云南大学 2018 年秋季学期物理与天文学院 2017 级

《概率论与数理统计》期末考试 (闭卷)试卷 B 参考答案

一、填空题(每空 2 分,共 18 分)

1. $\underline{\ \mathbf{0.1}\ }$ ； **2.** $\underline{\ \mu\ }$ ； **3.** $\underline{N\left(\mu_1,\sigma_1{}^2\right)}$ ， $\underline{N\left(\mu_2,\sigma_2{}^2\right)}$ ；

4. $\underline{N\left(\mu,\dfrac{\sigma^2}{10}\right)}$ ； **5.** $\dfrac{3}{5}$ **或** $\underline{\ \mathbf{0.6}\ }$ ；**6.** $\underline{\ \mathbf{1}\ }$； **7.** $\underline{\ \mathbf{2}\ }$ ； **8.** $\underline{\ \mathbf{3}\ }$

二、选择题(每小题 3 分,共 18 分)

1. ④ ； **2.** ① ； **3.** ③ ； **4.** ② ； **5.** ② ；

6. ① 。

三、解. ①$E\left(X\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf\left(x\right)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2}xe^{-|x|}dx=0$ **4 分**

$$D\left(X\right)=E\left(X^2\right)-\left[E\left(X\right)\right]^2=E\left(X^2\right)$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2}x^2e^{-|x|}dx=\int_0^{+\infty}x^2e^{-x}dx=2$$ **4 分**

$$\because E\left(X|X|\right)=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}x|x|e^{-|x|}dx=0$$

$$\therefore Cov\left(X,|X|\right)=E\left(X|X|\right)-E\left(X\right)E\left(|X|\right)$$

$$=E\left(X|X|\right)=0$$ **4 分**

②$\because Cov\left(X,|X|\right)=0 \quad \therefore \rho_{XY}=0$

故X与$|X|$不相关 **4 分**

又$\because -\infty<x<+\infty$

于是对于任意正数$0<a<+\infty$

有$\left\{|X|\le a\right\}\subset\left\{X\le a\right\}$

考虑到

$P\{X\le a\}<1, P\{|X|<a\}>0$

故有

$P\{|X|\le a, X\le a\}=P\{|X|\le a\}>P\{X\le a\}P\{|X|\le a\}$

即 $P\{X\le a,|X|\le a\}\ne P\{X\le a\}P\{|X|\le a\}$ **4分**

故 X 与 $|X|$ 不相互独立

(注:当两事件 $A\subset B$ 时 $A\cap B=A, P(B)\ge P(A)$)

四、解. 设 A 为事件"**L** 至 **R** 为通路"，A_i 为事件"第 i 个继电器接点闭合" $(i=1,2,3,4)$。

则 $P(A_i)=p$ 且 $A=A_1A_2\cup A_3A_4$ **3分**

$\therefore \quad P(A)=P(A_1A_2\cup A_3A_4)=P(A_1A_2)+P(A_3A_4)-P(A_1A_2A_3A_4)$

$=P(A_1)P(A_2)+P(A_3)P(A_4)-P(A_1)P(A_2)P(A_3)P(A_4)$ **3分**

$=2p^2-p^4$ **4分**

即所求概率为 $2p^2-p^4$ （ 或 $p^2(2-p^2)$ ）

五、解. 设 X 和 Y 分别为负责人和秘书道到办公室的时间，由题设其概率密度函数分别为:

$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{4} & 8<x<12\\ 0 & Other\end{cases}$ ， $f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2} & 7<x<9\\ 0 & Other\end{cases}$ **3分**

$\because$ X 和 Y 相互独立，故 (X,Y) 的概率密度为

$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{8} & 8<x<12, 7<y<9\\ 0 & Other\end{cases}$ **3分**

所求概率为:

$P\left(\left|X-Y\right|<\frac{1}{12}\right)=\iint\limits_{G} f\left(x,y\right)dxdy=\frac{1}{8}\times$（$G$的面积） **<u>2 分</u>**

$=\frac{1}{48}$ **<u>2 分</u>**

即 $P\left(\left|X-Y\right|<\frac{1}{12}\right)=\frac{1}{48}$

（注：G为平面上长方形 $8<x<12,7<y<9$ 满足$\left|X-Y\right|<\frac{1}{12}$的区域。）

六、证明：X和Y的边缘密度函数为：

$f_X\left(x\right)=\int_{-x}^{x}1\cdot dy=\begin{cases}2x & 0<x<1\\ 0 & Other\end{cases}$ **<u>1 分</u>**

$f_Y\left(y\right)=\int_{|y|}^{1}1\cdot dy=\begin{cases}1-|y| & |y|<1\\ 0 & Other\end{cases}$ **<u>1 分</u>**

则 $E\left(X\right)=\int_0^1 xf_X\left(x\right)dx=\int_0^1 2x^2dx=\frac{2}{3}$ **<u>2 分</u>**

$E\left(Y\right)=\int_0^1 yf_Y\left(y\right)dy=\int_{-1}^{1}y\cdot\left(1-\left|y\right|\right)dx=0$ **<u>2 分</u>**

$E\left(XY\right)=\int_0^1\int_{-x}^{x}xyf\left(x,y\right)dxdy=\int_0^1\int_{-x}^{x}xydxdy=0$ **<u>2 分</u>**

所以

$Cov\left(X,Y\right)=E\left(XY\right)-E\left(X\right)E\left(Y\right)=0$ **<u>2 分</u>**

$\rho_{XY}=\frac{Cov\left(X,Y\right)}{\sqrt{D\left(X\right)}\sqrt{D\left(Y\right)}}=0$ **<u>2 分</u>**

故X和Y不相关。

七、解. 按题设的概率密度为：

$$f_X(x)=\begin{cases}1 & 0<x<1\\ 0 & Other\end{cases}$$ **2 分**

在 $X=x$ 的条件下 Y 的条件概率密度为：

$$f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}\frac{1}{1-x} & x<y<1\\ 0 & Other\end{cases}$$ **2 分**

$\therefore$ (X,Y) 的概率密度为：

$$f(x,y)=f_{Y|X}(y|x)f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{1-x} & 0<x<y<1\\ 0 & Other\end{cases}$$ **4 分**

于是关于的边缘密度为：

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}\int_0^y\frac{1}{1-x}dx=-\ln(1-y) & 0<y<1\\ 0 & Other\end{cases}$$

即 $f_Y(y)=\begin{cases}-\ln(1-y) & 0<y<1\\ 0 & Other\end{cases}$ **4 分**