# 云南大学2020秋季学期物理与天文院物理系

# 2019级《概率论与数理统计》考试题B卷参考答案及评分标准

一、填空题(每空2分,共20分)

1、 $\frac{3}{5}$　　2、 $\frac{1}{3}$　　3、 $\underline{N(0,13)}$　　4、 $\underline{\rho=0}$　　5、 $\underline{N\left(\mu,\frac{\sigma^2}{n}\right)}$

6、$\frac{4}{5}$　　7、$\frac{2}{3}$　　8、$\underline{\chi^2(1)}$　　9、$\underline{10}$　　10、$\underline{36}$

二、选择题(每题2分,共20分)

1、 B　2、 A　3、 C　4、 C　5、 A

6、 D　7、 A　8、 B　9、 D　10、D

三、证明:(1)　$(X,Y)$关于$X,Y$的边缘概率密度为:

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy$$

$$=\begin{cases}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\frac{1}{\pi}dy=\frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2} & -1\le x\le 1\\ 0 & 其他\end{cases}\quad \underline{(1分)}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx$$

$$=\begin{cases}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}\frac{1}{\pi}dx=\frac{2}{\pi}\sqrt{1-y^2} & -1\le y\le 1\\ 0 & 其他\end{cases}\quad \underline{(1分)}$$

$\because$　$f_X(x)f_Y(y)=\begin{cases}\frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}\,\frac{2}{\pi}\sqrt{1-y^2} & -1\le x\le 1,-1\le y\le 1\\ 0 & 其他\end{cases}\neq f(x,y)$　$\underline{(3分)}$

$\therefore$　$X,Y$不相互独立。

(2)　又$\because$　$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf_X(x)dx=\int_{-1}^{1}\frac{2}{\pi}x\sqrt{1-x^2}dx=0$　　$\underline{(1分)}$

$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}yf_Y(y)dy=\int_{-1}^{1}\frac{2}{\pi}y\sqrt{1-y^2}dy=0$　　$\underline{(1分)}$

$E(XY)=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}xyf(x,y)dxdy=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r\cos\theta\times r\sin\theta dr=0$　$\underline{(1分)}$

$\therefore$　$\rho_{XY}=\frac{E(XY)-E(X)E(Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=0$　　[ 注: $D(X)$ 和 D(Y) 均不为 0 ]

$\therefore X,Y$ 不相关。 (2 分)

四、解：令事件 $A$ 表示系统可靠性，则：$A=(A_1A_2\ldots A_n)\cup(B_1B_2\ldots B_n)$ (2 分) 因 $A_i,B_i(i=1,2,\ldots n)$ 相互独立，且 $P(A_i)=P(B_i)=r$ 故所求概率为：

$$P(A)=P((A_1A_2\ldots A_n)\cup(B_1B_2\ldots B_n)) \quad \text{(2 分)}$$

$$= P(A_1A_2\ldots A_n)+P(B_1B_2\ldots B_n)-P(A_1A_2\ldots A_nB_1B_2\ldots B_n) \quad \text{(2 分)}$$

$$= r^n(2-r^n) \quad \text{(4 分)}$$

五、(1) 由 $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dxdy=1$ 有 $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}A\exp\left[-(2x+y)\right]dxdy=1$

得 $A=2$ (4 分)

(2) 满足条件 $Y\le X$ 在 $xOy$ 平面上为平面上直线 $y=x$ 及其下方的区域 $G$

故 $P(Y\le X)=P\{(X,Y)\in G\}=\iint_G f(x,y)dxdy$

$$=\int_0^{\infty}\int_y^{\infty}2\exp\left[-(2x+y)\right]dxdy$$

$$=\frac{1}{3} \quad \text{(6 分)}$$

六、 $\because$ $X_i\sim N(20,3)$ （$i=1,2,\ldots 10$） $Y_j\sim N(20,3)$ （$j=1,2,\ldots,15$）

$\therefore$ $\overline{X}=\frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}X_i\sim N(20,\frac{3}{10})$ (1 分)

$\overline{Y}=\frac{1}{15}\sum_{j=1}^{15}Y_j\sim N(20,\frac{3}{15})$ (1 分)

$\therefore$ $\overline{X}-\overline{Y}\sim N(0,\frac{1}{2})$ 或 $\dfrac{\overline{X}-\overline{Y}}{\frac{1}{\sqrt{2}}}\sim N(0,1)$ (2 分) 所求概率为：

$P\{|\overline{X}-\overline{Y}|<0.3\}=P\{-0.3<\overline{X}-\overline{Y}<0.3\}$ (2 分)

$$=P\left\{-0.3\sqrt{2}<\frac{\overline{X}-\overline{Y}}{\frac{1}{\sqrt{2}}}<0.3\sqrt{2}\right\}=\Phi\left(0.3\sqrt{2}\right)-\Phi\left(-0.3\sqrt{2}\right)$$

$$=2\Phi\left(0.3\sqrt{2}\right)-1 \qquad \underline{(2\text{ 分})}$$

$$=0.3256 \qquad \underline{(2\text{ 分})}$$

或： P｛$|\overline{X}-\overline{Y}|$＜0.3｝＝1－$\left[P\{\ |\overline{X}-\overline{Y}|\ \}>0.3\right]$ <u>(2 分)</u>

＝1－［ $P$ ｛ $\overline{X}-\overline{Y}$ ＞0.3｝ ＋$P$ ｛ $\overline{X}-\overline{Y}$ ＜－0.3 ］ <u>(2 分)</u>

＝1－2（1－$\Phi(0.4242)$)＝0.3256 <u>(2 分)</u>

七、总体$X$的一阶、二阶矩为：

$$\mu_1=E\left(X\right)=\frac{a+b}{2} \qquad ① \qquad \underline{(2\text{ 分})}$$

$$\mu_2=E\left(X^2\right)=D\left(X\right)+\left[E\left(X\right)\right]^2=\frac{\left(b-a\right)^2}{12}+\frac{\left(a+b\right)^2}{4} \qquad ② \qquad \underline{(2\text{ 分})}$$

由 ①、② 联立求得

$$a=\mu_1-\sqrt{3\left(\mu_2-\mu_1^{\ 2}\right)} \qquad b=\mu_1+\sqrt{3\left(\mu_2-\mu_1^{\ 2}\right)} \qquad \underline{(2\text{ 分})}$$

由于总体的$k$阶矩$\mu_k=E\left(X^k\right)$ 与样本的$k$阶矩$A_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^{\ k}$的关系为

$$A_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^{\ k}\xrightarrow{P}\mu_k \qquad k=1,2,....$$

$\therefore$ 分别以样本的一阶、二阶矩$A_1,A_2$代替总体的一阶、二阶矩$\mu_1,\mu_2$，

得未知参数$a$和$b$的矩估计量为：

$$\hat{a}=A_1-\sqrt{3\left(A_2-A_1^{\ 2}\right)}=\overline{X}-\sqrt{\frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2} \qquad \underline{(2\text{ 分})}$$

$$\hat{b}=A_1+\sqrt{3\left(A_2-A_1^{\ 2}\right)}=\overline{X}+\sqrt{\frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2} \qquad \underline{(2\text{ 分})}$$

即未知参数$a$和$b$的矩估计量为：

$\hat{a} = \overline{X} - \sqrt{\frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2}$

$\hat{b} = \overline{X} + \sqrt{\frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2}$

八、∵ $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

∴ $\int_0^1 \left(ax^2 + bx + c\right)dx = 1$ 即：$\frac{1}{3}a + \frac{1}{2}b + c = 1$ ① (2 分)

由 $E(X) = \frac{1}{2}$ 得：$\int_0^1 x\left(ax^2 + bx + c\right)dx = \frac{1}{2}$

即：$\frac{1}{4}a + \frac{1}{3}b + \frac{1}{2}c = \frac{1}{2}$ ② (2 分)

由 $D(X) = E\left(x^2\right) - \left[E(x)\right]^2 = \frac{3}{20}$ 得 $\int_0^1 x^2\left(ax^2 + bx + c\right)dx = \frac{2}{5}$

即：$\frac{1}{5}a + \frac{1}{4}b + \frac{1}{3}c = \frac{2}{5}$ ③ (2 分)

联立①、②、③求解得：$a = 12, b = -12, c = 3$ (4 分)