云南大学 2019 秋季学期物理与天文学院

2018 级《概率论与数理统计》考试题 B 卷参考答案及评分标准

一、 填空题(每空 2 分,共 20 分)

1、$\underline{0}$ **2、**$\frac{7}{8}$ **3、**$\underline{N(b,a^2)}$ **4、**$\underline{N(0,14)}$ **5、**$\underline{48}$

6、$\frac{1}{5}$ **7、**$\underline{0.7}$ **8、**$\underline{(1-p)^3+3p(1-p)}$ **或** $\underline{1-p^3}$ **9、**$\underline{\chi^2(3)}$ **或**

$\underline{\Gamma\left(\frac{3}{2},2\right)}$ **10、** $\underline{5}$

二、选择题(每题 2 分,共 20 分)

1、$\underline{d}$ **2、**$\underline{b}$ **3、**$\underline{b}$ **4、**$\underline{b}$ **5、**$\underline{d}$

6、$\underline{c}$ **7、**$\underline{c}$ **8、**$\underline{d}$ **9、**$\underline{c}$ **10、**$\underline{d}$

三、 证明：① (X,Y) 关于 X,Y 的边缘概率密度为：

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy$$

$$=\begin{cases}\int_0^1(2-x-y)dy=\frac{3}{2}-x & 0\le x\le 1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}\quad \underline{\textbf{(2 分)}}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx$$

$$=\begin{cases}\int_0^1(2-x-y)dx=\frac{3}{2}-y & 0\le y\le 1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}\quad \underline{\textbf{(2 分)}}$$

$\because$ $f_X(x)f_Y(y)=\begin{cases}(\frac{3}{2}-x)(\frac{3}{2}-y) & 0\le x\le 1,0\le y\le 1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}\neq f(x,y)$ $\underline{\textbf{(1 分)}}$

$\therefore$ X,Y 不相互独立。

又 $\because$ $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf_X(x)dx=\int_0^1x(\frac{3}{2}-x)dx=\frac{5}{12}$

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}yf_Y(y)dy=\int_0^1y(\frac{3}{2}-y)dy=\frac{5}{12}$$

$$E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyf(x,y)dxdy=\int_0^1dx\int_0^1xy(2-x-y)dy=\frac{1}{6}\quad \underline{\textbf{(1 分)}}$$

$$D(X)=E(X^2)-\left[E(X)\right]^2=\int_0^1 x^2(\frac{3}{2}-x)dx-(\frac{5}{12})^2=\frac{11}{144}$$ **(1 分)**

$$D(Y)=E(Y^2)-\left[E(Y)\right]^2=\int_0^1 y^2(\frac{3}{2}-y)dy-(\frac{5}{12})^2=\frac{11}{144}$$ **(1 分)**

∴ $$\rho_{XY}=\frac{E(XY)-E(X)E(Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}\neq 0$$ **(2 分)**

∴ X 和 Y 相关。

四、解：令事件 A 表示系统可靠，则：$A=(A_1\cup B_1)(A_2\cup B_2)(A_3\cup B_3)$ **(2 分)** 因 $A_i,B_i(i=1,2,3)$ 相互独立，且 $P(A_i)=P(B_i)=r$ 故所求概率为：

$$P(A)=P((A_1\cup B_1)(A_2\cup B_2)(A_3\cup B_3))$$ **(2 分)**

$$=\prod_{i=1}^{3}P(A_i\cup B_i)=\prod_{i=1}^{3}\left[P(A_i)+P(B_i)-P(A_i)P(B_i)\right]$$ **(2 分)**

$$=r^3(2-r)^3$$ **(4 分)**

五、解 (1) 由 $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f\left(x,y\right)dxdy=1$ 有 $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}A\exp\left[-\left(2x+y\right)\right]dxdy=1$

得 $A=2$ **(4 分)**

(2) ∵ $P\left\{Y\geq X\right\}=1-P\left\{Y\leq X\right\}$

满足条件 $Y\leq X$ 在 xOy 平面上为平面上直线 $y=x$ 及其下方的区域 G

$$\therefore P\left(Y\leq X\right)=P\left\{\left(X,Y\right)\in G\right\}=\iint_G f\left(x,y\right)dxdy$$

$$=\int_0^{\infty}\int_y^{\infty}2\exp\left[-\left(2x+y\right)\right]dxdy$$

$$=\frac{1}{3}$$ **(4 分)**

故 $P\left\{Y\geq X\right\}=1-P\left\{Y\leq X\right\}=\frac{2}{3}$ **(2 分)**

六、∵ $X_i\sim N(20,3)$ ($i=1,2,\ldots 10$) $Y_j\sim N(20,3)$ ($j=1,2,\ldots,15$)

∴ $\overline{X}=\frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}X_i\sim N(20,\frac{3}{10})$ **(1 分)** $\overline{Y}=\frac{1}{15}\sum_{j=1}^{15}Y_j\sim N(20,\frac{3}{15})$ **(1 分)**

∴ $\overline{X}-\overline{Y} \sim \mathbf{N}(\mathbf{0},\frac{1}{2})$ **或** $\dfrac{\overline{X}-\overline{Y}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} \sim N(0,1)$ **(2 分)**

所求概率为：

$$P\left\{\left|\overline{X}-\overline{Y}\right|>0.3\right\}=P\left\{\overline{X}-\overline{Y}>0.3\right\}+P\left\{\overline{X}-\overline{Y}<-0.3\right\} \qquad \textbf{(2 分)}$$

$$=1-P\left\{\frac{\overline{X}-\overline{Y}}{\frac{1}{\sqrt{2}}}\le 0.3\sqrt{2}\right\}+P\left\{\frac{\overline{X}-\overline{Y}}{\frac{1}{\sqrt{2}}}<-0.3\sqrt{2}\right\}$$

$$=1-\Phi\left(0.3\sqrt{2}\right)+\Phi\left(-0.3\sqrt{2}\right)$$

$$=2\left[1-\Phi\left(0.3\sqrt{2}\right)\right] \qquad \textbf{(2 分)}$$

$$=0.6744 \qquad \textbf{(2 分)}$$

七、 总体 X 的一阶、二阶矩为：

$$\mu_1=E(X)=\mu \qquad ① \quad \textbf{(2 分)}$$

$$\mu_2=E\left(X^2\right)=D(X)+\left[E(X)\right]^2=\sigma^2+\mu^2$$

即 $\mu_2=\sigma^2+\mu^2$ ② **(2 分)**

由 ①、② 联立求得 $\mu=\mu_1 \qquad \sigma^2=\mu_2-\mu_1^2$ **(2 分)**

由于总体的 k **阶矩** $\mu_k=E\left(X^k\right)$ **与样本的** k **阶矩** $A_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^{\,k}$ **的关系为**

$$A_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^{\,k}\xrightarrow{P}\mu_k \qquad k=1,2,....$$

∴ **分别以样本的一阶、二阶矩** A_1,A_2 **代替总体的一阶、二阶矩** μ_1,μ_2**，**

得未知参数 μ **和** σ^2 **的矩估计量为：**

$$\hat{\mu}=A_1=\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$$

$$\hat{\sigma}^2 = A_2 - A_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \overline{X}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2$$

即未知参数μ和σ^2的矩估计量为：

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$ **(2 分)**

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2$$ **(2 分)**

八、∵ $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$

∴ $\int_0^1 (ax+b)\,dx = 1$ **即：** $\frac{1}{2}a + b = 1$ ① **<u>(4 分)</u>**

由 $E(X) = \frac{1}{3}$ **得：** $\int_0^1 x(ax+b)\,dx = \frac{1}{3}$

即： $\frac{1}{3}a + \frac{1}{2}b = \frac{1}{3}$ ② **<u>(2 分)</u>**

联立①、②求解得： $a = -2, b = 2$ **<u>(4 分)</u>**