

# Линейная алгебра и геометрия

## Глава I. Векторное пространство

### §1. Векторное пространство, размерность, изоморфизм

**Определение.** Множество  $V$  называется *векторным пространством* над полем  $F$ , если заданы операции  $+$  и  $\cdot : V \times V \rightarrow V, F \times V \rightarrow V$  и выполнены следующие аксиомы:

1.  $\forall v_1, v_2, v_3 \in V$  выполнено  $(v_1 + v_2) + v_3 = v_1 + (v_2 + v_3)$
2.  $\exists \vec{0} \in V : \forall v \in V$  выполнено  $v + \vec{0} = v$
3.  $\forall v \in V \exists -v \in V : v + (-v) = \vec{0}$
4.  $\forall v_1, v_2 \in V$  выполнено  $v_1 + v_2 = v_2 + v_1$
5.  $\forall \alpha, \beta \in F, v \in V$  выполнено  $(\alpha\beta)v = \alpha(\beta v)$
6.  $\forall v \in V$  выполнено  $1 \cdot v = v$
7.  $\forall \alpha, \beta \in F, v \in V$  выполнено  $(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$
8.  $\forall \alpha \in F, v_1, v_2 \in V$  выполнено  $\alpha(v_1 + v_2) = \alpha v_1 + \alpha v_2$

**Утверждение.** Линейным операциям над векторами соответствует такие же операции над их координатами:

1.  $x = eX, y = eY \Rightarrow x + y = e(X + Y)$
2.  $\lambda x = e(\lambda X)$

*Доказательство.* Пусть  $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)$  базис в  $V$ . Тогда

$$x = \sum_{i=1}^n x_i e_i = (e_1, e_2, \dots, e_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = eX$$

□

**Определение.**  $\varphi : V \rightarrow W$  *линейно*, если:

1.  $\forall v_1, v_2 \in V$  выполнено  $\varphi(v_1 + v_2) = \varphi(v_1) + \varphi(v_2)$
2.  $\forall v \in V, \lambda \in F$  выполнено  $\varphi(\lambda v) = \lambda \varphi(v)$

**Определение.**  $\varphi$  называется *изоморфизмом*, если  $\varphi$  линейно и биективно.

**Следствие.** Если  $\varphi$  линейное отображение, то  $\varphi(\vec{0}_V) = \varphi(\vec{0}_W)$

*Доказательство.*

$$\vec{0}_V + \vec{0}_V = \vec{0}_V \Rightarrow \varphi(\vec{0}_V + \vec{0}_V) = \varphi(\vec{0}_V) + (-\varphi(\vec{0}_V)) \Rightarrow \varphi(\vec{0}_V) = \vec{0}_W \Leftrightarrow \dim V = \dim W$$

□

**Следствие.**  $\dim V = n \Leftrightarrow V \cong F^n$ , где  $F^n$  пространство столбцов высоты  $n$ .  
 ("≅" Чубаров обозначает изоморфность)

*Доказательство.*  $\Leftarrow$  Пусть  $V \cong W$  изоморфизм  $\Rightarrow \dim V = \dim W$ . По условию  $\exists \varphi : V \rightarrow W$  изоморфизм. Фиксируем базис  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$  в  $V$  и покажем, что

$\varphi(e_1), \varphi(e_2), \dots, \varphi(e_n)$  базис в  $W$ .

1.  $\varphi(e_1), \varphi(e_2), \dots, \varphi(e_n)$  - ЛНЗ и  $\sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi(e_i) = \vec{0}_W \Rightarrow \sum_{i=1}^n \varphi(\lambda_i e_i) = \vec{0}_W$ ,

$\varphi$  - инъективно, но  $\varphi(\vec{0}_V) = \vec{0}_W \Rightarrow \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i = \vec{0}_V \Rightarrow$  все  $\lambda_i = 0$

2.  $\varphi(e_1), \varphi(e_2), \dots, \varphi(e_n)$  - полная система:  $\forall w \in W \exists v \in V : \varphi(v) = w$ , так как  $\varphi$  - сюръективна.  $\Rightarrow \exists x_1, x_2, \dots, x_n \in F; v = \sum_{i=1}^n x_i e_i \Rightarrow \varphi(v) = w = \sum_{i=1}^n x_i \varphi(e_i) \Rightarrow \varphi(e_1), \varphi(e_2), \dots, \varphi(e_n)$  - базис в  $W$ .

$\Rightarrow$  Пусть  $\dim V = \dim W = n$ . Построим изоморфизм. Фиксируем базис  $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)$  в  $V$  и  $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$  в  $W$ . Положим:  $\varphi(e_i) = f_i$ . Построим  $\varphi$  до линейного отображения, так что  $\forall v \in V$  выполнено  $v = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ . Тогда

$\varphi(v) = \varphi(\sum_{i=1}^n x_i e_i) = \sum_{i=1}^n x_i \varphi(e_i) = \sum_{i=1}^n x_i f_i$ . Таким образом,  $\varphi$  линейно.

□

### Замена базиса

Пусть  $\dim V = n, e = (e_1, \dots, e_n)$  - старый базис,  $e' = (e'_1, \dots, e'_n)$  - новый базис.

Пусть известно, что  $\forall e'_j$  выполнено

$$e'_j = \sum_{i=1}^n c_{ij} e_i = e \begin{pmatrix} c_{1j} \\ \vdots \\ c_{nj} \end{pmatrix} \Leftrightarrow e' = e C_{e \rightarrow e'},$$

где  $C = (c_{ij})$ .

**Лемма.** 1.  $\det C \neq 0$

2.  $C_{e' \rightarrow e} = C_{e \rightarrow e'}^{-1}$

**Теорема.** Пусть  $e, e'$  два базиса в пространстве  $V$ ,  $X_e$  и  $X_{e'}$  столбцы координат одного и того же вектора. Тогда  $X_e = C X_{e'}$

*Доказательство.*  $\forall x \in V$  выполнено

$$x = e X_e = e' X_{e'} = e C_{e \rightarrow e'} X_{e'} = e (C_{e \rightarrow e'} X_{e'})$$

□

## §2. Подпространство

**Определение.** Подмножество  $U$  в пространстве  $V$  называется *подпространством* в  $V$ , если:

1.  $\forall U \neq 0$
2.  $\forall u_1, u_2 \in U$  выполнено  $u_1 + u_2 \in U$
3.  $\forall u \in U, \lambda \in F$  выполнено  $\lambda u \in U$

**Способы задания подпространства:**

1.  $U = \langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$
2.  $\dim V = n, W = \{v = eX | AX = 0\}$

**Определение.** *Линейная оболочка* векторов  $a_1, a_2, \dots, a_n \in V$  – это  $\{\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_n a_n | \lambda_i \in F\}$

**Лемма.** 1.  $\langle a_1, a_2, \dots, a_m \rangle := U$  – подпространство в  $V$   
 2.  $\dim U = rk\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$

*Доказательство.* Если  $\dim U = n$ , то фиксируем базис и составляем матрицу из столбцов координат  $a_1, a_2, \dots, a_m$ :

$$A = (a_1^\uparrow, a_2^\uparrow, \dots, a_m^\uparrow) \sim \begin{pmatrix} a_{1j_1} & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{1j_2} & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{rj_r} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Элементарными преобразованиями строк приводим матрицу  $A$  к ступенчатому виду и получаем, что столбцы  $a_{j_1}, a_{j_2}, \dots, a_{j_r}$  составляют базис в  $U$ .

□

**Лемма.** Любую ЛНЗ систему векторов в  $V (\dim V < \infty)$  можно можно дополнить до базиса пространства  $V$ .

**Алгоритм:** Пусть  $a_1, a_2, \dots, a_m$  – ЛНЗ,  $m < n = \dim V$ , известны координаты этих векторов в некотором базисе. Тогда  $rk(a_1^\uparrow, a_2^\uparrow, \dots, a_m^\uparrow) = m$ . Составим матрицу столбцов из них и припишем столбцы  $E$  порядка  $n$ :

$$(A|E_n) \sim \begin{pmatrix} \text{Выделим базисные столбцы} \\ \text{Э.П. строк в } A|E_n, \\ \text{включая столбцы } A \end{pmatrix} \sim rk(A|E_n) = n$$

Вывод: к  $a_1, a_2, \dots, a_m$  надо добавить единичные столбцы, вошедшие в базис матрицы  $A|E_n$ .

## Операции с блочными матрицами

**Определение.** Блочная матрица – матрица, разбитая на подматрицы, которые обозначаются отдельными буквами.

**Пример:**

$$1. A = \left( \begin{array}{cc|cc} 3 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 4 \end{array} \right) = (A_1 | A_2) \text{ - блочная строка.}$$

$$2. B = \left( \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 3 \\ 4 & -2 \end{array} \right) = \begin{pmatrix} B_1 \\ - \\ B_2 \end{pmatrix} \text{ - блочный столбец.}$$

1. Линейная оболочка.
2. ОСЛУ.

**Теорема.** Способы 1 и 2 равносильны, если  $\dim V < \infty$

*Доказательство.*  $2 \implies 1$  : строим ФСР.  $AX = 0$ . Проводим элементарные преобразования строк, перенумеровывая неизвестные, таким образом чтобы привести матрицу к следующему виду:

$$A \underset{\text{строк}}{\overset{\text{Э.П.}}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} \overbrace{1 \ \dots \ 0}^r & a_{1j} & \dots \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & a_{rj} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \end{pmatrix}, r+1 \leq j \leq n$$

Возвращаемся к уравнениям:  $x_i = - \sum_{j=r+1}^n a_{ij} x_j$ , где  $1 \leq i \leq r$ , а  $(x_{r+1}, \dots, x_n)$  – свободные неизвестные. В векторном виде:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \\ x_{r+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} - \sum_{j=r+1}^n a_{1j} x_j \\ \vdots \\ - \sum_{j=r+1}^n a_{rj} x_j \\ x_{r+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_{r+1} \overbrace{\begin{pmatrix} -a_{1,r+1} \\ \vdots \\ -a_{r,r+1} \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}^{Y_1} + \dots + x_n \overbrace{\begin{pmatrix} -a_{1,n} \\ \vdots \\ -a_{r,n} \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}}^{Y_n}$$

где  $Y_1, \dots, Y_n$  – фундаментальная система решений, т.е. базис пространства решений  $AX = 0$ .

Составим матрицу из столбцов ФСР.

$$\Phi = \begin{pmatrix} -a_{1,r+1} & \dots & -a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ -a_{r,r+1} & \dots & -a_{r,n} \\ 1 & & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} = \left( \frac{-B}{E_{n-r}} \right) - \text{фундаментальная матрица.}$$

В общем случае фундаментальная матрица – это матрица, имеющая  $n - r = n - rkA$  ЛНЗ столбцов, которые являются решениями системы  $AX = 0$ , где  $A \sim (E_r | B)$  без нулевых уравнений.

1  $\implies$  2. Даны ЛНЗ векторы  $c_1, c_2, \dots, c_m$  в  $V$ .

Нужно найти такую матрицу  $A_{p \times n}$ , чтобы  $W = \{X \in F^n | AX = 0\}$ , где  $X$  - столбец координат произвольного вектора из  $U = \langle c_1, c_2, \dots, c_m \rangle$ . Если составить матрицу из столбцов  $c_1, c_2, \dots, c_m$ , то она должна стать фундаментальной матрицей для ОСЛУ:  $AX = 0$ .

1 этап: Векторы  $c_1, c_2, \dots, c_m$  расписать по строкам:

$$\begin{pmatrix} \vec{c}_1 \\ \vdots \\ \vec{c}_m \end{pmatrix} \underset{\text{строк}}{\overset{\text{э.п.}}{\sim}} (E_m | \underbrace{B}_{n-m})$$

2 этап:  $\Phi = \begin{pmatrix} E_m \\ B^T \end{pmatrix} \rightsquigarrow A = (-B^T | E_{n-m})$  – искомая матрица системы. Значит,  $p = n - m$ . □

**Замечание.** Столбец  $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$  принадлежит  $c_1, \dots, c_m \Leftrightarrow rk \left( c_1^\uparrow, \dots, c_m^\uparrow | \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right) = rk(c_1^\uparrow, \dots, c_m^\uparrow)$

*Доказательство.* Составить матрицу:

$$rk \left( c_1^\uparrow, \dots, c_m^\uparrow | \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right) \underset{\text{строк}}{\overset{\text{э.п.}}{\sim}} \left( \begin{array}{ccc|cccc} c_{11} & & & & & & \dots & \dots & \dots \\ & \ddots & & & & & & \vdots & \\ & & c_{mm} & & & & & & \\ \hline 0 & \dots & 0 & & \sum a_{m+1,j} x_j & & & & \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & & & \\ 0 & \dots & 0 & & \sum a_{n,j} x_j & & & & \end{array} \right),$$

где суммы  $\sum a_{i,j} x_j := 0$ , где  $i = m + 1, \dots, n$ . □

### §3. Пересечение и сумма подпространств.

**Утверждение.** Пусть  $U_i$  – семейство подпространств векторного пространства  $V$ . Тогда  $\bigcap_{i \in I} U_i$  – подпространство  $V$ .

*Доказательство.*

1.  $\vec{0}_V \in U_i, \forall i \in I \Rightarrow \vec{0}_V \in \bigcap_{i \in I} U_i$
  2.  $\forall x, y \in U_i, \forall i \in I \Rightarrow x + y \in U_i, \forall i \in I \Rightarrow (x + y) \in \bigcap_{i \in I} U_i$
  3.  $\forall x \in U_i, \forall i \in I, \forall \lambda \in F \Rightarrow \lambda x \in U_i, \forall i \in I \Rightarrow \lambda x \in \bigcap_{i \in I} U_i$
- $U_1 \cup U_2$  может быть подпространством:  $u_1 + u_2 \notin U_1 \cup U_2$

□

**Определение.** Суммой подпространств  $U_1, \dots, U_m \subset V$  называется множество  $U_1 + \dots + U_m = \{u_1 + \dots + u_m | u_i \in U_i\}$ .

**Утверждение.**  $U_1 + \dots + U_m$  – подпр-во в  $V, \dim(U_1 + \dots + U_m) \leq \sum_{i=1}^m \dim U_i$

*Доказательство.* Если  $e_1, \dots, e_m$  – базисы в этих подпространствах, то

$$U_1 + \dots + U_m = \langle e_1, \dots, e_m \rangle : U_1 = \sum_{i=1}^{n_1} \lambda_{1i} e_{1i}, \dots, U_m = \sum_{j=1}^{n_m} \lambda_{mj} e_{mj} \Rightarrow$$

$U_1 + \dots + U_m$  – линейная комбинация этих векторов.

□

**Формула Грассмана.** Если  $U_1, U_2$  – конечные подпространства  $V$ , то  $\dim(U_1 + U_2) = \dim U_1 + \dim U_2 - \dim(U_1 \cap U_2)$

*Доказательство.*  $\dim U_1 = n_1, \dim U_2 = n_2, \dim(U_1 \cap U_2) = r$ .

Выберем  $e_1, \dots, e_r$  – базис в  $U_1 \cap U_2$ . Дополним их до базиса в  $U_1$  векторами  $a_{r+1}, \dots, a_{n_1}$ , в  $U_2$  векторами  $b_{r+1}, \dots, b_{n_2}$

□

**Утверждение.**  $\{a_i, b_j, c_k\}$  – базис  $U_1 + U_2$  (их количество  $n_1 + n_2 - r$ ).

*Доказательство.* Ясно, что это полная система. Докажем ЛНЗ:

$$\text{Допустим } \sum_{i=r+1}^{n_1} \alpha_i a_i + \sum_{j=r+1}^{n_2} \beta_j b_j + \sum_{k=1}^r \gamma_k c_k = 0 \Rightarrow$$

$$\underbrace{\sum \alpha_i a_i + \sum \gamma_k c_k}_{\in U_1} = \underbrace{-\sum \beta_j b_j}_{\in U_1 \cap U_2} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \gamma'_k := -\sum \beta_j b_j = \sum \gamma'_r c_r &\Rightarrow \sum \beta_j b_j + \sum \gamma'_k c_k = 0 \xrightarrow{\text{ЛНЗ}} \beta_j = 0, \forall j = r+1, \dots, n_2; \\ \gamma'_k = 0 &\Rightarrow \sum \alpha_i a_i + \sum \gamma_k c_k = 0 \xrightarrow{\text{ЛНЗ}} \alpha_i = 0, \forall i = r+1, \dots, n_1; \gamma_k = 0, \forall k = 1, \dots, r. \end{aligned}$$

□

## Алгоритм вычисления базисов в $U_1 + U_2$ , $U_1 \cap U_2$ ( $\dim V \leq \infty$ ).

**Замечание.**  $U_1 + U_2 = \langle a_1, \dots, a_{n_1}, b_1, \dots, b_{n_2} \rangle$

*Доказательство.* Можно составить матрицу из столбцов координат и Э.П. строк выявить базисные столбцы в этой расширенной матрице.

Вектор  $v \in U_1 \cap U_2 \iff \exists x_i, y_i \in F : v = \sum_{i=1}^{n_1} x_i a_i = \sum_{j=1}^{n_2} y_j b_j$ , т.е.

$(x_1, \dots, x_{n_1}, -y_1, \dots, -y_{n_2})$  – решение ОСЛУ с той же самой матрицей.

Базис  $U_1 \cap U_2$  будет давать ФСР (ее часть соответственно  $\{a_i\}$  или  $\{b_i\}$ ).

□

1. Составить матрицу:

$$\underbrace{(a_1^\uparrow \dots a_{n_1}^\uparrow)}_{\text{ЛНЗ}} \mid \underbrace{(b_1^\uparrow \dots b_{n_2}^\uparrow)}_{\text{ЛНЗ}} \overset{\text{Э.П.}}{\underset{\text{строк}}{\sim}} \begin{pmatrix} \overbrace{1 \dots 0}^{E_{n_1}} & \mid & 0 & \dots & 0 & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots & & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \mid & 0 & \dots & 0 & \vdots & \vdots \\ \hline 0 & \dots & 0 & \mid & 1 & \dots & 0 & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \mid & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \mid & 0 & \dots & 1 & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

Элементарными преобразованиями строк приводим к улучшенному ступенчатому виду. Ветокторы-столбцы  $a_1, \dots, a_{n_1}, b_1, \dots, b_{n_2}$  – базис  $U_1 + U_2$ .

2. Вычислить  $\dim(U_1 \cap U_2) = n_1 + n_2 - m$  (это количество столбцов  $b_j$  не вошедших в базис суммы).  $m = n_1 + k = \dim(U_1 + U_2)$ .

3. Выразить векторы  $b_{k+1}, \dots, b_{n_2}$  через базисы:  $b_l = \sum_{i=1}^m \alpha_{il} a_i + \sum_{s=1}^k \beta_{sl} b_s$  – ЛНЗ  
 $\iff b_l - \sum \beta_{sl} b_s = \sum \alpha_{il} a_i \in U_1 \cap U_2$  (Их количество  $\dim(U_1 \cap U_2)$ ).

## §4. Прямая сумма

Пусть  $V$  – векторное пространство над полем  $F$ ,  $U_1, \dots, U_k$  – подпр-ва в  $V$ .

**Определение.** Сумма  $U_1 + \dots + U_k$  ( $k \geq 2$ ) называется *прямой суммой подпространств*  $U_1, \dots, U_k$ , если  $\forall u$  из суммы представляется в виде  $u = u_1 + \dots + u_k$  единственным образом.

Обозначение:  $U_1 \oplus \dots \oplus U_k$

**Примеры:**

1.  $U_1 = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid A^T = A\}$  – симметричные матрицы

2.  $U_1 = \{B \in M_n(\mathbb{R}) \mid B^T = -B\}$  – кососимметричные матрицы

**Утверждение.**  $M_n(\mathbb{R}) = U_1 \oplus U_2$ , где  $U_1$  – пространство симметричных матриц, а  $U_2$  – пространство кососимметричных матриц.

**Теорема.** Следующие условия равносильны:

1.  $U_1 + U_2 = U_1 \oplus U_2$
2.  $U_1 \cap U_2 = \{0\}$
3.  $\dim(U_1 + U_2) = \dim U_1 + \dim U_2$
4. Базис в  $U_1 + U_2$  – объединение базисов слагаемых.

*Доказательство.*

$1 \Rightarrow 2$  :  $\forall u \in U_1 + U_2$  выполнено  $u = u_1 + u_2$  – единственным образом. Допустим противное: пусть  $\exists u_0 \in U_1 \cap U_2$ ,  $u_0 \neq 0 \Rightarrow u_0 = \underbrace{u_0}_{\in U_1} + \underbrace{0}_{\in U_2} = \underbrace{0}_{\in U_1} + \underbrace{u_0}_{\in U_2}$ . Противоречие единственности  $\Rightarrow U_1 \cap U_2 = \{0\}$ .

$2 \Rightarrow 3$  : По формуле Грассмана.

$3 \Rightarrow 4$  : Ясно, что  $U_1 + U_2 = \langle a_1, \dots, a_{n_1}, b_1, \dots, b_{n_2} \rangle$  – эти векторы ЛНЗ, если

$$\exists \sum_{i=1}^{n_1} \alpha_i a_i + \sum_{j=1}^{n_2} \beta_j b_j = 0 \Rightarrow \underbrace{\sum_{i=1}^{n_1} \alpha_i a_i}_{=0} = - \underbrace{\sum_{j=1}^{n_2} \beta_j b_j}_{=0} = \{0\} \in U_1 \cap U_2$$

$4 \Rightarrow 1$  :  $\forall u = u_1 + u_2 = \sum_{i=1}^{n_1} x_i a_i + \sum_{j=1}^{n_2} y_j b_j$  раскладывается по базису единственным образом  $\Rightarrow u_1, u_2$  единственны. □

**Теорема.** Для  $U_1, \dots, U_k$  ( $k \geq 2$ ) следующие условия равносильны:

1.  $U_1 + \dots + U_k = U_1 \oplus \dots \oplus U_k$
2.  $\forall i = 1, \dots, k$  выполнено  $U_i \cap (\sum_{j \neq i} U_j) = \{0\}$
3.  $\dim(U_1 + \dots + U_k) = \dim U_1 + \dots + \dim U_k$
4. Базис в  $U_1 + \dots + U_k$  – объединение базисов слагаемых.

**Утверждение.** Для любого пространства  $U \subset V$   $\exists$  подпространство  $W \subset V$  :  $V = U \oplus W$ , где  $W$  – прямое дополнение к  $U$ .

*Доказательство.* Пусть  $e_1, \dots, e_k$  – базис в  $U$ , тогда  $\exists$  векторы  $e_{k+1}, \dots, e_n$  ( $n = \dim V$ ) :  $\{e_1, \dots, e_n\}$  – базис в  $V$ , тогда  $W := \langle e_{k+1}, \dots, e_n \rangle$  □



## Факторпространство

Пусть  $V$  – векторное пространство,  $U \subseteq V$  – подпространство.

Скажем, что векторы  $v_1$  и  $v_2 \in V$  сравнимы по модулю, если  $v_1 - v_2 \in U$ , то есть  $v_1 \equiv v_2 \pmod{U}$ .

**Утверждение.** Отношение:  $v_1 \sim v_2 \iff v_1 - v_2 \in U$  является отношением эквивалентности на  $V$ .

Класс эквивалентности вектора  $v$ :

$$\vec{v} = \{v + u \mid \forall u \in U\} = v + U$$

$$V = \bigsqcup_{v \in V} (v + U)$$

Сравним с видом решения системы  $AX = b : X = X_r + Y$  – частное решение + общее решение однородной ассоциированной  $AY = 0$ . Классы эквивалентности множества решений  $AX = b$ .

Обозначим:  $V/U$  – множество классов эквивалентности (смежных классов по  $U$ ).

Термин:  $V/U$  – факторпространство  $V$  по  $U$

Определим сложение классов:  $(v_1 + U) + (v_2 + U) := v_1 + v_2 + U$

Определим умножение классов на скаляр  $\lambda \in F$ :  $\lambda(v + U) := \lambda v + U$

**Утверждение.** Множество с введенными операциями является векторным пространством.

**Утверждение.** 1. Если  $\dim V < \infty$ , то  $\dim(V/U) = \dim V - \dim U$

2.  $(U \oplus W)/U \cong W$

*Доказательство.* Пусть  $V = U \oplus W$

2. I способ: Построим отображение:  $\forall v \in V \exists! u, w$ , такие что

$f : v = u + w \mapsto v + U$ ,  $f$  – линейная.  $f$  – сюръективна:  $w + u = f(w)$ .

$f$  – инъективна, так как если  $w_1 + u = w_2 + u \Rightarrow w_1 - w_2 \in U$ .

II способ:  $W$  имеет единственный общий вектор с любым смежным классом по  $U$ .  $\forall x \in V = U \oplus W \exists! u \in U, v \in W : v = x - u \Rightarrow$  Рассмотрим  $v + u = w + (u + U) = w + U$ . Построим отображение  $\varphi : V/U \mapsto W$  по правилу  $\varphi(w + U) = w$ , причем  $\varphi$  – линейное.

Тогда  $\varphi((w_1 + U) + (w_2 + U)) = \varphi(w_1 + w_2 + U) = w_1 + w_2 = \varphi(w_1 + U) + \varphi(w_2 + U)$ .

$\forall \lambda \in F, \varphi(\lambda w + U) = \lambda w = \lambda \varphi(w + U)$ .  $\varphi$  – биективное,  $\forall w \in W$ ,

то  $\varphi(w + U) = w$ , если  $\varphi(w + U) = 0 \in W \Rightarrow w + U = U \Rightarrow v = 0 \Rightarrow$

$0$  – единственный.

1. Рассмотрим базис  $V$ , составленный из базисов слагаемых:

$$\underbrace{e_1, \dots, e_{n_1}}_{\text{Базис в } U}, \underbrace{e_{n_1+1}, \dots, e_n}_{\text{Базис в } W} \quad (n = \dim V)$$

$$\forall v \in V : v = \sum_{i=1}^{n_1} x_i e_i + \sum_{j=n_1+1}^n x_j e_j \Rightarrow \bar{v} = \sum_{j=n_1+1}^n x_j \bar{e}_j$$

Т.е. смежные классы векторов  $e_{n_1+1}, \dots, e_n$  – полная система в  $V/U$ .

Они ЛНЗ если  $\sum_{j=n_1+1}^n x_j \bar{e}_j = \bar{0} = U \Rightarrow \sum_{j=n_1+1}^n x_j e_j \in U \cap W = \{0\} \Rightarrow$  Все  $\lambda_j = 0 \Rightarrow \{\bar{e}_{n_1+1}, \dots, \bar{e}_n\}$  – базис  $V/U$ .  $\square$

**Замечание.** Если  $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n_1} \\ x_{n_1+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ , то  $\bar{v} = \begin{pmatrix} x_{n_1+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

**Внешняя прямая сумма пространств:** Пусть  $V_1, \dots, V_m$  – векторные пространства над полями  $F$ .

Обозначение:  $V = V_1 + \dots + V_m = \{(v_1, \dots, v_m) | v_i \in V_i, 1 \leq i \leq m\}$ ,  $V$  – внешняя прямая сумма пространств.

**Замечание.** Пространство  $V = V_1 + \dots + V_m$  можно превратить в прямую сумму подпространств: рассмотрим  $U_i = \{(0_{V_1}, \dots, v_i, \dots, 0_{V_m}) | v_i \in V_i\} \subset V$ .

$$(v_1, \dots, v_m) = (v_1, 0, \dots, 0) + (0, v_2, 0, \dots, 0) + \dots \Rightarrow V = U_1 \oplus \dots \oplus U_m.$$

В факторпространстве  $V/U : \bar{0} = U$  и  $-\bar{v} = \overline{-v}$

**Определение.**  $\dim(V/U)$  – коразмерность пространства  $U$  в пространстве  $V$ . Если  $\dim V < \infty$ , то  $\text{codim}_V(U) = \dim V - \dim U$ .

## §5. Линейные функции и сопряженное (двойственное) пространство.

Пусть  $V$  – векторное пространство над полем  $F$ .

**Определение.** Функция  $f : V \mapsto F$  называется *линейной* если:

1.  $\forall v_1, v_2 \in V \implies f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2)$
2.  $\forall v \in V, \lambda \in F \implies f(\lambda v) = \lambda f(v)$

**Определение.** Ядро функции:  $\text{Ker} f = \{v \in V \mid f(v) = 0\}$

Образ функции  $\text{Im} f = f(V) = \{\alpha \in F \mid \exists v \in V : f(v) = \alpha\}$

**Утверждение.**  $\text{Ker} f$  – подпространство в  $V$ . Если  $f \neq 0$ , то  $\text{Ker} f$  имеет коразмерность 1 в  $V$ .

*Доказательство.*

$$\forall v_1, v_2 \in \text{Ker} f, \lambda, \mu \in F \implies f(\lambda v_1 + \mu v_2) = \lambda f(v_1) + \mu f(v_2) = 0$$

□

Обозначим:  $V^* = \{f : V \mapsto F\}$  – линейная функция.

Определим на  $V^*$  операции сложения:  $\forall f_1, f_2 \in V^*$  выполнено  $(f_1 + f_2)(v) := f_1(v) + f_2(v)$ . Умножение на элемент поля:  $\forall f \in V^*, \lambda \in F$  выполнено  $(\lambda f)(v) := \lambda f(v)$

Термин:  $V^*$  – пространство сопряженное к  $V$ .

**Теорема.** Если  $\dim V = n$ , то  $\dim V^* = n \implies V^* \cong V$ .

*Доказательство.* Введем в  $V$  базис  $e_1, \dots, e_n, \forall v \in V : v = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ .

Тогда  $\forall f \in V^*, f(v) = \sum_{i=1}^n x_i f(e_i) = \sum_{i=1}^n f(e_i) f_i(v) = (\sum_{i=1}^n f(e_i) f_i)(v), \forall v \in V$ .  $(f(e_1), \dots, f(e_n))$  – строка коэффициентов функций  $f$ .  $f = \sum_{i=1}^n f(e_i) f_i(v) = \sum_{i=1}^n a_i f_i(v)$ . Таким образом  $V^* = \langle f_1, \dots, f_n \rangle$ . Они ЛНЗ, если  $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in F :$

$$\underbrace{\sum_{i=1}^n \lambda_i f_i}_{\tilde{f}} = 0. \quad \tilde{f}(e_j) = \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i(e_j) = \lambda_j = 0, \quad 1 \leq j \leq n. \quad f_i(e_j) = \begin{cases} 1, j = i \\ 0, j \neq i \end{cases} \implies$$

$$\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0.$$

□

### Примеры:

1.  $V = \mathbb{R}[x]$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}$  – фиксированная точка.  $f : p(x) \mapsto p(x_0)$ .

Рассмотрим  $V_n = \{p(x) | \deg p \leq n\}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

Определим  $\text{Ker } f = \{p(x) | p(x_0) = 0\}$ . Базис:  $(x - x_0), (x - x_0)^2, \dots, (x - x_0)^n$ .

2.  $\dim V = n$ , пусть  $e_1, \dots, e_n$  – базис в  $V$ .  $\forall v \in V, v = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ . Рассмотрим  $f_i(v) = x_i$  –  $i$ -ая координатная функция.

**Определение.** Обозначим  $f_i := e^i$ ,  $1 \leq i \leq n$ .  $\{e^1, \dots, e^n\}$  – базис в  $V^*$ , двойственный (биортогональный) к базису  $e_1, \dots, e_n$ .

По построению  $e^i(e_j) = \begin{cases} 1, j = i \\ 0, j \neq i \end{cases}$  (символ Кронекера)

Разложение  $\forall v \in V$  по базису  $e_1, \dots, e_n$  имеет вид  $v = \sum_{i=1}^n e^i(v) e_i$

**Утверждение.** Строки коэффициентов линейных функций:  $f(v) = \sum_{i=1}^n a_i x_i$  изменяются при переходе к новому базису по формулам:  $\vec{a} = (a_1, \dots, a_n)$ ,  
 $\vec{a}' = \vec{a} C_{e \rightarrow e'}$

*Доказательство.*  $f(v) = \vec{a}' x'^\uparrow$ . Знаем, что  $X = CX' \iff \vec{a}(CX') = \vec{a}' X' \iff (\vec{a} C) X' = \vec{a}' X'$ , верно  $\forall x' \in F^n$ .  $\square$

### Примеры взаимных базисов:

Пусть  $V = \mathbb{R}_n[x] = \{p(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n | n \in \mathbb{N}, a_i \in \mathbb{R}\}$

1. С базисом:  $1, \frac{x-x_0}{1!}, \dots, \frac{(x-x_0)^n}{n!}$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}$  – фиксированное число.

$$p(x) = \sum_{k=0}^n \frac{p^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

Можно рассмотреть линейные функции  $\delta^{(k)} : \delta^{(k)}(p) := p^{(k)}(x_0)$ ,  $k = 0, \dots, n$ .  
 $\{\delta^{(k)}, k = 0, \dots, n\}$  – базис в  $V^*$  двойственный к тейлоровскому базису.

2.  $V = \mathbb{R}_n[x]$ . Пусть  $x_0, \dots, x_n$  – попарно различные числа. Рассмотрим линейные функции  $\varphi_k(p) = p(x_k)$ ,  $k = 0, \dots, n$ .

$$\forall p(x) = \sum_{k=0}^n p(x_k) l_k(x), \quad l_k(x_i) = \delta_{ik}, \quad l_k(x) = \frac{\prod_{i \neq k} (x - x_i)}{\prod_{i \neq k} (x_k - x_i)}$$

Обозначение:  $V^{**} = (V^*)^*$  – второе сопряженное

**Теорема.** Если  $\dim V < \infty$ , то  $V^{**} \cong V$ , причем изоморфизм не зависит от базиса.

*Доказательство.* Построим отображение  $\varphi : V \mapsto V^{**}$ ,  $\forall v \in V$  :

$\varphi(v) := \varphi_v$ ,  $\varphi_v \in V^{**}$ .  $\varphi_v(f) := f(v)$ ,  $\forall f \in V^*$ . Ясно что  $\varphi$  – линейное отображение:  $\forall f \in V^*$   $\varphi_{v_1+v_2}(f) = f(v_1+v_2) = \varphi_{v_1}(f) + \varphi_{v_2}(f)$ , и  $\forall \lambda \in F$

$$\varphi_{\lambda v}(v) = f(\lambda v) = \lambda f(v) = \lambda \varphi_v(f)$$

$\varphi$  – инъективное отображение  $\iff \text{Ker} \varphi = 0$ ,

$\text{Ker} \varphi = \{v \in V \mid f(v) = 0, \forall f \in V^*\} = \{0\}$ . Таким образом,  $\varphi : V \mapsto W$  – инъективное линейное отображение. Но  $\dim V = \dim(V^*)^* \implies \varphi$  – сюръективное отображение.

*Подробнее:* если  $\varphi : V \mapsto W$  – инъективное линейное отображение и  $\dim V = \dim W$ , то оно сюръективно:  $\exists e_1, \dots, e_n$  – базис в  $V$ , тогда  $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)$  – ЛНЗ  $\implies \varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)$  – базис в  $W$ . Рассмотрим  $\lambda_1 \varphi(e_1) + \dots + \lambda_n \varphi(e_n) = 0_W \iff \varphi(\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n) = 0_W$ . Но  $\varphi(0_V) = 0_W$ .

Инъективность  $\implies \underbrace{\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n}_{\text{ЛНЗ}} = 0_V \implies \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$ . □

**Теорема.** Векторы  $a_1, \dots, a_k \in V$  – ЛНЗ ( $\dim V < \infty$ )  $\exists f_1, \dots, f_k \in V^* : \det(f_i(a_j)) \neq 0$ .

*Доказательство.*

$\implies$  Дополним векторы до базиса  $V$ :  $a_1, \dots, a_k, \dots, a_n$

По нему строим  $f_1, \dots, f_n$  – двойственный базис. Тогда  $f_j(a_i) = \delta_{ij}$ . по определению  $f_j(a_i) = E \implies \det(f_j(a_i)) \neq 0$

$\Leftarrow$  Пусть  $P := (f_j(a_i))$ ,  $P \in \text{Mat}_{k \times k}$ . Предположим, что  $P$  – невырожденная, тогда  $(a'_1, \dots, a'_k) = (a_1, \dots, a_k) P^{-1}$

$$(f_j(a'_i)) = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_k \end{pmatrix} (a'_1 \cdot \dots \cdot a'_k) = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_k \end{pmatrix} (a_1 \cdot \dots \cdot a_k) P^{-1} = P P^{-1} = E \implies$$

$a'_1, \dots, a'_k$  – ЛНЗ  $\implies a_1, \dots, a_k$  – ЛНЗ. □

## Глава II. Линейные отображения и операторы

### §1. Линейные отображения, их матрицы. Ядро и образ.

Пусть  $V, V'$  – векторные пространства над полем  $F$ .

**Определение.**  $\varphi : V \mapsto V'$  – линейное отображение, если:

1.  $\forall v_1, v_2 \in V : \varphi(v_1 + v_2) = \varphi(v_1) + \varphi(v_2)$
2.  $\forall v \in V, \lambda \in F : \varphi(\lambda v) = \lambda \varphi(v)$

**Следствие.**  $\varphi(0_V) = 0_{V'}$

$\varphi : V \mapsto V$  – линейный оператор на  $V$ .

**Определение.** Ядро линейного отображения  $\varphi : V \mapsto V'$  ( $V \mapsto V$ ).

$\text{Ker}\varphi = \{v \in V \mid \varphi(v) = 0_{V'}\}$  (в частности,  $0_V \in \text{Ker}\varphi$ ).

Образ линейного отображения  $\varphi$  (или множество значений  $\varphi$ ) – это  $\text{Im}\varphi = \varphi(V) = \{v' \in V' \mid \exists v \in V : \varphi(v) = v'\}$ .

**Утверждение.** 1.  $\text{Ker}\varphi$  – подпространство в  $V$ .

2.  $\text{Im}\varphi$  – подпространство в  $V'$ .

*Доказательство.*

1.  $0_V \in \text{Ker}\varphi$ , если  $\varphi(v_1) = \varphi(v_2) = 0_{V'}$ , то  $\varphi(v_1 + v_2) = \varphi(v_1) + \varphi(v_2) = 0_{V'}$ , и, если  $\lambda \in F$ , то  $\varphi(\lambda v_1) = \lambda \varphi(v_1) = 0_{V'}$ .
2.  $0_{V'} \in \text{Im}\varphi$ , если  $v'_1 = \varphi(v_1)$ ,  $v'_2 = \varphi(v_2)$ , то  $v'_1 + v'_2 = \varphi(v_1) + \varphi(v_2) = \varphi(v_1 + v_2)$  и, если  $\forall \lambda \in F$ , то  $\lambda v'_1 = \varphi(\lambda v_1) \in \text{Im}\varphi$

□

**Теорема.** Если  $\dim V < \infty$ , то  $\dim \text{Im}\varphi = \dim V - \dim \text{Ker}\varphi$

*Доказательство.* Если фикс. базис  $e_1, \dots, e_n$  в  $V$ , то  $\text{Im}\varphi = \langle \varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n) \rangle$   
 $\forall v \in V : v = \sum_{i=1}^n x_i e_i \implies \varphi(v) = \sum_{i=1}^n x_i \varphi(e_i)$ . В частности,  $\dim \text{Im}\varphi = m \leq n$ .

Выберем базис в  $\text{Im}\varphi : f_1, \dots, f_m$ .  $\forall j = 1, \dots, m \exists a_j \in V : \varphi(a_j) = f_j$ .

Поймем, что векторы  $a_1, \dots, a_m$  – ЛНЗ.  $\exists \alpha_1, \dots, \alpha_m \in F$

Допустим, что  $\alpha_1 a_1, \dots, \alpha_m a_m = 0 \implies \varphi(\sum_{j=1}^m \alpha_j a_j) = \sum_{j=1}^m \alpha_j \varphi(a_j) = \sum_{j=1}^m \alpha_j f_j = 0_{V'}$

Т.к.  $f_j$  – ЛНЗ  $\implies \alpha_j = 0, \forall j = 1, \dots, m$

Возьмем произвольный  $v' \in \text{Im}\varphi : v' = \sum_{j=1}^m \beta_j f_j$

По определению образа  $\exists v \in V : \varphi(v) = v'$

Тогда рассмотрим  $\varphi(v - \sum_{j=1}^m \beta_j a_j) = v' - \sum_{j=1}^m \beta_j f_j = 0_{V'} \implies v - \sum_{j=1}^m \beta_j a_j \in \text{Ker} \varphi$   
 Выберем базис в  $\text{Ker} \varphi$  :  $\{b_1, \dots, b_r\} \implies$

$$v - \sum_{j=1}^m \beta_j a_j = \sum_{k=1}^r \gamma_k b_k \implies v = \sum_{j=1}^m \beta_j a_j + \sum_{k=1}^r \gamma_k b_k$$

Если взять  $v$  произвольным,  $v' = \varphi(v)$  – разлагается по базису  $f_1, \dots, f_m$  в  $\text{Im} \varphi$ , то предыдущие выкладки остаются в силе  $\implies \forall v \in V$  – линейная комбинация векторов  $\{a_j; b_k\}$ . Эти векторы ЛНЗ в  $V \implies$  базис в  $V \implies \dim V = m + r$ .  
 Допустим, что

$$\exists \beta_j, \gamma_j : \sum_{j=1}^m \beta_j a_j + \sum_{k=1}^r \gamma_k b_k = 0_V \implies \varphi\left(\sum_j + \sum_k\right) = \sum_{j=1}^m \beta_j f_j + 0 = 0_{V'} \implies$$

$$\gamma_j = 0, j = 1, \dots, m \implies \underbrace{\sum_{k=1}^r \gamma_k b_k}_{\text{ЛНЗ}} = 0 \implies \gamma_k = 0, k = 1, \dots, r. \quad \square$$

Пусть  $e = e_1, \dots, e_n$  – базис в  $V$ ,  $\forall v \in V : v = \sum_{j=1}^n x_j e_j \implies \varphi(v) = \sum_{j=1}^n x_j \varphi(e_j)$ .

Если в  $V'$  задан базис  $f = \{f_1, \dots, f_m\}$  и известно разложение векторов  $\varphi(e_j)$  по этому базису,  $\varphi(e_j) = \sum_{i=1}^m a_{ij} f_i$ , то можно вычислить  $\varphi(v)$ .

$A_{\varphi, e, f} = (a_{ij})$  – матрица линейного отображения  $\varphi$  в паре базисов  $e$  и  $f$ . Таким образом, столбцы матрицы  $A_\varphi$  – столбцы координат  $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_m)$  в базисе  $f$ .  
 Для  $\varphi : V \mapsto V$  по умолчанию  $f = e$  (второй базис равен первому), остается  $A_{\varphi, e}$  – матрица линейного оператора  $\varphi$  в базисе  $e$ .

$V \mapsto V^{**} = (V^*)^*$  – канонический изоморфизм.

$\langle f | v \rangle$  – значение функционала  $f$  на векторе  $v$

$\langle f |$  – bra-vector

$|v\rangle$  – ket-vector.

**Теорема.**

1. Если  $\dim V < \infty$ ,  $\varphi : V \mapsto V'$  – линейное отображение, то  $\dim \text{Im} \varphi = \dim V - \dim \text{Ker} \varphi$

2.  $\text{Im} \varphi \cong V / \text{Ker} \varphi$

*Доказательство.*

1. Пусть  $\dim \text{Im} \varphi = m \leq \dim V'$ , выберем в образе  $\text{Im} \varphi$  базис  $f_1, \dots, f_m$ .

$$\forall j, 1 \leq j \leq m, \exists e_j \in V : \varphi(e_j) = f_j.$$

$$\forall v \in V : v' = \varphi(v) = \sum_{j=1}^m \lambda_j f_j = \varphi\left(\underbrace{\sum_{j=1}^m \lambda_j e_j}_{v_1 \in V}\right) \implies \varphi(v - v_1) = 0, \text{ т.е. } v - v_1 \in \text{Ker} \varphi.$$

$$\text{Выберем в } \text{Ker} \varphi \text{ базис: } c_1, \dots, c_r \text{ (} r = \dim \text{Ker} \varphi \text{)} \implies v - v_1 = \sum_{k=1}^r \mu_k c_k \implies$$

$$v = \sum_{j=1}^m \lambda_j e_j + \sum_{k=1}^r \mu_k c_k \implies V = \langle e_1, \dots, e_m, c_1, \dots, c_r \rangle$$

$$e_1, \dots, e_m, c_1, \dots, c_r - \text{ЛНЗ, если: } \exists \varepsilon_j, \gamma_k \in F : \varphi\left(\sum_{j=1}^m \varepsilon_j e_j + \sum_{k=1}^r \gamma_k c_k\right) = 0_V \implies$$

$$\sum_{j=1}^m \underbrace{\varepsilon_j f_j}_{\text{ЛНЗ}} = 0_{V'} \implies \varepsilon_j = 0, 1 \leq j \leq m \implies \sum_{k=1}^r \underbrace{\gamma_k c_k}_{\text{ЛНЗ}} = 0 \implies \gamma_k = 0, 1 \leq k \leq r.$$

2. %Rem: Если  $U \subseteq V$ , то  $V/U = \bar{v} \equiv \{v + u \mid u \in U\} = v + U$  – факторпространство  $V$  по  $U$ , где  $\text{Ker} \varphi := U$

Рассмотрим отображение  $\pi : V/U \mapsto \text{Im} \varphi \subseteq V'$ ,  $\pi(\bar{v}) = \varphi(v)$ .

Корректность определения: если  $v_1 \in V : \bar{v}_1 = \bar{v}$ , то  $v_1 = v + u_1$ ,

$$\text{где } u_1 \in U = \text{Ker} \varphi \implies \varphi(v_1) = \varphi(v) + \underbrace{\varphi(u_1)}_{\equiv 0} \implies \pi(\bar{v}_1) = \pi(\bar{v})$$

$\pi$  – линейное отображение:

$$\pi(\overline{v_1 + v_2}) = \pi(\overline{v_1} + \overline{v_2}) = \varphi(v_1 + v_2) = \varphi(v_1) + \varphi(v_2) = \pi(\bar{v}_1) + \pi(\bar{v}_2), \forall v \in V, \lambda \in F.$$

$$\pi(\lambda \bar{v}) = \pi(\overline{\lambda v}) = \varphi(\lambda v) = \lambda \varphi(v) = \lambda \pi(\bar{v})$$

$\pi$  – биективное:

$$\text{Сюръективность: } \forall v' \in \text{Im} \varphi \exists v \in V : \varphi(v) = v' \implies \pi(\bar{v}) = \varphi(v) = v'.$$

$$\text{Инъективность: допустим, что } \pi(\bar{v}_1) = \pi(\bar{v}_2) \implies \varphi(v_1) = \varphi(v_2) \implies$$

$$v_2 - v_1 \in \text{Ker} \varphi \implies \exists u \in U = \text{Ker} \varphi : v_2 = v_1 + u \implies \bar{v}_2 = \bar{v}_1$$

□

### Матрицы линейного отображения $\varphi : V \mapsto V'$

$$\forall v = \sum_{j=1}^n x_j e_j. e = (e_1, \dots, e_n) - \text{базис в } V, f = (f_1, \dots, f_m) - \text{базис в } V',$$

$$(\dim V = n, \dim V' = m) \implies$$

$$\varphi(v) = \sum_{j=1}^n x_j \varphi(e_j) = \sum_{j=1}^n x_j \sum_{i=1}^m a_{ij} f_i = \sum_{i=1}^m \left( \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right) f_i \quad (1)$$

$$\text{Если } \varphi(e_j) = \sum_{i=1}^m a_{ij} f_i, (a_{ij}) = A_{\varphi, e, f}.$$

$$\text{Обозначение: } y = \varphi(v), v = e X_e^\uparrow \implies y = \varphi(v) = f Y_f^\uparrow = \sum_{i=1}^m y_i f_i.$$



$$(1) \implies Y_e^\uparrow = A_{\varphi,e,f} X_e^\uparrow \quad (2)$$

$\text{Ker}\varphi = \{v = eX_e^\uparrow | \varphi(v) = 0\}$ . Согласно формуле (2),  $v \in \text{Ker}\varphi \iff$

$A_{\varphi,e,f} X_e^\uparrow = 0$  – ОСЛУ с матрицей  $A_\varphi \implies \dim \text{Ker}\varphi = n - \text{rk} A_\varphi$

Но  $\text{Im}\varphi = \langle \varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n) \rangle$  – линейная оболочка столбцов матрицы  $A_\varphi \implies \dim \text{Im}\varphi = \text{rk} A_\varphi$ . Получили матричное доказательство формулы для  $\dim \text{Im}\varphi$ .

**Лемма.** Линейное отображение  $\varphi : V \mapsto V'$  инъективно  $\iff \text{Ker}\varphi = \{0\}$

(и  $\implies \varphi(V) \cong V$ )

*Доказательство.*

$\implies$ :  $\varphi$  – инъективно. Знаем, что  $\varphi(0_V) = 0_{V'}$ , а т.к.  $\varphi$  инъективно, то  $0_V$ , единственный вектор из  $V$ ,  $\mapsto 0_{V'} \implies \text{Ker}\varphi = \{0_V\}$ .

$\impliedby$ : Пусть  $\varphi(v_1) = \varphi(v_2) \implies \varphi(v_1 - v_2) = 0_{V'} \implies v_1 - v_2 \in \text{Ker}\varphi = \{0\} \implies v_1 = v_2$

□

**Задача:** Пусть  $\varphi : V \mapsto V'$ ,  $A_{\varphi,e,f}$  – матрица  $\varphi$ . При каких усл. на  $A_\varphi$ :

1.  $\varphi$  инъективно?

2.  $\varphi$  сюръективно?

3.  $\varphi$  биективно?

**Примеры:**

1.  $V = \mathbb{R}_n[x] = \{a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \mid a_i \in \mathbb{R}\}$  – пространство многочленов степени  $\leq n$ . Рассмотрим базис:  $1, \frac{x}{1!}, \dots, \frac{x^n}{n!}$

$$\frac{x^2}{2!} \mapsto \frac{x}{1!}; \quad \varphi(e_j) = e_{j-1}, \quad 1 \leq j \leq n.$$

$$\varphi = \frac{d}{dx}, \quad \frac{d}{dx} : V \mapsto V \quad (\text{либо } V' = \mathbb{R}_{n-1}[x])$$

$$\text{Ker}\varphi = \{\text{const}\}, \quad \text{Im}\varphi = \mathbb{R}_{n-1}[x]$$

$$A_{\varphi,e} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Жорданова клетка порядка  $n + 1$  с диагональным элементом  $\lambda = 0$ .

2. Пусть  $V = U_1 \oplus U_2$  – прямая сумма подпространств.

Определим  $\varphi : V \mapsto V$ ,  $\forall v = u_1 + u_2$ ,  $\varphi(v) = u_1$  – проектирование  $V$  на подпространство  $U_1 \parallel U_2$ .

$\varphi$  – линейный оператор.  $\text{Ker}\varphi = U_2$ ,  $\text{Im}\varphi = U_1$

Если  $\dim U_1 = k$ ,  $\dim U_2 = n - k$ .

Рассмотрим  $\underbrace{e_1, \dots, e_k}_{\text{базис } U_1}, \underbrace{e_{k+1}, \dots, e_n}_{\text{базис } U_2} \Rightarrow A_{\varphi, e} = \left( \begin{array}{c|c} E_k & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right)$

**Вычисление матрицы  $A_{\varphi, e, f}$ :**

$A_{\varphi} e_j^{\uparrow}$  –  $j$ -й столбец матрицы  $A_{\varphi}$  в базисе  $f$ , где  $1 \leq j \leq n$ .

**Рассмотрим задачу:** даны ЛНЗ векторы  $a_1, \dots, a_n$  в  $V$  и некоторые векторы  $b_1, \dots, b_n$  в  $V'$ . Найти матрицу линейного отображения  $\varphi : V \mapsto V'$  такого, чтобы  $\varphi(a_i) = b_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ .

По формуле,  $b_j^{\uparrow} = A_{\varphi} a_j^{\uparrow}$ ,  $1 \leq j \leq n \iff A_{\varphi}(a_1^{\uparrow}, \dots, a_n^{\uparrow}) = (b_1^{\uparrow}, \dots, b_n^{\uparrow})$

Уравнение вида:  $XA = B$ ,  $\det A \neq 0 \implies X = BA^{-1}$

$$\left( \begin{array}{c} A \\ B \end{array} \right) \underset{\text{столбцов}}{\overset{\text{Э.П.}}{\rightsquigarrow}} \left( \begin{array}{c} E \\ X \end{array} \right) \implies X = A_{\varphi, e, f}$$

$$(A^T | B^T) \underset{\text{строк}}{\overset{\text{Э.П.}}{\rightsquigarrow}} (E | X^T)$$

**Изменение матрицы линейного отображения (оператора) при замене базисов:**

Пусть  $e, e' : e' = eC_{e \rightarrow e'}$  в  $V$  и  $f, f' : f' = fD_{f \rightarrow f'}$  в  $V'$ .

Но  $X_{e'} : X_e = C_{e \rightarrow e'} X_{e'}$  (3)

$Y_{f'} : Y_f = D_{f \rightarrow f'} Y_{f'}$  (3')

$$D_{f \rightarrow f'} Y_{f'} = A_{\varphi, e, f} C_{e \rightarrow e'} X_{e'}$$

$$Y_{f'} = (D^{-1} A_{\varphi} C) X_{e'} \quad (*)$$

(\*) Сравним это с формулой:

$$Y_{f'} = A_{\varphi, e', f'}, \forall X \in F^n, Y \in F^m \implies A_{\varphi, e', f'} = D_{f \rightarrow f'}^{-1} A_{\varphi, e, f} C_{e \rightarrow e'}$$

В качестве  $X$  по очереди взять столбцы  $E_n$ , в качестве  $Y$  – столбцы  $E_m$ .

Если  $\varphi : V \mapsto V$  – линейный оператор,  $e, e'$  – базисы,  $C = C_{e \rightarrow e'}$ , то  $a_{\varphi, e'} = C^{-1} A_{\varphi, e} C$  (\*)

Термин: Две матрицы называются *подобными*, если

$$\exists C : A' = C^{-1} A C \quad (\det C \neq 0)$$

**Утверждение.** Если  $A$  и  $A'$  подобные, то  $|A'| = |A|$  и  $rk A' = rk A$ .

$$(*) \iff CA' = AC. \text{ Составим матрицу } (C|AC) \underset{\text{строк}}{\overset{\text{Э.П.}}{\rightsquigarrow}} (E|A').$$

## §2. Действия над линейными отображениями и операторами.

$\varphi, \psi : V \mapsto V'$  – линейное.

$$\forall v \in V \quad (\varphi + \psi)(v) := \varphi(v) + \psi(v)$$

$$\forall \lambda \in F \quad (\lambda\varphi)(v) := \lambda\varphi(v)$$

**Утверждение.**

1.  $\mathcal{L}(V, V')$  является векторным пространством над  $F$

2. Если  $\dim V = n$ ,  $\dim V' = m$ , то  $\mathcal{L}(V, V') \cong M_{m \times n}(F)$

*Доказательство.* 1. "Очевидно".

2. Если фиксировать базисы  $e$  в  $V$ ,  $f$  в  $V'$ , то  $\forall \varphi \longleftrightarrow A_{\varphi, e, f}$ , причем:

$$A_{\varphi + \psi} = A_{\varphi} + A_{\psi}, \quad A_{\lambda\varphi} = \lambda A_{\varphi}$$

Если  $X$  – столбец координат вектора  $v$ ,  $v' = \varphi(v)$ ,  $Y$  – столбец координат  $v'$ .

$$Y = A_{\varphi}X,$$

$\tilde{Y}$  – столбец координат вектора  $\psi(v)$ , то  $\tilde{Y} = A_{\psi}X$ ,  $(\varphi + \psi)(v) =$

$$\varphi(v) + \psi(v) \implies \varphi(v) + \psi(v) \text{ имеет столбец координат } Y + \tilde{Y} = A_{\varphi}X + A_{\psi}X = (A_{\varphi} + A_{\psi})X = A_{\varphi + \psi}X \implies \varphi \mapsto A_{\varphi, e, f} \text{ – изоморфизм } (\dim \mathcal{L}(V, V') = n \cdot m)$$

□

**Умножение (композиция) линейных отображений (операторов):**

Пусть  $V \xrightarrow{\psi} V' \xrightarrow{\varphi} V''$

**Утверждение.** Если  $\varphi, \psi$  – линейные, то  $\varphi \cdot \psi$  – линейное

В частности, для линейных операторов:  $\varphi \cdot \psi$  – линейный оператор в этом же пространстве.

Обозначим:  $\mathcal{L}(V)$  – множество всех линейных операторов на  $V$ .

**Теорема.** С операциями  $+$ ,  $\lambda \cdot$ , и  $\cdot$   $\mathcal{L}(V)$  является [линейной] алгеброй; если  $\dim V = n$ , то  $\mathcal{L}(V) \cong M_n(F)$

( $A$  – линейная алгебра, если на  $A$  заданы операции  $+$ ,  $\cdot$ ,  $\lambda \cdot$ , такие что

1.  $A_+$  – кольцо ассоциативное

2.  $A_{+, \lambda, \cdot}$  – векторное пространство

3.  $\lambda(ab) = (\lambda a)b, \forall \lambda \in F, a, b \in A.$ )

*Доказательство.* 1, 2 уже проверены.

3.  $\forall v \in V, (\lambda(ab))(v) = \lambda((ab)(v)) = \lambda a(b(v)) = (\lambda a)(b(v)) \implies \lambda(ab) = (\lambda a)b$ , для  $a, b \in \mathcal{L}(V)$ . □

**Геометрическое доказательство неравенства**  $rk(AB) \leq \begin{cases} rkA \\ rkB \end{cases}$

(для любых матриц  $A, B$ , т.ч.  $\exists AB$ ).

*Доказательство.* Если  $A_{m \times n}$ ,  $B_{n \times p}$ , то  $\mathbb{R}^p \xrightarrow{B} \mathbb{R}^n \xrightarrow{A} \mathbb{R}^m$

$$rk(AB) = \dim(AB(\mathbb{R}^p)) \leq \dim B(\mathbb{R}^p)$$

$$A(\mathbb{R}^n) \supseteq (AB)(\mathbb{R}^p) \implies rk(AB) = \dim \text{Im}(AB) \leq \dim \text{Im} A = rkA.$$

Случай равенства. Если  $|A| \neq 0$ , то  $A$  задает изоморфизм между  $\mathbb{R}^n$  и  $\mathbb{R}^m \implies \dim B(\mathbb{R}^p) = \dim(AB(\mathbb{R}^p))$ , т.е.  $rkB = rkAB$

□

### Многочлены от линейного оператора:

Пусть  $p(t) = a_0 t^m + a_1 t_{m-1} + \dots + a_{m-1} t + a_m$ ,  $\forall a_i \in F$ ,  $i = 0, \dots, m$ .

Тогда  $p(\varphi) = a_0 \varphi^m + a_1 \varphi^{m-1} + \dots + a_{m-1} \varphi + a_m \varepsilon$

$\varepsilon(v) = v, \forall v \in V$  – тождественный оператор.

Многочлен  $p(t)$  – *аннулирующий многочлен оператора*  $\varphi$ , если  $p(\varphi) = 0$  (нулевой оператор).

**Теорема.** Для любого оператора  $\varphi : V_n \longrightarrow V_n$  существует аннулирующий многочлен степени  $\leq n^2 - 1$ .

*Доказательство.* Т.к.  $\dim \mathcal{L}(V) = n^2$ , то операторы,  $\varphi^0 = \varepsilon, \varphi, \varphi^2, \dots, \varphi^{n^2}$  – ЛЗ.  $\implies \exists a_0, a_1, \dots, a_{n^2} \in F$ ,  $a_0 \varepsilon + a_1 \varphi + \dots + a_{n^2} \varphi^{n^2} = 0 \implies p(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_{n^2} t^{n^2}$  – аннулирующий для  $\varphi$ .

□

## §3. Инвариантные пространства.

Пусть  $\varphi : V \longrightarrow V$  – линейный оператор.

**Определение.** Подпространство  $U \subseteq V$  называется *инвариантным* относительно  $\varphi$  (или для  $\varphi$ , или  $\varphi$ -инвариантным), если  $\forall u \in U \implies \varphi(u) \in U$ , т.е.  $\varphi(U) \subseteq U$ .

**Определение.** Ограничение (сужение) оператора  $\varphi$  на инвариантное подпространство  $U$  – это оператор.

Обозначение:  $\varphi|_U : U \longrightarrow U$ , а именно,  $\forall u \in U : \varphi|_U(u) := \varphi(u)$

### Примеры:

1.  $\varphi = \frac{d}{dx} : \mathbb{R}[x] \mapsto \mathbb{R}[x], \quad p(x) \mapsto p'(x)$

Для  $\forall n = 0, 1, \dots, \mathbb{R}_n[x] = \{p(x) | \deg p(x) \leq n\}$  являются инвариантными подпространствами

Вопрос: есть ли другие инвариантные подпространства?

2.  $\varphi$  – проектирование (проектор)  $V \mapsto V = U_1 \oplus U_2$

$$\varphi(u_1 + u_2) = u_1 \text{ на } U_1 \text{ вдоль } U_2.$$

Инвариантные:  $U_1, U_2$ , а также  $U'_1 \oplus U'_2$ , для  $\forall U'_1 \subseteq U_1, U'_2 \subseteq U_2$ .

**Теорема.** Если  $\varphi : V \mapsto V$ , то  $\varphi$ -инвариантными являются:

- $\text{Ker} \varphi$
- $\text{Im} \varphi$
- Любое пространство  $U$ :  $\text{Im} \varphi \subseteq U \subseteq V$
- $\forall k = 1, 2, \dots, \text{Ker} \varphi^k$
- $\text{Im} \varphi^k$

**Теорема.** Если  $U_1, \dots, U_k$  –  $\varphi$ -инвариантные, то  $\varphi$ -инвариантные:

- $U_1 + \dots + U_k$
- $U_1 \cap \dots \cap U_k$

*Доказательство.*

- $\forall v = u_1 + \dots + u_k \implies \varphi(v) = \varphi(u_1) + \dots + \varphi(u_k) \in U_1 + \dots + U_k$
- $\forall w \in U_i, i = 1, \dots, k \implies \varphi(w) \in U_i, i = 1, \dots, k \implies \varphi(w) \in \bigcap_{i=1}^k U_i$

□

**Лемма.** (Вид матрицы  $A_\varphi$  при наличии инвариантов подпространства)

1. Пусть  $U_1$  –  $\varphi$ -инвариантное пространство,  $\{0\} \neq U_1 \neq V$ .

Тогда в  $V$   $\exists$  базис, в котором

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} B & D \\ 0 & C \end{pmatrix}_{\substack{m \times m & (n-m) \times (n-m) \\ m \times m & (n-m) \times (n-m)}}, \text{ причем } B = A_{\varphi|_{U_1}}, \dim U_1 = m$$

2. Пусть  $V = U_1 \oplus U_2$ , причем  $U_1, U_2$  – ненулевые инвариантные подпространства, тогда в  $V$   $\exists$  базис, в котором

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}, \text{ причем } C = A_{\varphi|U_2}$$

*Доказательство.*

1. Надо взять  $e_1, \dots, e_m$  – базис в  $U_1$ , дополнить его произвольно до базиса в  $V$ . Тогда для  $j = 1, \dots, m$ ,  $\varphi(e_j) \in U_1$ ,  $\varphi(e_j) = \sum_{i=1}^m b_{ij} e_i$
2. Если базис  $e_1, \dots, e_m$  пространства  $U_1$  объединить с базисом  $e_{m+1}, \dots, e_n$  пространства  $U_2$ , то в полученном базисе  $A_\varphi = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$

□

**Утверждение.** Верное и обратное

#### §4. Собственные векторы и собственные значения линейных операторов.

**Теорема.** Пусть  $\varphi : U \rightarrow U$  – линейный оператор,  $U \supseteq \text{Im} \varphi \implies \varphi(U) \subseteq U$

*Доказательство.*  $\forall u \in U, \varphi(u) \in \text{Im} \varphi \subseteq U \implies \varphi(u) \in U, \forall u \in U$  □

**Определение.** Вектор  $x \in V$  называется *собственным вектором* оператора  $\varphi$ , если  $x \neq 0$  и  $\exists \lambda \in F : \varphi(x) = \lambda x$  (1). Это  $\lambda$  называется *собственным значением* оператора  $\varphi$  ( $x$  – собственный вектор с собственным значением  $\lambda$ ).

Для данного собственного значения  $\lambda \in F$  обозначается

$$V_\lambda = \{x \in V \mid \varphi(x) = \lambda x\} \quad (2)$$

(Множество собственных векторов с добавленным 0).  $V_\lambda$  – подпространство в  $V$ .

**Определение.**  $V_\lambda$  называется *собственным подпространством* оператора  $\varphi$ , отвечающим собственному значению  $\lambda$ .

**Утверждение.** 1.  $V_\lambda = \text{Ker}(\varphi - \lambda \varepsilon)$ , ( $\varepsilon$  – тождественный оператор).

2.  $V_\lambda$  –  $\varphi$ -инвариантное подпространство.

*Доказательство.* 1.  $v \in \text{Ker}(\varphi - \lambda \varepsilon) \iff \varphi(v) = \lambda v \iff v \in V_\lambda$ .

2. Возьмем  $x \in V_\lambda \implies \varphi(x) = \lambda x \in V_\lambda$  □

**Замечание:** если  $\varphi(x) = \lambda x$  ( $x \neq 0$ ),  $\varphi^2(x) = \lambda^2 x, \dots, \varphi^m(x) = \lambda^m x \implies$  для любого многочлена  $p(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n$  ( $a_i \in F$ ),  $p(\varphi)(x) = p(\lambda)x$ . В частности, если  $p(t)$  – аннулирующий многочлен для  $\varphi$ , т.е.  $p(\varphi) = 0$ , то  $p(\lambda) = 0$ .

### Примеры:

1.  $\varphi = \frac{d}{dx} \cdot V = C^\infty(\mathbb{R})$ ,  $\forall f(x) \mapsto f'(x)$ . Возьмем  $f(x) = e^{\lambda x} \implies (e^{\lambda x})' = \lambda e^{\lambda x}$ , т.е.  $e^{\lambda x}$  – собственная функция для  $\varphi$ . Для  $\forall \lambda \in \mathbb{R} \exists!$  функция  $f(x) : f'(x) = \lambda f(x)$

Пусть  $f(x)$  – та функция, рассмотрим  $g(x) = f(x)e^{-\lambda x}$ ,

$$g'(x) = f'(x)e^{-\lambda x} - \lambda f(x)e^{-\lambda x} = \lambda f(x)e^{-\lambda x} - \lambda f(x)e^{-\lambda x} = 0 \text{ на } \mathbb{R} \implies g(x) \equiv C \\ \implies f(x) = Ce^{\lambda x} (\forall C \neq 0) \implies \dim V_\lambda = 1.$$

**Теорема.** Пусть  $x_1, \dots, x_m \in V$  – собственные для  $\varphi$  с попарно различными собственными значениями  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ . Тогда  $x_1, \dots, x_m$  ЛНЗ.

*Доказательство.* Индукция по  $m$ :

База:  $m = 1$  – по определению сам себе ЛНЗ.

Шаг: пусть  $m > 1$  и векторы в количестве  $(m - 1)$  ЛНЗ:

$$\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_{m-1} x_{m-1} + \alpha_m x_m = 0 \quad (\text{I}).$$

$$\text{Подставим на равенство I оператором } \varphi : \alpha_1 \varphi(x_1) + \dots + \alpha_m \varphi(x_m) = 0 \iff \\ \alpha_1 \lambda_1 x_1 + \dots + \alpha_{m-1} \lambda_{m-1} x_{m-1} + \alpha_m \lambda_m x_m = 0 \quad (\text{II}).$$

Вычтем из II равенство I, умноженное на  $\lambda_m$ :

$$\alpha_1 (\lambda_1 - \lambda_m) x_1 + \dots + \alpha_{m-1} (\lambda_{m-1} - \lambda_m) x_{m-1} = 0. \text{ По предположению индукции } \\ \alpha_i (\lambda_i - \lambda_m) = 0, \forall i = 1, \dots, m-1 \implies \alpha_i = 0 \implies \alpha_m = 0$$

□

**Следствие.** Допустим, что  $\dim V = n$  и  $\varphi$  имеет  $n$  различных собственных значений  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ , тогда отвечающие им собственные векторы оператора  $\varphi$  образуют базис в  $V$  [собственный базис].

Обратим внимание, что в этом базисе  $e_1, \dots, e_n$  матрица  $A_\varphi$  – диагональная:

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Причем  $\varphi(e_j) = \lambda_j e_j \implies$  в координатах это значит, что

$$A_\varphi \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \lambda_j \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \implies A_\varphi = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & & \\ & \lambda_2 & \ddots & \\ & & \ddots & 0 \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

**Следствие.** Пусть  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  – попарно различные собственные значения оператора  $\varphi$ , тогда сумма  $V_{\lambda_1} + \dots + V_{\lambda_m} = V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_m}$

**Вычисление собственных значений и собственных векторов с помощью  $A_\varphi$ :**

Пусть  $\dim V = n$ ,  $e = (e_1, \dots, e_n)$  – некоторый базис в  $V$ ,  $A_{\varphi, e}$  – матрица оператора  $\varphi$ .

По определению:  $\varphi(x) = \lambda x$ ,  $x \neq 0$ .

В координатах:  $A_\varphi X = \lambda X \iff (A_\varphi - \lambda E)X = 0$  (3),  $X \neq 0$ .

Для того чтобы система (3) имела хотя бы одно ненулевое решение, необходимо, чтобы  $\det(A_\varphi - \lambda E) = 0$  (4)

$\lambda$  – корень характеристического уравнения (4). (Собственными значениями будут только корни  $\lambda \in F$ ).

$$\begin{aligned} \text{Раскроем } \det(A_\varphi - \lambda E) &= \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = \\ &= (a_{11} - \lambda) \cdot \dots \cdot (a_{nn} - \lambda) + (\text{слагаемые степени } \leq n-1 \text{ по } \lambda) = \\ &= (-\lambda)^n + \sum_{i=1}^n a_{ii}(-\lambda)^{n-1} + \dots + |A| \end{aligned}$$

Термин:  $\det(A_\varphi - \lambda E)$  – характеристический многочлен матрицы  $A_\varphi$ .

**Лемма.** Характеристический многочлен матрицы  $A_\varphi$  не зависит от выбора базиса.

*Доказательство.* Пусть  $e' = eC$  – новый базис, тогда матрица

$$A_{\varphi, e'} = C^{-1}A_{\varphi, e}C \implies |A_{\varphi, e'} - \lambda E| = |C^{-1}A_\varphi C - \lambda(C^{-1}C)| = |C^{-1}(A_\varphi - \lambda E)C| = |C^{-1}||A_\varphi - \lambda E||C| = |A_\varphi - \lambda E|$$

□

**Определение.**  $\chi_\varphi(\lambda) = |A_\varphi - \lambda E|$  – характеристический многочлен (в любом базисе) оператора  $\varphi$ .



## §5. Диагонализируемость линейных операторов.

Пусть  $\varphi : V \mapsto V$  – линейный оператор,  $\dim V = n$ .

**Определение.** Скажем, что матрица оператора  $\varphi$  диагонализуема, если  $\exists$  базис  $e$  в  $V$ , в котором  $A_\varphi$  диагональна.

$$A_{\varphi,e} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

Термины: для характеристического корня  $\lambda \in F$ :

1. геометрическая кратность  $\lambda$ ,  $\text{гкм}(\lambda) = \dim V_\lambda$ ,
2. алгебраическая кратность  $\lambda$  – это его кратность как корня характеристического многочлена ( $\text{алкр}(\lambda)$ ).

**Лемма.**  $\dim V_\lambda \leq \text{алкр}(\lambda)$

*Доказательство.* Пусть  $\dim V_\lambda = m$ ,  $\text{алкр}(\lambda) = k$ , нужно доказать, что  $m \leq k$

Выберем базис в  $V_\lambda$  :  $e_1, \dots, e_m$  и дополним его до базиса в  $V$ , векторами  $e_{m+1}, \dots, e_n$

В этом базисе:

$$A_{\varphi,e} = \left( \begin{array}{cccc|c} \lambda & 0 & \dots & 0 & \overbrace{\hspace{1cm}}^{n-m} \\ 0 & \lambda & \dots & 0 & B \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ 0 & 0 & \dots & \lambda & \\ \hline 0 & \dots & \dots & 0 & \\ \vdots & & & \vdots & C \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \end{array} \right) \Rightarrow$$

$$|A_\varphi - tE| = \left| \begin{array}{ccc|c} \lambda - t & & & 0 \\ & \ddots & & \\ 0 & & \lambda - t & \\ \hline & & 0 & \\ & & & C - tE \end{array} \right| = (\lambda - t)^m \cdot |C - tE| = 0$$

$\lambda$  может быть корнем  $|C - tE| \Rightarrow \text{алкр}(\lambda) \geq m$

□

**Замечание.**  $\dim V_{\lambda_j} = n - \text{rk}(A_\varphi - \lambda_j E)$ .

**Теорема.** (критерий диагонализируемости)

Для оператора  $\varphi : V \longrightarrow V$  следующие условия равносильны:

1.  $A_\varphi$  диагональна в некотором базисе.
2. В  $V \exists$  базис из собственных векторов оператора  $\varphi$  (собственный базис).
3.  $\chi_\varphi(\lambda) = \det(A_\varphi - \lambda E) = (\lambda_1 - \lambda)^{k_1} \cdot \dots \cdot (\lambda_s - \lambda)^{k_s}$  Все характеристические корни  $\lambda_i \in F$ , и для  $\forall i$ ,  $\underbrace{\dim V_{\lambda_i}}_{\text{кр } \lambda_i} = \underbrace{k_i}_{\text{alg}(\lambda_i)}$
4.  $V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_s} = V$

*Доказательство.* 1.  $\implies$  2.

Если  $A_{\varphi, e} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ , то координаты вектора

$$\varphi(e_i) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \lambda_i \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_i \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ т.е. } \varphi(e_i) = \lambda_i e_i$$

2.  $\implies$  1.

Если  $e$  – собственный базис для  $\varphi$ ,  $\varphi(e_i) = \lambda_i e_i$ , то  $i$ -й столбец матрицы  $A_{\varphi, e}$

равен  $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \lambda_i \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ , матрица составленная из этих столбцов, и есть  $\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

1. и 2.  $\iff$  3.

Пусть в базисе  $e$  матрица  $A_\varphi$  диагональна.

Занумеруем векторы следующим образом:

$\underbrace{e_1, \dots, e_{p_1}}_{\lambda_1}, \underbrace{e_{p_1+1}, \dots, e_{p_1+p_2}}_{\lambda_2}, \dots$  и т.д.

Ясно, что  $e_1, \dots, e_{p_1} \in V_{\lambda_1}$ ,  $e_{p_1+1}, \dots, e_{p_1+p_2} \in V_{\lambda_2} \implies \dim V_{\lambda_i} \geq p_i$ .

По построению,  $\sum_{i=1}^s p_i = n = \sum_{i=1}^s k_i \implies \sum_{i=1}^s (p_i - k_i) = 0 \implies$  все  $p_i = k_i$

Обратно: пусть  $\forall i$ ,  $p_i = \dim V_{\lambda_i} = k_i$  (\*).

Возьмем базисы в собственных подпространствах, объединим их  $\implies$  получим

всего  $\sum_{i=1}^s p_i = \sum_{i=1}^s k_i = n = \dim V$ .

Остается понять, что все эти векторы ЛНЗ. Это следует из теоремы: если векторы  $x_1, \dots, x_s$  отвечают попарно различным собственным значениям, то они ЛНЗ.

В линейных комбинации собственных векторов  $\underbrace{\alpha_{11}e_1 + \dots + \alpha_{1p_1}e_{p_1}}_{x_1} + \dots + \underbrace{\alpha_{s1}e_1 + \dots + \alpha_{sp_s}e_{p_s}}_{x_s} = 0$   
 $x_1 + x_2 + \dots + x_s = 0$ , что в силу ЛНЗ  $\implies x_1 = \dots = x_s = 0$ , но  $x_i$  – линейная комбинация базисных векторов из  $V_{\lambda_i} \implies$  все  $\alpha_{ij} = 0$

На самом деле установили, что 4.  $\iff$  3.

Рассуждение (\*) показывает, что базис в  $V_{\lambda_1} + \dots + V_{\lambda_s}$  – базис в  $V$ .

Кроме того, этот базис – собственный, так что 4.  $\implies$  2.

□

### Примеры применения диагонализируемости:

1. Для решения системы  $AX = b$ ,  $A$  – квадратная матрица.

Пусть известно, что матрица  $C$ , такая что  $A' = C^{-1}AC = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$

Сделаем замену переменных:  $X = CY$ .

Тогда  $(AC)Y = b \iff (C^{-1}AC)Y = C^{-1}b = b'$

Система равносильна системе:

$$\begin{cases} \lambda_1 y_1 = b'_1, \\ \dots\dots\dots, \\ \lambda_n y_n = b'_n \end{cases}, \text{ если } |A| = \lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_n \neq 0, \text{ то } Y = \begin{pmatrix} \frac{b'_1}{\lambda_1} \\ \vdots \\ \frac{b'_n}{\lambda_n} \end{pmatrix}, X = CY.$$

2. Матрицу  $A$  порядка  $n$  возвести в степень  $m \in \mathbb{N}$ , если известно, что  $C^{-1}AC = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = A' \implies A = CA'C^{-1} \implies$

$$A^m = \underbrace{(CA'C^{-1}) \cdot \dots \cdot (CA'C^{-1})}_m = C(A')^m C^{-1} = C \begin{pmatrix} \lambda_1^m & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^m \end{pmatrix} C^{-1}$$

## §6. Аннулирующие многочлены линейного оператора. Теорема Гамильтона-Кели. Минимальный многочлен.

Многочлен  $p(t) = a_0 + a_1t + \dots + a_mt^m \in F[t]$  – аннулирующий многочлен для  $\varphi$ , если  $p(\varphi) = a_0\varepsilon + a_1\varphi + \dots + a_m\varphi^m = 0$ .

Было доказано, что  $\exists$  аннулирующий многочлен степени  $\leq n^2$  ( $n = \dim V$ ).

**Замечание.** Пусть  $x$  – собственный вектор для  $\varphi$ :  $\varphi(x) = \lambda x$ ,  $p(t)$  – аннулирующий многочлен для  $\varphi$ , тогда  $p(\lambda) = 0$

В самом деле,  $\forall k = 1, 2, \dots \quad \varphi^k(x) = \lambda^k x \implies p(\varphi)(x) = a_0x + a_1\lambda x + \dots + a_m\lambda^m x = p(\lambda)x$ , т.к.  $x \neq 0 \implies p(\lambda) = 0$

$\mu(t)$  – минимальный многочлен для  $\varphi$ , если  $\mu(\varphi) = 0$  и  $\deg \mu(t)$  минимальная среди степеней всех аннулирующих многочленов.

**Утверждение.** 1. Любой аннулирующий  $p(t)$  делится на минимальный  $\mu(t)$   
2.  $\mu(t)$  единственен, если потребовать, чтобы старший коэффициент  $\mu(t)$  был равен 1.

*Доказательство.*

1.  $p(t) = \mu(t)q(t) + r(t) \implies \overbrace{p(\varphi)}^0 = \overbrace{\mu(\varphi)}^0 q(\varphi) + r(\varphi) \implies r(\varphi) = 0$ , но  $\deg r < \deg \mu \implies r = 0$

2. Если  $\mu'(t)$  – еще один минимальный многочлен, то  $\mu(t)|\mu'(t)$  и  $\mu'(t)|\mu(t)$  (по пункту 1)  $\implies \mu' = \alpha\mu$ ,  $\alpha \neq 0, \alpha \in F$ . По условию старший коэффициент равен 1  $\implies \alpha = 1$

□

### Многочленная матрица

$$\begin{pmatrix} a_{11}(\lambda) & \dots & a_{1n}(\lambda) \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(\lambda) & \dots & a_{nn}(\lambda) \end{pmatrix}$$

Ее можно представить в виде матричного многочлена.

$(a_{ij}(\lambda))$  – многочлены от  $\lambda$ .

**Теорема Гамильтона-Кэли.** Для любого линейного оператора  $\chi_\varphi(\varphi) = 0$ .  
Равносильно: Если  $\chi_\varphi(\lambda) = \det(A_\varphi - \lambda E)$ , то  $\chi_\varphi(A_\varphi) = 0$ .

*Доказательство.* Пусть  $A = A_\varphi$ . Рассмотрим характеристический многочлен  $\chi_A(\lambda) = \sum_{i=0}^n p_i \lambda^i$ ,  $p_i \in F \implies \chi_A(A) = \sum_{i=0}^n p_i A^i$ , ( $A^0 \equiv E$ )

Составим присоединенную матрицу для  $(A - \lambda E)$  :  
 $D(\lambda) = (d_{ji}(\lambda))$  такой что  $d_{ji} = A_{ij}(A - \lambda E)$

$$(A - \lambda E)D(\lambda) = \begin{pmatrix} |A - \lambda E| & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & |A - \lambda E| \end{pmatrix} = \chi_\varphi(A)E$$

$D(\lambda)$  – многочлены степени  $\leq (n - 1)$

Обозначим:  $D(\lambda) = \sum_{i=0}^{n-1} D_i \lambda^i$ ,  $D_i$  – числовые матрицы.

$$\begin{aligned} \text{Имеем } \chi_A(\lambda)E &= (A - \lambda E) \sum_{i=0}^{n-1} D_i \lambda^i = \sum_{i=0}^{n-1} A D_i \lambda^i - \sum_{i=0}^{n-1} D_i \lambda^{i+1} = \\ &= A D_0 + \sum_{i=1}^{n-1} (A D_i - D_{i-1}) \lambda^i - D_{n-1} \lambda^n \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda^0 : P_0 E = A D_0 \\ \lambda^1 : P_1 E = A D_1 - D_0 \\ \vdots \\ \lambda^i : P_i E = A D_i - D_{i-1} \\ \vdots \\ \lambda^{n-1} : P_{n-1} E = A D_{n-1} - D_{n-2} \\ \lambda^n : P_n E = -D_{n-1} \end{array} \right. \begin{array}{l} \times E \\ \times A \\ \\ \times A^i \\ \\ \times A^{n-1} \\ \times A^n \end{array} + \longrightarrow \chi_A(A) = 0$$

□

**Утверждение.** Если  $\lambda$  – собственное значение оператора  $\varphi$ ,  $p(t)$  – аннулирующий многочлен для  $\varphi$ , то  $p(\lambda) = 0$ . В частности, все корни характеристического многочлена являются корнями минимального аннулирующего многочлена.

Пусть  $v$  – собственный для  $\varphi$  :  $\varphi(v) = \lambda v \implies \varphi^k(v) = \lambda^k v \implies p(\varphi)(v) = p(\lambda)v = 0$ ,  $v \neq 0 \implies p(\lambda) = 0$ .

## §7. Жорданова нормальная форма матрицы линейного оператора.

Жорданова клетка порядка  $k$  с собственным значением  $\lambda_0 \in F$

$$J_K(\lambda_0) = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_0 \end{pmatrix}$$

Пусть в базисе  $e_1, \dots, e_k$ ,  $k$ -мерного пространства:

$$A_\varphi = J_k(\lambda_0) \implies |A_\varphi - tE| = (\lambda_0 - t)^k,$$

$\varphi$  имеет единственный вид с точностью до пропорциональности собственного вектора  $e_1$  :

$$(A_\varphi - \lambda_0 E)X = 0 \iff \begin{cases} x_1 - \text{любой} \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ \dots \\ x_k = 0 \end{cases} \implies v = \alpha e_1, \alpha \neq 0$$

Кроме того:

$$\begin{cases} \varphi(e_1) = \lambda_0 e_1, \\ \varphi(e_2) = e_1 + \lambda_0 e_2, \\ \dots \\ \varphi(e_i) = e_{i-1} + \lambda_0 e_i, \end{cases} \iff \begin{cases} Be_1 = 0, \\ Be_2 = e_1, \\ \dots, \\ Be_i = e_{i-1}, (i = 1, \dots, k), \end{cases}$$

где  $B = J_k(\lambda_0) - \lambda_0 E = J_k(0)$

$Be_k = e_{k-1} (*)$

$\{e_k, Be_k, B^2 e_k, \dots, B^{k-1} e_k\}$  – жорданова цепочка длины  $k$ .

**Лемма.** Пусть для некоторого вектора  $v \neq 0$  построена цепочка длины  $k$  :  
 $v, Bv, \dots, B^{k-1}v \neq 0, B^k v = 0$ . Тогда векторы  $\{v, Bv, \dots, B^{k-1}v\}$  ЛНЗ.

*Доказательство.* Рассмотрим  $\alpha_1 v + \alpha_2 Bv + \dots + \alpha_k B^{k-1}v = 0$  и докажем, что все  $\alpha_i = 0$ .

$$B^{k-1} \cdot | \implies \alpha_1 \underbrace{B^{k-1}v}_{\neq 0} + \alpha_2 B^k v + \dots = 0 \implies \alpha_1 = 0$$

На оставшееся равенство подействуем,  $B^{k-2} : \alpha_2 B^{k-1}v + \underbrace{\dots}_0 = 0 \implies \alpha_2 = 0$  и

т.д. □

Терминология: в (\*) вектор  $e_2$  - присоединенный к  $e_1$  (1-й присоединенный),  $e_3$  - присоединенный к  $e_2$  и т.д.

**Определение.**  $\langle v, Bv, \dots, B^{k-1}v \rangle = Z_k(v)$  - циклическое подпространство размерности  $k$ , порожденное вектором  $v$ . (В этой цепочке вектор  $B^{k-1}v \neq 0$  - собственный для  $B$ )

**Упражнение.** Для жордановой клетки характеристическая и минимальная матрицы совпадают. Для каких еще матриц они совпадают?

### Жорданова матрица

$$J = \begin{pmatrix} \overline{J_{k_1}(\lambda_1)} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \overline{J_{k_p}(\lambda_p)} \end{pmatrix} - \text{клеточно-диагональная матрица}$$

$$k_1 + \dots + k_p = n$$

$$\chi(J) = \prod_{i=1}^p \chi(J_{k_i}) = (\lambda_1 - t)^{k_1} \cdot \dots \cdot (\lambda_p - t)^{k_p} \text{ (некоторые } \lambda_i \text{ могут совпадать)}.$$

$J = A_\varphi$  в базисе, составленном из жордановых цепочек для каждой жордановой клетки.

**Теорема Жордана.** Пусть все характеристические корни линейного оператора  $\varphi : V \mapsto V$  над полем  $F$  ( $\dim V = n$ ) принадлежат  $F$ . Тогда:

1.  $V = \bigoplus_{i=1}^p Z_i$  - прямая сумма циклических подпространств.
2. В  $V$  существует базис (Жорданов базис), в котором

$$A_\varphi = J = \begin{pmatrix} J_{k_1}(\lambda_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_{k_p}(\lambda_p) \end{pmatrix}$$

Т.е. для любой  $A_{n \times n} \exists$  невырожденная матрица  $C : C^{-1}AC = J, AC = CJ$

### Корневые подпространства

Пусть  $\varphi : V \mapsto V$ ,  $\lambda$  - собственное значение для  $\varphi$ .

**Определение.** Вектор  $v \in V$  -  $\lambda$ -корневой для  $\varphi$ , если  $\exists m \in \mathbb{N} :$

$(\varphi - \lambda \varepsilon)^m(v) = 0$ . Наименьшее такое значение  $h$  называется *высотой вектора*  $v$ , т.е.  $(\varphi - \lambda \varepsilon)^{h-1}v \neq 0, (\varphi - \lambda \varepsilon)^h v = 0$ . Тогда  $v$  порождает жорданову цепочку длины  $h$ :  $\{v, (\varphi - \lambda \varepsilon)v, \dots, (\varphi - \lambda \varepsilon)^{h-1}v\}$ .

**Утверждение.**  $\{v \in V : v - \text{корневой для данного } \lambda\}$  – подпространство в  $V$ .

*Доказательство.* 0 является корневым.  $B = \varphi - \lambda\varepsilon$

Если  $v_1 : B^{m_1}v_1 = 0$ ;  $v_2 : B^{m_2}v_2 = 0$ , то  $B^{\max(m_1, m_2)}(v_1 + v_2) = 0$ .

$\forall \lambda \in F, B^m v = 0 \implies B^m(\lambda v) = \lambda B^m v = 0$  – доказано.

Это подпространство корневое подпространство, отвечающее собственному значению  $\lambda$ , обозначим:  $V^{(\lambda)} = \mathcal{K}_\lambda$ .  $\square$

**Теорема.** Пусть  $\chi_\varphi = (\lambda_1 - t)^{k_1} \cdot \dots \cdot (\lambda_s - t)^{k_s}$  – каноническое разложение. Тогда:

1.  $V = \mathcal{K}_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus \mathcal{K}_{\lambda_s}$ , где  $\mathcal{K}_{\lambda_i} = \{v \in V \mid \exists k : (\varphi - \lambda_i \varepsilon)^k v = 0\}$
2.  $\mathcal{K}_{\lambda_i} = \text{Ker}(\varphi - \lambda_i \varepsilon)^{k_i}$
3.  $\mathcal{K}_{\lambda_i}$  – инвариантные подпространства,  $\dim \mathcal{K}_{\lambda_i} = k_i$

*Доказательство.* Многочлены  $(\lambda_1 - t)^{k_1}, \dots, (\lambda_s - t)^{k_s}$  попарно взаимно просты. Дробь  $\frac{1}{\chi_\varphi(t)}$  можно представить в виде:

$$\frac{1}{\chi_\varphi(t)} = \frac{f_1(t)}{(t - \lambda_1)^{k_1}} + \dots + \frac{f_s(t)}{(t - \lambda_s)^{k_s}} \mid \cdot \chi_\varphi(t) \text{ или же } \prod_{i=1}^s (t - \lambda_i)^{k_i}$$

$$\underbrace{(t - \lambda_2)^{k_2} \cdot \dots \cdot (t - \lambda_s)^{k_s} f_1(t)}_{q_1(t)} + \dots + \underbrace{(t - \lambda_2)^{k_2} \cdot \dots \cdot (t - \lambda_{s-1})^{k_{s-1}} f_s(t)}_{q_s(t)} = 1$$

$$q_1(t) + \dots + q_s(t) = 1, \text{ где } q_i(t) = \prod_{j \neq i} (t - \lambda_j)^{k_j} \cdot f_i(t) \implies$$

$$q_1(\varphi) + \dots + q_s(\varphi) = \varepsilon \mid \cdot v \in V$$

$$\forall v = \underbrace{q_1(\varphi)v}_{v_1} + \dots + \underbrace{q_s(\varphi)v}_{v_s} = v_1 + \dots + v_s \implies$$

$$V = \text{Im } q_1(\varphi) + \dots + \text{Im } q_s(\varphi), \quad v_i \in \text{Im } q_i(\varphi)$$

Обратим внимание, что  $\text{Im } q_i(\varphi) = Q_i$

Для вектора  $v_i \in \text{Im } q_i(\varphi) = Q_i$  выполнено  $(\varphi - \lambda_i \varepsilon)^{k_i} v_i = 0$  в силу Теоремы Гамильтона-Кэли.

Имеем:  $V = Q_1 + \dots + Q_s \subseteq \mathcal{K}_{\lambda_1} + \dots + \mathcal{K}_{\lambda_s}$ ,  $Q_i \subseteq \mathcal{K}_{\lambda_i} \implies V = \mathcal{K}_{\lambda_1} + \dots + \mathcal{K}_{\lambda_s}$

Осталось проверить, что эта сумма прямая.

Нужно показать, что если  $v \in \mathcal{K}_{\lambda_i} \cap \sum_{i \neq j} \mathcal{K}_{\lambda_j}$ , то  $v = 0$ .

По выбору,  $(\varphi - \lambda_i \varepsilon)^{k_i} v = 0 \implies (\varphi - \lambda_i \varepsilon)^n v = 0$ , где  $n = \dim V$ .

Если  $v_j \in \mathcal{K}_{\lambda_j}$ , то  $(\varphi - \lambda_j \varepsilon)^n v_j = 0 \implies (\prod_{j \neq i} (\varphi - \lambda_j \varepsilon)^n) v = 0$



Т.к. многочлены  $(t - \lambda_i)^n$  и  $\prod_{j \neq i} (t - \lambda_j)^n$  взаимно просты  $\implies$   
 $\exists u(t), w(t)$  - многочлены, такие что

$$u(t)(t - \lambda_i)^n + w(t) \prod_{j \neq i} (t - \lambda_j)^n = 1 \implies$$

$$u(\varphi)(\varphi - \lambda_i)^n + w(\varphi) \prod_{j \neq i} (\varphi - \lambda_j)^n = \varepsilon \implies$$

$$u(\varphi) \underbrace{(\varphi - \lambda_i)^n}_0 v + w(\varphi) \underbrace{\prod_{j \neq i} (\varphi - \lambda_j)^n}_0 v = v \implies$$

$$v = 0 \implies \text{сумма } \mathcal{K}_{\lambda_1} + \dots + \mathcal{K}_{\lambda_s} \text{ - прямая.}$$

Итак:  $V = \mathcal{K}_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus \mathcal{K}_{\lambda_s}$ , причем  $\mathcal{K}_{\lambda_i} = Q_i = q_i(\varphi)V = \text{Ker}(\varphi - \lambda_i \varepsilon)^{k_i}$   
(Учесть, что  $Q_i \subseteq \text{Ker}(\varphi - \lambda_i \varepsilon)^{k_i} \subseteq \mathcal{K}_{\lambda_i}$ , доказано, что  $Q_i = \mathcal{K}_{\lambda_i}$ )  $\implies$   
 $\mathcal{K}_{\lambda_i} = \text{Ker}(\varphi - \lambda_i \varepsilon)^{k_i}$

Размерность. Выберем в  $V$  базис, составленный из базисов корневых подпространств. В этом базисе:

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} \overline{A_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \overline{A_s} \end{pmatrix}, \text{ где } A_i = \varphi|_{\mathcal{K}_{\lambda_i}} \text{ порядка } d_i = \dim \mathcal{K}_{\lambda_i}$$

Матрица  $A_i$  имеет собственное значение  $\lambda_i$ , (если  $\exists v \in \mathcal{K}_{\lambda_i} \cap V_{\lambda_j}, i \neq j \implies v = 0$ )  
 $\implies d_i = k_i = \dim \mathcal{K}_{\lambda_i}$

□

Существование базиса, составленного из жордановых цепочек, достаточно доказать для каждого оператора  $\psi_i = (\varphi - \lambda_i \varepsilon)|_{\mathcal{K}_i}$

**Определение.** Оператор  $\psi : V \mapsto V, \psi \neq 0$  называется *нильпотентным*, если  $\exists m \in \mathbb{N} : \psi^m = 0$ . Если  $d$  -наименьшее значение, при котором  $\psi^d = 0$  ( $\psi^{d-1} \neq 0$ ), то  $d$ -показатель (индекс) нильпотентного оператора  $\psi$ .

Будем считать, что  $V = \mathcal{K}_{\lambda_i}$ ,  $\varphi$  имеет на нем единственное собственное значение  $\lambda_i$ , тогда  $\psi_i$  - нильпотентный оператор:  $\psi_i^{\dim V} = 0$ . (Далее индекс  $i$  не будем писать). Обозначение:  $B = A_i - \lambda_i E$  - матрица оператора  $\psi_i = \psi$

**Теорема.** Для нильпотентного оператора  $\psi : V \mapsto V$  существует базис из жордановых цепочек.

*Доказательство.* Пусть  $\dim V = n$ , показатель нильпотентности равен  $d$ .

Тогда образы  $\text{Im}\psi \supset \text{Im}\psi^2 \supset \dots \supset \text{Im}\psi^{d-1} \supset \text{Im}\psi^d = 0$  образуют строго убывающую цепочку.

Обозначим:  $r = \dim V_0 = \dim \text{Ker}\psi$  и рассмотрим подпространства:

$$\underbrace{\text{Ker}\psi}_{R_0=V_0} \supseteq \underbrace{\text{Im}\psi \cap \text{Ker}\psi}_{R_1} \supseteq \dots \supseteq \underbrace{\text{Im}\psi^{d-1} \cap \text{Ker}\psi}_{R_{d-1}} \supseteq \{0\}$$

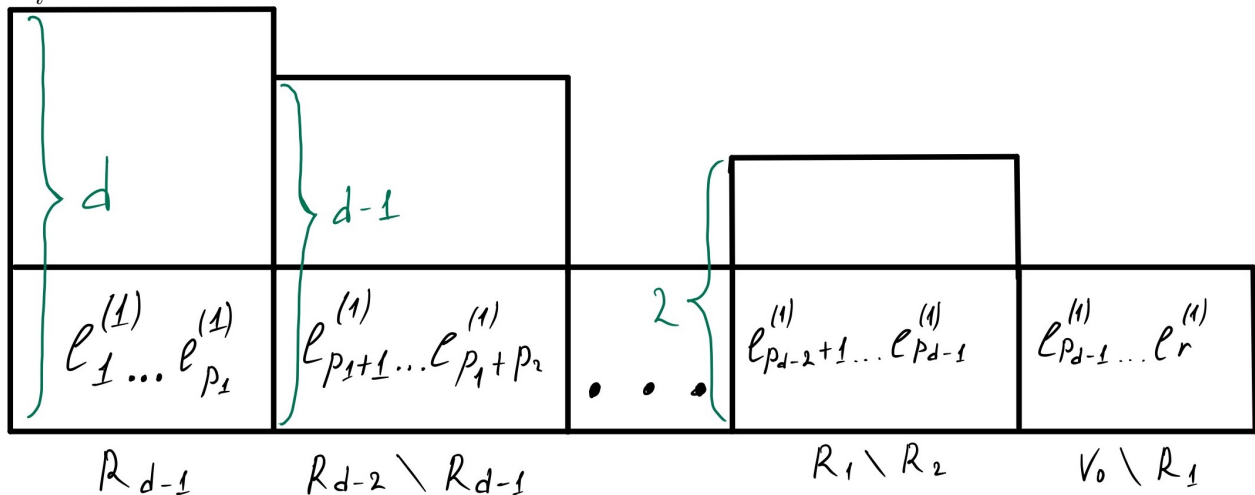
$$R_0 = V_0 \supseteq R_1 \supseteq \dots \supseteq R_{d-1} \supseteq R_d = \{0\}$$

Обозначим:  $\dim R_0 = \dim \text{Ker}\psi = r = p_d$

$\dim R_{d-1} = p_1, \dim R_{d-2} = p_2$  и т.д.  $\dim R_1 = p_{d-1}$ .

Выберем в  $\text{Ker}\psi = V_0$  базис, составленный подпространствами:

$$R_i = \text{Im} B^i \cap \text{Ker} B$$



Векторы  $e_1^{(1)}, \dots, e_{p_1}^{(1)} \in \text{Im}\psi^{d-1} \implies$  каждый из них имеет  $(d-1)$  присоединенный вектор. Например,  $e_1^{(1)} = \psi(e_1^{(2)})$ ,  $e_1^{(2)} = \psi(e_1^{(3)})$  и т.д.  $e_1^{(p-2)} = \psi(e_1^{(p-1)})$ , т.о. векторы  $\{e_1^{(p-1)}, e_1^{(p-2)}, \dots, e_1^{(1)}\}$  образует жорданову цепочку длины  $p$ .

Эта цепочка имеет вид:

$$\{e_1^{(p-1)}, \psi(e_1^{(p-1)}), \psi^2(e_1^{(p-1)}), \dots, \psi^{p-1}(e_1^{(p-1)}) = e_1^{(1)}\}, \quad \psi(e_1^{(1)}) = 0$$

Таким образом, получаем некоторое количество жордановых цепочек длин  $\leq d$ . Векторы всех этих цепочек образуют базис в  $V$ .  $\square$

**Лемма.** Пусть есть  $t$  жордановых цепочек

$$\{a_1, \psi(a_1), \dots, \psi^{l_1-1}(a_1)\}, \psi^{l_1}(a_1) = 0$$

.....

$$\{a_t, \psi(a_t), \dots, \psi^{l_t-1}(a_t)\}, \psi^{l_t}(a_t) = 0$$

Причем конечные векторы этих цепочек ЛНЗ. Тогда все векторы этих цепочек ЛНЗ. Кроме того, общее количество векторов в объединении цепочек равно  $\dim V \implies$  объединение всех цепочек из диаграммы – базис пространства  $V$ .

*Доказательство.* Индукция по общему количеству векторов в цепочках.

**База:** когда все цепочки имеют длину 1, т.е.  $a_1, \dots, a_t$  – собственные, ЛНЗ.

**Предположение индукции:**  $\exists$  хотя бы одна цепочка длины  $> 1$ .

Запишем линейную комбинацию:

$$\alpha_{11}a_1 + \alpha_{12}\psi(a_1) + \dots + \alpha_{1,l_1}\psi^{l_1-1}(a_1) + \dots + \alpha_{t,1}a_t + \alpha_{t,2}\psi(a_t) + \dots + \alpha_{t,l_t}\psi^{l_t-1}(a_t) = 0$$

Подействуем оператором  $\psi$ :

$$\alpha_{11}\psi(a_1) + \dots + \alpha_{1,l_1-1}\psi^{l_1-1}(a_1) + \dots + \alpha_{t,1}\psi(a_t) + \dots + \alpha_{t,l_t-1}\psi^{l_t-1}(a_t) = 0$$

Эти векторы принадлежат цепочкам длины  $l_1 - 1, \dots, l_t - 1$  (либо какие-то обратятся в 0)

По предположению индукции  $\alpha_{11} = \dots = \alpha_{1,l_1-1} = \dots = \alpha_{t,1} = \alpha_{t,l_t-1} = 0 \implies$

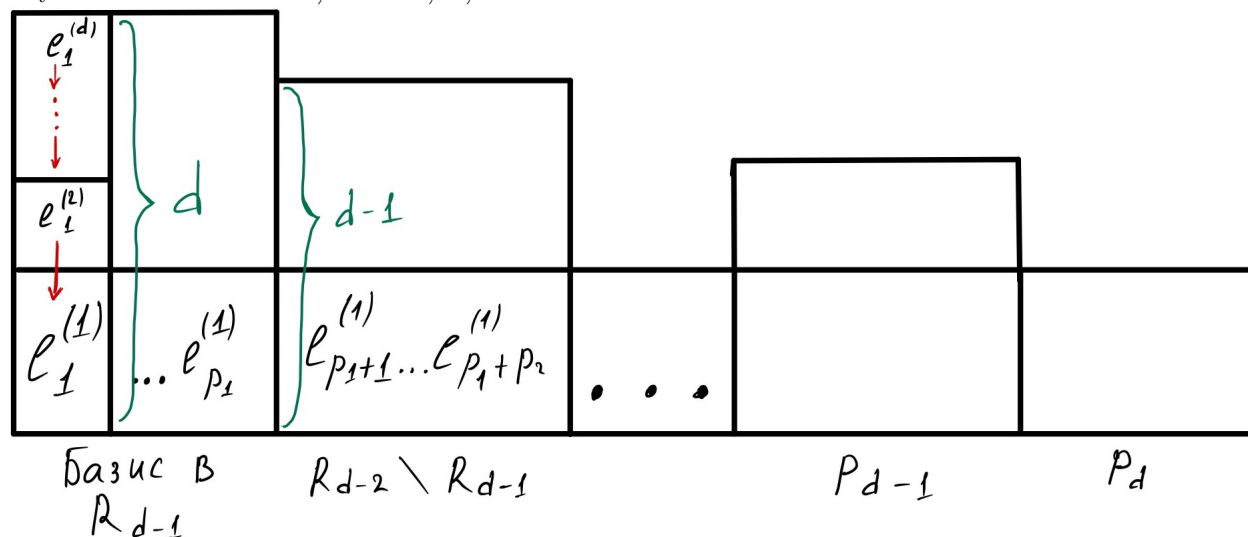
$$\alpha_{a,l_1}\psi^{l_1-1}(a_1) + \dots + \alpha_{t,l_t}\psi^{l_t-1}(a_t) = 0 \text{ ЛНЗ} \implies$$

остальные коэффициенты равны 0

□

$B$  – нильпотентный оператор,  $B^d = 0 \neq B^{d-1} \implies$  максимальная длина (высота) жордановой цепочки равняется  $d$ .

$$R_i = \text{Im} B^i \cap \text{Ker} B, \quad i = 1, \dots, d-1$$



Базис  $\text{Ker} B = R_0$

Общее число векторов в цепочках равно  $\dim V$  (в котором действует  $B$ ):

$$\begin{aligned}
& dp_1 + (d-1)p_2 + \dots + 2p_{d-1} + p_d = \\
& = (p_1 + \dots + p_d) + (p_1 + \dots + p_{d-1}) + \dots + (p_1 + p_2) + p_1 = \\
& = \dim R_0 + \dim R_1 + \dots + \dim R_{d-2} + \dim R_{d-1} \\
& \sum_{i=0}^{d-1} \dim(\operatorname{Im} B^i \cap \operatorname{Ker} B) = \sum_{i=0}^{d-1} (\dim \operatorname{Ker} B^{i+1} - \dim \operatorname{Ker} B^i) = \\
& = \dim \operatorname{Ker} B^d = \dim V
\end{aligned}$$

Нужно доказать, что  $\dim(\operatorname{Im} B^i \cap \operatorname{Ker} B) = \dim \operatorname{Ker} B^{i+1} - \dim \operatorname{Ker} B^i$

$$\begin{aligned}
& \operatorname{Im}(B^i \cap \operatorname{Ker} B) = \operatorname{Ker}(B|_{\operatorname{Im} B^i}) \implies \\
& \dim(\operatorname{Im} B^i \cap \operatorname{Ker} B) = \dim \operatorname{Im} B^i - \dim \operatorname{Im} B^{i+1} = \\
& = n - \dim \operatorname{Ker} B^i - (n - \dim \operatorname{Ker} B^{i+1}) = \\
& = \dim \operatorname{Ker} B^{i+1} - \dim \operatorname{Ker} B^i \dim \operatorname{Ker} \varphi = \dim V - \dim \operatorname{Im} \varphi \implies \\
& \varphi = B|_{\operatorname{Im} B^i}
\end{aligned}$$

### Единственность жордановой формы

Если  $A \sim \mathcal{J}$  и  $A \sim \mathcal{J}'$ , то  $\mathcal{J}$  и  $\mathcal{J}'$  могут отличаться только упорядочиваниями жордановых клеток.

Нужно доказать, что  $\forall$  собственного значения  $\lambda_j \forall m : 1 \leq m \leq d_j, N(m, \lambda_j)$  определено по  $A$  единственным образом.

Рассмотрим оператор  $B = A - \lambda_j E$ , достаточно для матрицы  $B$  доказать единственность  $N(m, 0)$ :

$$\begin{aligned}
& N(m, 0) = \dim R_{m-1} - \dim R_m = \\
& = (\dim \operatorname{Ker} B^m - \dim \operatorname{Ker} B^{m-1}) - (\dim \operatorname{Ker} B^{m+1} - \dim \operatorname{Ker} B^m) = \\
& = 2\dim \operatorname{Ker} B^m - \dim \operatorname{Ker} B^{m-1} - \dim \operatorname{Ker} B^{m+1} = \\
& = 2(n - rk B^m) - (n - rk B^{m-1}) - (n - rk B^{m+1}) = \\
& = rk B^{m-1} - 2rk B^m + rk B^{m+1}
\end{aligned}$$

Эти ранги не зависят от базиса.

### Доказательство Теоремы Жордана в общем случае:

Пусть  $\varphi : V \rightarrow V$ ,  $A_\varphi$  – его матрица,  $\chi_\varphi(t) = (\lambda_1 - t)^{k_1} \cdot \dots \cdot (\lambda_s - t)^{k_s}$ ,  $(\lambda_i \in F)$   
Тогда  $V = \bigoplus_{i=1}^s \mathcal{K}(\lambda_i)$ ,  $\mathcal{K}(\lambda_i) = \text{Ker}(\varphi - \lambda_i \varepsilon)^{k_i}$  – корневые подпространства.

В базисе, согласованном с разложением,

$$\begin{pmatrix} \overline{A_1} & & & \\ & \overline{A_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \overline{A_s} \end{pmatrix}$$

$\forall i = 1, \dots, s$ ,  $A_i = A_{\varphi|_{\mathcal{K}(\lambda_i)}}$  имеет единственное собственное значение  $\lambda_i$ .

Оператор  $(\varphi - \lambda_i \varepsilon)$  – нильпотентный оператор  $\Rightarrow$  для него, по Теореме для нильпотентных операторов  $\exists$  базис в  $\mathcal{K}(\lambda_i)$  из жордановых цепочек. Тогда объединение базисов всех подпространств нужный базис.

**Теорема.** Пусть  $\chi_A(t) = (-1)^n \prod_{i=1}^s (t - \lambda_i)^{k_i}$ ,  $d_i$  – максимальный размер жордановой клетки, отвечающей корню  $\lambda_i$ , тогда  $\mu_A(t) = \prod_{i=1}^s (t - \lambda_i)^{d_i}$  – минимальный многочлен.

*Доказательство.*

Если  $p(t)$  – аннулирующий многочлен для  $\varphi$  (для матрицы  $A$ ), тогда  $\forall i$   $p(\lambda_i) = 0$ , если  $x_i \neq 0$ :  $\varphi(x_i) = \lambda_i x_i$ , то

$$p(\varphi(x_i)) = p(\lambda_i) \underbrace{x_i}_{\neq 0} = 0 \Rightarrow p(\lambda_i) = 0$$

Для одной жордановой клетки  $\mathcal{J}_m(\lambda_i)$  ( $1 \leq m \leq d_i$ )

$$A - \lambda_i E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow (A - \lambda_i E)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & \ddots & 0 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

И т.д.  $\Rightarrow (A - \lambda_i E)^m = 0$

Для  $m = d_i$  наименьшая степень  $q$ :  $(A - \lambda_i E)^q = 0$  равна  $d_i \Rightarrow \mu_A(t) : (t - \lambda_i)^{d_i} \Rightarrow \mu_A(t) = \prod_{i=1}^s (t - \lambda_i)^{d_i}$  □

**Следствие.**  $A_\varphi$  диагонализируема  $\iff$  все характеристические корни имеют в  $\mu_\varphi$  кратность равную 1.

## Некоторые применения жордановой формы

1. К решению СЛУ  $AX = b$ ,  $A_{(n \times n)}$

Пусть уже найдена матрица  $C$ :  $C^{-1}AC = \mathcal{J} = \begin{pmatrix} \mathcal{J}_1(\lambda_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mathcal{J}_l(\lambda_l) \end{pmatrix}$

Сделаем замену переменных:

$$X = CY \implies A(CY) = b \implies (C^{-1}AC)Y = C^{-1}b = b'$$

Для каждой клетки

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix}_{\lambda \neq 0} \implies \begin{cases} \lambda y_1 + y_2 = b'_1 \\ \dots \\ \lambda y_n = b'_n \end{cases}$$

Легко дорешать, найдя  $Y$  найдем  $X = CY$

2. К вычислению функций от матрицы.

$A_n^m$ ,  $m \in \mathbb{N}$

$$A = CYC^{-1} = C \begin{pmatrix} \mathcal{J}_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mathcal{J}_l \end{pmatrix} C^{-1} \implies A^m = C \begin{pmatrix} \mathcal{J}_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mathcal{J}_l \end{pmatrix} C^{-1}$$

Для одной клетки:

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_n(\lambda) &= \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix} = \lambda E + \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix} = \lambda E + B, \quad B^n = 0 \neq B^{n-1} \\ &\implies A^m = C \begin{pmatrix} \mathcal{J}_1^m & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mathcal{J}_l^m \end{pmatrix} C^{-1}, \quad \mathcal{J}_n^m(\lambda) = (\lambda E + B)^m \end{aligned}$$

$$\mathcal{J}_n^m(\lambda) = (\lambda E + B)^m = \sum_{k=0}^m C_m^k \lambda^k B^{m-k}$$

Для  $m = \frac{1}{2}$  – вычислить  $\sqrt{A}$  (нужно, чтобы  $\sqrt{\lambda_j}$  были определены)

$$\mathcal{J}_n(\lambda) = (\lambda E + B)^{\frac{1}{2}} = (\sqrt{\lambda}(E + \frac{1}{\lambda}B)^{\frac{1}{2}}) = \sqrt{\lambda}(E + \frac{1}{2}X + C_{\frac{1}{2}}^2 X^2 + \dots)$$

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = \sum_{k=0}^{\infty} C_{\frac{1}{2}}^k x^k$$

$$C_{\frac{1}{2}}^1 = \frac{1}{2}, \quad C_{\frac{1}{2}}^2 = \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2!}, \dots, C_{\frac{1}{2}}^k = \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)\dots(\frac{1}{2}-k+1)}{k!}$$

Экспонента:  $e^A \stackrel{?!}{=} E + tA + t^2 \frac{A^2}{2!} + \dots$

$$A = C \mathcal{J} C^{-1} \implies e^A = C \begin{pmatrix} e^{\mathcal{J}_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\mathcal{J}_l} \end{pmatrix} C^{-1}$$

Для одной клетки порядка  $n$ :

$$\mathcal{J}_n(\lambda) = \lambda E + B \implies e^{\mathcal{J}_n(\lambda)} = e^{\lambda E + B} = e^{\lambda E} e^B = e^\lambda E e^B$$

$$e^B = E + B + \frac{B^2}{2!} + \dots + \frac{B^{n-1}}{(n-1)!} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2!} & \dots & \frac{1}{(k-1)!} \\ & 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & \frac{1}{2!} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$(e^{tA})' = A e^{tA}$$

Формула:  $\det(e^A) = e^{\text{tr} A}$

**Теорема.** Для любого линейного оператора  $\varphi : V \mapsto V$  над  $\mathbb{R}$  ( $\dim V < \infty$ ) существует одномерное или двумерное инвариантное подпространство.

*Доказательство.* Пусть  $\exists$  собственное значение  $\lambda_0$ , тогда и  $\exists x_0 \in V, x_0 \neq 0$ , т.ч.  $\varphi(x_0) = \lambda_0 x_0 \implies \langle x_0 \rangle = U$  – инвариантное подпространство.

Комплексному корню отвечает двумерное инвариантное подпространство.

Допустим, что  $\lambda_1 = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$  – корень  $\chi_\varphi(\lambda) \implies \overline{\lambda_1} = \alpha - i\beta$  – тоже корень  $\implies \chi_\varphi(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \overline{\lambda_1})f(\lambda) = (\lambda^2 - 2\alpha\lambda + (\alpha^2 + \beta^2))f(\lambda), f(\lambda) \in \mathbb{R}[\lambda]$

$\varphi$  с помощью (вещественной) матрицы  $A_\varphi$  действует в  $\mathbb{R}^n$ :

$$\forall x \in \mathbb{R}, X \mapsto A_\varphi X$$

Рассмотрим оператор  $\varphi$  в  $\mathbb{C}^n$  по формуле:  $\forall Z \mapsto A_\varphi Z$

В  $\mathbb{C}^n \exists$  вектор  $Z_1 : A_\varphi Z_1 = \lambda_1 Z_1$

$$Z_1 = X_1 + iY_1, X_1, Y_1 \in \mathbb{R}^n$$

$$A_\varphi X_1 + A_\varphi Y_1 = (\alpha X_1 - \beta Y_1) + i(\beta X_1 + \alpha Y_1) \implies \begin{cases} A_\varphi X_1 = \alpha X_1 - \beta Y_1 \\ A_\varphi Y_1 = \beta X_1 + \alpha Y_1 \end{cases} \implies$$

$U = \langle X_1, Y_1 \rangle \subset \mathbb{R}^n$  – двумерное инвариантное подпространство для  $\varphi$ .

Допустим, что  $Y_1 = \mu X_1 \implies A_\varphi X_1 = (\alpha - \beta\mu)X_1 \implies X_1$  – собственный вектор.  
 $\implies X_1, Y_1$  – ЛНЗ,  $\dim U = 2$

□

## Глава III. Билинейные и квадратичные функции.

### Пространства с формами.

#### §1. Билинейные функции.

**Определение.** Функция  $f : V \times V \longrightarrow F$  называется билинейной, если:

1.  $f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y) = \alpha_1 f(x_1, y) + \alpha_2 f(x_2, y), \forall x_1, x_2, y \in V, \alpha_1, \alpha_2 \in F$
2. По  $y$ .

**Примеры:**

1.  $V = R[a, b]$

$$(f(x), g(x)) \longmapsto \int_a^b f(x)g(x)dx = \int_a^b g(x)f(x)dx - \text{симметричная}$$

2.  $V = M_n(F)$

$$f_1(X, Y) = \text{tr}(XY), \quad f_2(X, Y) = \text{tr}(XY^T)$$

Выражение  $f(x, y)$  в координатах.

Пусть  $e$  – базис в  $V$ ,  $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i, y = \sum_{j=1}^n y_j e_j \implies$

$$f(x, y) = f\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{j=1}^n y_j e_j\right) = \sum_{i,j} \underbrace{f(e_i e_j)}_{f_{ij}} x_i y_j - \text{билинейная форма. (1)}$$

Обозначение:  $B_e = (f_{ij})$  – матрица билинейной формы  $f(x, y)$  в базисе  $e$ .

Выражение (1) можно записать в виде  $f(x, y) = X^T B_e Y$  (2).

**Изменение матрицы билинейной формы при замене базиса:**

Пусть  $e' = eC_{e \rightarrow e'}$ , тогда  $X = CX', Y = CY'$  подставим в (2).

$$X^T B_e Y = (CX')^T B_e (CY') = (X')^T (C^T B_e C) Y' \stackrel{?!}{=} (X')^T B_{e'} Y', \quad \forall X', Y' \in F^n$$

Если  $X' = E_i, Y' = E_j$ , то  $(X')^T B_e Y' = d_{ij}, \forall i, j \implies B_{e'} = C^T B_e C$  (3)



**Следствие.** 1.  $\text{rk} B' = \text{rk} B$ , т.к.  $|C| \neq 0$

$$2. |B'| = |B||C|^2$$

Если  $F = \mathbb{R}$  и  $|B| \neq 0$ , то  $|B'|$  и  $|B|$  имеют одинаковый знак.

В силу следствия 1,  $\text{rk} B$  можно называть рангом билинейной функции  $f(x, y)$ ,  $\text{rk} f$

Назовем левым ядром билинейной функции  $f(x, y)$  :

$$\text{Ker}_\text{л} f = \{x \in V : f(x, y) = 0, \forall y \in V\}$$

$$x \in \text{Ker}_\text{л} f \iff \begin{cases} f(x, e_1) = 0 \\ \dots \\ f(x, e_n) = 0 \end{cases} \quad - \text{ОСЛУ с матрицей } B$$

Число ЛНЗ решений равно  $n - \text{rk} B = n - \text{rk} f$ .

**Определение.**  $f(x, y)$  симметричная, если  $\forall x, y \in V : f(x, y) = f(y, x)$

**Определение.**  $g(x, y)$  кососимметричная, если  $\forall x, y \in V : f(x, y) = -f(y, x)$

**Теорема.** Если  $\text{char} F \neq 2$ , то любая билинейная функция  $f(x, y)$  единственным образом представляется в виде:  $f(x, y) = f_+(x, y) + f_-(x, y)$

*Доказательство.*

$$\begin{cases} f(x, y) = f_+(x, y) + f_-(x, y) \\ f(x, y) = f_+(x, y) - f_-(x, y) \end{cases}$$

$$f_+(x, y) = \frac{f(x, y) + f(y, x)}{2}, \quad f_-(x, y) = \frac{f(x, y) - f(y, x)}{2}$$

□

## §2. Квадратичные функции (формы).

**Определение.** Пусть  $f(x, y)$  – билинейная функция на  $V$ . Тогда функция  $k_f(x) := f(x, x)$ ,  $\forall x \in V$  называется *квадратичной функцией*, порожденной билинейной функцией  $f$ , если  $k_f(x) \neq 0$ .

Обратим внимание, что если  $f(x, y) = f_+(x, y) + f_-(x, y)$ , то

$$f(x, x) = f_+(x, x) + \underbrace{f_-(x, x)}_{=0}, \quad \text{char} F \neq 2 \implies$$

$f$  и  $f_+$  порождают одну и ту же функцию.

**Теорема.** Для любой квадратичной функции  $k(x)$  существует единственная билинейная симметричная функция  $f(x, y)$ , т.ч.  $f(x, x) = k(x)$

*Доказательство.* Пусть  $f(x, y) = f(y, x)$

Рассмотрим  $k(x+y) = f(x+y, x+y) = f(x, x) + f(x, y) + f(y, x) + f(y, y) = f(x, x) + 2f(x, y) + f(y, y), \forall x, y \in V \implies f(x, y) = \frac{k(x+y) - k(x) - k(y)}{2}$   $\square$

Координатная запись:

$$k(x) = X^T B_e X = \sum_{i,j} b_{ij} x_i x_j = \sum_{i,j} b_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{i < j} b_{ij} x_i x_j, \quad b_{ij} = b_{ji}, \quad \forall i, j, \quad (2)$$

Договоримся, что матрица квадратичной формы (2) совпадает с матрицей  $B$ .

$$k(x_1, x_2) = 3x_1^2 - 4x_1x_2 + 25x_2^2, \quad B \stackrel{?}{=} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 25 \end{pmatrix}$$

### Упрощение квадратичной формы

Термин: Диагональная квадратичная форма:

$$k(x) = \alpha_1 x_1^2 + \dots + \alpha_n x_n^2 = \alpha_1 x_1^2 + \dots + \alpha_r x_r^2$$

(При подходящей нумерации переменных). ( $x = (x_1, \dots, x_n)$ )

Если  $\text{rk } f = \text{rk } k = k = r \leq n$

$$B = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & \alpha_r & & \\ & & & 0 & \\ 0 & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Термин: ( $F = \mathbb{R}$ )  $k(x)$  имеет канонический вид, если

$$k(x) = \sum_{i=1}^p x_i^2 - \sum_{i=p+1}^{p+q} x_i^2, \quad (p+q = \text{rk } k = r)$$

Если  $F = \mathbb{C}$ , то канонический вид будет

$$\sum_{i=1}^r x_i^2$$

Над  $\mathbb{R}$ : замена  $y_i = \sqrt{|\alpha_i|} x_i, \quad 1 \leq i \leq r, \quad y_i = x_i, \quad i = r+1, \dots, n$

Тогда  $k(x)$  равен каноническому виду.

Над  $\mathbb{C}$ :  $\forall i = 1, \dots, r \quad y_i = \sqrt{|\alpha_i|} x_i$

## Алгоритм Лагранжа (метод выделения квадратов.)

Пусть  $k(x_1, \dots, x_n) = b_{11}x_1^2 + \dots + b_{nn}x_n^2 + 2b_{12}x_1x_2 + \dots + 2b_{1n}x_1x_n + \dots$

Основной случай:  $b_{11} \neq 0 \implies$

$\underbrace{\hspace{1cm}}_{x_1 \text{ не входит}}$

$$b_{11}(x_1^2 + 2x_1 \sum_{i=2}^n \frac{b_{1i}}{b_{11}}x_i) + \dots = b_{11}(x_1^2 + 2x_1(\sum_{i=2}^n \frac{b_{1i}}{b_{11}}x_i) + (\sum_{i=2}^n \frac{b_{1i}}{b_{11}}x_i)^2) -$$

$$\underbrace{-\frac{1}{b_{11}}(\sum_{i=2}^n b_{1i}x_i)^2 + 2 \sum_{1 < i < j} b_{ij}x_i x_j}_{k_1(x_2, \dots, x_n)} = b_{11}(x_1 + \sum_{i=2}^n \frac{b_{1i}x_i}{b_{11}})^2 + k_1(x_2, \dots, x_n)$$

Замена:  $y_1 = x_1 + \sum_{i=2}^n \frac{b_{1i}}{b_{11}}x_i$ , остальные пока не заменяем.

Особый случай:  $b_{ii} = 0, \forall i = 1, \dots, n$

Т.к.  $k(x) \not\equiv 0 \implies \exists i, j : b_{ij} \neq 0$

Подготовительная замена:

$$\begin{cases} x_i = x'_i - x'_j \\ x_j = x'_i + x'_j \end{cases} \implies 2b_{ij}x_i x_j = 2b_{ij}((x'_i)^2 - (x'_j)^2) \implies \text{перейти к основ. случаю}$$

Замечание: можно сделать такую замену:  $\begin{cases} x_i = \tilde{x}_i + \tilde{x}_j \\ x_j = \tilde{x}_j \end{cases}$

## Закон инерции для квадратичных форм над $\mathbb{R}$

Если в некотором базисе  $e$  квадратичная форма  $k(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^p x_i^2 - \sum_{i=p+1}^{p+q} x_i^2$ ,

а в базисе  $f$ :  $k(y_1, \dots, y_n) = \sum_{i=1}^s y_i^2 - \sum_{i=s+1}^{s+t} y_i^2$ , то  $p = s, q = t$

**Замечание.**  $p + q = s + t = \text{rk } k$ , так что достаточно доказать, что  $p = s$

*Доказательство.* От противного. Допустим, что  $p > s$

Рассмотрим два подпространства:  $L_1 = \langle e_1, \dots, e_p \rangle, L_2 = \langle f_{s+1}, \dots, f_n \rangle$

Обратим внимание, что если  $x \in L_1, x \neq 0$ , то  $k(x) > 0$ ;  $\forall y \in L_2 : k(y) \leq 0$

$$\dim L_1 + \dim L_2 = p + (n - s) = n + (p - s) > n \implies$$

$$L_1 \cap L_2 \neq \{0\} : n \geq \dim(L_1 + L_2) = \underbrace{\dim L_1 + \dim L_2}_{>n} - \dim(L_1 \cap L_2) \implies$$

$$\dim(L_1 \cap L_2) > 0$$

Но  $\forall v \in L_1 \cap L_2, v \neq 0 : k(v) > 0$  и  $k(v) < 0$  – противоречие  $\implies$

$p > s$  не может быть.

Допустим, что  $s > p$ , тогда рассмотрим  $L'_1 = \langle e_{p+1}, \dots, e_n \rangle, L'_2 = \langle f_1, \dots, f_s \rangle$

$$n - p + s = n + (s - p) > n \implies L'_1 \cap L'_2 \neq \{0\}$$

$$\forall u \in L'_1 \cap L'_2, u \neq 0 : k(u) > 0, k(u) < 0 \implies$$

$$p = s \implies q = t$$

□

### §3. Знакоопределенные квадратичные формы.

Пусть  $k(x)$  – квадратичная форма на пр-ве  $V$  над полем  $F$ ,  $\text{char} F \neq 2$ .

$f(x, y)$  – полярная билинейная форма,  $f(x, y) = f(y, x)$ ,  $f(x, x) \equiv k(x)$ .

Скажем, что  $u \perp v$ , если  $f(u, v) = 0$ .

Скажем, что базис  $e_1, \dots, e_n$  в пространстве  $V$  ортогональный,

$$\text{если } f(e_i, e_j) = 0, \forall i \neq j$$

**Замечание.** Форма является симметрической  $\iff$  ее матрица является симметрической.

$$\text{Если } B = \left( \begin{array}{ccc|ccc} b_{11} & \dots & b_{1i} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{1i} & \dots & b_{ii} & \dots & b_{in} \\ \hline \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{1n} & \dots & b_{in} & \dots & b_{nn} \end{array} \right), \text{ то } B = B^T$$

$$\text{Главный угловой минор порядка } i \text{ матрицы } B: \begin{vmatrix} b_{11} & \dots & b_{1i} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{1i} & \dots & b_{ii} \end{vmatrix}$$

**Теорема Якоби.** Пусть  $B$  – матрица квадратичной формы  $k(x)$  (в данном базисе  $e$ ) и все главные миноры этой матрицы отличны от 0:  $\Delta_1 \Delta_2 \cdot \dots \cdot \Delta_n \neq 0$ . Тогда в пространстве  $V$  существует базис  $e' = \{e'_1, \dots, e'_n\}$ , в котором

$$k = \frac{\Delta_1}{\Delta_0} y_1^2 + \frac{\Delta_2}{\Delta_1} y_2^2 + \dots + \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}} y_n^2 \text{ (по договоренности } \Delta_0 = 1)$$

*Доказательство.* Процесс ортогонализации – последовательное построение векторов, начиная с  $e'_1 = e_1$ , чтобы векторы были ортогональными друг другу.

Это включает требования:  $\forall m \geq 2$

1.  $f(e'_i, e'_j) = 0, \forall i \neq j, 1 \leq i, j \leq m$
2.  $\langle e'_1, \dots, e'_m \rangle = \langle e_1, \dots, e_m \rangle$

Берем  $e'_1 = e_1$ ,  $e'_2$  ищем в виде  $e'_2 = e_2 - \lambda e'_1$

$$f(e'_2, e'_1) = f(e_2 - \lambda e'_1, e'_1) = f(e_2, e'_1) - \lambda f(e'_1, e'_1) = f(e_2, e_1) - \lambda k(e'_1)$$

$$\lambda = \frac{f(e_2, e_1)}{k(e'_1)}, \quad k(e'_2) = f(e_2 - \lambda e'_1, e_2 - \lambda e'_1) = f(e_2, e_2) - 2\lambda f(e_2, e'_1) + \lambda^2 k(e'_1)$$

Матрица перехода от  $e_1, e_2 \mapsto e'_1 e'_2$

$$C_2 = \begin{pmatrix} 1 & -\lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Delta'_2 = k(e'_1)k(e'_2) = \Delta_2 \implies k(e'_2) = \frac{\Delta_2}{\Delta_1}$$

$$B' = \begin{pmatrix} f(e'_1, e'_1) & f(e'_1, e'_2) & \dots \\ f(e'_2, e'_1) & f(e'_2, e'_2) & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} f(e'_1) & 0 & \dots \\ 0 & f(e'_2) & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

$$B' = \begin{pmatrix} B'_2 \\ \dots \end{pmatrix} \quad B'_2 = C_2^T B_2 C_2, \quad |B'_2| = \Delta'_2 = |C_2|^2 |B_2| = |B_2| = \Delta_2$$

Рекурсия. Пусть векторы  $e_1, \dots, e_{m-1}$  ( $m \geq 2$ ) уже построены, исходя из условий (1), (2) процесса ортогонализации. Вектор  $e'_m$  будем искать в виде:

$$e'_m = e_m - \sum_{i=1}^{m-1} \lambda_i e'_i, \quad \text{чтобы } f(e'_m, e'_j) = 0, \quad \forall j = 1, \dots, m-1$$

$$f(e'_m, e'_j) = f(e_m - \sum_{i=1}^{m-1} \lambda_i e'_i, e'_j) = f(e_m, e'_j) - \sum_{i=1}^{m-1} \lambda_i f(e'_i, e'_j) = 0$$

$$f(e'_i, e'_j) = 0, \quad i \neq 0 \implies \text{останется } f(e_m, e'_j) - \lambda_i f(e'_j, e'_j) = 0$$

Это можно проделать вплоть до  $m = n \implies \lambda_i = \frac{f(e_m, e'_j)}{k(e'_j)}, \quad 1 \leq j \leq m-1$

Новая матрица:

$$B' = \begin{pmatrix} k(e'_1) & & \\ & \ddots & \\ & & k(e'_n) \end{pmatrix} = C^T B C \implies |B'| = |C|^2 |B| = |B| \quad \text{или} \quad \Delta'_n = \Delta_n$$

Тогда  $\Delta'_n = k(e'_1) \cdot \dots \cdot k(e'_n) = \Delta_n$

Применим индукцию для  $m \leq n-1 \implies k(e'_1) \cdot \dots \cdot k(e_{n-1}') = \Delta_{n-1} \implies k(e'_n) = \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}$

□

**Следствия из теоремы Якоби:** (для  $\Delta_1 \cdot \dots \cdot \Delta_n$ , над  $\mathbb{R}$  :  $\text{rk} = n$ ,)  
 $p$  (положительный индекс инерции) равен числу сохранений знака,  
а  $q$  (отрицательный индекс инерции) – числу перемен знака в последовательно-  
сти  $\Delta_0, \dots, \Delta_n$

$$k(y_1, \dots, y_n) = \sum_{m=1}^n \frac{\Delta_m}{\Delta_{m-1}} y_m^2$$

Квадратичная форма  $k(x)$  является:

- Положительно определенной на  $V$ , если  $\forall v \neq 0, k(v) > 0$
- Отрицательно определенной, если  $\forall v \neq 0, k(v) < 0$
- Неотрицательно определенной, если  $\forall v \neq 0, k(v) \geq 0$
- Неположительно определенной, если  $\forall v \neq 0, k(v) \leq 0$

**Лемма.** Квадратичная форма является:

1. Положительно определенной  $\iff p = n, q = 0$
2. Отрицательно определенной  $\iff p = 0, q = n$
3. Неотрицательно определенной  $\iff q = 0, p > 0$
4. Неположительно определенной  $\iff p = 0, q > 0$
5. Неопределенной  $\iff p > 0, q > 0$

**Критерий Сильвестра.**  $k > 0 \iff \Delta_1 > 0, \dots, \Delta_n > 0$

$$k < 0 \iff (-1)^i \Delta_i > 0, \forall i = 1, \dots, n$$

*Доказательство.* Докажем для  $k > 0$ , для  $k < 0$  – аналогично.

$\Leftarrow$  Дано, что  $\forall i, \Delta_i > 0 \implies k > 0$

По теореме Якоби  $\exists$  замена координат  $X = CY$ , что  $k = \sum_{i=1}^n \frac{\Delta_i}{\Delta_{i-1}} y_i^2$

По условию,  $\forall i, \frac{\Delta_i}{\Delta_{i-1}} > 0 \implies p = n \implies k > 0$

$\implies k > 0 \implies$  все  $\Delta_i > 0$

Из условия  $\Delta_n > 0$ , т.к.  $\underbrace{\Delta'_n}_{>0} = \Delta_n |C|^2$ , известно, что  $p = n$

$\forall i$  рассмотрим  $k(y_1, \dots, y_i, 0, \dots, 0) \neq 0 \implies$  для нее  $\Delta_i = |B_i|$

□

## Примеры применения критерия Сильвестра

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{1}{2}d^2 f(x_0, y_0) + o((\Delta x^2 + \Delta y^2))$$

$(x_0, y_0)$  – точка экстремума.  $\implies f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0$

$$d^2 f(x_0, y_0) = f''_{xx}(M_0)(\Delta x)^2 + 2f''_{xy}(M_0)\Delta x\Delta y + f''_{yy}(M_0)(\Delta y)^2$$

$$\begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{vmatrix} (x_0, y_0) \text{ – точка минимума} \iff d^2 f(x_0, y_0) > 0$$

## §4. Евклидовы пространства.

**Определение.** Пространство  $\mathcal{E}$  над  $\mathbb{R}$  называется евклидовым, если на  $\mathcal{E}$  задано скалярное произведение  $(x, y)$  – симметричная билинейная форма, т.ч. соответствующая квадратичная функция  $(x, x) > 0$ ,  $x \in \mathcal{E}$ ,  $x \neq 0$ . (В геометрии,  $\dim \mathcal{E} < \infty$ )

**Примеры:**

1. В  $C[a, b]$ ,  $(f(x), g(x)) = \int_a^b f(x)g(x)dx$

$$(f, f) = \int_a^b f^2(x)dx > 0, \text{ где } f \neq 0$$

2. В  $M_n(\mathbb{R})$

$$(X, Y) = \text{tr}(XY^T)$$

$$(X, X) = \text{tr}(XX^T) = \sum_{i,j=1}^n x_{ij}^2$$

$$(XX^T)_{ii} = (x_{i1} \cdot \dots \cdot x_{in}) \begin{pmatrix} x_{i1} \\ \vdots \\ x_{in} \end{pmatrix} = x_{i1}^2 + \dots + x_{in}^2$$

### Неравенство Коши-Буняковского-Шварца.

Пусть  $\mathcal{E}$  – евклидово пространство, тогда  $\forall x, y \in \mathcal{E} \quad |(x, y)| \leq |x||y|$  (1)

Более того, если выполняется равенство, то  $x \parallel y$ .

*Доказательство.* Если  $x = 0$  или  $y = 0$ , то (1) имеет вид  $0 = 0$ .

Можно считать, что  $x \neq 0$ ,  $y \neq 0$ .

Рассмотрим функцию:

$$f(t) = (y - tx, y - tx) = (y, y) - 2t(x, y) + t^2(x, x), \quad \forall t \in \mathbb{R} \iff$$

$$\frac{\Delta}{4} = (x, y)^2 - |x|^2|y|^2 \leq 0 \implies (x, y)^2 \leq |x|^2|y|^2 \iff$$

$$|(x, y)| \leq |x||y|$$

Равенство означает, что

$$\Delta = 0 \implies \exists! t = t_0 : (y - t_0x, y - t_0x) = 0 \implies y = t_0x \implies y \parallel x.$$

□

**Следствие.**  $\forall x, y \in \mathcal{E} : |x + y| \leq |x| + |y|$  (2)

*Доказательство.* (2)  $\iff |x + y|^2 \leq |x|^2 + 2(x, y) + |y|^2 \leq |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2$

□

**Определение.** Если  $x \neq 0$ ,  $y \neq 0$ , то определим угол  $\alpha$  между  $x$  и  $y$  :

$$\cos \alpha = \frac{(x, y)}{|x||y|} \quad (3), \quad \alpha = \arccos \frac{(x, y)}{|x||y|}$$

**Определение.** Векторы  $a_1, \dots, a_m \in \mathcal{E}$  – ортогональная система, если  $(a_i, a_j) = 0$ ,  $\forall i \neq j$  и  $(a_i, a_i) = 1, \forall i = 1, \dots, m$ .

**Утверждение.** Ортогональная система ненулевых векторов ЛНЗ.

*Доказательство.* Пусть  $\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_m a_m = 0 \mid \cdot a_i \implies$

$$\lambda_1 \underbrace{(a_1, a_i)}_{=0} + \dots + \lambda_i (a_i, a_i) + \dots + \lambda_m \underbrace{(a_m, a_i)}_{=0} = 0 \implies$$

$$\lambda_i (a_i, a_i) = 0 \implies \lambda_i = 0, \quad \forall i = 1, \dots, m.$$

□

**Теорема.** В конечномерном евклидовом пространстве существует ортогональный (более сильное утверждение: ортонормированный) базис.

(Существование ортогонального базиса было доказано при доказательстве теоремы Якоби – процесс ортогонализации).

Если  $a_1, \dots, a_m$  – ортогональный базис, то  $\frac{a_1}{|a_1|}, \dots, \frac{a_n}{|a_n|}$  – ортогональный базис.

Запись скалярного произведения  $(x, y)$  в координатах:

пусть  $e = \{e_1, \dots, e_n\}$  – базис в  $\mathcal{E}$

$$\left( \sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{j=1}^n x_j e_j \right) = \sum_{i,j=1}^n (e_i, e_j) x_i y_j = X^T G_e Y \quad (4)$$

Обознач.  $G_e = ((e_i, e_j))$  – матрица Грама базиса  $e_1, \dots, e_n$ , она симметрическая, причем положительно определенная.

$$G \text{ явл. матрицей Грама} \iff \begin{cases} G^T = G \\ \Delta_1, \dots, \Delta_n > 0 \end{cases}$$



Если базис ортонормированный то  $G_e = E$ , тогда  $(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$   
 Разложение любого вектора  $x$  по ортонормированному базису  $e$ :

$$x = \sum_{i=1}^n (x, e_i) x_i$$

## §5 Ортогональное дополнение.

**Определение.** Пусть  $\mathcal{E}$  – евклидово пространство,  $\emptyset \neq U \subseteq \mathcal{E}$ , тогда ортогональное дополнение к  $U$  в  $\mathcal{E}$  – это подмножество  $U^\perp = \{y \in \mathcal{E} \mid (x, y) = 0, \forall x \in U\}$

Заметим, что если  $U \neq 0$ , то  $U$  подпространство в  $\mathcal{E}$ :

$$0 \in U^\perp, (x, y_1) = 0, (x, y_2) = 0 \implies$$

$$(x, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \alpha_1 \underbrace{(x, y_1)}_{=0} + \alpha_2 \underbrace{(x, y_2)}_{=0} = 0 \implies \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 \in U^\perp$$

**Теорема.** Если  $\dim \mathcal{E} = n$ ,  $U \subseteq \mathcal{E}$  – подпространство в  $\mathcal{E}$ , то

1.  $\dim U + \dim U^\perp = \dim \mathcal{E} = n$
2.  $\mathcal{E} = U \oplus U^\perp$

*Доказательство.*  $U \cap U^\perp = \{0\}$ : если  $v \in U \cap U^\perp \implies (v, v) = 0 \implies v = 0$

Выберем базис в  $U$ :  $e_1, \dots, e_m$  ( $\dim U = m$ ,  $0 < m < n$ ).

$$y \in U^\perp \iff (y, e_i) = 0, \forall 1 \leq i \leq m$$

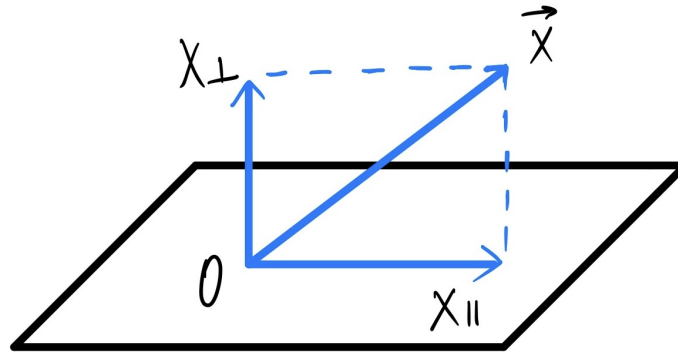
$\implies$  по определению.

$$\iff \text{если } (y, e_i) = 0, \forall i = 1, \dots, m \text{ и } \sum_{i=1}^m x_i e_i \implies (x, y) = \sum_{i=1}^m x_i (e_i, y) = 0$$

Получается, что  $U^\perp$  – подпространство решений ОСЛУ:

$$\begin{cases} (e_1, y) = 0 \\ \dots \\ (e_m, y) = 0 \end{cases} \implies \dim U^\perp = n - m \implies \dim U^\perp + \dim U = n \implies \mathcal{E} = U \oplus U^\perp$$

Это означает, что объединив О.Н.Б. пространства  $U$  и О.Н.Б. пространства  $U^\perp$ , получим О.Н.Б в  $\mathcal{E}$  (О.Н.Б. - ортонормированный базис).  $\square$



$$x = x_{\parallel} + x_{\perp}, \quad x_{\parallel} \in U, \quad x_{\perp} \in U^{\perp}$$

$x_{\parallel}$  – ортогональная проекция вектора  $x$  на  $U$ .

$x_{\perp}$  – ортогональная проекция вектора  $x$  на  $U^{\perp}$ .

Конкретно разложение вектора  $x \in \mathcal{E}$  на сумму проекции и составляющей.

1 способ. Выбрать О.Н.Б. в  $\mathcal{E}$ ,  $\underbrace{e_1, \dots, e_m}_{\text{О.Н.Б. в } U}, \underbrace{e_{m+1}, \dots, e_n}_{\text{О.Н.Б. в } U^{\perp}}$

$$\forall x = \underbrace{\sum_{i=1}^m (x, e_i) e_i}_{x_{\parallel}} + \underbrace{\sum_{i=m+1}^n (x, e_i) e_i}_{x_{\perp}}$$

2 способ. Пусть  $a_1, \dots, a_m$  – произвольный базис в  $U$ .

Искать разложение  $x$  в виде:

$$x = \sum_{i=1}^m \alpha_i a_i + x_{\perp} \mid \cdot a_j \implies (x, a_j) = \sum \underbrace{(a_i, a_j)}_{=0} \alpha_i + \underbrace{(x_{\perp}, a_j)}_{=0}$$

Эта система имеет единственное решение  $(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ . Матрица этой системы – это  $G_{a_1, \dots, a_m}$

**Определение.** Угол между вектором  $x$  и подпространством  $U$  – угол между  $x$  и  $x_{\parallel}$ ,  $\rho(x, U) := \|x_{\perp}\|$

**"Теорема" Пифагора.**

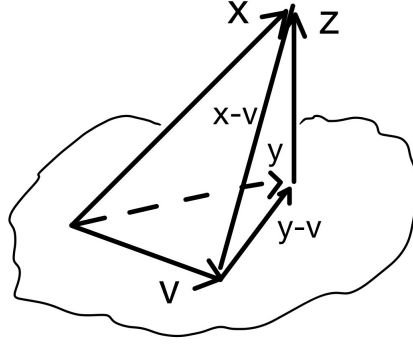
$$x = y + z, \quad y \in U, \quad z \in U^{\perp} \implies |x|^2 = |y|^2 + |z|^2$$

$$(x, x) = (y + z, y + z) = |y|^2 + \underbrace{2(y, z)}_0 + |z|^2$$

**Утверждение.**  $\min\{|x - v| : v \in U\} = |z|$

$$x - v = (x - y) + (y - v) = z + \underbrace{(y - v)}_{\in U}$$

$$|x - v|^2 = |z|^2 + |y - v|^2 \geq |z|^2, \text{ равенство } \iff x = y \xRightarrow{\text{ДОК-ТЬ}} \alpha \leq \beta, \quad \forall v \in U$$



**Свойства операции  $\perp$ :**  $(\forall U \subseteq V \mapsto U^\perp, \dim \mathcal{E} < \infty)$

1.  $(U^\perp)^\perp = U$
2.  $(U_1 + U_2)^\perp = U_1^\perp \cap U_2^\perp$
3.  $(U_1 \cap U_2)^\perp = U_1^\perp + U_2^\perp$

*Доказательство.*

$$1. \forall u \in U, \forall v \in U^\perp \implies (u, v) = 0 \implies u \in (U^\perp)^\perp$$

Равенство размерностей:

$$\dim U^\perp = n - \dim U, \dim (U^\perp)^\perp = n - \dim U^\perp = \dim U \implies U = (U^\perp)^\perp$$

$$2. \text{ Возьмем } v \in U_1^\perp \cap U_2^\perp, \text{ тогда } \forall w = u_1 + u_2, (v, w) = \underbrace{(v, u_1)}_0 + \underbrace{(v, u_2)}_0 \implies$$

$$v \in (U_1 + U_2)^\perp \implies U_1^\perp \cap U_2^\perp \subseteq (U_1 + U_2)^\perp$$

Равенство размерностей:

$$\begin{aligned} \dim(U_1 + U_2)^\perp &= n - \dim(U_1 + U_2) = \\ &= n - (\dim U_1 + \dim U_2 - \dim(U_1 \cap U_2)) = \\ &= n + \dim(U_1 \cap U_2) - \dim U_1 - \dim U_2 = \\ &= (n - \dim U_1) + (n - \dim U_2) + \dim(U_1 \cap U_2) - n \implies \\ \dim(U_1^\perp \cap U_2^\perp) &= \dim U_1^\perp + \dim U_2^\perp - \dim(U_1^\perp \cap U_2^\perp) = \\ &= n - \dim U_1 + n - \dim U_2 - \dim(U_1^\perp + U_2^\perp) \end{aligned}$$

$$\dim(U_1^\perp + U_2^\perp) \stackrel{?}{=} n - \dim(U_1 \cap U_2)$$

$$\dim(U_1^\perp + U_2^\perp) = \dim U_1^\perp + \dim U_2^\perp - \dim(U_1^\perp \cap U_2^\perp)$$

$$(U_1 + U_2)^\perp \subseteq U_1^\perp \cap U_2^\perp$$

$$\text{Если } v \in (U_1 + U_2)^\perp \implies \begin{cases} (v, u_1) = 0, \forall u_1 \in U_1 \\ (v, u_2) = 0, \forall u_2 \in U_2 \end{cases} \implies v \in U_1^\perp \cap U_2^\perp$$

$$3. (U_1 \cap U_2)^\perp = U_1^\perp + U_2^\perp \iff \underbrace{(U_1 \cap U_2)^{\perp\perp}}_{U_1 \cap U_2} \stackrel{?}{=} (U_1^\perp + U_2^\perp) = (\text{свойство 2}) =$$

$$= (U_1^\perp)^\perp \cap (U_2^\perp)^\perp = U_1 \cap U_2$$

□

## Изоморфизм евклидовых пространств.

$\varphi : \mathcal{E} \mapsto \mathcal{E}'$  – изоморфизм евклидовых пространств  $\mathcal{E}$  и  $\mathcal{E}'$ , если

1.  $\varphi$  – линейное отображение.
2.  $\varphi$  – биекция.
3.  $\forall x_1, x_2 \in \mathcal{E} \implies (\varphi(x_1), \varphi(x_2)) = (x_1, x_2)$

**Теорема.** Если  $\dim \mathcal{E} = \dim \mathcal{E}'$ , то  $\mathcal{E}$  и  $\mathcal{E}'$  изоморфны, т.е. существует изоморфизм  $\varphi : \mathcal{E} \mapsto \mathcal{E}'$

*Доказательство.* Выберем  $e_1, \dots, e_n$  – О.Н.Б. в  $\mathcal{E}$ ,  $e'_1, \dots, e'_n$  – О.Н.Б. в  $\mathcal{E}'$

$\forall x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ , определим  $\varphi(x) = \sum_{i=1}^n x_i e'_i$  (в частности,  $\varphi(e_i) = e'_i$ )

$\varphi$  – линейный изоморфизм.

$$\forall x, y \in \mathcal{E}, (x, y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i, (\varphi(x), \varphi(y)) = \left( \sum_i x_i e'_i, \sum_j y_j e'_j \right) = \sum_{i=1}^n x_i y_i = (x, y)$$

□

**Теорема.**

1. Пусть  $e, e'$  – два О.Н.Б. в евклидовом пространстве  $\mathcal{E}$ ,  $C_{e \rightarrow e'} \implies C_{e \rightarrow e'}^T = C_{e \rightarrow e'}^{-1}$  (ортогональная матрица).
2. Если  $e$  – О.Н.Б.,  $C$  – ортогональная матрица, то  $eC = e'$  – тоже О.Н.Б.

*Доказательство.*

1. Дано:  $e'$  – О.Н.Б.  $\implies (e_i, e_j) = \delta_{ij}$  (символ Кронекера)

$$(e_i, e_j) = (C^T C)_{ij} \implies C^T C = E$$

2.  $C_{e \rightarrow e'} = (e_1' \dots e_n')^{\uparrow}$  в базисе  $e$ . Т.к. базис  $e$  ортонормированный, то  $(e_i', e_j') = e_i' \cdot e_j'^{\uparrow}$  – это  $(i, j)$  элемент произведения:

$$C^T C = E \implies (e_i', e_j') = \delta_{ij} \implies e' \text{ – О.Н.Б.}$$

□

## Понятие объема n-мерного параллелепипеда.

Параллелепипед  $\Pi$  с ребрами  $a_1, \dots, a_n$  в n-мерном пространстве  $V$ .

$$\Pi = \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i a_i \mid 0 \leq \alpha_i \leq 1, 1 \leq i \leq n \right\}$$

Будем считать, что  $a_1, \dots, a_n$  ЛНЗ.

В n-мерном евклидовом пространстве  $\mathcal{E}_n$

**Определение.** Объемом  $n$ -мерного параллелепипеда  $V_n$  называется произведение объема  $(n-1)$ -мерного основания  $\Pi_{\{a_1, \dots, a_{n-1}\}}$  на высоту  $|a_n^\perp|$

Формула:  $|a_n^\perp|^2 = \frac{\det G_{\{a_1, \dots, a_n\}}}{\det G_{\{a_1, \dots, a_{n-1}\}}}$

*Доказательство.* Ортогонализуем векторы  $a_1, \dots, a_n$  – получим попарно ортогональные  $b_1, \dots, b_n$  (в частности,  $b_n \perp b_1, \dots, b_{n-1}$ ,  $\langle b_1, \dots, b_{n-1} \rangle = \langle a_1, \dots, a_{n-1} \rangle$ )

$$G_{\{b_1, \dots, b_n\}} = C^T G_{\{a_1, \dots, a_n\}} C, \text{ при этом } C = \begin{pmatrix} 1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow G_{\{b_1, \dots, b_n\}} = G_{\{a_1, \dots, a_n\}}$$

$$\frac{\det G_{\{a_1, \dots, a_n\}}}{\det G_{\{a_1, \dots, a_{n-1}\}}} = \frac{|b_1|^2 \dots |b_n|^2}{|b_1|^2 \dots |b_{n-1}|^2} = |b_n|^2 = |a_n^\perp|^2$$

□

**Следствие.** По индукции,  $V_n^2 = \det G_{\{a_1, \dots, a_n\}}$

**Следствие.**

$$\rho^2(x, U) = \frac{\det G_{\{a_1, \dots, a_m, x\}}}{G_{\{a_1, \dots, a_m\}}} (U = \langle a_1, \dots, a_m \rangle \text{ ЛНЗ})$$

**Следствие.** Если известны координаты векторов  $a_1, \dots, a_n$  в О.Н.Б., то

$$V_n = \left| \det \begin{pmatrix} \vec{a}_1 \\ \vdots \\ \vec{a}_n \end{pmatrix} \right|$$

*Доказательство.* Т.к. базис ортонормированный, то

$$\begin{pmatrix} \vec{a}_1 \\ \vdots \\ \vec{a}_n \end{pmatrix} (a_1^\uparrow \dots a_n^\uparrow) = \det G_{\{a_1, \dots, a_n\}} \Rightarrow$$

$$V_n^2 = \det G_{\{a_1, \dots, a_n\}} = \left( \det \begin{pmatrix} \vec{a}_1 \\ \vdots \\ \vec{a}_n \end{pmatrix} \right)^2$$

□

## §6. Линейный оператор в евклидовом пространстве

Пусть  $\mathcal{E}$  – евклидово пространство,  $\varphi : \mathcal{E} \mapsto \mathcal{E}'$

**Определение.** Оператор  $\varphi^*$  – сопряженный к  $\varphi$ :

$$\varphi^* : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}, \quad \forall x, y \in \mathcal{E} : (\varphi(x), y) = (x, \varphi^*(y)) \quad (1)$$

**Определение.** Оператор  $\varphi$  – самосопряженный, если

$$\varphi^* = \varphi, \text{ т.е. } \forall x, y \in \mathcal{E} : (\varphi(x), y) = (x, \varphi(y))$$

**Определение.** Оператор  $\varphi$  – ортогональный, если

$$\forall x, y \in \mathcal{E} : (\varphi(x), \varphi(y)) = (x, y)$$

**Условия на матрицу  $A_\varphi$ :**

1. (1) в координатах:

$$\begin{aligned} (A_\varphi X)^T G_e Y &= X^T G_e (A_{\varphi^*} Y) \implies \\ X^T (A_\varphi^T G_e) Y &= X^T (G_e A_{\varphi^*}) Y, \quad \forall X, Y \in F^n \implies \\ A_\varphi^T G_e &= G_e A_{\varphi^*} \implies \\ A_{\varphi^*} &= G^{-1} A_\varphi^T G_e \end{aligned}$$

Если  $e$  – О.Н.Б., то  $G_e = E$  и  $A_{\varphi^*} = A_\varphi^T$

2.  $\varphi = \varphi^*$  – самосопряженный  $\iff (\varphi(x), y) = (x, \varphi(y)), \quad \forall x, y \in \mathcal{E}$

$$\begin{aligned} (A_\varphi X)^T G_e Y &= X^T G_e A_\varphi Y, \quad \forall X, Y \in \mathbb{R}^n \\ X^T (A_\varphi^T G_e) y &= X^T (G_e A_\varphi) Y \iff A_\varphi^T G_e = G_e A_\varphi \end{aligned}$$

В О.Н.Б.  $\iff A_\varphi^T = A_\varphi$  – симметричная.

3.  $\varphi$  – ортогональный  $\iff \forall x, y : (\varphi(x), \varphi(y)) = (x, y) \iff$

$$\begin{aligned} (A_\varphi X)^T G_e (A_\varphi Y) &= X^T G_e Y \\ X^T (A_\varphi^T G_e A_\varphi) Y &\equiv X^T G_e Y \iff A_\varphi^T G_e A_\varphi = G_e \end{aligned}$$

В О.Н.Б.:  $A_\varphi^T A_\varphi = E$ ,  $A_\varphi$  – ортогональная.

Комментарий к определению  $\varphi^*$ :

Пусть  $\varphi : V \longrightarrow W$  – линейное отображение.

Тогда  $\varphi^* : \underbrace{W^*}_{f \in} \longrightarrow V^*$  определим по правилу:  $\varphi^*(f)(v) = f(\varphi(v)), \quad \forall v \in V$

Это  $\varphi^*$  – линейное отображение, в частности, для  $W = V$ , то  $\varphi^* : V^* \longrightarrow V^*$  – линейный оператор.

**Утверждение.** Если  $\mathcal{E}$  – евклидово пространство, то  $\mathcal{E}^* \cong \mathcal{E}$ .

*Доказательство.* Построение изоморфизма:

Выберем в  $\mathcal{E}$  О.Н.Б.  $e$ ,  $\forall v \in \mathcal{E} : v = \sum_{i=1}^n x_i e_i$

$$\forall f \in \mathcal{E}^*, f(v) = \sum_{i=1}^n \underbrace{f(e_i)}_{a_i} x_i = \sum_{i=1}^n a_i x_i = (a_1, \dots, a_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (a, v)$$

Т.к. базис ортонормированный и  $a = \sum_{i=1}^n a_i e_i$ ,  $v = \sum_{i=1}^n x_i e_i$

Т.е. для функции  $f$  найти такой вектор, что  $f(v) = (a, v)$ ,  $\forall v \in \mathcal{E}$   
 $f \longleftrightarrow a$ , можно "отождествить"  $\mathcal{E}$  и  $\mathcal{E}^*$  □

### Свойства операции сопряжения:

1.  $(\varphi^*)^* = \varphi$
2.  $(\alpha\varphi + \beta\varphi)^* = \alpha\varphi^* + \beta\varphi^*$
3.  $(\varphi\psi)^* = \psi^*\varphi^*$

*Доказательство.* Достаточно доказать для матриц в О.Н.Б.

1.  $A_{\varphi^*} = A_{\varphi}^T \implies A_{\varphi^{**}} = (A_{\varphi^*})^T = A_{\varphi}^{TT} = A_{\varphi}$
2. Очевидно.
3.  $A_{(\varphi\psi)^*} = A_{\varphi\psi}^T = (A_{\varphi}A_{\psi})^T = A_{\psi}^T A_{\varphi}^T = A_{\psi^*}A_{\varphi^*}$  □

**Теорема.** Пусть  $\varphi : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$  – линейный оператор. Тогда:

1. Если  $\varphi(U) \subseteq U$ , то  $\varphi^*(U^{\perp}) \subseteq U^{\perp}$
2.  $\text{Im}\varphi = (\text{Ker}\varphi^*)^{\perp}$
3.  $\text{Ker}\varphi = (\text{Im}\varphi^*)^{\perp}$

*Доказательство.*

1. Пусть  $x \in U$ ,  $y \in U^{\perp}$ .  $\varphi^*(y) \subseteq U^{\perp} \iff$

$$0 \stackrel{?}{=} (x, \varphi^*(y)) = \underbrace{(\varphi(x), y)}_{\in U} = 0 \implies \varphi^* \in U^{\perp}$$

2. Возьмем  $y \in \text{Im}\varphi \implies \exists x \in \mathcal{E} : y = \varphi(x)$

Возьмем  $z \in \text{Ker}\varphi^*$ . Вычислим:

$$(y, z) = (\varphi(x), z) = (x, \underbrace{\varphi^*(z)}_0) = 0 \implies$$

$$y \in (\text{Ker}\varphi^*)^{\perp} \implies \text{Im}\varphi \subseteq (\text{Ker}\varphi^*)^{\perp}$$

$$\dim \text{Im}\varphi = \text{rk}A_{\varphi}, \dim \text{Ker}\varphi^* = n - \dim \text{Im}\varphi^* = n - \text{rk}A_{\varphi}.$$

$$\text{Но } \text{rk}A_{\varphi^*} = \text{rk}A_{\varphi} \text{ (в О.Н.Б. } A_{\varphi^*} = A_{\varphi}^T) \implies$$

$$\dim(\text{Ker}\varphi^*)^\perp = n - \dim\text{Ker}\varphi^* = \text{rk}A_\varphi \implies \text{размерности равны}$$

$$3. \text{Ker}\varphi = (\text{Im}\varphi^*)^\perp \iff (\text{Ker}\varphi)^\perp = \text{Im}\varphi^*$$

Заменяем  $\varphi$  на  $\varphi^*$ , тогда  $\varphi^*$  на  $\varphi^{**}$  в равенстве 2.

Тогда  $(\text{Ker}\varphi^*)^\perp = \text{Im}\varphi$  в исходных обозначениях это дает  $(\text{Ker}\varphi)^\perp = \text{Im}\varphi^*$

□

**Следствие.** (Теорема Фредгольца)

СЛУ  $AX = b$  (\*) совместна  $\iff \forall Y$  – решения сопряженной однородной системы  $A^TY = 0$  выполняется условие:  $Y^Tb = 0$ , (т.е.  $Y \perp b$ )

Система (\*) совместна означает, что  $b \in \text{Im}\varphi$ , если  $A$  – матрица оператора  $\varphi$   
По 2,  $b \in \text{Im}\varphi \iff b \in (\text{Ker}\varphi^*)^\perp$ , т.е.  $\forall Y : A^TY = 0, (b, Y) = 0$

## §7. Самосопряженные операторы.

**Определение.**  $\varphi : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$  называется самосопряженным, если

$$\forall x, y \in \mathcal{E} : (\varphi(x), y) = (x, \varphi(y)) \quad (1)$$

**Теорема.** Пусть  $\varphi : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$  – самосопряженный оператор

1. Если  $U \subseteq \mathcal{E}$  –  $\varphi$ -инвариантное подпространство, то  $U^\perp$  также  $\varphi$ -инвариантно (это доказано для  $\varphi^*$ )
2. Все характеристические корни  $\varphi$  вещественные.
3. В  $\mathcal{E}$  существует О.Н.Б. из собственных векторов оператора  $\varphi$  (в нем  $A_\varphi$  диагональна).

*Доказательство.*

2. Пусть  $\lambda_1$  – характеристический корень для  $\chi_\varphi(\lambda)$

Если  $\lambda_1 \in \mathbb{R}$  – это собственное значение, и доказывать нечего. (С) Чубаров

Если  $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ , то существует двумерное инвариантное подпространство  $U = \langle X, Y \rangle$ ,  $X, Y \in \mathbb{R}^n$ .

$(x, y)|_U$  делает его евклидовым пространством.

$(x, y \in U)$ , соответственно,  $\varphi|_U$  будет самосопряженным оператором на  $U \implies$

в О.Н.Б.  $e'_1, e'_2$ ,  $A_{\varphi|_U} = A$ , т.е.  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}^2$$

$$D = (a_{11} + a_{22})^2 - 4(a_{11}a_{22} - a_{12}^2) = (a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2 \geq 0 \implies \lambda \in \mathbb{R}$$

3. Индукция по  $\dim \mathcal{E} = n$ :



$\dim \mathcal{E} = 1 \implies \varphi(x) = \lambda x, \forall x \in \mathcal{E}$  – верно.

Для  $\dim \mathcal{E} = n > 1$  предположение индукции: в  $(n - 1)$ -мерном евклидовом пространстве самосопряженный оператор имеет О.Н.Б. из собственных векторов.

Фикс. одно собственное значение  $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ , обозн.  $U = \langle e_1 \rangle$ , если  $\varphi(e_1) = \lambda_1 e_1, |e_1| = 1$

Тогда  $U^\perp$  имеет размерность  $(n - 1)$  является евклидовым относительно  $(x, y)|_{U^\perp}$  и  $\varphi|_{U^\perp}$  – самосопряженный  $\implies$  в  $U^\perp \exists$  О.Н.Б.  $e_2, \dots, e_n : \varphi(e_i) = \lambda_i e_i$

Тогда  $e_1, \dots, e_n$  – нужный О.Н.Б.  $\square$

Задача: Пусть  $\varphi$  – самосопряженный оператор в  $\mathcal{E}$ ,  $\varphi^2 = \varphi$  (идемпотентный оператор). Тогда либо  $\varphi = \mathcal{E}$  или  $0$ , либо  $\varphi$  – ортогональное проектирование  $\mathcal{E}$  на некоторое подмножество.

## §8. Ортогональные операторы.

**Определение.** Линейный оператор  $\varphi : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$  называется ортогональным, если  $\forall x, y \in \mathcal{E} : (\varphi(x), \varphi(y)) = (x, y)$

Заметим, что  $|\varphi(x)| = |x|, \forall x \in \mathcal{E} \implies \varphi$  – невырожденный.

**Теорема.**  $\varphi : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$  – ортогональный оператор.

1. Собственные векторы, отвечающие различным собственным значениям ортогональны.
2. Все характеристические корни ортогональной матрицы  $|\lambda| = 1$ , вещественные только  $\pm 1$ .
3. Если  $\varphi(U) \subseteq U$ , то  $\varphi(U^\perp) \subseteq U^\perp$

*Доказательство.*

3. Пусть  $x \in U, y \in U^\perp, 0 = (x, y) = (\varphi(x), \varphi(y))$

Т.к.  $\varphi$  невырожденно, т.е. обратимо, то  $\forall x \in U \exists z \in U (z = \varphi^{-1}(x))$

$$(x, y) = (\varphi^{-1}(x), y) = (\varphi(\varphi^{-1}(x)), \varphi(y)) = (x, \varphi(y)) \implies \varphi(y) \in U^\perp$$

$\varphi^{-1}$  тоже ортогонален.

1. Пусть  $\varphi(x) = \lambda_1 x, x \neq 0, \varphi(y) = \lambda_2 y, y \neq 0, \lambda_1 \neq \lambda_2$ :

$$(\varphi(x), \varphi(y)) = \lambda_1 \lambda_2 (x, y) = (x, y)$$

$$(x, y)(1 - \underbrace{\lambda_1 \lambda_2}_{-1}) = 0 \implies 2(x, y) = 0 \implies (x, y) = 0$$

2. Если  $\lambda$  – собственное значение, то  $\lambda \in \{1, -1\}$ ,  $\varphi(x) = \lambda x$ ,  $x \neq 0$  :

$$(\varphi(x), \varphi(x)) = \lambda^2(x, x) = \underbrace{(x, x)}_{\neq 0} \implies \lambda^2 = 1, \lambda = \pm 1$$

Если  $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ , ( $\beta \neq 0$ ) – корень матрицы  $A_\varphi$ , то рассмотрим оператор  $\varphi^{\mathbb{C}} : \mathbb{C}^n \mapsto \mathbb{C}^n$ , ( $\dim V = n$ )

$$\varphi^{\mathbb{C}}(z) = \lambda_1 z, \quad z = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$((1, i), (1, i)) \stackrel{?!}{=} 1 \cdot 1 + i \cdot i$$

Введем в  $\mathbb{C}^n$  скалярное произведение векторов  $X, Y$  :

$$(X, Y) := \sum_{i=1}^n x_i \overline{y_i} \implies (X, X) = \sum_{i=1}^n |x_i|^2$$

При этом,  $(Y, X) = \overline{(X, Y)}$ , в частности,  $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ ,  $(X, \lambda Y) = \overline{\lambda} (X, Y)$

Пусть  $x \in \mathbb{C}^n$  – собственный для  $\varphi^{\mathbb{C}}$ , т.е.  $A_\varphi X = \lambda_1 X$ , вычислим

$$(\varphi^{\mathbb{C}}(x), \varphi^{\mathbb{C}}(x)) = (x, x)$$

$$(\lambda_1 X, \lambda_1 X) = \lambda_1 \overline{\lambda_1} (X, X) \implies |\lambda_1|^2 = 1, |\lambda| = \pm 1$$

□

**Определение.** Матрица называется канонической, если

$$A = \begin{pmatrix} \Phi_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \Phi_s & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

**Теорема.** Для любого ортогонального оператора в  $\mathcal{E}_n$  существует ортонормированный базис, в котором матрица  $A_\varphi$  имеет канонический вид, при этом числа  $p, q, s$  и углы  $\alpha_k$  ( $k = 1, \dots, s$ ) для  $\varphi$  определяется единственным образом, с точностью до порядка следования клеток.

*Доказательство.* Допустим, что  $\varphi$  имеет хотя бы одно вещественное собственное значение. Рассмотрим  $U = \mathcal{E}_1 \oplus \mathcal{E}_{-1}$  (прямая сумма собственных подпространств). Обозначим за  $p := \dim \mathcal{E}_1$ ,  $q := \dim U_{-1} \implies \dim U = p + q$ .

$U$  – инвариантное подпространство, тогда  $\mathcal{E} = U^\perp \oplus U$ ,  $U^\perp$  также инвариантно, и  $\varphi|_{U^\perp}$  не имеет вещественных собственных значений. Возьмем одно из них  $\lambda_1 = \cos \alpha_1 + i \sin \alpha_1 \sim L_1$ .

$$A_{\varphi|_{L_1}} = \begin{pmatrix} \cos \alpha_1 & -\sin \alpha_1 \\ \sin \alpha_1 & \cos \alpha_1 \end{pmatrix}$$

Индукция по размерности  $s$  (если  $s \neq 0$ ),  $\dim U^\perp = 2s$ .

Рассмотрим подпространство:  $L_1^\perp$  в пространстве  $U^\perp$ , его размерность равна  $2s - 2$ .

По предположению индукции, в  $L_1^\perp$  в  $U^\perp$  существует О.Н.Б., в котором матрица ограничения оператора  $\varphi$  имеет вид

$$\begin{pmatrix} \Phi_2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \Phi_n \end{pmatrix}$$

□

**Пример:** Пусть  $A^T = A^{-1}$  3-го порядка. Хотим найти матрицу

$$A \stackrel{?}{\sim} A' = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}, \quad \lambda_1 = \pm 1$$

$$|A'| = \begin{vmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{vmatrix} \lambda_1 = \lambda_1 = \pm 1$$

Зная, что можно вычислить собственный вектор  $\implies$  он дает ось поворота (м.б. с симметрией, если  $\lambda_1 = -1$ )

$$\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} A' = 2 \cos \alpha + \lambda_1 \implies \cos \alpha = \frac{\operatorname{tr} A - \lambda_1}{2}$$

Можно выбрать правый О.Н.Б.  $e_1, e_2$  в плоскости,  $\perp e_3$ ,  $\varphi(e_3) = \lambda_1 e_3$ ,  $|e_3| = 1$ .

Общий случай:  $\varphi : \mathcal{E} \mapsto \mathcal{E}$ .

**Лемма.** Если  $\varphi$  невырожденная, то все собственные значения оператора  $\varphi^* \cdot \varphi$  положительны.

**Теорема.** Любой невырожденный оператор  $\varphi$  может быть представлен в виде произведения (причем единственным образом)  $\varphi = \theta \cdot \psi$ , где  $\theta$  – ортогональный оператор, а  $\psi$  – самосопряженный со всеми положительными собственными значениями  $\lambda > 0$ .

*Доказательство.* Пусть  $\mu$  – собственное значение оператора  $\varphi^* \cdot \varphi$ ,  $(\varphi^* \cdot \varphi)(x) = \mu x$ ,  $x \neq 0$ . Вычислим:  $((\varphi^* \cdot \varphi)(x), x) = \mu(x, x)$

$$\underbrace{(\varphi(x), \varphi(x))}_{\neq 0} > 0 \implies \mu = \frac{(\varphi(x), \varphi(x))}{(x, x)} > 0$$

Матричная формулировка: любую невырожденную вещественную матрицу  $A$  можно представить, причем единственным образом, в виде  $A = BC$ , где  $B^T = B^{-1}$ ,  $C^T = C$ , с положительными собственными значениями.

Такое разложение называется полярным разложением оператора (матрицы).

Можно выбрать О.Н.Б.  $e_1, \dots, e_n$  в  $\mathcal{E}$ , тогда  $A = A_\varphi$ ,  $B = B_\theta$ ,  $C = C_\psi$ .

Доказательство матричного варианта:

Пусть задача решена:

$$A = BC \implies A^T = C^T B^T = CB^{-1} \implies A^T A = CB^{-1}BC = C^2$$

Т.к. матрица  $A^T A = C^2$  – симметричная, она задает самосопряженный линейный оператор, т.е. существует О.Н.Б.  $e'_1, \dots, e'_n$ , в котором

$$(A^T A)' = \begin{pmatrix} \mu_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_n \end{pmatrix} \text{ все } \mu_i > 0, \text{ по лемме.}$$

Хотим найти матрицу  $C'$ , чтобы

$$(C')^2 = \begin{pmatrix} \mu_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_n \end{pmatrix} \implies C' = \begin{pmatrix} \pm\sqrt{\mu_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \pm\sqrt{\mu_n} \end{pmatrix}$$

С учетом требования положительности

$$C' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}, \lambda_i = \sqrt{\mu_i} > 0 - \text{ единственная такая матрица.}$$

Пусть  $T$  – (ортогональная) матрица перехода от базиса  $e$  к базису  $e'$ , тогда

$$T^{-1}(A^T A)T = \begin{pmatrix} \mu_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_n \end{pmatrix} \implies C = TC'T^{-1} = T \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} T \implies$$

$B = AC^{-1}$  – эта матрица ортогональная

$$B^T = (C^{-1})TA^T = C^{-1}A^T \implies B^TB = (C^{-1}A^T)(AC^{-1}) = C^{-1}(\underbrace{A^TA}_{C^T})C^{-1} = E$$

□

**Замечание.** Можно также представить  $A$  в виде  $A = C'B'$ . Вопрос: можно ли утверждать, что  $B' = B$  или  $C' = C$ ?

Рассмотрим разложение  $A = BC$ , где  $C = T \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} T^{-1}$

$$A = (BT)diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n)T^{-1} = D \cdot diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n)F,$$

все  $>0$

где  $F, D$  – ортогональное сингулярное разложение.

## §9. Квадратичные формы на евклидовом пространстве.

Пусть  $k(x) = f(x, x)$  – квадратичная функция на евклидовом пространстве.  $f(x, y)$  – симметрическая билинейная форма, которая ее порождает.

Обозначим  $F$  – матрицу этой формы в некотором ортонормированном базисе.

Если ввести другой О.Н.Б.  $e' = eC$ ,  $C = C_{e \rightarrow e'}$  – ортогональная матрица.

Тогда  $F' = C^TFC = C^{-1}FC$ . Поэтому можно рассмотреть  $F$  как матрицу линейного оператора  $\varphi$  в базисе  $e$ ,  $\varphi$  – самосопряженный.

По теореме, в  $\mathcal{E}$  существует О.Н.Б.  $e'$ , в котором матрица этого оператора диагональная:  $diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ .

$$F_{e'} = C^{-1}FC = C^TFC$$

Т.е. в базисе  $e'$ , если сделать замену  $X = CY$  форма  $k$  приобретает вид:

$$k(y) = \lambda_1 y_1^2 + \dots + \lambda_n y_n^2$$

Причем  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  – собственные значения матрицы  $F$ .

Базисные векторы  $e'_1, \dots, e'_n$  называют главными осями для квадратичной формы  $k(x)$ .

**Определение.** Линейный оператор  $\varphi : \mathcal{E} \mapsto \mathcal{E}$  называется присоединенным к билинейной функции  $f(x, y)$ , если:

$$\forall x, y \in \mathcal{E} f(x, y) = (x, \varphi(y)) \quad (1)$$

**Утверждение.** 1. Для любой билинейной функции  $f(x, y)$  существует единственный присоединенный оператор, удовлетворяющий тождеству (1)

2. Если  $f(x, y) \equiv f(y, x)$ , то  $\varphi$  – самосопряженный.

*Доказательство.* Пусть  $e$  – некоторый базис в  $\mathcal{E}$ ,  $x = eX$ ,  $y = eY \implies$

$$f(x, y) = X^T F Y \equiv X^T (G_e A_\varphi) Y \iff F = G_e A_\varphi, \quad A_\varphi = G_e^{-1} F \quad (2)$$

Проверка самосопряженности для симметричности  $f(x, y)$ :

$$\forall x, y \in \mathcal{E} \quad (\varphi(x), y) = (y, \varphi(x)) = f(y, x) = f(x, y) = (x, \varphi(y))$$

□

**Теорема.** (О паре квадратичных форм).

Если  $f(x)$ ,  $g(x)$  – квадратичные формы на  $\mathcal{E}$  и  $g > 0$ , то в  $\mathcal{E}$  существует такой базис  $e'$ , что в новых координатах

$$f = \lambda_1 y_1^2 + \dots + \lambda_n y_n^2, \quad g = y_1^2 + \dots + y_n^2$$

*Доказательство.*

Обозначим  $f(x, y)$  и  $g(x, y)$  – симметричные билинейные функции:

$f(x, x) = f(x)$ ,  $g(x, x) = g(x)$ ,  $F$  и  $G$  их матрицы в некотором базисе  $e$ .

Можно ввести в пространстве  $\mathcal{E}$  скалярное произведение  $(x, y) := g(x, y)$

Пусть  $\varphi : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$  – линейный оператор, присоединенный к билинейной форме  $f(x, y)$ , т.е.  $\forall x, y : f(x, y) = g(x, \varphi(y))$

Т.к. оператор  $\varphi$  самосопряженный, то по основной теореме о самосопряженных операторах в пространстве  $\mathcal{E}$  существует базис из собственных векторов для  $\varphi$  ортонормированный относительно скалярного произведения  $g(x, y)$ .

Пусть  $e'$  – этот базис,  $C$  – матрица перехода от  $e$  к  $e'$

$$X = CY \implies g(y) = y_1^2 + \dots + y_n^2 = (y, y)$$

$$F' = C^T F C; \quad F = G A_\varphi; \quad A'_\varphi = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$G' = C^T G C = E \implies G C = (C^T)^{-1}$$

Тогда

$$C^{-1} A_\varphi C = C^{-1} G^{-1} F C = C^T F C = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \implies$$

$$f(y) = \lambda_1 y_1^2 + \dots + \lambda_n y_n^2$$

□

**Замечание.**  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  – собственные значения матрицы  $A_\varphi = G^{-1}F$ , т.е. они являются корнями уравнения  $|A_\varphi - \lambda E| = 0$ , т.е.

$$|G^{-1}F - \lambda E| = 0 \iff |GG^{-1}F - \lambda G| = |F - \lambda G| = 0$$

( $\lambda$ -уравнение пары матриц  $F, G$ )

Для каждого корня  $\lambda_i$  надо решить систему уравнений

$$(G^{-1}F - \lambda_i E)X = 0 \iff (F - \lambda_i G)X = 0$$

□

### Пример применения:

Найти наибольшие и наименьшие значения квадратичной формы  $f(x)$  в  $\mathbb{R}^n$  при условии, что  $g(x) = 1$ , где  $g(x)$  – положительно определенная квадратичная форма.

Решение: Можно найти такую замену переменных  $X = CY$ , что

$$f(x) = \lambda_1 y_1^2 + \dots + \lambda_n y_n^2 \quad g(y) = y_1^2 + \dots + y_n^2 = 1 \text{ – единичная сфера в } \mathbb{R}^n$$

Ответ:  $f_{\max} = \max \lambda_i, \quad f_{\min} = \min \lambda_i$  (додумать)

## §10. Полуторалинейные функции (формы.)

Пусть  $V$  – векторное пространство над полем  $\mathbb{C}$ .

**Определение.** Функция  $\beta : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$  называется полуторалинейной, если

1.  $\forall x_1, x_2, y \in V$  вып.  $\beta(x_1 + x_2, y) = \beta(x_1, y) + \beta(x_2, y)$  и  
 $\forall \lambda \in \mathbb{C}$  вып.  $\beta(\lambda x, y) = \lambda \beta(x, y)$ . Линейность по 1 аргументу.
2.  $\beta(x, y_1 + y_2) = \beta(x, y_1) + \beta(x, y_2)$  и  
 $\beta(x, \lambda y) = \bar{\lambda} \beta(x, y)$

В координатах:

$$\beta(x, y) = \beta\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{j=1}^n y_j e_j\right) = \sum_{i,j=1}^n \beta(x_i e_i, y_j e_j) = \sum_{i,j=1}^n \beta(e_i, e_j) x_i \bar{y}_j$$

$B_e = (\beta(e_i, e_j))$  – матрица формы  $\beta$  в базисе  $e$ .

$$\beta(x, y) = X^T B_e \bar{Y} \quad (1)$$

Квадратичная форма  $q := \beta(x, x) \neq 0$ .

$$q(x) = \sum_{i,j=1}^n b_{ij} x_i \bar{x}_j$$

Если  $\beta_{ij} = 0$ , при  $i \neq j$ , остается  $b_{ij} = \beta(e_i, e_j)$

$$q(x) = \sum_{i=1}^n b_{ii} x_i \overline{(x_i)} = \sum_{i=1}^n b_{ii} |x_i|^2$$

Эрмитова форма (или эрмитово симметричная)

$$\forall x, y \in V \text{ вып. } \beta(y, x) = \overline{\beta(x, y)}$$

Тогда  $\beta(x, x) = \overline{\beta(x, x)}$ , т.е.  $\forall x \in V \text{ вып. } q(x) = \beta(x, x) \in \mathbb{R}$

Задача. Для эрмитово квадратичной формы  $q(x)$  существует единственная форма  $\beta(x, y) : \beta(x, x) = q(x) \forall x \in V$ .

**Замечание.**  $\beta(x, y)$  эрмитова  $\iff B_e^T = \overline{B_e} \iff \overline{B_e^T} = B_e$

**Теорема.** (О приведении эрмитово квадратичной формы к каноническому (нормальному) виду).

Для любой эрмитовой формы (полуторалинейной) существует базис, в котором  $\beta(x, y) = \sum_{i=1}^n b_{ii} x_i \overline{y_i}$ . Точнее,

$$\beta(x, y) = x_1 \overline{y_1} + \dots + x_p \overline{y_p} - x_{p+1} \overline{y_{p+1}} - \dots - x_{p+q} \overline{y_{p+q}},$$

где  $p + q = \text{rk} B$ . Соответственно  $q(x) = |x_1|^2 + \dots + |x_p|^2 - |x_{p+1}|^2 - \dots - |x_{p+q}|^2$  ( $q$  и  $p$  единственны).

**Определение.** Эрмитова квадратичная форма положительно определенная, если  $q(x) > 0 \forall x \neq 0$ . Отрицательно определенная, если  $q(x) < 0 \forall x \neq 0$ . (Критерий Сильвестра сохраняются без изменений).

## §11. Унитарные (эрмитовы) пространства.

**Определение.** Векторное пространство  $\mathcal{H}$  над полем  $\mathbb{C}$  называется унитарным, если на этом  $\mathcal{H}$  задано скалярное произведение  $(x, y)$  полуторалинейная форма (полуторалинейная по 2 аргументу), эрмитова:  $(y, x) = \overline{(x, y)}$  и  $(x, x) > 0, \forall x \neq 0$ .

**Определение.**  $|x| = \sqrt{(x, x)}$  – длина вектора.

Неравенство КБШ:  $\forall x, y \in \mathcal{H} : |(x, y)| \leq |x| \cdot |y|$

$$\cos \varphi(x, y) = \frac{(x, y)}{|x| \cdot |y|} \in \mathbb{C}$$

$$(x, y) = 0 \iff x \perp y$$

**Теорема.** (Ортогонализация).

В  $\mathcal{H}$  существует ортогональный (и ортонормированный) базис.



## Изменение матрицы полуторалинейной формы.

При замене базиса:  $B' = C^T B \overline{C}$

$\beta(x, y) = X^T B \overline{Y}$  – в исходном базисе.

$$X = CX', Y = CY' \implies$$

$$\beta(x, y) = (CX')^T B \overline{(CY')} = (X')^T (C^T B \overline{C}) \overline{Y'} \equiv (X')^T B' \overline{Y'} \implies$$

$$B' = C^T B \overline{C}$$

**Теорема.** Если  $e$  и  $e'$  два О.Н.Б., то матрица перехода  $C_{e \rightarrow e'}$  унитарно, т.е. если ее подвергнуть эрмитову сопряжению, то она превратится в обратную:  $C_{e \rightarrow e'}^* = \overline{C}_{e \rightarrow e'}^T = C_{e \rightarrow e'}^{-1}$

*Доказательство.* По определению матрица перехода,  $C = (e_1'^\uparrow, \dots, e_n'^\uparrow) \implies$

$$C^T = \begin{pmatrix} e_1' \\ \vdots \\ e_n' \end{pmatrix} \implies C^T \overline{C}_{ij} = e_i' e_j'^\uparrow$$

Т.к. базис  $e$  О.Н., то  $e_i' e_j'^\uparrow = (e_i' e_j')$

Т.к. базис  $e'$  О.Н., то  $(e_i' e_j') = \delta_{ij} \implies$

$$C^T \overline{C} = E \implies \overline{C^T \overline{C}} = \overline{E} = E \implies \overline{C}^T C = E \implies \overline{C}^T = C^{-1}$$

□

Процесс ортогонализации:

Если попарно ортогональные векторы  $e_1', \dots, e_{k-1}'$  ( $k \geq 2$ ) уже построены, то

$$e_k' = e_k - \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i e_i \mid \cdot e_j' \text{ справа } (1 \leq j \leq k-1) \implies$$

$$(e_k', e_j') = (e_k, e_j') - \sum_{i=1}^{k-1} (\lambda_i e_i', e_j') = (e_k', e_j') - \lambda_j (e_j', e_j') \implies$$

$$\text{pr}_{\langle e_1', \dots, e_{k-1}' \rangle}(e_k) = \sum_{i=1}^{k-1} \frac{(e_k, e_i')}{(e_i', e_i')} e_i'$$

$$U^\perp = \{u \in \mathcal{H} \mid (x, u) = 0, \forall x \in U\}$$

$$U \subset \mathcal{H}, \quad \mathcal{H} = U \oplus U^\perp$$

## §12. Линейные операторы в унитарном пространстве.

Пусть  $\varphi : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$  – линейный оператор (над  $\mathbb{C}$ ).

1. Сопряженный оператор:  $\forall x, y \in \mathcal{H} : (\varphi(x), y) = (x, \varphi^*(y))$

Матрица  $A_{\varphi^*}$  (в О.Н.Б.):

$$(\varphi(x), y) = (A_{\varphi}X)^T \bar{Y} = X^T A_{\varphi} \bar{Y}^T = X^T \overline{(A_{\varphi^*}Y)} = X^T \bar{A}_{\varphi^*} \bar{Y}$$

$$\forall X, Y \in \mathbb{C} \implies \bar{A}_{\varphi^*} = A_{\varphi}^T \iff A_{\varphi^*} = \bar{A}_{\varphi}^T = A_{\varphi}^*$$

2. Самосопряженный:  $\varphi^* = \varphi \iff A_{\varphi} = A_{\varphi}^*$  (в любом О.Н.Б.), т.е.  $A_{\varphi}$  эрмитова.

3. Унитарный:

$$\forall x, y \in \mathcal{H} : (\varphi(x), \varphi(y)) = (x, y) \iff \text{в любом О.Н.Б.}$$

$$(A_{\varphi}X)^T \overline{(A_{\varphi}Y)} = X^T (A_{\varphi}^T \bar{A}_{\varphi}) \bar{Y} = X^T \bar{Y}, \quad \forall X, Y \in \mathbb{C} \iff$$

$$A_{\varphi}^T \bar{A}_{\varphi} = E \iff A_{\varphi}^* A_{\varphi} = E, \quad \text{т.е. } A_{\varphi} \text{ – унитарна.}$$

**Следствие.** Если  $\varphi$  – унитарный оператор, то  $|\det A_{\varphi}| = 1$

*Доказательство.*

$$|E| = |\bar{A}_{\varphi}^T A_{\varphi}| = |\bar{A}_{\varphi}| |A_{\varphi}| = \overline{|A_{\varphi}|} |A_{\varphi}| = |\det A_{\varphi}|^2 = 1 \iff |\det A_{\varphi}| = 1$$

□

### Свойства операторов:

**Теорема.** Если  $\varphi : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$  – самосопряженный оператор, то

1. Собственные значения  $\lambda \in \mathbb{R}$
2. Собственные векторы, отвечающие различным собственным значениям перпендикулярны.
3. Если  $U \subset \mathcal{H}$  инвариантно относительно  $\varphi$ , то  $U^{\perp}$  инвариантно.
4. В  $\mathcal{H}$  существует О.Н.Б. из собственных векторов для  $\varphi$ , и в нем

$$A_{\varphi} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad \forall i = 1, \dots, n, \quad \lambda_i \in \mathbb{R}$$

*Доказательство.*

1. Если  $x \in \mathcal{H}$ ,  $x \neq 0$ :  $\varphi(x) = \lambda x$ , то

$$\begin{cases} (\varphi(x), x) = (\lambda x, x) = \lambda(x, x) \\ (x, \varphi(x)) = (x, \lambda x) = \bar{\lambda}(x, x) \end{cases} \implies \bar{\lambda} = \lambda \in \mathbb{R}$$

2. Пусть  $\varphi(x) = \lambda x$ ,  $x \neq 0$ ,  $\varphi(y) = \mu y$ ,  $y \neq 0$ ,  $\lambda \neq \mu \stackrel{?}{\implies} (x, y) = 0$

$$\text{Вычислим } \begin{cases} (\varphi(x), y) = \lambda(x, y) \\ (x, \varphi(y)) = (x, \mu y) = \bar{\mu}(x, y) = \mu(x, y) \end{cases} \implies$$

$$(x, y) \underbrace{(\lambda - \mu)}_{\neq 0} = 0 \implies (x, y) = 0$$

3. Пусть  $x \in U$ ,  $y \in U^\perp$ . Надо доказать, что  $(x, \varphi(y)) = 0$

По опр.  $(x, \varphi(y)) = (\varphi(x), y) = 0$   
 $\in U$

4. Пусть  $\lambda_1, \dots, \lambda_s$  – все различные собственные значения для  $\varphi$ . Возьмем,  $U = \mathcal{H}_{\lambda_1}$  – собственное подпространство – оно инвариантно.  $\implies U^\perp$  также инвариантно,  $\mathcal{H} = U \oplus U^\perp$ , собственные значения  $\varphi|_{U^\perp}$  – это  $\lambda_2, \dots, \lambda_s$ .

Индукция по  $\dim \mathcal{H}$  : в  $U^\perp$  существует О.Н.Б., составленный из О.Н. базисов  $\mathcal{H}_{\lambda_2}, \dots, \mathcal{H}_{\lambda_s}$ . В  $U$  надо взять О.Н.Б. (произвольный базис ортогонализировать и нормировать).

□

**Теорема.** Если  $\varphi : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$  – унитарный оператор, то

1. Все собственные значения оператора  $\varphi$ ,  $|\lambda| = 1$
2. Собственные векторы, отвечающие различным собственным значениям перпендикулярны.
3. Если  $\varphi(U) = U$ , то  $\varphi(U^\perp) = U^\perp$
4. В  $\mathcal{H}$  существует О.Н.Б. из собственных векторов для  $\varphi$ , и в нем

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} e^{i\alpha_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{i\alpha_n} \end{pmatrix}, \quad \alpha_i \in \mathbb{R}$$

*Доказательство.*

1. Если  $\varphi(x) = \lambda x$ ,  $x \neq 0$ , то

$$(\varphi(x), \varphi(x)) = \lambda \bar{\lambda} (x, x) = (x, x) \neq 0 \implies \lambda \bar{\lambda} = |\lambda|^2 = 1 \implies |\lambda| = 1$$

2. Если  $\varphi(x) = \lambda x$ ,  $\varphi(y) = \mu y$ ,  $x, y \neq 0$ ,  $\lambda \neq \mu$  :

$$(\varphi(x), \varphi(y)) = \lambda \bar{\mu} (x, y) = (x, y) \implies (x, y) (\lambda \bar{\mu} - 1) = 0 \implies (x, y) = 0$$

$$\neq 0$$

Либо  $(x, y) = 0$ , либо  $\lambda \bar{\mu} = 1$ , т.е.  $\mu = \lambda$  – противоречие.

$$(\lambda \neq \mu \iff \bar{\lambda} \neq \bar{\mu} \implies \lambda \bar{\lambda} \neq \lambda \bar{\mu} \neq 1)$$

3. Пусть  $x \in U$ ,  $y \in U^\perp$ , надо доказать, что  $(x, \varphi(y)) = 0$

Вычислим

$$(\varphi^{-1}(x), y) = (\varphi(\varphi^{-1}(x)), \varphi(y)) = (x, \varphi(y)) = 0$$

Т.к.  $x \in U$ , то  $\varphi^{-1}(x) \in U$

Комментарий: унитарный оператор невырожден (обратим).

В О.Н.Б.  $A_\varphi$  унитарна  $\implies |\det A_\varphi| = 1 \neq 0$

По определению подпространства,  $\varphi|_U : U \mapsto U \implies \varphi|_U$  биективно, в частности, если  $x \in U$ , то  $\varphi^{-1}(x) \in U$

4. Дословно повторяет доказательство п.4 теоремы для самосопряженного оператора (с заменой  $\lambda \in \mathbb{R}$  на  $|\lambda| = 1$ ).

□

**Теорема.** (О полярном разложении). Любая невырожденная матрица  $A \in M_n(\mathbb{C})$  единственным образом представляется в виде произведения:  $A = B \cdot U$ , где  $B^* = B$  – эрмитова матрица с положительными собственными значениями,  $U$  – унитарная матрица.

Второй вариант полярного разложения:

$$\underbrace{A^*}_{A^T} = U^* B^* = U^{-1} B \implies A A^* = B^2, \text{ и т.д., а также } A = U' B'$$

**Теорема.** Для любой эрмитовой квадратичной формы  $q(x)$  на унитарном пространстве существует О.Н.Б., в котором эта форма имеет вид:  $q = \lambda_1 |y_1|^2 + \dots + \lambda_n |y_n|^2$ , где  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  – собственные значения матрицы  $B$ .

## Глава IV. Аффинные пространства.

### §1. Основные определения и свойства.

**Определение.** Аффинное пространство – это пара  $(\mathbb{A}, V)$ , где  $\mathbb{A}$  – множество точек,  $V$  – векторное пространство (над полем  $F$ ), и выполнены следующие аксиомы: определена операция "прибавления" (откладывания) вектора к точке, т.е.  $\forall p \in \mathbb{A}, v \in V$  определим единственную точку  $q \in \mathbb{A} : q = p + v$ ,  
 $(\mathbb{A} \times V \mapsto \mathbb{A})$

1.  $\forall p \in \mathbb{A}, \forall u, v \in V : p + (u + v) = (p + u) + v$
2.  $\forall p \in \mathbb{A}, p + 0 = p$
3.  $\forall p, q \in \mathbb{A} \exists v \in V : p + v = q$  (обозн.  $v = \overrightarrow{pq}$ )

Заметим, что размерностью пространства  $\mathbb{A}$ , считается размерность пространства  $V$ . Из аксиомы 3 следует, что имеется биекция между  $\mathbb{A}$  и  $V$ .

Фиксируем  $p, \forall v \in V, \{p + v \mid v \in V\}$ .

**Пример:**  $\mathbb{A} = V$ , точки-радиус-векторы. Если  $q = p + v$ , то  $v = \overrightarrow{pq}$ , а также можно писать  $v = q - p$ .

**Аффинная система координат:**  $\{0; e\}$ ,  $e$  – базис в  $V$ .

$\forall p \in \mathbb{A}$  – координаты точки  $p$  – это координаты вектора  $\overrightarrow{Op}$  в базисе  $e$ .

Если  $p(x_1, \dots, x_n)$ ,  $q(y_1, \dots, y_n)$ , то

$$\overrightarrow{pq} = q - p = \sum_{i=1}^n (y_i - x_i) e_i$$

Вместо системы координат можно задать координаты каких-либо точек  $p_0, \dots, p_n$  в общем положении (аффинно независимые), т.е. векторы  $\overrightarrow{p_0p_1}, \dots, \overrightarrow{p_0p_n}$  ЛНЗ

(является базисом в  $V$ ).

**Определение.** Барицентрическая комбинация точек  $p_0, \dots, p_m$  ( $m \leq n = \dim \mathbb{A} = \dim V$ ) с коэффициентами  $\lambda_0, \dots, \lambda_m \in F$  с условием:  $\sum_{i=0}^m \lambda_i = 1$ . Определим  $\forall p \in \mathbb{A}$

$$\sum_{i=0}^m := p + \sum_{i=0}^m \lambda_i \overrightarrow{pp_i} = p + \sum_{i=0}^m \lambda_i (p_i - p) \quad (1)$$

**Лемма.** Выражение (1) не зависит от выбора точки  $p$  (при усл., что  $\sum_{i=0}^m \lambda_i = 1$ ).

*Доказательство.* Возьмем точку  $q = p + v$ , для некоторого  $v \in V$ . Тогда

$$\begin{aligned} q + \sum_{i=0}^m \lambda_i \overrightarrow{qp_i} &= q + \sum_{i=0}^m \lambda_i (p_i - q) = q + \sum_{i=0}^m \lambda_i (p_i - p - v) = \\ &= p + v + \sum_{i=0}^m \lambda_i (p_i - p) - \sum_{i=0}^m \lambda_i v = \sum_{i=0}^m \lambda_i (p_i - p) \end{aligned}$$

□

Если  $m = n$  и векторы  $\overrightarrow{p_0p_1}, \dots, \overrightarrow{p_0p_n}$  ЛНЗ, то любая точка  $p = \sum_{i=0}^n x_i p_i$ , причем  $\sum_{i=0}^n x_i = 1$ , точка  $\overrightarrow{p_0p}$  имеет координаты  $(x_1, \dots, x_n)$ , то  $x_0 = 1 - \sum_{i=0}^n x_i$ ,  $(x_0, \dots, x_n)$  – барицентрические координаты точки  $p$ .

### Изменение декартовых координат точек при замене системы координат.

Пусть  $\{O; e\}$  – старая система координат, точка  $z$  имеет координаты  $X$  (столбец координат),  $\{O', e'\}$  – новая система координат,  $e' = e C_{e \rightarrow e'}$

$$O' \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = X^0 \implies X = C X' + X^0 \quad (2)$$

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'P} \implies X = X^0 + CX'$$

Можно ввести "аффинную матрицу перехода"

$$\tilde{C} = \begin{pmatrix} C & X^0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

и "аффинный столбец"

$$\tilde{X} = \begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix},$$

тогда

$$\tilde{C}\tilde{X}' = CX' + X^0 = \tilde{X}$$

Таким образом, равенство (2)  $\iff \tilde{C}\tilde{X}' = \tilde{X}$  (2')

## §2. Аффинные подпространства (плоскости или линейные многообразия).

Наблюдение. Пусть  $(\mathbb{A}, V)$  – аффинное пространство, и в некоторой системе координат рассмотрим множество точек, координаты которых удовлетворяют совместной системе линейных уравнений:  $AX = b$ .

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} - \text{координаты точки } p; A_{n \times n}; b \in F^n$$

Тогда любое решение представляется в виде  $X = X_{\text{част}} + Y_{\text{одн}}$ , где  $Y_{\text{одн}}$  – общее решение соответствующее ассоциированной ОСЛУ  $AY = 0$ .

Обозн.  $U\{u = \sum_{i=1}^n y_i e_i \mid AY = 0\}$  – подпространство в  $V$ , и

$\pi := \{p_0 + u \mid u \in U\} = p_0 + U$  – смежный класс пространства  $V/U$ , если отождествить  $p_0$  с ее радиус-вектором.

**Определение.** Аффинная плоскость  $\pi = p_0 + U$ , где  $U$  – некоторое подпространство в  $V$ ,  $p_0 \in \mathbb{A}$  ( $U$  – направляющая плоскость для  $\pi$ ). Если  $\dim U = m$ , то при  $m = 0$  – одна точка, при  $m = 1$  – прямая с направляющим вектором  $a$ , если  $m = n - 1$  – гиперплоскость.

**Утверждение.** Для любой точки  $q \in \pi$ ,  $p + U = p_0 + U = \pi$  (т.е. определение плоскости  $\pi$  не зависит от выбора начальной точки).

*Доказательство.*  $q = p_0 + u_0$ ,  $u_0 \in U$

$$q = q + U = p_0 + (u_0 + U) = p_0 + U$$

□

$U$  можно определить как  $\{pq \mid \forall p, q \in \pi\}$  и  $\overline{pq} = q - p = u_0 - u_1 \in U$ .

**Следствие.** Для аффинной плоскости  $\pi = p_0 + U$  существует система уравнений  $AX = b$ , множество решений которой (в координатах) совпадает с  $\pi$ .

*Доказательство.* Введем систему координат  $\{O, e\}$ , пусть  $\dim U = m$ .

Как известно, существует матрица  $A_{m \times n}$ , такая что  $U = \{AY = 0\}$ .

Если  $p_0$  имеет координаты в виде столбца  $X^0$ , то обозначим  $b = AX^0$ .

Для любой точки  $p \in \pi$  имеем:  $p = p_0 + U$ , т.е. в координатах:

$$X = X^0 + Y \implies AX = AX^0 + AY = b + 0 = b$$

□

## Взаимное расположение двух плоскостей.

Пусть  $\pi_1 = p_1 + U_1$ ,  $\pi_2 = p_2 + U_2$ ,  $U_1, U_2 \subseteq V$ .

**Определение.**  $\pi_1$ ,  $\pi_2$  называются параллельными:

В узком смысле, если  $U_1 = U_2$  (направляющие подпространства совпадают).

В широком смысле, если  $U_1 \subseteq U_2$  или  $U_2 \subseteq U_1$ .

**Утверждение.**  $\pi = \pi_1 \cap \pi_2$  либо пусто, либо является плоскостью с направляющим подпространством  $U = U_1 \cap U_2$ , точнее  $\pi = r + U$ , где  $r \in \pi_1 \cap \pi_2$ .

*Доказательство.* Если  $\pi_1 \cap \pi_2 = \pi \neq \emptyset$ , возьмем точку  $r \in \pi_1 \cap \pi_2$ , тогда

$$\pi_1 = r + U_1, \pi_2 = r + U_2 \implies \pi_1 \cap \pi_2 = r + (U_1 \cap U_2)$$

Возьмем точку  $d \in \pi_1 \cap \pi_2 \implies d = r + u_1 = r + u_2$ ,  $u_1 \in U_1$ ,  $u_2 \in U_2 \implies$

$$u_1 = u_2 \in U_1 \cap U_2 \implies d \in r + (U_1 \cap U_2)$$

Таким образом, либо  $\pi_1 \cap \pi_2 = \emptyset$ , либо  $\dim(\pi_1 \cap \pi_2) = \dim(U_1 \cap U_2)$

□

В общем случае,  $\pi_1 \cup \pi_2$  плоскостью не будет.

**Определение.** Аффинная оболочка плоскостей  $\pi_1, \pi_2 : \langle \pi_1, \pi_2 \rangle$  – наименьшее по включению плоскость, содержащая обе эти плоскости.

**Утверждение.**  $\langle \pi_1, \pi_2 \rangle = p_0 + \{\overrightarrow{p_1 p_2} \mid p_1 \in \pi_1, p_2 \in \pi_2\}$ ,  $p_0 \in \pi_1$  или  $p_0 \in \pi_2$ .

*Доказательство.* Таким образом,  $\langle \pi_1, \pi_2 \rangle$  – плоскость, с направляющим подпространством вида  $U = \langle \overrightarrow{p_1 p_2} \mid p_1 \in \pi_1, p_2 \in \pi_2 \rangle$ . Если  $p \in \langle \pi_1, \pi_2 \rangle$ , то точки вида  $p_0 + \overrightarrow{p_1 p_2}$  принадлежат любой плоскости, содержащей  $\langle \pi_1, \pi_2 \rangle \implies p_0 + U$  – наименьшая плоскость, содержащая  $\langle \pi_1, \pi_2 \rangle$ .

□

**Теорема.**  $\langle \pi_1, \pi_2 \rangle = p_1 + \langle \overrightarrow{p_1 p_2}, U_1 + U_2 \rangle$

1.  $\pi_1 \cap \pi_2 \neq \emptyset \iff \overrightarrow{p_1 p_2} \in U_1 + U_2$  и при этом  $\dim \langle \pi_1, \pi_2 \rangle = \dim(U_1 + U_2)$ .

2.  $\pi_1 \cap \pi_2 = \emptyset$ , то  $\dim \langle \pi_1, \pi_2 \rangle = \dim(U_1 + U_2) + 1$ .

*Доказательство.* Обозначим  $\pi = p_1 + \langle \overrightarrow{p_1 p_2}, U_1 + U_2 \rangle$ .

Ясно, что  $\pi_1 \subseteq \pi$ ,  $\pi_2 \subseteq \pi \implies \langle \pi_1, \pi_2 \rangle \subseteq \pi$  (как наименьшая плоскость.)

Обратное включение  $\langle \pi_1, \pi_2 \rangle = p_1 + W$ ,  $W \subseteq V$

Т.к.  $p_2 \in \langle \pi_1, \pi_2 \rangle \implies \overrightarrow{p_1 p_2} \in W$ . Также ясно, что  $\forall u_1 \in U_1$ ,  $p_1 + u_1 \in \pi_1 \subseteq \pi$  и  $\forall u_2 \in U_2$ ,  $p_2 + u_2 \in \pi_2 \subseteq \pi \implies \overrightarrow{p_1 p_2} + u_2 \in W \implies u_2 \in W$ .



Таким образом,  $\langle \overrightarrow{p_1 p_2}, U_1 + U_2 \rangle \subseteq W \implies \pi \subseteq \langle \pi_1, \pi_2 \rangle$  – доказали равенство.

1. Если  $\pi_1 \cap \pi_2 \neq \emptyset$ , то  $\overrightarrow{p_1 p_2} \in U_1 + U_2 : \exists p \in \pi_1 \cap \pi_2 \text{ r.a. } \langle \overrightarrow{p_1 p_2}, U_1 + U_2 \rangle = U_1 + U_2$
2. Если  $\pi_1 \cap \pi_2 = \emptyset$ , то  $\overrightarrow{p_1 p_2} \notin U_1 + U_2 \implies \dim \langle \overrightarrow{p_1 p_2}, U_1 + U_2 \rangle = \dim(U_1 + U_2) + 1$

□

**Утверждение.** Для двух плоскостей  $\pi_1, \pi_2 \subset \mathbb{A}$  возможно одно из трех расположений:

1.  $\pi_1 \cap \pi_2 \neq \emptyset$ ,
2.  $\pi_1 \cap \pi_2 = \emptyset$  и  $\pi_1 \parallel \pi_2$ ,
3. Не выполнены 1. и 2. пункты:  $\pi_1 \cap \pi_2 = \emptyset$  и  $\pi_1 \nparallel \pi_2$  – скрещиваются.

### §3. Аффинные отображения.

Пусть  $\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2$  – аффинные пространства над векторными пространствами  $V_1, V_2$  (поле  $F$  над которым они определены одно и тоже).

**Определение.** отображение  $\Phi : \mathbb{A}_1 \mapsto \mathbb{A}_2$  – называется аффинным (или аффинно линейным), если существует линейное отображение линейных пространств  $\varphi : V_1 \mapsto V_2$ , т.ч.  $\forall a, b \in \mathbb{A}_\mathbb{K} : \overrightarrow{\Phi(a)\Phi(b)} = \varphi(\overrightarrow{ab})$  (1)

Эквивалентно:  $\Phi(b) = \Phi(a) + \varphi(\overrightarrow{ab})$  (1')

**Замечание.** Если фиксировать точку  $a$ , а точку  $b \in \mathbb{A}_1$  менять, то вектор  $\overrightarrow{ab}$  может быть любым вектором из  $V_1 \implies$  для отображения  $\Phi$  его линейная часть определена однозначно:  $\forall v \in V_1 \exists! b \in \mathbb{A} : \overrightarrow{ab} = \vec{v} \implies \varphi(v) = \overrightarrow{\Phi(a)\Phi(b)}$  – определена однозначно.

**Теорема.**

1. Пусть  $\mathbb{A}_1 \xrightarrow{\Phi_1} \mathbb{A}_2 \xrightarrow{\Phi_2} \mathbb{A}_3$ ,  $\Phi_1, \Phi_2$  – аффинные отображения, тогда  $\Phi_2 \circ \Phi_1$  – аффинное отображение с линейной частью  $\Phi_1 \cdot \Phi_2$ .
2.  $\Phi : \mathbb{A}_1 \mapsto \mathbb{A}_2$  биективно (невырождено)  $\iff$  его линейная часть  $\varphi$  биективна, притом  $\Phi^{-1}$  имеет линейную часть  $\Phi^{-1}$ .

Координатная запись:  $\Phi : \mathbb{A}_1 \mapsto \mathbb{A}_2$  – аффинное отображение.

$\{p_1; e\}$  – с.к. в  $\mathbb{A}_1$   $\dim A_1 = n$ ,

$\{p_2; e\}$  – с.к. в  $\mathbb{A}_2$   $\dim A_2 = m$ ,

$X$  – столбец координат любой точки  $p \in A_1$ ,  $X_0$  – столбец координат точки  $\Phi(p_1)$  в системе координат  $\{p_2; f\}$ ,  $A = A_\varphi$  – матрица отображения  $\varphi$  в базисах  $e, f$ ,  $Y$  – столбец координат точки  $\Phi(p)$ .

$$\text{Тогда } \Phi(p) = \Phi(p_1) + \varphi(\overrightarrow{p_1 p}) = p_2 + \overrightarrow{p_2 \Phi(p_1)} + \varphi(\overrightarrow{p_1 p}) \implies Y = X_0 + AX \quad (2)$$

$$\text{В подробной записи: } y_i = x_i^0 + \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j, \quad i = 1, \dots, m \quad (2) \implies dy_i = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} dx_j$$

Обозначим

$$DY = \begin{pmatrix} dy_1 \\ \vdots \\ dy_m \end{pmatrix} = A \cdot dX = A \cdot \begin{pmatrix} dx_1 \\ \vdots \\ dx_n \end{pmatrix}$$

Мы видим, что (в координатах)  $\varphi = D\Phi, D\Phi : V_1 \mapsto V_2$

*Доказательство.*

1.  $\mathbb{A}_1 \xrightarrow{\Phi_1} \mathbb{A}_2 \xrightarrow{\Phi_2} \mathbb{A}_3$ ,  $\Phi_1, \Phi_2$  – аффинные с линейными частями  $\varphi_1, \varphi_2$ , то  $\Phi_2 \circ \Phi_1$  – аффинное с линейной частью  $\varphi_2 \circ \varphi_1$ .

$$\forall a_1 \in \mathbb{A}_1, \forall v_1 \in V_1, \Phi_1(a_1 + v_1) = \Phi_1(a_1) + \varphi_1(v_1),$$

$$\begin{aligned} \Phi_2(\Phi_1(a_1 + v_1)) &= \Phi_2(\Phi_1(a_1) + \varphi_1(v_1)) = \Phi_2(\Phi_1(a_1)) + \varphi_2(\varphi_1(v_1)) = \\ &= (\Phi_2 \circ \Phi_1)(a_1) + (\varphi_2 \circ \varphi_1)(v_1) \implies \end{aligned}$$

$\Phi_2 \circ \Phi_1$  – аффинное отображение, его линейная часть  $\varphi_2 \circ \varphi_1$

2.  $\mathbb{A}_1 \xrightarrow{\Phi} \mathbb{A}_2 \xrightarrow{\Phi^{-1}} \mathbb{A}_1$ ,  $\Phi^{-1}$  – тоже аффинное?

отображение  $\Phi$  биективно  $\iff$  оно обратимо. Обозначим  $\Phi' : \mathbb{A}_2 \mapsto \mathbb{A}_1$ ,

$$\Phi'_0 \Phi = \text{Id}_{\mathbb{A}_1} \quad \Phi(a_1 + v) = \Phi(a_1) + \varphi(v),$$

$$\Phi'(\Phi(a_1 + v)) = \Phi'(\Phi(a_1)) + (\varphi' \varphi)(v) = a_1 + v \iff$$

$$\varphi' \varphi = \text{Id} = \varepsilon, \text{ т.е. } \varphi^{-1} \text{ – левый обратимый к } \varphi$$

$\Phi'(\Phi(a_1)) = a_1$ , при условии, что  $\varphi$  обратимо,  $\Phi'$  будет обратным к  $\Phi$ , если  $\Phi'(\Phi(a_1)) = a_1$ ,  $\varphi' = \varphi^{-1}$  (нужно было бы рассмотреть также  $\Phi \circ \Phi'$ )

□

**Замечание.** Можно ввести  $\tilde{X} = \begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\tilde{Y} = \begin{pmatrix} Y \\ 1 \end{pmatrix}$ , блочную матрицу

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A & X_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ тогда } (2) \iff \tilde{Y} = \tilde{A} \cdot \tilde{X} \quad (3)$$

## §4. Аффинные преобразования.

**Определение.** Аффинное преобразование  $\Phi : \mathbb{A} \mapsto \mathbb{A}$  – это аффинное отображение  $\mathbb{A}$  в  $\mathbb{A}$ . Тогда вторая система координат совпадает с первой.

### Примеры:

1. Параллельный перенос на вектор  $v \in V$ ,  $t_v(a) = a + v$ ,  $\forall a \in \mathbb{A}$ . Ясно, что линейная часть это  $\text{Id}$ . Очевидно,  $\forall v_1, v_2$  выполнено  $t_{v_1} \circ t_{v_2} = t_{v_1} \cdot t_{v_2} = t_{v_1+v_2}$
2. Гомотетия с центром в точке  $0 \in \mathbb{A}$  и коэффициентом  $\lambda \neq 0$ :

$$\forall v \in V, \Phi(0 + v) = 0 + \lambda v \implies D\Phi = \lambda \cdot \text{Id}$$

$\lambda = -1$  – это центральная симметрия.

**Теорема.** Любое обратимое (невырожденное) аффинное преобразование  $\Phi : \mathbb{A} \mapsto \mathbb{A}$  единственным образом представляется в виде композиции:  $\Phi = t_v \circ \psi$ , где  $a$  – фиксированная точка из  $\mathbb{A}$ ,  $\psi(a) = a$ .

*Доказательство.* Обозначим  $v = \overrightarrow{a\Phi(a)}$ . Рассмотрим преобразование

$$\psi = t_v^{-1} \cdot \Phi = t_{-v} \cdot \Phi$$

Тогда  $\psi(a) = t_{-v}(\Phi(a)) = \Phi(a) - v = a + v - v = a \implies \Phi = t_v \cdot \psi$

Единственность: если  $\Phi = t_v \cdot \psi = t_{v'} \cdot \psi'$ ,  $\psi(a) = \psi'(a) \implies$

$$t_{v-v'} = \psi' \psi^{-1} \implies t_{v-v'}(a) = a \implies v - v' = 0 \implies$$

$$v = v' \implies t_v = t_{v'} \implies \psi' = \psi$$

□

**Теорема.** Для любых наборов точек  $\{a_0, a_1, \dots, a_n\}$  и  $\{b_0, b_1, \dots, b_n\}$  в  $n$ -мерном аффинном пространстве  $\mathbb{A}$ , причем таких, что  $a_0, a_1, \dots, a_n$  аффинно независимы (находятся в общем положении) существует единственное аффинное преобразование  $\Phi : \mathbb{A} \mapsto \mathbb{A}$ , такое что  $\Phi(a_i) = b_i$ , при  $i = 0, \dots, n$ . Если также точки  $\{b_0, \dots, b_n\}$  аффинно независимы, то  $\Phi$  биективно (невырождено).

*Доказательство.* По условию,  $\{\overrightarrow{a_0 a_1}, \dots, \overrightarrow{a_0 a_n}\}$  – базис в пространстве  $V$ , то существует единственный линейный оператор  $\varphi : V \mapsto V$ , такой что  $\varphi(\overrightarrow{a_0 a_i}) = \overrightarrow{b_0 b_i}$ , тогда искомое  $\forall v \in V$ ,  $\Phi(a_0 + v) = b_0 + \varphi(v)$ .

Если также векторы  $\{\overrightarrow{b_0 b_1}, \dots, \overrightarrow{b_0 b_n}\}$  – базис, то  $\varphi$  невырожденный оператор  $\implies \Phi$  биективно.

## §5. Аффинные евклидовы пространства (точечные евклидовы пространства.)

**Определение.** Аффинное пространство  $(\mathbb{A}, V)$  называется евклидовым (точечным) пространством, если  $V$  – евклидово векторное пространство.

**Определение.** Расстояние между точками  $\rho(x, y) := |\overrightarrow{xy}| = \sqrt{(\overrightarrow{xy}, \overrightarrow{xy})}$   
 $x, y \in \mathbb{A}$

**Упражнение.** Так введенное расстояние удовлетворяет всем условиям из определения метрики.

Можно рассматривать систему координат  $(O, e)$ , где  $e$  – О.Н.Б. в  $V$  – она называется прямоугольной (ортонормированной)  $\Rightarrow$

$$\rho(x, y) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + \dots + (y_n - x_n)^2}$$

**Определение.** Аффинные евклидовы пространства  $(\mathbb{A}_1, V_1), (\mathbb{A}_2, V_2)$  называются изоморфными, если существует биективное аффинное отображение  $\Phi : \mathbb{A}_1 \rightarrow \mathbb{A}_2$ , такое что  $\forall a, b \in \mathbb{A}_1, \rho(\Phi(a), \Phi(b)) = \rho_1(a, b)$  такое  $\Phi$  называется изоморфизмом.

**Теорема.** Если  $\dim \mathbb{A}_1 = \dim \mathbb{A}_2 (= n)$ , то они изоморфны.

*Доказательство.* Фиксируем в  $\mathbb{A}_1$  и  $\mathbb{A}_2$  прямоугольные системы координат:  $\{O; e\}, \{O'; e'\}$ . Определим линейное отображение  $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$  по правилу:  $\varphi(\sum_{i=1}^n x_i e_i) := \sum_{i=1}^n x_i e'_i$  – оно линейное и биективное, тогда можно определить отображение  $\Phi : \mathbb{A}_1 \rightarrow \mathbb{A}_2$ , такое что  $\Phi(a + v) = O' + \varphi(v)$ , тогда  $O' = \Phi(O)$ . Для любой точки  $a \in \mathbb{A}_1$ , точка  $a' = \Phi(a)$  будет иметь по построению те же координаты, что и точка  $a$  в системе координат своего пространства  $\Rightarrow \rho_1(a, b) = \sqrt{\sum_i (b_i - a_i)^2} = \rho_2(a', b')$  □

**Утверждение.** Верно и обратное.

Расстояние и угол между аффинными плоскостями:

Пусть  $\pi_1 = p_1 + U_1, \pi_2 = p_2 + U_2$

**Определение.** Расстояние:  $\rho(\pi_1, \pi_2) = \inf\{\rho(x, y) \mid x \in \pi_1, y \in \pi_2\}$

Угол:  $\alpha(\pi_1, \pi_2) = \inf\{\alpha(u_1, u_2) \mid u_1 \in U_1, u_2 \in U_2\}$ . В частности,  $\pi_1 \perp \pi_2$ , если этот угол равен  $\frac{\pi}{2}$  радиан.

**Теорема.** Если  $\pi_1 = p_1 + U_1$ ,  $\pi_2 = p_2 + U_2$ ,  $U_1, U_2$  – подпространства в  $V$ , то  $\rho(\pi_1, \pi_2)$  равно длине ортогональной составляющей вектора  $\overrightarrow{p_1 p_2}$  относительно  $U_1 + U_2$ . Замечание: если  $\pi_1 \cap \pi_2 \neq \emptyset$ , то  $\overrightarrow{p_1 p_2} \in U_1 + U_2 \implies \overrightarrow{p_1 p_2}_\perp = 0$ , и  $\rho(\pi_1, \pi_2) = 0$

*Доказательство.* Обозначим  $W = U_1 + U_2$ , тогда  $V = W \oplus W^\perp$ , соответственно  $\forall v \in V$ ,  $v = v_\parallel + v_\perp$ , где  $v_\parallel \in W$  – проекция,  $v_\perp \in W^\perp$  – ортогональная составляющая. В качестве  $v$  возьмем  $v = \overrightarrow{p_1 p_2}$ ,  $\rho(\pi_1, \pi_2) \stackrel{?}{=} |v_\perp|$ . Выберем для любой точки  $x = p_1 + u_1 \in \pi_1$ ,  $y = p_2 + u_2 \in \pi_2$

$$\rho^2(x, y) = |x - y|^2 = |\overrightarrow{p_1 p_2} + u_1 - u_2|^2 = |(v_\parallel + u_2 - u_1) + \underbrace{v_\perp}_{\in W^\perp}|^2 =$$

$$\stackrel{\text{Th. Пифагора}}{=} |v_\parallel + u_2 - u_1|^2 + |v_\perp|^2 \geq |v_\perp|^2$$

Причем равенство достигается, если  $v_\parallel = u_1 - u_2$ , т.к.  $v_\parallel \in U_1 + U_2$ , то также  $u_1 \in U_1$  и  $u_2 \in U_2$  найдутся. □

## Ортогональные преобразования.

**Определение.** Пусть  $(\mathbb{A}, V)$  – евклидово пространство. Аффинное преобразование  $\Phi : \mathbb{A} \mapsto \mathbb{A}$  называется ортогональным (или движением), если его линейная часть  $\varphi = D\Phi$  – ортогональный оператор в  $V$ , т.е.  $\forall a, b \in \mathbb{A}$ ,  $\rho(\Phi(a), \Phi(b)) = \rho(a, b)$ , т.е.  $|\overrightarrow{\Phi(a)\Phi(b)}| = |\overrightarrow{ab}| \iff \varphi$  сохраняет длины.

Из определения следует, что  $\Phi$  биективно.

**Задача.** В определении требование аффинности можно отбросить. (Возникает третий термин: изометрия).

В прямоугольной системе координат  $\{O, e\}$  пусть  $X_0 = \Phi(O)$ ,  $X$  – столбец координат произвольной точки,  $Y$  – столбец координат ее образа. Тогда

$$Y = AX + X_0, \text{ причем матрица } A \text{ ортогональна.}$$

У ортогональной матрицы  $\det A = \pm 1$ , если  $\det A = 1$ , то  $\Phi$  – собственное преобразование, если  $\det A = -1$ , то  $\Phi$  – несобственное преобразование.

**Теорема.** (О разложении невырожденного аффинного преобразования.)

Для любого движения  $\Phi : \mathbb{A} \mapsto \mathbb{A}$  с линейной частью  $\varphi$  найдется такой вектор  $u \in V$  :  $\varphi(u) = u$  (остается неподвижным под действием  $\varphi$ ), а  $\Phi = t_u \cdot \psi$ , где  $\psi$  имеет неподвижную точку. Замечание: не исключено, что  $u = 0$ .

*Доказательство.* Пусть  $a \in \mathbb{A}$  – произвольная точка, обозначим  $v = \overrightarrow{a\Phi(a)}$ . Обозначим  $U = \{u \in V \mid \varphi(u) = u\}$  – подпространство неподвижных точек. Если существует  $\lambda = 1$ , то  $U \neq \{0\}$  – собственное подпространство, иначе  $U = \{0\}$ . Обозначим  $W = U^\perp$  (при  $U \neq \{0\}$ )  $\implies v = u + w$  для подходящих  $u \in U, w \in W = U^\perp$ . Рассмотрим преобразование  $\psi = t_u^{-1} \cdot \Phi = t_{-u} \cdot \Phi$ . Докажем, что у  $\psi$  есть неподвижная точка. Будем искать ее в виде  $b = a + w'$ , где  $w' \in U^\perp$ . Вычислим значение  $\psi$  в этой точке

$$\begin{aligned}\psi(a + w') &= (t_{-u} \cdot \Phi)(a + w') = t_{-u}(\Phi(a) + \varphi(w')) = \\ &= t_{-u}(a + v + \varphi(w')) = a + v - u + \varphi(w') = a + w + \varphi(w') = \\ &= a + w + w' + (\varphi(w') - w') \stackrel{?!}{=} a + w'\end{aligned}$$

Это будет так если выполняется  $\varphi(w') - w' = -w$ , или что равносильно  $(\varphi - \varepsilon)(w') = -w$ . Но  $(\varphi - \varepsilon)(w') = (\varphi - \varepsilon)|_W(w')$ , на  $W$ ,  $\varepsilon = \text{Id}$ . Оператор  $\varphi - \varepsilon$  обратим  $\implies w' = -(\varphi - \varepsilon)^{-1}(w) \implies \psi(b) = b$ .  $\square$

Комментарий к теореме: Для любого аффинного преобразования  $\Phi = t_u \cdot \psi$  ( $\psi$  имеет неподвижную точку.)

Из доказательства: если  $\lambda = 1$ ,  $u$  – собственный вектор для  $\varphi : \varphi(u) = u$ ,  $u \neq 0$ , то все точки прямой  $l = b + \langle u \rangle$  неподвижны, т.к.

$$\psi(b) = b, \quad \psi(b + t_u) = \psi(b) + t\varphi(u) = \psi(b) + t_u = b + t_u$$

Эти наблюдения можно использовать, чтобы классифицировать движение при  $n = 2$  и  $3$ .

## §6. Аффинно-квадратичные функции. Квадрики.

Считаем, что  $F = \mathbb{R}$  или  $\mathbb{C}$  (большинство результатов верно для любого поля  $F$ ,  $\text{char} F \neq 2$ ).

**Определение.**  $Q : \mathbb{A} \longrightarrow F$  называется аффинно-квадратичной, если для любой точки  $O \in \mathbb{A}$  существует квадратичная функция  $q : V \longrightarrow F$  и линейная функция  $l : V \longrightarrow F$ , такие что  $\forall v \in V$  выполнено:

$$Q(O + v) = Q(O) + q(v) + 2l(v) \quad (1)$$

По определению  $q \neq 0$

В аффинной системе координат  $\{O; e\}$ , в которой  $a(x_1, \dots, x_n)$ :

$$Q(a) = Q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^n b_{ij}x_i x_j + 2 \sum_{i=1}^n a_i x_i + c \quad (2)$$

Где  $B$  – матрица квадратичной формы  $q$  в базисе  $e$ ,  $c = Q(0)$ ,  $\vec{a} = (a_1, \dots, a_n)$  – коэффициенты формы  $l$ .

$Q(x_1, \dots, x_n)$  – аффинно-квадратичная форма.

### Изменение коэффициентов при замене системы координат.

$\{O; e\} \mapsto \{O', e'\}$ .  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$  – координаты точки  $a$  в старой системе координат,  $X'$  – в новой.

$\tilde{X} = \begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix}$ , вводили блочную матрицу перехода  $\tilde{C} = \begin{pmatrix} C & X_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , где  $C = C_{e \mapsto e'}$ ,  $X_0$  – столбец координат точки  $O'$ ,  $O = (\underbrace{0, \dots, 0}_n)$ .

Можно ввести блочную матрицу  $\tilde{B} = \begin{pmatrix} B & a^\uparrow \\ a^T & C \end{pmatrix}$ ,  $a^\uparrow = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ ,  $a^T = \vec{a}$

Тогда  $\tilde{B}' = \begin{pmatrix} B' & a'^\uparrow \\ a'^T & C' \end{pmatrix} = \tilde{C}^T \tilde{B} \tilde{C}$

При умножении блочных матриц:  $B' = C^T B C$ ,

$$a'^\uparrow = C^T (B X_0 + a^\uparrow), c' = Q(x_1^0, \dots, x_n^0) = Q(O')$$

Если базис не менять, то  $C = E$ ,  $a'^\uparrow = B X_0 + a$  (3)

Из (3) видно, что если  $\exists X_0 : B X_0 = -a^\uparrow$ , то  $l' = 0$ , и  $Q$  приобретает вид:

$$\forall v \in V \text{ выполнено } Q(O' + v) = Q(O') + q(-v) = Q(O') + q(v) = Q(O' + v)$$

Точки  $O' + v$  и  $O' - v$  симметричны относительно точки  $O'$ .

**Определение.** Точка  $O'$  – центр квадратичной функции  $Q$ , если  $\forall v \in V : Q(O' + v) = Q(O' - v)$ . Система для нахождения центра:  $B X = -a^\uparrow$  (3)

Обозначим  $C(Q)$  – множество центров, то

$$C(Q) = \begin{cases} \text{Единственная точка } O', \text{ если } \text{rk} B = n \iff |B| \neq 0 \\ \text{Является плоскостью } \dim = n - \text{rk} B > 0 \\ \emptyset \end{cases}$$

**Утверждение.** Если  $O_1, O_2$  – центры аффинно-квадратичных функций  $Q$ , то  $Q(O_1) = Q(O_2)$ .

*Доказательство.*  $Q(O_2) = Q(O_1) + q(\overrightarrow{O_1O_2}) = Q(O_2) + q(\overrightarrow{O_2O_1}) + q(O_1O_2) \implies$   
 $q(\overrightarrow{O_1O_2}) = -q(\overrightarrow{O_1O_2}) \implies q(\overrightarrow{O_1O_2}) = 0 \text{ (char } F \neq 2) \implies Q(O_2) = Q(O_1)$

□

**Теорема.** Любую аффинно-квадратичную форму  $Q : \mathbb{A} \longrightarrow F$  можно привести заменой координат к одному из видов:

1.  $Q(O + v) = \sum_{i=1}^r \alpha_i x_i^2 + \alpha_{r+1} \quad (\text{I})$
2.  $Q(O + v) = \sum_{i=1}^r \alpha_i x_i^2 + 2x_{r+1} \quad (\text{II}), \text{ где } r = \text{rk} B, \text{ причем } \prod_{i=1}^r \alpha_i \neq 0$

*Доказательство.* Для формы  $q(x)$  существует базис  $e'$ , в котором

$$q(x') = \sum_{i=1}^r \alpha_i x_i'^2, \quad r = \text{rk} B, \quad \alpha_i \neq 0$$

Выберем другую точку  $O'$  и систему координат  $\{O'; e'\}$  запишем

$$Q(O' + v) = \sum_{i=1}^r \alpha_i x_i'^2 + 2 \sum_{j=1}^n a'_j x'_j + c'$$

Выделим квадраты по  $x'_i$ :

$$a_i(x_i'^2 + 2\frac{a'_i x'_i}{\alpha_i} + \frac{a_i'^2}{\alpha_i})$$

Делаем замену:  $\tilde{x}_i = x'_i + \frac{a'_i}{\alpha_i}, a \leq i \leq r$  и  $\tilde{x}_i = x_i, r+1 \leq i \leq n$

$$Q(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n) = \sum_{i=1}^r \alpha_i \tilde{x}_i^2 + 2 \sum_{i=r+1}^n a'_i \tilde{x}_i + \tilde{c}, \quad \tilde{c} = Q(O'')$$

Если  $a'_i \neq 0, i = r+1, \dots, n$ , то  $O'$  – это центр,  $Q$  приобретает вид (I).

Если  $a'_i = 0$ , то можно положить:

$$\tilde{\tilde{x}}_{r+1} = \sum_{i=r+1}^n a'_i \tilde{x}_i + \frac{\tilde{c}}{\alpha} \implies Q \text{ приобретает вид (II)}$$

□

**Следствие.** Если  $F = \mathbb{C}$ , то можно делать все  $\alpha_i = 1$ , если  $F = \mathbb{R}$ , то можно получить вид:

$$\sum_{i=1}^p \tilde{x}_i^2 - \sum_{i=p+1}^r \tilde{x}_i^2 + \begin{cases} \tilde{c} \\ 2\tilde{x}_{r+1} \end{cases}$$



### Случай евклидова пространства.

**Теорема.** Для любой аффинно-квадратичной формы  $Q$  (над  $\mathbb{R}$ ) существует О.Н. система координат  $\{O'; e'\}$  в которой  $Q = \sum_{i=1}^r \lambda_i x_i'^2 + c$ ,  $\lambda_i \neq 0$  – собственное значение матрицы  $B$ , либо  $Q = \sum_{i=1}^r \lambda_i x_i'^2 + 2\lambda_{r+1}x'_{r+1}$ , где  $\lambda_{r+1} > 0$ . Такой вид единственный, с точностью до нумерации.

*Доказательство.* Существование: для оператора с матрицей  $B$ , существует О.Н.Б.  $e'$  из собственных векторов, в котором

$$B' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_r & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} - \text{единственной с точностью до нумерации}$$

Как и в доказательстве прошлой теоремы, после перехода к этому базису либо вид (I), либо вид

$$(II) \quad Q = \sum_{i=1}^r \lambda_i \tilde{x}_i + \sum_{i=r+1}^n a'_i \tilde{x}_i + \tilde{c}$$

$$\tilde{x}_{r+1} = \underbrace{\sqrt{(a'_{r+1})^2 + \dots + (a'_n)^2}}_{\mu} \left( \sum_{i=r+1}^n \frac{a'_i}{\mu} \cdot \tilde{x}_i + \frac{\tilde{c}}{\mu} \right) \rightarrow \text{вид (II)}$$

$$\tilde{e}_{r+1} = \frac{1}{\mu} \left( \sum_{i=r+1}^n e'_i a'_i \right), \quad \left| \sum_{i=r+1}^n e'_i a'_i \right| = \sqrt{(a'_{r+1})^2 + \dots + (a'_n)^2} = \mu$$

□

### Единственность (прошлой) теоремы:

Существует О.Н. система координат, в которой либо

$$(I) \quad Q = \sum_{i=1}^r \lambda_i x_i^2 + c, \text{ либо}$$

$$(II) \quad Q = \sum_{i=1}^r \lambda_i x_i^2 + 2\mu x_{r+1}, \quad \mu > 0 \quad (r < n)$$

*Доказательство единственности.*  $\lambda_1, \dots, \lambda_r \neq 0$  однозначно с точностью до нумерации, т.к. это ненулевые собственные значения матрицы  $q(x)$ ,

(I) случай существования центра  $c = Q(O)$ ,  $O$  – любой центр.

Вид (I) не может превратиться в вид (II), т.к. (II) – нецентральный случай.

Единственность числа  $\mu$  в случае (II):

Допустим, что в одной системе координат  $\{O; e\}$

$$Q = \dots + 2\mu x_{r+1}, \text{ в другой с.к. } \{O'; e'\} (e \text{ и } e' - \text{О.Н.Б.})$$

$$Q = \dots + 2\tilde{\mu} \tilde{x}_{r+1}, \text{ причем } \tilde{\mu} \neq \mu$$

Матрица перехода от базиса  $e$  к  $e'$  имеет блочный вид

$$C_{e \rightarrow e'} = \left( \begin{array}{c|c} C_1 & 0 \\ \hline 0 & C_2 \end{array} \right) \quad C_1 := C_{\{e_1, \dots, e_r\} \rightarrow \{e'_1, \dots, e'_r\}}$$

$\langle e_1, \dots, e_r \rangle = \langle e'_1, \dots, e'_r \rangle$  – базис подпространства, порожденный собственными векторами  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ .

$$C_2 := C_{\{e_{r+1}, \dots, e_n\} \rightarrow \{e'_{r+1}, \dots, e'_n\}}$$

Обе матрицы ортогональные. Коэффициент линейной формы  $2\mu x_{r+1}$  преобразуется по формуле:

$$\underbrace{(\tilde{\mu}, 0, \dots, 0)}_{n-r} = (\mu, 0, \dots, 0) \cdot C_2, \quad \mu > 0, \quad \tilde{\mu} > 0$$

Длина вектора при ортогональной замене сохраняется  $\implies |\tilde{\mu}| = |\mu| > 0 \implies \tilde{\mu} = \mu$ .

### Квадрики (гиперповерхности 2-го порядка.)

**Определение.** Пусть  $Q : \mathbb{A} \mapsto F$  – аффинно-квадратичная функция [не являющаяся линейной]. Квадрика (гиперповерхность 2-го порядка), задаваемая функцией  $Q$  – это  $S(Q) = \{a \in \mathbb{A} \mid Q(a) = 0\}$ , если  $S(Q) \neq \emptyset$

**Утверждение.** Любая прямая  $\pi \subset \mathbb{A}$  либо принадлежит поверхности  $S = S(Q)$ , либо пересекает ее не более, чем в двух точках.

*Доказательство.*  $\forall a, b = a + tv, \pi \parallel v \neq 0$

$$Q(a + tv) = Q(a) + q(tv) + 2l(tv) = t^2 q(v) + 2tl(v) + Q(a) = 0$$

Либо это равенство тождественно, либо  $q(v) \neq 0$  или  $l(v) \neq 0 \implies$  существует не более двух корней  $t$ .  $\square$

**Определение.** Точка  $O \in \mathbb{A}$  – центр квадрики, если для любого вектора  $v \in V$  такого что  $O + v \in S \implies O - v \in S$ . Точка  $O$  – вершина квадрики, если  $O$  – центр, принадлежащий этой поверхности, т.е.  $O \in S$ .

**Утверждение.** Если  $O$  – вершина,  $a \in S$ ,  $a \neq O$ , то вся прямая проходящая через точки  $O$  и  $a$  принадлежит  $S$ .

*Доказательство.* Обозначим  $v = \overrightarrow{Oa}$ , и рассмотрим точку  $O + t \cdot \overrightarrow{Oa} \in S \iff O - t \cdot \overrightarrow{Oa} \in S$ . В частности, точки  $O$ ,  $a$ ,  $a' = O - \overrightarrow{Oa} \in S$  – три различные точки на  $S \implies$  по прошлому утверждению, вся прямая  $O + \langle v \rangle \subset S$ .

□

Заметим, что

$$Q(O + v) = q(v) + 2l(v) + c = 0, \quad c = Q(O) \implies$$

$$Q(O - v) = q(v) - 2l(v) + c = 0$$

$\text{char} F \neq 2 \implies l(v) = 0$ . Т.о., если  $O$  – центр квадрики  $\implies l(v) = 0$ .

Координаты центра совпадают с координатами центра  $Q(x)$ .

Центр определяется системой уравнений:

$$\frac{\partial Q(x)}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n \iff \frac{\partial q}{\partial x_i} + 2a_i = 0, \quad \text{где } l(x) = \sum_{i=1}^n a_i x_i$$

**Замечание.** Квадрика, не являющаяся плоскостью, содержит хотя бы одну точку, которая не является вершиной. Если допустить, что все точки  $a \in S$  являются вершинами, то любая прямая  $(O, a) \subset S \implies S$  является плоскостью.

**Теорема.** Если  $|F| = \infty$  ( $\text{char} F \neq 2$ ), то  $S(Q_1) = S(Q_2) \implies \exists \lambda \in F, \lambda \neq 0 : Q_2 = \lambda Q_1$ .

*Доказательство.*

Если  $Q_2 = \lambda Q_1, \lambda \neq 0$ , то  $Q$  задает ту же поверхность, что и  $Q_1$ .

Обратно: пусть  $S = S(Q_1) = S(Q_2)$ . Возьмем точку  $O \in S$ , не являющуюся вершиной. Имеем:  $Q_1(O) = 0, Q_2(O) = 0$ . Для  $\forall v \in V$  запишем

$$Q_1(O + v) = q_1(v) + 2l_1(v), \quad l_1 \neq 0$$

$$Q_2(O + v) = q_2(v) + 2l_2(v), \quad l_2 \neq 0$$

Прямая  $\pi = O + \langle v \rangle$  пересекает  $S$  в некоторой точке  $p = O + tv$ , если  $t \in F$  – корень обоих уравнений

$$t^2 q_1(v) + 2t l_1(v) = 0$$

$$t^2 q_2(v) + 2t l_2(v) = 0$$

Один из этих корней  $t_0 = 0$ , т.к.  $O \in S$ , второй  $t_1$ .

$$t(t q_1(v) + 2l_1(v)) = 0$$

$$t(tq_2(v) + 2l_2(v)) = 0$$

Если  $q_1(v)q_2(v) \neq 0 \implies$

$$t_1 = -\frac{2l_1(v)}{q_1(v)} = -\frac{l_2(v)}{q_2(v)} \implies \frac{l_1(v)}{q_1(v)} = \frac{l_2(v)}{q_2(v)} \iff$$

$$l_1(v)q_2(v) = \frac{l_2(v)q_1(v)}{q_1(v)q_2(v)} \implies l_1(v)q_1(v)q_2^2(v) = l_2(v)q_1^2(v)q_2(v)$$

Последнее верно  $\forall v \in V$  (даже если  $q_1(v) = 0$  или  $q_2(v) = 0$ ) – равенство двух многочленов от  $x_1, \dots, x_n$  как функций.

Т.к.  $F$  бесконечно, то это равносильно равенству многочленов  $l_1q_1q_2^2 = l_1q_1^2q_2$  как алгебраических выражений. Кольцо многочленов над полем не имеет делителей  $0 \implies$  можно сократить последнее равенство на  $q_1q_2 \implies q_1l_2 = q_2l_1$  (\*) (как равенство многочленов). Нам достаточно доказать, что  $\exists \lambda \neq 0 : l_2 = \lambda l_1$ , из (\*)  $\implies q_2 = \lambda q_1$ . Допустим, что это не так, и  $l_1, l_2$  не пропорциональны, тогда они ЛНЗ в пространстве  $V^*$ , и их можно включить в дуальный базис, т.е. выбрать базис в  $V$  так, чтобы  $l_1(v) = x_1, l_2(v) = x_2, \forall v = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ , тогда равенство (\*) примет вид:  $q_1(x)x_2 = q_2(x)x_1$  – равенство двух многочленов, где  $x = (x_1, \dots, x_n)$ . Многочлен правой части делится на  $x_1 \implies$  многочлен  $q_1(x)x_2 : x_1, x_1$  и  $x_2$  взаимно просты  $\implies q_1(x) : x_1 \implies q_1(v) = l(v)x_1 \implies q_2(v) = l(v)x_2, l(v)$  – линейная форма,  $l(v) \neq 0 \implies$

$$Q_1(O + v) = (l(x) + 2)x_1$$

$$Q_2(O + v) = (l(x) + 2)x_2$$

Пусть  $x_1 \equiv 0 \implies Q_1(O + v) = 0$ , т.е.  $S$  содержит плоскость  $x_1 = 0$ .

Но  $Q_2(O + v) = (l(x) + 2)x_2 \neq 0$  при  $x_1 = 0$  – противоречие  $\implies l_2 = \lambda l_1$ ,

$$\lambda \neq 0 \implies q_2 = \lambda q_1 \implies Q_2 = \lambda Q_1$$

□

После теоремы о том, что если  $S(Q_1) = S(Q_2) \implies Q_2 = \lambda Q_1$ , докажем, следующее утверждение.

**Утверждение.** Пусть  $S = S(Q)$  – квадрика. Точка  $O \in \mathbb{A}$  – центр симметрии  $S \iff l = 0$ . ( $Q(O + v) = q(v) + 2l(v) + Q(O)$ ).

*Доказательство.*

$\Leftarrow$  Если  $l = 0$ , то  $Q(O - v) = Q(O) + q(-v) = Q(O + v) = O, \forall v \in V : O + v \in S \implies S : Q(O + v) = O$ , а функция  $Q_1(O + v) = Q(O - v) = q(v) - 2l(v) + c$  задает ту же поверхность  $S$ , если  $O$  – центр симметрии  $\implies \exists \lambda \neq 0 : Q_1 = \lambda Q$ , т.е.  $\lambda q(v) + 2\lambda l(v) + \lambda Q(O) = q(v) - 2l(v) + Q(O)$  (разделим обе части на правую часть). Т.к.  $q \neq 0$ , то  $\lambda = 1 \implies l(v) = -l(v)$ ; т.к.  $\text{char } F \neq 2 \implies l = 0$

□

### Классификация квадрик.

**Теорема.** Заменой аффинной системы координат  $\{O; e\}$  уравнение любой квадрики можно привести к только одному из следующих видов ( $\text{char} F \neq 2$ ; коэффициенты определяются с точностью до нумерации):

$$\text{I. (1) } \sum_{i=1}^r \alpha_i x_i^2 = 1 \quad (r \leq n)$$

$$(2) \sum_{i=1}^r \alpha_i x_i^2 = 0 \quad (r \leq n-1)$$

I. – центральный случай

$$\text{II. (нецентральный случай): } \sum_{i=1}^r \alpha_i x_i^2 + 2x_{r+1} = 0 \quad (r \leq n-1)$$

где  $\prod_{i=1}^r \alpha_i \neq 0$  во всех случаях (I), (II).

*Доказательство.* См. соответствующую теорему о классификации аффинно-квадратичных функций:

$$\text{(I). } Q(O + v) = \sum_{i=1}^r \alpha_i x_i^2 + c$$

Если  $c \neq 0$ , то уравнение

$$\sum_{i=1}^r \alpha_i x_i^2 = -c \iff \sum_{i=1}^r \left(-\frac{\alpha_i}{c}\right) x_i^2 = 1, \quad \tilde{\alpha}_i = -\frac{\alpha_i}{c}$$

Остальное остается в силе.

□

**Следствие.** Над  $\mathbb{C}$  уравнение квадрики  $S$  приводится к одному из видов:

$$\text{I. (1) } \sum_{i=1}^r x_i^2 = 1 \quad (r \leq n)$$

$$(2) \sum_{i=1}^r x_i^2 = 0 \quad (r \leq n)$$

$$\text{II. } \sum_{i=1}^r x_i^2 = 2x_{r+1}, \quad (r \leq n-1)$$

*Доказательство.* Согласно прошлой теореме:

$$\sum_{i=1}^r x_i^2 = \begin{cases} 1 \\ 0 \\ 2x_{r+1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tilde{x}_i = \sqrt{\alpha_i} x_i, & 1 \leq i \leq r \\ \tilde{x}_i = x_i, & r+1 \leq i \leq n. \end{cases}$$

□

**Следствие.** Над  $\mathbb{R}$  заменой системы координат  $\{O; e\}$  уравнение любой квадрики приводится к одному из видов:

$$\begin{aligned} \text{I. (1)} \quad & \sum_{i=1}^s x_i^2 - \sum_{i=s+1}^r x_i^2 = 1 \quad (s \leq r) \\ \text{(2)} \quad & \sum_{i=1}^s x_i^2 - \sum_{i=s+1}^r x_i^2 = 0, \quad \frac{r}{2} \leq s \leq r \\ \text{II.} \quad & \sum_{i=1}^s x_i^2 - \sum_{i=s+1}^r x_i^2 = -2x_{r+1}, \quad \frac{r}{2} \leq s \leq r \end{aligned}$$

(В случаях I. (2) и II., если надо, уравнение можно умножить на  $(-1)$  и перенумеруем).

Названия в этой классификации:

- I. (1) при  $n = z = s$  – эллипсоид; если  $1 < n = r$  – гиперboloид.
- I. (2) при  $r = n$  – конус.
- II. при  $r = s = n - 1$  – эллиптический параболоид.  
при  $s < r = n - 1$  – гиперболический параболоид.
- I. при  $r \leq n - 1$ , II при  $r \leq n - 2$  – цилиндры.

### Квадрики в аффинном евклидовом пространстве

**Теорема.** (Об ортогональной классификации квадрик). В аффинном евклидовом пространстве  $\mathcal{E}$  выбором подходящей ортонормированной системы координат, уравнение любой квадрики приводятся к одному (и только одному) каноническому типу:

$$\begin{aligned} \text{I. (1)} \quad & \sum_{i=1}^s \frac{\tilde{x}_i^2}{\alpha_i^2} - \sum_{i=s+1}^r \frac{\tilde{x}_i^2}{\alpha_i^2} = 1, \quad 0 < s \leq r \\ \text{(2)} \quad & \sum_{i=1}^s \frac{\tilde{x}_i^2}{\alpha_i^2} - \sum_{i=s+1}^r \frac{\tilde{x}_i^2}{\alpha_i^2} = 0, \quad \frac{r}{2} \leq s < r \\ \text{II.} \quad & \sum_{i=1}^s \frac{\tilde{x}_i^2}{\alpha_i^2} - \sum_{i=s+1}^r \frac{\tilde{x}_i^2}{\alpha_i^2} + 2x_{r+1} = 0 \quad (\text{все } \alpha_i > 0, \quad 1 \leq i \leq r) \end{aligned}$$

*Набросок доказательства.* В подходящей ортонормированной системе координат  $\{O; e\}$  уравнение  $Q$  приводится к виду:

$$\text{(I)} \quad Q = \sum_{i=1}^r \lambda_i x_i^2 + c \quad \text{либо} \quad \text{(II)} \quad \sum_{i=1}^r \lambda_i x_i^2 + 2\mu x_{r+1} \quad (\mu > 0)$$

(По теореме 2 из лекции от 3.05)

Пусть имеет место (I) и  $c \neq 0$ , тогда уравнение

$$\sum_{i=1}^r \lambda_i x_i^2 + c = 0 \text{ разделим на } (-c) \implies$$

$$\sum_{i=1}^r \frac{\lambda_i}{-c} x_i^2 = 1, \text{ обозначим за } a_i := \sqrt{\left| \frac{c}{\lambda_i} \right|}$$

Причем можно выбрать нумерацию так, чтобы  $\lambda_i c < 0$  при  $i = 1, \dots, s$  и  $\lambda_i c > 0$  при  $i > s \rightarrow$  вид I.(1)

При  $c = 0$  просто  $a_i = \frac{1}{\sqrt{|\lambda_i|}} \rightarrow$  вид I.(2).

В случае (II) можно разделить уравнение на  $\mu$ :

$$\sum_{i=1}^r \frac{\lambda_i x_i^2}{\mu} + 2x_{r+1} = 0, \text{ обозначим за } a_i := \sqrt{\left| \frac{\mu}{\lambda_i} \right|}$$

Выбрать нумерацию так, чтобы  $\lambda_i \mu > 0$  при  $i = 1, \dots, s$  и  $\lambda_i \mu < 0$  при  $i > s$ .

## Глава 5. Тензоры.

### §1. Базовые понятия.

Под тензором понимают геометрический объект, который задается матрицей (там было еще много слов которые я не успел записать).

Пусть  $V$  – векторное пространство над полем  $F$ ,  $\dim V = n < \infty$

$V^*$  – сопряженное ему пространство (пространство линейных функций на  $V$ ).

Известно, что  $V^{**} \cong V$  (изоморфизм не зависит от базиса.)

**Определение.** Пусть  $p, q \in \mathbb{N}_0$ . Тензор типа  $(p, q)$  – это полилинейная функция  $f : \underbrace{V \times \dots \times V}_p \times \underbrace{V^* \times \dots \times V^*}_q \mapsto F$ . ( $f(v_1, \dots, v_p; u_1, \dots, u_q)$  линейна по каждому из аргументов).  $p + q$  – валентность тензора  $f$  (или ранг  $f$ ), где  $p$  – ковариантная валентность,  $q$  – контравариантная валентность. Если  $pq \neq 0$ , то  $f$  – смешанный тензор.

Обозначим  $T_p^q(V) = T_p^q$  – множество тензоров типа  $(p, q)$ .

**Утверждение.**  $T_p^q$  – векторное пространство.

*Доказательство.* Надо определить линейные операции.

Обозначим  $\vec{v} = (v_1, \dots, v_p)$ ,  $\vec{u} = (u_1, \dots, u_q)$ .

Если  $f_1, f_2 \in T_p^q$ , положим

$$(f_1 + f_2)(\vec{v}, \vec{u}) := f_1(\vec{v}, \vec{u}) + f_2(\vec{v}, \vec{u})$$

$$\forall \lambda \in F, (\lambda f)(\vec{v}, \vec{u}) := \lambda f(\vec{v}, \vec{u})$$

С этими операциями  $T_p^q(V)$  – векторное пространство.

□

**Определение.** Произведение тензоров: пусть  $f_1 \in T_p^q$ ,  $f_2 \in T_r^s$ , тогда  $f_1 \otimes f_2 :$

$$\underbrace{V \times \dots \times V}_{p+r} \times \underbrace{V^* \times \dots \times V^*}_{q+s} \mapsto F, \text{ т.е. } f_1 \otimes f_2 \in T_{p+r}^{q+s}$$

$$\begin{aligned} & (f_1 \otimes f_2)(\underbrace{v_1, \dots, v_p, v_{p+1}, \dots, v_{p+r}}_{\text{векторы } \in V}; \underbrace{u_1, \dots, u_{q+s}}_{\text{ковекторы } \in V^*}) = \\ & = f_1(v_1, \dots, v_p; u_1, \dots, u_q) f_2(v_{p+1}, \dots, v_{p+r}; u_{q+1}, \dots, u_{q+s}) \end{aligned}$$

Свойства операции операции  $\otimes$ :

- Утверждение.**
1.  $f_1 \otimes f_2$  – тензор типа  $(p+r, q+s)$
  2.  $(f_1 \otimes f_2) \otimes f_3 = f_1 \otimes (f_2 \otimes f_3)$  – ассоциативность.
  3.  $(\alpha f_1 + \beta f_2) \otimes f_3 = \alpha(f_1 \otimes f_3) + \beta(f_2 \otimes f_3)$  – дистрибутивность.

### Правило суммирования Эйнштейна.

Договоренность, что координаты вектора пишутся с верхними индексами, тогда разложение вектора по базису:

$$x = \sum_i x^i e_i \equiv x^i e_i$$

В последнем предполагается суммирование по  $i$ , ради сокращения записи. Коэффициенты линейной формы – с нижними индексами:

$$u(x, y) = \sum_i a_i x^i$$

Матрица линейного оператора обозначается  $A = (a_j^i)$ , где  $i$  – индекс строки, а  $j$  – индекс столбца.

$$\varphi(x) = AX = \sum_i a_j^i x^j$$

**Отождествление тензоров малых валентностей (рангов) с геометрическими объектами.**



Под тензором понимаем векторы, линейные формы, билинейные формы, операторы.

1.  $T_1^0(V) = V^*$
2.  $T_0^1(V) = V^{**} = V$
3.  $T_2^0(V)$  – билинейная форма.
4.  $T_1^1(V) \cong L(V)$

Пусть  $f(v, u)$  – тензор типа  $(1, 1)$ . Изоморфизм между  $V^{**}$  и  $V$  задается правилом:

$$\forall v \in V, v \mapsto \varepsilon_v \in V^{**}, \forall u \in V^* \text{ выполнено } \varepsilon_v(u) = u(v)$$

(И наоборот, для  $l \in V^{**}$  обозначим  $v = y_v \in V$  – обратное отображение.)

При фиксированном  $v$ ,  $f(v, u)$  – линейная функция на  $V^{**} \implies$

$$f(v, u) = \varepsilon_v(u) = u(v) = u(y_v) \quad (*)$$

Соответствие  $\overbrace{v \mapsto y_v}^{V \xrightarrow{\varphi} V}$  из условия  $(*)$  является линейным оператором. Для  $f$  существует единственный  $\varphi$

Наоборот,  $\forall \varphi : V \mapsto V$ , функция  $f(v, u) := u(\varphi(v))$ , где  $f : V \times V^* \mapsto F$ .

### Построение базиса в пространстве $T_p^q(V)$ .

Пусть  $e = \{e_1, \dots, e_n\}$  – базис в  $V$ , а  $e^* = \{e^1, \dots, e^n\}$  – дуальный базис в  $V^*$ .

**Теорема.** Тензоры

$$e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_p} \otimes e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_q} \quad (i_1, \dots, i_p, j_1, \dots, j_q = \overline{1, n})$$

образуют базис в пространстве  $T_p^q \implies \dim T_p^q = n^{p+q}$

*Доказательство.* Любой тензор  $f$  разлагается по тензорам  $(**)$ .

$$\begin{aligned} \text{Пусть } v_1 &= x_1^{i_1} e_{i_1}, \dots, v_p = x_p^{i_p} e_{i_p} \\ u_1 &= y_{j_1}^1 e^{j_1}, \dots, u_q = y_{j_q}^q e^{j_q} \end{aligned}$$

$$f(v_1, \dots, v_p; u_1, \dots, u_q) = f(x_1^{i_1} e_{i_1}, \dots; y_{j_1}^1 e^{j_1}, \dots) =$$

Используя линейность по каждому аргументу получаем:

$$= x_1^{i_1} \cdot \dots \cdot x_p^{i_p} \cdot y_{j_1}^1 \cdot \dots \cdot y_{j_q}^q \cdot f(e_{i_1}, \dots, e_{i_p}; e^{j_1}, \dots, e^{j_q})$$

Заметим, что  $f(e_{i_1}, \dots, e_{i_p}; e^{j_1}, \dots, e^{j_q}) = T_{i_1, \dots, i_p}^{j_1, \dots, j_q}$  – координаты тензора  $f(\vec{v}; \vec{u})$ .

Индексы должны быть "и сверху и снизу".

$$(e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_p} \otimes e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_q})(e_{i'_1}, \dots, e_{i'_p}; e^{j'_1}, \dots, e^{j'_q}) =$$

$$\begin{aligned}
&= e^{i_1}(e_{i'_1}) \cdot \dots \cdot e^{i_p}(e_{i'_p}) \cdot e_{j_1}(e^{j'_1}) \cdot \dots \cdot e_{j_q}(e^{j'_q}) = \\
&= \delta_{i'_1}^{i_1} \cdot \dots \cdot \delta_{i'_p}^{i_p} \cdot \delta_{j_1}^{j'_1} \cdot \dots \cdot \delta_{j_q}^{j'_q} = \begin{cases} 1, & (i_1, \dots, i_p) = (i'_1, \dots, i'_p) \text{ и } (j_1, \dots, j_p) = (j'_1, \dots, j'_p) \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(e^{i'_1} \otimes e^{i'_p} \otimes e_{j'_1} \otimes \dots \otimes e_{j'_q})(v_1, \dots, v_p; u_1, \dots, u_q) = \\
&x_1^{i'_1} \cdot \dots \cdot x_p^{i'_p} \cdot y_{j_1}^1 \cdot \dots \cdot y_{j_q}^q (e^{i'_1} \otimes e_{j'_1})(e_{i_1}, \dots, e_{j_q})
\end{aligned}$$

Причем  $(e^{i'_1} \otimes e_{j'_1})(e_{i_1}, \dots, e_{j_q})$  равняется 1, только когда  $(i_1, \dots, i_p) = (i'_1, \dots, i'_p)$  и  $(j_1, \dots, j_p) = (j'_1, \dots, j'_p)$ . Тогда

$$f(v_1, \dots, v_p; u_1, \dots, u_q) = T_{i_1, \dots, i_p}^{j_1, \dots, j_q}(e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_p} \otimes e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_q})(v_1, \dots, v_p; u_1, \dots, u_q)$$

$T_{i_1, \dots, i_p}^{j_1, \dots, j_q}$  фактически являются координатами тензора  $f$  в системе тензоров (\*\*).

Тензоры (\*\*) ЛНЗ: допустим, что коэффициенты  $\Lambda_{i_1, \dots, i_p}^{j_1, \dots, j_q}$ , такие что

$$\tilde{f} = \Lambda_{i_1, \dots, i_p}^{j_1, \dots, j_q}(e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_p} \otimes e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_q}) = 0$$

Рассмотрим тензор  $\tilde{f} \equiv 0$ , точнее

$$\tilde{f}(e_{i_1}, \dots, e_{i_p}; e^{j_1}, \dots, e^{j_q}) = \Lambda_{i_1, \dots, i_p}^{j_1, \dots, j_q} = 0$$

Для  $\forall i_k, j_l$

□

### Изменение координат тензора при замене базиса.

Если  $e = (e_1, \dots, e_n)$  – старый базис;  $e' = (e'_1, \dots, e'_n)$  – новый базис в  $V$ ,  $e^* = (e^1, \dots, e^n)$  старый базис в  $V^*$ ,  $e'^* = (e'^1, \dots, e'^n)$  – новый базис в  $V^*$ .

$$x = x^i e_i = x'^{i'} e'_{i'}, \quad x^i = c_{i'}^i x'^{i'}, \quad (c_{i'}^i) = C_{e \rightarrow e'}$$

$$u = y_j e^j = y'_{j'} e'^{j'}, \quad y'_{j'} = y_j c_{j'}^j - \text{ковариантный закон}$$

(В общем у Гайфуллина расписано лучше)

Равносильно:  $X' = C^{-1}X$ , обозначим  $D = C^{-1} \implies x'^{i'} = d_i^{i'} x^i$  – контравариантный закон.

В старом базисе:

$$f = T_{i_1, \dots, i_p}^{j_1, \dots, j_q}(e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_p} \otimes e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_q})$$

$$T_{i_1, \dots, i_p}^{j_1, \dots, j_q} = f(e_{i_1}, \dots, e_{i_p}; e^{j_1}, \dots, e^{j_q})$$

В новом базисе:

$$T_{i'_1, \dots, i'_p}^{j'_1, \dots, j'_q} = f(e'_{i'_1}, \dots, e'_{i'_p}; e'^{j'_1}, \dots, e'^{j'_q})$$

В координатах:

$$\begin{aligned}
f(e_{i_1}, \dots, e_{i_p}; e^{j_1}, \dots, e^{j_q}) &= T_{i_1, \dots, i_p}^{j_1, \dots, j_q} x_1^{i_1} \dots x_p^{i_p} \cdot y_{j_1}^1 \dots y_{j_q}^q = \\
&= T_{i_1, \dots, i_p}^{j_1, \dots, j_q} c_{i'_1}^{i_1} x_1^{i'_1} \dots x_p^{i'_p} \cdot d_{j'_1}^{j_1} y_1^{j'_1} \dots d_{j'_q}^{j_q} y_q^{j'_q} = \\
&= T_{i'_1, \dots, i'_p}^{j'_1, \dots, j'_q} x_1^{i'_1} \dots x_p^{i'_p} \cdot y_{j'_1}^1 \dots y_{j'_q}^q \implies \\
T_{i'_1, \dots, i'_p}^{j'_1, \dots, j'_q} &= T_{i_1, \dots, i_p}^{j_1, \dots, j_q} c_{i'_1}^{i_1} \cdot \dots \cdot c_{i'_p}^{i_p} \cdot d_{j'_1}^{j_1} \cdot \dots \cdot d_{j'_q}^{j_q} \quad (*)
\end{aligned}$$

(\*) означает, что этот тензор (или эта матрица)  $p$  раз ковариантный и  $q$  раз контравариантный.

**А теперь докажем то же самое, но методом Гайфуллина.**

Формально, он проделывает же те шаги, но с более удобными обозначениями.

$$\begin{aligned}
C_{e \rightarrow \bar{e}} : (\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n) &= (e_1, \dots, e_n)C \implies \\
\bar{c}_j &= \sum_{i=1}^n e_i c_{ij} = \left| (c_{ij}) := (c_j^i) \right| = \sum_{i=1}^n e_i c_j^i = e_i c_i^j
\end{aligned}$$

Из-за хейта знак суммирования опущен.

Пусть  $D := C^{-1}$ . Тогда

$$e_j = \bar{e}_i \cdot d_j^i, \quad e^j = c_i^j \cdot \bar{e}^i$$

$$\begin{aligned}
f &= T_{i_1, \dots, i_p}^{j_1, \dots, j_q} e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_p} \otimes e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_q} = \bar{T}_{a_1, \dots, a_p}^{b_1, \dots, b_q} \cdot \bar{e}^{a_1} \otimes \dots \otimes \bar{e}^{a_p} \otimes \bar{e}_{b_1} \otimes \dots \otimes \bar{e}_{b_q} \\
f &= T_{i_1, \dots, i_p}^{j_1, \dots, j_q} \cdot c_{a_1}^{i_1} \cdot \bar{e}^{a_1} \otimes \dots \otimes c_{a_p}^{i_p} \cdot \bar{e}^{a_p} \otimes d_{j_1}^{b_1} \cdot \bar{e}_{b_1} \otimes \dots \otimes d_{j_q}^{b_q} \cdot \bar{e}_{b_q}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\bar{T}_{a_1, \dots, a_p}^{b_1, \dots, b_q} = T_{i_1, \dots, i_p}^{j_1, \dots, j_q} \cdot c_{a_1}^{i_1} \cdot \dots \cdot c_{a_p}^{i_p} \cdot d_{j_1}^{b_1} \cdot \dots \cdot d_{j_q}^{b_q}}$$

## §2. Свертка, симметризация и альтернирование.

След матрицы линейного оператора

$$\text{tr} A = \sum a_i^i = a_i^a \in T_0^0 - \text{инвариант}$$

$$T_p^q \rightarrow T_{p-1}^{q-1}, \quad p, q \geq 1$$