МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА И ТЕОРИЯ АЛГОРИТМОВ

Лекция 2

Формулы в логике высказываний

Формула алгебры логики -
сложное высказывание, которое может быть получено из элементарных высказываний посредством применения логических связок отрицания, конъюнкции, дизъюнкции, импликации и эквивалентности

Определение:

- Всякая пропозициональная переменная – формула.

- Если F_1 и F_2 – пропозициональные формулы, то выражения:

$$\overline{F_1};\ \overline{F_2};\ F_1 \wedge F_2;\ F_1 \vee F_2;\ F_1 \to F_2 \text{ и } F_1 \leftrightarrow F_2$$

также пропозициональные формулы.

- Никаких других формул, кроме построенных по правилам двух предыдущих пунктов в исчислении высказываний нет.

Множество формул образует язык математической логики. Это множество перечислимо и разрешимо.

Подформула формулы- любая ее часть, которая сама является формулой.

Для формирования сложных формул используют вспомогательные символы “(“ и “)”.

Логические связки по силе и значимости могут быть упорядочены следующим образом: $\neg$; $\wedge$; $\vee$; $\rightarrow$; $\leftrightarrow$.

Пример:

Необходимо удалить лишние скобки в формуле:

$$F=(((F_1 \vee (\neg F_2)) \rightarrow F_3) \leftrightarrow F_4)$$

Решение:

1) $F=((F_1 \vee (\neg F_2)) \rightarrow F_3) \leftrightarrow F_4$

2) $F=(F_1 \vee (\neg F_2)) \rightarrow F_3 \leftrightarrow F_4$

3) $F=F_1 \vee (\neg F_2) \rightarrow F_3 \leftrightarrow F_4$

4) $F=F_1 \vee \neg F_2 \rightarrow F_3 \leftrightarrow F_4$

Пример:

Необходимо расставить скобки в формуле

$F=F_1 \wedge F_2 \wedge F_3 \vee \neg F_1 \rightarrow F_3 \leftrightarrow F_1$

Решение:

1) $F_1 \wedge F_2 \wedge F_3 \vee (\neg F_1) \rightarrow F_3 \leftrightarrow F_1$

2) $F=((F_1 \wedge F_2) \wedge F_3) \vee (\neg F_1) \rightarrow F_3 \leftrightarrow F_1$

3) $F=(((F_1 \wedge F_2) \wedge F_3) \vee (\neg F_1)) \rightarrow F_3 \leftrightarrow F_1$

4) $F=((((F_1 \wedge F_2) \wedge F_3) \vee (\neg F_1)) \rightarrow F_3) \leftrightarrow F_1$

5) $F=(((((F_1 \wedge F_2) \wedge F_3) \vee (\neg F_1)) \rightarrow F_3) \leftrightarrow F_1)$

Формулы F и G называются ***равносильными***, если для любой интерпретации φ выполняется равенство $\varphi(F)=\varphi(G)$.

Формула F называется ***тождественно истинной (тавтологией)*** если для любой интерпретации φ выполняется равенство $\varphi(F)=1$.

Формула F называется ***тождественно ложной*** если для любой интерпретации φ выполняется равенство $\varphi(F)=0$.

Формула *F* называется ***выполнимой (опровержимой)*** если существует интерпретация, при которой формула *F* истинна (ложна).

Пример:

Определить является ли формула $F=X \wedge Y \rightarrow X$ тождественно истинной.

X	Y	$X \wedge Y$	$F=X \wedge Y \rightarrow X$
0	0	0	1
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	1

Формулы, содержащие кроме переменных только знаки логических функций $\vee, \wedge, \neg$ называют ***булевыми формулами***.

Алгебра $(P_2; \vee, \wedge, \neg)$ над множеством логических функций с тремя операциями называется ***булевой алгеброй***, а операции $\vee, \wedge, \neg$ называют ***булевыми операциями***.

Способы задания логической функции

1. Формула

2. Таблица истинности

3. Числовой способ задания функции

4. Геометрический способ задания логической функции

Формула

- указывает последовательность логических операций, которые нужно произвести над высказываниями - аргументами, чтобы получить значение функции.

Например, $F(X_{1,}\ X_2,\ X_3) = ((X_1 \vee X_2) \rightarrow X_3)$

Таблица истинности

- Указываются значения функции в зависимости от значений аргументов.

Переменные			Промежуточные логические формулы					Формула
x	y	z	$\bar{y}$	$x \vee \bar{y}$	$\overline{x \vee \bar{y}}$	$\bar{x}$	$\bar{x} \cdot z$	$\overline{x \vee \bar{y}} \vee \bar{x} \cdot z$
0	0	0	1	1	0	1	0	0
0	0	1	1	1	0	1	1	1
0	1	0	0	0	1	1	0	1
0	1	1	0	0	1	1	1	1
1	0	0	1	1	0	0	0	0
1	0	1	1	1	0	0	0	0
1	1	0	0	1	0	0	0	0
1	1	1	0	1	0	0	0	0

Числовой способ задания функции

При задании функции указывают номера тех наборов, на которых функция равна единице, и перед списком номеров единичных наборов ставят знак дизъюнкции.

Можно также указать те номера наборов, на которых функция равна нулю, но при этом перед списком нулевых наборов ставят знак конъюнкции.

Пример:

N	*X*	*Y*	*Z*	*F*
0	0	0	0	1
1	0	0	1	1
2	0	1	0	0
3	0	1	1	0
4	1	0	0	1
5	1	0	1	0
6	1	1	0	0
7	1	1	1	1

Числовой способ задания:

$$F(X,Y,Z) = \vee(0,1,4,7) = \wedge(2,3,5,6)$$

Определение номера набора

Каждой независимой переменной-аргументу функции ставится в соответствие число 2^k ($k = 0, 1, 2,...$).

Аргументы функции записываются в виде упорядоченного множества, например, $F(X_1, X_2, X_3)$.

При этом переменная, записанная крайней справа, получает коэффициент $2^0 = 1$, переменная, стоящая рядом слева, получает коэффициент $2^1=2$ и т. д.

Для функции $F(X_1, X_2, X_3)$ независимые переменные получают следующие коэффициенты: X_3-1, X_2-2, X_1-4.

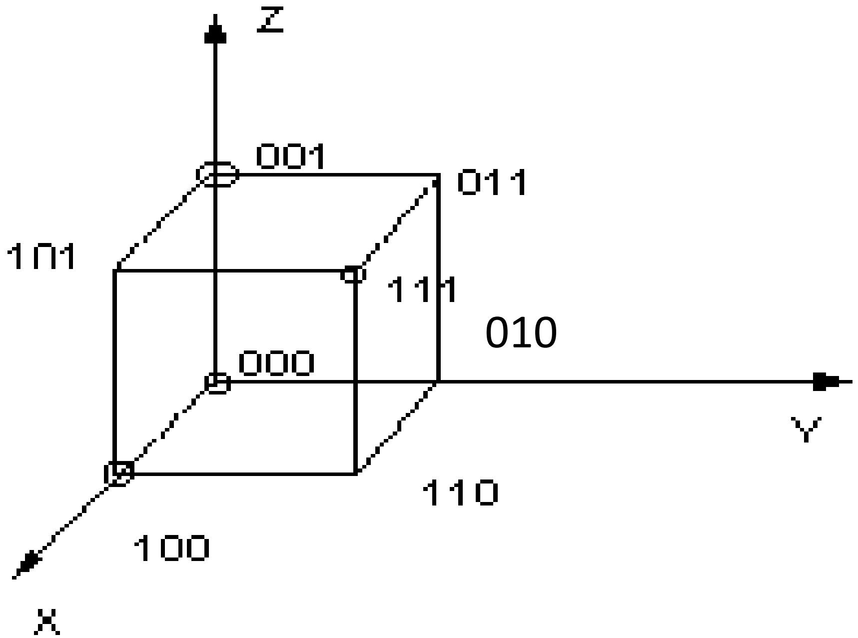
$$\boldsymbol{N = 4 \cdot X_1 + 2 \cdot X_2 + 1 \cdot X_3}$$

Геометрический способ задания логической функции

Для функции *n* - независимых логических переменных рассматривается единичный *n*- мерный куб.

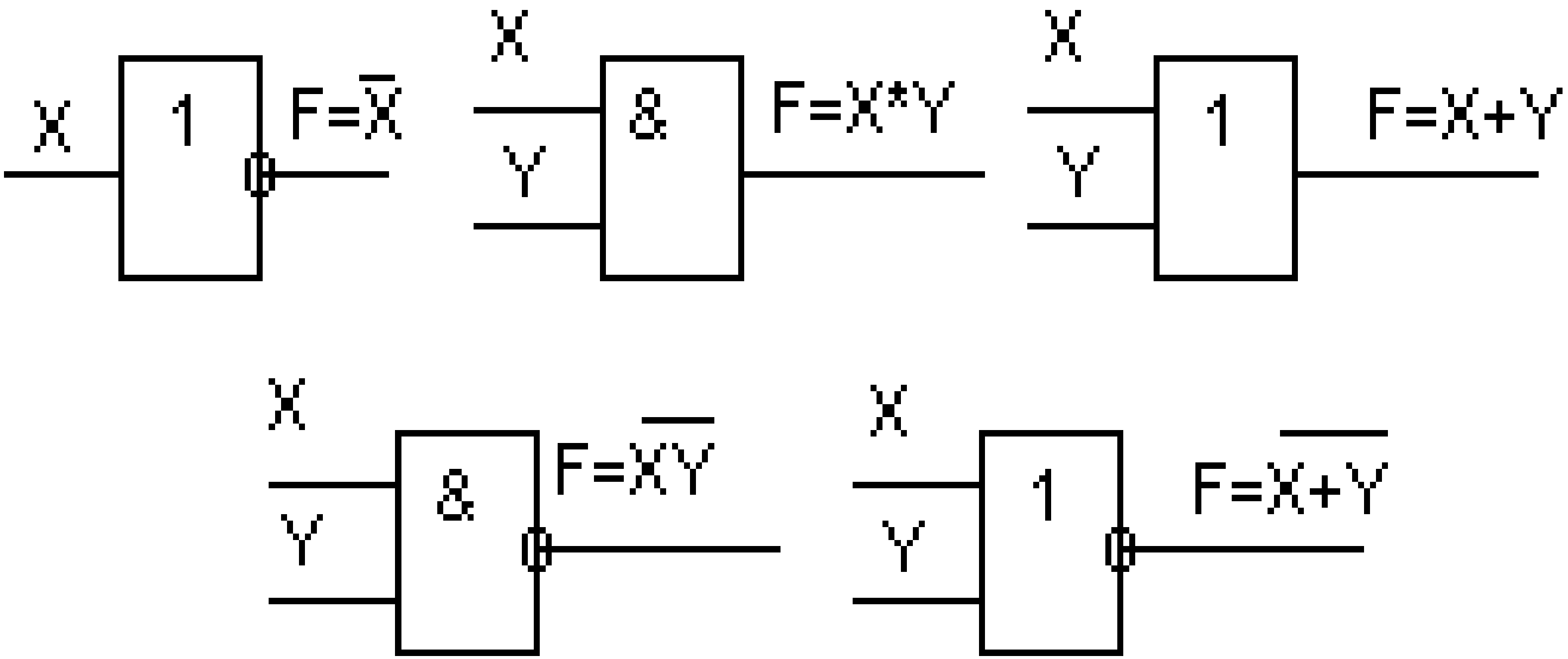
Вершины куба соответствуют наборам независимых переменных.

Каждой вершине приписывают значение функции на соответствующем наборе.



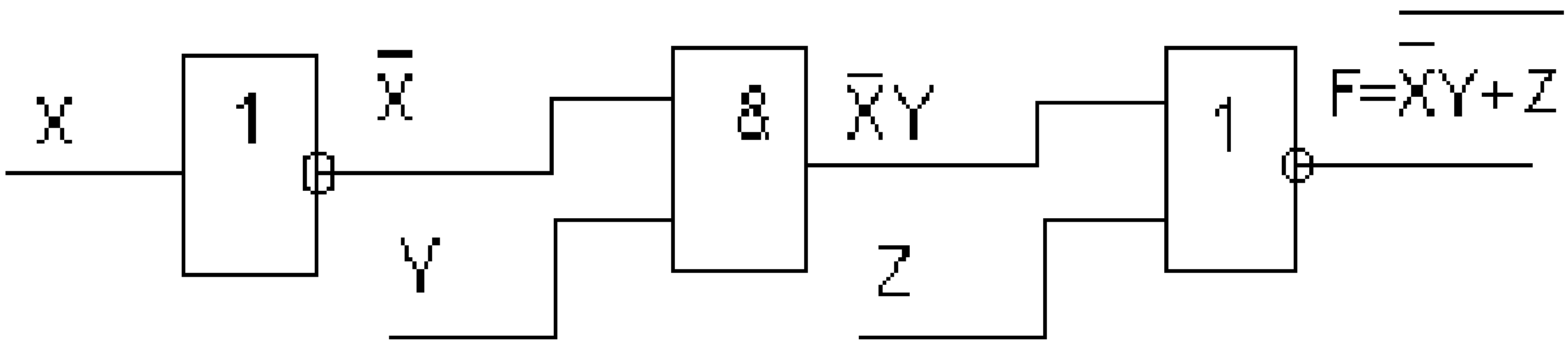
Логическая схема

Логическая схема – условное графическое обозначение логических функций.



Графические обозначения элементарных логических функций

Логическая схема



Пример логической схемы

Законы алгебры логики

1. **Ассоциативность**:

а) $x(yz) = (xy)z;$

б) $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z.$

2. **Коммутативность:**

$$а)\ xy = yx;$$

$$б)\ x \vee y = y \vee x.$$

3. **Дистрибутивность:**

$$а)\ x(y \vee z) = xy \vee xz;$$

$$б)\ x \vee (yz) = (x \vee y)(x \vee z).$$

4. **Идемпотентность:**

$$а)\ xx = x;$$

$$б)\ x \vee x = x.$$

5. **Двойное отрицание**:

$$\overline{\overline{x}} = x.$$

6. **Свойства констант**:

а) $x \wedge 1 = x;$ в) $x \vee 1 = 1;$ д) $\bar{1} = 0;$

б) $x \wedge 0 = 0;$ г) $x \vee 0 = x;$ е) $\bar{0} = 1.$

7. **Закон противоречия**:

$$x\bar{x} = 0.$$

8. **Закон исключения третьего**:

$$x \vee \overline{x} = 1.$$

9. **Законы де Моргана**:

$$a)\ \overline{x \wedge y} = \overline{x} \vee \overline{y};$$

$$б)\ \overline{x \vee y} = \overline{x} \wedge \overline{y}.$$

Эквивалентные преобразования логических формул

Правило подстановки формулы вместо переменной: при подстановке формулы F вместо переменной x все вхождения переменных x в исходное соотношение должны быть заменены формулой F.

Правило замены подформул: если $F_1=F_2$ и F содержит подформулу F_1, то замена F_1 на F_2 даст формулу F' – эквивалентную F.

Эквивалентные преобразования – преобразования, использующие эквивалентные соотношения и правила замены (правила упрощения булевых формул)

Правила упрощения булевых формул

1. **Правило поглощения**:

$$а)\ x \vee xz = x;$$

$$б)\ x(x \vee y) = x.$$

2. **Правило склеивания**:

$$xy \vee x\overline{y} = x.$$

3. **Правило раскрепощения** ***(обратное к склеиванию)***:

$$x = xy \vee x\overline{y}.$$

4. **Обобщенное склеивание:**

$$xz \vee y\overline{z} \vee xy = xz \vee y\overline{z}.$$

5. **Удаление отрицания**:

$$x \vee \overline{x}y = x \vee y.$$

Эквивалентные преобразования основных логических операций:

$$F_1 \rightarrow F_2 = \urcorner F_1 \vee F_2 = \urcorner (F_1 \wedge \urcorner F_2).$$

$$F_1 \leftrightarrow F_2 =$$

$$(F_1 \rightarrow F_2) \wedge (F_2 \rightarrow F_1) =$$

$$(\neg F_1 \vee F_2) \wedge (\neg F_2 \vee F_1) =$$

$$\neg(\neg(\neg F_1 \vee F_2) \vee \neg(\neg F_2 \vee F_1)).$$

$$F_1 \leftrightarrow F_2 \equiv$$

$$\neg F_1 \wedge \neg F_2 \vee F_1 \wedge F_2 \equiv$$

$$\neg(\neg(\neg F_1 \wedge \neg F_2) \wedge \neg(F_1 \wedge F_2)).$$

Пример:

Дано $F=(F_1 \to F_2) \to ((F_2 \to F_3) \to (F_1 \vee F_2 \to F_3)$.

Выполнить преобразования для упрощения алгебраического выражения.