ФУНКЦИОНАЛЬНО ПОЛНЫЕ СИСТЕМЫ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ

Полиномом Жегалкина от переменных $x_1, x_2, \ldots x_n$ называется булева функция вида $\sum\limits_{i_1,i_2,\ldots i_m} a_{i_1,i_2,\ldots i_m} x_{i_1} \ldots x_{i_m}$.

Представляющая собой сумму по модулю 2 (сумму Жегалкина) конъюнктивных $x_{i_1} \ldots x_{i_m}$ одночленов от всевозможных наборов переменных $x_1, x_2, \ldots x_n$, причем коэффициент $a_{i_1,i_2,\ldots i_m}$ может равняться 0 или 1, что показывает, входит данных конъюнктивный одночлен в сумму или нет.

Теорема Жегалкина: Всякая логическая функция может быть представима полиномом по mod 2 и притом единственным.

Доказательство: Число различных полиномов по mod 2 от переменных $x_1, x_2, \ldots x_n$ - это число выражений вида $\sum\limits_{i_1,i_2,\ldots i_m}^{\mathrm{mod}\,2} a_{i_1,i_2,\ldots i_m} x_{i_1} \ldots x_{i_m}$

Число членов $x_{i_1} \ldots x_{i_m}$ равно числу множества всех подмножеств – 2^n. Число полиномов которые можно образовать из них 2^{2^n}.

Число различных логических функций n-переменных 2^{2^n} .

Т.об. Каждой логической функции соответствует единственный полином Жегалкина и наоборот.

Свойства функций системы Жегалкина:

1. Ассоциативность:

а) $x(yz) = (xy)z$;

б) $x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z$.

2. Коммутативность:

а) $xy = yx$;

б) $x \oplus y = y \oplus x$.

3. Дистрибутивность: $x(y \oplus z) = xy \oplus xz$.

4. Попарное сокращение: $x \oplus x = 0$.

5. Свойство констант: $x \oplus 0 = x$.

Функция, у которой полином Жегалкина имеет вид $\Sigma\alpha_i x_i \oplus \gamma$, где α_i, γ равны 0 или 1, называется *линейной*.

Связь функций системы Жегалкина с булевыми функциями:

1. Выражение отрицания через функции системы Жегалкина:

$\bar{x} = x \oplus 1.$

2. Выражение дизъюнкции через функции системы Жегалкина:

$x \vee y = xy \oplus x \oplus y.$

Рассмотрим полиномы Жегалкина от двух переменных и соответствующие им булевы формулы. Общий вид полинома Жегалкина от двух переменных:

$$P(x, y) = xy \oplus \alpha x \oplus \beta y \oplus \gamma \text{, где } \alpha, \beta, \gamma \in \{0;1\}.$$

Таблица – полиномы при всех комбинациях параметров $\alpha, \beta, \gamma.$

α	β	γ	**Вид полинома Жегалкина**	**Эквивалентные булевы формулы**
0	0	0	xy	$xy = \overline{x \vee y}$
0	0	1	$xy \oplus 1$	$\overline{xy} = \bar{x} \vee \bar{y}$
0	1	0	$xy \oplus y$	$\bar{x}y = \overline{x \vee \bar{y}}$
0	1	1	$xy \oplus y \oplus 1$	$\overline{\bar{x}y} = x \vee \bar{y}$
1	0	0	$xy \oplus x$	$x\bar{y} = \overline{\bar{x} \vee y}$
1	0	1	$xy \oplus x \oplus 1$	$\overline{x\bar{y}} = \bar{x} \vee y$
1	1	0	$xy \oplus x \oplus y$	$x \vee y = \overline{\bar{x}\bar{y}}$
1	1	1	$xy \oplus x \oplus y \oplus 1$	$\overline{x \vee y} = \bar{x}\bar{y}$

Для формулировки условий функциональной полноты для произвольной системы функций докажем 2 леммы.

Лемма 1. (о немонотонных функциях)

Если функция $f(x_1,x_2,\ldots x_n)$ немонотонна, то подстановкой констант из нее можно получить отрицание.

Т.е. существует такая подстановка n-1 константы, что функция оставшейся одной переменной является отрицанием.

Док-во: Пусть f немонотонна. $\exists$ наборы σ и τ: $\sigma<\tau$ и $f(\sigma)=1$, $f(\tau)=0$.

Предположим, σ и τ отличаются по k компонентам, в σ нули, а в τ - единицы.

Построим цепочку наборов $\sigma<\omega^1< \omega^2<\ldots< \omega^{k-1} <\tau$, в которой соседние наборы отличаются в одной компоненте.

Ясно, что на каких-то двух соседних наборах происходит переключение значения f: $f(\omega^j)=1$, $f(\omega^{j+1})=0$.

Пусть эти наборы отличаются в i-ой компоненте: $\omega^j{}_i=0$, $\omega^{j+1}{}_i=1$.

Обозначим $g(x)=f(\omega^j{}_1, \ldots, \omega^j{}_{i-1}, x_i, \omega^j{}_{i+1},\ldots \omega^j{}_n)$.

$g(0)=g(\omega^j{}_i)=f(\omega^j)=1$,

$g(1)=g(\omega^{j+1}{}_i)=f(\omega^{j+1})=0$, $\Rightarrow g(x_i)=\neg x_i$. Ч.т.д.

Пример: необходимо выяснить, можно ли получить функцию $\overline{x}$ из функции $f(x_1,x_2,x_3)=x_1\oplus x_2\cdot x_3$ путем соответствующей замены переменных.

Решение: Функция f немонотонна, т.к. $f(100)=1$, $f(111)=0$, тогда по лемме о немонотонной функции из этой функции можно получить функцию $\overline{x}$. Подставим вместо переменной x_1 константу 1, а вместо переменных $x_2,x_3 - x$, тогда $f(1,1,x)=1\oplus x\cdot x=\overline{x}$.

Чтобы воспользоваться следствием леммы, выберем пару соседних наборов, на которых нарушено условие монотонности. Имеем, $f(110)=1$, $f(111)=0$. Выбирая соответствующую замену переменных, получаем, что $f(1,1,x)=1\oplus 1\cdot x=\overline{x}$.

Лемма 2. (*о нелинейных функциях*)

Если функция $f(x_1, \ldots x_n)$ – нелинейна, то с помощью подстановки констант и использования отрицания из нее можно получить $\wedge$ и $\vee$.

Т.е. $\exists$ представление $\wedge$ и $\vee$ в виде суперпозиции констант, отрицаний и функции *f*.

Док-во: Пусть f – нелинейна. Тогда ее полином Жегалкина содержит конъюнкции переменных.

Выберем самую короткую из них $K = x_{i1}x_{i2}\ldots x_{ik}$.

Положим $x_{i3}=\ldots=x_{ik}=1$,

а для всех x_j, не входящих в K, $x_j=0$.

Подстановка этих констант в полином обратит K в $x_{i1}x_{i2}$, а остальные конъюнкции в 0, *f* примет вид

$x_{i1}x_{i2} \oplus \alpha\, x_{i1} \oplus \beta\, x_{i2} \oplus \gamma$, $\alpha,\beta,\gamma \in \{0,1\}$.

Пример: необходимо выяснить, можно ли получить функцию x_1x_2 из функции $f(x_1,x_2,x_3) = x_1x_2x_3 \vee x_1\overline{x}_2$ путем соответствующей замены переменных.

Решение: Построим полином Жегалкина для заданной функции.

$$f(x_1,x_2,x_3) = \overline{\overline{x_1x_2x_3} \cdot \overline{x_1\overline{x}_2}} = (x_1x_2x_3 \oplus 1)\cdot(x_1(x_2 \oplus 1)\oplus 1)\oplus 1 =$$
$$x_1x_2x_3 \oplus x_1x_2x_3 \oplus x_1x_2x_3 \oplus x_1x_2 \oplus x_1 \oplus 1 \oplus 1 = x_1x_2x_3 \oplus x_1x_2 \oplus x_1.$$

Получаем, что функция $f(x_1,x_2,x_3)$ нелинейна относительно переменных x_1 и x_2, и по лемме о нелинейной функции из нее можно получить конъюнкцию x_1x_2. Представим функцию в виде $f(x_1,x_2,x_3) = x_1x_2(x_3 \oplus 1) \oplus x_1$.

Подставив вместо переменной x_3 константу 0, получим функцию от двух переменных: $\Psi(x_1,x_2) = f(x_1,x_2,0) = x_1x_2 \oplus x_1$.

Таким образом, имеем $\alpha = 1$, $\beta = 0$ и $\gamma = 0$, а это означает, что $\Psi(x_1 \oplus \beta, x_2 \oplus \alpha) \oplus \alpha\beta \oplus \gamma = \Psi(x_1, x_2 \oplus 1) = x_1(x_2 \oplus 1) \oplus x_1 = x_1x_2 \oplus x_1 \oplus x_1 = x_1x_2$.

Заключаем, что конъюнкцию x_1x_2 можно получить из функции

$f(x_1, x_2, x_3)$ заменой переменных x_2 на $\overline{x_2}$, x_3 на 0. Действительно, $f(x_1, \overline{x_2}, 0) = x_1 x_2$.

Система элементарных булевых функций называется ***функционально полной*** (или же полная система функций), если произвольную булеву функцию можно представить суперпозицией функций этой системы. Полная система функций образует базис. Минимальным базисом называется такой, в котором при удалении хотя бы одной функции, образующей этот базис, нарушается его полнота.

Сформулируем ***I признак функциональной полноты***. Если все функции функционально полной системы Σ можно выразить через функции системы Σ^*, то Σ^* – является функционально полной системой.

Примеры функционально полных систем.

1. $\Sigma_1 = \{\wedge, \neg\}$

Полнота следует из возможности выразить дизъюнкцию через функции этой системы. Действительно, $x_1 \vee x_2 = \neg(\overline{x_1} \wedge \overline{x_2})$.

2. $\Sigma_2 = \{\vee, \neg\}$

Полнота следует из возможности выразить конъюнкцию через функции этой системы. $x_1 \wedge x_2 = \neg(\overline{x_1} \vee \overline{x_2})$..

3. $\Sigma_3 = \{|\}$

Штрих Шеффера представляет функционально полную систему, так как $\overline{x} = x \mid x$, $x_1 \wedge x_2 = \overline{x_1 \mid x_2} = (x_1 \mid x_2) \mid (x_1 \mid x_2)$, то есть Σ_3 сводится к Σ_1, а Σ_1 функционально полна.

4. $\Sigma_4 = \{\downarrow\}$

Система функционально полна, так как $\overline{x} = x \mid x$, $x_1 \vee x_2 = \overline{x_1 \downarrow x_2} = (x_1 \downarrow x_2) \downarrow (x_1 \downarrow x_2)$, то есть Σ_4 сводится к Σ_2, а Σ_2 функционально полна.

5. $\Sigma_5 = \{\wedge, \oplus, 1\}$

Система функционально полна, так как $\bar{x} = x \oplus 1$, и Σ_1 функционально полна. Представление функции в системе Σ_5 называется полиномом Жегалкина данной функции.

Сформулируем ***II признак функциональной полноты***.

Для того, чтобы система булевых функций была функционально полной, необходимо и достаточно, чтобы эта система включала:

– хотя бы одну функцию, не сохраняющую нуль;
– хотя бы одну функцию, не сохраняющую единицу;
– хотя бы одну несамодвойственную функцию;
– хотя бы одну немонотонную функцию;
– хотя бы одну нелинейную функцию.

Доказательство этой теоремы основано на том, что суперпозиция любого числа функций, образующих замкнутый класс, представляет собой функцию этого же класса. Можно предположить, что наибольшее число функций, образующих базис, равно пяти. Однако ввиду того, что многие булевы функции удовлетворяют одновременно нескольким требованиям, предъявляемым теоремой о функциональной полноте, количество независимых булевых функций, образующих минимальный базис, меньше пяти.

Рассмотрим некоторые функционально полные системы.

1. **F=X/Y**. Эта функция не обладает ни одним из “замечательных” свойств, следовательно, она одна образует минимальный базис.

2. **F=X↓Y**. Так же как и “штрих Шеффера” эта функция не обладает ни одним из указанных свойств и поэтому образует минимальный базис.

3. $\mathbf{F_1=X\to Y}$ и $\mathbf{F_2=0}$, или $\mathbf{F_1=Y\to X}$ и $\mathbf{F_2=0}$.

4. $\mathbf{F_1=X\oplus Y}$, $\mathbf{F_2=X\cdot Y}$, $\mathbf{F_3=1}$. Функции этого базиса входят в полином Жегалкина.

Из всего многообразия возможных функционально полных систем булевых функций в технике наибольшее распространение получил базис, содержащий три функции: конъюнкция, дизъюнкция и отрицание. Этот базис не является минимальным, но использование всех трех указанных функций совместно с константами 0 и 1 позволяет сравнительно легко строить сложные логические устройства на электронных элементах.

Введем понятие *функциональной полноты в слабом смысле*.

Система функций Σ называется функционально полной в слабом смысле, если любая логическая функция может быть представлена формулой над системой $\Sigma \cup \{0,1\}$, т.е. является суперпозицией констант и функций из Σ.

Теорема (о функциональной полноте в слабом смысле)

Для того чтобы система функций Σ была ФП в слабом смысле, необходимо и достаточно, чтобы она содержала хотя бы одну немонотонную и хотя бы одну нелинейную функцию.

Необходимость. Классы монотонных и линейных функций замкнуты и содержат 0 и 1 $\Rightarrow$ если Σ не содержит немонотонных или нелинейных функций, то их нельзя получить с помощью суперпозиций из Σ и констант.

Достаточность. Пусть Σ содержит немонотонную и нелинейную функции. Тогда по лемме 1 подстановкой констант из монотонной функции получаем отрицание, по лемме 2 из нелинейной с помощью отрицаний - $\wedge$ и $\vee$.

Примеры систем функционально полных в слабом смысле:

1. $\Sigma = \{\wedge, \oplus\}$ функционально полна в слабом смысле, так как $\wedge$ - нелинейна, а $\oplus$ - немонотонна.
2. $\Sigma_3 = \{|\}$ функционально полна в слабом смысле, так как штрих Шеффера – нелинейная и немонотонная функция.

Пример: Необходимо исследовать заданную функцию $f(x,y,z) = x \vee y \vee z$ на принадлежность к классам: C_0, C_1, C_C, C_M, C_L.

Решение:

1. Проверим на принадлежность к классу C_0: $f(0,0,0) = 0 \vee 0 \vee 0 = 0$, следовательно $f(x,y,z) \in C_0$.

2. Проверим на принадлежность к классу C_1: $f(1{,}1{,}1) = 1 \vee 1 \vee 1 = 1$, следовательно $f(x, y, z) \in C_1$

3. Проверим на принадлежность к классу C_C: Получим двойственную функцию $f^*(x, y, z) = \overline{f(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})} = \overline{\overline{x} \vee \overline{y} \vee \overline{z}} = xyz$. $f^*(x, y, z) \neq f(x, y, z)$, следовательно $f(x, y, z) \notin C_C$.

4. Проверим на принадлежность к классу C_M: Составим таблицу истинности для заданной функции $f(x, y, z) = x \vee y \vee z$.

Таблица истинности

x	y	z	$x \vee y \vee z$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Значение функции при возрастинии набора значений на сравнимых наборах не убывает, следовательно $f(x, y, z) \in C_M$.

5. Проверим на принадлежность к классу C_L: для исследования функции на линейность необходимо найти многочлен Жегалкина, его поиск произведем методом неопределенных коэффициентов.

Выпишем общий вид многочлена Жегалкина для трех переменных –

$$f(x, y, z) = A_0 \oplus A_1 x \oplus A_2 y \oplus A_3 z \oplus A_4 xy \oplus A_5 yz \oplus A_6 xz \oplus A_7 xyz.$$

Затем подставим искомые значения переменных в многочлен и приравняем его к значению функции на данном наборе. Таким образом получаем следующую систему уравнений:

$f(0{,}0{,}0) = A_0 = 0;$

$f(0{,}0{,}1) = A_0 \oplus A_3 = 1;$

$f(0{,}1{,}0) = A_0 \oplus A_2 = 1;$

$f(0{,}1{,}1) = A_0 \oplus A_2 \oplus A_3 \oplus A_5 = 1;$

$f(1{,}0{,}0) = A_0 \oplus A_1 = 1;$

$f(1{,}0{,}1) = A_0 \oplus A_1 \oplus A_3 \oplus A_6 = 1;$

$f(1{,}1{,}0) = A_0 \oplus A_1 \oplus A_2 \oplus A_4 = 1;$

$f(1{,}1{,}1) = A_0 \oplus A_1 \oplus A_2 \oplus A_3 \oplus A_4 \oplus A_5 \oplus A_6 \oplus A_7 = 1.$

Получаем следующие значения коэффициентов – $A_0 = 0, A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = A_5 = A_6 = A_7 = 1.$

Полином Жегалкина – $f(x, y, z) = x \oplus y \oplus z \oplus xy \oplus yz \oplus xz \oplus xyz$.

$f(x, y, z) \notin C_L$, так как полином не является полиномом первой степени (содержит конъюнкции переменных).

<u>Пример:</u> Исследовать систему функций $\{x \oplus y; x \vee y; 1\}$ на функциональную полноту.

Решение:

Составим таблицу Поста следующего вида. Знак «+», стоящий на пересечении строк и столюцов, показывает, что функция принадлежит соответствующему классу.

Таблица Поста

	C_0	C_1	C_c	$C_м$	$C_л$
$f_1 = x \oplus y$	+	–	–	–	+
$f_2 = x \vee y$	+	+	–	+	–
$f_3 = 1$	–	+	+	+	+

Построим таблицу истинности для функций, входящих в заданную систему и двойственных функций к ним.

Таблица истинности для системы функций $\{x \oplus y;\ x \vee y;\ 1\}$

x	y	$f_1 = x \oplus y$	$f_2 = x \vee y$	$f_3 = 1$	f_1^*	f_2^*	f_3^*
0	0	0	0	1	1	0	1
0	1	1	1	1	0	0	1
1	0	1	1	1	0	0	1
1	1	0	1	1	1	1	1

$f_1(0,0) = 0 \oplus 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad f_1 \in C_0$

$f_1(1,1) = 1 \oplus 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad f_1 \notin C_1$

$f_1^* \neq f_1 \Rightarrow \quad f_1 \notin C_C$

Условие монотонности нарушается на наборах (1,0) и (1,1) $\Rightarrow \quad f_1 \notin C_М$

$f_1(x,y)-$ линейная функция, так как многочлен Жегалкина $x \oplus y-$ линеен $\Rightarrow$ $f_1 \in C_L$

$f_2(0{,}0) = 0 \vee 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad f_2 \in C_0$

$f_2(1{,}1) = 1 \vee 1 = 1 \quad \Rightarrow \quad f_2 \in C_1$

$f_2^* \neq f_2 \Rightarrow \quad f_2 \notin C_C$

Условие монотонности не нарушается $\Rightarrow$ $f_2 \in C_M$

$f_2(x,y) = x \vee y-$ нелинейная функция, так как соответствующий ей многочлен Жегалкина $x \oplus y \oplus xy-$ нелинеен $\Rightarrow$ $f_2 \notin C_L$

$f_3(0{,}0) = 1 \quad \Rightarrow \quad f_3 \notin C_0$

$f_3(1{,}1) = 1 \quad \Rightarrow \quad f_3 \in C_1$

$f_3^* = f_3 \Rightarrow \quad f_3 \in C_C$

Условие монотонности не нарушается $\Rightarrow$ $f_3 \in C_M$

$f_3(x,y) = 1$ – константа единица – линейная функция, так как соответствующий ей многочлен Жегалкина $1-$ линеен $\Rightarrow$ $f_3 \in C_L$

Все условия теоремы Поста выполнены и заданная система $\{x \oplus y; x \vee y; 1\}$ является функционально полной.