1.A　2.C　3.C　4.A　5.B　6.B　7.D　8.B　9.C　10.C

1. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ 2. -2；3. 3；4. 1/4；5. 3.

一、 计算题

1. 计算行列式 $D=\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & 0 \\ 0 & 0 & x & -1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}$ **解：**

$$D = x\begin{vmatrix} x & -1 & 0 \\ 0 & x & -1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} - a_0\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ x & -1 & 0 \\ 0 & x & -1 \end{vmatrix}$$

$$= x\left(x\begin{vmatrix} x & -1 \\ a_2 & a_3 \end{vmatrix} + a_1\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ x & -1 \end{vmatrix}\right) + a_0$$

$$= a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

2．设 $A=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $AB=A+2B$, 求 B. **解：**由 **AB=A+2B** 可得**(A-2E)B=A.**

因 $\mathbf{A}-2\mathbf{E}=\begin{pmatrix} -2 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$，它的行列式 det(**A-2E**)=2≠0，故它是可逆矩阵。用 $(\mathbf{A}-2\mathbf{E})^{-1}$ 左乘上式两边得

$$\mathbf{B}=(\mathbf{A}-2\mathbf{E})^{-1}\mathbf{A}=\begin{pmatrix} -2 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

3.求方程组 $\begin{cases} x_1-8x_2+10x_3+2x_4=0 \\ 2x_1+4x_2+5x_3-x_4=0 \\ 3x_1+8x_2+6x_3-2x_4=0 \end{cases}$ 的通解.

解：系数矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -8 & 10 & 2 \\ 2 & 4 & 5 & -1 \\ 3 & 8 & 6 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & -8 & 10 & 2 \\ 0 & 20 & -15 & -5 \\ 0 & 32 & -24 & -8 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & -8 & 10 & 2 \\ 0 & -4 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & -4 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

同解方程组为 $\begin{cases} x_1=-4x_3 \\ x_2=x_2 \\ x_3=x_3 \\ x_4=4x_2-3x_3 \end{cases}$ 令 $x_2=k_1, x_3=k_2$，通解为 $X=k_1\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

4．设向量组$\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}a\\3\\1\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}2\\b\\3\end{pmatrix}$的秩为 2，求 a, b.

解：对含参数 a 和 b 的矩阵作初等变换，以求其行阶梯形

$$(\mathbf{a}_3,\mathbf{a}_4,\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2)=\begin{pmatrix}1&2&a&2\\2&3&3&b\\1&1&1&3\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&2&a&2\\0&-1&3-2a&b-4\\0&-1&1-a&1\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&2&a&2\\0&-1&3-2a&b-4\\0&0&a-2&5-b\end{pmatrix}$$

$$\therefore R(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3,\mathbf{a}_4)=2\Leftrightarrow R(\mathbf{a}_3,\mathbf{a}_4,\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2)=2\Leftrightarrow a=2,b=5.$$

5．求矩阵$A=\begin{pmatrix}3&-1\\-1&3\end{pmatrix}$的特征值和对应的特征向量.

解：$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}3-\lambda&-1\\-1&3-\lambda\end{vmatrix}=(3-\lambda)^2-1\overset{令}{=}(4-\lambda)(2-\lambda)$

解得 $\lambda_1=2,\lambda_2=4$

代入 $\lambda_1=2$ 求解方程 $(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E})\mathbf{x}=0$，即$\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$，得$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

代入 $\lambda_2=4$ 求解方程 $(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E})\mathbf{x}=0$，即$\begin{pmatrix}-1&-1\\-1&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$，得$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$

对应的特征向量分别为$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$和$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}, k\neq 0.$。

四、证明题（本大题共 2 小题，每小题 10 分，共 20 分）

1、设方阵 A 满足 $A^2-A-3E=0$,证明 A+E 可逆，并求 A+E 的逆阵。

证明：$A^2-A-2E=E$

$(A+E)(\mathrm{A}-2E)=\mathrm{E}$

由此可见，(A+E)可逆，其逆矩阵为(A-2E)

2．已知向量组 $\boldsymbol{\alpha_1}, \boldsymbol{\alpha_2}, \boldsymbol{\alpha_3}$ 线性无关，证明向量组 $3\alpha_1+5\alpha_2, 2\alpha_2-4\alpha_3, 2\alpha_3+6\alpha_1$ 线性无关.

证明：设 $\boldsymbol{\beta}_1=3\boldsymbol{\alpha}_1+5\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta}_2=2\boldsymbol{\alpha}_2-4\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}_3=2\boldsymbol{\alpha}_3+6\boldsymbol{\alpha}_1$

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}3&0&6\\5&2&0\\0&-4&2\end{pmatrix}，而\begin{vmatrix}3&0&6\\5&2&0\\0&-4&2\end{vmatrix}\neq 0$$

于是 $\mathrm{R}(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=R(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=3$，因此，$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$线性无关