线性代数试题

一填空题(每空 3 分，共 15 分)

得分	评阅人

1、已知四阶行列式D的第三行元素依次为$a_{31}=2$，$a_{32}=0$，$a_{33}=-1$，$a_{34}=3$，并且第三行元素的余子式依次为$M_{31}=5$，$M_{32}=7$，$M_{33}=-6$，$M_{34}=-2$，则$D=$__________

2、设矩阵$A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 3\\ 2 & 0 & 1\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$，则$A'B=$__________

（其中A'为A的转置矩阵）

3、若向量组$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\ t+1\\ 0\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 0\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ t^2+1\end{pmatrix}$线性相关，则$t=$__________

4、若线性方程组$\begin{cases}x_1-x_2=2\\ x_1+2x_2=1\\ 3x_1+\lambda x_2=1\end{cases}$有解，则$\lambda=$__________

5、设n阶方阵A与B相似，且$A^2=A$，则$B^2=$__________

二、选择题(每小题 3 分，共 15 分)

得分	评阅人

1、设A为三阶方阵，且$|A|=\frac{1}{2}$，则$|-2A|=$（　　　）

（A）-4　　　　（B）4　　　　（C）-1　　　　（D）1

2、设A、B为n阶方阵，下列各式一定成立的是（　　　）

（A）$AB=BA$　　　　（B）$|AB|=|BA|$

（C）$(AB)'=A'B'$　　　　（D）$(AB)^2=A^2B^2$

3、设A为n阶方阵，则下列命题错误的是（　　　）

（A）A可逆的充要条件是$|A|\neq 0$。

（B）A可逆的充要条件是A^*也可逆。（其中A^*为A的伴随矩阵）

（C）A可逆的充要条件是A有n个不同的特征值。

（D）A可逆的充要条件是齐次线性方程组$AX=0$仅有零解。

4、三个方程四个未知量的非齐次线性方程组$AX=B$满足（　　　）时一定有解。

（A）系数矩阵A的秩$=1$　　　　（B）系数矩阵A的秩$=2$

（C）系数矩阵A的秩$=3$　　　　（D）增广矩阵$[A,B]$的秩$=3$

5、二次型$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2-2x_1x_2+x_2^2$的矩阵为（　　）

（A）$\begin{bmatrix}2&-1\\-1&1\end{bmatrix}$　　　　（B）$\begin{bmatrix}2&-2\\-2&1\end{bmatrix}$

（C）$\begin{bmatrix}2&-1&0\\-1&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$　　　　（D）$\begin{bmatrix}2&-2&0\\-2&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$

三、计算行列式$D=\begin{vmatrix}1&2&3&4\\-2&1&-4&3\\3&-4&-1&2\\4&3&-2&-1\end{vmatrix}$的值。（8分）

得分	评阅人

四、求向量组$\alpha_1=(2,1,3,-1)$，$\alpha_2=(3,-1,2,0)$，$\alpha_3=(4,2,6,-2)$，$\alpha_4=(4,-3,1,1)$ 的一个最大线性无关组及向量组的秩。（10 分）

得分	评阅人

五、已知$A=\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$。求满足$3A-2X=B$中的$X$.（8 分）

得分	评阅人

六、设矩阵 $A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -3 \\ -3 & 4 & 4 \end{bmatrix}$，求矩阵 A 的逆阵 A^{-1}。（10 分）

得分	评阅人

七、求 a、b 的值，使线性方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 + x_3 = 2 \\ 5x_1 + 3x_2 + (a+8)x_3 = b+7 \end{cases}$ 有无穷多个解，并求出通解。（10 分）

得分	评阅人

八、求矩阵 $A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ 的特征值和特征向量。（10 分）

得分	评阅人

九、设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+5x_3^2+2tx_1x_2-2x_1x_3+4x_2x_3$ 为正定二次型。求 t 的取值范围。（8 分）

得分	评阅人

十、设 A，B，$A+B$ 都是非奇异矩阵，试证明 $A^{-1}+B^{-1}$ 也是非奇异矩阵，并求 $A^{-1}+B^{-1}$ 的逆阵。（6 分）

得分	评阅人

答案解析

一、**1** $\underline{22}$；　2 $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 0 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$；　3 $\underline{1}$；

4 $\underline{12}$；　5 $\underline{B}$；

二、**1**（A）；　**2**（B）；　**3**（C）；　**4**（C）；　**5**（C）。

三、1. $D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 2 & 11 \\ 0 & -10 & -10 & -10 \\ 0 & -5 & -14 & -17 \end{vmatrix}$ ——————————2 分

$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 2 & 11 \\ 0 & 0 & -6 & 12 \\ 0 & 0 & -12 & -6 \end{vmatrix}$ ——————————4 分

$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 2 & 11 \\ 0 & 0 & -6 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & -30 \end{vmatrix}$ ——————————6 分

$= 1 \cdot 5 \cdot (-6) \cdot (-30) = 900$ ——————————8 分

四、$(\boldsymbol{\alpha}_1', \boldsymbol{\alpha}_2', \boldsymbol{\alpha}_3', \boldsymbol{\alpha}_4') = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 4 \\ 1 & -1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & 6 & 1 \\ -1 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ ——————————2 分

$\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ——————————7 分

$\therefore R(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4) = 2$ ——————————8 分

则 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 为向量组的一个最大无关组 ——————————10 分

（注：α_1, α_4 或 α_2, α_3 或 α_2, α_4 或 α_3, α_4 亦为向量组的一个最大无关组）

五、$\because 3A - 2X = B$

$\therefore X = \frac{1}{2}(3A - B)$ ——————————2 分

$= \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} 9 & 3 & 0 \\ -3 & 6 & 3 \\ 9 & 12 & 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \right)$ ——————————5 分

$= \begin{bmatrix} 4 & 3/2 & -1 \\ -1 & 5/2 & 1 \\ 7/2 & 11/2 & 5/2 \end{bmatrix}$ ——————————8 分

六、 方法（一）

$\because |A|=2$ ------------------3 分

$$\therefore A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*=\frac{1}{|A|}\begin{bmatrix}A_{11}&A_{21}&A_{31}\\A_{12}&A_{22}&A_{32}\\A_{13}&A_{23}&A_{33}\end{bmatrix}$$ ---------------5 分

$$=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}8&0&2\\1&1&1\\5&-1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&0&1\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{5}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$ ---------------10 分

方法（二）

$$\because\begin{bmatrix}1&-1&-1&1&0&0\\2&-1&-3&0&1&0\\-3&4&4&0&0&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-1&-1&1&0&0\\0&1&-1&-2&1&0\\0&1&1&3&0&1\end{bmatrix}$$ ---------4 分

$$\to\begin{bmatrix}1&0&-2&-1&1&0\\0&1&-1&-2&1&0\\0&0&1&\frac{5}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0&4&0&1\\0&1&0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&0&1&\frac{5}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$ ---------8 分

$$\therefore A^{-1}=\begin{bmatrix}4&0&1\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{5}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$ -------------------10 分

七、 对增广矩阵作初等行变换，有

$$\begin{bmatrix}1&1&2&1\\1&0&1&2\\5&3&a+8&b+7\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&1&2\\0&1&1&-1\\0&3&a+3&b-3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&1&2\\0&1&1&-1\\0&0&a&b\end{bmatrix}$$ ---------8 分

由此可见，当 $a=b=0$ 时，

增广矩阵的秩 $=$ 系数矩阵的秩 $=2<$ 未知量的个数，

此时原方程组有无穷多个解，并且当 $a=b=0$ 时，原线性方程组的同解方程组为：

$$\begin{cases}x_1 \qquad +x_3 = 2\\ \qquad x_2 +x_3 = -1\end{cases}$$

$\therefore$ 方程组的通解为 $\begin{cases}x_1=2-k\\x_2=-1-k\\x_3=k\end{cases}$ （k 为任意常数）

八、 $$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2&1&-2\\-5&\lambda+3&-3\\1&0&\lambda+2\end{vmatrix}=(\lambda+1)^3=0$$ ---------------2 分

解得特征值为：$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=-1$。 ----------3 分

对应于$\lambda_1=-1$，根据$(\lambda E-A)X=0$，有 ----------4 分

$$\begin{cases}-3x_1+x_2-2x_3=0\\-5x_1+2x_2-3x_3=0\\x_1+x_3=0\end{cases}，即\begin{cases}x_1=-x_3\\x_2=-x_3\end{cases}$$ ----------7 分

取$x_3=1$，则易求得$x_1=-1,x_2=-1$。 ----------8 分

即关于$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=-1$的一个特征向量$p=(-1,-1,1)'$ ----------9 分

故关于$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=-1$的全部特征向量为：$kp\ (k\neq 0)$ ----------10 分

九、(1) $|1|=1>0$ ----------1 分

(2) $\begin{vmatrix}1&t\\t&1\end{vmatrix}=1-t^2>0$ ----------2 分

得：$-1<t<1$ ----------3 分

(3) $|A|=\begin{vmatrix}1&t&-1\\t&1&2\\-1&2&5\end{vmatrix}$ ----------4 分

$=-5t^2-4t>0$ ----------6 分

得$-\frac{4}{5}<t<0$ ----------7 分

由(1)、(2)、(3)得：$-\frac{4}{5}<t<0$ ----------8 分

十、$\mathbf{A}^{-1}+\mathbf{B}^{-1}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{E}+\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{B}^{-1}=\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{E}+\mathbf{A}\mathbf{B}^{-1})=\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{B}\mathbf{B}^{-1}+\mathbf{A}\mathbf{B}^{-1})$

$=\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{B}+\mathbf{A})\mathbf{B}^{-1}=\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{B}^{-1}$ ----------2 分

$$\left.\begin{aligned}\Rightarrow|\mathbf{A}^{-1}+\mathbf{B}^{-1}|=|\mathbf{A}^{-1}||\mathbf{A}+\mathbf{B}||\mathbf{B}^{-1}|=|\mathbf{A}|^{-1}|\mathbf{A}+\mathbf{B}||\mathbf{B}|^{-1}\\|\mathbf{A}|\neq 0,|\mathbf{B}|\neq 0,|\mathbf{A}+\mathbf{B}|\neq 0\end{aligned}\right\}\Rightarrow|\mathbf{A}^{-1}+\mathbf{B}^{-1}|\neq 0$$

$\Rightarrow\mathbf{A}^{-1}+\mathbf{B}^{-1}$是非奇异矩阵 ----------4 分

$(\mathbf{A}^{-1}+\mathbf{B}^{-1})^{-1}=[\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{B}^{-1}]^{-1}=(\mathbf{B}^{-1})^{-1}(\mathbf{A}+\mathbf{B})^{-1}(\mathbf{A}^{-1})^{-1}=\mathbf{B}(\mathbf{A}+\mathbf{B})^{-1}\mathbf{A}$ ---6 分