云南大学2017年春季学期软件学院2016级

《线性代数》期末考试（闭卷）试卷A 答案

满分100分　考试时间：120分钟　任课教师：张艳　张一凡　郁湧

一、选择题（本大题共10小题，每小题2分，共20分）

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	B	D	C	B	B	C	B	C	A

二、填空题（本大题共5小题，每小题2分，共10分）

1、0或-5；　2、3；　3、$\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4}$；　4、$\begin{pmatrix}0&-1&1\\-1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$；　5、10；

三、计算题（本大题共4小题，第1、2小题各10分，第3、4小题各15分，共50分）

(此题可根据学生所做的方法和步骤的具体情况给分)

1、解矩阵方程AX+B=X，其中A=$\begin{bmatrix}0&1&0\\-1&1&1\\-1&0&-1\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}1&-1\\2&0\\5&-3\end{bmatrix}$　（10分）

解：$AX+B=X\Rightarrow(E-A)X=B$　……………………2分

$$|E-A|=\begin{vmatrix}1&-1&0\\1&0&-1\\1&0&2\end{vmatrix}=3\neq0$$

$X=(E-A)^{-1}B$　……………………6分

$$(E-A)^{-1}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}0&2&1\\-3&2&1\\0&-1&1\end{bmatrix}$$

$$X=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}0&2&1\\-3&2&1\\0&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1\\2&0\\5&-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&-1\\2&0\\1&-1\end{bmatrix}$$　……………………10分

2、 计算行列式$\begin{vmatrix} x+a & b & c & d \\ a & x+b & c & d \\ a & b & x+c & d \\ a & b & c & x+d \end{vmatrix}$。**（10 分）**

解·

$$\begin{vmatrix} x+a & b & c & d \\ a & x+b & c & d \\ a & b & x+c & d \\ a & b & c & x+d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+a+b+c+d & b & c & d \\ x+a+b+c+d & x+b & c & d \\ x+a+b+c+d & b & x+c & d \\ x+a+b+c+d & b & c & x+d \end{vmatrix}$$

$$= (x+a+b+c+d)\begin{vmatrix} 1 & b & c & d \\ 1 & x+b & c & d \\ 1 & b & x+c & d \\ 1 & b & c & x+d \end{vmatrix} = (x+a+b+c+d)\begin{vmatrix} 1 & b & c & d \\ 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x \end{vmatrix} = (x+a+b+c+d)x^3$$

3、求非齐次线性方程组$\begin{cases} x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 11 \\ 5x_1 + 3x_2 + 6x_3 - x_4 = -1 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 = -6 \end{cases}$的一个特解、对应齐次方程组的基础解系及通解。**（15 分）**

解：

$$\begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & -3 & 11 \\ 5 & 3 & 6 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & 2 & 1 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow[r3-2r1]{r2-5r1} \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & -3 & 11 \\ 0 & 28 & -4 & 14 & -56 \\ 0 & 14 & -2 & 7 & -28 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r3-r2]{r2/2} \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & -3 & 11 \\ 0 & 14 & -2 & 7 & -28 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

……………………5 分

$r(Ab) = r(A) = 2 < 4$有无穷多解

对应同解方程为$\begin{cases} x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 11 \\ 14x_2 - 2x_3 + 7x_4 = -28 \end{cases}$

$x_3 = 0, x_4 = 0$

特解为$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -2 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$即$X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ……………………9 分

对应齐次方程为$\begin{cases} x_1-5x_2+2x_3-3x_4=0 \\ 14x_2-2x_3+7x_4=0 \end{cases}$

分别设$\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

得基础解系：

$$X_1=\begin{pmatrix} -9/7 \\ 1/7 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, X_2=\begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

故线性方程组的通解为

$X=X_0+k_1X_1+k_2X_2$，其中k_1、k_2为任意值。

……………………15 分

4、求矩阵$A=\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$的特征值和特征向量。（**15 分**）

解：

$$|\lambda E-A|=(\lambda-2)\begin{vmatrix} \lambda+2 & -1 \\ 4 & \lambda-3 \end{vmatrix}=(\lambda-2)^2(\lambda+1)$$

特征根为：$\lambda_1=\lambda_2=2,\lambda_3=-1$

…………………… 5 分

对于$\lambda_1=\lambda_2=2$，$[A-2E]=\begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 1 \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\begin{cases} x_1=\frac{1}{4}x_2+\frac{1}{4}x_3 \\ x_2=x_2 \\ x_3=x_3 \end{cases}$ 取$\begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$和$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$，得$\begin{cases} x_1=\frac{1}{4} \\ x_2=1 \\ x_3=0 \end{cases}$和$\begin{cases} x_1=\frac{1}{4} \\ x_2=0 \\ x_3=1 \end{cases}$，特征向量：$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=k_1\begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

…………………… 11 分

对于$\lambda_3=-1$，$A+E=\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -4 & 1 & 4 \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$，故等价于$\begin{cases} x_1=x_3 \\ x_2=0 \\ x_3=x_3 \end{cases}$

取 $x_3 = k \neq 0$，得特征向量为：$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = k\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

…………………..15 分

四、证明题（本大题共 2 小题，每小题 10 分，共 20 分）

1、设方阵 A 满足 $A^2 + A - 4E = 0$，证明 $A-E$ 可逆，并求 $A-E$ 的逆阵。

证明：$A^2 + A - 4E = 0$

$\Rightarrow (A-E)(A+2E) - 2E = 0$　　…………………..4 分

所以，$(A-E)(A+2E) = 2E$

得 $(A-E)\dfrac{(A+2E)}{2} = E$　　…………………..7 分

故　$A-E$ 可逆，

且 $A-E$ 的逆阵为 $\dfrac{(A+2E)}{2}$　　…………………..10 分

2、设 A 为 n 阶矩阵，λ_1、λ_2、λ_3 是 A 的不同特征值，x_1、x_2、x_3 依次是属于 λ_1、λ_2、λ_3 的特征向量，试证明 $x_1 + x_2 + x_3$ 不是 A 的特征向量。

证明：　假设 $x_1 + x_2 + x_3$ 是 A 的特征向量。

即存在 λ 使得　$A(x_1 + x_2 + x_3) = \lambda(x_1 + x_2 + x_3)$。　　…………………..3 分

故　$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 = \lambda x_1 + \lambda x_2 + \lambda x_3$，

即　$(\lambda_1 - \lambda)x_1 + (\lambda_2 - \lambda)x_2 + (\lambda_3 - \lambda)x_3 = 0$。　　…………………..6 分

因为 x_1、x_2、x_3 线性无关，所以　$\lambda_1 - \lambda = \lambda_2 - \lambda = \lambda_3 - \lambda = 0$

即 $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$，与题设矛盾，　故 $x_1 + x_2 + x_3$ 不是 A 的特征向量。…………………..10 分