云南大学2019年春季学期软件学院2018级

《线性代数》期末考试（闭卷）试卷A 答案

满分100分 考试时间:120分钟 任课教师:赵明雄,张一凡,胡盛,黄光能,郁湧

学院：______专业：________学号：________姓名：________

一、选择题（本大题共10小题，每小题2分，共20分）

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	D	B	C	D	B	A	B	D	C

二、填空题（本大题共5小题，每小题2分，共10分）

1.__5__；2. __n__；3. _4_；4. __3_；5.__(   )___.

三、计算题（本大题共4小题，每小题各10分，共40分）

1. 已知行列式 D=$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 2 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}$，D的(i, j)元的余子式为 M_{ij}，

计算 $M_{31}-3M_{32}-2M_{33}-2M_{34}$，写出求解步骤.

解: $M_{31}-3M_{32}-2M_{33}-2M_{34}= A_{31}+3A_{32}-2A_{33}+2A_{34}$

设 D'=$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 2 & -4 \\ 1 & 3 & -2 & 2 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}$，由行列式展开的性质可知:

$M_{31}-3M_{32}-2M_{33}-2M_{34}=A_{31}+3A_{32}-2A_{33}+2A_{34}$

$$=D' \underline{\underline{c_4+c_3}} \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 1 \\ -5 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & -2 & 0 \\ 1 & -5 & 3 & 0 \end{vmatrix} \underline{\underline{r_2+2r_1}} \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -2 & 0 \\ 1 & -5 & 3 & 0 \end{vmatrix} =1\times(-1)^{1+4}\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & -5 & 3 \end{vmatrix} \underline{\underline{c_2-3r_1}} -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & -8 & 3 \end{vmatrix}=$$

$$-\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -8 & 3 \end{vmatrix}=16$$

2. 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ -1 & -2 & 4\\ 0 & 5 & 1\end{pmatrix}$，求解

(1) 10A(2 分)；　　(2) A^T(2 分)；　　(3) A^TB-2A(6 分)

解：解：(1))$10A=10\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10 & 10 & 10\\ 10 & 10 & -10\\ 10 & -10 & 10\end{pmatrix}$(2 分)

(2)$A^T=A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$(2 分)

(3)$A^TB=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ -1 & -2 & 4\\ 0 & 5 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 5 & 8\\ 0 & -5 & 6\\ 2 & 9 & 0\end{pmatrix}$(2 分)

$2A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 2 & 2\\ 2 & 2 & -2\\ 2 & -2 & 2\end{pmatrix}$(2 分)

$A^TB-2A=\begin{pmatrix}0 & 5 & 8\\ 0 & -5 & 6\\ 2 & 9 & 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & 2 & 2\\ 2 & 2 & -2\\ 2 & -2 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 3 & 6\\ -2 & -7 & 8\\ 0 & 11 & -2\end{pmatrix}$(2 分)

3. 已知向量组 A:$a_1=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 7\end{pmatrix}$，$a_2=\begin{pmatrix}1\\ -5\\ -7\end{pmatrix}$，$a_3=\begin{pmatrix}-1\\ 3\\ 3\end{pmatrix}$，$a_4=\begin{pmatrix}-1\\ 2\\ 1\end{pmatrix}$和未知向量 $x=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{pmatrix}$，满足 Ax=0，其中 A 为矩阵($a_1,a_2,a_3,a_4$)，求解:

(1)向量组 A 的秩.(4 分)　(2)Ax=0 的基础解系.(4 分)　(3)Ax=0 的通解.(2 分)

解:(1)因为 $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & -1\\ 2 & -5 & 3 & 2\\ 7 & -7 & 3 & 1\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1 & 0 & -\frac{2}{7} & -\frac{3}{7}\\ 0 & 1 & -\frac{5}{7} & -\frac{4}{7}\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$,所以，向量组 A 的秩，为 R(A)=2.(4 分)

(2)Ax=0 的基础解系为$\xi_1=\begin{pmatrix}\frac{2}{7}\\\frac{5}{7}\\1\\0\end{pmatrix}$(2 分), $\xi_2=\begin{pmatrix}\frac{3}{7}\\\frac{4}{7}\\0\\1\end{pmatrix}$(2 分)

(3)Ax=0 的通解为:$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix}\frac{2}{7}\\\frac{5}{7}\\1\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}\frac{3}{7}\\\frac{4}{7}\\0\\1\end{pmatrix}$ $(c_1,c_2\in R)$(2 分)

4. 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}-1&1&0\\-4&3&0\\1&0&2\end{pmatrix}$，求解：

(1)矩阵$(A-\lambda E)$. (2 分)　(2)矩阵 A 的特征值.(4 分)　(3)矩阵 A 的特征向量.(4 分)

解: (1)$(A-\lambda E)=\begin{pmatrix}-1-\lambda&1&0\\-4&3-\lambda&0\\1&0&2-\lambda\end{pmatrix}$(2 分)

(2)$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}-1-\lambda&1&0\\-4&3-\lambda&0\\1&0&2-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}-1-\lambda&1\\-4&3-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)[(-1-\lambda)(3-\lambda)+4]=(2-\lambda)(1-\lambda)^2=0$

则, $\lambda_1=2$, $\lambda_2=\lambda_3=1$.(4 分)

(3)i)$\lambda_1=2$，解方程$(A-2E)x=0$，由$(A-2E)=\begin{pmatrix}-3&1&0\\-4&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$，得方程解:$x_1=x_2=0$, $x_3=c$, $(c\in R$,且 $c\neq0)$,

所以其对应的特征向量可取 $p_1=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$，则 kp_1 为$\lambda_1=2$ 对应的全部特征向量.(2 分，说明一个特征向量即可)

ii)$\lambda_2=1$，解方程$(A-2E)x=0$，由$(A-E)=\begin{pmatrix}-2&1&0\\-4&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}$，得方程的解 $x_1=-x_3$, $x_2=2x_1$，所以其对应的特

征向量可取 $p_2=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$，则 kp_2 为 $\lambda_2=\lambda_3=1$ 对应的全部特征向量.(2 分,说明一个特征向量即可)

四、证明题（本大题共 3 小题，每小题 10 分，共 30 分）

1.设 A 为 n 阶矩阵，满足 $A^2=10E$，证明 A-2E 可逆，并求 $(A-2E)^{-1}$。

证明：$A^2=10E, A^2-4E=6E, A^2-(2E)^2=6E, (A-2E)(A+2E)=6E$，即 $(A-2E)(\frac{1}{6}A+\frac{1}{3}E)=E$

所以 A-2E 可逆，且 $(A-2E)^{-1}=\frac{1}{6}A+\frac{1}{3}E$

2. 设 λ_1 和 λ_2 是矩阵 A 的两个不同的特征值，其对应的特征向量依次为 p_1 和 p_2，证明 p_1-p_2 不是 A 的特征向量。

证明：按题设有 $AP_1=\lambda_1P_1$，$AP_2=\lambda_2P_2$，故 $A(P_1-P_2)=\lambda_1P_1-\lambda_2P_2$

采用反证法，假设 P_1-P_2 是 A 的特征向量，则应存在数 λ，使 $A(P_1-P_2)=\lambda(P_1-P_2)$，于是 $\lambda(P_1-P_2)=\lambda_1P_1-\lambda_2P_2$，即 $(\lambda-\lambda_1)P_1+(\lambda_2-\lambda)P_2=0$，

因 $\lambda_1\neq\lambda_2$，按定理 2 知 P_1，P_2 线性无关，故由上式得 $\lambda-\lambda_1=\lambda_2-\lambda=0$，即 $\lambda_1=\lambda_2$ 与题设矛盾，

因此 P_1-P_2 不是 A 的特征向量。

3. 证明：向量组 α_1，α_2，α_3 线性无关的**充分必要**条件是向量组 $\alpha_1+\alpha_2$，$\alpha_2+\alpha_3$，$\alpha_3+\alpha_1$ 线性无关。

证明：设 α_1，α_2，α_3 为列向量组，且 $\beta_1=\alpha_1+\alpha_2$, $\beta_2=\alpha_2+\alpha_3$, $\beta_3=\alpha_3+\alpha_1$

则 $(\beta1，\beta2，\beta3)=（\alpha1,\alpha2,\alpha3)\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$

因为 $\begin{vmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{vmatrix}=2\neq0$，故知 $R(\beta1，\beta2，\beta3)=R(\alpha1,\alpha2,\alpha3)$，所以向量组线性无关的充分必要条件是向量组 $\alpha1+\alpha2$，$\alpha2+\alpha3$，$\alpha3+\alpha1$ 线性无关。