НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ
ФОРМУЛ АЛГЕБРЫ ВЫСКАЗЫВАНИЙ

Дизъюнктивная нормальная форма формулы (***ДНФ формулы)*** есть формула, равносильная формуле исходной логической функции и записанная в виде дизъюнкции элементарных конъюнкций, построенных на пропозициональных переменных, т.е.

$$F = K_1\vee K_2\vee K_3\vee \ldots, \text{ где } K_i = (A\wedge B\wedge C\wedge \ldots).$$

Элементарной конъюнкцией или ***конъюнктивным одночленом*** от переменных $A,B,C,\ldots$ называется конъюнкция каких-либо из этих переменных или их отрицаний.

В элементарной конъюнкции нет двух одинаковых пропозициональных переменных, т.к. по закону идемпотентности $F\wedge F=F$.

В ДНФ нет двух одинаковых элементарных конъюнкций, т.к. по закону идемпотентности $F\vee F=F$.

Если одна из элементарных конъюнкций содержит F и $\overline{F}$, то элементарную конъюнкцию следует удалить, т.к. $F \wedge \overline{F} = 0$.

<u>Пример</u>: $F = F_1 \wedge (F_1 \vee F_2) \vee F_2 \wedge (F_1 \vee \overline{F_2})$

по закону дистрибутивности:

$F = F_1 \wedge F_1 \vee F_1 \wedge F_2 \vee F_1 \wedge F_2 \vee F_2 \wedge \overline{F_2}$;

по законам идемпотентности и противоречия:

$F = F_1 \vee F_1 \wedge F_2$;

по закону поглощения:

$F = F_1$.

Конъюнктивная нормальная форма формулы (КНФ формулы) есть формула, равносильная формуле исходной логической функции и записанная в виде конъюнкции элементарных дизъюнкций, построенных на пропозициональных переменных, т.е.

$F = D_1\wedge D_{2\wedge} D_3\wedge \ldots$, где $D_{\text{i}} = (A\vee B\vee C\vee\ldots)$.

Элементарной дизъюнкцией или ***дизъюнктивным одночленом*** от переменных *A*,*B*,*C*,… называется дизъюнкция каких-либо из этих переменных или их отрицаний.

В элементарной дизъюнкции нет двух одинаковых пропозициональных переменных, т.к. по закону идемпотентности $F \vee F = F$.

В КНФ нет двух одинаковых элементарных дизъюнкций, т.к. по закону идемпотентности $F \wedge F = F$.

Если одна из элементарных дизъюнкций содержит F и $\overline{F}$, то следует удалить, т.к. $F \vee \overline{F} = 1$.

<u>*Пример*</u>*:* $F = F_1 \wedge (F_1 \vee F_2) \vee F_2 \wedge (F_1 \vee \overline{F_2})$

по закону дистрибутивности:

$$F = (F_1 \wedge (F_1 \vee F_2) \vee F_2) \wedge (F_1 \wedge (F_1 \vee F_2) \vee (F_1 \vee \overline{F_2}));$$

по закону дистрибутивности:

$$F = (F_1 \vee F_2) \wedge (F_1 \vee F_2 \vee F_2) \wedge (F_1 \vee F_1 \vee \overline{F_2}) \wedge (F_1 \vee F_2 \vee F_1 \vee \overline{F_2});$$

по закону идемпотентности и исключенного третьего:

$$F = (F_1 \vee F_2) \wedge (F_1 \vee F_2) \wedge (F_1 \vee \overline{F_2});$$

по закону идемпотентности:

$$F = (F_1 \vee F_2) \wedge (F_1 \vee \overline{F_2});$$

по закону дистрибутивности:

$$F = F_1 \wedge (F_2 \vee \overline{F_2});$$

по закону противоречия:

$$F = F_1.$$

Наибольшее распространение в логике высказываний получили формулы вида КНФ, элементарные дизъюнкции которых D_i принято называть ***дизъюнктами***, а члены каждого дизъюнкта *A, B, C* – ***атомами.***

Алгоритм приведения к нормальной форме

Шаг 1. Устранить логические связки “$\leftrightarrow$” и “$\rightarrow$” всюду по правилам:

$$F_1 \leftrightarrow F_2 = (F_1 \to F_2)(F_2 \to F_1) = (\overline{F_1} \vee F_2)(\overline{F_2} \vee F_1) = \overline{F_1}F_2 \vee F_1F_2;$$

$$F_1 \to F_2 = \overline{F_1} \vee F_2 = (\overline{F_1\overline{F_2}})$$

Шаг 2. Продвинуть отрицание до элементарной формулы (пропозициональной переменной) по законам де Моргана и двойного отрицания.

Шаг 3. Применить закон дистрибутивности:

для КНФ – $F_1 \vee (F_2F_3) = (F_1 \vee F_2)(F_1 \vee F_3)$;

для ДНФ – $F_1(F_2 \vee F_3) = F_1F_2 \vee F_1F_3$.

<u>*Пример*</u>*:* Дана формула $F = ((F_1 \to (F_2 \vee \overline{F_3})) \to F_4)$. Необходимо привести формулу к виду КНФ.

$$F = (\overline{F_1} \vee (F_2 \vee \overline{F_3})) \to F_4);$$

$$F = (\overline{\overline{F_1} \vee (F_2 \vee \overline{F_3})}) \vee F_4);$$

$$F = F_1 \wedge \overline{F_2} \wedge F_3 \vee F_4;$$

$$F = (F_1 \vee F_4) \wedge (\overline{F_2} \vee F_4) \wedge (F_3 \vee F_4).$$

<u>*Пример*</u>*:* Дана формула $F = ((\overline{F_1 \wedge F_2}) \wedge (F_1 \vee F_2))$. Необходимо привести формулу к виду ДНФ.

$$F = (\overline{F_1} \vee \overline{F_2}) \wedge (F_1 \vee F_2);$$

$$F = ((\overline{F_1} \vee \overline{F_2}) \wedge F_1) \vee ((\overline{F_1} \vee \overline{F_2}) \wedge F_2));$$

$$F = (\overline{F_1} \wedge F_1) \vee (\overline{F_2} \wedge F_1) \vee (\overline{F_1} \wedge F_2) \vee (\overline{F_2} \wedge F_2);$$

$$F = (\overline{F_2} \wedge F_1) \vee (\overline{F_1} \wedge F_2).$$

Всякая формула алгебры высказываний обладает как дизъюнктивной, так и конъюнктивной нормальными формами. У формулы алгебры высказываний существует неограниченно много как дизъюнктивных, так и конъюнктивных нормальных форм. Одни из них более громоздкие и сложные, другие – более простые.

Совершенные нормальные формы СДНФ, СКНФ

Если каждая элементарная конъюнкция (или элементарная дизъюнкция) формулы содержат символы всех пропозициональных переменных, то такая формула называется ***совершенной***.

Существуют ***совершенные дизъюнктивные нормальные формы*** формулы (СДНФ) и ***совершенные конъюнктивные нормальные формы*** формулы (СКНФ).

Алгоритм преобразования ДНФ к виду СДНФ

Шаг 1: если в элементарную конъюнкцию F не входит подформула F_i или $\overline{F_i}$, то дополнить элементарную конъюнкцию высказыванием $F_i \vee \overline{F_i}$ и выполнить преобразование формулы по закону дистрибутивности:

$$F(F_i \vee \overline{F_i}) = FF_i \vee F\overline{F_i};$$

Шаг 2: если в элементарную конъюнкцию F не входит подформула F_j или $\overline{F_j}$, то повторить шаг 1;

Шаг 3: Упрощаем полученную формулу, используя равносильности:

$$F \wedge F = F;\ F \vee F = F.$$

<u>*Пример*</u>: Дано $F = F_1\overline{F_2} \vee F_1\overline{F_3}F_4 \vee F_1F_2F_3\overline{F_4}$. Необходимо преобразовать формулу к виду СДНФ.

$$F = F_1\overline{F_2}(F_3 \vee \overline{F_3}) \vee F_1\overline{F_3}F_4(F_2 \vee \overline{F_2}) \vee F_1F_2F_3\overline{F_4};$$

$$F = F_1\overline{F_2}F_3 \vee F_1\overline{F_2}\,\overline{F_3} \vee F_1F_2\overline{F_3}F_4 \vee F_1\overline{F_2}\,\overline{F_3}F_4 \vee F_1F_2F_3\overline{F_4};$$

$$F = F_1\overline{F_2}F_3(F_4 \vee \overline{F_4}) \vee F_1\overline{F_2}\,\overline{F_3}(F_4 \vee \overline{F_4}) \vee F_1F_2\overline{F_3}F_4 \vee F_1\overline{F_2}\,\overline{F_3}F_4 \vee F_1F_2F_3\overline{F_4};$$

$$F = F_1\overline{F_2}F_3F_4 \vee F_1\overline{F_2}F_3\overline{F_4} \vee F_1\overline{F_2}\,\overline{F_3}F_4 \vee F_1\overline{F_2}\,\overline{F_3}\,\overline{F_4} \vee F_1F_2\overline{F_3}F_4 \vee F_1\overline{F_2}\,\overline{F_3}F_4 \vee F_1F_2F_3\overline{F_4}$$

$$F = F_1\overline{F_2}F_3F_4 \vee F_1\overline{F_2}F_3\overline{F_4} \vee F_1\overline{F_2}\,\overline{F_3}F_4 \vee F_1\overline{F_2}\,\overline{F_3}\,\overline{F_4} \vee F_1F_2\overline{F_3}F_4 \vee F_1F_2F_3\overline{F_4}.$$

Алгоритм преобразования КНФ к виду СКНФ

Шаг 1: если в элементарную дизъюнкцию F не входит подформула F_{i} или $\rceil F_{\text{i}}$, то дополнить элементарную дизъюнкцию высказыванием $F_i \overline{F_i}$ и выполнить преобразование формулы по закону дистрибутивности:

$$F \vee F_i \overline{F_i} = (F \vee F_i)(F \vee \overline{F_i});$$

Шаг 2: если в элементарную конъюнкцию F не входит подформула F_{j} или $\overline{F_j}$, то повторить шаг 1;

Шаг 3: Упрощаем полученную формулу, используя равносильности:

$$F \wedge F = F;\ F \vee F = F.$$

<u>Пример</u>: Дано $F = (F_1 \vee F_2) \wedge (\overline{F_1} \vee \overline{F_2} \vee F_3 \vee F_4)$. Необходимо преобразовать формулу к виду СКНФ.

$F = (F_1 \vee F_2 \vee F_3 \wedge \overline{F_3}) \wedge (\overline{F_1} \vee \overline{F_2} \vee F_3 \vee F_4);$

$F = (F_1 \vee F_2 \vee F_3) \wedge (F_1 \vee F_2 \wedge \overline{F_3}) \wedge (\overline{F_1} \vee \overline{F_2} \vee F_3 \vee F_4);$

$F = (F_1 \vee F_2 \vee F_3 \vee F_4 \wedge \overline{F_4}) \wedge (F_1 \vee F_2 \wedge \overline{F_3} \vee F_4 \wedge \overline{F_4}) \wedge (\overline{F_1} \vee \overline{F_2} \vee F_3 \vee F_4);$

$F = (F_1 \vee F_2 \vee F_3 \vee F_4) \wedge (F_1 \vee F_2 \vee F_3 \wedge \overline{F_4}) \wedge (F_1 \vee F_2 \wedge \overline{F_3} \vee F_4) \wedge$

$\wedge (F_1 \vee F_2 \wedge \overline{F_3} \wedge \overline{F_4}) \wedge (\overline{F_1} \vee \overline{F_2} \vee F_3 \vee F_4)$

Совершенные нормальные формы формул удобно записывать, используя таблицы истинности, по значениям пропозициональных переменных и значению описываемой формулы.

Элементарные конъюнкции СДНФ формируются для значений формулы “И”. Число элементарных конъюнкций равно числу истинных значений формулы. Пропозициональные переменные, входящие в элементарную конъюнкцию, записываются без изменений, если их значение равно “И” и с логической связкой “$\rceil$”, если их значение равно “Л”.

СДНФ для всякой логической функции единственна. Для тождественно ложной функции СДНФ не существует.

Элементарные дизъюнкции СКНФ формируются для значений формулы “Л”. Число элементарных дизъюнкций равно числу ложных значений формулы. Пропозициональные переменные, входящие в элементарную дизъюнкцию, записываются без изменений, если их значение равно “Л” и с логической связкой “$\rceil$”, если их значение равно “И”.

СКНФ для всякой логической функции единственна. Единственная функция, не имеющая СДНФ – тождественно истинная.

<u>Пример</u>: Записать СДНФ и СКНФ для функции, заданной таблицей истинности

A	*B*	*C*	*F(A,B,C)*
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

а) Формула СДНФ:

$$F(A,B,C) = \overline{A} \wedge \overline{B} \wedge \overline{C} \vee \overline{A} \wedge B \wedge \overline{C} \vee A \wedge \overline{B} \wedge \overline{C} \vee A \wedge B \wedge C;$$

б) Формула СКНФ:

$$F(A,B,C) = (A \vee B \vee \overline{C}) \wedge (A \vee \overline{B} \vee C) \wedge (\overline{A} \vee B \vee \overline{C}) \wedge (\overline{A} \vee \overline{B} \vee C)$$

Принцип суперпозиций. Замкнутые классы логических функций

Принцип суперпозиции заключается в подстановки булевых функций вместо аргументов в другую булеву функцию. С помощью принципа суперпозиции любая булева функция может быть представлена как некоторая комбинация функций двух переменных.

Суперпозицией булевых функций f_0 и $f_1,...,f_n$ называется функция $f(x_1,...,x_m) = f_0(g_1(x_1,...,x_m),...,g_k(x_1,...,x_m))$, где каждая из функций $g_i(x_1, ...,x_m)$ либо совпадает с одной из переменных (тождественная функция), либо – с одной из функций $f_1,...,f_n$.

Например,

Функция $f(x,y) = \neg(x \ \& \ y)$ является суперпозицией функций $\neg$ и &;

Функция $g(x,y) = x \oplus (x \vee y)$ является суперпозицией функций $\oplus$ и $\vee$;

Функция $h(x,y,z) = (x \ \& \ y) \oplus z$ является суперпозицией функций $\oplus$ и &.

Рассмотрим множество A логических функций, обладающих некоторым свойством. Пусть $G(Y_1,Y_2,...,Y_k)\in A$ и $F_i(X_1,X_2,...,X_n)\in A$, $i=1,2,...,k$. Произведем суперпозицию функций G и F:

$$G[F_1(X_1,...,X_n),...,F_k(X_1,...,X_n)] = H(X_1,...,X_n)$$

Если $H(X_1,...,X_n)\in A$, то A называется *замкнутым классом логических функций* по отношению к рассматриваемому свойству.

То есть, множество A логических функций называют *замкнутым классом*, если любая суперпозиция функций из A снова принадлежит A.

Различают пять «замечательных» свойств, по которым логические функции образуют замкнутые классы.

1. *Свойство сохранять 0.* Функция $F(X_1,\ldots,X_n)$ называется сохраняющей 0, если $F(0,\ldots,0)=0$. Функции X_1X_2, X_1+X_2, $X_1\oplus X_2$ сохраняют 0, а $X_1\to X_2$, $X_1\sim X_2$, $X_1|X_2$ не сохраняют. Через C_0 обозначим класс всех функций, сохраняющих 0, т.е. $C_0=\{F(X_1,\ldots,X_n) \mid F(0,\ldots,0)=0\}$.

Докажем замкнутость класса функций, сохраняющих 0.

Пусть $G(0,...,0)=0$ и $F_{\mathrm{i}}(0,...,0)=0$.

Произведем суперпозицию функций G и F_{i}:

$G[F_1(X_1,...,X_{\mathrm{n}}),...,F_{\mathrm{k}}(X_1,...,X_{\mathrm{n}})]$

Определим значение функции на нулевом наборе:

$G[F_1(0,...,0),...,F_{\mathrm{k}}(0,...,0)]=G(0,...,0)=0$, т.е. $H(0,...,0)=0$.

2. *Свойство сохранять 1.* Функция $F(X_1,\ldots,X_n)$ называется сохраняющей единицу, если $F(1,\ldots,1)=1$. Функции X_1X_2, X_1+X_2, $X_1\to X_2$ сохраняют единицу, а $X_1\oplus X_2$, $X_1|X_2$ не сохраняют. Через C_1 обозначим класс всех функций, сохраняющих 1, т.е. $C_1=\{F(X_1,\ldots,X_n) \mid F(1,\ldots,1)=1\}$.

Класс C_1 является замкнутым. Замкнутость класса функций, сохраняющих единицу, может быть доказана таким же образом, как и замкнутость класса функций, сохраняющих нуль.

3. *Самодвойственность.* Самодвойственной функцией называется такая функция, для которой справедливо равенство $F(X_1,X_2,...,X_n)= F^*(X_1,X_2,...,X_n)$, где F^*– двойственная функция по отношению к функции F. Двойственная функция определяется следующим образом:

$$F^*(X_1, X_2,...,X_n) = \overline{F}(\overline{X_1}, \overline{X_2},...,\overline{X_n}).$$

Например, $F=X_1X_2+X_1X_3+X_2X_3$ является самодвойственной функцией.

Действительно, $F^* = \overline{\overline{X}_1 \overline{X}_2 + \overline{X}_1 \overline{X}_3 + \overline{X}_2 \overline{X}_3} = \overline{\overline{X}_1 \overline{X}_2} \cdot \overline{\overline{X}_1 \overline{X}_3} \cdot \overline{\overline{X}_2 \overline{X}_3} =$

$$= (X_1 + X_2)(X_1 + X_3)(X_2 + X_3) = X_1X_2 + X_1X_3 + X_2X_3 = F$$

Класс всех самодвойственных функций обозначим C_C.

Рассмотрим, что происходит с таблицей двойственной функции. Замена набора $(x_1,...,x_n)$ на $(\neg x_1,...,\neg x_n)$ соответствует «переворачиванию» таблицы. Действительно, наборы $(x_1,...,x_n)$ и $(\neg x_1,..., \neg x_n)$ расположены симметрично относительно середины таблицы. Теперь остаётся применить операцию $\neg$ к результату функции, т.е. поменять 0 на 1 и 1 на 0. Т.о. вектор значений функции, двойственной к исходной, получается из вектора исходной функции переворачиванием и заменой 0 на 1, а 1 на 0.

X	Y	$F=X\wedge Y$	$\neg X\wedge\neg Y$	$\neg(\neg X\wedge\neg Y)$
0	0	0	1	0
0	1	0	0	1
1	0	0	0	1
1	1	1	0	1

Функции x & y и $x \vee y$, задаваемые векторами значений (0,0,0,1) и (0,1,1,1) двойственны друг к другу. Также двойственными являются $x \oplus y$ и $x \equiv y$, задаваемые векторами (0,1,1,0) и (1,0,0,1). Каждая из функций x и $\neg x$ (векторы (0,1) и (1,0) соответственно) двойственна сама себе.

F_1^*	$F_2=X \vee Y$	F_2^*	$F_3=X \oplus Y$	F_3^*	$F_4=X \equiv Y$	F_4^*
0	0	0	0	1	1	0
1	1	0	1	0	0	1
1	1	0	1	0	0	1
1	1	1	0	1	1	0

Доказательство замкнутости класса самодвойственных функций.

Пусть $G(Y_1,\ldots,Y_n)$ и $F_i(X_1,\ldots,X_n)$ – самодвойственные функции.

Произведем суперпозицию функций G и F_i:

$$G[F_1(X_1,\ldots X_n),\ldots F_n(X_1,\ldots,X_n)]$$

и определим двойственную функцию к ней:

$$\overline{G[F_1(\overline{X}_1,\ldots\overline{X}_n),\ldots F_n(\overline{X}_1,\ldots,\overline{X}_n)]}=\overline{G[\overline{F_1(X_1,\ldots X_n)},\ldots\overline{F_n(X_1,\ldots,X_n)}]}=$$

$$=G[F_1(X_1,\ldots X_n),\ldots F_n(X_1,\ldots,X_n)].\Rightarrow C_C \text{ – замкнутый класс.}$$

4. *Монотонность*. Логическая функция называется *монотонной*, если при любом возрастании набора значение этой функции не убывает. То есть функция $f(x_1, \ldots,x_n)$ монотонна, если для любых двоичных наборов δ и τ длины n, при условии $\delta \le \tau$, выполняется условие $f(\delta)\le f(\tau)$. При этом рассматриваются только сравнимые наборы. Примеры монотонных функций: XY, $X+Y$. Примеры функций, не обладающих свойством монотонности: $X\sim Y$, $X\to Y$, $X\oplus Y$. Класс всех монотонных функций обозначим C_M.

Критерий сравнения двух наборов аргументов состоит в следующем. Если значение каждого аргумента одного набора больше или равно значению того же аргумента второго набора, то говорят, что первый набор не меньше второго. При этом предполагается, что $0 \ge 0$; $1 \ge 0$; $1 \ge 1$. *Например*, $(1,1,0,1) \ge (0,1,0,1)$. Не всякие наборы являются сравнимыми. Наборы (0,1) и (1,0) или (0,1,0,1) и (1,0,1, 0) несравнимы.

Докажем, что по свойству монотонности функции образуют замкнутый класс.

Пусть функции $G(Y_1,\ldots, Y_n)$ и $F_i(X_1,\ldots, X_n)$ – монотонные. Произведем суперпозицию функций G и F:

$G[F_1(X_1,..., X_n),..., F_k(X_1,..., X_n)] = H(X_1,..., X_n)$

Найдем значения функций F_i и функции G на некотором наборе $X_1,..., X_n$, а затем увеличим этот набор. Так как функции F_i монотонные, то их значения либо увеличатся, либо останутся без изменения. Так как функция G монотонная, то ее значение либо увеличится, либо останется без изменения. Из этого следует, что значение функции H при увеличении набора либо увеличится, либо останется без изменения, т.е. функция H тоже является монотонной, что и требовалось доказать.

5. *Линейность*. Логическая функция называется линейной, если она может быть представлена полиномом первой степени, т.е. записана в виде $F(X_1,X_2,...,X_n)=A_0\oplus A_1X_1\oplus A_2X_2\oplus...\oplus A_nX_n$, где A_0, $A_1,...,$ A_n – коэффициенты, равные нулю или единице. *Например*, $X\oplus Y$, $X\sim Y =1\oplus X\oplus Y$ – линейные функции. Класс всех линейных функций обозначим C_L.

Покажем, что по свойству линейности функции образуют замкнутый класс. Пусть функции $G(Y_1,..., Y_k)$ и $F_i(X_1,..., X_n)$ – линейные. Представим их в виде линейных полиномов:

$G = A_0 \oplus A_1Y_1 \oplus A_2Y_2 \oplus ... \oplus A_kY_k,$

$F_i = B_{0i} \oplus B_{1i}\, X_1\oplus B_{2i}\, X_2\oplus ... \oplus B_{ni}X_n.$

Подставив функции F_i вместо аргументов Y_i в функцию G получим выражение, в котором постоянные коэффициенты A_i умножаются на линейные функции. При этом получатся снова линейные функции. Приведя подобные члены, получим функцию $H(X_1,..., X_n)$ в виде линейного полинома.

Из этого следует, что по свойству линейности функции образуют замкнутый класс.