6. Автоматы с магазинной памятью

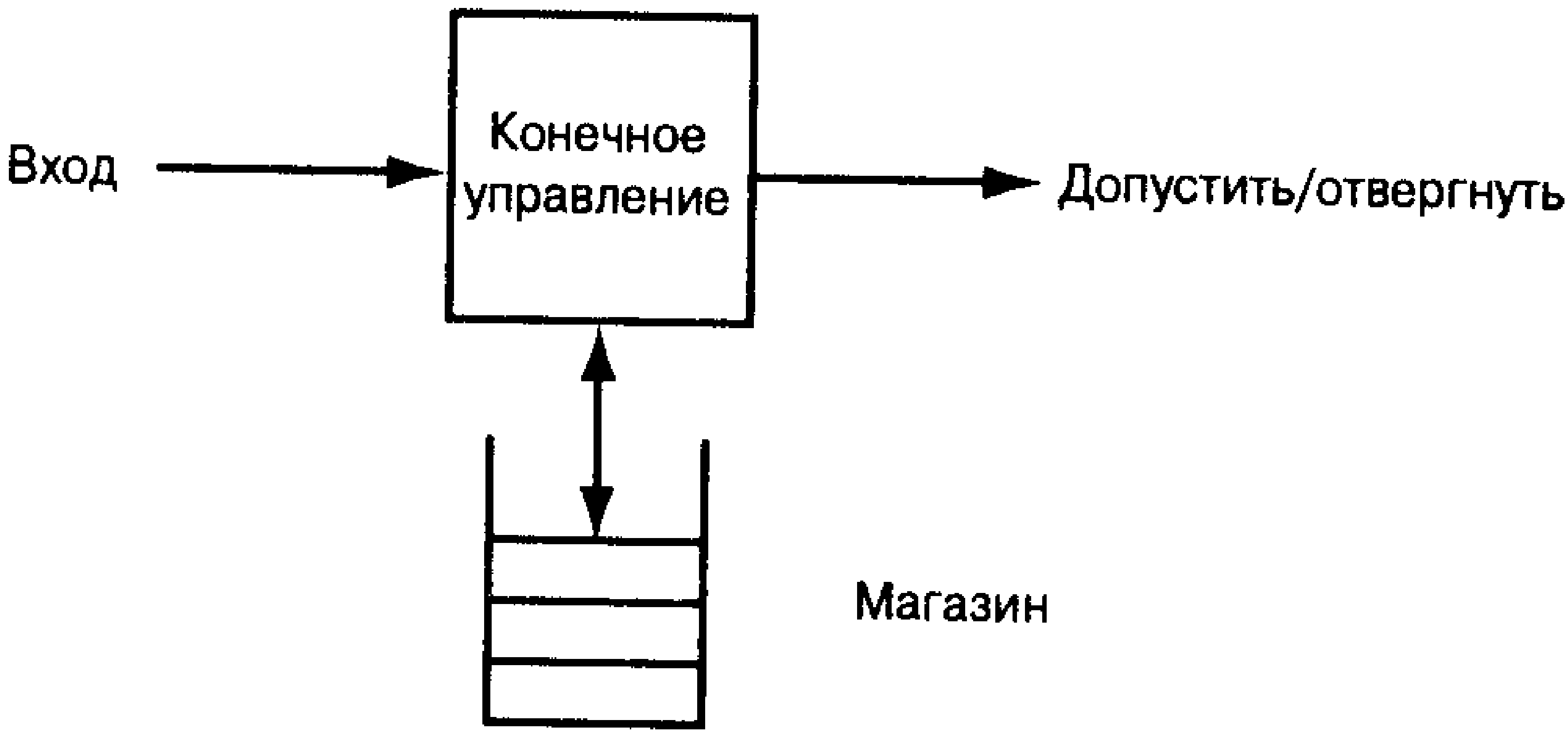
Разделы:

- Формальное определения МПА
- Языки, допускаемые МПА
- Детерминированные МПА

Неформальное описание МПА

- **Автомат с магазинной памятью** (PDA – *PushDown Automaton*), или магазинный автомат – это фактически *ε*-НКА, дополненный памятью магазинного (или стекового типа)
- В магазине хранится последовательность «магазинных символов»
- МПА помнит бесконечное количество информации
- МПА отличается от универсальной вычислительной машины тем, что в соответствии с принципом LIFO имеет доступ к информации только на одном конце магазина

Неформальное описание МПА



Неформальное описание МПА

- За один переход МПА совершает следующие операции:
  - Читает и пропускает входной символ, используемый при переходе
    - Если в качестве входа используется ε, то входные символы пропускаются
  - Переходит в новое состояние, которое может не отличаться от предыдущего.
  - Заменяет символ на вершине магазина некоторой строкой, которая может быть пустой (означает снятие символа с вершины магазина)

Неформальное описание МПА

- Неформальное описание МПА, допускающего язык палиндромов четной длины $L_{wwr} = \{ww^R \mid w$ *принадлежит (0+1)**$\}$
  1. Работа начинается в состоянии q_0, представляющем нашу догадку о том, что середина входной строки еще не достигнута
  2. В любой момент можно предположить, что достигнута середина входной строки
  3. В состоянии q_1 входные символы сравниваются с символами на вершине магазина
  4. Если МПА опустошен, то на самом деле обнаружена строка w, за которой идет ее обращение

Формальное определение МПА

Формальная запись МПА содержит семь компонентов и выглядит следующим образом.

$$P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$$

Их смысл:

- Q – конечное множество состояний.
- Σ – алфавит входных символов.
- Γ – конечный магазинный алфавит, т.е. те символы, который могут размещаться в магазине.

δ – функция переходов, которая управляет поведением МПА. Аргументами являются тройки $\delta(q, a, X)$, где q – состояние, a – входной символ или ε, X – магазинный символ. Выходом является пара (p, γ), где p – новое состояние, а γ – последовательность магазинных символов, замещающая X на вершине магазина. Если $\gamma = \varepsilon$, то магазинный символ снимается, если $\gamma = X$, то магазин не меняется, если $\gamma = YZ$, то X заменяется на Z, а Y помещается в магазин.

q_0 – начальное состояние МПА.

Z_0 – начальный магазинный символ (или **маркер дна**), который содержит МПА до начала работы.

F – множество заключительных состояний.

Формальное определение МПА

- Построим МПА *P*, допускающий язык *Lwwr*

$$P = \left(\{q_0, q_1, q_2\}, \{0,1\}, \{0,1,Z_0\}, \delta, q_0, Z_0, \{q_2\}\right)$$

$$\delta(q_0, 0, Z_0) = \{(q_0, 0Z_0)\}, \delta(q_0, 1, Z_0) = \{(q_0, 1Z_0)\}$$

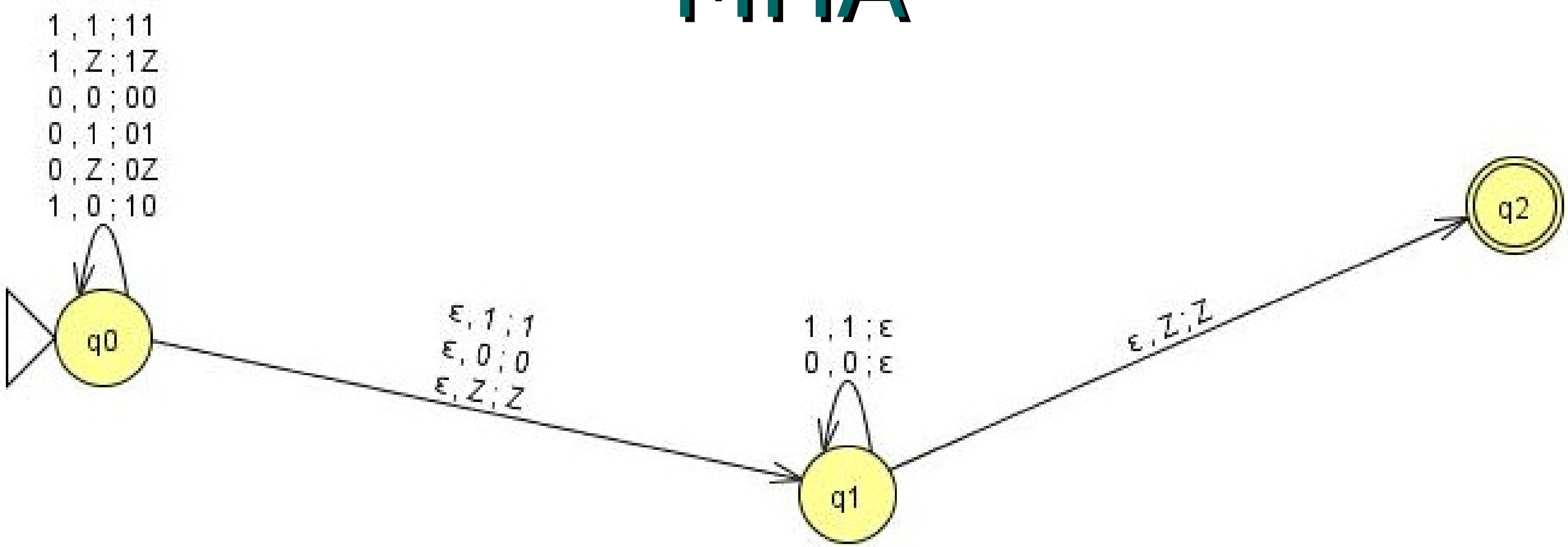
$$\delta(q_0, 0, 0) = \{(q_0, 00)\}, \delta(q_0, 0, 1) = \{(q_0, 01)\}, \delta(q_0, 1, 0) = \{(q_0, 10)\}, \delta(q_0, 1, 1) = \{(q_0, 11)\}$$

$$\delta(q_0, \varepsilon, Z_0) = \{(q_1, Z_0)\}, \delta(q_0, \varepsilon, 0) = \{(q_1, 0)\}, \delta(q_0, \varepsilon, 1) = \{(q_1, 1)\}$$

$$\delta(q_1, 0, 0) = \{(q_1, \varepsilon)\}, \delta(q_1, 1, 1) = \{(q_1, \varepsilon)\}$$

$$\delta(q_1, \varepsilon, Z_0) = \{(q_2, Z_0)\}$$

Формальное определение МПА



- Элементы диаграммы переходов МПА:
  - Вершины – состояния
  - Начальное и заключительные состояния как у КА
  - Дуги – переходы
    - Дуга *a*, *X*;*α* из состояния *q* в состояние *p* означает, что $\delta(q, a, X)$ содержит пару (p, α), возможно наряду с другими
  - Z_0 - стартовый магазинный символ

Формальное определение МПА

- Конфигурация МПА - (q, w, γ)
- Такая тройка называется **конфигурацией** МПА, или его **мгновенным описанием** (МО, *instantaneous description* – ID)
- МО для КА– это его состояние
- Для МПА мы будем использовать пары конфигураций, связи между которыми представляют собой переходы

Формальное определение МПА

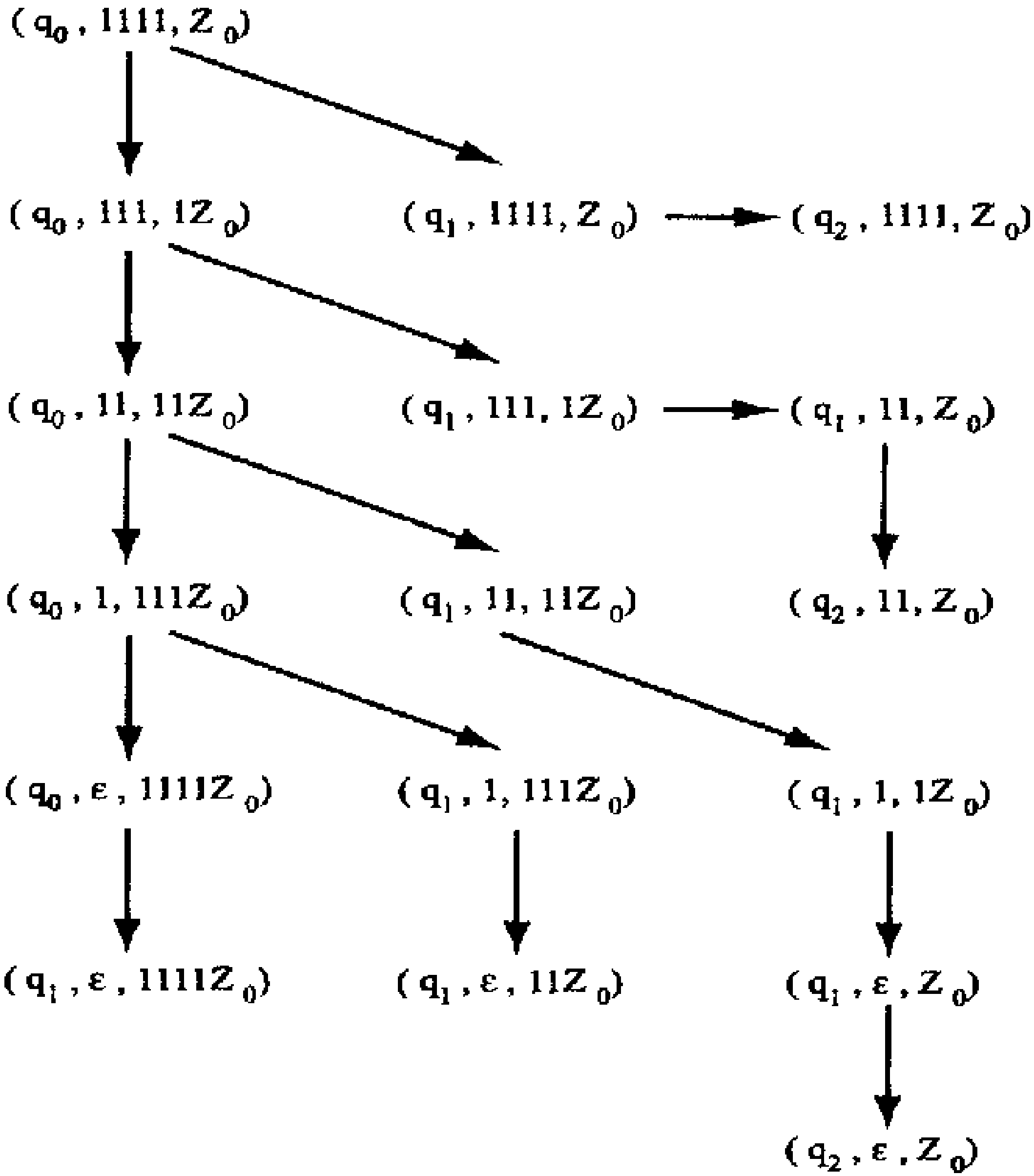
Если $P(\ldots)$ – это МПА, то мы можем определить бинарное отношение $\vdash_P$, или просто $\vdash$, когда это понятно из контекста, следующим образом. Пусть $\delta(q, a, Z)$ содержит (p, α). Тогда для всех строк w из Σ^* и β из Γ^* полагаем $\delta(q, aw, X\beta) \vdash \delta(p, w, \alpha\beta)$.

Этот переход отражает мысль о том, что прочитывая на входе возможно пустой символ α и заменяя X на вершине строкой α, можно перейти из состояния q в состояние p. Оставшаяся часть входной строки и содержимое магазина под его вершиной не влияют на работу МПА. У нас они сохраняются для того, чтобы повлиять на дальнейшие события.

Для представления 0 или более переходов МПА можно воспользоваться обозначением $\vdash_P^*$. Теперь можно дать следующее определение с базисом обозначением $I \vdash^* I$.

В индуктивной части определения $I \vdash^* J$, если существует такое МО K, которое удовлетворяет условиям $I \vdash^* K$ и $K \vdash^* J$. По-другому, $I \vdash^* J$, если существует последовательность МО $K_1, \ldots, K_n$, у которой $I = K_1$, $J = K_n$, и $K_i \vdash K_{i+1}$ для $i = 1, \ldots, n$-1.

Формальное определение МПА



- Стрелками представляется бинарное отношение |—

Формальное определение МПА

- Если последовательность конфигурации является допустимой для МПА, то вычисление, образованное путем дописывания одной и той же строки к концам входных строк всех его конфигураций, также допустимо
- Если вычисление допустимо для МПА, то вычисление, образованное дописыванием одних и тех же магазинных символов внизу магазина в каждой конфигурации, также допустимо
- Если вычисление допустимо для МПА, и в результате некоторый **суффикс** входной строки не прочитан, то вычисление, полученное удалением суффикса из входных строк каждой конфигурации, также допустимо

Формальное определение МПА

Теорема 6.1. Если $P = (\ldots)$ – МПА, и $(q, x, \alpha) \vdash_P^* (p, y, \beta)$, то для любой строки w из Σ^* и β из Γ^* верно утверждение:

$(q, xw, \alpha\gamma) \vdash_P^* (p, yw, \beta\gamma)$.

Для $\gamma = \varepsilon$ получается формальное утверждение принципа 1, а при $w = \varepsilon$ – принципа 2.

Обращение теоремы 6.1 неверно. Существуют действия, которые МПА мог бы совершить выталкиванием из стека, т.е. используя некоторые символы γ и заменяя их магазине, а это невозможно без обработки γ. Однако мы можем удалить неиспользуемый вход, т.к. МПА не может прочитать входные символы, а затем восстановить их на входе, согласно принципу 3.

Теорема 6.2. Если $P = (\ldots)$ – МПА, и $(q, xw, \alpha) \vdash_P^* (p, yw, \beta)$, то верно, что $(q, x, \alpha) \vdash_P^* (p, y, \beta)$.

Языки МПА

- Пусть $P = (\ldots)$ – МПА, тогда $L(P)$ – это язык, допускаемый P по заключительному состоянию, который может быть определен для некоторого состояния q и произвольной строки в магазине α, так что $\{w \mid (q_0, w, Z_0) \vdash_P^* (q, \varepsilon, \alpha)\}$
- Начиная в стартовой конфигурации с w на входе, МПА P прочитывает эту строку и достигает заключительного состояния
- Содержимое магазина в этот момент имеет чисто иллюстративное значение

Языки МПА

Пусть у нас есть МПА P из примера 35, который допускает язык L_{wwr}. Попробуем доказать что это утверждение верно. Сначала покажем допускающее вычисление P. Если $x = ww^R$, то справедливы следующие отношения.

$(q_0, ww^R, Z_0) \vdash^* (q_0, w^R, w^R Z_0) \vdash (q_1, w^R, w^R Z_0) \vdash^* (q_1, \varepsilon, Z_0) \vdash (q_2, \varepsilon, Z_0)$.

Иными словами, МПА имеет возможность прочитать w на входе и записать ее символы в магазин в обратном порядке. Затем он спонтанно переходит в состояние q_1 и проверяет совпадение w^R на входе с такой же строкой в магазине, и в конце спонтанно переходит в состояние q_2. Достаточность утверждения доказана.

Языки МПА

Далее замечаем, что единственный путь достижения заключительного состояния состоит в том, чтобы находиться в q_1 и иметь только маркер дна в магазине. Кроме этого, любое допускающее вычисление начинается в состоянии q_0, совершает один переход в q_1 и никогда снова не приходит в q_0. То есть следует найти условия, налагаемые на x, для которых $(q_0, x, Z_0) \vdash^* (q_1, \varepsilon, Z_0)$, ведь именно такие строки допускает наш МПА по заключительному состоянию. Покажем индукцией по длине x следующее более общее утверждение.

Если $(q_0, x, \alpha) \vdash^* (q_1, \varepsilon, \alpha)$, то x имеет вид ww^R.

Базисом доказательства является $x = \varepsilon$, то x имеет вид ww^R с $w = \varepsilon$. В этом случае заключение верно и утверждение истинно.

Индуктивной частью доказательства является строка $x = a_1 \ldots a_n$, где $n > 0$. Существуют два перехода, которые МПА может совершить из МО (q_0, x, α).

1. $(q_0, x, \alpha) \vdash (q_1, x, \alpha)$. Теперь P может только выталкивать элемент из магазина. Он должен вытолкнуть символ из магазина с чтением входного символа, и $|x|>0$. Значит, если $(q_1, x, \alpha) \vdash (q_1, \varepsilon, \beta)$, то строка β короче строки α, и не может равняться ей.

2. $(q_0, a_1 \ldots a_n, \alpha) \vdash (q_1, a_2 \ldots a_n, a_1\alpha)$. Теперь последовательность символов может закончиться в $(q_1, \varepsilon, \alpha)$, только в том случае, когда последний переход является выталкиванием $(q_1, a_n, a_1\alpha) \vdash (q_1, \varepsilon, \alpha)$. В этом случае должно выполняться $a_1 = a_n$. Еще нам известно, что $(q_0, a_2 \ldots a_n, a_1\alpha) \vdash^* (q_1, a_n, a_1\alpha)$. По теореме 6.2 символ a_n можно удалить из конца входа, т.к. он не используется. Значит, получаем $(q_0, a_2 \ldots a_{n-1}, a_1\alpha) \vdash^* (q_1, \varepsilon, a_1\alpha)$. Поскольку вход этой последовательности короче, чем n, то можно применить индуктивное предположение и заключить, что $a_2 \ldots a_{n-1}$ имеет вид yy^R для некоторого y. Поскольку $x = a_1yy^Ra_n$, и мы знаем, что $a_1 = a_n$, то делаем вывод, что $x = ww^R$, в частности $w = a_1y$.

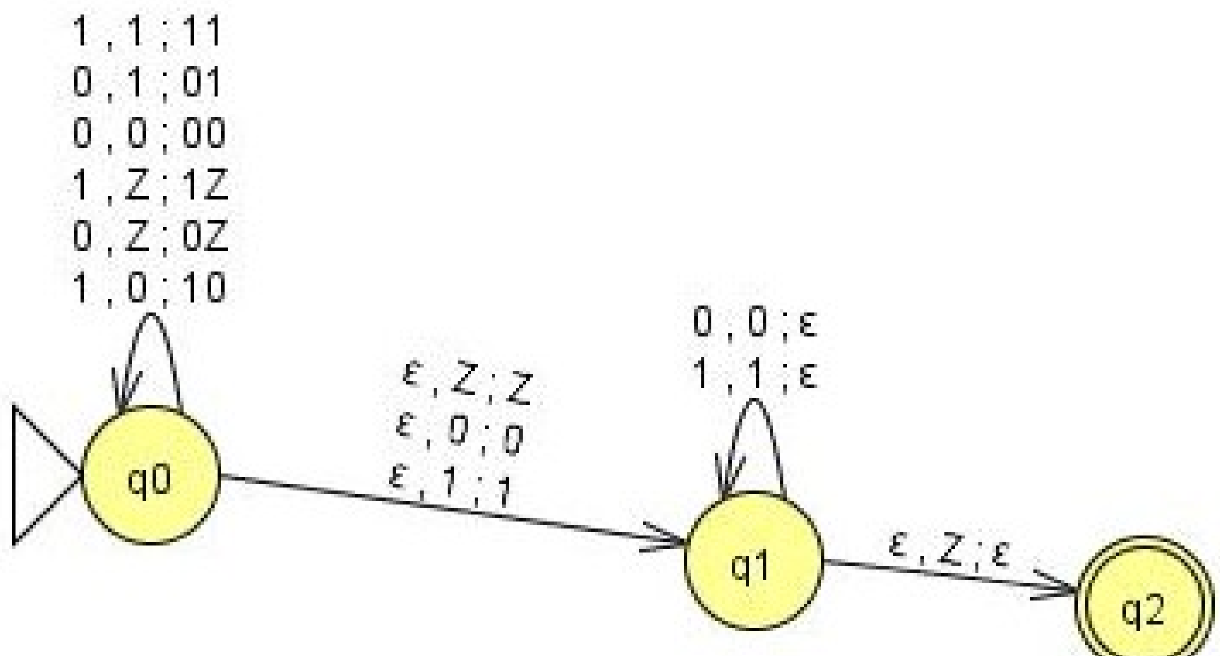
Эти рассуждения доказывают, что x допускается только того, когда он равен ww^R для некоторого w. Значит, необходимость доказана. Достаточность была доказана выше.

Языки МПА

- Можно определить для МПА $P = (\ldots)$ множество $N(P) = \{w \mid (q_0, w, Z_0) \vdash^* (q, \varepsilon, \varepsilon)\}$, где q – произвольное состояние
- Это множество всех входов w, которые P может прочитать, одновременно опустошив магазин
- МПА P для язык L_{wwr} никогда не опустошает магазин, $N(P) = \varnothing$
- Небольшое изменение позволяет допускать тот же язык и по пустому магазину, и по заключительному состоянию
- См. следующий слайд

Языки МПА

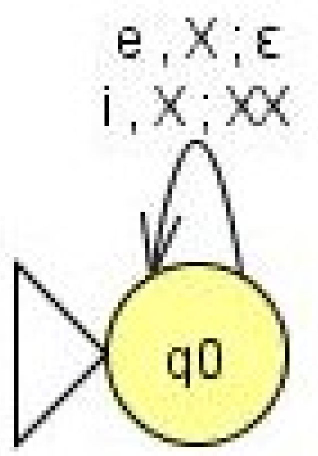
- Заменяем переход $\delta(q_1, \varepsilon, Z_0) = \{(q_2, Z_0)\}$
- на другой $\delta(q_1, \varepsilon, Z_0) = \{(q_2, \varepsilon)\}$
- Теперь МПА выталкивает последний символ из магазина, когда допускает $L(P) = N(P) = L_{wwr}$



Языки МПА

- Пусть P_N – это МПА, допускающий язык L по пустому магазину, P_F – это МПА, допускающий L по заключительному состоянию
- **Теорема 6.3.** Если $L = N(P_N)$ для некоторого P_N, то существует такой МПА P_F , у которого $L = L(P_F)$

Языки МПА



- Некорректно работающий МПА, обрабатывающий последовательности ключевых слов *if* и *else* в программе на языке С, где *i* означает *if*, а *e* – *else*
- В любом префиксе программы количество *e* не может превышать *i*, т.к. в противном случае *e* нельзя сопоставить предшествующему *i*
- Магазинный символ *Y* используется для подсчета разницы между текущими количествами просмотренных *i* и *e*

$$P_N = (\{q_0\}, \{i, e\}, \{X\}, \delta_N, q_0, Z_0, \varnothing)$$
$$\delta_N(q_0, i, X) = \{(q_0, XX)\}$$
$$\delta_N(q_0, e, X) = \{(q_0, \varepsilon)\}$$

Языки МПА

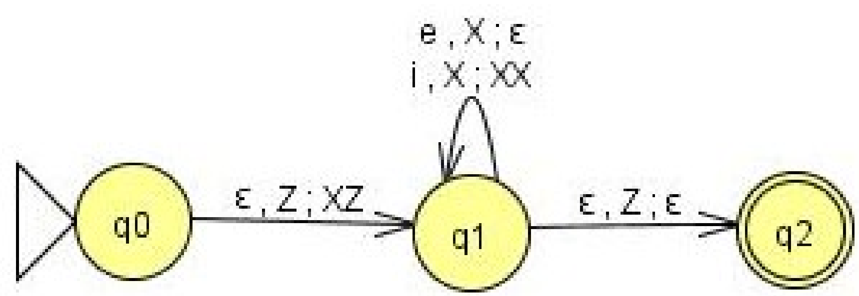
$$P_F = \left(\{q_0, q_1, q_2\}, \{i, e\}, \{X, Z_0\}, \delta_F, q_0, Z_0, \{q_2\}\right)$$

$$\delta_F\left(q_0, \varepsilon, Z_0\right) = \{(q_1, XZ_0)\}$$

$$\delta_F\left(q_1, i, X\right) = \{(q_1, XX)\}$$

$$\delta_F\left(q_1, e, X\right) = \{(q_1, \varepsilon)\}$$

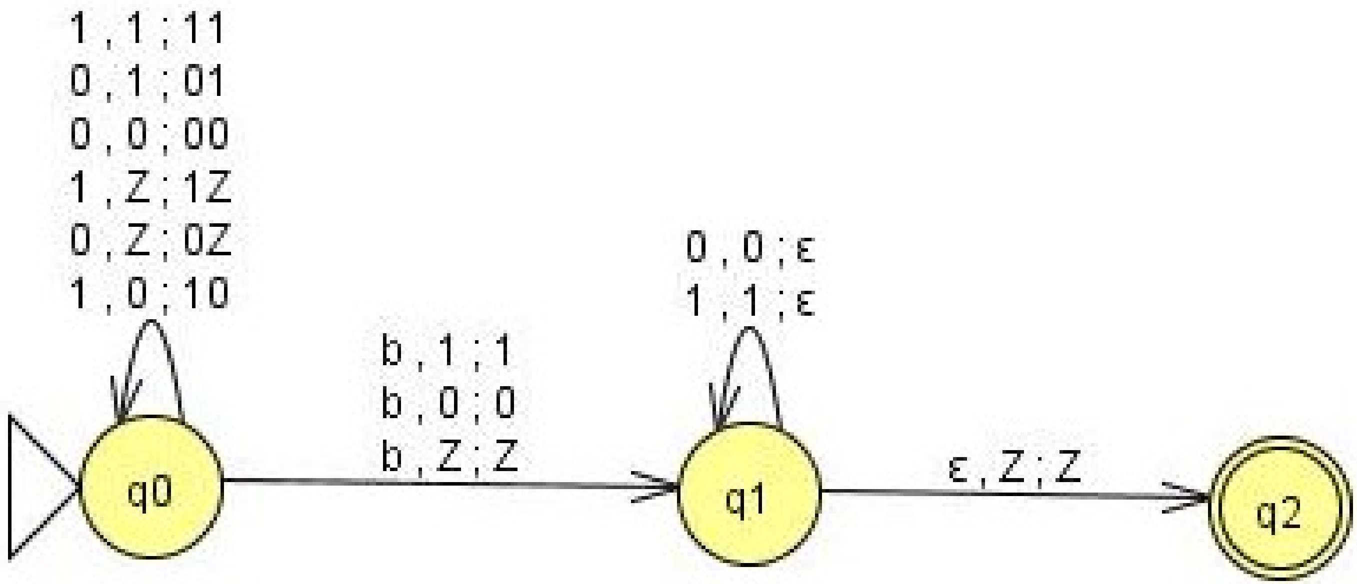
$$\delta_F\left(q_1, e, Z_0\right) = \{(q_2, \varepsilon)\}$$



- **Теорема 6.4.** Если $L = L(P_F)$ для некоторого P_F, то существует такой МПА P_N, у которого $L = N(P_N)$

ДМПА

- Если $\delta(q, a, X)$ содержит более одной пары, то МПА не является ДМПА
- Если $\delta(q, a, X)$ всегда одноэлементно, то выбор между чтением входного символа и совершением ε-перехода
- МПА P определяется как ДМПА, если выполнены следующие условия:
  1. $\delta(q, a, X)$ имеет не более одного элемента для всех q из Q, a из Σ или $a=\varepsilon$ и X из Γ
  2. Если $\delta(q, a, X)$ непусто для некоторого a из Σ, то $\delta(q, \varepsilon, X)$ должно быть пустым



ДМПА

Теорема 6.5. Если L – РЯ, то $L = L(P)$ для некоторого ДМПА P.

Доказательство. По большому счету ДМПА позволяет сымитировать ДКА. МПА содержит некоторый символ Z_0 в магазине, т.к. он должен иметь магазина, но в действительность он игнорирует магазин, используя только состояние.

Пусть $A = (Q, \Sigma, \delta_A, q_0, F)$ – КА, построим МПА $P = (Q, \Sigma, \{Z_0\}, \delta_P, q_0, Z_0, F)$, определив функцию переходов $\delta_P(q, a, Z_0) = \{(p, Z_0)\}$ для всех состояний p и q из Q, при которых $\delta_A(q, a) = p$.

Мы утверждаем, что $(q_0, w, Z_0) \vdash_P^* (p, \varepsilon, Z_0)$ тогда и только тогда, когда $\hat{\delta}(q_0, w) = p$, т.е. P имитирует A, используя его состояние. Доказательства в обе стороны просты и проводятся индукцией по $|w|$, поэтому оставляем это в качестве самостоятельного упражнения. Поскольку и A, и P допускают, достигнув какого-либо состояния из F, то мы приходим к выводу, что их языки равны.

ДМПА

- Если мы хотим, чтобы ДМПА допускал по пустому магазину, то обнаруживаем, что возможность по распознаванию весьма ограничены
- Язык *L* имеет **префиксное свойство**, или **свойство префиксности**, если в *L* нет двух различных строк *x* и *y*, где *x* является префиксом *y*
  - Язык L_{wbwr} имеет префиксное свойство, т.е. в нем не может быть двух разных строк wbw^R и xbx^R, одна из которых является префиксом другой
  - Пусть wbw^R - префикс для xbx^R и $w \neq x$
  - Тогда *w* должна быть короче *x*
  - Значит, *b* в *w* приходится на позицию, в которой *x* имеет 0 или 1
  - Это противоречит нашему предположению относительно того, что wbw^R является префиксом для xbx^R

ДМПА

Теорема 6.6. Язык L есть $N(P)$ для некоторого ДМПА P тогда и только тогда, когда L имеет префиксное свойство и L есть $L(P')$ для некоторого ДМПА P'.

Доказательство.

Дадим лишь общую идею. Сначала доказывается, что если $L = N(P)$ для ДМПА P, то L обладает префиксным свойством. Затем нужно доказать, что если $L = N(P)$ для ДМПА P, то существует ДМПА P', для которого $L = L(P')$. Отсюда, если L обладает префиксным свойством, и $L = L(P')$ для P', то существует ДМПА P, для которого $L = N(P)$.

Дополнительные источники

- Гилл, А. Введение в теорию конечных автоматов / А. Гилл. – М.: Наука, 1966. – 272 с.
- Кузнецов, А.С. Теория вычислительных процессов [Текст] : учеб. пособие / А. С. Кузнецов, М. А. Русаков, Р. Ю. Царев ; Сиб. федерал. ун-т. - Красноярск: ИПК СФУ, 2008. – 184 с.
- Короткова, М.А. Математическая теория автоматов. Учебное пособие / М.А. Короткова. – М.: МИФИ, 2008. – 116 с.
- Молчанов, А. Ю. Системное программное обеспечение. 3-е изд. / А.Ю. Молчанов. – СПб.: Питер, 2010. – 400 с.

Дополнительные источники

- Теория автоматов / Э. А. Якубайтис, В. О. Васюкевич, А. Ю. Гобземис, Н. Е. Зазнова, А. А. Курмит, А. А. Лоренц, А. Ф. Петренко, В. П. Чапенко // Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика. — М.: ВИНИТИ, 1976. — Т. 13. — С. 109–188. — URL http://www.mathnet.ru/php/getFT.phtml?jrnid=intv&paperid=28&what=fullt&op
- Серебряков В. А., Галочкин М. П., Гончар Д. Р., Фуругян М. Г. Теория и реализация языков программирования — М.: МЗ-Пресс, 2006 г., 2-е изд. - http://trpl7.ru/t-books/TRYAP_BOOK_Details.htm
- Введение в схемы, автоматы и алгоритмы - http://www.intuit.ru/studies/courses/1030/205/info