云南大学2017秋季学期物理与天文学院物理系

2016级《概率论与数理统计》考试题B卷参考答案

一、 填空题(每空2分,共20分)

1、$\frac{3}{5}$ 2、$\frac{1}{3}$ 3、$\underline{N(0,13)}$ 4、$\underline{\rho=0}$ 5、$\underline{N\left(\mu,\frac{\sigma^2}{n}\right)}$

6、$\frac{4}{5}$ 7、$\frac{2}{3}$ 8、$\chi^2(1)$ 9、**<u>10</u>** 10、**<u>36</u>**

二、选择题(每题2分,共20分)

1、<u>②</u> 2、<u>①</u> 3、<u>③</u> 4、<u>③</u> 5、<u>①</u>

6、<u>④</u> 7、<u>①</u> 8、<u>②</u> 9、<u>④</u> 10、<u>④</u>

三、证明：① (X,Y)关于X,Y的边缘概率密度为：

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy$$

$$=\begin{cases}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\frac{1}{\pi}dy=\frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2} & -1\le x\le 1\\ 0 & 其他\end{cases}$$ **(1分)**

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx$$

$$=\begin{cases}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}\frac{1}{\pi}dx=\frac{2}{\pi}\sqrt{1-y^2} & -1\le y\le 1\\ 0 & 其他\end{cases}$$ **(1分)**

∵ $$f_X(x)f_Y(y)=\begin{cases}\frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}\,\frac{2}{\pi}\sqrt{1-y^2} & -1\le x\le 1,-1\le y\le 1\\ 0 & 其他\end{cases}\neq f(x,y)$$ **(3分)**

∴ X,Y不相互独立。

② 又∵ $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf_X(x)dx=\int_{-1}^{1}\frac{2}{\pi}x\sqrt{1-x^2}dx=0$ **(1分)**

$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}yf_Y(y)dy=\int_{-1}^{1}\frac{2}{\pi}y\sqrt{1-y^2}dy=0$ **(1分)**

$E(XY)=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}xyf(x,y)dxdy=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r\cos\theta\times r\sin\theta dr=0$ **(1分)**

∴ $\rho_{XY}=\frac{E(XY)-E(X)E(Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=0$ [注：$D(X)$和**D(Y)均不为0**]

∴ X,Y 不相关。 **(2分)**

四、解：令事件 A **表示系统可靠性，则：** $A=(A_1A_2\dots A_n)\cup(B_1B_2\dots B_n)$

(2分) 因 $A_i,B_i(i=1,2,\dots n)$ **相互独立，且** $P(A_i)=P(B_i)=r$ **故所求概率为：**

$P(A)=P((A_1A_2\dots A_n)\cup(B_1B_2\dots B_n))$ **(2分)**

$=P(A_1A_2\dots A_n)+P(B_1B_2\dots B_n)-P(A_1A_2\dots A_nB_1B_2\dots B_n)$ **(2分)**

$=r^n(2-r^n)$ **(4分)**

五、(1) 由 $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dxdy=1$ **有** $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}A\exp\left[-(2x+y)\right]dxdy=1$

得 $A=2$ **(4分)**

（2）满足条件 $Y\le X$ **在** xOy **平面上为平面上直线** $y=x$ **及其下方的区域** G

故 $P(Y\le X)=P\{(X,Y)\in G\}=\iint_G f(x,y)dxdy$

$=\int_0^{\infty}\int_y^{\infty}2\exp\left[-(2x+y)\right]dxdy$

$=\frac{1}{3}$ **(6分)**

六、 ∵ $X_i\sim N(20,3)$ $(i=1,2,\dots 10)$ $Y_j\sim N(20,3)$ $(j=1,2,\dots,15)$

∴ $\overline{X}=\frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}X_i\sim N(20,\frac{3}{10})$ **(1分)** $\overline{Y}=\frac{1}{15}\sum_{j=1}^{15}Y_j\sim N(20,\frac{3}{15})$ **(1分)**

∴ $\overline{X}-\overline{Y}\sim \mathbf{N}(\mathbf{0},\frac{1}{2})$ **或** $\dfrac{\overline{X}-\overline{Y}}{\frac{1}{\sqrt{2}}}\sim N(0,1)$ **(2分)** **所求概率为：**

$$P\left\{\left|\overline{X}-\overline{Y}\right|<0.3\right\}=P\left\{-0.3<\overline{X}-\overline{Y}<0.3\right\}$$ **(2 分)**

$$=P\left\{-0.3\sqrt{2}<\frac{\overline{X}-\overline{Y}}{\frac{1}{\sqrt{2}}}<0.3\sqrt{2}\right\}=\Phi\left(0.3\sqrt{2}\right)-\Phi\left(-0.3\sqrt{2}\right)$$

$$=2\Phi\left(0.3\sqrt{2}\right)-1$$ **(2 分)**

$$=0.3256$$ **(2 分)**

或：　P｛|$\overline{X}$－$\overline{Y}$|＜0.3｝＝1－$\left[P\{\ |\overline{X}-\overline{Y}|\ \}>0.3\right]$　(2 分)

＝1－［ P ｛$\overline{X}$ － $\overline{Y}$ ＞0.3｝＋P ｛$\overline{X}$ － $\overline{Y}$ ＜－0.3 ］　(2 分)

＝1－2(1－$\Phi(0.4242)$)＝0.3256　(2 分)

七、总体X的一阶、二阶矩为：

$$\mu_1=E(X)=\frac{a+b}{2}$$

①

$$\mu_2=E\left(X^2\right)=D(X)+\left[E(X)\right]^2=\frac{(b-a)^2}{12}+\frac{(a+b)^2}{4} \qquad ②$$

由 ①、② 联立求得　$a=\mu_1-\sqrt{3\left(\mu_2-\mu_1^{\ 2}\right)}$　$b=\mu_1+\sqrt{3\left(\mu_2-\mu_1^{\ 2}\right)}$

由于总体的k阶矩$\mu_k=E\left(X^k\right)$ 与样本的k阶矩$A_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^{\ k}$的关系为

$$A_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^{\ k}\xrightarrow{P}\mu_k \qquad k=1,2,\ldots.$$

$\therefore$ 分别以样本的一阶、二阶矩A_1,A_2代替总体的一阶、二阶矩μ_1,μ_2，得未知参数a和b的矩估计量为：

$$\hat{a}=A_1-\sqrt{3\left(A_2-A_1^{\ 2}\right)}=\overline{X}-\sqrt{\frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2}$$

$$\widehat{b} = A_1 + \sqrt{3\left(A_2 - A_1^2\right)} = \overline{X} + \sqrt{\frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2}$$

即未知参数 a **和** b **的矩估计量为：**

$$\widehat{a} = \overline{X} - \sqrt{\frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2}$$

$$\widehat{b} = \overline{X} + \sqrt{\frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2}$$

八、∵ $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$

∴ $\int_0^1 \left(ax^2 + bx + c\right)dx = 1$ **即：** $\frac{1}{3}a + \frac{1}{2}b + c = 1$ ① **(2 分)**

由 $E(X) = \frac{1}{2}$ **得：** $\int_0^1 x\left(ax^2 + bx + c\right)dx = \frac{1}{2}$

即： $\frac{1}{4}a + \frac{1}{3}b + \frac{1}{2}c = \frac{1}{2}$ ②

(2 分)

由 $D(X) = E\left(x^2\right) - \left[E(x)\right]^2 = \frac{3}{20}$ **得** $\int_0^1 x^2\left(ax^2 + bx + c\right)dx = \frac{2}{5}$

即： $\frac{1}{5}a + \frac{1}{4}b + \frac{1}{3}c = \frac{2}{5}$ ③

(2 分)

联立①、②、③求解得： $a = 12, b = -12, c = 3$ **(4 分)**