云南大学2020年春季学期软件学院2019级

《线性代数》期末考试（闭卷）试卷A

满分100分 考试时间:120分钟 任课教师:郁湧,张一凡,黄光能,赵明雄

学院：______专业：________学号：________姓名：________序号：___

题号	一	二	三	四	总分
得分					

得分

一、选择题（本大题共10小题，每小题2分，共20分）

答案写在下列表格内

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

1. 设 **A** 是 4 阶方阵，且 |**A**|=2 ，则 |-2**A**|= （ D ）

A. 16　B. -4　C. -32　D. 32

2. 行列式$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 6 \\ k & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 8 \end{vmatrix}$中元素 k 的余子式和代数余子式值分别为 （ A ）

A. 20， -20　B. 20， 20　C.-20， 20　D. -20， -20

3. 已知可逆方阵 $\mathbf{A}^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ 则 **A** 是（ D ）

A. $\begin{pmatrix} -2 & 7 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$　B. $\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$　C. $\begin{pmatrix} 3 & -7 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$　D. $\begin{pmatrix} -3 & 7 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

4. 如果 n 阶方阵 **A** 的行列式|**A**|≠0,则下列正确的是 （ A、D ）

A. **A**≠0　B. r(**A**)=0　C. r(**A**)>< n　D. r(**A**)=n

5. 矩阵 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$的秩为（ A ）

A.1　　　　B .3　　　　C .2　　　　D.4

6. 若线性方程组$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 + \lambda x_3 = 2 \end{cases}$无解，则λ等于 （ A ）

A.2　　B .1　　C .0　　　D.　-1

7. n 阶实方阵 **A** 的 n 个行向量构成一组标准正交向量组，则 **A** 是（ B ）

A. 对称矩阵　　　B. 正交矩阵　　C. 反对称矩阵　　　D. | **A** |= n

8.　n 阶矩阵 **A** 是可逆矩阵的充要条件是 （ D　）

A.　**A** 的秩小于 n　　　　　　B.　**A** 的特征值至少有一个等于零

C.　**A** 的特征值都等于零　　　　D.　**A** 的特征值都不等于零

9. 如果 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$= M，则$\begin{vmatrix} 4a_{11} & a_{11}-a_{12} & a_{13} \\ 4a_{21} & a_{21}-a_{22} & a_{23} \\ 4a_{31} & a_{31}-a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$=（ A ）

A.　-4M　　　　　B.　0　　C.　-2 M　　　　D. M

10. 已知矩阵 A=$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & x \end{pmatrix}$ 的一个特征值是 0，则 x 为（ A ）

A.1　　　　B .2　　　　C .0　　　　　　D.3

得分

二、填空题（本大题共 5 小题，每小题 2 分，共 10 分）

1.设 A=$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, 则 A^TB=___$\begin{pmatrix} 10 & 14 \\ 14 & 20 \end{pmatrix}$________.

2．已知α＝（1，0，-1，2）^{T}，β＝（0，1，0，2）^{T}, A=α β^T,则秩 R(**A**)=_1_

3. 若 n 阶行列式 D_n 中各行元素之和分别为 0，则 D_n=______0________.

4. 设 A、B 为 n 阶矩阵，且 AB=O,R(A)＝n，则秩 R(B)＝____0_______.

5. 设 **A** 是 4 阶方阵，且丨**A**丨＝-3，则丨2**A**丨＝______-48______.

得分

三、计算题（本大题共 4 小题，每小题 10 分，共 40 分）

1、$n(n\geq 2)$ 阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix} x & a & \cdots & a \\ a & x & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$，$D_n$ 的主对角线上的元素都为 x，其余位置元素都为 a，且 $x\neq a$。

解：后面 $n-1$ 列都加到第 1 列，得

$$D_n=\begin{vmatrix} x+(n-1)a & a & \cdots & a \\ x+(n-1)a & x & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x+(n-1)a & a & \cdots & x \end{vmatrix}=[x+(n-1)a]\begin{vmatrix} 1 & a & \cdots & a \\ 1 & x & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & a & \cdots & x \end{vmatrix} \quad 6\text{ 分}$$

$$=[x+(n-1)a]\begin{vmatrix} 1 & a & \cdots & a \\ 0 & x-a & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix}=[x+(n-1)a](x-a)^{n-1}. \quad 10\text{ 分}$$

2、设有向量组

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\3\\2\\0\end{pmatrix},\ \alpha_2=\begin{pmatrix}7\\0\\14\\3\end{pmatrix},\ \alpha_3=\begin{pmatrix}2\\-1\\0\\1\end{pmatrix},\ \alpha_4=\begin{pmatrix}5\\1\\6\\2\end{pmatrix},$$

(1)求该向量组的秩；

(2)求该向量组的一个最大无关组，并把其余向量分别用求得的最大无关组线性表出。

解：将矩阵 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$ 化为最简形阶梯形矩阵

$$\begin{pmatrix}1&7&2&5\\3&0&-1&1\\2&14&0&6\\0&3&1&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&0&1\\0&3&0&1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&\frac{2}{3}\\0&1&0&1/3\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix},\quad 5分$$

（1）$R(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=3$； 7 分

（2）$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为所求的一个最大线性无关组，且 $\alpha_4=\frac{2}{3}\alpha_1+\frac{1}{3}\alpha_2+\alpha_3$。 10 分

3、设向量 $\alpha=(1,-1,1)$，求 3 阶方阵 $A=\alpha^T\alpha$ 以及 A 的特征值与特征向量；

解：（1）A=$\alpha^T\alpha=\begin{pmatrix}1&-1&1\\-1&1&-1\\1&-1&1\end{pmatrix}$， 3 分

（2） $|\lambda E-A|=\lambda^2(\lambda-3)=0$

A 的特征值为 0,0,3； 6 分

由 AX=0 得对应的 0 的特征向量为 k$\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+l\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$,k,l 为不全为零的任意常数，由 $(3E-A)X=0$ 得对应 3 的特征向量为 c$\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$，c 为任意非零常数。10 分

4、求下列非齐次线性方程组的通解及所对应的齐次线性方程组的基础解系:

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+2x_4=3\\2x_1-x_2+3x_3+8x_4=8\\-3x_1+2x_2-x_3-9x_4=-5\\x_2-2x_3-3x_4=-4\end{cases}$$

解：$(A\ \ b)=\begin{pmatrix}1&1&1&2&3\\2&-1&3&8&8\\-3&2&-1&-9&-5\\0&1&-2&-3&-4\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&1&1&2&3\\0&1&-2&-3&-4\\0&0&1&1&2\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$ **(2 分)**

$$\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&0&2&1\\0&1&0&-1&0\\0&0&1&1&2\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

(4 分)则有 $\begin{cases}x_1+2x_4=1\\x_2-x_4=0\\x_3+x_4=2\end{cases}$ **(6 分)**

取 x_4 **为自由未知量，令** $x_4=c$ **，则通解为：** $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=c\begin{pmatrix}-2\\1\\-1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0\\2\\0\end{pmatrix}\quad c\in R$ **(8 分)**

对应齐次线性方程组的基础解系为： $\begin{pmatrix}-2\\1\\-1\\1\end{pmatrix}$ **(10 分)**

得分

四、证明题（本大题共 3 小题，每小题 10 分，共 30 分）

1. 设方阵 X 满足 X^2-X-2E=O,证明 X+2E 可逆，并求（X+2E）$^{-1}$。

证明：由 X^2-X-2E=O （3 分）

(X+2E)(X-3E)=-4E （3 分）

(X+2E)[$-\frac{1}{4}(X-3E)$]=E, （2 分）

则：（X+2E）$^{-1}$＝$-\frac{1}{4}(X-3E)$ （2 分）

2. 如果α_1，α_2，α_3，α_4线性相关，但其中任意 3 个向量都线性无关，证明：必存在一组全不为零的数 k_1, k_2, k_3, k_4,使得 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3+k_4\alpha_4=0$.

证明：因为α_1，α_2，α_3，α_4线性相关，所以存在一组“不全为零”的数 k_1, k_2, k_3, k_4,使得 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3+k_4\alpha_4=0$,如果 $k_1=0$,则 $k_2\alpha_2+k_3\alpha_3+k_4\alpha_4=0$，且由于 k_2, k_3, k_4,不全为零，所以α_2，α_3，α_4线性相关，与题目已知任意 3 个向量都线性无关矛盾，所以 $k_1\neq0$. （8 分）

同理可证明 $k_2\neq0$ ，$k_3\neq0$， $k_4\neq0$. （2 分）

3. A 为 n 阶方阵，E 为同阶单位阵，若 $A\neq E$，且 $R(A+E)+R(A-E)=n$，证明：-1 必是 A 的一个特征值.

证明：因为 $A\neq E$　　　　　（2 分）

$A-E\neq 0$　　　　　　　　　（3 分）

$R(A-E)>0$　　　　　　　　　（2 分）

$R(A+E)=n-R(A-E)<n$,故 A+E 降秩，从而 $|A+E|=|A-(-1)E|=0$,

因此，-1 是 A 的一个特征值.　　　　　（3 分）