \delta(q_0, 1) \cup \delta(q_1, 1) = \{q_0\} \cup \{q_2\} = \{q_0, q_2\}$$

Язык НКА

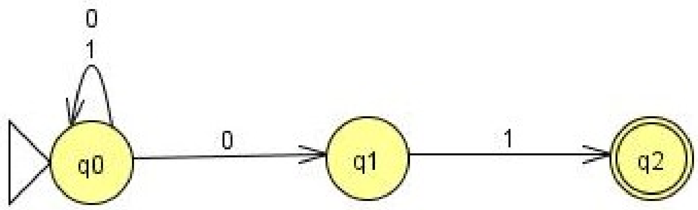
- Для НКА A язык, допускаемый им, определяется так

$$L(A) = \left\{ w \middle| \hat{\delta}(q_0, w) \cap F = \varnothing \right\}$$

- $L(A)$ – это множество строк w из Σ^*, для которых есть по крайней мере одно заключительное среди следующих состояний

$$\hat{\delta}(q_0, w)$$

Язык НКА



- Докажем, что НКА со слайда 2 допускает язык $L = \{w \mid w$ оканчивается на 01$\}$
- Для этого мы докажем три следующих утверждения
  1. РФП содержит q_0 для любой строки w
  2. Она содержит q_1 тогда и только тогда, когда w заканчивается на 0
  3. Она содержит q_2 тогда и только тогда, когда w заканчивается на 01
- Методом от противного просто доказывается случай подачи на вход пустой строки, а затем и для любой входной строки

Эквивалентность НКА и ДКА

- Любой язык, описываемый некоторым НКА, можно описать и ДКА
- Обычно ДКА имеет столько же состояний и гораздо большее число переходов
- Наихудший случай: ДКА может содержать 2^n состояний, а НКА для того же языка имеет n состояний
- Когда пытаются доказать, что у ДКА есть все возможности НКА, используют **конструкцию подмножеств**, т.к. она включает построение всех подмножеств множества состояний НКА

Эквивалентность НКА и ДКА

$$N = \left(Q_N, \Sigma, \delta_N, q_0, F_N\right)$$

$$D = \left(Q_D, \Sigma, \delta_D, \{q_0\}, F_D\right)$$

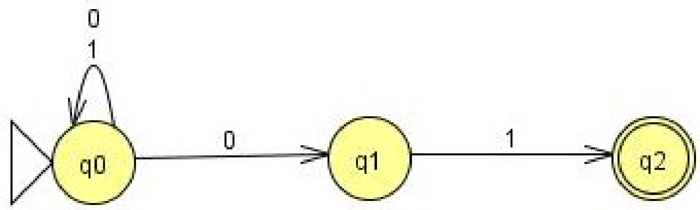
$$L(N) = L(D)$$

$$S \bigcap F_N \neq \varnothing$$

$$S \subseteq Q_N$$

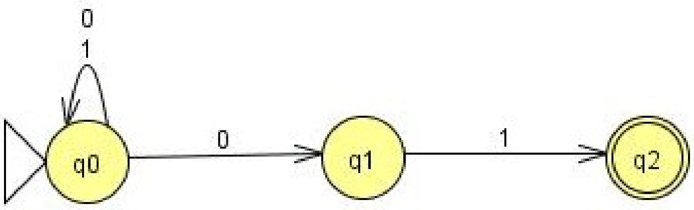
$$\delta_D(S, a) = \bigcup_{p \in S} \delta_N(p, a)$$

Эквивалентность НКА и ДКА



	0	1
$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$
->$\{q_0\}$	$\{q_0,q_1\}$	$\{q_0\}$
q_1	$\varnothing$	$\{q_2\}$
*q_2	$\varnothing$	$\varnothing$
$\{q_0,q_1\}$	$\{q_0,q_1\}$	$\{q_0,q_2\}$
*$\{q_0,q_2\}$	$\{q_0,q_1\}$	$\{q_0\}$
*$\{q_1,q_2\}$	$\varnothing$	$\{q_2\}$
*$\{q_0,q_1,q_2\}$	$\{q_0,q_1\}$	$\{q_0,q_2\}$

Эквивалентность НКА и ДКА



	0	1
$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$
$\to\{q_0\}$	$\{q_0,q_1\}$	$\{q_0\}$
q_1	$\varnothing$	$\{q_2\}$
$*q_2$	$\varnothing$	$\varnothing$
$\{q_0,q_1\}$	$\{q_0,q_1\}$	$\{q_0,q_2\}$
$*\{q_0,q_2\}$	$\{q_0,q_1\}$	$\{q_0\}$
$*\{q_1,q_2\}$	$\varnothing$	$\{q_2\}$
$*\{q_0,q_1,q_2\}$	$\{q_0,q_1\}$	$\{q_0,q_2\}$

	0	1
A	A	A
$\to B$	E	B
C	A	D
$*D$	A	A
E	E	F
$*F$	E	B
$*G$	A	D
$*H$	E	F

Эквивалентность НКА и ДКА

$$\delta_D(\{q_0\},0) = \{q_0, q_1\}$$

$$\delta_D(\{q_0\},1) = \{q_0\}$$

$$\delta_D(\{q_0, q_1\},0) = \{q_0, q_1\}$$

$$\delta_D(\{q_0, q_1\},1) = \{q_0, q_2\}$$

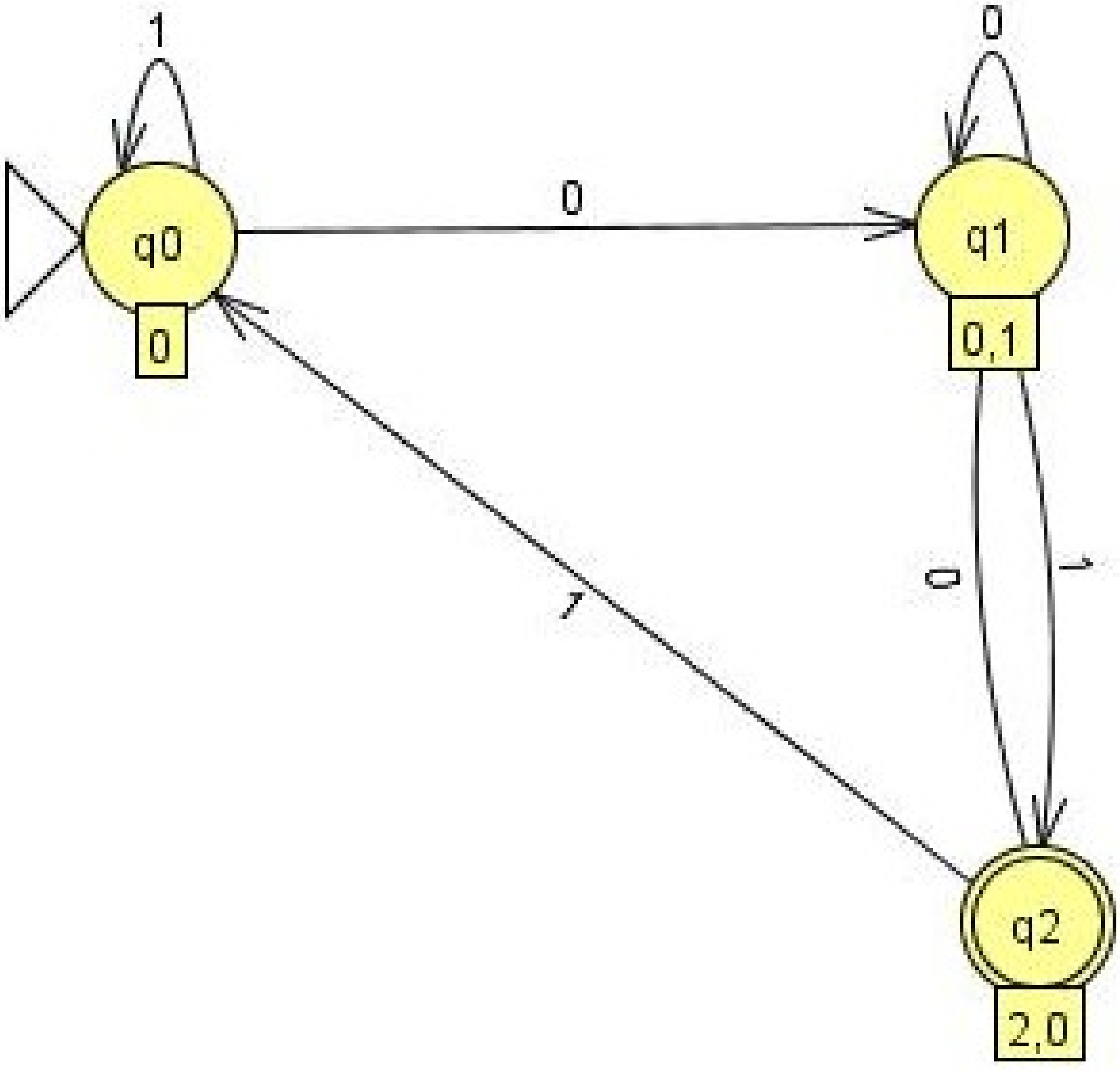
	0	1
A	A	A
$->B$	E	B
C	A	D
$*D$	A	A
E	E	F
$*F$	E	B
$*G$	A	D
$*H$	E	F

$$\delta_D(\{q_0, q_1\},1) = \delta_N(q_0,1) \cup \delta_N(q_1,1) = \{q_0\} \cup \{q_2\} = \{q_0, q_2\}$$

$$\delta_D(\{q_0, q_2\},0) = \delta_N(q_0,0) \cup \delta_N(q_2,0) = \{q_0, q_1\} \cup \varnothing = \{q_0, q_1\}$$

$$\delta_D(\{q_0, q_2\},1) = \delta_N(q_0,1) \cup \delta_N(q_2,1) = \{q_0\} \cup \varnothing = \{q_0\}$$

Эквивалентность НКА и ДКА



Эквивалентность НКА и ДКА

- **Теорема 3.1:** если ДКА *D* построен по НКА *N* с помощью конструкции подмножеств, то *L*(*D*)=*L*(*N*)
- **Доказательство** (начало):

$$\hat{\delta}_D(\{q_0\}, w) = \hat{\delta}_N(\{q_0\}, w)$$

- Сначала доказывается случай подачи на вход пустой строки, а затем и для любой входной строки
- Пусть $w = \varepsilon$
- Из определений РФП ДКА и НКА имеем

$$\hat{\delta}_D(\{q_0\}, \varepsilon) = \{q_0\} \qquad \hat{\delta}_N(\{q_0\}, \varepsilon) = \{q_0\}$$

Эквивалентность НКА и ДКА

- **Доказательство** (продолжение):
- Пусть $|w| = n + 1$, и наше утверждение верно для n
- $w = xa$, и согласно нашей гипотезе

$$\hat{\delta}_D(\{q_0\}, x) = \hat{\delta}_N(\{q_0\}, x)$$

- Допустим, множества состояний N представляют собой $\{p_1, p_2, \ldots, p_k\}$
- По определению НКА:

1) $\hat{\delta}_N(\{q_0\}, w) = \bigcup_{i=1}^{k} \delta_N(p_i, a)$

- Согласно конструкции подмножеств:

2) $\hat{\delta}_D(\{p_1, p_2, \ldots, p_k\}, a) = \bigcup_{i=1}^{k} \delta_N(p_i, a)$

- Зная, что $\hat{\delta}_D(\{q_0\}, w) = \{p_1, p_2, \ldots, p_k\}$ и подставляя (2) в (1), получаем

3) $\hat{\delta}_D(\{q_0\}, w) = \delta_D\left(\hat{\delta}_D(q_0, x), a\right) = \delta_D(\{p_1, p_2, \ldots, p_k\}, a) = \bigcup_{i=1}^{k} \delta_N(p_i, a)$

Эквивалентность НКА и ДКА

- **Доказательство** (окончание):
- Из (1) и (3) видно, что

$$\hat{\delta}_D(\{q_0\}, w) = \hat{\delta}_N(q_0, w)$$

- Как *D*, так и *N* допускают строку *w* тогда и только тогда, когда какая-то одна из двух следующих функций (или обе вместе)

$$\hat{\delta}_D(\{q_0\}, w) \qquad \hat{\delta}_N(q_0, w)$$

- содержат некоторое заключительное состояние из F_N, а значит, мы получили полное доказательство равенства языков

Эквивалентность НКА и ДКА

- **Теорема 3.2**: язык *L* допускается некоторым ДКА, если он допускается некоторым НКА
- **Доказательство** (начало). Достаточность этого утверждения следует из конструкции подмножеств и теоремы 3.1
- Доказательство необходимости также не представляет большой сложности
- Неформально мы можем использовать переход от ДКА к идентичному НКА, причем диаграмму переходов для некоторого ДКА можно рассматривать как диаграмму для НКА, у которого по одному символу есть один переход

Эквивалентность НКА и ДКА

- **Доказательство** (окончание)
- У нас есть ДКА *D*, определим НКА *N* как автомат, эквивалентный *D*, где функция переходов определена правилом
- Если

$$\delta_D(q,a) = p$$

- то

$$\delta_N(q,a) = p$$

- Примем без доказательства, что если

$$\hat{\delta}_D(q_0,w) = p$$

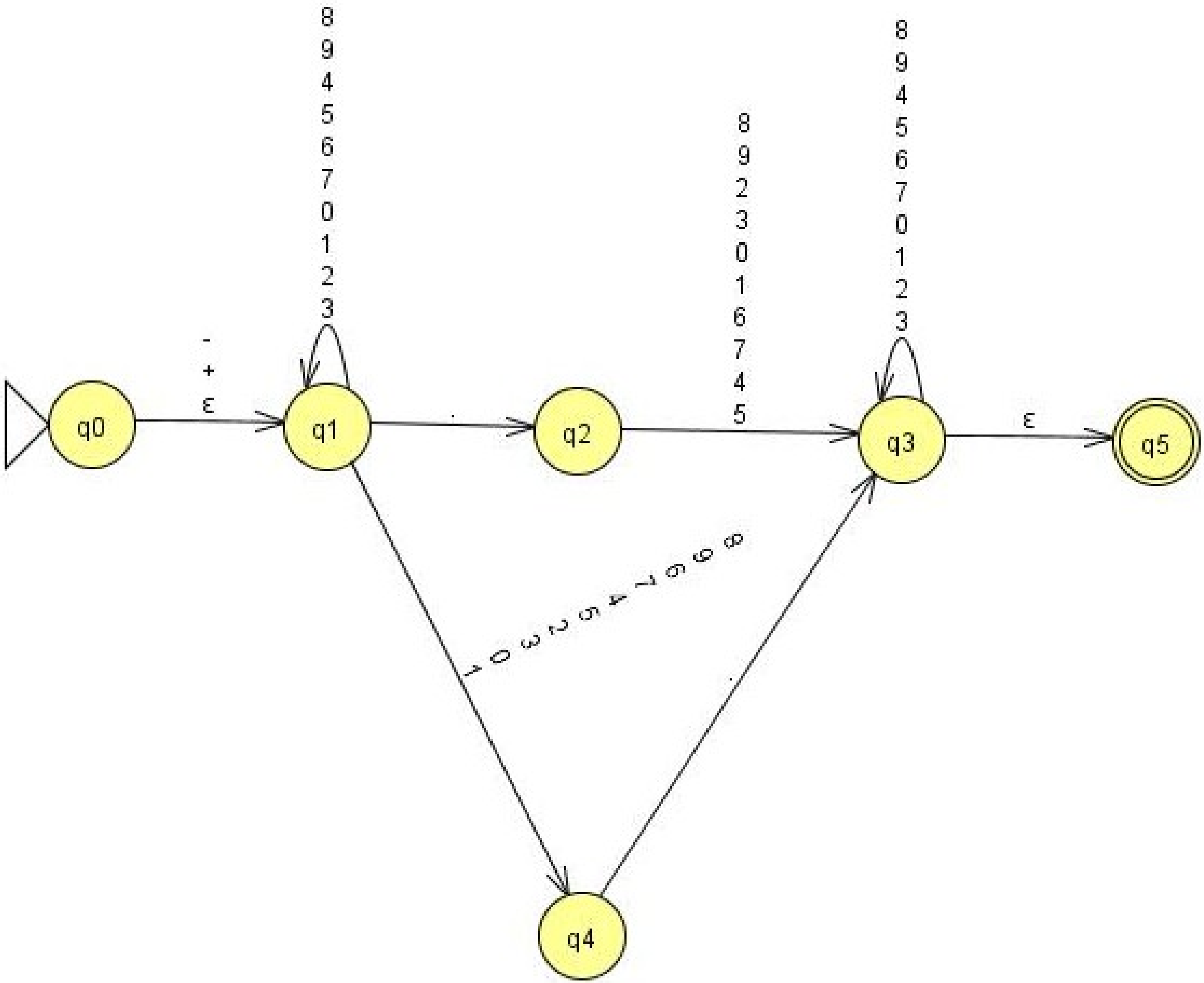
$$\hat{\delta}_N(q_0,w) = \{p\}$$

- то

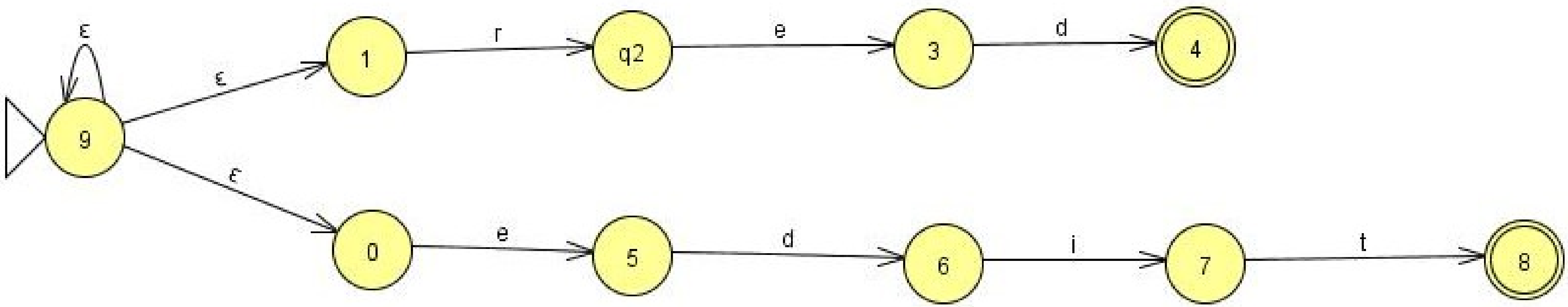
КА с эпсилон-переходами

- У КА новое свойство – возможность совершать переходы по пустой строке, не получая на вход никакого символа
- Класс языков, допустимых КА, это не расширяет, но придает больше удобства для программной реализации
- Для неформального описания будем использовать диаграммы переходов с ε в качестве возможной метки
- КА можно рассматривать как допускающий последовательность меток, среди которых могут быть ε, вдоль путей из начального состояния в заключительное
- Каждая пустая строка «невидима», не добавляя ничего в последовательность

КА с эпсилон-переходами



КА с эпсилон-переходами

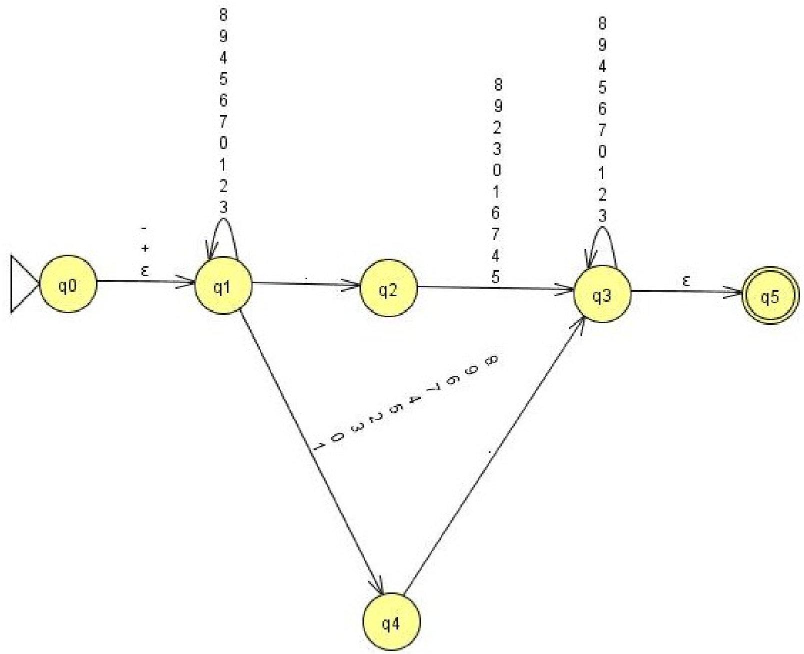


КА с эпсилон-переходами

- ε-НКА представляется точно так же, как НКА
- Разница в функции переходов, которая должна содержать информацию о переходах по пустой цепочке
- В формальной записи ε-НКА только функция переходов отличает его от «обычного» НКА
- Аргументами этой функции являются состояние из множества Q и элемент следующего множества

$$\Sigma \bigcup \{\varepsilon\}$$

КА с эпсилон-переходами



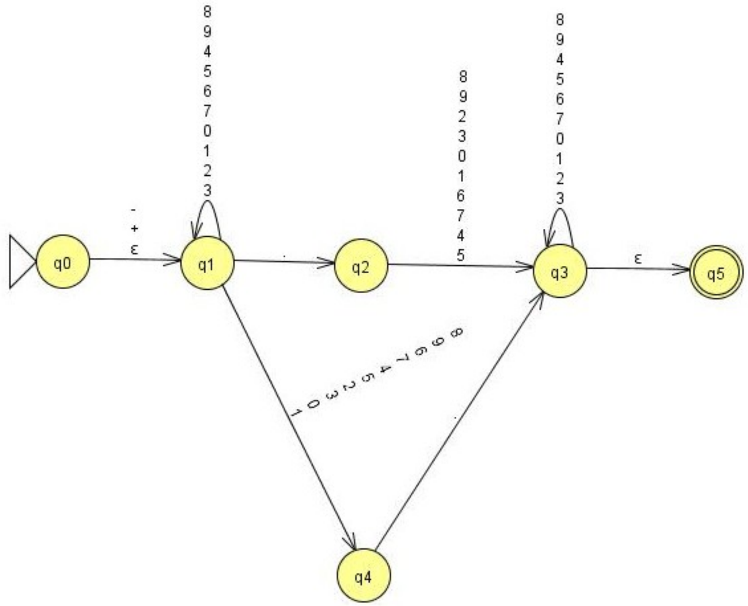
$$E = \left(\{q_0, q_1, \ldots, q_5\}, \{.,+,-,0,1,\ldots,9\}, \delta, q_0, \{q_5\}\right)$$

	ε	+,-	.	0,1,...,9
$\to q_0$	$\{q_1\}$	$\{q_1\}$	$\varnothing$	$\varnothing$
q_1	$\varnothing$	$\varnothing$	$\{q_2\}$	$\{q_1, q_4\}$
q_2	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\{q_3\}$
q_3	$\{q_5\}$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\{q_3\}$
q_4	$\varnothing$	$\varnothing$	$\{q_3\}$	$\varnothing$
$*q_5$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$

ε-замыкания

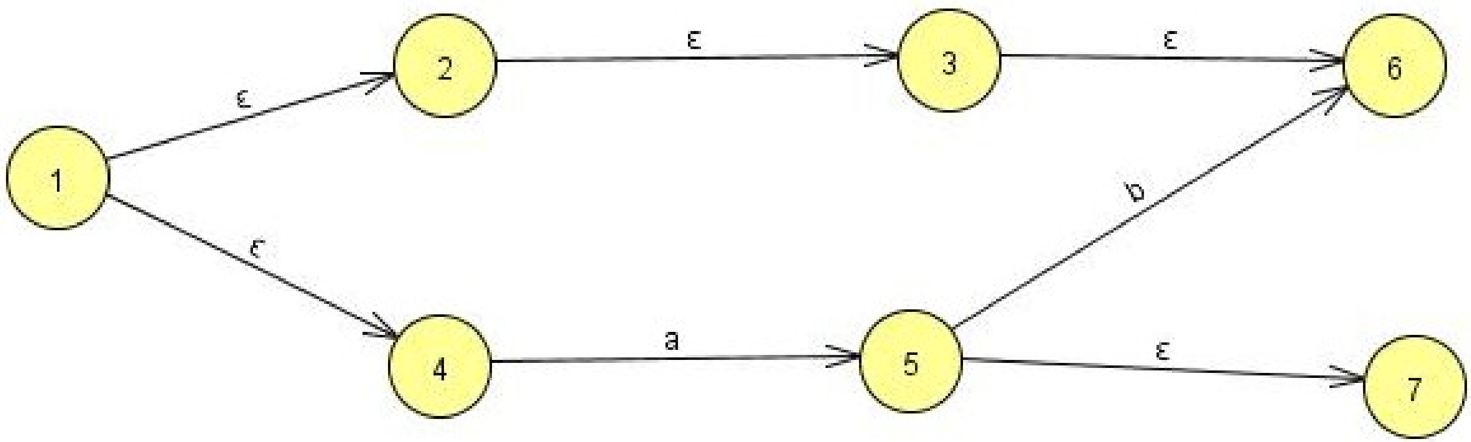
- ε-замыкание *ECLOSE* определяется рекурсивно следующим образом
- *ECLOSE*(q) содержит q
- Если *ECLOSE*(p) содержит p, и есть переход из в p в r, помеченный ε, то *ECLOSE*(q) содержит r
- Более формально, если δ есть функция переходов ε-НКА, и *ECLOSE*(q) содержит p, то *ECLOSE*(q) содержит также все состояния δ(p, ε)

ε-замыкания



- У ε-НКА каждое состояние является собственным ε-замыканием, за исключением $ECLOSE(q_0) = \{q_0, q_1\}$ и $ECLOSE(q_3) = \{q_3, q_5\}$
- Это связано с тем, что в КА всего два ε-перехода
- Один добавляет q_1 в замыкания для q_0, а второй – q_5 в замыкание для q_3

ε-замыкания



- *ECLOSE*(1) = {1, 2, 3, 4, 6}
- В каждое состояние из этого множества можно попасть, проследив путь, помеченный только *ε*

Расширенные переходы и языки, допускаемые ε-НКА

$$E = \left(Q, \Sigma, \delta, q_0, F\right)$$

$$\hat{\delta}\left(q, \varepsilon\right) = ECLOSE\left(q\right)$$

w = xa

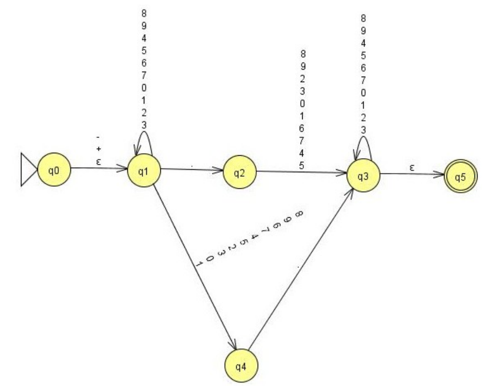
$$\hat{\delta}\left(q, x\right) = \left\{p_1, p_2, \ldots, p_k\right\}$$

$$\bigcup_{i=1}^{k} \delta\left(p_i, a\right) = \left\{r_1, r_2, \ldots, r_m\right\}$$

$$\hat{\delta}\left(q, w\right) = \bigcup_{j=1}^{m} ECLOSE\left(r_j\right)$$

Расширенные переходы и языки, допускаемые ε-НКА

- Для ε-НКА определим РФП для заданной строки $\hat{\delta}(q_0,6.7)$



$$\hat{\delta}(q_0,\varepsilon)=ECLOSE(q_0)=\{q_0,q_1\}$$

$$\delta(q_0,6)\cup\delta(q_1,6)=\{q_1,q_4\}$$

$$\hat{\delta}(q_0,6)=ECLOSE(q_1)\cup ECLOSE(q_4)=\{q_1\}\cup\{q_4\}=\{q_1,q_4\}$$

$$\delta(q_1,.)\cup\delta(q_4,.)=\{q_2\}\cup\{q_3\}=\{q_2,q_3\}$$

$$\hat{\delta}(q_0,6.)=ECLOSE(q_2)\cup ECLOSE(q_3)=\{q_2\}\cup\{q_3,q_5\}=\{q_2,q_3,q_5\}$$

$$\delta(q_2,7)\cup\delta(q_2,7.)\cup\delta(q_5,7.)=\{q_3\}\cup\{q_3\}\cap\varnothing=\{q_3\}$$

$$\hat{\delta}(q_0,6.7)=ECLOSE(q_3)=\{q_3,q_5\}=\{q_3,q_5\}$$

Расширенные переходы и языки, допускаемые ε-НКА

- Если E – ε-НКА, то

$$L(E) = \left\{ w \middle| \hat{\delta}(q, w) \bigcap F \neq \varnothing \right\}$$

- Язык – это множество строк, переводящих КА из начального состояния в одно (возможно и больше) из заключительных состояний
- В последнем примере РФП содержала состояние q_5, которое является заключительным
- Следовательно, строка 6.7 принадлежит языку, допускаемому E

Устранение ε-переходов

- Для любого ε-НКА *E* можно найти ДКА *D*, допускающий тот же язык
- Поскольку состояния *D* являются подмножествами из состояний *E*, то мы будем использовать механизм, похожий на уже знакомую нам конструкцию подмножеств, с применением замыканий

$$E = \left(Q_E, \Sigma, \delta_E, q_E, F_E\right)$$

$$D = \left(Q_D, \Sigma, \delta_D, q_D, F_D\right)$$

Устранение ε-переходов

$$S \subseteq Q_E\text{, где } S = \mathrm{ECLOSE}(S)$$

$$Q_D = \mathrm{ECLOSE}(q_0)$$

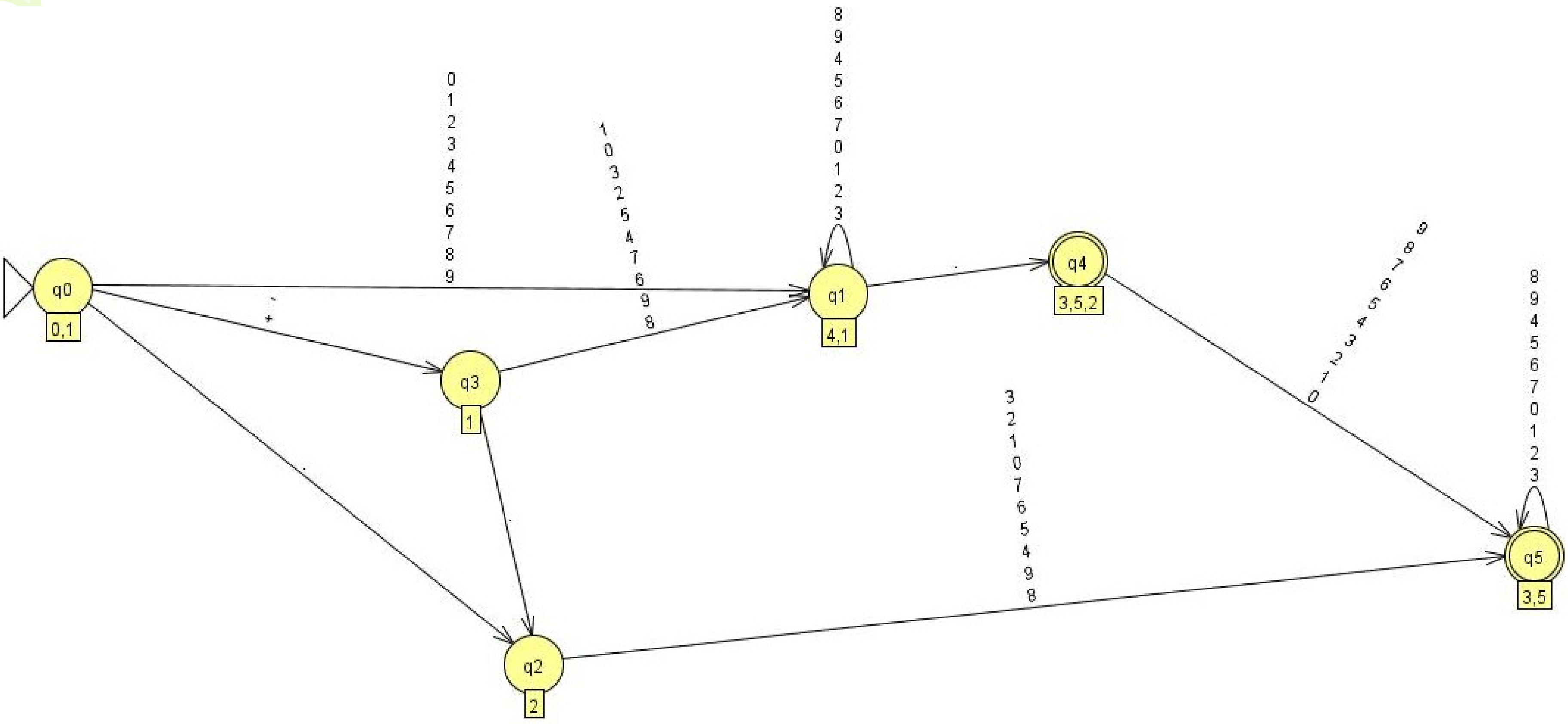
$$F_D = \{S \mid S \subseteq Q_D, S \cap F_E \neq \varnothing\}$$

$$S = \{p_1, p_2, \ldots, p_k\}$$

$$\bigcup_{i=1}^{k} \delta(p_i, a) = \{r_1, r_2, \ldots, r_m\}$$

$$\delta_D(S, a) = \bigcup_{j=1}^{m} ECLOSE(r_j)$$

Устранение ε-переходов



Устранение ε-переходов

- **Теорема 3.3**: Язык *L* допускается некоторым ε-НКА, если он допускается некоторым ДКА
- **Доказательство** (начало). Допустим, $L = L(D)$ для некоторого ДКА D
- Преобразуем D в E, добавив ε-переходы для всех состояний q автомата D
- Также преобразуем переходы D к виду НКА-переходов

$$\delta_D(q, a) = p \qquad\qquad \delta_E(q, a) = \{p\}$$

- Т.е. D и E имеют одни и те же не ε-переходы (доказали достаточность)

Устранение ε-переходов

- **Доказательство** (продолжение):
- Применим модифицированную конструкцию подмножеств для построения ДКА, т.е. для *D* нужно доказать *L*(*E*) = *L*(*D*), показав, что

$$\hat{\delta}_E(q_0, w) = \hat{\delta}_D(q_0, w)$$

- *w* – произвольная строка из символов алфавита

Устранение ε-переходов

- **Доказательство** (продолжение):
- Если $|w| = 0$, то $w = \varepsilon$
- По определению замыкания

$$\hat{\delta}_E(q_0, \varepsilon) = ECLOSE(q_0)$$

- По определению начального состояния ДКА $$q_D = ECLOSE(q_0)$$
- Для всякого ДКА

$$\hat{\delta}_D(p, \varepsilon) = p \qquad \hat{\delta}_D(q_D, \varepsilon) = ECLOSE(q_0)$$

- Доказали необходимость

$$\hat{\delta}_E(q_0, \varepsilon) = \hat{\delta}_D(q_D, \varepsilon)$$

Устранение ε-переходов

- **Доказательство** (продолжение):
- Предположим, что *w* = *xa*, где *a* – последний символ в строке *w*, а также то, что для *x* наше утверждение справедливо
- Значит

$$\hat{\delta}_E(q_0, x) = \hat{\delta}_D(q_D, x) = \{p_1, p_2, \ldots, p_m\}$$

- По определению РФА для ε-НКА вычисляем ее:

$$\bigcup_{i=1}^{k} \delta_E(p_i, a) = \{r_1, r_2, \ldots, r_k\}$$

$$\hat{\delta}_E(q_0, w) = \bigcup_{j=1}^{m} ECLOSE(r_j)$$

Устранение ε-переходов

- **Доказательство** (окончание):
- Мы рассматривали построение ДКА *D* с использованием модифицированной конструкции подмножеств
- С учетом этого, видно, как была построена

$$\hat{\delta}_D(\{p_1, p_2, \ldots, p_k\}, a)$$

- Следовательно, требуемые значения функция совпадают

$$\hat{\delta}_E(q_0, w) = \hat{\delta}_D(q_D, w)$$

- Доказана необходимость для случая любой строки

Дополнительные источники

- Гилл, А. Введение в теорию конечных автоматов / А. Гилл. – М.: Наука, 1966. – 272 с.
- Кузнецов, А.С. Теория вычислительных процессов [Текст] : учеб. пособие / А. С. Кузнецов, М. А. Русаков, Р. Ю. Царев ; Сиб. федерал. ун-т. - Красноярск: ИПК СФУ, 2008. – 184 с.
- Короткова, М.А. Математическая теория автоматов. Учебное пособие / М.А. Короткова. – М.: МИФИ, 2008. – 116 с.
- Молчанов, А. Ю. Системное программное обеспечение. 3-е изд. / А.Ю. Молчанов. – СПб.: Питер, 2010. – 400 с.
- Пример реализации конечных автоматов на языке С++ - http://www.devexp.ru/2011/02/konechnye-avtomaty-

Дополнительные источники

- Теория автоматов / Э. А. Якубайтис, В. О. Васюкевич, А. Ю. Гобземис, Н. Е. Зазнова, А. А. Курмит, А. А. Лоренц, А. Ф. Петренко, В. П. Чапенко // Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика. — М.: ВИНИТИ, 1976. — Т. 13. — С. 109–188. — URL http://www.mathnet.ru/php/getFT.phtml?jrnid=intv&paperid=28&what=fullt&option_
- Серебряков В. А., Галочкин М. П., Гончар Д. Р., Фуругян М. Г. Теория и реализация языков программирования — М.: МЗ-Пресс, 2006 г., 2-е изд. - http://trpl7.ru/t-books/TRYAP_BOOK_Details.htm
- Finite State Machine Generator - http://sourceforge.net/projects/genfsm/
- Введение в схемы, автоматы и алгоритмы - http://www.intuit.ru/studies/courses/1030/205/info
- Недетерминированные конечные автоматы - http://www.rsdn.ru/article/alg/nka.xml