习题2 (P_{46})

5. 设解释I如下:

$D=\{a,b\}$; $P(a,a)=1$; $P(b,b)=1$; $P(a,b)=0$; $P(b,a)=0$

解: (1). $(\forall x)(\exists y)P(x,y) \Leftrightarrow (\exists y)P(a,y) \wedge (\exists y)P(b,y)$

$\Leftrightarrow (P(a,a) \vee P(a,b)) \wedge (P(b,a) \vee P(b,b))$

$\Leftrightarrow (1 \vee 0) \wedge (0 \vee 1)$

$\Leftrightarrow 1$

即该公式在解释I下的真值为1

(2). $(\exists y)(\forall x)P(x,y) \Leftrightarrow (\forall x)P(x,a) \vee (\forall x)P(x,b)$

$\Leftrightarrow (P(a,a) \wedge P(b,a)) \vee (P(a,b) \wedge P(b,b))$

$\Leftrightarrow (1 \wedge 0) \vee (0 \wedge 1)$

$\Leftrightarrow 0$

则该公式在解释I下的真值为0

(3). $(\exists x)(\forall y)P(x,y) \Leftrightarrow (\forall y)P(a,y) \vee (\forall y)P(b,y)$

$\Leftrightarrow (P(a,a) \wedge P(a,b)) \vee (P(b,a) \wedge P(b,b))$

$\Leftrightarrow (1 \wedge 0) \vee (0 \wedge 1)$

$\Leftrightarrow 0$

则该公式在解释I下的真值为0

(4). $(\forall x)(\forall y)(P(x,y)$

$\Leftrightarrow (\forall y)(P(a,y) \rightarrow$

$\Leftrightarrow ((P(a,a) \rightarrow P(a,$

$\wedge ((P(b,a) \rightarrow P$

$\Leftrightarrow ((1 \rightarrow 1) \wedge (0 \rightarrow$

$\Leftrightarrow (1 \wedge 1) \wedge (1$

$\Leftrightarrow 1$

故该公式

6. (1) $(\exists x)P(x) \rightarrow (\forall x)$

解: 对于公式$(\exists x)P$

①. 当$(\exists x)P(x)$取值

~~式的真值~~ 则当(

$(\exists x)P(x)$为真, $(\forall$

②. 当$(\exists x)P(x)$取值

公式的真值为

故公式$(\exists x)P(x) \rightarrow$

(2) $\neg(P(x) \rightarrow ((\forall x)$

解: $\neg(P(x) \rightarrow ((\forall x)$

(4). $(\forall x)(\forall y)(P(x,y)\rightarrow P(y,x))$

$\Leftrightarrow (\forall y)(P(a,y)\rightarrow P(y,a)) \land (\forall y)(P(b,y)\rightarrow P(y,b))$

$\Leftrightarrow ((P(a,a)\rightarrow P(a,a))\land(P(a,b)\rightarrow P(b,a)))$

$\land((P(b,a)\rightarrow P(a,b))\land(P(b,b)\rightarrow P(b,b)))$

$\Leftrightarrow ((1\rightarrow 1)\land(0\rightarrow 0))\land((0\rightarrow 0)\land(1\rightarrow 1))$

$\Leftrightarrow (1\land 1)\land(1\land 1)$

$\Leftrightarrow 1$

故该公式在解释I下的真值为1

6. (1) $(\exists x)P(x)\rightarrow(\forall x)P(x)$

解：对于公式$(\exists x)P(x)\rightarrow(\forall x)P(x)$，对任何解释I：

①.当$(\exists x)P(x)$取值为真时，$(\forall x)P(x)$可为真，也可为假，~~时该公式的真值~~ 则当$(\exists x)P(x)$为真，$(\forall x)P(x)$为真时，公式的真值为真；$(\exists x)P(x)$为真，$(\forall x)P(x)$为假时，公式的真值为假；

②.当$(\exists x)P(x)$取值为假时，$(\forall x)P(x)$可为真，也可为假，此时，公式的真值为真；

故公式$(\exists x)P(x)\rightarrow(\forall x)P(x)$为可满足式。

(2) $\neg(P(x)\rightarrow((\forall x)Q(x,y)\rightarrow P(x)))$

解：$\neg(P(x)\rightarrow((\forall x)Q(x,y)\rightarrow P(x)))\Leftrightarrow\neg(P(x)\rightarrow(\neg(\forall x)Q(x,y)\lor P(x)))$

$\Leftrightarrow \neg(P(x)\rightarrow((\exists x)\neg Q(x,y)\vee P(x)))$

$\Leftrightarrow \neg(\neg P(x)\vee((\exists x)\neg Q(x,y)\vee P(x)))$

$\Leftrightarrow \neg(\neg P(x)\vee P(x)\vee(\exists x)\neg Q(x,y))$

$\Leftrightarrow P(x)\wedge\neg P(x)\wedge(\forall x)Q(x,y)$

$\Leftrightarrow 0$

故公式 $\neg(P(x)\rightarrow((\forall x)Q(x,y)\rightarrow P(x)))$ 为矛盾式。

(3)、$(\forall x)P(x)\rightarrow((\forall x)P(x)\vee R(y))$

解：对于公式 $(\forall x)P(x)\rightarrow((\forall x)P(x)\vee R(y))$，对任何解释 I：

①. 当 $(\forall x)P(x)$ 取值为真时，$R(y)$ 可为真，也可为假；此时，$((\forall x)P(x)\vee R(y))$ 的真值为真，则公式的真值为真；

②. 当 $(\forall x)P(x)$ 取值为假时，$R(y)$ 可为真，也可为假；而对于 $((\forall x)P(x)\vee R(y))$ 同样可为真亦可为假，则有公式的真值为真；

故公式 $(\forall x)P(x)\rightarrow((\forall x)P(x)\vee R(y))$ 为有效式。

(4). $P(x)\rightarrow((\forall x)Q(x,y)\rightarrow P(y))$

解：对于公式 $P(x)\rightarrow((\forall x)Q(x,y)\rightarrow P(y))$，对任何解释 I：

①. 当 $(\forall x)Q(x,y)$ 取值为真时，$P(x)$ 和 $P(y)$ 可为真，也可为假；即有 $(\forall x)Q(x,y)$ 为真，$P(x)$ 为真，$P(y)$ 为假时，公式的真值为假；其它情况公式的真值为真；

②. 当 $(\forall x)Q(x,y)$ 取值为假时，$P(x)$ 和 $P(y)$ 可为真，也可为假，此时，公式的真值为真；

故公式 $P(x)\rightarrow((\forall x)Q(x,y)\rightarrow P(y))$ 为可满足式。

7. (1) (∀x)(G(x)∧H(x)) ⇔

证明：(∀x)(G(x)∧H(x)) ⇔

(2). (∃x)(G(x)∨H(x)) ⇔

证明：(∃x)(G(x)∨H(x)) ⇔

⇔

⇔

⇔

⇔

8. 解：(1) (∃x)P(x,y) ↔

⇔((∃x)P(x,y) → (

⇔(¬(∃x)P(x,y) ∨

⇔((∀x)¬P(x,y)

⇔(∀x)(∀z)(¬P(x,

⇔(∀x)(∀z)(¬P(

⇔(∀x)(∀z)(¬P

⇔(∀x)(∀z)((¬P

7. (1) $(\forall x)(G(x)\wedge H(x)) \Leftrightarrow (\forall x)G(x) \wedge (\forall x)H(x)$

证明: $(\forall x)(G(x)\wedge H(x)) \Leftrightarrow (G(x_1)\wedge H(x_1))\wedge(G(x_2)\wedge H(x_2))\wedge\cdots\wedge(G(x_n)\wedge H(x_n))$

$\Leftrightarrow G(x_1)\wedge H(x_1)\wedge G(x_2)\wedge H(x_2)\wedge\cdots\wedge G(x_n)\wedge H(x_n)$

$\Leftrightarrow G(x_1)\wedge G(x_2)\wedge\cdots\wedge G(x_n)\wedge H(x_1)\wedge H(x_2)\wedge\cdots\wedge H(x_n)$

$\Leftrightarrow (G(x_1)\wedge G(x_2)\wedge\cdots\wedge G(x_n))\wedge(H(x_1)\wedge H(x_2)\wedge\cdots\wedge H(x_n))$

$\Leftrightarrow (\forall x)G(x) \wedge (\forall x)H(x)$ ✓

(2). $(\exists x)(G(x)\vee H(x) \Leftrightarrow (\exists x)G(x)\vee(\exists x)H(x)$

证明: $(\exists x)(G(x)\vee H(x)) \Leftrightarrow (G(x_1)\vee H(x_1))\vee(G(x_2)\vee H(x_2))\vee\cdots\vee(G(x_n)\vee H(x_n))$

$\Leftrightarrow G(x_1)\vee H(x_1)\vee G(x_2)\vee H(x_2)\vee\cdots\vee G(x_n)\vee H(x_n)$

$\Leftrightarrow G(x_1)\vee G(x_2)\vee\cdots\vee G(x_n)\vee H(x_1)\vee H(x_2)\vee\cdots\vee H(x_n)$

$\Leftrightarrow (G(x_1)\vee G(x_2)\vee\cdots\vee G(x_n))\vee(H(x_1)\vee H(x_2)\vee\cdots\vee H(x_n))$

$\Leftrightarrow (\exists x)G(x)\vee(\exists x)H(x)$ ✓

8. 解: (1) $(\exists x)P(x,y) \leftrightarrow (\forall z)Q(z)$

$\Leftrightarrow ((\exists x)P(x,y)\rightarrow(\forall z)Q(z))\wedge((\forall z)Q(z)\rightarrow(\exists x)P(x,y))$

$\Leftrightarrow (\neg(\exists x)P(x,y)\vee(\forall z)Q(z)]\wedge(\neg(\forall z)Q(z)\vee(\exists x)P(x,y))$

$\Leftrightarrow ((\forall x)\neg P(x,y)\vee(\forall z)Q(z))\wedge((\exists z)\neg Q(z)\vee(\exists x)P(x,y)]$

$\Leftrightarrow (\forall x)(\forall z)(\neg P(x,y)\vee Q(z))\wedge(\exists z)(\exists x)(\neg Q(z)\vee P(x,y))$

$\Leftrightarrow (\forall x)(\forall z)(\neg P(x,y)\vee Q(z))\wedge(\exists z)(\exists x)\neg(Q(z)\wedge\neg P(x,y))$

$\Leftrightarrow (\forall x)(\forall z)(\neg P(x,y)\vee Q(z))\wedge(\forall z)(\forall x)(Q(z)\wedge\neg P(x,y)$

$\Leftrightarrow (\forall x)(\forall z)((\neg P(x,y)\vee Q(z))\wedge(Q(z)\wedge\neg P(x,y)))$

(2). ~~$(\forall y)P(y) \to (\exists y)Q(x,y) \land (\forall x)R(x)$~~

~~$\Leftrightarrow \neg(\forall y)P(y) \lor (\exists y)Q(x,y) \land$~~

(2). $(\forall y)P(y) \to (\exists y)Q(x,y) \land (\forall x)R(x)$

$\Leftrightarrow (\forall y)P(y) \to (\exists y)(\forall x)(Q(z,y) \land R(x))$

$\Leftrightarrow \neg(\forall y)P(y) \lor (\exists y)(\forall x)(Q(z,y) \land R(x))$

$\Leftrightarrow (\exists y)\neg P(y) \lor (\exists y)(\forall x)(Q(z,y) \land R(x))$

$\Leftrightarrow (\exists y)(\neg P(y) \lor (\forall x)(Q(z,y) \land R(x)))$

$\Leftrightarrow (\exists y)(\forall x)(\neg P(y) \lor (Q(z,y) \land R(x)))$

9. (1) 前提：$(\exists x)F(x)$，$(\forall x)((F(x) \lor G(x)) \to H(x))$；结论：$(\exists x)H(x)$

证明：

(1).	$(\exists x)F(x)$	P
(2).	$\forall x((F(x) \lor G(x)) \to H(x))$	P
(3)	$F(c)$	T, (1), ES
(4)	$(F(c) \lor G(c)) \to H(c)$	T, (2), US
(5)	$F(c) \lor G(c)$	T, (3), I
(6)	$H(c)$	T, (4)(5), I
(7)	$(\exists x)H(x)$	T, (6), EG

(2). 前提：$(\exists x)F(x) \land (\forall x)G(x)$；

结论：$(\exists x)(F(x) \land G(x))$

证明：(1) $(\exists x)$ F(x

(2) $(\exists x)$ F

(3) $(\exists x)$ F

(4) $F(c)$

(5) $(\exists x)$

(6) G(c

(7) $F(c)$

(8) $(\exists x)$

习题 3 (P87)

2. (1) $\{a, \{b\}\}$；

解：(1) 设 $A = \{a, \{b\}$

$P(A) = \{\varnothing, \{a\}$

(2). 设 $A = \{1, \varnothing$

$P(A) = \{\varnothing, \{1\},$

(3). 设 $A = \{X,$

$P(A) = \{\varnothing, \{X\},$

$\{X, Y, Z$

证明：(1) $(\exists x)F(x) \land (\forall x)G(x)$ P

(2) $(\exists x)F(x) \land (\exists x)G(x)$ T, (1), I

(3) $(\exists x)F(x)$ T, (2), I

(4) $F(c)$ T, (3), ES

(5) $(\exists x)G(x)$ T, (2), I

(6) $G(c)$ T, (5), ES

(7) $F(c) \land G(c)$ T, (4)(6), I

(8) $(\exists x)(F(x) \land G(x))$ T, (7), EG

习题3 (P87)

2. (1) $\{a, \{b\}\}$; (2) $\{1, \varnothing\}$; (3) $\{X, Y, Z\}$

解：(1) 设 $A=\{a,\{b\}\}$，则其幂集为：

$P(A)=\{\varnothing, \{a\}, \{\{b\}\}, \{a,\{b\}\}\}$

(2). 设 $A=\{1,\varnothing\}$，则其幂集为：

$P(A)=\{\varnothing, \{1\}, \{\varnothing\}, \{1,\varnothing\}\}$

(3). 设 $A=\{X, Y, Z\}$，则其幂集为：

$P(A)=\{\varnothing, \{X\}, \{Y\}, \{Z\}, \{X,Y\}, \{X,Z\}, \{Y,Z\}, \{X,Y,Z\}\}$

4. 设 $U=\{1,2,3,4,5\}$，$A=\{1,4\}$，$B=\{1,2,5\}$，$C=\{2,4\}$

解：(1) $\overline{B}=U-B=\{3,4\}$

$A\cap\overline{B}=\{1,4\}\cap\{3,4\}=\{4\}$

(2). $A\cap B=\{1,4\}\cap\{1,2,5\}=\{1\}$

$\overline{C}=U-C=\{1,3,5\}$

$(A\cap B)\cup\overline{C}=\{1\}\cup\{1,3,5\}=\{1,3,5\}$

(3) $A\cap B=\{1\}$

$\overline{A\cap B}=U-A\cap B=\{2,3,4,5\}$

(4). $\overline{A}=U-A=\{2,3,5\}$，$\overline{B}=U-B=\{3,4\}$

$\overline{A}\cup\overline{B}=\{2,3,5\}\cup\{3,4\}=\{2,3,4,5\}$

6. 解：设 $U=\{x\in N \mid 1\leq x\leq 300\}$，则 $|U|=300$

$A_1=\{x\in U \mid x$ 能被 3 整除$\}$，$A_2=\{x\in U \mid x$ 能被 5 整除$\}$

$A_3=\{x\in U \mid x$ 能被 7 整除$\}$

$[x]$ 表示小于或等于 x 的最大整数

可得 $|A_1|=[\frac{300}{3}]=100$　$|A_2|=[\frac{300}{5}]=60$

$|A_3|=[\frac{300}{7}]=42$

(1) 同时能被 3，5 和

则有 $|A_1\cap A_2\cap A$

故同时能

(2) 既不能被 3 和 5

可表示为 $\overline{A_1}\cap$

由题意可知：$|A_1$

$|A_2\cap A_3|=[\frac{300}{5\times7}$

则可得 $|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}$

故既不能被 3 和 5

7. 解：设 $U=\{x \mid x$

$A_1=\{x \mid x$ 会打

$A_3=\{x \mid$

可知 $|A_1|=14$，$|A$

$|A_1\cap A_3|=5$，

则由右侧的文氏

则 $|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}|=|U|-$

故不会打球的人数为 5

(1) 同时能被3,5和7整除的整数集合可表示为 $A_1 \cap A_2 \cap A_3$

则有 $|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = \left[\frac{300}{3\times5\times7}\right] = 2$

故同时能被3,5和7整除的整数的个数为2个。

(2) 既不能被3和5整除,也不能被7整除的整数集合

可表示为 $\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}$

由题意可知: $|A_1 \cap A_2| = \left[\frac{300}{3\times5}\right] = 20$, $|A_1 \cap A_3| = \left[\frac{300}{3\times7}\right] = 14$

$|A_2 \cap A_3| = \left[\frac{300}{5\times7}\right] = 8$, $|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = \left[\frac{300}{3\times5\times7}\right] = 2$

则可得 $|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}| = |U| - |A_1| - |A_2| - |A_3| + |A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3|$

$+ |A_2 \cap A_3| - |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$

$= 300 - 100 - 60 - 42 + 20 + 14 + 8 - 2$

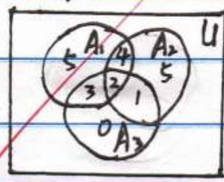
$= 138$

故既不能被3和5整除,也不能被7整除的整数个数为138个

7. 解: 设 $U = \{x \mid x \text{是25个学生之一}\}$, 则有 $|U| = 25$

$A_1 = \{x \mid x\text{会打篮球}\}$, $A_2 = \{x \mid x\text{会打排球}\}$

$A_3 = \{x \mid x\text{会打网球}\}$



可知 $|A_1| = 14$, $|A_2| = 6$, $|A_3| = 6$, $|A_1 \cap A_2| = 6$

$|A_1 \cap A_3| = 5$, $|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 2$

则由右侧的文氏图可知, $|A_2 \cap A_3| = 3$

11.19

则 $|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}| = |U| - |A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |U| - (|A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_2 \cap A_3| - |A_1 \cap A_3|$

$+ |A_1 \cap A_2 \cap A_3|) = 25 - (14 + 12 + 6 - 6 - 3 - 5 + 2) = 5$

故不会打球的人数为5人。