习题3 (P87)

8. 集合 $A=\{a,b,c\}$

解: (1). $R_1=\{\langle a,a\rangle,\langle b,b\rangle,\langle c,c\rangle\}$

(2). $R_2=\{\langle a,a\rangle,\langle a,b\rangle,\langle b,c\rangle\}$

(3). $R_3=\{\langle a,a\rangle,\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle b,b\rangle,\langle c,c\rangle\}$

(4). $R_4=\{\langle a,a\rangle,\langle a,c\rangle,\langle b,b\rangle,\langle c,a\rangle,\langle c,c\rangle\}$

(5). $R_5=\{\langle a,b\rangle,\langle a,c\rangle,\langle b,c\rangle\}$

11. 设集合 $A=\{a,b,c,d\}$ 上的关系 $R=\{\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle b,c\rangle,\langle c,d\rangle\}$

解: $r(R)=\{\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle b,c\rangle,\langle c,d\rangle\}\cup\{\langle a,a\rangle,\langle b,b\rangle,\langle c,c\rangle,\langle d,d\rangle\}$

$=\{\langle a,a\rangle,\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle b,b\rangle,\langle b,c\rangle,\langle c,c\rangle,\langle c,d\rangle,\langle d,d\rangle\}$

$s(R)=\{\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle b,c\rangle,\langle c,d\rangle\}\cup\{\langle c,b\rangle,\langle d,c\rangle\}$

$=\{\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle b,c\rangle,\langle c,b\rangle,\langle c,d\rangle,\langle d,c\rangle\}$

$t(R)=\{\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle b,c\rangle,\langle c,d\rangle\}\cup\{\langle a,a\rangle,\langle a,c\rangle,\langle a,d\rangle,\langle b,b\rangle,\langle b,d\rangle\}$

$=\{\langle a,a\rangle,\langle a,b\rangle,\langle a,c\rangle,\langle a,d\rangle,\langle b,a\rangle,\langle b,b\rangle,\langle b,c\rangle,\langle b,d\rangle,\langle c,d\rangle\}$

习题3 (P88)

21. 证明整数集 Z 上

$R=\{\langle x,$

~~解~~ 证明: ① 对每个 x

②. 对于 x,

被 5 整

③对于 x,

$x-z=(x$

故综上所述

17. 设 $A=\{1,2,4,8,12,2$

解: (1) R 是 A 上的

(2). 由题意可得,

集合	最大元
A	24

则它的极小元为

习题3 (P88)

21. 证明整数集Z上关系R是等价关系。

$R=\{\langle x,y\rangle \mid (x-y)$可以被5整除$\}$

~~解~~ 证明：① 对每个$x\in Z$，$x-x$可被5整除，所以是自反的。

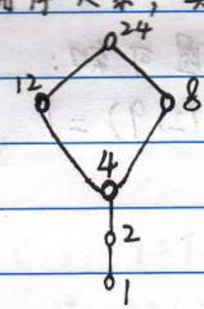
②. 对于$x,y\in Z$，如果$x-y$能被5整除，则$y-x$也能被5整除，所以是对称的。

③ 对于$x,y\in Z$，如果有$x-y$，$y-z$均能被5整除，则$x-z=(x-y)+(y-z)$亦能被5整除，所以是传递的。

故综上所述，R是Z上等价关系。

17. 设$A=\{1,2,4,8,12,24\}$上的整除关系$R=\{\langle a_1,a_2\rangle \mid a_1,a_2\in A, a_1$整除$a_2\}$

解：(1) R是A上的偏序关系，其哈斯图如下：



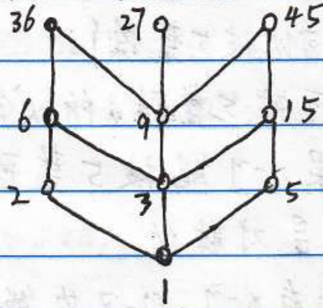
(2). 由题意可得，A的各种特殊元素如下表：

集合	最大元	最小元	极大元	极小元	上界	下界	上确界	下确界
A	24	1	24	1	24	1	24	1

则它的极小元为1，最大元为24，极大元为24，最小元为1。

18. 设 $A=\{1,2,3,5,6,9,15,27,36,45\}$

解：(1) 由题意，可知A中整除关系的哈斯图如下：



(2). A中的各特殊元素见下表：

集合	极大元	极小元	最大元	最小元
A	27, 36, 45	1	无	1

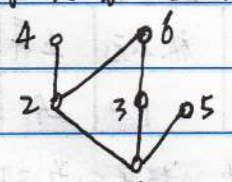
则A中所有极大元可表示为集合 $\{27,36,45\}$，极小元则为1

(3). 由A中整除关系的哈斯图可知：

$lub(2,9)=36$, $glb(2,9)=1$

19. 集合 $S=\{1,2,3,4,5,6\}$

解：集合S在偏序关系"整除"下的哈斯图如下：



(1). 集合 $\{1,2,3,4,5,$

集合	最大
$\{1,2,3,4,5,6\}$	无

则可得，集合 $\{1,$

极大元为 $\{4,5,6\}$

(2). $\{2,3,6\}$ 和 $\{2,$

集合	上界
$\{2,3,6\}$	6
$\{2,3,5\}$	无

故 $\{2,3,6\}$ 的上

$\{2,3,5\}$ 无上界和

习题 4 (P_{110})

1. (1) $R\subseteq I^2$, $R=$

解：因为有 $(i^2,i)\in$

(2) 设 $A=\{1,2,3,4\}$, $B=$

$R_1=\{(1,b_1),(2,b_1),($

解：关系 R_1 因为没有取

关系 R_2 因为没有取定

(1). 集合$\{1,2,3,4,5,6\}$的各特殊元素如下表:

集合	最大元	最小元	极大元	极小元
$\{1,2,3,4,5,6\}$	无	1	4, 5, 6	1

则可得，集合$\{1,2,3,4,5,6\}$无最大元，最小元为1，极大元集合为$\{4,5,6\}$，极小元为1。

(2). $\{2,3,6\}$和$\{2,3,5\}$的各特殊元素如下表:

集合	上界	下界	上确界	下确界
$\{2,3,6\}$	6	1	15	1
$\{2,3,5\}$	无	1	无	1

故$\{2,3,6\}$的上界为6，下界为1，上确界为15，下确界为1；$\{2,3,5\}$无上界和上确界，下界为1，下确界为1。

习题4 (P_{110})

1. (1) $R \subseteq I^2$, $R=\{(i^2, i) \mid i \in I\}$

解: 因为有$(i^2, i) \in R$，$(i^2, -i) \in R$，即值不唯一，故不能构成函数

(2) 设$A=\{1,2,3,4\}$，$B=\{b_1, b_2, b_3\}$，$R_1 \subseteq A \times B$，$R_2 \subseteq A \times B$，其中

$R_1=\{(1,b_1),(2,b_1),(3,b_1)\}$，$R_2=\{(1,b_1),(2,b_2),(3,b_3),(2,b_1)\}$

解: 关系R_1因为没有取定义域中所有的值，故不能构成函数；

关系R_2因为没有取定义域中所有的值，且2对应的值不唯一，也不能构成函数。

2.(1) $f: Z \to Z$, $f(j) = j \bmod 3$

解：由题意可知， $ran f = \{0, 1, 2\}$ ， $dom f = Z$

因为关系 f 为 Z 到 Z 的函数，而 $ran f = \{0, 1, 2\} \subseteq Z$

故该函数为一般函数。

(2). $f: N \to N$ ， $f(j) = \begin{cases} 1 & j\text{是偶数} \\ 0 & j\text{是奇数} \end{cases}$

解：由题意可知， $ran f = \{0, 1\}$ ， $dom f = N$

因为关系 f 为 N 到 N 的函数，且有 $ran f = \{0, 1\} \subseteq N$

故该函数为一般函数。

(3) $f: N \to \{0, 1\}$ ， $f(j) = \begin{cases} 1 & j\text{是偶数} \\ 0 & j\text{是奇数} \end{cases}$

解：由题意，有 $ran f = \{0, 1\}$ ， $dom f = N$

因为关系 f 为 N 到 $\{0, 1\}$ 的函数，且 $ran f = \{0, 1\}$ ， $dom f = N$

则该函数为满射函数。

(4). $f: Z \to N$ ， $f(i) = |2i| + 1$

解：因为关系 f 为 Z 到 N 的函数，而 $\forall i \in Z$ ，使得 $f(i) \neq 0$ ，且 $0 \in N$

故可得该函数为一般函数。

2.3

(5). $f: R \to R$ ， $f(r) = 2r - 15$

解：关系 f 为 R 到 R 的函数，且由题意有 $ran f = R$ ， $dom f = R$ ，

且对于任意 $r_1, r_2 \in R$ ，若 $r_1 \neq r_2$ ，则有 $f(r_1) \neq f(r_2)$

故该函数为双射函数。