云南大学 2015 至 2016 学年下学期软件学院 2015 级

《线性代数》期末考试（闭卷）试卷 A 卷答案

满分 100 分　考试时间：120 分钟

一、单项选择题（每小题 2 分，共 20 分）

D B B C A　　C B C D C

二、填空题（每小题 2 分，共 10 分）

1. 设 **A** 是 3 阶方阵，且 | **A** | ＝－1，则 | 2**A** | ＝___-8___

2. 设矩阵 **A**=$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$，则行列式|**A**^{T}**A**|=____________.

3. 设线性方程组$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + \lambda x_3 = 0 \end{cases}$有非零解，则 $\lambda =$ __2__

4. 设 A 是 4×5 矩阵，A 的秩 R(A)=2，则齐次线性方程组 Ax=**0** 的基础解系中含有__2__线性无关的解向量.

5．二次型 $f(x_1,x_2,x_3) = 2x_1^2 + 3x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 8x_2x_3$ 的矩阵是 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \\ -1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$。

三、证明题（每小题 10 分，共 20 分）

1. 设向量组 α_1, α_2 线性无关，证明向量组 $\beta_1 = \alpha_1 + \alpha_2$，$\beta_2 = \alpha_1 - \alpha_2$ 也线性无关。

证： 设有常数 λ_1, λ_2 使得 $\lambda_1\beta_1 + \lambda_2\beta_2 = 0$，

代入 $\beta_1 = \alpha_1 + \alpha_2$，$\beta_2 = \alpha_1 - \alpha_2$

$\lambda_1(\alpha_1 + \alpha_2) + \lambda_2(\alpha_1 - \alpha_2) = 0 \Rightarrow \alpha_1(\lambda_1 + \lambda_2) + \alpha_2(\lambda_1 - \lambda_2) = 0$

∵ α_1, α_2 线性无关，

$\therefore \lambda_1 + \lambda_2 = 0, \lambda_1 - \lambda_2 = 0$

解得 $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0$

$\therefore \beta_1, \beta_2$ 线性无关。

2. 设 ξ_1,ξ_2 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 λ 的特征向量，证明 $\xi_1+\xi_2$ 也是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 属于特征值 λ 的特征向量。

证： 由题意得：$A\xi_1=\lambda\xi_1, A\xi_2=\lambda\xi_2$

相加得：$A\xi_1+A\xi_2=\lambda\xi_1+\lambda\xi_2$ ，即 $A(\xi_1+\xi_2)=\lambda(\xi_1+\xi_2)$

即 $\xi_1+\xi_2$ 也是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 属于特征值 λ 的特征向量。

四、计算题（5 小题，共 50 分）

1. 计算行列式 $D=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & 1+a_4 \\ a_1 & a_2 & 1+a_3 & a_4 \\ a_1 & 1+a_2 & a_3 & a_4 \\ 1+a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{vmatrix}$

解:

$$D=\begin{vmatrix} 1+\sum_{k=1}^{4}a_k & a_2 & a_3 & 1+a_4 \\ 1+\sum_{k=1}^{4}a_k & a_2 & 1+a_3 & a_4 \\ 1+\sum_{k=1}^{4}a_k & 1+a_2 & a_3 & a_4 \\ 1+\sum_{k=1}^{4}a_k & a_2 & a_3 & a_4 \end{vmatrix}=\left(1+\sum_{k=1}^{4}a_k\right)\cdot\begin{vmatrix} 1 & a_2 & a_3 & 1+a_4 \\ 1 & a_2 & 1+a_3 & a_4 \\ 1 & 1+a_2 & a_3 & a_4 \\ 1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{vmatrix}$$

$$=\left(1+\sum_{k=1}^{4}a_k\right)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}=\left(1+\sum_{k=1}^{4}a_k\right)\cdot\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=1+\sum_{k=1}^{4}a_k$$

2. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, 求 $\boldsymbol{A}^{-1}$

解： $(A,E)=\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\xrightarrow{\text{初等行变换}}\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right)$

$$\therefore A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

3.求方程组$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+2x_4=0 \\ 2x_1-x_2-4x_3+x_4=0 \\ x_1-x_3+x_4=0 \end{cases}$的通解.

解：系数矩阵$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -4 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

同解方程组为$\begin{cases} x_1= x_3-x_4 \\ x_2=-2x_3-x_4 \\ x_3= x_3 \\ x_4= x_4 \end{cases}$

令$x_3=k_1,x_4=k_2$，通解为$X=k_1\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

4．求向量组$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$的秩与一个极大线性无关组.

解：$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=\left(\begin{array}{c:c:c:c} -1 & 1 & 6 & -2 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & 6 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{初等行变换}} \left(\begin{array}{c:c:c:c} 1 & 0 & -4 & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & 2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

$\therefore R(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=2$，一个极大无关组为$(\alpha_1,\alpha_2)$。（其实任意两个向量的组合均可作为一个极大无关组。）

5．求矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$的特征值和对应的特征向量.

解：$|A-\lambda E|=\begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix}=\lambda^2-1\overset{\text{令}}{=}0$

解得$\lambda_1=1,\lambda_2=-1$

代入$\lambda_1=1$求解方程$(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=0$,即$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，得$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=k\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

代入$\lambda_2=-1$求解方程$(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=0$,即$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，得$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=k\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

故矩阵A的特征值为$\lambda_1=1,\lambda_2=-1$，

对应的特征向量分别为$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$和$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$。