1. 两个非零向量$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$垂直的充分必要条件是 ( )

(A) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$. (B) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$. (C) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$. (D) $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$

2. 关于二元函数的性质：

（1） $f(x,y)$在点(x_0,y_0)处连续 （2） $f(x,y)$在点(x_0,y_0)处的两个偏导数连续

（3） $f(x,y)$在点(x_0,y_0)处可微 （4） $f(x,y)$在点(x_0,y_0)处的两个偏导数存在

若用“$A\Rightarrow B$” 表示性质A推出性质B，则有 ( )

(A) $(2)\Rightarrow(3)\Rightarrow(1)$. (B) $(3)\Rightarrow(2)\Rightarrow(1)$.

(C) $(3)\Rightarrow(4)\Rightarrow(1)$. (D) $(3)\Rightarrow(1)\Rightarrow(4)$.

3. 设Ω：$x^2+y^2+z^2\le 1, z\ge 0$，则三重积分$\iiint\limits_{\Omega} z dv=$ ( )

(A) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^1 r^3\sin\varphi\cos\varphi dr$. (B) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^1 r^2\sin\varphi dr$.

(C) $\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^1 r^3\sin\varphi\cos\varphi dr$. (D) $\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^1 r^3\sin\varphi\cos\varphi dr$.

4. 任意项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}}$的敛散性是 ( )

(A) 绝对收敛. (B) 条件收敛. (C) 发散. (D) 无法判定.

5. 设L为连接$(1,0)$和$(0,1)$两点的直线段，则曲线积分$\int_L(x+y)ds=$ ( )

(A) 2. (B) $\frac{1}{2}$. (C) 0. (D) $\sqrt{2}$.

1. 二重极限 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}=$____________________.

2. 曲面 $e^{z}-z+xy=3$ 在点 $(2,1,0)$ 处的切平面方程为____________________.

3. $\mathbf{grad}\dfrac{1}{x^2+y^2}$____________________________.

4. 改换二次积分的积分次序 $\int_1^e dx\int_0^{\ln x}f(x,y)dy=$________________________.

5. 设 $f(x)=\begin{cases}-1,-\pi\le x<0,\\ 1,0\le x<\pi\end{cases}$，则它的 Fourier 展开式中系数 $a_n=$________________.

得分

三、计算题（每小题 8 分，共 48 分）

1. 计算 $\int_0^{2a}dx\int_0^{\sqrt{2ax-x^2}}\left(x^2+y^2\right)dy$.

2. 求二元函数 $f(x,y)=x^4+y^4-x^2-y^2-2xy$ 的极值.

3. 设$z=\frac{1}{x}f(xy)+yf(x+y)$，求$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

4. 计算曲线积分$I=\int_L (e^y+\sin x)dx+(xe^y-\cos y)dy$，其中$L$为$y=\sin x$上从点$O(0,0)$到点$A(\pi,0)$的一段弧.

5. 计算曲面积分$\iint\limits_{\Sigma} xdydz+ydzdx+(z^2-2z)dxdy$，$\Sigma$为圆锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$被平面$z=1$所截下部分的下侧.

6. 求幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{3^n\cdot n}$的收敛域及和函数.

形状为椭球 $4x^2+y^2+4z^2\le 16$ 的空间探测器进入地球大气层，其表面开始受热，1 小时后在探测器的点 (x,y,z) 处的温度 $T(x,y,z)=4x^2+2yz-8z+300$，求探测器表面最热的点.

得分

五、证明题（每小题 7 分，本题共 14 分）

1. 设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $2\sin(x+2y-3z)=x+2y-3z$ 确定.

证明: $\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=1$.

2. 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n{}^2$ 收敛，证明：级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{u_n}{3n}$ 绝对收敛.