

引用格式: 杨鹏, 叶梦熊, 李金成, 等. 对称格林函数简化计算的数学推导[J]. 中国舰船研究, 2018, 13(增刊1): 22-28.

YANG P, YE M X, LI J C, et al. Mathematical derivation of simplified calculation of symmetrical green function[J]. Chinese Journal of Ship Research, 2018, 13(Supp 1): 22-28.

对称格林函数简化计算的数学推导

杨鹏^{1,2}, 叶梦熊², 李金成², 何景异², 杜兆伟²

1 海南大学 机电学院, 海南 海口 570228

2 武汉第二船舶设计研究所, 湖北 武汉 430205

摘要: [目的] 为了减少利用边界元法计算大型浮体运动的水动力系数时的面元数量, 并提高计算速度, [方法] 针对具有对称面的浮体, 利用其在求解奇点源强时系数矩阵可以看成循环矩阵的特性, 提出对称格林函数的简化计算方法。[结果] 利用该方法可以显著地加快对称浮体在波浪中运动的水动力系数求解过程: 对于具有1个对称面的浮体, 源强系数矩阵只需求解1/2的元素, 同时线性方程组的求解时间降为原来的1/4; 对于具有2个对称面的浮体, 源强系数矩阵只需求解1/4的元素, 同时线性方程组的求解时间缩短为原来的1/16。[结论] 数值计算结果表明给出的对称性简化方法是有效的, 能够极大地提高计算效率。

关键词: 对称面浮体; 格林函数; 循环矩阵

中图分类号: U661.1

文献标志码: A

DOI: 10.19693/j.issn.1673-3185.01345

Mathematical derivation of simplified calculation of symmetrical Green function

YANG Peng^{1,2}, YE Mengxiong², LI Jincheng², HE Jingyi², DU Zhaowei²

1 School of Mechanics and Electrics Engineering, Hainan University, Haikou 570228, China

2 Wuhan Second Ship Design and Research Institute, Wuhan 430205, China

Abstract: [Objectives] This paper studies the way to reduce the elements used for calculating the hydrodynamic coefficient for movement of a large floating body with boundary element method and to quicken the calculation. [Methods] Based on the characteristic of the symmetrical floating body that the coefficient matrix can be considered as a circulant matrix during solvement of source intensity of singular point, a simplified calculation method of symmetrical Green function is proposed. Besides, detailed mathematical derivation is carried out and the physical meanings are explained. [Results] It is found that, through this method, the process of solving the hydrodynamic coefficient for wave movement of symmetrical floating body can be quickened significantly. For the floating body with one symmetrical plane, it only needs to solve half of the elements of the coefficient matrix of source intensity; meanwhile the time of solving linear equations is reduced by one quarter. And for the floating body with two symmetrical planes, it only needs to solve a quarter of elements of the coefficient matrix of source intensity; meanwhile the time of solving linear equations is reduced by one sixteenth. [Conclusions] The numerical results show that the proposed symmetrical simplification method is effective, and can greatly improve the calculation efficiency.

Key words: symmetrical floating body; Green function; circulant matrix

收稿日期: 2018-07-06

网络首发时间: 2019-1-4 17:31

基金项目: 国家重点基础研究发展计划(973计划)资助项目(2013CB036105)

作者简介: 杨鹏(通信作者), 男, 1988年生, 博士, 高级工程师。研究方向: 船舶与潜艇总体设计。

E-mail: pyessrc@qq.com



0 引言

边界元法常用于基于势流理论求解浮体在波浪中运动的水动力系数,其中脉冲源(Rankine)函数或格林函数是求解速度势过程中常用的源汇分布类型。关于脉冲源函数的标准可参考文献[1]。由于经典的格林函数表达式涉及到 Bessel 函数和 Cauchy 主值积分,导致数值计算耗时长且难以实施。20 世纪 50 年代, Havelock^[2]和 John^[3]分别给出了无限水深格林函数的变形解析表达式和有限水深格林函数级数展开形式,这使得格林函数及其导数的求解更准确,耗时更短。Newman^[4]和王如森^[5]对无限水深表达式进行近似级数展开求解,使得无限水深格林函数的求解速度更快。但是当面元数达到 1 000 甚至更多时,求解浮体在波浪中的水动力系数非常耗时。有些浮体会具有 1 个或多个对称面(例如船舶一般有 1 个对称面),对于这种几何和物理特性,可以采用更加简化的方法来进行水动力系数的计算,因此可以节省大量的内存和时间。Wu^[6]采用复合奇点法计算了 1 艘双体船的水弹性响应,其计算时间降低了 30% 左右。针对一般浮体,在求解源强时,其系数矩阵为满秩矩阵,只能使用计算效率较低的高斯消元法和 LU 分解法等,其时间复杂度为 $O(n^3)$ 。针对具有对称面的浮体,求解其奇点源强时的系数矩阵为循环矩阵,可以利用循环矩阵的特性进行快速求解。

为此,本文拟分别给出具有 1 个和 2 个对称面浮体的格林函数求解方法,同时结合复合奇点法进行对比分析。通过严格的数学推导和合理的物理解释,使得该方法易于理解并具有逻辑性。另外,循环矩阵通常采用离散傅里叶变换法进行求解,但是该方法需要进行三角函数运算,且物理意义不如本文明确。同时,本文的方法基于分块降阶原理,即当浮体具有 1 个对称面时,可以将原方程化简为 2 个 $n/2$ 阶的线性方程组进行求解,线性方程组求解时间缩短为原来的 1/4;当浮体具有 2 个对称面时,原方程可以化简为 4 个 $n/4$ 阶的线性

方程组,线性方程组求解时间缩短为原来的 1/16。同时,本文不需要计算系数矩阵中所有面元的系数,对于只有 1 个对称面的情况,只需计算 $n/2$ 个面元的系数;对于具有 2 个对称面的情况,只需计算 $n/4$ 个面元的系数。

1 浮体辐射势求解

在浮体微幅摇荡的前提下,不定常一阶辐射速度势 $\phi_j(x, y, z)$ 的定解问题可视为

在流域内:

$$\nabla^2 \phi_j(x, y, z) = 0 \quad (1a)$$

在自由液面上:

$$\frac{\partial \phi_j}{\partial z} - v \phi_j = 0 \quad (1b)$$

在物面上:

$$\left. \frac{\partial \phi_j}{\partial \mathbf{n}} \right|_{S_0} = n_j \quad (1c)$$

在水底:

$$\begin{aligned} \left. \nabla \phi_j \right|_{z \rightarrow -\infty} &= 0, \text{ 无限水深} \\ \left. \frac{\partial \phi_j}{\partial z} \right|_{z=-H} &= 0, \text{ 有限水深} \end{aligned} \quad (1d)$$

在远方辐射条件下:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \sqrt{R} \left(\frac{\partial \phi_j}{\partial R} - iK \phi_j \right) = 0 \quad (1e)$$

引入格林函数 G_0 后,在流域内各点的辐射速度势可表示为

$$\phi_j(P) = \frac{1}{4\pi} \iint_{S_0} \sigma(Q) G_0(P, Q) dS \quad (2)$$

式中: H 为水深; $\sigma(\cdot)$ 为物面上的源强; S_0 为物面; $v = \omega^2/g$, 其中, ω 为波浪自然频率, g 为重力加速度; $j=1, 2, 3, 4, 5, 6$, 为自由度; K 为波数, 由公式 $K \tanh(KH) = v$ 求取; $R = \sqrt{x^2 + y^2}$, 为远方辐射半径; \mathbf{n} 为物面法向; n_j 为物面广义法向量的第 j 个自由度分量; P 和 Q 分别为场点和源点。

Wehausen 等^[1]给出的有限水深格林函数表达式为

$$\begin{aligned} G_0[P(x, y, z), Q(\zeta, \eta, \zeta)] &= \frac{1}{r} + \frac{1}{r_2} + P \cdot V \cdot \int_0^\infty \frac{2(k+v)e^{-kH} \cosh k(z+H) \cosh k(\zeta+H)}{k \sinh(kH) - v \cosh(kH)} J_0(kR) dk + \\ &\quad i \frac{2\pi(K+v)e^{-KH} \sinh(KH) \cosh K(z+H) \cosh K(\zeta+H)}{vH + \sinh^2(KH)} J_0(KR) \end{aligned} \quad (3)$$

无限水深格林函数表达式为

$$G_0[P(x, y, z), Q(\zeta, \eta, \zeta)] = \frac{1}{r} + \frac{1}{r_1} + P \cdot V \cdot \int_0^\infty \frac{2Ke^{k(z+\zeta)}}{k-K} J_0(kR) dk + i2K \cdot e^{K(z+\zeta)} \cdot J_0(KR) \quad (4)$$

式中: $P.V.$ 为取主值积分; k 为积分变量; $P(x, y, z)$ 和 $Q(\xi, \eta, \zeta)$ 分别为场点和源点的坐标; $R = [(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2]^{1/2}$, $r = [(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2]^{1/2}$, $r_2 = [(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z+2H+\zeta)^2]^{1/2}$, $r_1 = [(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z+\zeta)^2]^{1/2}$; $J_0(\cdot)$ 为第1类零阶 Bessel 函数; $1/r_2$ 项相当于 $1/r$ 关于池底的镜像, $1/r_1$ 项相当于 $1/r$ 关于静水面的镜像。

源强的积分表达式为

$$\frac{1}{2}\sigma(P) + \frac{1}{4\pi} \iint_{S_0} \sigma(Q) \frac{\partial G_0(P, Q)}{\partial \mathbf{n}} dS = \frac{\partial \phi_j(P)}{\partial \mathbf{n}}, \quad P \in S_0 \text{ 物面} \quad (5)$$

其中, $\left. \frac{\partial \phi_j}{\partial \mathbf{n}} \right|_{S_0} = n_j$ 由物面法向条件提供。为了开展数值计算, 将整个浮体湿表面分成 N 块, 设每块面元上分布等强度的源, 即常面元, 则离散后的线性方程组为

$$\frac{1}{2}\sigma_m(P_m) + \frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^N \sigma_i \iint_{S_i} \frac{\partial G_0(P_m, Q_i)}{\partial \mathbf{n}} dS = n_j, \quad m = 1, 2, \dots, N \quad (6)$$

式中: m 为场点的面元序号; i 为源点的面元序号。

通过求解式(6), 可得到浮体湿表面上分布的源强, 然后通过式(2)求得流域边界和内部的辐射速度势场。由于格林函数积分的奇异性和复杂性, 同时受满秩线性方程组求解速度的限制, 使得式(6)的求解在面元数较多时十分耗时。对于具有对称面的浮体, 可以通过简化式(6)来提高求解速度。下面分别给出具有1个和2个对称面浮体的源强简化求解过程。

2 单对称面浮体

在平移坐标系中(图1), 浮体物面的平均湿表面可表示为

$$z = f(x, y), \quad x, y \in \Omega \quad (7)$$

式中, Ω 为 $f(x, y)$ 的定义域。为了方便讨论, 将物面上的点分成2个区域:

$$\begin{aligned} \text{区域I: } & y \geq 0, z \leq 0 \\ \text{区域II: } & y < 0, z \leq 0 \end{aligned} \quad (8)$$

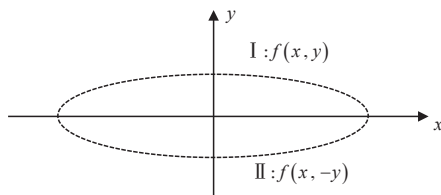


图1 单对称面的浮体示意图

对于单对称面(xz 平面)浮体, 有如下关系式:

$$\begin{cases} f(x, y) = f(x, -y) \\ f_x(x, y) = f_x(x, -y) \\ f_y(x, y) = -f_y(x, -y) \end{cases} \quad (9)$$

式中, $f_x(x, y)$ 和 $f_y(x, y)$ 分别为 $f(x, y)$ 对 x 和 y 的导数。

若区域I中的坐标和法向量分量分别为 (r_x, r_y, r_z) 和 (N_x, N_y, N_z) , 则区域II中与区域I相对应的物面坐标和物面法向存在如下关系:

$$\text{区域I: } r_x, r_y, r_z, N_x, N_y, N_z \quad (10)$$

$$\text{区域II: } r_x, -r_y, r_z, N_x, -N_y, N_z$$

$(r_x, r_y, r_z) \times (N_x, N_y, N_z)$ 的关系式如下:

$$\text{区域I: } -r_z N_y + r_y N_z, r_z N_x - r_x N_z, -r_y N_x + r_x N_y$$

$$\text{区域II: } r_z N_y - r_y N_z, r_z N_x - r_x N_z, r_y N_x - r_x N_y \quad (11)$$

则

$$G_{0,ij} = \frac{1}{4\pi} \iint_{S_j} G_0 dS \text{ 的源强系数矩阵为}$$

$$\mathbf{G}_0 = \begin{bmatrix} I_\phi & II_\phi \\ II_\phi & I_\phi \end{bmatrix} \quad (12)$$

式中: j 为场点的面元序号; 角标 ϕ 为速度势; S_j 为第 j 个面元。

$$G_{0x,ij} = \frac{1}{4\pi} \iint_{S_j} \frac{dG_0}{dx} dS \text{ 的速度势矩阵为}$$

$$\mathbf{G}_{0x} = \begin{bmatrix} I_x & II_x \\ II_x & I_x \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$G_{0y,ij} = \frac{1}{4\pi} \iint_{S_j} \frac{dG_0}{dy} dS \text{ 的速度势矩阵为}$$

$$\mathbf{G}_{0y} = \begin{bmatrix} I_y & II_y \\ -II_y & -I_y \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$G_{0z,ij} = \frac{1}{4\pi} \iint_{S_j} \frac{dG_0}{dz} dS \text{ 的速度势矩阵为}$$

$$\mathbf{G}_{0z} = \begin{bmatrix} I_z & II_z \\ II_z & I_z \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$\text{由此, } G_{0n,ij} = \frac{1}{4\pi} \iint_{S_j} \frac{dG_0}{dn} dS \text{ 法向诱导的系数矩}$$

阵为

$$\mathbf{G}_{0n} = \begin{bmatrix} I_n & II_n \\ II_n & I_n \end{bmatrix} \quad (16)$$

设在区域I上有 N 个面元, 则整个物面的平均湿表面上有 $2N$ 个面元。从式(12)~(16)可以看出: 对于单对称面的湿表面来说, 并不需要计算整个物面的速度势矩阵 \mathbf{G}_0 , \mathbf{G}_{0x} , \mathbf{G}_{0y} , \mathbf{G}_{0z} 和 \mathbf{G}_{0n} ,

而只需对每个速度势矩阵计算2个 $N \times N$ 矩阵 \mathbf{I}

Fig.1 Schematic diagram of floating body with one symmetry plane

和 \mathbf{II} 。可以看出,上述 5 个表达式均是循环矩阵,所以可以使用循环矩阵的求解方法将原方程组简化为 2 个 N 阶矩阵的方程组进行求解。

源强 $\{\sigma_j\}$ 的线性方程组为

$$\mathbf{G}_{0n}\{\sigma_j\} = \{n_i\} \quad (17)$$

式中, $\{n_i\}$ 为第 i 个面元的法向。

定义 $2N$ 阶矩阵 \mathbf{P}_{2N} 为

$$\mathbf{P} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{E}_N & \mathbf{E}_N \\ -\mathbf{E}_N & \mathbf{E}_N \end{bmatrix} \quad (18)$$

式中: \mathbf{E}_N 为 N 阶单位矩阵; \mathbf{P} 具有 $\mathbf{P}^T = \mathbf{P}^{-1}$ 的性质。则 \mathbf{P} 可将 \mathbf{G}_{0n} 对角化^[7],即

$$\mathbf{P}^T \mathbf{G}_{0n} \mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_n - \mathbf{II}_n & 0 \\ 0 & \mathbf{I}_n + \mathbf{II}_n \end{bmatrix} \quad (19)$$

同时,源强的线性方程组转换为

$$\mathbf{P}^T \mathbf{G}_{0n,ij} \mathbf{P} \cdot \mathbf{P}^T \{\sigma_j\} = \mathbf{P}^T \{n_i\} \quad (20)$$

将式(19)代入式(20)得:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_n - \mathbf{II}_n & 0 \\ 0 & \mathbf{I}_n + \mathbf{II}_n \end{bmatrix} \cdot \mathbf{P}^T \{\sigma_j\} = \mathbf{P}^T \{n_i\} \quad (21)$$

在引入新变量 $\{\bar{\sigma}_j\} = \mathbf{P}^T \{\sigma_j\}$, $\{\bar{n}_i\} = \mathbf{P}^T \{n_i\}$ 下,则式(21)可简化为

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_n - \mathbf{II}_n & 0 \\ 0 & \mathbf{I}_n + \mathbf{II}_n \end{bmatrix} \cdot \{\bar{\sigma}_j\} = \{\bar{n}_i\} \quad (22)$$

$\{\bar{\sigma}_j\}$ 由如下线性方程组求解:

$$\begin{cases} (\mathbf{I}_n - \mathbf{II}_n) \cdot \{\bar{\sigma}_j\}_{j=1 \sim N} = \{\bar{n}_i\}_{i=1 \sim N} \\ (\mathbf{I}_n + \mathbf{II}_n) \cdot \{\bar{\sigma}_j\}_{j=(N+1) \sim 2N} = \{\bar{n}_i\}_{i=(N+1) \sim 2N} \end{cases} \quad (23)$$

然后,利用 $\{\sigma_j\} = \mathbf{P} \{\bar{\sigma}_j\}$ 可以求得源强。另外还可将公式 $\mathbf{P}^T \{n_i\} = \{\bar{n}_i\}$ 中 \mathbf{P}^T 的系数 $\sqrt{2}/2$ 放到 $\{\sigma_j\} = \mathbf{P} \{\bar{\sigma}_j\}$ 的 \mathbf{P} 中,则源强的求解公式可转换为

$$\begin{aligned} (\mathbf{I}_n - \mathbf{II}_n) \cdot \{\bar{\sigma}_j\}_{j=1 \sim N} &= \left\{ \{n_i\}_{i=1 \sim N} - \{n_i\}_{i=(N+1) \sim 2N} \right\} \\ (\mathbf{I}_n + \mathbf{II}_n) \cdot \{\bar{\sigma}_j\}_{j=(N+1) \sim 2N} &= \left\{ \{n_i\}_{i=1 \sim N} + \{n_i\}_{i=(N+1) \sim 2N} \right\} \end{aligned} \quad (24)$$

$$\{\sigma_j\} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \{\bar{\sigma}_j\}_{j=1 \sim N} + \{\bar{\sigma}_j\}_{j=(N+1) \sim 2N} \\ -\{\bar{\sigma}_j\}_{j=1 \sim N} + \{\bar{\sigma}_j\}_{j=(N+1) \sim 2N} \end{bmatrix} \quad (25)$$

式(24)和(25)的物理含义解释为:浮体左半侧分布的无限水深或有限水深格林函数变为 $G_0[P(x, y, z), Q(\xi, \eta, \zeta)] - G_0[P(x, y, z), Q(\xi, -\eta, \zeta)]$; 浮体右半侧分布的无限水深或有限水深格林函数变为 $G_0[P(x, y, z), Q(\xi, \eta, \zeta)] + [G_0(P(x, y, z), Q(\xi, -\eta, \zeta))]$ 。

3 双对称面浮体

为方便讨论,将物面上的点分成 4 个区域:

$$\begin{aligned} \text{区域I: } & x \geq 0, y \geq 0, z \leq 0 \\ \text{区域II: } & x < 0, y \geq 0, z \leq 0 \\ \text{区域III: } & x \geq 0, y < 0, z \leq 0 \\ \text{区域IV: } & x < 0, y < 0, z \leq 0 \end{aligned} \quad (26)$$

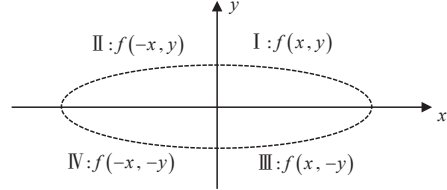


图2 双对称面浮体示意图

Fig.2 Schematic diagram of floating body with two symmetry planes

对于双对称面(yz 和 xz 平面)浮体,有如下关系式:

$$\begin{cases} f(x, y) = f(-x, y), & f(x, y) = f(x, -y), \\ f(x, y) = f(-x, -y) \\ f_x(x, y) = -f_x(-x, y), & f_x(x, y) = f_x(x, -y), \\ f_x(x, y) = -f_x(-x, -y) \\ f_y(x, y) = f_y(-x, y), & f_y(x, y) = -f_y(x, -y), \\ f_y(x, y) = -f_y(-x, -y) \end{cases} \quad (27)$$

若区域 I 中的坐标和法向量分别为 (r_x, r_y, r_z) 和 (N_x, N_y, N_z) , 则区域 II 中与区域 I 对应的物面坐标和物面法向存在如下关系式

$$\begin{aligned} \text{区域I: } & r_x, r_y, r_z, N_x, N_y, N_z \\ \text{区域II: } & -r_x, r_y, r_z, -N_x, N_y, N_z \\ \text{区域III: } & r_x, -r_y, r_z, N_x, -N_y, N_z \\ \text{区域IV: } & -r_x, -r_y, r_z, -N_x, -N_y, N_z \end{aligned} \quad (28)$$

此外, $(r_x, r_y, r_z) \times (N_x, N_y, N_z)$ 的关系式如下:

$$\begin{aligned} \text{区域I: } & -r_z N_y + r_y N_z, r_z N_x - r_x N_z, -r_y N_x + r_x N_y \\ \text{区域II: } & -r_z N_y + r_y N_z, r_z N_x - r_x N_z, -r_y N_x + r_x N_y \\ \text{区域III: } & r_z N_y - r_y N_z, r_z N_x - r_x N_z, r_y N_x - r_x N_y \\ \text{区域IV: } & r_z N_y - r_y N_z, -r_z N_x + r_x N_z, -r_y N_x + r_x N_y \end{aligned} \quad (29)$$

$G_{0,ij} = \frac{1}{4\pi} \iint_{S_j} G_0 ds$ 的速度势矩阵为

$$\mathbf{G}_0 = \begin{bmatrix} I_\phi & II_\phi & III_\phi & IV_\phi \\ II_\phi & I_\phi & IV_\phi & III_\phi \\ III_\phi & IV_\phi & I_\phi & II_\phi \\ IV_\phi & III_\phi & II_\phi & I_\phi \end{bmatrix} \quad (30)$$

$G_{0x,ij} = \frac{1}{4\pi} \iint_{S_j} \frac{dG_0}{dx} ds$ 的速度势矩阵为

$$\mathbf{G}_{0x} = \begin{bmatrix} I_x & II_x & III_x & IV_x \\ -II_x & -I_x & -IV_x & -III_x \\ III_x & IV_x & I_x & II_x \\ -IV_x & -III_x & -II_x & -I_x \end{bmatrix} \quad (31)$$

$G_{0y,ij} = \frac{1}{4\pi} \iint_{S_j} \frac{dG_0}{dy} ds$ 的速度势矩阵为

$$\mathbf{G}_{0y} = \begin{bmatrix} I_y & II_y & III_y & IV_y \\ II_y & I_y & IV_y & III_y \\ -III_y & -IV_y & -I_y & -II_y \\ -IV_y & -III_y & -II_y & -I_y \end{bmatrix} \quad (32)$$

$G_{0z,ij} = \frac{1}{4\pi} \iint_{S_j} \frac{dG_0}{dz} ds$ 的速度势矩阵为

$$\mathbf{G}_{0z} = \begin{bmatrix} I_z & II_z & III_z & IV_z \\ II_z & I_z & IV_z & III_z \\ III_z & IV_z & I_z & II_z \\ IV_z & III_z & II_z & I_z \end{bmatrix} \quad (33)$$

$G_{0n,ij} = \frac{1}{4\pi} \iint_{S_j} \frac{dG_0}{dn} ds$ 法向诱导的系数矩阵为

$$\mathbf{G}_{0n} = \begin{bmatrix} I_n & II_n & III_n & IV_n \\ II_n & I_n & IV_n & III_n \\ III_n & IV_n & I_n & II_n \\ IV_n & III_n & II_n & I_n \end{bmatrix} \quad (34)$$

设在区域 I 上有 N 个面元,则整个物面的平均湿表面上有 $4N$ 个面元。从式(30)~(34)可以看

出,并不需要计算整个物面的速度势矩阵 \mathbf{G}_0 , \mathbf{G}_{0x} , \mathbf{G}_{0y} , \mathbf{G}_{0z} 和 \mathbf{G}_{0n} , 只需对每个矩阵计算 4 个 $N \times N$ 矩阵。对于具有双对称面 (yz 和 xz 平面) 的湿表面来说,可采用式(34)求解源强的系数矩阵。该矩阵为循环矩阵,可将原方程组化简为 4 个 N 阶矩阵的方程组进行求解。

源强 $\{\sigma_j\}$ 的求解线性方程组为

$$\mathbf{G}_{0n} \{\sigma_j\} = \{n_i\} \quad (35)$$

定义 $4N$ 阶矩阵 \mathbf{P}_{4N} 和 $2N$ 阶矩阵 \mathbf{P}_{2N} 为

$$\mathbf{P}_{4N} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} \mathbf{E}_{2N} & \mathbf{E}_{2N} \\ -\mathbf{E}_{2N} & \mathbf{E}_{2N} \end{pmatrix} \quad (36)$$

$$\mathbf{P}_{2N} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} \mathbf{E}_N & \mathbf{E}_N \\ -\mathbf{E}_N & \mathbf{E}_N \end{pmatrix}$$

式中, \mathbf{E}_{2N} 为 $2N$ 阶单位矩阵。则 \mathbf{P}_{4N} 可将 \mathbf{G}_{0n} 对角化,即

$$\mathbf{P}_{4N}^T \mathbf{G}_{0n} \mathbf{P}_{4N} = \begin{bmatrix} I_n - III_n & II_n - IV_n & 0 & 0 \\ II_n - IV_n & I_n - III_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_n + III_n & II_n + IV_n \\ 0 & 0 & II_n + IV_n & I_n + III_n \end{bmatrix} \quad (37)$$

然后, \mathbf{P}_{2N} 可将式(37)对角化为

$$\left\{ \begin{matrix} \mathbf{P}_{2N}^T \\ \mathbf{P}_{2N}^T \end{matrix} \right\} \mathbf{P}_{4N}^T \mathbf{G}_{0n} \mathbf{P}_{4N} \left\{ \begin{matrix} \mathbf{P}_{2N} \\ \mathbf{P}_{2N} \end{matrix} \right\} = \begin{bmatrix} I_n - II_n - III_n + IV_n & & & \\ & I_n + II_n - III_n - IV_n & & \\ & & I_n - II_n + III_n - IV_n & \\ & & & I_n + II_n + III_n + IV_n \end{bmatrix} \quad (38)$$

同时,源强的线性方程组变换为

$$\left\{ \begin{matrix} \mathbf{P}_{2N}^T \\ \mathbf{P}_{2N}^T \end{matrix} \right\} \mathbf{P}_{4N}^T \mathbf{G}_{0n} \mathbf{P}_{4N} \left\{ \begin{matrix} \mathbf{P}_{2N} \\ \mathbf{P}_{2N} \end{matrix} \right\} \cdot \left\{ \begin{matrix} \mathbf{P}_{2N}^T \\ \mathbf{P}_{2N}^T \end{matrix} \right\} \mathbf{P}_{4N}^T \{\sigma_j\} = \left\{ \begin{matrix} \mathbf{P}_{2N}^T \\ \mathbf{P}_{2N}^T \end{matrix} \right\} \mathbf{P}_{4N}^T \{n_i\} \quad (39)$$

进一步变形为

$$\left[\begin{matrix} I_n - II_n - III_n + IV_n & & & \\ & I_n + II_n - III_n - IV_n & & \\ & & I_n - II_n + III_n - IV_n & \\ & & & I_n + II_n + III_n + IV_n \end{matrix} \right] \cdot \left\{ \begin{matrix} \mathbf{P}_{2N}^T \\ \mathbf{P}_{2N}^T \end{matrix} \right\} \mathbf{P}_{4N}^T \{\sigma_j\} = \left\{ \begin{matrix} \mathbf{P}_{2N}^T \\ \mathbf{P}_{2N}^T \end{matrix} \right\} \mathbf{P}_{4N}^T \{n_i\} \quad (40)$$

引入新变量 $\{\bar{\sigma}_j\} = \left\{ \begin{matrix} \mathbf{P}_{2N}^T \\ \mathbf{P}_{2N}^T \end{matrix} \right\} \mathbf{P}_{4N}^T \{\sigma_j\}$, $\{\bar{n}_i\} = \left\{ \begin{matrix} \mathbf{P}_{2N}^T \\ \mathbf{P}_{2N}^T \end{matrix} \right\} \mathbf{P}_{4N}^T \{n_i\}$, 则式(40)可以转换为

$$\left[\begin{matrix} I_n - II_n - III_n + IV_n & & & \\ & I_n + II_n - III_n - IV_n & & \\ & & I_n - II_n + III_n - IV_n & \\ & & & I_n + II_n + III_n + IV_n \end{matrix} \right] \cdot \{\bar{\sigma}_j\} = \{\bar{n}_i\} \quad (41)$$

$\{\bar{\sigma}_j\}$ 可以由如下线性方程组求解:

$$\begin{cases} (I_n - II_n - III_n + IV_n) \cdot \{\bar{\sigma}_j\}_{j=1 \sim N} = \{\bar{n}_i\}_{i=1 \sim N} \\ (I_n + II_n - III_n - IV_n) \cdot \{\bar{\sigma}_j\}_{j=(N+1) \sim 2N} = \{\bar{n}_i\}_{i=(N+1) \sim 2N} \\ (I_n - II_n + III_n - IV_n) \cdot \{\bar{\sigma}_j\}_{j=(2N+1) \sim 3N} = \{\bar{n}_i\}_{i=(2N+1) \sim 3N} \\ (I_n + II_n + III_n + IV_n) \cdot \{\bar{\sigma}_j\}_{j=(3N+1) \sim 4N} = \{\bar{n}_i\}_{i=(3N+1) \sim 4N} \end{cases}$$

(41) 中,这样源强的求解公式可转换为

$$\begin{cases} (I_n - II_n - III_n + IV_n) \cdot \{\bar{\sigma}_j\}_{j=1 \sim N} = \left\{ \{n_i\}_{i=1 \sim N} - \{n_i\}_{i=(N+1) \sim 2N} - \{n_i\}_{i=(2N+1) \sim 3N} + \{n_i\}_{i=(3N+1) \sim 4N} \right\} \\ (I_n + II_n - III_n - IV_n) \cdot \{\bar{\sigma}_j\}_{j=(N+1) \sim 2N} = \left\{ \{n_i\}_{i=1 \sim N} + \{n_i\}_{i=(N+1) \sim 2N} - \{n_i\}_{i=(2N+1) \sim 3N} - \{n_i\}_{i=(3N+1) \sim 4N} \right\} \\ (I_n - II_n + III_n - IV_n) \cdot \{\bar{\sigma}_j\}_{j=(2N+1) \sim 3N} = \left\{ \{n_i\}_{i=1 \sim N} - \{n_i\}_{i=(N+1) \sim 2N} + \{n_i\}_{i=(2N+1) \sim 3N} - \{n_i\}_{i=(3N+1) \sim 4N} \right\} \\ (I_n + II_n + III_n + IV_n) \cdot \{\bar{\sigma}_j\}_{j=(3N+1) \sim 4N} = \left\{ \{n_i\}_{i=1 \sim N} + \{n_i\}_{i=(N+1) \sim 2N} + \{n_i\}_{i=(2N+1) \sim 3N} + \{n_i\}_{i=(3N+1) \sim 4N} \right\} \end{cases} \quad (42)$$

$$\{\bar{\sigma}_j\} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} \{\bar{\sigma}_j\}_{i=1 \sim N} + \{\bar{\sigma}_j\}_{i=(N+1) \sim 2N} + \{\bar{\sigma}_j\}_{i=(2N+1) \sim 3N} + \{\bar{\sigma}_j\}_{i=(3N+1) \sim 4N} \\ -\{\bar{\sigma}_j\}_{i=1 \sim N} + \{\bar{\sigma}_j\}_{i=(N+1) \sim 2N} - \{\bar{\sigma}_j\}_{i=(2N+1) \sim 3N} + \{\bar{\sigma}_j\}_{i=(3N+1) \sim 4N} \\ -\{\bar{\sigma}_j\}_{i=1 \sim N} - \{\bar{\sigma}_j\}_{i=(N+1) \sim 2N} + \{\bar{\sigma}_j\}_{i=(2N+1) \sim 3N} + \{\bar{\sigma}_j\}_{i=(3N+1) \sim 4N} \\ \{\bar{\sigma}_j\}_{i=1 \sim N} - \{\bar{\sigma}_j\}_{i=(N+1) \sim 2N} - \{\bar{\sigma}_j\}_{i=(2N+1) \sim 3N} + \{\bar{\sigma}_j\}_{i=(3N+1) \sim 4N} \end{pmatrix} \quad (43)$$

式中, $\{\bar{\sigma}_j\}$ 为临时中间变量。式(43)的物理含义解释为:在浮体左前侧分布的无限水深或有限水深格林函数变为 $G_0[P(x, y, z), Q(\xi, \eta, \zeta)] - G_0[P(x, y, z), Q(-\xi, \eta, \zeta)] - G_0[P(x, y, z), Q(\xi, -\eta, \zeta)] + G_0[P(x, y, z), Q(-\xi, -\eta, \zeta)]$; 在浮体左后侧分布的无限水深或有限水深格林函数变为 $G_0[P(x, y, z), Q(\xi, \eta, \zeta)] + G_0[P(x, y, z), Q(-\xi, \eta, \zeta)] - G_0[P(x, y, z), Q(\xi, -\eta, \zeta)] - G_0[P(x, y, z), Q(-\xi, -\eta, \zeta)]$; 在浮体右前侧分布的无限水深或有限水深格林函数变为 $G_0[P(x, y, z), Q(\xi, \eta, \zeta)] - G_0[P(x, y, z), Q(-\xi, \eta, \zeta)] + G_0[P(x, y, z), Q(\xi, -\eta, \zeta)] - G_0[P(x, y, z), Q(-\xi, -\eta, \zeta)]$; 在浮体右后侧分布的无限水深或有限水深格林函数变为 $G_0[P(x, y, z), Q(\xi, \eta, \zeta)] + G_0[P(x, y, z), Q(-\xi, \eta, \zeta)] + G_0[P(x, y, z), Q(\xi, -\eta, \zeta)] + G_0[P(x, y, z), Q(-\xi, -\eta, \zeta)]$ 。

4 数值计算结果

为了验证本方法的有效性,结合上述推导过程,本文选取了1艘方形驳船进行数值计算,该船长40 m,船宽5 m,吃水5 m。计算水深为20 m。

采用普通计算机,其CPU为Intel Core I5-2300的

然后,利用 $\{\sigma_j\} = P_{4N} \begin{Bmatrix} P_{2N} \\ P_{2N} \end{Bmatrix} \{\bar{\sigma}_j\}$ 可以求得

源强。另外,还可将 $\begin{Bmatrix} P_{2N}^T \\ P_{2N}^T \end{Bmatrix} P_{4N}^T \{\sigma_j\} = \{\bar{\sigma}_j\}$ 中

P^T 的系数 $\sqrt{2}/2$ 放到 $\{\sigma_j\} = P_{4N} \begin{Bmatrix} P_{2N} \\ P_{2N} \end{Bmatrix} \{\bar{\sigma}_j\}$ 的 P

中,这样源强的求解公式可转换为

双核四线程计算机,主频为2.8 GHz,内存为3.48 G,操作系统为Windows XP。表1给出了在15个频率点从湿表面网格信息读取到附加质量和附加阻尼计算结束所需的时间。从表中可以看出,1/2模型和1/4模型的计算时间分别为全尺度模型的44.4%和20.3%。根据前文所述,对于1/2模型的源强系数矩阵,只需求解原来1/2的元素,同时线性方程组求解时间缩短为原来的1/4,实际综合计算耗时为44.4%,可见源强系数矩阵的计算时间占据了绝大部分附加质量和附加阻尼的求解时间,而线性方程组的求解只占据了极少部分的时间。1/4模型的计算结果也是如此。可见利用对称性,可以极大地减少附加质量和附加阻尼系数矩阵的求解时间,同时也验证了本文推导过程的正确性。

表1 模型计算耗时结果

Table 1 Time-consuming results for model calculation

参数	数值	参数	数值
面元数量	700	1/2模型耗时/s	110.2
全模型耗时/s	248.1	1/4模型耗时/s	50.3

5 结 语

本文针对具有对称面的浮体,在计算奇点源强时,利用其面元系数矩阵的循环特性,给出了奇

