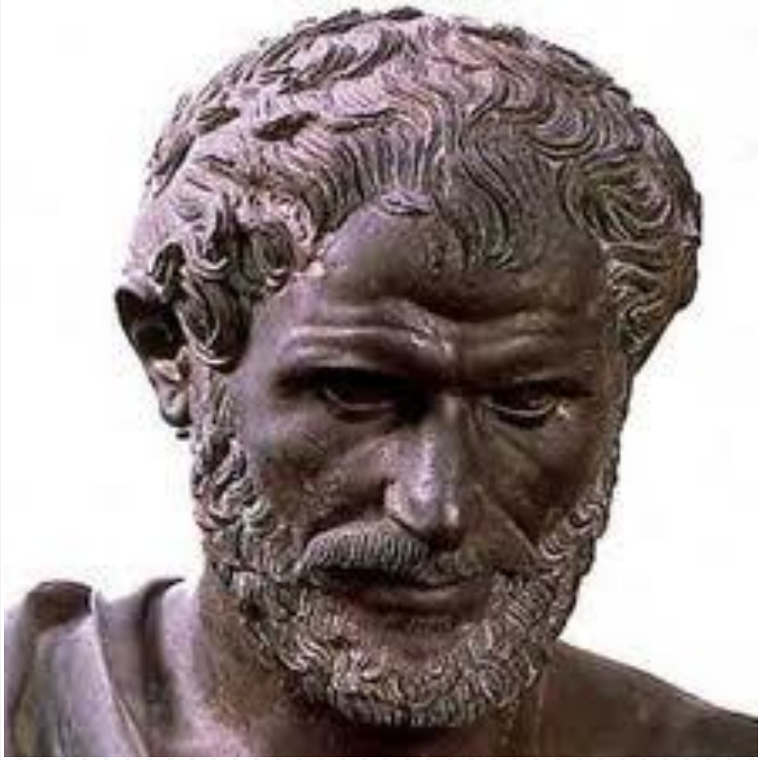
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА И ТЕОРИЯ АЛГОРИТМОВ

Лекция 1

Термин «логика» (происходит от греч. ”*logos*”) означает слово, понятие, рассуждение.

Родоначальник науки о логике – греческий философ ***Аристотель*** *(384-322 г. до н.э.)*



Силлогизмы Аристотеля:

- все *A* обладают свойством *B* (все *A* суть *B*);
- некоторые *A* обладают свойством *B* (некоторые *A* суть *B*);
- все *A* не обладают свойством *B* (все *A* суть не *B*);
- некоторые *A* не обладают свойством *B* (некоторые *A* суть не *B*).

Примеры:

- Все люди смертны. Сократ – человек. Следовательно, Сократ смертен.
- Все дикари раскрашивают свои лица. Некоторые современные женщины тоже раскрашивают свои лица. Следовательно, некоторые современные женщины – дикари.

Немецкий математик

Г. Лейбниц

математизировал

формальные рассуждения

Аристотеля

(кон. XVII в.)

G.W.von Leibniz,
1646-1716

«Мы употребляем знаки не только для того, чтобы передать наши мысли другим лицам, но и для того, чтобы облегчить сам процесс нашего мышления»

Г.В. Лейбниц

Г. Галилей вводит понятие «гипотетико-дедуктивный метод» (нач. XVII в.)

- Официальное признание Математической логики как науки состоялось на Втором Философском Конгрессе в Женеве в 1904г.

- Начиная с 1930-х годов, закладываются основы «машинного мышления» – теории алгоритмов.
- Выдающиеся деятели теории алгоритмов: К. Гёдель, С. Клини, А. Тьюринг, А. Чёрч, Э. Пост, А. Марков, А. Колмогоров и др.

Алгебра высказываний.
Простые и составные высказывания

B={0,1}

- «нет» – «да»,
- «ложно» (Л) – «истинно» (И)

Алгебра образованная двухэлементным множеством *B*={0,1}вместе со всеми возможными операциями на нем, называется ***алгеброй логики***.

Функцией алгебры логики (логической функцией) от *n*-переменных называется *n*-арная операция на множестве {0,1}.

Логическая функция $f\ (x_1,\ x_2,\ x_3,\ \dots\ x_n)$ – это функция, принимающая значения 0,1.

Множество всех логических функций обозначается P_2.

Множество всех логических функций n переменных $P_2(n)$.

Высказывание -повествовательное предложение, о котором можно сказать в данный момент, что оно истинно или ложно, но не то и другое одновременно.

Примеры:

- "3 есть простое число" - истинное
- “3.14… - рациональное число" – ложное
- "Киев - столица Узбекистана" – ложное,
- “Число 6 делится на 2 и на 3” – истинное
- “Сумма чисел 2 и 3 равна 6” – ложное и т.п.

“***Пропозициональные переменные***”
(от лат. propositio - предложение)

“A”, “B”, “C”,...

Пример:

- если C:=“3 есть простое число”,
  то C = 1;

- если D:=“Париж- столица России”,
  то D = 0;

“:=” присвоить значение

Сложные или составные ввысказывания – высказывания, полученные из простых предложений с помощью грамматических связок “не”, “и”, “или”, “если…, то…”, “… тогда и только тогда, когда…” и т.п.

Логические (***пропозициональные***) ***связки***:

- *отрицание* (“НЕ”, “¬ ”),
- *конъюнкция* (“И”, “&”),
- *дизъюнкция* (“ИЛИ”, “V”),
- *импликация* (“ЕСЛИ ..., ТО ...”, “→”),
- *эквивалентность* (“ДЛЯ ТОГО ЧТОБЫ..., НЕОБХОДИМО И ДОСТАТОЧНО...”, “↔” (“~”).

- вспомогательные символы “(“, “)”.

Пример:

- если A2:=“3 - вещественное число”,
  то A2 = 1;
- если A3:=“3 - целое число”,
  то A3 = 1;
- если высказывание “3 – вещественное или целое число”,
  то формула $(A_2 \vee A_3) = 1$;

- ***Посылки*** – *в*ысказывания, из которых делают вывод новых высказываний
- ***Заключение*** –высказывание, получаемое в процессе умозаключений.

Множество пропозициональных переменных *T={A, B, C,…}* с заданными над ними логическими операциями F={ $\neg$; &; $\vee$; $\rightarrow$; $\leftrightarrow$ }

формируют *алгебру высказываний*

$A_в$=<T; F;>

Таблицы истинности

Таблица истинности – таблица, в которой рассматриваются любые наборы пропозициональных переменных и определяются значения всех подформул формулы.

Таблица истинности «отрицание»

A	¬A
0	1
1	0

Таблица истинности «конъюнкция»

A	B	$A \& B$ ($A \wedge B$)
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Таблица истинности «дизъюнкция»

A	B	$A \lor B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Таблица значений функции от *n*- переменных

x_1	x_2	…	x_{n-1}	x_n	f
0	0	…	0	0	f(0,0,…,0,0)
0	0	…	0	1	f(0,0,…,0,1)
0	0	…	1	0	f(0,0,…,1,0)
0	0	…	1	1	f(0,0,…,1,1)
…	…	…	…	…	…
1	1	…	0	0	f(1,1,…,0,0)
1	1	…	0	1	f(1,1,…,0,1)
1	1	…	1	0	f(1,1,…,1,0)
1	1	…	1	1	f(1,1,…,1,1)

Набор $f(0,0,\ldots,0,0)$, $f(0,0,\ldots,0,1)$, $f(0,0,\ldots,1,0)$, $f(0,0,\ldots,1,1)$,…, $f(1,1,\ldots,0,0)$, $f(1,1,\ldots,0,1)$, $f(1,1,\ldots,1,0)$, $f(1,1,\ldots,1,1)$ называют *вектором значений функции*.

Если значение высказывания зависит от n составляющих высказываний $x_1, x_2, x_3, \dots x_n$, то таблица истинности содержит 2^n строк.

Число функций от n-переменных $P_2(n)$ – 2^{2^n}

Логических функций одной переменной 2^{2^1}=4

Пример:

Таблица логических функций одной переменной

x	$\mathbf{f_0}$	$\mathbf{f_1}$	$\mathbf{f_2}$	$\mathbf{f_3}$
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

Классификация функций 2-х переменных

x	y	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Число функций от n-переменных $P_2(n) = 2^{2^n}$

Логических функций двух переменных $2^{2^2} = 16$

Функция $f_0(x,y)$ – константа 0

Функция $f_1(x,y)$ – конъюнкция x и y,
ее обозначения: $x\&y$, $x\wedge y$, xy

Функция $f_2(x,y)=x\&\neg y$ – левая компликация

Функция $f_3(x,y)=x\neg y\vee xy=x$

Функция $f_4(x,y)= \neg x \& y$ – правая компликация

Функция $f_5(x,y)= \neg xy \vee xy = y$

Функция $f_6(x,y)$ – сложение по модулю 2 (неравнозначность).
Ее обозначения: $x \oplus y$, $x \Delta y$

Функция $f_7(x,y)$ – дизъюнкция x и y (функция ИЛИ), ее обозначения: $x \vee y$, $x+y$.

Функция $f_8(x,y) = \neg x \neg y$ – стрелка Пирса, обозначение $x \downarrow y$

Функция $f9(x,y) = \neg x \neg y \vee xy = x \equiv y$ – эквивалентность, равнозначность. Ее обозначения $x \sim y$, $x \equiv y$.

Функция $f_{10}(x,y) = \neg x \neg y \vee x \neg y = \neg y$

Функция $f_{11}(x,y) = x \vee \neg y$ – правая импликация

Функция $f_{12}(x,y)= \neg x \neg y \vee \neg x y = \neg x$

Функция f13(x,y)= $\neg x \vee y$= $x \to y$ – импликация (левая импликация). Ее обозначение $x \to y$, $x \supset y$

Функция f14(x,y)= $\neg(xy)$= $x \mid y$ - штрих Шеффера

Функция $f_{15}(x,y)$ – константа 1