云南大学 2015 至 2016 秋季学期物理与天文学院物理系

2014 级《概率论与数理统计》考试题 B 卷参考答案

一、填空题(每空 2 分,共 20 分)

1、$\underline{0}$　　2、$\underline{\frac{7}{8}}$　　3、$\underline{N(b,a^2)}$　　4、$\underline{N(0,14)}$　　5、$\underline{48}$

6、$\underline{\frac{1}{5}}$　　7、$\underline{0.7}$　　8、$\underline{(1-p)^3+3p(1-p)}$　　9、$\underline{\chi^2(3)}$　　10、$\underline{5}$

二、选择题(每题 2 分,共 20 分)

1、d　2、b　3、b　4、b　5、d

6、c　7、d　8、d　9、c　10、d

三、 证明：① (X,Y) 关于 X 和 Y 的边缘概率密度为：

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy$$

$$=\begin{cases}\int_0^1(2-x-y)dy=\frac{3}{2}-x & 0\le x\le 1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}\quad \underline{(2\text{ 分})}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx$$

$$=\begin{cases}\int_0^1(2-x-y)dx=\frac{3}{2}-y & 0\le y\le 1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}\quad \underline{(2\text{ 分})}$$

$$\because\quad f_X(x)f_Y(y)=\begin{cases}(\frac{3}{2}-x)(\frac{3}{2}-y) & 0\le x\le 1,0\le y\le 1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}\neq f(x,y)\ \underline{(1\text{ 分})}$$

$\therefore$ X和Y不相互独立 。

又 $\because$ $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf_X(x)dx=\int_0^1x(\frac{3}{2}-x)dx=\frac{5}{12}$

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}yf_Y(y)dy=\int_0^1y(\frac{3}{2}-y)dy=\frac{5}{12}$$

$$E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyf(x,y)dxdy=\int_0^1dx\int_0^1xy(2-x-y)dy=\frac{1}{6}\quad \underline{(1\text{ 分})}$$

$$D(X)=E(X^2)-\left[E(X)\right]^2=\int_0^1x^2(\frac{3}{2}-x)dx-(\frac{5}{12})^2=\frac{11}{144}\quad \underline{(1\text{ 分})}$$

$$D(Y)=E(Y^2)-\left[E(Y)\right]^2=\int_0^1y^2(\frac{3}{2}-y)dy-(\frac{5}{12})^2=\frac{11}{144}\quad \underline{(1\text{ 分})}$$

$$\therefore\quad \rho_{XY}=\frac{E(XY)-E(X)E(Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}\neq 0\qquad \underline{(2\text{ 分})}$$

$\therefore$ X 和 Y 相关。

四、解：令事件 A 表示系统可靠，则：$A=(A_1\cup B_1)(A_2\cup B_2)\ldots(A_n\cup B_n)$ (2 分)

因 $A_i, B_i (i=1,2,\ldots n)$ 相互独立，且 $P(A_i)=P(B_i)=r$ 故所求概率为：

$$P(A)=P((A_1\cup B_1)(A_2\cup B_2)\ldots(A_n\cup B_n)) \quad \text{(2 分)}$$

$$=\prod_{i=1}^{n}P(A_i\cup B_i)=\prod_{i=1}^{n}\left[P(A_i)+P(B_i)-P(A_i)P(B_i)\right] \quad \text{(2 分)}$$

$$= r^n(2-r)^n \quad \text{(4 分)}$$

五、解 (1) 由 $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f\left(x,y\right)dxdy=1$ 有 $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}A\exp\left[-\left(2x+y\right)\right]dxdy=1$

得 $A=2$ (4 分)

(2) $\because$ $P\left\{Y\geq X\right\}=1-P\left\{Y\leq X\right\}$

满足条件 $Y\leq X$ 在 xOy 平面上为平面上直线 $y=x$ 及其下方的区域 G

$$\therefore P\left(Y\leq X\right)=P\left\{\left(X,Y\right)\in G\right\}=\iint_G f\left(x,y\right)dxdy$$

$$=\int_0^{\infty}\int_y^{\infty}2\exp\left[-\left(2x+y\right)\right]dxdy$$

$$=\frac{1}{3} \quad \text{(4 分)}$$

故 $P\left\{Y\geq X\right\}=1-P\left\{Y\leq X\right\}=\frac{2}{3}$ (2 分)

六、$\because$ $X_i\sim N(20,3)$ $(i=1,2,\ldots 10)$ $Y_j\sim N(20,3)$ $(j=1,2,\ldots,15)$

$$\therefore \overline{X}=\frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}X_i\sim N(20,\frac{3}{10}) \quad \text{(1 分)} \qquad \overline{Y}=\frac{1}{15}\sum_{j=1}^{15}Y_j\sim N(20,\frac{3}{15}) \quad \text{(1 分)}$$

$\therefore$ $\overline{X}-\overline{Y}\sim N(0,\frac{1}{2})$ 或 $\dfrac{\overline{X}-\overline{Y}}{\frac{1}{\sqrt{2}}}\sim N\left(0,1\right)$ (2 分) 所求概率为：

$$P\left\{\left|\overline{X}-\overline{Y}\right|>0.3\right\}=P\left\{\overline{X}-\overline{Y}>0.3\right\}+P\left\{\overline{X}-\overline{Y}<-0.3\right\} \quad \text{(2 分)}$$

$$=1-P\left\{\frac{\overline{X}-\overline{Y}}{\frac{1}{\sqrt{2}}}\leq 0.3\sqrt{2}\right\}+P\left\{\frac{\overline{X}-\overline{Y}}{\frac{1}{\sqrt{2}}}<-0.3\sqrt{2}\right\}$$

$=1-\Phi\left(0.3\sqrt{2}\right)+\Phi\left(-0.3\sqrt{2}\right)$

$=2\left[1-\Phi\left(0.3\sqrt{2}\right)\right]$ (2 分)

$=0.6744$ (2 分)

七、（1） $f(x,y)=f_X\left(x\right)\times f_Y\left(y\right)$ (2 分)

$=\begin{cases}\frac{1}{2}\exp(-y/2) & y>0,0<x<1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$ (1 分)

其中： $f_X\left(x\right)=\begin{cases}1 & 0<x<1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$ (2 分)

(2) 含 a 的方程无实根,有：$\Delta=\left(2X\right)^2-4Y<0$ 即 $Y>X^2$

∴ 所求概率为

$P(Y>X^2)=1-P(Y\le X^2)=1-\int_0^1\int_0^{x^2}\frac{1}{2}\exp(-y/2)dydx$ (3 分)

$=\int_0^1\exp(-x^2/2)dx$

$=\sqrt{2\pi}\,(\Phi(1)-\Phi(0))$

≈ 0.8555 (2 分)

八、∵ $\int_{-\infty}^{+\infty}f\left(x\right)dx=1$

∴ $\int_0^1\left(ax+b\right)dx=1$ 即：$\frac{1}{2}a+b=1$ ① (3 分)

由 $E\left(X\right)=\frac{1}{3}$ 得：$\int_0^1 x\left(ax+b\right)dx=\frac{1}{3}$

即： $\frac{1}{3}a+\frac{1}{2}b=\frac{1}{3}$ ② (3 分)

联立①、②求解得：$a=-2,b=2$ (4 分)