

Линейная алгебра и геометрия

Глава I. Векторное пространство

§1. Векторное пространство, размерность, изоморфизм

Определение. Множество V называется *векторным пространством* над полем F , если заданы операции $+$ и $\cdot : V \times V \rightarrow V, F \times V \rightarrow V$ и выполнены следующие аксиомы:

1. $\forall v_1, v_2, v_3 \in V$ выполнено $(v_1 + v_2) + v_3 = v_1 + (v_2 + v_3)$
2. $\exists \vec{0} \in V : \forall v \in V$ выполнено $v + \vec{0} = v$
3. $\forall v \in V \exists -v \in V : v + (-v) = \vec{0}$
4. $\forall v_1, v_2 \in V$ выполнено $v_1 + v_2 = v_2 + v_1$
5. $\forall \alpha, \beta \in F, v \in V$ выполнено $(\alpha\beta)v = \alpha(\beta v)$
6. $\forall v \in V$ выполнено $1 \cdot v = v$
7. $\forall \alpha, \beta \in F, v \in V$ выполнено $(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$
8. $\forall \alpha \in F, v_1, v_2 \in V$ выполнено $\alpha(v_1 + v_2) = \alpha v_1 + \alpha v_2$

Утверждение. Линейным операциям над векторами соответствует такие же операции над их координатами:

1. $x = eX, y = eY \Rightarrow x + y = e(X + Y)$
2. $\lambda x = e(\lambda X)$

Доказательство. Пусть $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ базис в V . Тогда

$$x = \sum_{i=1}^n x_i e_i = (e_1, e_2, \dots, e_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = eX$$

□

Определение. $\varphi : V \rightarrow W$ *линейно*, если:

1. $\forall v_1, v_2 \in V$ выполнено $\varphi(v_1 + v_2) = \varphi(v_1) + \varphi(v_2)$
2. $\forall v \in V, \lambda \in F$ выполнено $\varphi(\lambda v) = \lambda \varphi(v)$

Определение. φ называется *изоморфизмом*, если φ линейно и биективно.

Следствие. Если φ линейное отображение, то $\varphi(\vec{0}_V) = \varphi(\vec{0}_W)$

Доказательство.

$$\vec{0}_V + \vec{0}_V = \vec{0}_V \Rightarrow \varphi(\vec{0}_V + \vec{0}_V) = \varphi(\vec{0}_V) + (-\varphi(\vec{0}_V)) \Rightarrow \varphi(\vec{0}_V) = \vec{0}_W \Leftrightarrow \dim V = \dim W$$

□

Следствие. $\dim V = n \Leftrightarrow V \cong F^n$, где F^n пространство столбцов высоты n .
 ("≅" Чубаров обозначает изоморфность)

Доказательство. \Leftarrow Пусть $V \cong W$ изоморфизм $\Rightarrow \dim V = \dim W$. По условию $\exists \varphi : V \rightarrow W$ изоморфизм. Фиксируем базис (e_1, e_2, \dots, e_n) в V и покажем, что

$\varphi(e_1), \varphi(e_2), \dots, \varphi(e_n)$ базис в W .

1. $\varphi(e_1), \varphi(e_2), \dots, \varphi(e_n)$ - ЛНЗ и $\sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi(e_i) = \vec{0}_W \Rightarrow \sum_{i=1}^n \varphi(\lambda_i e_i) = \vec{0}_W$,

φ - инъективно, но $\varphi(\vec{0}_V) = \vec{0}_W \Rightarrow \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i = \vec{0}_V \Rightarrow$ все $\lambda_i = 0$

2. $\varphi(e_1), \varphi(e_2), \dots, \varphi(e_n)$ - полная система: $\forall w \in W \exists v \in V : \varphi(v) = w$, так как φ - сюръективна. $\Rightarrow \exists x_1, x_2, \dots, x_n \in F; v = \sum_{i=1}^n x_i e_i \Rightarrow \varphi(v) = w = \sum_{i=1}^n x_i \varphi(e_i) \Rightarrow \varphi(e_1), \varphi(e_2), \dots, \varphi(e_n)$ - базис в W .

\Rightarrow Пусть $\dim V = \dim W = n$. Построим изоморфизм. Фиксируем базис $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ в V и $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ в W . Положим: $\varphi(e_i) = f_i$. Построим φ до линейного отображения, так что $\forall v \in V$ выполнено $v = \sum_{i=1}^n x_i e_i$. Тогда

$\varphi(v) = \varphi(\sum_{i=1}^n x_i e_i) = \sum_{i=1}^n x_i \varphi(e_i) = \sum_{i=1}^n x_i f_i$. Таким образом, φ линейно.

□

Замена базиса

Пусть $\dim V = n, e = (e_1, \dots, e_n)$ - старый базис, $e' = (e'_1, \dots, e'_n)$ - новый базис.

Пусть известно, что $\forall e'_j$ выполнено

$$e'_j = \sum_{i=1}^n c_{ij} e_i = e \begin{pmatrix} c_{1j} \\ \vdots \\ c_{nj} \end{pmatrix} \Leftrightarrow e' = e C_{e \rightarrow e'},$$

где $C = (c_{ij})$.

Лемма. 1. $\det C \neq 0$

2. $C_{e' \rightarrow e} = C_{e \rightarrow e'}^{-1}$

Теорема. Пусть e, e' два базиса в пространстве V , X_e и $X_{e'}$ столбцы координат одного и того же вектора. Тогда $X_e = C X_{e'}$

Доказательство. $\forall x \in V$ выполнено

$$x = e X_e = e' X_{e'} = e C_{e \rightarrow e'} X_{e'} = e (C_{e \rightarrow e'} X_{e'})$$

□

§2. Подпространство

Определение. Подмножество U в пространстве V называется *подпространством* в V , если:

1. $\forall U \neq 0$
2. $\forall u_1, u_2 \in U$ выполнено $u_1 + u_2 \in U$
3. $\forall u \in U, \lambda \in F$ выполнено $\lambda u \in U$

Способы задания подпространства:

1. $U = \langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$
2. $\dim V = n, W = \{v = eX | AX = 0\}$

Определение. *Линейная оболочка* векторов $a_1, a_2, \dots, a_n \in V$ – это $\{\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_n a_n | \lambda_i \in F\}$

Лемма. 1. $\langle a_1, a_2, \dots, a_m \rangle := U$ – подпространство в V
 2. $\dim U = rk\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$

Доказательство. Если $\dim U = n$, то фиксируем базис и составляем матрицу из столбцов координат a_1, a_2, \dots, a_m :

$$A = (a_1^\uparrow, a_2^\uparrow, \dots, a_m^\uparrow) \sim \begin{pmatrix} a_{1j_1} & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{1j_2} & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{rj_r} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Элементарными преобразованиями строк приводим матрицу A к ступенчатому виду и получаем, что столбцы $a_{j_1}, a_{j_2}, \dots, a_{j_r}$ составляют базис в U .

Лемма. Любую ЛНЗ систему векторов в $V (\dim V < \infty)$ можно можно дополнить до базиса пространства V .

Алгоритм: Пусть a_1, a_2, \dots, a_m – ЛНЗ, $m < n = \dim V$, известны координаты этих векторов в некотором базисе. Тогда $rk(a_1^\uparrow, a_2^\uparrow, \dots, a_m^\uparrow) = m$. Составим матрицу столбцов из них и припишем столбцы E порядка n :

$$(A|E_n) \sim \begin{pmatrix} \text{Выделим базисные столбцы} \\ \text{Э.П. строк в } A|E_n, \\ \text{включая столбцы } A \end{pmatrix} \sim rk(A|E_n) = n$$

Вывод: к a_1, a_2, \dots, a_m надо добавить единичные столбцы, вошедшие в базис матрицы $A|E_n$.

Операции с блочными матрицами

Определение. Блочная матрица – матрица, разбитая на подматрицы, которые обозначаются отдельными буквами.

Пример:

$$1. A = \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 4 \end{array} \right) = (A_1 | A_2) \text{ - блочная строка.}$$

$$2. B = \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 3 \\ 4 & -2 \end{array} \right) = \begin{pmatrix} B_1 \\ - \\ B_2 \end{pmatrix} \text{ - блочный столбец.}$$

1. Линейная оболочка.
2. ОСЛУ.

Теорема. Способы 1 и 2 равносильны, если $\dim V < \infty$

Доказательство. $2 \implies 1$: строим ФСР. $AX = 0$. Проводим элементарные преобразования строк, перенумеровывая неизвестные, таким образом чтобы привести матрицу к следующему виду:

$$A \underset{\text{строк}}{\overset{\text{Э.П.}}{\rightsquigarrow}} \left(\begin{array}{cccccc} \overbrace{1 \dots 0}^r & a_{1j} & \dots \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & a_{rj} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \end{array} \right), r+1 \leq j \leq n$$

Возвращаемся к уравнениям: $x_i = - \sum_{j=r+1}^n a_{ij} x_j$, где $1 \leq i \leq r$, а (x_{r+1}, \dots, x_n) – свободные неизвестные. В векторном виде:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \\ x_{r+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} - \sum_{j=r+1}^n a_{1j} x_j \\ \vdots \\ - \sum_{j=r+1}^n a_{rj} x_j \\ x_{r+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_{r+1} \overbrace{\begin{pmatrix} -a_{1,r+1} \\ \vdots \\ -a_{r,r+1} \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}^{Y_1} + \dots + x_n \overbrace{\begin{pmatrix} -a_{1,n} \\ \vdots \\ -a_{r,n} \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}}^{Y_n}$$

где Y_1, \dots, Y_n – фундаментальная система решений, т.е. базис пространства решений $AX = 0$.

Составим матрицу из столбцов ФСР.

$$\Phi = \begin{pmatrix} -a_{1,r+1} & \dots & -a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ -a_{r,r+1} & \dots & -a_{r,n} \\ 1 & & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} = \left(\frac{-B}{E_{n-r}} \right) - \text{фундаментальная матрица.}$$

В общем случае фундаментальная матрица – это матрица, имеющая $n - r = n - rkA$ ЛНЗ столбцов, которые являются решениями системы $AX = 0$, где $A \sim (E_r | B)$ без нулевых уравнений.

1 \implies 2. Даны ЛНЗ векторы c_1, c_2, \dots, c_m в V .

Нужно найти такую матрицу $A_{p \times n}$, чтобы $W = \{X \in F^n | AX = 0\}$, где X - столбец координат произвольного вектора из $U = \langle c_1, c_2, \dots, c_m \rangle$. Если составить матрицу из столбцов c_1, c_2, \dots, c_m , то она должна стать фундаментальной матрицей для ОСЛУ: $AX = 0$.

1 этап: Векторы c_1, c_2, \dots, c_m расписать по строкам:

$$\begin{pmatrix} \vec{c}_1 \\ \vdots \\ \vec{c}_m \end{pmatrix} \underset{\text{строк}}{\overset{\text{Э.П.}}{\sim}} (E_m | \underbrace{B}_{n-m})$$

2 этап: $\Phi = \begin{pmatrix} E_m \\ B^T \end{pmatrix} \rightsquigarrow A = (-B^T | E_{n-m})$ – искомая матрица системы. Значит, $p = n - m$. □

Замечание. Столбец $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ принадлежит $c_1, \dots, c_m \Leftrightarrow rk \left(c_1^\uparrow, \dots, c_m^\uparrow | \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right) = rk(c_1^\uparrow, \dots, c_m^\uparrow)$

Доказательство. Составить матрицу:

$$rk \left(c_1^\uparrow, \dots, c_m^\uparrow | \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right) \underset{\text{строк}}{\overset{\text{Э.П.}}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} c_{11} & & & \dots\dots\dots \\ & \ddots & & \vdots \\ & & c_{mm} & \dots\dots\dots \\ \hline 0 & \dots & 0 & \sum a_{m+1,j} x_j \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \sum a_{n,j} x_j \end{array} \right),$$

где суммы $\sum a_{i,j} x_j := 0$, где $i = m + 1, \dots, n$. □

§3. Пересечение и сумма подпространств.

Утверждение. Пусть U_i – семейство подпространств векторного пространства V . Тогда $\bigcap_{i \in I} U_i$ – подпространство V .

Доказательство.

$$1. \vec{0}_V \in U_i, \forall i \in I \Rightarrow \vec{0}_V \in \bigcap_{i \in I} U_i$$

$$2. \forall x, y \in U_i, \forall i \in I \Rightarrow x + y \in U_i, \forall i \in I \Rightarrow (x + y) \in \bigcap_{i \in I} U_i$$

$$3. \forall x \in U_i, \forall i \in I, \forall \lambda \in F \Rightarrow \lambda x \in U_i, \forall i \in I \Rightarrow \lambda x \in \bigcap_{i \in I} U_i$$

$U_1 \cup U_2$ может быть подпространством: $u_1 + u_2 \notin U_1 \cup U_2$

□

Определение. Суммой подпространств $U_1, \dots, U_m \subset V$ называется множество $U_1 + \dots + U_m = \{u_1 + \dots + u_m | u_i \in U_i\}$.

Утверждение. $U_1 + \dots + U_m$ – подпр-во в V , $\dim(U_1 + \dots + U_m) \leq \sum_{i=1}^m \dim U_i$

Доказательство. Если e_1, \dots, e_m – базисы в этих подпространствах, то

$$U_1 + \dots + U_m = \langle e_1, \dots, e_m \rangle : U_1 = \sum_{i=1}^{n_1} \lambda_{1i} e_{1i}, \dots, U_m = \sum_{j=1}^{n_m} \lambda_{mj} e_{mj} \Rightarrow$$

$U_1 + \dots + U_m$ – линейная комбинация этих векторов.

□

Формула Грассмана. Если U_1, U_2 – конечные подпространства V , то $\dim(U_1 + U_2) = \dim U_1 + \dim U_2 - \dim(U_1 \cap U_2)$

Доказательство. $\dim U_1 = n_1, \dim U_2 = n_2, \dim(U_1 \cap U_2) = r$.

Выберем e_1, \dots, e_r – базис в $U_1 \cap U_2$. Дополним их до базиса в U_1 векторами a_{r+1}, \dots, a_{n_1} , в U_2 векторами b_{r+1}, \dots, b_{n_2}

□

Утверждение. $\{a_i, b_j, c_k\}$ – базис $U_1 + U_2$ (их количество $n_1 + n_2 - r$).

Доказательство. Ясно, что это полная система. Докажем ЛНЗ:

$$\text{Допустим } \sum_{i=r+1}^{n_1} \alpha_i a_i + \sum_{j=r+1}^{n_2} \beta_j b_j + \sum_{k=1}^r \gamma_k c_k = 0 \Rightarrow$$

$$\underbrace{\sum \alpha_i a_i + \sum \gamma_k c_k}_{\in U_1} = \underbrace{-\sum \beta_j b_j}_{\in U_1 \cap U_2} \Rightarrow$$

$$\gamma'_k := -\sum \beta_j b_j = \sum \gamma'_r c_r \Rightarrow \sum \beta_j b_j + \sum \gamma'_k c_k = 0 \xrightarrow{\text{ЛНЗ}} \beta_j = 0, \forall j = r+1, \dots, n_2;$$

$$\gamma'_k = 0 \Rightarrow \sum \alpha_i a_i + \sum \gamma_k c_k = 0 \xrightarrow{\text{ЛНЗ}} \alpha_i = 0, \forall i = r+1, \dots, n_1; \gamma_k = 0, \forall k = 1, \dots, r.$$

□

Алгоритм вычисления базисов в $U_1 + U_2$, $U_1 \cap U_2$ ($\dim V \leq \infty$).

Замечание. $U_1 + U_2 = \langle a_1, \dots, a_{n_1}, b_1, \dots, b_{n_2} \rangle$

Доказательство. Можно составить матрицу из столбцов координат и Э.П. строк выявить базисные столбцы в этой расширенной матрице.

Вектор $v \in U_1 \cap U_2 \iff \exists x_i, y_i \in F : v = \sum_{i=1}^{n_1} x_i a_i = \sum_{j=1}^{n_2} y_j b_j$, т.е.

$(x_1, \dots, x_{n_1}, -y_1, \dots, -y_{n_2})$ – решение ОСЛУ с той же самой матрицей.

Базис $U_1 \cap U_2$ будет давать ФСР (ее часть соответственно $\{a_i\}$ или $\{b_i\}$).

□

1. Составить матрицу:

$$\underbrace{(a_1^\uparrow \dots a_{n_1}^\uparrow)}_{\text{ЛНЗ}} \mid \underbrace{(b_1^\uparrow \dots b_{n_2}^\uparrow)}_{\text{ЛНЗ}} \overset{\text{Э.П.}}{\underset{\text{строк}}{\sim}} \begin{pmatrix} \overbrace{1 \dots 0}^{E_{n_1}} & \mid & 0 \dots 0 & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 \dots 1 & \mid & 0 \dots 0 & \vdots & \vdots \\ \hline 0 \dots 0 & \mid & 1 \dots 0 & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 \dots 0 & \mid & 0 \dots 1 & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

Элементарными преобразованиями строк приводим к улучшенному ступенчатому виду. Ветокторы-столбцы $a_1, \dots, a_{n_1}, b_1, \dots, b_{n_2}$ – базис $U_1 + U_2$.

2. Вычислить $\dim(U_1 \cap U_2) = n_1 + n_2 - m$ (это количество столбцов b_j не вошедших в базис суммы). $m = n_1 + k = \dim(U_1 + U_2)$.

3. Выразить векторы b_{k+1}, \dots, b_{n_2} через базисы: $b_l = \sum_{i=1}^m \alpha_{il} a_i + \sum_{s=1}^k \beta_{sl} b_s$ – ЛНЗ
 $\iff b_l - \sum \beta_{sl} b_s = \sum \alpha_{il} a_i \in U_1 \cap U_2$ (Их количество $\dim(U_1 \cap U_2)$).

§4. Прямая сумма

Пусть V – векторное пространство над полем F , U_1, \dots, U_k – подпр-ва в V .

Определение. Сумма $U_1 + \dots + U_k$ ($k \geq 2$) называется *прямой суммой подпространств* U_1, \dots, U_k , если $\forall u$ из суммы представляется в виде $u = u_1 + \dots + u_k$ единственным образом.

Обозначение: $U_1 \oplus \dots \oplus U_k$

Примеры:

1. $U_1 = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid A^T = A\}$ – симметричные матрицы

2. $U_1 = \{B \in M_n(\mathbb{R}) \mid B^T = -B\}$ – кососимметричные матрицы

Утверждение. $M_n(\mathbb{R}) = U_1 \oplus U_2$, где U_1 – пространство симметричных матриц, а U_2 – пространство кососимметричных матриц.

Теорема. Следующие условия равносильны:

1. $U_1 + U_2 = U_1 \oplus U_2$
2. $U_1 \cap U_2 = \{0\}$
3. $\dim(U_1 + U_2) = \dim U_1 + \dim U_2$
4. Базис в $U_1 + U_2$ – объединение базисов слагаемых.

Доказательство.

$1 \Rightarrow 2$: $\forall u \in U_1 + U_2$ выполнено $u = u_1 + u_2$ – единственным образом. Допустим противное: пусть $\exists u_0 \in U_1 \cap U_2$, $u_0 \neq 0 \Rightarrow u_0 = \underbrace{u_0}_{\in U_1} + \underbrace{0}_{\in U_2} = \underbrace{0}_{\in U_1} + \underbrace{u_0}_{\in U_2}$. Противоречие единственности $\Rightarrow U_1 \cap U_2 = \{0\}$.

$2 \Rightarrow 3$: По формуле Грассмана.

$3 \Rightarrow 4$: Ясно, что $U_1 + U_2 = \langle a_1, \dots, a_{n_1}, b_1, \dots, b_{n_2} \rangle$ – эти векторы ЛНЗ, если

$$\exists \sum_{i=1}^{n_1} \alpha_i a_i + \sum_{j=1}^{n_2} \beta_j b_j = 0 \Rightarrow \underbrace{\sum_{i=1}^{n_1} \alpha_i a_i}_{=0} = - \underbrace{\sum_{j=1}^{n_2} \beta_j b_j}_{=0} = \{0\} \in U_1 \cap U_2$$

$4 \Rightarrow 1$: $\forall u = u_1 + u_2 = \sum_{i=1}^{n_1} x_i a_i + \sum_{j=1}^{n_2} y_j b_j$ раскладывается по базису единственным образом $\Rightarrow u_1, u_2$ единственны. □

Теорема. Для U_1, \dots, U_k ($k \geq 2$) следующие условия равносильны:

1. $U_1 + \dots + U_k = U_1 \oplus \dots \oplus U_k$
2. $\forall i = 1, \dots, k$ выполнено $U_i \cap (\sum_{j \neq i} U_j) = \{0\}$
3. $\dim(U_1 + \dots + U_k) = \dim U_1 + \dots + \dim U_k$
4. Базис в $U_1 + \dots + U_k$ – объединение базисов слагаемых.

Утверждение. Для любого пространства $U \subset V$ \exists подпространство $W \subset V$: $V = U \oplus W$, где W – прямое дополнение к U .

Доказательство. Пусть e_1, \dots, e_k – базис в U , тогда \exists векторы e_{k+1}, \dots, e_n ($n = \dim V$) : $\{e_1, \dots, e_n\}$ – базис в V , тогда $W := \langle e_{k+1}, \dots, e_n \rangle$ □

Факторпространство

Пусть V – векторное пространство, $U \subseteq V$ – подпространство.

Скажем, что векторы v_1 и $v_2 \in V$ сравнимы по модулю, если $v_1 - v_2 \in U$, то есть $v_1 \equiv v_2 \pmod{U}$.

Утверждение. Отношение: $v_1 \sim v_2 \iff v_1 - v_2 \in U$ является отношением эквивалентности на V .

Класс эквивалентности вектора v :

$$\vec{v} = \{v + u \mid \forall u \in U\} = v + U$$

$$V = \bigsqcup_{v \in V} (v + U)$$

Сравним с видом решения системы $AX = b : X = X_r + Y$ – частное решение + общее решение однородной ассоциированной $AY = 0$. Классы эквивалентности множества решений $AX = b$.

Обозначим: V/U – множество классов эквивалентности (смежных классов по U).

Термин: V/U – факторпространство V по U

Определим сложение классов: $(v_1 + U) + (v_2 + U) := v_1 + v_2 + U$

Определим умножение классов на скаляр $\lambda \in F$: $\lambda(v + U) := \lambda v + U$

Утверждение. Множество с введенными операциями является векторным пространством.

Утверждение. 1. Если $\dim V < \infty$, то $\dim(V/U) = \dim V - \dim U$

2. $(U \oplus W)/U \cong W$

Доказательство. Пусть $V = U \oplus W$

2. I способ: Построим отображение: $\forall v \in V \exists! u, w$, такие что

$f : v = u + w \mapsto v + U$, f – линейная. f – сюръективна: $w + U = f(w)$.

f – инъективна, так как если $w_1 + U = w_2 + U \Rightarrow w_1 - w_2 \in U$.

II способ: W имеет единственный общий вектор с любым смежным классом по U . $\forall x \in V = U \oplus W \exists! u \in U, v \in W : x = u + v \Rightarrow$ Рассмотрим $v + u = w + (u + U) = w + U$. Построим отображение $\varphi : V/U \mapsto W$ по правилу $\varphi(w + U) = w$, причем φ – линейное.

Тогда $\varphi((w_1 + U) + (w_2 + U)) = \varphi(w_1 + w_2 + U) = w_1 + w_2 = \varphi(w_1 + U) + \varphi(w_2 + U)$.

$\forall \lambda \in F, \varphi(\lambda w + U) = \lambda w = \lambda \varphi(w + U)$. φ – биективное, $\forall w \in W$,

то $\varphi(w + U) = w$, если $\varphi(w + U) = 0 \in W \Rightarrow w + U = U \Rightarrow v = 0 \Rightarrow$

0 – единственный.

1. Рассмотрим базис V , составленный из базисов слагаемых:

$$\underbrace{e_1, \dots, e_{n_1}}_{\text{Базис в } U}, \underbrace{e_{n_1+1}, \dots, e_n}_{\text{Базис в } W} \quad (n = \dim V)$$

$$\forall v \in V : v = \sum_{i=1}^{n_1} x_i e_i + \sum_{j=n_1+1}^n x_j e_j \Rightarrow \bar{v} = \sum_{j=n_1+1}^n x_j \bar{e}_j$$

Т.е. смежные классы векторов e_{n_1+1}, \dots, e_n – полная система в V/U .

Они ЛНЗ если $\sum_{j=n_1+1}^n x_j \bar{e}_j = \bar{0} = U \Rightarrow \sum_{j=n_1+1}^n x_j e_j \in U \cap W = \{0\} \Rightarrow \text{Все } \lambda_j = 0 \Rightarrow \{\bar{e}_{n_1+1}, \dots, \bar{e}_n\}$ – базис V/U . \square

Замечание. Если $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n_1} \\ x_{n_1+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, то $\bar{v} = \begin{pmatrix} x_{n_1+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

Внешняя прямая сумма пространств: Пусть V_1, \dots, V_m – векторные пространства над полями F .

Обозначение: $V = V_1 + \dots + V_m = \{(v_1, \dots, v_m) | v_i \in V_i, 1 \leq i \leq m\}$, V – внешняя прямая сумма пространств.

Замечание. Пространство $V = V_1 + \dots + V_m$ можно превратить в прямую сумму подпространств: рассмотрим $U_i = \{(0_{V_1}, \dots, v_i, \dots, 0_{V_m}) | v_i \in V_i\} \subset V$.

$$(v_1, \dots, v_m) = (v_1, 0, \dots, 0) + (0, v_2, 0, \dots, 0) + \dots \Rightarrow V = U_1 \oplus \dots \oplus U_m.$$

В факторпространстве $V/U : \bar{0} = U$ и $-\bar{v} = \overline{-v}$

Определение. $\dim(V/U)$ – коразмерность пространства U в пространстве V . Если $\dim V < \infty$, то $\text{codim}_V(U) = \dim V - \dim U$.

§5. Линейные функции и сопряженное (двойственное) пространство.

Пусть V – векторное пространство над полем F .

Определение. Функция $f : V \mapsto F$ называется *линейной* если:

1. $\forall v_1, v_2 \in V \implies f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2)$
2. $\forall v \in V, \lambda \in F \implies f(\lambda v) = \lambda f(v)$

Определение. Ядро функции: $\text{Ker} f = \{v \in V \mid f(v) = 0\}$

Образ функции $\text{Im} f = f(V) = \{\alpha \in F \mid \exists v \in V : f(v) = \alpha\}$

Утверждение. $\text{Ker} f$ – подпространство в V . Если $f \neq 0$, то $\text{Ker} f$ имеет коразмерность 1 в V .

Доказательство.

$$\forall v_1, v_2 \in \text{Ker} f, \lambda, \mu \in F \implies f(\lambda v_1 + \mu v_2) = \lambda f(v_1) + \mu f(v_2) = 0$$

□

Обозначим: $V^* = \{f : V \mapsto F\}$ – линейная функция.

Определим на V^* операции сложения: $\forall f_1, f_2 \in V^*$ выполнено $(f_1 + f_2)(v) := f_1(v) + f_2(v)$. Умножение на элемент поля: $\forall f \in V^*, \lambda \in F$ выполнено $(\lambda f)(v) := \lambda f(v)$

Термин: V^* – пространство сопряженное к V .

Теорема. Если $\dim V = n$, то $\dim V^* = n \implies V^* \cong V$.

Доказательство. Введем в V базис $e_1, \dots, e_n, \forall v \in V : v = \sum_{i=1}^n x_i e_i$.

Тогда $\forall f \in V^*, f(v) = \sum_{i=1}^n x_i f(e_i) = \sum_{i=1}^n f(e_i) f_i(v) = (\sum_{i=1}^n f(e_i) f_i)(v), \forall v \in V$. $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ – строка коэффициентов функций f . $f = \sum_{i=1}^n f(e_i) f_i(v) = \sum_{i=1}^n a_i f_i(v)$. Таким образом $V^* = \langle f_1, \dots, f_n \rangle$. Они ЛНЗ, если $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in F :$

$$\underbrace{\sum_{i=1}^n \lambda_i f_i}_{\tilde{f}} = 0. \quad \tilde{f}(e_j) = \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i(e_j) = \lambda_j = 0, \quad 1 \leq j \leq n. \quad f_i(e_j) = \begin{cases} 1, j = i \\ 0, j \neq i \end{cases} \implies$$

$$\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0.$$

□

Примеры:

1. $V = \mathbb{R}[x]$, $x_0 \in \mathbb{R}$ – фиксированная точка. $f : p(x) \mapsto p(x_0)$.

Рассмотрим $V_n = \{p(x) | \deg p \leq n\}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Определим $\text{Ker } f = \{p(x) | p(x_0) = 0\}$. Базис: $(x - x_0), (x - x_0)^2, \dots, (x - x_0)^n$.

2. $\dim V = n$, пусть e_1, \dots, e_n – базис в V . $\forall v \in V, v = \sum_{i=1}^n x_i e_i$. Рассмотрим $f_i(v) = x_i$ – i -ая координатная функция.

Определение. Обозначим $f_i := e^i$, $1 \leq i \leq n$. $\{e^1, \dots, e^n\}$ – базис в V^* , двойственный (биортогональный) к базису e_1, \dots, e_n .

По построению $e^i(e_j) = \begin{cases} 1, j = i \\ 0, j \neq i \end{cases}$ (символ Кронекера)

Разложение $\forall v \in V$ по базису e_1, \dots, e_n имеет вид $v = \sum_{i=1}^n e^i(v) e_i$

Утверждение. Строки коэффициентов линейных функций: $f(v) = \sum_{i=1}^n a_i x_i$ изменяются при переходе к новому базису по формулам: $\vec{a} = (a_1, \dots, a_n)$,
 $\vec{a}' = \vec{a} C_{e \rightarrow e'}$

Доказательство. $f(v) = \vec{a}' x'^\uparrow$. Знаем, что $X = CX' \iff \vec{a}(CX') = \vec{a}' X' \iff (\vec{a} C) X' = \vec{a}' X'$, верно $\forall x' \in F^n$. \square

Примеры взаимных базисов:

Пусть $V = \mathbb{R}_n[x] = \{p(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n | n \in \mathbb{N}, a_i \in \mathbb{R}\}$

1. С базисом: $1, \frac{x-x_0}{1!}, \dots, \frac{(x-x_0)^n}{n!}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ – фиксированное число.

$$p(x) = \sum_{k=0}^n \frac{p^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

Можно рассмотреть линейные функции $\delta^{(k)} : \delta^{(k)}(p) := p^{(k)}(x_0)$, $k = 0, \dots, n$.
 $\{\delta^{(k)}, k = 0, \dots, n\}$ – базис в V^* двойственный к тейлоровскому базису.

2. $V = \mathbb{R}_n[x]$. Пусть x_0, \dots, x_n – попарно различные числа. Рассмотрим линейные функции $\varphi_k(p) = p(x_k)$, $k = 0, \dots, n$.

$$\forall p(x) = \sum_{k=0}^n p(x_k) l_k(x), \quad l_k(x_i) = \delta_{ik}, \quad l_k(x) = \frac{\prod_{i \neq k} (x - x_i)}{\prod_{i \neq k} (x_k - x_i)}$$

Обозначение: $V^{**} = (V^*)^*$ – второе сопряженное

Теорема. Если $\dim V < \infty$, то $V^{**} \cong V$, причем изоморфизм не зависит от базиса.

Доказательство. Построим отображение $\varphi : V \mapsto V^{**}$, $\forall v \in V$:

$\varphi(v) := \varphi_v$, $\varphi_v \in V^{**}$. $\varphi_v(f) := f(v)$, $\forall f \in V^*$. Ясно что φ – линейное отображение: $\forall f \in V^*$ $\varphi_{v_1+v_2}(f) = f(v_1+v_2) = \varphi_{v_1}(f) + \varphi_{v_2}(f)$, и $\forall \lambda \in F$

$$\varphi_{\lambda v}(v) = f(\lambda v) = \lambda f(v) = \lambda \varphi_v(f)$$

φ – инъективное отображение $\iff \text{Ker} \varphi = 0$,

$\text{Ker} \varphi = \{v \in V \mid f(v) = 0, \forall f \in V^*\} = \{0\}$. Таким образом, $\varphi : V \mapsto W$ – инъективное линейное отображение. Но $\dim V = \dim(V^*)^* \implies \varphi$ – сюръективное отображение.

Подробнее: если $\varphi : V \mapsto W$ – инъективное линейное отображение и $\dim V = \dim W$, то оно сюръективно: $\exists e_1, \dots, e_n$ – базис в V , тогда $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)$ – ЛНЗ $\implies \varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)$ – базис в W . Рассмотрим $\lambda_1 \varphi(e_1) + \dots + \lambda_n \varphi(e_n) = 0_W \iff \varphi(\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n) = 0_W$. Но $\varphi(0_V) = 0_W$.

Инъективность $\implies \underbrace{\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n}_{\text{ЛНЗ}} = 0_V \implies \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$. □

Теорема. Векторы $a_1, \dots, a_k \in V$ – ЛНЗ ($\dim V < \infty$) $\exists f_1, \dots, f_k \in V^* : \det(f_i(a_j)) \neq 0$.

Доказательство.

\implies Дополним векторы до базиса V : $a_1, \dots, a_k, \dots, a_n$

По нему строим f_1, \dots, f_n – двойственный базис. Тогда $f_j(a_i) = \delta_{ij}$. по определению $f_j(a_i) = E \implies \det(f_j(a_i)) \neq 0$

\Leftarrow Пусть $P := (f_j(a_i))$, $P \in \text{Mat}_{k \times k}$. Предположим, что P – невырожденная, тогда $(a'_1, \dots, a'_k) = (a_1, \dots, a_k) P^{-1}$

$$(f_j(a'_i)) = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_k \end{pmatrix} (a'_1 \cdot \dots \cdot a'_k) = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_k \end{pmatrix} (a_1 \cdot \dots \cdot a_k) P^{-1} = P P^{-1} = E \implies$$

a'_1, \dots, a'_k – ЛНЗ $\implies a_1, \dots, a_k$ – ЛНЗ. □

Глава II. Линейные отображения и операторы

§1. Линейные отображения, их матрицы. Ядро и образ.

Пусть V, V' – векторные пространства над полем F .

Определение. $\varphi : V \mapsto V'$ – линейное отображение, если:

1. $\forall v_1, v_2 \in V : \varphi(v_1 + v_2) = \varphi(v_1) + \varphi(v_2)$
2. $\forall v \in V, \lambda \in F : \varphi(\lambda v) = \lambda \varphi(v)$

Следствие. $\varphi(0_V) = 0_{V'}$

$\varphi : V \mapsto V$ – линейный оператор на V .

Определение. Ядро линейного отображения $\varphi : V \mapsto V'$ ($V \mapsto V$).
 $\text{Ker}\varphi = \{v \in V \mid \varphi(v) = 0_{V'}\}$ (в частности, $0_V \in \text{Ker}\varphi$).

Образ линейного отображения φ (или множество значений φ) – это
 $\text{Im}\varphi = \varphi(V) = \{v' \in V' \mid \exists v \in V : \varphi(v) = v'\}$.

Утверждение. 1. $\text{Ker}\varphi$ – подпространство в V .
2. $\text{Im}\varphi$ – подпространство в V' .

Доказательство.

1. $0_V \in \text{Ker}\varphi$, если $\varphi(v_1) = \varphi(v_2) = 0_{V'}$, то $\varphi(v_1 + v_2) = \varphi(v_1) + \varphi(v_2) = 0_{V'}$, и, если $\lambda \in F$, то $\varphi(\lambda v_1) = \lambda \varphi(v_1) = 0_{V'}$.
2. $0_{V'} \in \text{Im}\varphi$, если $v'_1 = \varphi(v_1)$, $v'_2 = \varphi(v_2)$, то $v'_1 + v'_2 = \varphi(v_1) + \varphi(v_2) = \varphi(v_1 + v_2)$ и, если $\forall \lambda \in F$, то $\lambda v'_1 = \varphi(\lambda v_1) \in \text{Im}\varphi$

□

Теорема. Если $\dim V < \infty$, то $\dim \text{Im}\varphi = \dim V - \dim \text{Ker}\varphi$

Доказательство. Если фикс. базис e_1, \dots, e_n в V , то $\text{Im}\varphi = \langle \varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n) \rangle$
 $\forall v \in V : v = \sum_{i=1}^n x_i e_i \implies \varphi(v) = \sum_{i=1}^n x_i \varphi(e_i)$. В частности, $\dim \text{Im}\varphi = m \leq n$.

Выберем базис в $\text{Im}\varphi : f_1, \dots, f_m$. $\forall j = 1, \dots, m \exists a_j \in V : \varphi(a_j) = f_j$.

Поймем, что векторы a_1, \dots, a_m – ЛНЗ. $\exists \alpha_1, \dots, \alpha_m \in F$

Допустим, что $\alpha_1 a_1, \dots, \alpha_m a_m = 0 \implies \varphi(\sum_{j=1}^m \alpha_j a_j) = \sum_{j=1}^m \alpha_j \varphi(a_j) = \sum_{j=1}^m \alpha_j f_j = 0_{V'}$

Т.к. f_j – ЛНЗ $\implies \alpha_j = 0, \forall j = 1, \dots, m$

Возьмем произвольный $v' \in \text{Im}\varphi : v' = \sum_{j=1}^m \beta_j f_j$

По определению образа $\exists v \in V : \varphi(v) = v'$

Тогда рассмотрим $\varphi(v - \sum_{j=1}^m \beta_j a_j) = v' - \sum_{j=1}^m \beta_j f_j = 0_{V'} \implies v - \sum_{j=1}^m \beta_j a_j \in \text{Ker} \varphi$
 Выберем базис в $\text{Ker} \varphi$: $\{b_1, \dots, b_r\} \implies$

$$v - \sum_{j=1}^m \beta_j a_j = \sum_{k=1}^r \gamma_k b_k \implies v = \sum_{j=1}^m \beta_j a_j + \sum_{k=1}^r \gamma_k b_k$$

Если взять v произвольным, $v' = \varphi(v)$ – разлагается по базису f_1, \dots, f_m в $\text{Im} \varphi$, то предыдущие выкладки остаются в силе $\implies \forall v \in V$ – линейная комбинация векторов $\{a_j; b_k\}$. Эти векторы ЛНЗ в $V \implies$ базис в $V \implies \dim V = m + r$.
 Допустим, что

$$\exists \beta_j, \gamma_j : \sum_{j=1}^m \beta_j a_j + \sum_{k=1}^r \gamma_k b_k = 0_V \implies \varphi\left(\sum_j + \sum_k\right) = \sum_{j=1}^m \beta_j f_j + 0 = 0_{V'} \implies$$

$$\gamma_j = 0, j = 1, \dots, m \implies \underbrace{\sum_{k=1}^r \gamma_k b_k}_{\text{ЛНЗ}} = 0 \implies \gamma_k = 0, k = 1, \dots, r.$$

□

Пусть $e = e_1, \dots, e_n$ – базис в V , $\forall v \in V : v = \sum_{j=1}^n x_j e_j \implies \varphi(v) = \sum_{j=1}^n x_j \varphi(e_j)$.

Если в V' задан базис $f = \{f_1, \dots, f_m\}$ и известно разложение векторов $\varphi(e_j)$ по этому базису, $\varphi(e_j) = \sum_{i=1}^m a_{ij} f_i$, то можно вычислить $\varphi(v)$.

$A_{\varphi, e, f} = (a_{ij})$ – матрица линейного отображения φ в паре базисов e и f . Таким образом, столбцы матрицы A_φ – столбцы координат $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_m)$ в базисе f .
 Для $\varphi : V \mapsto V$ по умолчанию $f = e$ (второй базис равен первому), остается $A_{\varphi, e}$ – матрица линейного оператора φ в базисе e .

.

$V \mapsto V^{**} = (V^*)^*$ – канонический изоморфизм.

$\langle f | v \rangle$ – значение функционала f на векторе v

$\langle f |$ – bra-vector

$|v\rangle$ – ket-vector.

Теорема.

1. Если $\dim V < \infty$, $\varphi : V \mapsto V'$ – линейное отображение, то $\dim \text{Im} \varphi = \dim V - \dim \text{Ker} \varphi$

2. $\text{Im} \varphi \cong V / \text{Ker} \varphi$

Доказательство.

1. Пусть $\dim \text{Im} \varphi = m \leq \dim V'$, выберем в образе $\text{Im} \varphi$ базис f_1, \dots, f_m .

$$\forall j, 1 \leq j \leq m, \exists e_j \in V : \varphi(e_j) = f_j.$$

$$\forall v \in V : v' = \varphi(v) = \sum_{j=1}^m \lambda_j f_j = \varphi\left(\underbrace{\sum_{j=1}^m \lambda_j e_j}_{v_1 \in V}\right) \implies \varphi(v - v_1) = 0, \text{ т.е. } v - v_1 \in \text{Ker} \varphi.$$

$$\text{Выберем в } \text{Ker} \varphi \text{ базис: } c_1, \dots, c_r \text{ (} r = \dim \text{Ker} \varphi \text{)} \implies v - v_1 = \sum_{k=1}^r \mu_k c_k \implies$$

$$v = \sum_{j=1}^m \lambda_j e_j + \sum_{k=1}^r \mu_k c_k \implies V = \langle e_1, \dots, e_m, c_1, \dots, c_r \rangle$$

$$e_1, \dots, e_m, c_1, \dots, c_r - \text{ЛНЗ, если: } \exists \varepsilon_j, \gamma_k \in F : \varphi\left(\sum_{j=1}^m \varepsilon_j e_j + \sum_{k=1}^r \gamma_k c_k\right) = 0_V \implies$$

$$\sum_{j=1}^m \underbrace{\varepsilon_j f_j}_{\text{ЛНЗ}} = 0_{V'} \implies \varepsilon_j = 0, 1 \leq j \leq m \implies \sum_{k=1}^r \underbrace{\gamma_k c_k}_{\text{ЛНЗ}} = 0 \implies \gamma_k = 0, 1 \leq k \leq r.$$

2. %Rem: Если $U \subseteq V$, то $V/U = \bar{v} \equiv \{v + u \mid u \in U\} = v + U$ – факторпространство V по U , где $\text{Ker} \varphi := U$

Рассмотрим отображение $\pi : V/U \mapsto \text{Im} \varphi \subseteq V'$, $\pi(\bar{v}) = \varphi(v)$.

Корректность определения: если $v_1 \in V : \bar{v}_1 = \bar{v}$, то $v_1 = v + u_1$,

$$\text{где } u_1 \in U = \text{Ker} \varphi \implies \varphi(v_1) = \varphi(v) + \underbrace{\varphi(u_1)}_{\equiv 0} \implies \pi(\bar{v}_1) = \pi(\bar{v})$$

π – линейное отображение:

$$\pi(\overline{v_1 + v_2}) = \pi(\overline{v_1} + \overline{v_2}) = \varphi(v_1 + v_2) = \varphi(v_1) + \varphi(v_2) = \pi(\bar{v}_1) + \pi(\bar{v}_2), \forall v \in V, \lambda \in F.$$

$$\pi(\lambda \bar{v}) = \pi(\overline{\lambda v}) = \varphi(\lambda v) = \lambda \varphi(v) = \lambda \pi(\bar{v})$$

π – биективное:

$$\text{Сюръективность: } \forall v' \in \text{Im} \varphi \exists v \in V : \varphi(v) = v' \implies \pi(\bar{v}) = \varphi(v) = v'.$$

$$\text{Инъективность: допустим, что } \pi(\bar{v}_1) = \pi(\bar{v}_2) \implies \varphi(v_1) = \varphi(v_2) \implies$$

$$v_2 - v_1 \in \text{Ker} \varphi \implies \exists u \in U = \text{Ker} \varphi : v_2 = v_1 + u \implies \bar{v}_2 = \bar{v}_1$$

□

Матрицы линейного отображения $\varphi : V \mapsto V'$

$$\forall v = \sum_{j=1}^n x_j e_j. e = (e_1, \dots, e_n) - \text{базис в } V, f = (f_1, \dots, f_m) - \text{базис в } V',$$

$$(\dim V = n, \dim V' = m) \implies$$

$$\varphi(v) = \sum_{j=1}^n x_j \varphi(e_j) = \sum_{j=1}^n x_j \sum_{i=1}^m a_{ij} f_i = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right) f_i \quad (1)$$

$$\text{Если } \varphi(e_j) = \sum_{i=1}^m a_{ij} f_i, (a_{ij}) = A_{\varphi, e, f}.$$

$$\text{Обозначение: } y = \varphi(v), v = e X_e^\uparrow \implies y = \varphi(v) = f Y_f^\uparrow = \sum_{i=1}^m y_i f_i.$$

$$(1) \implies Y_e^\uparrow = A_{\varphi,e,f} X_e^\uparrow \quad (2)$$

$\text{Ker}\varphi = \{v = eX_e^\uparrow | \varphi(v) = 0\}$. Согласно формуле (2), $v \in \text{Ker}\varphi \iff$

$A_{\varphi,e,f} X_e^\uparrow = 0$ – ОСЛУ с матрицей $A_\varphi \implies \dim \text{Ker}\varphi = n - \text{rk} A_\varphi$

Но $\text{Im}\varphi = \langle \varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n) \rangle$ – линейная оболочка столбцов матрицы $A_\varphi \implies \dim \text{Im}\varphi = \text{rk} A_\varphi$. Получили матричное доказательство формулы для $\dim \text{Im}\varphi$.

Лемма. Линейное отображение $\varphi : V \mapsto V'$ инъективно $\iff \text{Ker}\varphi = \{0\}$

(и $\implies \varphi(V) \cong V$)

Доказательство.

\implies : φ – инъективно. Знаем, что $\varphi(0_V) = 0_{V'}$, а т.к. φ инъективно, то 0_V , единственный вектор из V , $\mapsto 0_{V'} \implies \text{Ker}\varphi = \{0_V\}$.

\impliedby : Пусть $\varphi(v_1) = \varphi(v_2) \implies \varphi(v_1 - v_2) = 0_{V'} \implies v_1 - v_2 \in \text{Ker}\varphi = \{0\} \implies v_1 = v_2$

□

Задача: Пусть $\varphi : V \mapsto V'$, $A_{\varphi,e,f}$ – матрица φ . При каких усл. на A_φ :

1. φ инъективно?

2. φ сюръективно?

3. φ биективно?

Примеры:

1. $V = \mathbb{R}_n[x] = \{a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \mid a_i \in \mathbb{R}\}$ – пространство многочленов степени $\leq n$. Рассмотрим базис: $1, \frac{x}{1!}, \dots, \frac{x^n}{n!}$

$$\frac{x^2}{2!} \mapsto \frac{x}{1!}; \quad \varphi(e_j) = e_{j-1}, \quad 1 \leq j \leq n.$$

$$\varphi = \frac{d}{dx}, \quad \frac{d}{dx} : V \mapsto V \quad (\text{либо } V' = \mathbb{R}_{n-1}[x])$$

$$\text{Ker}\varphi = \{\text{const}\}, \quad \text{Im}\varphi = \mathbb{R}_{n-1}[x]$$

$$A_{\varphi,e} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Жорданова клетка порядка $n + 1$ с диагональным элементом $\lambda = 0$.

2. Пусть $V = U_1 \oplus U_2$ – прямая сумма подпространств.

Определим $\varphi : V \mapsto V$, $\forall v = u_1 + u_2$, $\varphi(v) = u_1$ – проектирование V на подпространство $U_1 \parallel U_2$.

φ – линейный оператор. $\text{Ker}\varphi = U_2$, $\text{Im}\varphi = U_1$

Если $\dim U_1 = k$, $\dim U_2 = n - k$.

Рассмотрим $\underbrace{e_1, \dots, e_k}_{\text{базис } U_1}, \underbrace{e_{k+1}, \dots, e_n}_{\text{базис } U_2} \Rightarrow A_{\varphi, e} = \left(\begin{array}{c|c} E_k & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right)$

Вычисление матрицы $A_{\varphi, e, f}$:

$A_{\varphi} e_j^{\uparrow}$ – j -й столбец матрицы A_{φ} в базисе f , где $1 \leq j \leq n$.

Рассмотрим задачу: даны ЛНЗ векторы a_1, \dots, a_n в V и некоторые векторы b_1, \dots, b_n в V' . Найти матрицу линейного отображения $\varphi : V \mapsto V'$ такого, чтобы $\varphi(a_i) = b_i$, $1 \leq i \leq n$.

По формуле, $b_j^{\uparrow} = A_{\varphi} a_j^{\uparrow}$, $1 \leq j \leq n \iff A_{\varphi}(a_1^{\uparrow}, \dots, a_n^{\uparrow}) = (b_1^{\uparrow}, \dots, b_n^{\uparrow})$

Уравнение вида: $XA = B$, $\det A \neq 0 \implies X = BA^{-1}$

$$\left(\begin{array}{c} A \\ B \end{array} \right) \underset{\text{столбцов}}{\overset{\text{Э.П.}}{\rightsquigarrow}} \left(\begin{array}{c} E \\ X \end{array} \right) \implies X = A_{\varphi, e, f}$$

$$(A^T | B^T) \underset{\text{строк}}{\overset{\text{Э.П.}}{\rightsquigarrow}} (E | X^T)$$

Изменение матрицы линейного отображения (оператора) при замене базисов:

Пусть $e, e' : e' = eC_{e \rightarrow e'}$ в V и $f, f' : f' = fD_{f \rightarrow f'}$ в V' .

Но $X_{e'} : X_e = C_{e \rightarrow e'} X_{e'}$ (3)

$Y_{f'} : Y_f = D_{f \rightarrow f'} Y_{f'}$ (3')

$$D_{f \rightarrow f'} Y_{f'} = A_{\varphi, e, f} C_{e \rightarrow e'} X_{e'}$$

$$Y_{f'} = (D^{-1} A_{\varphi} C) X_{e'} \quad (*)$$

(*) Сравним это с формулой:

$$Y_{f'} = A_{\varphi, e', f'}, \forall X \in F^n, Y \in F^m \implies A_{\varphi, e', f'} = D_{f \rightarrow f'}^{-1} A_{\varphi, e, f} C_{e \rightarrow e'}$$

В качестве X по очереди взять столбцы E_n , в качестве Y – столбцы E_m .

Если $\varphi : V \mapsto V$ – линейный оператор, e, e' – базисы, $C = C_{e \rightarrow e'}$, то $a_{\varphi, e'} = C^{-1} A_{\varphi, e} C$ (*)

Термин: Две матрицы называются *подобными*, если

$$\exists C : A' = C^{-1} A C \quad (\det C \neq 0)$$

Утверждение. Если A и A' подобные, то $|A'| = |A|$ и $rk A' = rk A$.

$$(*) \iff CA' = AC. \text{ Составим матрицу } (C|AC) \underset{\text{строк}}{\overset{\text{Э.П.}}{\rightsquigarrow}} (E|A').$$

§2. Действия над линейными отображениями и операторами.

$\varphi, \psi : V \mapsto V'$ – линейное.

$$\forall v \in V \quad (\varphi + \psi)(v) := \varphi(v) + \psi(v)$$

$$\forall \lambda \in F \quad (\lambda\varphi)(v) := \lambda\varphi(v)$$

Утверждение.

1. $\mathcal{L}(V, V')$ является векторным пространством над F

2. Если $\dim V = n$, $\dim V' = m$, то $\mathcal{L}(V, V') \cong M_{m \times n}(F)$

Доказательство. 1. "Очевидно".

2. Если фиксировать базисы e в V , f в V' , то $\forall \varphi \longleftrightarrow A_{\varphi, e, f}$, причем:

$$A_{\varphi+\psi} = A_{\varphi} + A_{\psi}, \quad A_{\lambda\varphi} = \lambda A_{\varphi}$$

Если X – столбец координат вектора v , $v' = \varphi(v)$, Y – столбец координат v' .

$$Y = A_{\varphi}X,$$

\tilde{Y} – столбец координат вектора $\psi(v)$, то $\tilde{Y} = A_{\psi}X$, $(\varphi + \psi)(v) =$

$$\varphi(v) + \psi(v) \implies \varphi(v) + \psi(v) \text{ имеет столбец координат } Y + \tilde{Y} = A_{\varphi}X + A_{\psi}X = (A_{\varphi} + A_{\psi})X = A_{\varphi+\psi}X \implies \varphi \mapsto A_{\varphi, e, f} \text{ – изоморфизм } (\dim \mathcal{L}(V, V') = n \cdot m)$$

□

Умножение (композиция) линейных отображений (операторов):

Пусть $V \xrightarrow{\psi} V' \xrightarrow{\varphi} V''$

Утверждение. Если φ, ψ – линейные, то $\varphi \cdot \psi$ – линейное

В частности, для линейных операторов: $\varphi \cdot \psi$ – линейный оператор в этом же пространстве.

Обозначим: $\mathcal{L}(V)$ – множество всех линейных операторов на V .

Теорема. С операциями $+$, $\lambda \cdot$, и \cdot $\mathcal{L}(V)$ является [линейной] алгеброй; если $\dim V = n$, то $\mathcal{L}(V) \cong M_n(F)$

(A – линейная алгебра, если на A заданы операции $+$, \cdot , $\lambda \cdot$, такие что

1. A_+ – кольцо ассоциативное

2. $A_{+, \lambda, \cdot}$ – векторное пространство

3. $\lambda(ab) = (\lambda a)b, \forall \lambda \in F, a, b \in A.$)

Доказательство. 1, 2 уже проверены.

3. $\forall v \in V, (\lambda(ab))(v) = \lambda((ab)(v)) = \lambda a(b(v)) = (\lambda a)(b(v)) \implies \lambda(ab) = (\lambda a)b$, для $a, b \in \mathcal{L}(V)$. □

Геометрическое доказательство неравенства $rk(AB) \leq \begin{cases} rkA \\ rkB \end{cases}$

(для любых матриц A, B , т.ч. $\exists AB$).

Доказательство. Если $A_{m \times n}$, $B_{n \times p}$, то $\mathbb{R}^p \xrightarrow{B} \mathbb{R}^n \xrightarrow{A} \mathbb{R}^m$

$$rk(AB) = \dim(AB(\mathbb{R}^p)) \leq \dim B(\mathbb{R}^p)$$

$$A(\mathbb{R}^n) \supseteq (AB)(\mathbb{R}^p) \implies rk(AB) = \dim \text{Im}(AB) \leq \dim \text{Im} A = rkA.$$

Случай равенства. Если $|A| \neq 0$, то A задает изоморфизм между \mathbb{R}^n и $\mathbb{R}^m \implies \dim B(\mathbb{R}^p) = \dim(AB(\mathbb{R}^p))$, т.е. $rkB = rkAB$

□

Многочлены от линейного оператора:

Пусть $p(t) = a_0 t^m + a_1 t_{m-1} + \dots + a_{m-1} t + a_m$, $\forall a_i \in F$, $i = 0, \dots, m$.

Тогда $p(\varphi) = a_0 \varphi^m + a_1 \varphi^{m-1} + \dots + a_{m-1} \varphi + a_m \varepsilon$

$\varepsilon(v) = v, \forall v \in V$ – тождественный оператор.

Многочлен $p(t)$ – *аннулирующий многочлен оператора* φ , если $p(\varphi) = 0$ (нулевой оператор).

Теорема. Для любого оператора $\varphi : V_n \longrightarrow V_n$ существует аннулирующий многочлен степени $\leq n^2 - 1$.

Доказательство. Т.к. $\dim \mathcal{L}(V) = n^2$, то операторы, $\varphi^0 = \varepsilon, \varphi, \varphi^2, \dots, \varphi^{n^2}$ – ЛЗ. $\implies \exists a_0, a_1, \dots, a_{n^2} \in F$, $a_0 \varepsilon + a_1 \varphi + \dots + a_{n^2} \varphi^{n^2} = 0 \implies p(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_{n^2} t^{n^2}$ – аннулирующий для φ .

□

§3. Инвариантные пространства.

Пусть $\varphi : V \longrightarrow V$ – линейный оператор.

Определение. Подпространство $U \subseteq V$ называется *инвариантным* относительно φ (или для φ , или φ -инвариантным), если $\forall u \in U \implies \varphi(u) \in U$, т.е. $\varphi(U) \subseteq U$.

Определение. Ограничение (сужение) оператора φ на инвариантное подпространство U – это оператор.

Обозначение: $\varphi|_U : U \longrightarrow U$, а именно, $\forall u \in U : \varphi|_U(u) := \varphi(u)$

Примеры:

1. $\varphi = \frac{d}{dx} : \mathbb{R}[x] \mapsto \mathbb{R}[x], \quad p(x) \mapsto p'(x)$

Для $\forall n = 0, 1, \dots, \mathbb{R}_n[x] = \{p(x) | \deg p(x) \leq n\}$ являются инвариантными подпространствами

Вопрос: есть ли другие инвариантные подпространства?

2. φ – проектирование (проектор) $V \mapsto V = U_1 \oplus U_2$

$$\varphi(u_1 + u_2) = u_1 \text{ на } U_1 \text{ вдоль } U_2.$$

Инвариантные: U_1, U_2 , а также $U'_1 \oplus U'_2$, для $\forall U'_1 \subseteq U_1, U'_2 \subseteq U_2$.

Теорема. Если $\varphi : V \mapsto V$, то φ -инвариантными являются:

- $\text{Ker} \varphi$
- $\text{Im} \varphi$
- Любое пространство U : $\text{Im} \varphi \subseteq U \subseteq V$
- $\forall k = 1, 2, \dots, \text{Ker} \varphi^k$
- $\text{Im} \varphi^k$

Теорема. Если U_1, \dots, U_k – φ -инвариантные, то φ -инвариантные:

- $U_1 + \dots + U_k$
- $U_1 \cap \dots \cap U_k$

Доказательство.

- $\forall v = u_1 + \dots + u_k \implies \varphi(v) = \varphi(u_1) + \dots + \varphi(u_k) \in U_1 + \dots + U_k$
- $\forall w \in U_i, i = 1, \dots, k \implies \varphi(w) \in U_i, i = 1, \dots, k \implies \varphi(w) \in \bigcap_{i=1}^k U_i$

□

Лемма. (Вид матрицы A_φ при наличии инвариантов подпространства)

1. Пусть U_1 – φ -инвариантное пространство, $\{0\} \neq U_1 \neq V$.

Тогда в V \exists базис, в котором

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} B & D \\ 0 & C \end{pmatrix}_{\substack{m \times m & (n-m) \times (n-m) \\ m \times m & (n-m) \times (n-m)}}, \text{ причем } B = A_{\varphi|_{U_1}}, \dim U_1 = m$$

2. Пусть $V = U_1 \oplus U_2$, причем U_1, U_2 – ненулевые инвариантные подпространства, тогда в V \exists базис, в котором

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}, \text{ причем } C = A_{\varphi|U_2}$$

Доказательство.

1. Надо взять e_1, \dots, e_m – базис в U_1 , дополнить его произвольно до базиса в V . Тогда для $j = 1, \dots, m$, $\varphi(e_j) \in U_1$, $\varphi(e_j) = \sum_{i=1}^m b_{ij} e_i$
2. Если базис e_1, \dots, e_m пространства U_1 объединить с базисом e_{m+1}, \dots, e_n пространства U_2 , то в полученном базисе $A_\varphi = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$

□

Утверждение. Верное и обратное

§4. Собственные векторы и собственные значения линейных операторов.

Теорема. Пусть $\varphi : U \rightarrow U$ – линейный оператор, $U \supseteq \text{Im} \varphi \implies \varphi(U) \subseteq U$

Доказательство. $\forall u \in U, \varphi(u) \in \text{Im} \varphi \subseteq U \implies \varphi(u) \in U, \forall u \in U$ □

Определение. Вектор $x \in V$ называется *собственным вектором* оператора φ , если $x \neq 0$ и $\exists \lambda \in F : \varphi(x) = \lambda x$ (1). Это λ называется *собственным значением* оператора φ (x – собственный вектор с собственным значением λ).

Для данного собственного значения $\lambda \in F$ обозначается

$$V_\lambda = \{x \in V \mid \varphi(x) = \lambda x\} \quad (2)$$

(Множество собственных векторов с добавленным 0). V_λ – подпространство в V .

Определение. V_λ называется *собственным подпространством* оператора φ , отвечающим собственному значению λ .

Утверждение. 1. $V_\lambda = \text{Ker}(\varphi - \lambda \varepsilon)$, (ε – тождественный оператор).

2. V_λ – φ -инвариантное подпространство.

Доказательство. 1. $v \in \text{Ker}(\varphi - \lambda \varepsilon) \iff \varphi(v) = \lambda v \iff v \in V_\lambda$.

2. Возьмем $x \in V_\lambda \implies \varphi(x) = \lambda x \in V_\lambda$ □

Замечание: если $\varphi(x) = \lambda x$ ($x \neq 0$), $\varphi^2(x) = \lambda^2 x, \dots, \varphi^m(x) = \lambda^m x \implies$ для любого многочлена $p(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n$ ($a_i \in F$), $p(\varphi)(x) = p(\lambda)x$. В частности, если $p(t)$ – аннулирующий многочлен для φ , т.е. $p(\varphi) = 0$, то $p(\lambda) = 0$.

Примеры:

1. $\varphi = \frac{d}{dx} \cdot V = C^\infty(\mathbb{R})$, $\forall f(x) \mapsto f'(x)$. Возьмем $f(x) = e^{\lambda x} \implies (e^{\lambda x})' = \lambda e^{\lambda x}$, т.е. $e^{\lambda x}$ – собственная функция для φ . Для $\forall \lambda \in \mathbb{R} \exists!$ функция $f(x) : f'(x) = \lambda f(x)$

Пусть $f(x)$ – та функция, рассмотрим $g(x) = f(x)e^{-\lambda x}$,

$$g'(x) = f'(x)e^{-\lambda x} - \lambda f(x)e^{-\lambda x} = \lambda f(x)e^{-\lambda x} - \lambda f(x)e^{-\lambda x} = 0 \text{ на } \mathbb{R} \implies g(x) \equiv C \\ \implies f(x) = Ce^{\lambda x} (\forall C \neq 0) \implies \dim V_\lambda = 1.$$

Теорема. Пусть $x_1, \dots, x_m \in V$ – собственные для φ с попарно различными собственными значениями $\lambda_1, \dots, \lambda_m$. Тогда x_1, \dots, x_m ЛНЗ.

Доказательство. Индукция по m :

База: $m = 1$ – по определению сам себе ЛНЗ.

Шаг: пусть $m > 1$ и векторы в количестве $(m - 1)$ ЛНЗ:

$$\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_{m-1} x_{m-1} + \alpha_m x_m = 0 \quad (\text{I}).$$

$$\text{Подставим на равенство I оператором } \varphi : \alpha_1 \varphi(x_1) + \dots + \alpha_m \varphi(x_m) = 0 \iff \\ \alpha_1 \lambda_1 x_1 + \dots + \alpha_{m-1} \lambda_{m-1} x_{m-1} + \alpha_m \lambda_m x_m = 0 \quad (\text{II}).$$

Вычтем из II равенство I, умноженное на λ_m :

$$\alpha_1 (\lambda_1 - \lambda_m) x_1 + \dots + \alpha_{m-1} (\lambda_{m-1} - \lambda_m) x_{m-1} = 0. \text{ По предположению индукции } \\ \alpha_i (\lambda_i - \lambda_m) = 0, \forall i = 1, \dots, m-1 \implies \alpha_i = 0 \implies \alpha_m = 0$$

□

Следствие. Допустим, что $\dim V = n$ и φ имеет n различных собственных значений $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, тогда отвечающие им собственные векторы оператора φ образуют базис в V [собственный базис].

Обратим внимание, что в этом базисе e_1, \dots, e_n матрица A_φ – диагональная:

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Причем $\varphi(e_j) = \lambda_j e_j \implies$ в координатах это значит, что

$$A_\varphi \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \lambda_j \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \implies A_\varphi = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & & & \\ & \lambda_2 & \ddots & & \\ & & \ddots & 0 & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Следствие. Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ – попарно различные собственные значения оператора φ , тогда сумма $V_{\lambda_1} + \dots + V_{\lambda_m} = V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_m}$

Вычисление собственных значений и собственных векторов с помощью A_φ :

Пусть $\dim V = n$, $e = (e_1, \dots, e_n)$ – некоторый базис в V , $A_{\varphi, e}$ – матрица оператора φ .

По определению: $\varphi(x) = \lambda x$, $x \neq 0$.

В координатах: $A_\varphi X = \lambda X \iff (A_\varphi - \lambda E)X = 0$ (3), $X \neq 0$.

Для того чтобы система (3) имела хотя бы одно ненулевое решение, необходимо, чтобы $\det(A_\varphi - \lambda E) = 0$ (4)

λ – корень характеристического уравнения (4). (Собственными значениями будут только корни $\lambda \in F$).

$$\begin{aligned} \text{Раскроем } \det(A_\varphi - \lambda E) &= \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = \\ &= (a_{11} - \lambda) \cdot \dots \cdot (a_{nn} - \lambda) + (\text{слагаемые степени } \leq n-1 \text{ по } \lambda) = \\ &= (-\lambda)^n + \sum_{i=1}^n a_{ii}(-\lambda)^{n-1} + \dots + |A| \end{aligned}$$

Термин: $\det(A_\varphi - \lambda E)$ – характеристический многочлен матрицы A_φ .

Лемма. Характеристический многочлен матрицы A_φ не зависит от выбора базиса.

Доказательство. Пусть $e' = eC$ – новый базис, тогда матрица

$$A_{\varphi, e'} = C^{-1}A_{\varphi, e}C \implies |A_{\varphi, e'} - \lambda E| = |C^{-1}A_\varphi C - \lambda(C^{-1}C)| = |C^{-1}(A_\varphi - \lambda E)C| = |C^{-1}||A_\varphi - \lambda E||C| = |A_\varphi - \lambda E|$$

□

Определение. $\chi_\varphi(\lambda) = |A_\varphi - \lambda E|$ – характеристический многочлен (в любом базисе) оператора φ .

§5. Диагонализируемость линейных операторов.

Пусть $\varphi : V \mapsto V$ – линейный оператор, $\dim V = n$.

Определение. Скажем, что матрица оператора φ диагонализуема, если \exists базис e в V , в котором A_φ диагональна.

$$A_{\varphi,e} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

Термины: для характеристического корня $\lambda \in F$:

1. геометрическая кратность λ , $\text{гкм}(\lambda) = \dim V_\lambda$,
2. алгебраическая кратность λ – это его кратность как корня характеристического многочлена ($\text{алкр}(\lambda)$).

Лемма. $\dim V_\lambda \leq \text{алкр}(\lambda)$

Доказательство. Пусть $\dim V_\lambda = m$, $\text{алкр}(\lambda) = k$, нужно доказать, что $m \leq k$

Выберем базис в V_λ : e_1, \dots, e_m и дополним его до базиса в V , векторами e_{m+1}, \dots, e_n

В этом базисе:

$$A_{\varphi,e} = \left(\begin{array}{cccc|c} \lambda & 0 & \dots & 0 & \overbrace{\hspace{1cm}}^{n-m} \\ 0 & \lambda & \dots & 0 & B \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ 0 & 0 & \dots & \lambda & \\ \hline 0 & \dots & \dots & 0 & \\ \vdots & & & \vdots & C \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \end{array} \right) \Rightarrow$$

$$|A_\varphi - tE| = \left| \begin{array}{ccc|c} \lambda - t & & & 0 \\ & \ddots & & \\ 0 & & \lambda - t & \\ \hline & & 0 & \\ & & & C - tE \end{array} \right| = (\lambda - t)^m \cdot |C - tE| = 0$$

λ может быть корнем $|C - tE| \Rightarrow \text{алкр}(\lambda) \geq m$

□

Замечание. $\dim V_{\lambda_j} = n - \text{rk}(A_\varphi - \lambda_j E)$.

Теорема. (критерий диагонализированности)

Для оператора $\varphi : V \longrightarrow V$ следующие условия равносильны:

1. A_φ диагональна в некотором базисе.
2. В $V \exists$ базис из собственных векторов оператора φ (собственный базис).
3. $\chi_\varphi(\lambda) = \det(A_\varphi - \lambda E) = (\lambda_1 - \lambda)^{k_1} \cdot \dots \cdot (\lambda_s - \lambda)^{k_s}$ Все характеристические корни $\lambda_i \in F$, и для $\forall i$, $\underbrace{\dim V_{\lambda_i}}_{\text{кр } \lambda_i} = \underbrace{k_i}_{\text{alg}(\lambda_i)}$
4. $V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_s} = V$

Доказательство. 1. \implies 2.

Если $A_{\varphi, e} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$, то координаты вектора

$$\varphi(e_i) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \lambda_i \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_i \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ т.е. } \varphi(e_i) = \lambda_i e_i$$

2. \implies 1.

Если e – собственный базис для φ , $\varphi(e_i) = \lambda_i e_i$, то i -й столбец матрицы $A_{\varphi, e}$

равен $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \lambda_i \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, матрица составленная из этих столбцов, и есть $\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

1. и 2. \iff 3.

Пусть в базисе e матрица A_φ диагональна.

Занумеруем векторы следующим образом:

$$\underbrace{e_1, \dots, e_{p_1}}_{\lambda_1}, \underbrace{e_{p_1+1}, \dots, e_{p_1+p_2}}_{\lambda_2}, \dots \text{ и т.д.}$$

Ясно, что $e_1, \dots, e_{p_1} \in V_{\lambda_1}$, $e_{p_1+1}, \dots, e_{p_1+p_2} \in V_{\lambda_2} \implies \dim V_{\lambda_i} \geq p_i$.

По построению, $\sum_{i=1}^s p_i = n = \sum_{i=1}^s k_i \implies \sum_{i=1}^s (p_i - k_i) = 0 \implies$ все $p_i = k_i$

Обратно: пусть $\forall i$, $p_i = \dim V_{\lambda_i} = k_i$ (*).

Возьмем базисы в собственных подпространствах, объединим их \implies получим

$$\text{всего } \sum_{i=1}^s p_i = \sum_{i=1}^s k_i = n = \dim V.$$

Остается понять, что все эти векторы ЛНЗ. Это следует из теоремы: если векторы x_1, \dots, x_s отвечают попарно различным собственным значениям, то они ЛНЗ.

В линейных комбинации собственных векторов $\underbrace{\alpha_{11}e_1 + \dots + \alpha_{1p_1}e_{p_1}}_{x_1} + \dots + \underbrace{\alpha_{s1}e_1 + \dots + \alpha_{sp_s}e_{p_s}}_{x_s} = 0$
 $x_1 + x_2 + \dots + x_s = 0$, что в силу ЛНЗ $\implies x_1 = \dots = x_s = 0$, но x_i – линейная комбинация базисных векторов из $V_{\lambda_i} \implies$ все $\alpha_{ij} = 0$

На самом деле установили, что 4. \iff 3.

Рассуждение (*) показывает, что базис в $V_{\lambda_1} + \dots + V_{\lambda_s}$ – базис в V .

Кроме того, этот базис – собственный, так что 4. \implies 2.

□

Примеры применения диагонализируемости:

1. Для решения системы $AX = b$, A – квадратная матрица.

Пусть известно, что матрица C , такая что $A' = C^{-1}AC = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$

Сделаем замену переменных: $X = CY$.

Тогда $(AC)Y = b \iff (C^{-1}AC)Y = C^{-1}b = b'$

Система равносильна системе:

$$\begin{cases} \lambda_1 y_1 = b'_1, \\ \dots\dots\dots, \\ \lambda_n y_n = b'_n \end{cases}, \text{ если } |A| = \lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_n \neq 0, \text{ то } Y = \begin{pmatrix} \frac{b'_1}{\lambda_1} \\ \vdots \\ \frac{b'_n}{\lambda_n} \end{pmatrix}, X = CY.$$

2. Матрицу A порядка n возвести в степень $m \in \mathbb{N}$, если известно, что $C^{-1}AC = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = A' \implies A = CA'C^{-1} \implies$

$$A^m = \underbrace{(CA'C^{-1}) \cdot \dots \cdot (CA'C^{-1})}_m = C(A')^m C^{-1} = C \begin{pmatrix} \lambda_1^m & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^m \end{pmatrix} C^{-1}$$

§6. Аннулирующие многочлены линейного оператора. Теорема Гамильтона-Кели. Минимальный многочлен.

Многочлен $p(t) = a_0 + a_1t + \dots + a_mt^m \in F[t]$ – аннулирующий многочлен для φ , если $p(\varphi) = a_0\varepsilon + a_1\varphi + \dots + a_m\varphi^m = 0$.

Было доказано, что \exists аннулирующий многочлен степени $\leq n^2$ ($n = \dim V$).

Замечание. Пусть x – собственный вектор для φ : $\varphi(x) = \lambda x$, $p(t)$ – аннулирующий многочлен для φ , тогда $p(\lambda) = 0$

В самом деле, $\forall k = 1, 2, \dots \quad \varphi^k(x) = \lambda^k x \implies p(\varphi)(x) = a_0x + a_1\lambda x + \dots + a_m\lambda^m x = p(\lambda)x$, т.к. $x \neq 0 \implies p(\lambda) = 0$

$\mu(t)$ – минимальный многочлен для φ , если $\mu(\varphi) = 0$ и $\deg \mu(t)$ минимальная среди степеней всех аннулирующих многочленов.

Утверждение. 1. Любой аннулирующий $p(t)$ делится на минимальный $\mu(t)$
2. $\mu(t)$ единственен, если потребовать, чтобы старший коэффициент $\mu(t)$ был равен 1.

Доказательство.

1. $p(t) = \mu(t)q(t) + r(t) \implies \overbrace{p(\varphi)}^0 = \overbrace{\mu(\varphi)}^0 q(\varphi) + r(\varphi) \implies r(\varphi) = 0$, но $\deg r < \deg \mu \implies r = 0$

2. Если $\mu'(t)$ – еще один минимальный многочлен, то $\mu(t)|\mu'(t)$ и $\mu'(t)|\mu(t)$ (по пункту 1) $\implies \mu' = \alpha\mu$, $\alpha \neq 0, \alpha \in F$. По условию старший коэффициент равен 1 $\implies \alpha = 1$

□

Многочленная матрица

$$\begin{pmatrix} a_{11}(\lambda) & \dots & a_{1n}(\lambda) \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(\lambda) & \dots & a_{nn}(\lambda) \end{pmatrix}$$

Ее можно представить в виде матричного многочлена.

$(a_{ij}(\lambda))$ – многочлены от λ .

Теорема Гамильтона-Кэли. Для любого линейного оператора $\chi_\varphi(\varphi) = 0$.
Равносильно: Если $\chi_\varphi(\lambda) = \det(A_\varphi - \lambda E)$, то $\chi_\varphi(A_\varphi) = 0$.

Доказательство. Пусть $A = A_\varphi$. Рассмотрим характеристический многочлен $\chi_A(\lambda) = \sum_{i=0}^n p_i \lambda^i$, $p_i \in F \implies \chi_A(A) = \sum_{i=0}^n p_i A^i$, ($A^0 \equiv E$)

Составим присоединенную матрицу для $(A - \lambda E)$:
 $D(\lambda) = (d_{ji}(\lambda))$ такой что $d_{ji} = A_{ij}(A - \lambda E)$

$$(A - \lambda E)D(\lambda) = \begin{pmatrix} |A - \lambda E| & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & |A - \lambda E| \end{pmatrix} = \chi_\varphi(A)E$$

$D(\lambda)$ – многочлены степени $\leq (n - 1)$

Обозначим: $D(\lambda) = \sum_{i=0}^{n-1} D_i \lambda^i$, D_i – числовые матрицы.

$$\begin{aligned} \text{Имеем } \chi_A(\lambda)E &= (A - \lambda E) \sum_{i=0}^{n-1} D_i \lambda^i = \sum_{i=0}^{n-1} A D_i \lambda^i - \sum_{i=0}^{n-1} D_i \lambda^{i+1} = \\ &= A D_0 + \sum_{i=1}^{n-1} (A D_i - D_{i-1}) \lambda^i - D_{n-1} \lambda^n \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda^0 : P_0 E = A D_0 \\ \lambda^1 : P_1 E = A D_1 - D_0 \\ \vdots \\ \lambda^i : P_i E = A D_i - D_{i-1} \\ \vdots \\ \lambda^{n-1} : P_{n-1} E = A D_{n-1} - D_{n-2} \\ \lambda^n : P_n E = -D_{n-1} \end{array} \right. \begin{array}{l} \times E \\ \times A \\ \\ \times A^i \\ \\ \times A^{n-1} \\ \times A^n \end{array} + \longrightarrow \chi_A(A) = 0$$

□

Утверждение. Если λ – собственное значение оператора φ , $p(t)$ – аннулирующий многочлен для φ , то $p(\lambda) = 0$. В частности, все корни характеристического многочлена являются корнями минимального аннулирующего многочлена.

Пусть v – собственный для φ : $\varphi(v) = \lambda v \implies \varphi^k(v) = \lambda^k v \implies p(\varphi)(v) = p(\lambda)v = 0$, $v \neq 0 \implies p(\lambda) = 0$.

§7. Жорданова нормальная форма матрицы линейного оператора.

Жорданова клетка порядка k с собственным значением $\lambda_0 \in F$

$$J_K(\lambda_0) = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_0 \end{pmatrix}$$

Пусть в базисе e_1, \dots, e_k , k -мерного пространства:

$$A_\varphi = J_k(\lambda_0) \implies |A_\varphi - tE| = (\lambda_0 - t)^k,$$

φ имеет единственный вид с точностью до пропорциональности собственного вектора e_1 :

$$(A_\varphi - \lambda_0 E)X = 0 \iff \begin{cases} x_1 - \text{любой} \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ \dots \\ x_k = 0 \end{cases} \implies v = \alpha e_1, \alpha \neq 0$$

Кроме того:

$$\begin{cases} \varphi(e_1) = \lambda_0 e_1, \\ \varphi(e_2) = e_1 + \lambda_0 e_2, \\ \dots \\ \varphi(e_i) = e_{i-1} + \lambda_0 e_i, \end{cases} \iff \begin{cases} Be_1 = 0, \\ Be_2 = e_1, \\ \dots, \\ Be_i = e_{i-1}, (i = 1, \dots, k), \end{cases}$$

где $B = J_k(\lambda_0) - \lambda_0 E = J_k(0)$

$Be_k = e_{k-1}$ (*)

$\{e_k, Be_k, B^2 e_k, \dots, B^{k-1} e_k\}$ – жорданова цепочка длины k .

Лемма. Пусть для некоторого вектора $v \neq 0$ построена цепочка длины k :
 $v, Bv, \dots, B^{k-1}v \neq 0, B^k v = 0$. Тогда векторы $\{v, Bv, \dots, B^{k-1}v\}$ ЛНЗ.

Доказательство. Рассмотрим $\alpha_1 v + \alpha_2 Bv + \dots + \alpha_k B^{k-1}v = 0$ и докажем, что все $\alpha_i = 0$.

$$B^{k-1} \cdot | \implies \alpha_1 \underbrace{B^{k-1}v}_{\neq 0} + \alpha_2 B^k v + \dots = 0 \implies \alpha_1 = 0$$

На оставшееся равенство подействуем, $B^{k-2} : \alpha_2 B^{k-1}v + \underbrace{\dots}_0 = 0 \implies \alpha_2 = 0$ и

т.д. □

Терминология: в (*) вектор e_2 - присоединенный к e_1 (1-й присоединенный), e_3 - присоединенный к e_2 и т.д.

Определение. $\langle v, Bv, \dots, B^{k-1}v \rangle = Z_k(v)$ - циклическое подпространство размерности k , порожденное вектором v . (В этой цепочке вектор $B^{k-1}v \neq 0$ - собственный для B)

Упражнение. Для жордановой клетки характеристическая и минимальная матрицы совпадают. Для каких еще матриц они совпадают?

Жорданова матрица

$$J = \begin{pmatrix} \overline{J_{k_1}(\lambda_1)} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \overline{J_{k_p}(\lambda_p)} \end{pmatrix} - \text{клеточно-диагональная матрица}$$

$$k_1 + \dots + k_p = n$$

$$\chi(J) = \prod_{i=1}^p \chi(J_{k_i}) = (\lambda_1 - t)^{k_1} \cdot \dots \cdot (\lambda_p - t)^{k_p} \text{ (некоторые } \lambda_i \text{ могут совпадать)}.$$

$J = A_\varphi$ в базисе, составленном из жордановых цепочек для каждой жордановой клетки.

Теорема Жордана. Пусть все характеристические корни линейного оператора $\varphi : V \mapsto V$ над полем F ($\dim V = n$) принадлежат F . Тогда:

1. $V = \bigoplus_{i=1}^p Z_i$ - прямая сумма циклических подпространств.
2. В V существует базис (Жорданов базис), в котором

$$A_\varphi = J = \begin{pmatrix} J_{k_1}(\lambda_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_{k_p}(\lambda_p) \end{pmatrix}$$

Т.е. для любой $A_{n \times n} \exists$ невырожденная матрица $C : C^{-1}AC = J, AC = CJ$

Корневые подпространства

Пусть $\varphi : V \mapsto V$, λ - собственное значение для φ .

Определение. Вектор $v \in V$ - λ -корневой для φ , если $\exists m \in \mathbb{N} :$

$(\varphi - \lambda \varepsilon)^m(v) = 0$. Наименьшее такое значение h называется *высотой вектора* v , т.е. $(\varphi - \lambda \varepsilon)^{h-1}v \neq 0, (\varphi - \lambda \varepsilon)^h v = 0$. Тогда v порождает жорданову цепочку длины h : $\{v, (\varphi - \lambda \varepsilon)v, \dots, (\varphi - \lambda \varepsilon)^{h-1}v\}$.

Утверждение. $\{v \in V : v - \text{корневой для данного } \lambda\}$ – подпространство в V .

Доказательство. 0 является корневым. $B = \varphi - \lambda\varepsilon$

Если $v_1 : B^{m_1}v_1 = 0$; $v_2 : B^{m_2}v_2 = 0$, то $B^{\max(m_1, m_2)}(v_1 + v_2) = 0$.

$\forall \lambda \in F, B^m v = 0 \implies B^m(\lambda v) = \lambda B^m v = 0$ – доказано.

Это подпространство корневое подпространство, отвечающее собственному значению λ , обозначим: $V^{(\lambda)} = \mathcal{K}_\lambda$. \square

Теорема. Пусть $\chi_\varphi = (\lambda_1 - t)^{k_1} \cdot \dots \cdot (\lambda_s - t)^{k_s}$ – каноническое разложение. Тогда:

1. $V = \mathcal{K}_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus \mathcal{K}_{\lambda_s}$, где $\mathcal{K}_{\lambda_i} = \{v \in V \mid \exists k : (\varphi - \lambda_i \varepsilon)^k v = 0\}$
2. $\mathcal{K}_{\lambda_i} = \text{Ker}(\varphi - \lambda_i \varepsilon)^{k_i}$
3. \mathcal{K}_{λ_i} – инвариантные подпространства, $\dim \mathcal{K}_{\lambda_i} = k_i$

Доказательство. Многочлены $(\lambda_1 - t)^{k_1}, \dots, (\lambda_s - t)^{k_s}$ попарно взаимно просты. Дробь $\frac{1}{\chi_\varphi(t)}$ можно представить в виде:

$$\frac{1}{\chi_\varphi(t)} = \frac{f_1(t)}{(t - \lambda_1)^{k_1}} + \dots + \frac{f_s(t)}{(t - \lambda_s)^{k_s}} \mid \cdot \chi_\varphi(t) \text{ или же } \prod_{i=1}^s (t - \lambda_i)^{k_i}$$

$$\underbrace{(t - \lambda_2)^{k_2} \cdot \dots \cdot (t - \lambda_s)^{k_s} f_1(t)}_{q_1(t)} + \dots + \underbrace{(t - \lambda_2)^{k_2} \cdot \dots \cdot (t - \lambda_{s-1})^{k_{s-1}} f_s(t)}_{q_s(t)} = 1$$

$$q_1(t) + \dots + q_s(t) = 1, \text{ где } q_i(t) = \prod_{j \neq i} (t - \lambda_j)^{k_j} \cdot f_i(t) \implies$$

$$q_1(\varphi) + \dots + q_s(\varphi) = \varepsilon \mid \cdot v \in V$$

$$\forall v = \underbrace{q_1(\varphi)v}_{v_1} + \dots + \underbrace{q_s(\varphi)v}_{v_s} = v_1 + \dots + v_s \implies$$

$$V = \text{Im } q_1(\varphi) + \dots + \text{Im } q_s(\varphi), \quad v_i \in \text{Im } q_i(\varphi)$$

Обратим внимание, что $\text{Im } q_i(\varphi) = Q_i$

Для вектора $v_i \in \text{Im } q_i(\varphi) = Q_i$ выполнено $(\varphi - \lambda_i \varepsilon)^{k_i} v_i = 0$ в силу Теоремы Гамильтона-Кэли.

Имеем: $V = Q_1 + \dots + Q_s \subseteq \mathcal{K}_{\lambda_1} + \dots + \mathcal{K}_{\lambda_s}$, $Q_i \subseteq \mathcal{K}_{\lambda_i} \implies V = \mathcal{K}_{\lambda_1} + \dots + \mathcal{K}_{\lambda_s}$

Осталось проверить, что эта сумма прямая.

Нужно показать, что если $v \in \mathcal{K}_{\lambda_i} \cap \sum_{i \neq j} \mathcal{K}_{\lambda_j}$, то $v = 0$.

По выбору, $(\varphi - \lambda_i \varepsilon)^{k_i} v = 0 \implies (\varphi - \lambda_i \varepsilon)^n v = 0$, где $n = \dim V$.

Если $v_j \in \mathcal{K}_{\lambda_j}$, то $(\varphi - \lambda_j \varepsilon)^n v_j = 0 \implies (\prod_{j \neq i} (\varphi - \lambda_j \varepsilon)^n) v = 0$

Т.к. многочлены $(t - \lambda_i)^n$ и $\prod_{j \neq i} (t - \lambda_j)^n$ взаимно просты \implies

$\exists u(t), w(t)$ - многочлены, такие что

$$u(t)(t - \lambda_i)^n + w(t) \prod_{j \neq i} (t - \lambda_j)^n = 1 \implies$$

$$u(\varphi)(\varphi - \lambda_i)^n + w(\varphi) \prod_{j \neq i} (\varphi - \lambda_j)^n = \varepsilon \implies$$

$$u(\varphi) \underbrace{(\varphi - \lambda_i)^n}_0 v + w(\varphi) \underbrace{\prod_{j \neq i} (\varphi - \lambda_j)^n}_0 v = v \implies$$

$$v = 0 \implies \text{сумма } \mathcal{K}_{\lambda_1} + \dots + \mathcal{K}_{\lambda_s} - \text{прямая.}$$

Итак: $V = \mathcal{K}_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus \mathcal{K}_{\lambda_s}$, причем $\mathcal{K}_{\lambda_i} = Q_i = q_i(\varphi)V = \text{Ker}(\varphi - \lambda_i \varepsilon)^{k_i}$

(Учесть, что $Q_i \subseteq \text{Ker}(\varphi - \lambda_i \varepsilon)^{k_i} \subseteq \mathcal{K}_{\lambda_i}$, доказано, что $Q_i = \mathcal{K}_{\lambda_i}$) \implies
 $\mathcal{K}_{\lambda_i} = \text{Ker}(\varphi - \lambda_i \varepsilon)^{k_i}$

Размерность. Выберем в V базис, составленный из базисов корневых подпространств. В этом базисе:

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} \overline{A_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \overline{A_s} \end{pmatrix}, \text{ где } A_i = \varphi|_{\mathcal{K}_{\lambda_i}} \text{ порядка } d_i = \dim \mathcal{K}_{\lambda_i}$$

Матрица A_i имеет собственное значение λ_i , (если $\exists v \in \mathcal{K}_{\lambda_i} \cap V_{\lambda_j}, i \neq j \implies v = 0$)
 $\implies d_i = k_i = \dim \mathcal{K}_{\lambda_i}$

□

Существование базиса, составленного из жордановых цепочек, достаточно доказать для каждого оператора $\psi_i = (\varphi - \lambda_i \varepsilon)|_{\mathcal{K}_i}$

Определение. Оператор $\psi : V \mapsto V, \psi \neq 0$ называется *нильпотентным*, если $\exists m \in \mathbb{N} : \psi^m = 0$. Если d -наименьшее значение, при котором $\psi^d = 0$ ($\psi^{d-1} \neq 0$), то d -показатель (индекс) нильпотентного оператора ψ .

Будем считать, что $V = \mathcal{K}_{\lambda_i}$, φ имеет на нем единственное собственное значение λ_i , тогда ψ_i - нильпотентный оператор: $\psi_i^{\dim V} = 0$. (Далее индекс i не будем писать). Обозначение: $B = A_i - \lambda_i E$ - матрица оператора $\psi_i = \psi$

Теорема. Для нильпотентного оператора $\psi : V \mapsto V$ существует базис из жордановых цепочек.

Доказательство. Пусть $\dim V = n$, показатель нильпотентности равен d .

Тогда образы $\text{Im}\psi \supset \text{Im}\psi^2 \supset \dots \supset \text{Im}\psi^{d-1} \supset \text{Im}\psi^d = 0$ образуют строго убывающую цепочку.

Обозначим: $r = \dim V_0 = \dim \text{Ker}\psi$ и рассмотрим подпространства:

$$\underbrace{\text{Ker}\psi}_{R_0=V_0} \supseteq \underbrace{\text{Im}\psi \cap \text{Ker}\psi}_{R_1} \supseteq \dots \supseteq \underbrace{\text{Im}\psi^{d-1} \cap \text{Ker}\psi}_{R_{d-1}} \supseteq \{0\}$$

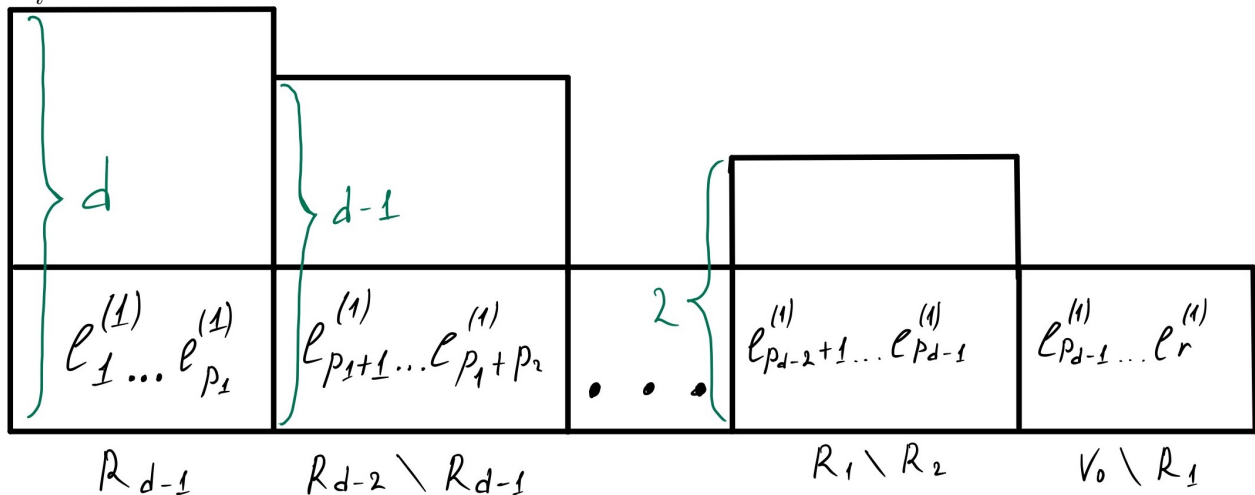
$$R_0 = V_0 \supseteq R_1 \supseteq \dots \supseteq R_{d-1} \supseteq R_d = \{0\}$$

Обозначим: $\dim R_0 = \dim \text{Ker}\psi = r = p_d$

$\dim R_{d-1} = p_1, \dim R_{d-2} = p_2$ и т.д. $\dim R_1 = p_{d-1}$.

Выберем в $\text{Ker}\psi = V_0$ базис, составленный подпространствами:

$$R_i = \text{Im} B^i \cap \text{Ker} B$$



Векторы $e_1^{(1)}, \dots, e_{p_1}^{(1)} \in \text{Im}\psi^{d-1} \implies$ каждый из них имеет $(d-1)$ присоединенный вектор. Например, $e_1^{(1)} = \psi(e_1^{(2)})$, $e_1^{(2)} = \psi(e_1^{(3)})$ и т.д. $e_1^{(p-2)} = \psi(e_1^{(p-1)})$, т.о. векторы $\{e_1^{(p-1)}, e_1^{(p-2)}, \dots, e_1^{(1)}\}$ образует жорданову цепочку длины p .

Эта цепочка имеет вид:

$$\{e_1^{(p-1)}, \psi(e_1^{(p-1)}), \psi^2(e_1^{(p-1)}), \dots, \psi^{p-1}(e_1^{(p-1)}) = e_1^{(1)}\}, \quad \psi(e_1^{(1)}) = 0$$

Таким образом, получаем некоторое количество жордановых цепочек длин $\leq d$. Векторы всех этих цепочек образуют базис в V . \square

Лемма. Пусть есть t жордановых цепочек

$$\{a_1, \psi(a_1), \dots, \psi^{l_1-1}(a_1)\}, \psi^{l_1}(a_1) = 0$$

.....

$$\{a_t, \psi(a_t), \dots, \psi^{l_t-1}(a_t)\}, \psi^{l_t}(a_t) = 0$$

Причем конечные векторы этих цепочек ЛНЗ. Тогда все векторы этих цепочек ЛНЗ. Кроме того, общее количество векторов в объединении цепочек равно $\dim V \implies$ объединение всех цепочек из диаграммы – базис пространства V .

Доказательство. Индукция по общему количеству векторов в цепочках.

База: когда все цепочки имеют длину 1, т.е. a_1, \dots, a_t – собственные, ЛНЗ.

Предположение индукции: \exists хотя бы одна цепочка длины > 1 .

Запишем линейную комбинацию:

$$\alpha_{11}a_1 + \alpha_{12}\psi(a_1) + \dots + \alpha_{1,l_1}\psi^{l_1-1}(a_1) + \dots + \alpha_{t,1}a_t + \alpha_{t,2}\psi(a_t) + \dots + \alpha_{t,l_t}\psi^{l_t-1}(a_t) = 0$$

Подействуем оператором ψ :

$$\alpha_{11}\psi(a_1) + \dots + \alpha_{1,l_1-1}\psi^{l_1-1}(a_1) + \dots + \alpha_{t,1}\psi(a_t) + \dots + \alpha_{t,l_t-1}\psi^{l_t-1}(a_t) = 0$$

Эти векторы принадлежат цепочкам длины $l_1 - 1, \dots, l_t - 1$ (либо какие-то обратятся в 0)

По предположению индукции $\alpha_{11} = \dots = \alpha_{1,l_1-1} = \dots = \alpha_{t,1} = \alpha_{t,l_t-1} = 0 \implies$

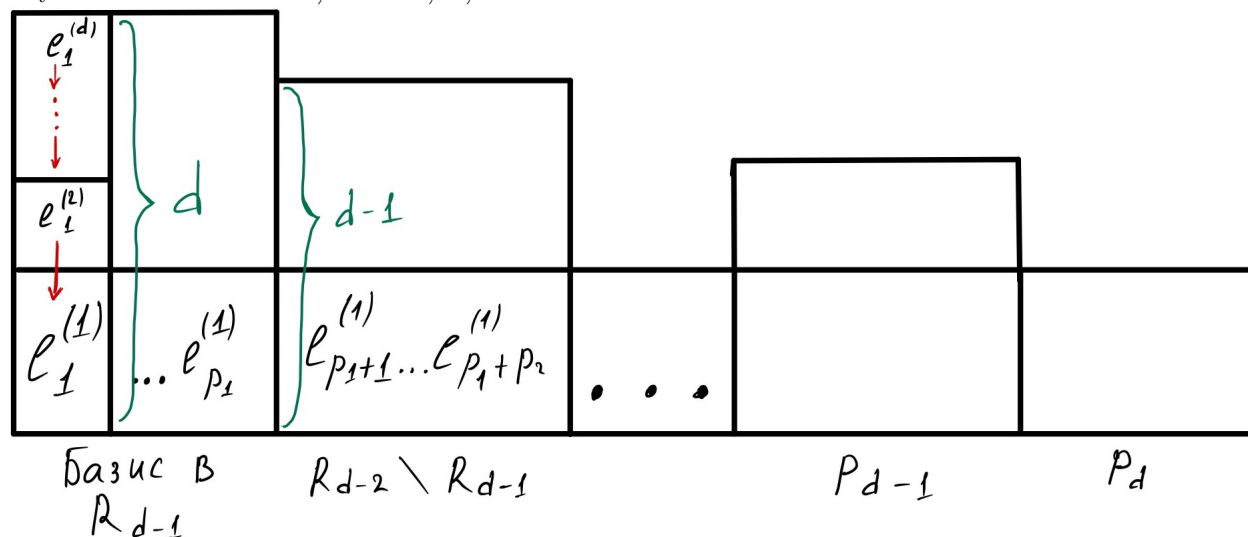
$$\alpha_{a,l_1}\psi^{l_1-1}(a_1) + \dots + \alpha_{t,l_t}\psi^{l_t-1}(a_t) = 0 \text{ ЛНЗ} \implies$$

остальные коэффициенты равны 0

□

B – нильпотентный оператор, $B^d = 0 \neq B^{d-1} \implies$ максимальная длина (высота) жордановой цепочки равняется d .

$$R_i = \text{Im} B^i \cap \text{Ker} B, \quad i = 1, \dots, d-1$$



Базис $\text{Ker} B = R_0$

Общее число векторов в цепочках равно $\dim V$ (в котором действует B):

$$\begin{aligned}
& dp_1 + (d-1)p_2 + \dots + 2p_{d-1} + p_d = \\
& = (p_1 + \dots + p_d) + (p_1 + \dots + p_{d-1}) + \dots + (p_1 + p_2) + p_1 = \\
& = \dim R_0 + \dim R_1 + \dots + \dim R_{d-2} + \dim R_{d-1} \\
& \sum_{i=0}^{d-1} \dim(\operatorname{Im} B^i \cap \operatorname{Ker} B) = \sum_{i=0}^{d-1} (\dim \operatorname{Ker} B^{i+1} - \dim \operatorname{Ker} B^i) = \\
& = \dim \operatorname{Ker} B^d = \dim V
\end{aligned}$$

Нужно доказать, что $\dim(\operatorname{Im} B^i \cap \operatorname{Ker} B) = \dim \operatorname{Ker} B^{i+1} - \dim \operatorname{Ker} B^i$

$$\begin{aligned}
& \operatorname{Im}(B^i \cap \operatorname{Ker} B) = \operatorname{Ker}(B|_{\operatorname{Im} B^i}) \implies \\
& \dim(\operatorname{Im} B^i \cap \operatorname{Ker} B) = \dim \operatorname{Im} B^i - \dim \operatorname{Im} B^{i+1} = \\
& = n - \dim \operatorname{Ker} B^i - (n - \dim \operatorname{Ker} B^{i+1}) = \\
& = \dim \operatorname{Ker} B^{i+1} - \dim \operatorname{Ker} B^i \dim \operatorname{Ker} \varphi = \dim V - \dim \operatorname{Im} \varphi \implies \\
& \varphi = B|_{\operatorname{Im} B^i}
\end{aligned}$$

Единственность жордановой формы

Если $A \sim \mathcal{J}$ и $A \sim \mathcal{J}'$, то \mathcal{J} и \mathcal{J}' могут отличаться только упорядочиваниями жордановых клеток.

Нужно доказать, что \forall собственного значения $\lambda_j \forall m : 1 \leq m \leq d_j$, $N(m, \lambda_j)$ определено по A единственным образом.

Рассмотрим оператор $B = A - \lambda_j E$, достаточно для матрицы B доказать единственность $N(m, 0)$:

$$\begin{aligned}
& N(m, 0) = \dim R_{m-1} - \dim R_m = \\
& = (\dim \operatorname{Ker} B^m - \dim \operatorname{Ker} B^{m-1}) - (\dim \operatorname{Ker} B^{m+1} - \dim \operatorname{Ker} B^m) = \\
& = 2\dim \operatorname{Ker} B^m - \dim \operatorname{Ker} B^{m-1} - \dim \operatorname{Ker} B^{m+1} = \\
& = 2(n - rk B^m) - (n - rk B^{m-1}) - (n - rk B^{m+1}) = \\
& = rk B^{m-1} - 2rk B^m + rk B^{m+1}
\end{aligned}$$

Эти ранги не зависят от базиса.

Доказательство Теоремы Жордана в общем случае:

Пусть $\varphi : V \rightarrow V$, A_φ – его матрица, $\chi_\varphi(t) = (\lambda_1 - t)^{k_1} \cdot \dots \cdot (\lambda_s - t)^{k_s}$, $(\lambda_i \in F)$
Тогда $V = \bigoplus_{i=1}^s \mathcal{K}(\lambda_i)$, $\mathcal{K}(\lambda_i) = \text{Ker}(\varphi - \lambda_i \varepsilon)^{k_i}$ – корневые подпространства.

В базисе, согласованном с разложением,

$$\begin{pmatrix} \overline{A_1} & & & \\ & \overline{A_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \overline{A_s} \end{pmatrix}$$

$\forall i = 1, \dots, s$, $A_i = A_{\varphi|_{\mathcal{K}(\lambda_i)}}$ имеет единственное собственное значение λ_i .

Оператор $(\varphi - \lambda_i \varepsilon)$ – нильпотентный оператор \Rightarrow для него, по Теореме для нильпотентных операторов \exists базис в $\mathcal{K}(\lambda_i)$ из жордановых цепочек. Тогда объединение базисов всех подпространств нужный базис.

Теорема. Пусть $\chi_A(t) = (-1)^n \prod_{i=1}^s (t - \lambda_i)^{k_i}$, d_i – максимальный размер жордановой клетки, отвечающей корню λ_i , тогда $\mu_A(t) = \prod_{i=1}^s (t - \lambda_i)^{d_i}$ – минимальный многочлен.

Доказательство.

Если $p(t)$ – аннулирующий многочлен для φ (для матрицы A), тогда $\forall i$ $p(\lambda_i) = 0$, если $x_i \neq 0$: $\varphi(x_i) = \lambda_i x_i$, то

$$p(\varphi(x_i)) = p(\lambda_i) \underbrace{x_i}_{\neq 0} = 0 \Rightarrow p(\lambda_i) = 0$$

Для одной жордановой клетки $\mathcal{J}_m(\lambda_i)$ ($1 \leq m \leq d_i$)

$$A - \lambda_i E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow (A - \lambda_i E)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & \ddots & 0 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

И т.д. $\Rightarrow (A - \lambda_i E)^m = 0$

Для $m = d_i$ наименьшая степень q : $(A - \lambda_i E)^q = 0$ равна $d_i \Rightarrow \mu_A(t) : (t - \lambda_i)^{d_i} \Rightarrow \mu_A(t) = \prod_{i=1}^s (t - \lambda_i)^{d_i}$ □

Следствие. A_φ диагонализируема \iff все характеристические корни имеют в μ_φ кратность равную 1.

Некоторые применения жордановой формы

1. К решению СЛУ $AX = b$, $A_{(n \times n)}$

Пусть уже найдена матрица C : $C^{-1}AC = \mathcal{J} = \begin{pmatrix} \mathcal{J}_1(\lambda_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mathcal{J}_l(\lambda_l) \end{pmatrix}$

Сделаем замену переменных:

$$X = CY \implies A(CY) = b \implies (C^{-1}AC)Y = C^{-1}b = b'$$

Для каждой клетки

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix}_{\lambda \neq 0} \implies \begin{cases} \lambda y_1 + y_2 = b'_1 \\ \dots \\ \lambda y_n = b'_n \end{cases}$$

Легко дорешать, найдя Y найдем $X = CY$

2. К вычислению функций от матрицы.

A_n^m , $m \in \mathbb{N}$

$$A = CYC^{-1} = C \begin{pmatrix} \mathcal{J}_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mathcal{J}_l \end{pmatrix} C^{-1} \implies A^m = C \begin{pmatrix} \mathcal{J}_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mathcal{J}_l \end{pmatrix} C^{-1}$$

Для одной клетки:

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_n(\lambda) &= \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix} = \lambda E + \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix} = \lambda E + B, \quad B^n = 0 \neq B^{n-1} \\ &\implies A^m = C \begin{pmatrix} \mathcal{J}_1^m & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mathcal{J}_l^m \end{pmatrix} C^{-1}, \quad \mathcal{J}_n^m(\lambda) = (\lambda E + B)^m \end{aligned}$$

$$\mathcal{J}_n^m(\lambda) = (\lambda E + B)^m = \sum_{k=0}^m C_m^k \lambda^k B^{m-k}$$

Для $m = \frac{1}{2}$ – вычислить \sqrt{A} (нужно, чтобы $\sqrt{\lambda_j}$ были определены)

$$\mathcal{J}_n(\lambda) = (\lambda E + B)^{\frac{1}{2}} = (\sqrt{\lambda}(E + \frac{1}{\lambda}B)^{\frac{1}{2}}) = \sqrt{\lambda}(E + \frac{1}{2}X + C_{\frac{1}{2}}^2 X^2 + \dots)$$

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = \sum_{k=0}^{\infty} C_{\frac{1}{2}}^k x^k$$

$$C_{\frac{1}{2}}^1 = \frac{1}{2}, \quad C_{\frac{1}{2}}^2 = \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2!}, \dots, C_{\frac{1}{2}}^k = \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)\dots(\frac{1}{2}-k+1)}{k!}$$

Экспонента: $e^A \stackrel{?!}{=} E + tA + t^2 \frac{A^2}{2!} + \dots$

$$A = C \mathcal{J} C^{-1} \implies e^A = C \begin{pmatrix} e^{\mathcal{J}_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\mathcal{J}_l} \end{pmatrix} C^{-1}$$

Для одной клетки порядка n :

$$\mathcal{J}_n(\lambda) = \lambda E + B \implies e^{\mathcal{J}_n(\lambda)} = e^{\lambda E + B} = e^{\lambda E} e^B = e^\lambda E e^B$$

$$e^B = E + B + \frac{B^2}{2!} + \dots + \frac{B^{n-1}}{(n-1)!} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2!} & \dots & \frac{1}{(k-1)!} \\ & 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & \frac{1}{2!} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$(e^{tA})' = A e^{tA}$$

Формула: $\det(e^A) = e^{\text{tr} A}$

Теорема. Для любого линейного оператора $\varphi : V \mapsto V$ над \mathbb{R} ($\dim V < \infty$) существует одномерное или двумерное инвариантное подпространство.

Доказательство. Пусть \exists собственное значение λ_0 , тогда и $\exists x_0 \in V, x_0 \neq 0$, т.ч. $\varphi(x_0) = \lambda_0 x_0 \implies \langle x_0 \rangle = U$ – инвариантное подпространство.

Комплексному корню отвечает двумерное инвариантное подпространство.

Допустим, что $\lambda_1 = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$ – корень $\chi_\varphi(\lambda) \implies \overline{\lambda_1} = \alpha - i\beta$ – тоже корень $\implies \chi_\varphi(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \overline{\lambda_1})f(\lambda) = (\lambda^2 - 2\alpha\lambda + (\alpha^2 + \beta^2))f(\lambda), f(\lambda) \in \mathbb{R}[\lambda]$

φ с помощью (вещественной) матрицы A_φ действует в \mathbb{R}^n :

$$\forall x \in \mathbb{R}, X \mapsto A_\varphi X$$

Рассмотрим оператор φ в \mathbb{C}^n по формуле: $\forall Z \mapsto A_\varphi Z$

В $\mathbb{C}^n \exists$ вектор $Z_1 : A_\varphi Z_1 = \lambda_1 Z_1$

$$Z_1 = X_1 + iY_1, X_1, Y_1 \in \mathbb{R}^n$$

$$A_\varphi X_1 + A_\varphi Y_1 = (\alpha X_1 - \beta Y_1) + i(\beta X_1 + \alpha Y_1) \implies \begin{cases} A_\varphi X_1 = \alpha X_1 - \beta Y_1 \\ A_\varphi Y_1 = \beta X_1 + \alpha Y_1 \end{cases} \implies$$

$U = \langle X_1, Y_1 \rangle \subset \mathbb{R}^n$ – двумерное инвариантное подпространство для φ .

Допустим, что $Y_1 = \mu X_1 \implies A_\varphi X_1 = (\alpha - \beta\mu)X_1 \implies X_1$ – собственный вектор.
 $\implies X_1, Y_1$ – ЛНЗ, $\dim U = 2$

□

Глава III. Билинейные и квадратичные функции.

Пространства с формами.

§1. Билинейные функции.

Определение. Функция $f : V \times V \longrightarrow F$ называется билинейной, если:

1. $f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y) = \alpha_1 f(x_1, y) + \alpha_2 f(x_2, y), \forall x_1, x_2, y \in V, \alpha_1, \alpha_2 \in F$
2. По y .

Примеры:

1. $V = R[a, b]$

$$(f(x), g(x)) \longmapsto \int_a^b f(x)g(x)dx = \int_a^b g(x)f(x)dx - \text{симметричная}$$

2. $V = M_n(F)$

$$f_1(X, Y) = \text{tr}(XY), \quad f_2(X, Y) = \text{tr}(XY^T)$$

Выражение $f(x, y)$ в координатах.

Пусть e – базис в V , $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i, y = \sum_{j=1}^n y_j e_j \implies$

$$f(x, y) = f\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{j=1}^n y_j e_j\right) = \sum_{i,j} \underbrace{f(e_i e_j)}_{f_{ij}} x_i y_j - \text{билинейная форма. (1)}$$

Обозначение: $B_e = (f_{ij})$ – матрица билинейной формы $f(x, y)$ в базисе e .

Выражение (1) можно записать в виде $f(x, y) = X^T B_e Y$ (2).

Изменение матрицы билинейной формы при замене базиса:

Пусть $e' = eC_{e \rightarrow e'}$, тогда $X = CX', Y = CY'$ подставим в (2).

$$X^T B_e Y = (CX')^T B_e (CY') = (X')^T (C^T B_e C) Y' \stackrel{?!}{=} (X')^T B_{e'} Y', \quad \forall X', Y' \in F^n$$

Если $X' = E_i, Y' = E_j$, то $(X')^T B_e Y' = d_{ij}, \forall i, j \implies B_{e'} = C^T B_e C$ (3)

Следствие. 1. $\text{rk} B' = \text{rk} B$, т.к. $|C| \neq 0$

$$2. |B'| = |B||C|^2$$

Если $F = \mathbb{R}$ и $|B| \neq 0$, то $|B'|$ и $|B|$ имеют одинаковый знак.

В силу следствия 1, $\text{rk} B$ можно называть рангом билинейной функции $f(x, y)$, $\text{rk} f$

Назовем левым ядром билинейной функции $f(x, y)$:

$$\text{Ker}_L f = \{x \in V : f(x, y) = 0, \forall y \in V\}$$

$$x \in \text{Ker}_L f \iff \begin{cases} f(x, e_1) = 0 \\ \dots \\ f(x, e_n) = 0 \end{cases} \quad \text{— ОСЛУ с матрицей } B$$

Число ЛНЗ решений равно $n - \text{rk} B = n - \text{rk} f$.

Определение. $f(x, y)$ симметричная, если $\forall x, y \in V : f(x, y) = f(y, x)$

Определение. $g(x, y)$ кососимметричная, если $\forall x, y \in V : f(x, y) = -f(y, x)$

Теорема. Если $\text{char} F \neq 2$, то любая билинейная функция $f(x, y)$ единственным образом представляется в виде: $f(x, y) = f_+(x, y) + f_-(x, y)$

Доказательство.

$$\begin{cases} f(x, y) = f_+(x, y) + f_-(x, y) \\ f(x, y) = f_+(x, y) - f_-(x, y) \end{cases}$$

$$f_+(x, y) = \frac{f(x, y) + f(y, x)}{2}, \quad f_-(x, y) = \frac{f(x, y) - f(y, x)}{2}$$

□

§2. Квадратичные функции (формы).

Определение. Пусть $f(x, y)$ — билинейная функция на V . Тогда функция $k_f(x) := f(x, x)$, $\forall x \in V$ называется *квадратичной функцией*, порожденной билинейной функцией f , если $k_f(x) \neq 0$.

Обратим внимание, что если $f(x, y) = f_+(x, y) + f_-(x, y)$, то

$$f(x, x) = f_+(x, x) + \underbrace{f_-(x, x)}_{=0}, \quad \text{char} F \neq 2 \implies$$

f и f_+ порождают одну и ту же функцию.

Теорема. Для любой квадратичной функции $k(x)$ существует единственная билинейная симметричная функция $f(x, y)$, т.ч. $f(x, x) = k(x)$

Доказательство. Пусть $f(x, y) = f(y, x)$

Рассмотрим $k(x+y) = f(x+y, x+y) = f(x, x) + f(x, y) + f(y, x) + f(y, y) = f(x, x) + 2f(x, y) + f(y, y), \forall x, y \in V \implies f(x, y) = \frac{k(x+y) - k(x) - k(y)}{2}$ \square

Координатная запись:

$$k(x) = X^T B_e X = \sum_{i,j} b_{ij} x_i x_j = \sum_{i,j} b_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{i < j} b_{ij} x_i x_j, \quad b_{ij} = b_{ji}, \quad \forall i, j, \quad (2)$$

Договоримся, что матрица квадратичной формы (2) совпадает с матрицей B .

$$k(x_1, x_2) = 3x_1^2 - 4x_1x_2 + 25x_2^2, \quad B \stackrel{?}{=} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 25 \end{pmatrix}$$

Упрощение квадратичной формы

Термин: Диагональная квадратичная форма:

$$k(x) = \alpha_1 x_1^2 + \dots + \alpha_n x_n^2 = \alpha_1 x_1^2 + \dots + \alpha_r x_r^2$$

(При подходящей нумерации переменных). ($x = (x_1, \dots, x_n)$)

Если $\text{rk } f = \text{rk } k = k = r \leq n$

$$B = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & \alpha_r & & \\ & & & 0 & \\ 0 & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Термин: ($F = \mathbb{R}$) $k(x)$ имеет канонический вид, если

$$k(x) = \sum_{i=1}^p x_i^2 - \sum_{i=p+1}^{p+q} x_i^2, \quad (p+q = \text{rk } k = r)$$

Если $F = \mathbb{C}$, то канонический вид будет

$$\sum_{i=1}^r x_i^2$$

Над \mathbb{R} : замена $y_i = \sqrt{|\alpha_i|} x_i, \quad 1 \leq i \leq r, \quad y_i = x_i, \quad i = r+1, \dots, n$

Тогда $k(x)$ равен каноническому виду.

Над \mathbb{C} : $\forall i = 1, \dots, r \quad y_i = \sqrt{|\alpha_i|} x_i$

Алгоритм Лагранжа (метод выделения квадратов.)

Пусть $k(x_1, \dots, x_n) = b_{11}x_1^2 + \dots + b_{nn}x_n^2 + 2b_{12}x_1x_2 + \dots + 2b_{1n}x_1x_n + \dots$

Основной случай: $b_{11} \neq 0 \implies$

$\underbrace{\hspace{1cm}}_{x_1 \text{ не входит}}$

$$b_{11}(x_1^2 + 2x_1 \sum_{i=2}^n \frac{b_{1i}}{b_{11}}x_i) + \dots = b_{11}(x_1^2 + 2x_1(\sum_{i=2}^n \frac{b_{1i}}{b_{11}}x_i) + (\sum_{i=2}^n \frac{b_{1i}}{b_{11}}x_i)^2) -$$

$$\underbrace{-\frac{1}{b_{11}}(\sum_{i=2}^n b_{1i}x_i)^2 + 2 \sum_{1 < i < j} b_{ij}x_ix_j}_{k_1(x_2, \dots, x_n)} = b_{11}(x_1 + \sum_{i=2}^n \frac{b_{1i}x_i}{b_{11}})^2 + k_1(x_2, \dots, x_n)$$

Замена: $y_1 = x_1 + \sum_{i=2}^n \frac{b_{1i}}{b_{11}}x_i$, остальные пока не заменяем.

Особый случай: $b_{ii} = 0, \forall i = 1, \dots, n$

Т.к. $k(x) \not\equiv 0 \implies \exists i, j : b_{ij} \neq 0$

Подготовительная замена:

$$\begin{cases} x_i = x'_i - x'_j \\ x_j = x'_i + x'_j \end{cases} \implies 2b_{ij}x_ix_j = 2b_{ij}((x'_i)^2 - (x'_j)^2) \implies \text{перейти к основ. случаю}$$

Замечание: можно сделать такую замену: $\begin{cases} x_i = \tilde{x}_i + \tilde{x}_j \\ x_j = \tilde{x}_j \end{cases}$

Закон инерции для квадратичных форм над \mathbb{R}

Если в некотором базисе e квадратичная форма $k(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^p x_i^2 - \sum_{i=p+1}^{p+q} x_i^2$,

а в базисе f : $k(y_1, \dots, y_n) = \sum_{i=1}^s y_i^2 - \sum_{i=s+1}^{s+t} y_i^2$, то $p = s, q = t$

Замечание. $p + q = s + t = \text{rk } k$, так что достаточно доказать, что $p = s$

Доказательство. От противного. Допустим, что $p > s$

Рассмотрим два подпространства: $L_1 = \langle e_1, \dots, e_p \rangle, L_2 = \langle f_{s+1}, \dots, f_n \rangle$

Обратим внимание, что если $x \in L_1, x \neq 0$, то $k(x) > 0$; $\forall y \in L_2 : k(y) \leq 0$

$$\dim L_1 + \dim L_2 = p + (n - s) = n + (p - s) > n \implies$$

$$L_1 \cap L_2 \neq \{0\} : n \geq \dim(L_1 + L_2) = \underbrace{\dim L_1 + \dim L_2}_{>n} - \dim(L_1 \cap L_2) \implies$$

$$\dim(L_1 \cap L_2) > 0$$

Но $\forall v \in L_1 \cap L_2, v \neq 0 : k(v) > 0$ и $k(v) < 0$ – противоречие \implies

$p > s$ не может быть.

Допустим, что $s > p$, тогда рассмотрим $L'_1 = \langle e_{p+1}, \dots, e_n \rangle, L'_2 = \langle f_1, \dots, f_s \rangle$

$$n - p + s = n + (s - p) > n \implies L'_1 \cap L'_2 \neq \{0\}$$

$$\forall u \in L'_1 \cap L'_2, u \neq 0 : k(u) > 0, k(u) < 0 \implies$$

$$p = s \implies q = t$$

□

§3. Знакоопределенные квадратичные формы.

Пусть $k(x)$ – квадратичная форма на пр-ве V над полем F , $\text{char} F \neq 2$.

$f(x, y)$ – полярная билинейная форма, $f(x, y) = f(y, x)$, $f(x, x) \equiv k(x)$.

Скажем, что $u \perp v$, если $f(u, v) = 0$.

Скажем, что базис e_1, \dots, e_n в пространстве V ортогональный,

$$\text{если } f(e_i, e_j) = 0, \forall i \neq j$$

Замечание. Форма является симметрической \iff ее матрица является симметрической.

$$\text{Если } B = \left(\begin{array}{ccc|ccc} b_{11} & \dots & b_{1i} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{1i} & \dots & b_{ii} & \dots & b_{in} \\ \hline \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{1n} & \dots & b_{in} & \dots & b_{nn} \end{array} \right), \text{ то } B = B^T$$

$$\text{Главный угловой минор порядка } i \text{ матрицы } B: \begin{vmatrix} b_{11} & \dots & b_{1i} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{1i} & \dots & b_{ii} \end{vmatrix}$$

Теорема Якоби. Пусть B – матрица квадратичной формы $k(x)$ (в данном базисе e) и все главные миноры этой матрицы отличны от 0: $\Delta_1 \Delta_2 \cdot \dots \cdot \Delta_n \neq 0$. Тогда в пространстве V существует базис $e' = \{e'_1, \dots, e'_n\}$, в котором

$$k = \frac{\Delta_1}{\Delta_0} y_1^2 + \frac{\Delta_2}{\Delta_1} y_2^2 + \dots + \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}} y_n^2 \text{ (по договоренности } \Delta_0 = 1)$$

Доказательство. Процесс ортогонализации – последовательное построение векторов, начиная с $e'_1 = e_1$, чтобы векторы были ортогональными друг другу.

Это включает требования: $\forall m \geq 2$

1. $f(e'_i, e'_j) = 0, \forall i \neq j, 1 \leq i, j \leq m$
2. $\langle e'_1, \dots, e'_m \rangle = \langle e_1, \dots, e_m \rangle$

Берем $e'_1 = e_1$, e'_2 ищем в виде $e'_2 = e_2 - \lambda e'_1$

$$f(e'_2, e'_1) = f(e_2 - \lambda e'_1, e'_1) = f(e_2, e'_1) - \lambda f(e'_1, e'_1) = f(e_2, e_1) - \lambda k(e'_1)$$

$$\lambda = \frac{f(e_2, e_1)}{k(e'_1)}, \quad k(e'_2) = f(e_2 - \lambda e'_1, e_2 - \lambda e'_1) = f(e_2, e_2) - 2\lambda f(e_2, e'_1) + \lambda^2 k(e'_1)$$

Матрица перехода от $e_1, e_2 \mapsto e'_1 e'_2$

$$C_2 = \begin{pmatrix} 1 & -\lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Delta'_2 = k(e'_1)k(e'_2) = \Delta_2 \implies k(e'_2) = \frac{\Delta_2}{\Delta_1}$$

$$B' = \begin{pmatrix} f(e'_1, e'_1) & f(e'_1, e'_2) & \dots \\ f(e'_2, e'_1) & f(e'_2, e'_2) & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} f(e'_1) & 0 & \dots \\ 0 & f(e'_2) & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

$$B' = \begin{pmatrix} B'_2 & \\ & \ddots \end{pmatrix} \quad B'_2 = C_2^T B_2 C_2, \quad |B'_2| = \Delta'_2 = |C_2|^2 |B_2| = |B_2| = \Delta_2$$

Рекурсия. Пусть векторы e_1, \dots, e_{m-1} ($m \geq 2$) уже построены, исходя из условий (1), (2) процесса ортогонализации. Вектор e'_m будем искать в виде:

$$e'_m = e_m - \sum_{i=1}^{m-1} \lambda_i e'_i, \quad \text{чтобы } f(e'_m, e'_j) = 0, \quad \forall j = 1, \dots, m-1$$

$$f(e'_m, e'_j) = f(e_m - \sum_{i=1}^{m-1} \lambda_i e'_i, e'_j) = f(e_m, e'_j) - \sum_{i=1}^{m-1} \lambda_i f(e'_i, e'_j) = 0$$

$$f(e'_i, e'_j) = 0, \quad i \neq 0 \implies \text{останется } f(e_m, e'_j) - \lambda_i f(e'_j, e'_j) = 0$$

Это можно проделать вплоть до $m = n \implies \lambda_i = \frac{f(e_m, e'_j)}{k(e'_j)}, \quad 1 \leq j \leq m-1$

Новая матрица:

$$B' = \begin{pmatrix} k(e'_1) & & \\ & \ddots & \\ & & k(e'_n) \end{pmatrix} = C^T B C \implies |B'| = |C|^2 |B| = |B| \quad \text{или} \quad \Delta'_n = \Delta_n$$

Тогда $\Delta'_n = k(e'_1) \cdot \dots \cdot k(e'_n) = \Delta_n$

Применим индукцию для $m \leq n-1 \implies k(e'_1) \cdot \dots \cdot k(e_{n-1}') = \Delta_{n-1} \implies k(e'_n) = \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}$

□

Следствия из теоремы Якоби: (для $\Delta_1 \cdot \dots \cdot \Delta_n$, над \mathbb{R} : $\text{rk} = n$,)
 p (положительный индекс инерции) равен числу сохранений знака,
а q (отрицательный индекс инерции) – числу перемен знака в последовательно-
сти $\Delta_0, \dots, \Delta_n$

$$k(y_1, \dots, y_n) = \sum_{m=1}^n \frac{\Delta_m}{\Delta_{m-1}} y_m^2$$

Квадратичная форма $k(x)$ является:

- Положительно определенной на V , если $\forall v \neq 0, k(v) > 0$
- Отрицательно определенной, если $\forall v \neq 0, k(v) < 0$
- Неотрицательно опеределенная, если $\forall v \neq 0, k(v) \geq 0$
- Неположительно опеределенная, если $\forall v \neq 0, k(v) \leq 0$

Лемма. Квадратичная форма является:

1. Положительно определенной $\iff p = n, q = 0$
2. Отрицательно определенной $\iff p = 0, q = n$
3. Неотрицательно определенной $\iff q = 0, p > 0$
4. Неположительно определенной $\iff p = 0, q > 0$
5. Неопределенной $\iff p > 0, q > 0$

Критерий Сильвестра. $k > 0 \iff \Delta_1 > 0, \dots, \Delta_n > 0$

$$k < 0 \iff (-1)^i \Delta_i > 0, \forall i = 1, \dots, n$$

Доказательство. Докажем для $k > 0$, для $k < 0$ – аналогично.

\Leftarrow Дано, что $\forall i, \Delta_i > 0 \implies k > 0$

По теореме Якоби \exists замена координат $X = CY$, что $k = \sum_{i=1}^n \frac{\Delta_i}{\Delta_{i-1}} y_i^2$

По условию, $\forall i, \frac{\Delta_i}{\Delta_{i-1}} > 0 \implies p = n \implies k > 0$

$\implies k > 0 \implies$ все $\Delta_i > 0$

Из условия $\Delta_n > 0$, т.к. $\underbrace{\Delta'_n}_{>0} = \Delta_n |C|^2$, известно, что $p = n$

$\forall i$ рассмотрим $k(y_1, \dots, y_i, 0, \dots, 0) \neq 0 \implies$ для нее $\Delta_i = |B_i|$

□

Примеры применения критерия Сильвестра

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{1}{2}d^2 f(x_0, y_0) + o((\Delta x^2 + \Delta y^2))$$

(x_0, y_0) – точка экстремума. $\implies f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0$

$$d^2 f(x_0, y_0) = f''_{xx}(M_0)(\Delta x)^2 + 2f''_{xy}(M_0)\Delta x\Delta y + f''_{yy}(M_0)(\Delta y)^2$$

$$\begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{vmatrix} (x_0, y_0) - \text{точка минимума} \iff d^2 f(x_0, y_0) > 0$$

§4. Евклидовы пространства.

Определение. Пространство \mathcal{E} над \mathbb{R} называется евклидовым, если на \mathcal{E} задано скалярное произведение (x, y) – симметричная билинейная форма, т.ч. соответствующая квадратичная функция $(x, x) > 0$, $x \in \mathcal{E}$, $x \neq 0$. (В геометрии, $\dim \mathcal{E} < \infty$)

Примеры:

1. В $C[a, b]$, $(f(x), g(x)) = \int_a^b f(x)g(x)dx$

$$(f, f) = \int_a^b f^2(x)dx > 0, \text{ где } f \neq 0$$

2. В $M_n(\mathbb{R})$

$$(X, Y) = \text{tr}(XY^T)$$

$$(X, X) = \text{tr}(XX^T) = \sum_{i,j=1}^n x_{ij}^2$$

$$(XX^T)_{ii} = (x_{i1} \cdot \dots \cdot x_{in}) \begin{pmatrix} x_{i1} \\ \vdots \\ x_{in} \end{pmatrix} = x_{i1}^2 + \dots + x_{in}^2$$

Неравенство Коши-Буняковского-Шварца.

Пусть \mathcal{E} – евклидово пространство, тогда $\forall x, y \in \mathcal{E} \quad |(x, y)| \leq |x||y|$ (1)

Более того, если выполняется равенство, то $x \parallel y$.

Доказательство. Если $x = 0$ или $y = 0$, то (1) имеет вид $0 = 0$.

Можно считать, что $x \neq 0$, $y \neq 0$.

Рассмотрим функцию:

$$f(t) = (y - tx, y - tx) = (y, y) - 2t(x, y) + t^2(x, x), \quad \forall t \in \mathbb{R} \iff$$

$$\frac{\Delta}{4} = (x, y)^2 - |x|^2|y|^2 \leq 0 \implies (x, y)^2 \leq |x|^2|y|^2 \iff$$

$$|(x, y)| \leq |x||y|$$

Равенство означает, что

$$\Delta = 0 \implies \exists! t = t_0 : (y - t_0x, y - t_0x) = 0 \implies y = t_0x \implies y \parallel x.$$

□

Следствие. $\forall x, y \in \mathcal{E} : |x + y| \leq |x| + |y|$ (2)

Доказательство. (2) $\iff |x + y|^2 \leq |x|^2 + 2(x, y) + |y|^2 \leq |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2$

□

Определение. Если $x \neq 0$, $y \neq 0$, то определим угол α между x и y :

$$\cos \alpha = \frac{(x, y)}{|x||y|} \quad (3), \quad \alpha = \arccos \frac{(x, y)}{|x||y|}$$

Определение. Векторы $a_1, \dots, a_m \in \mathcal{E}$ – ортогональная система, если $(a_i, a_j) = 0$, $\forall i \neq j$ и $(a_i, a_i) = 1, \forall i = 1, \dots, m$.

Утверждение. Ортогональная система ненулевых векторов ЛНЗ.

Доказательство. Пусть $\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_m a_m = 0 \mid \cdot a_i \implies$

$$\lambda_1 \underbrace{(a_1, a_i)}_{=0} + \dots + \lambda_i (a_i, a_i) + \dots + \lambda_m \underbrace{(a_m, a_i)}_{=0} = 0 \implies$$

$$\lambda_i (a_i, a_i) = 0 \implies \lambda_i = 0, \quad \forall i = 1, \dots, m.$$

□

Теорема. В конечномерном евклидовом пространстве существует ортогональный (более сильное утверждение: ортонормированный) базис.

(Существование ортогонального базиса было доказано при доказательстве теоремы Якоби – процесс ортогонализации).

Если a_1, \dots, a_m – ортогональный базис, то $\frac{a_1}{|a_1|}, \dots, \frac{a_n}{|a_n|}$ – ортогональный базис.

Запись скалярного произведения (x, y) в координатах:

пусть $e = \{e_1, \dots, e_n\}$ – базис в \mathcal{E}

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{j=1}^n x_j e_j \right) = \sum_{i,j=1}^n (e_i, e_j) x_i y_j = X^T G_e Y \quad (4)$$

Обознач. $G_e = ((e_i, e_j))$ – матрица Грама базиса e_1, \dots, e_n , она симметрическая, причем положительно определенная.

$$G \text{ явл. матрицей Грама} \iff \begin{cases} G^T = G \\ \Delta_1, \dots, \Delta_n > 0 \end{cases}$$

Если базис ортонормированный то $G_e = E$, тогда $(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$
 Разложение любого вектора x по ортонормированному базису e :

$$x = \sum_{i=1}^n (x, e_i) x_i$$

§5 Ортогональное дополнение.

Определение. Пусть \mathcal{E} – евклидово пространство, $\emptyset \neq U \subseteq \mathcal{E}$, тогда ортогональное дополнение к U в \mathcal{E} – это подмножество $U^\perp = \{y \in \mathcal{E} \mid (x, y) = 0, \forall x \in U\}$

Заметим, что если $U \neq 0$, то U подпространство в \mathcal{E} :

$$0 \in U^\perp, (x, y_1) = 0, (x, y_2) = 0 \implies$$

$$(x, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \alpha_1 \underbrace{(x, y_1)}_{=0} + \alpha_2 \underbrace{(x, y_2)}_{=0} = 0 \implies \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 \in U^\perp$$

Теорема. Если $\dim \mathcal{E} = n$, $U \subseteq \mathcal{E}$ – подпространство в \mathcal{E} , то

1. $\dim U + \dim U^\perp = \dim \mathcal{E} = n$
2. $\mathcal{E} = U \oplus U^\perp$

Доказательство. $U \cap U^\perp = \{0\}$: если $v \in U \cap U^\perp \implies (v, v) = 0 \implies v = 0$

Выберем базис в U : e_1, \dots, e_m ($\dim U = m$, $0 < m < n$).

$$y \in U^\perp \iff (y, e_i) = 0, \forall 1 \leq i \leq m$$

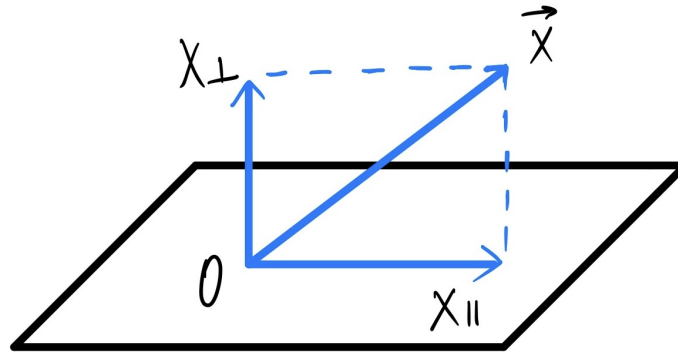
\implies по определению.

$$\iff \text{если } (y, e_i) = 0, \forall i = 1, \dots, m \text{ и } \sum_{i=1}^m x_i e_i \implies (x, y) = \sum_{i=1}^m x_i (e_i, y) = 0$$

Получается, что U^\perp – подпространство решений ОСЛУ:

$$\begin{cases} (e_1, y) = 0 \\ \dots \\ (e_m, y) = 0 \end{cases} \implies \dim U^\perp = n - m \implies \dim U^\perp + \dim U = n \implies \mathcal{E} = U \oplus U^\perp$$

Это означает, что объединив О.Н.Б. пространства U и О.Н.Б. пространства U^\perp , получим О.Н.Б в \mathcal{E} (О.Н.Б. - ортонормированный базис). \square



$$x = x_{\parallel} + x_{\perp}, \quad x_{\parallel} \in U, \quad x_{\perp} \in U^{\perp}$$

x_{\parallel} – ортогональная проекция вектора x на U .

x_{\perp} – ортогональная проекция вектора x на U^{\perp} .

Конкретно разложение вектора $x \in \mathcal{E}$ на сумму проекции и составляющей.

1 способ. Выбрать О.Н.Б. в \mathcal{E} , $\underbrace{e_1, \dots, e_m}_{\text{О.Н.Б. в } U}, \underbrace{e_{m+1}, \dots, e_n}_{\text{О.Н.Б. в } U^{\perp}}$

$$\forall x = \underbrace{\sum_{i=1}^m (x, e_i) e_i}_{x_{\parallel}} + \underbrace{\sum_{i=m+1}^n (x, e_i) e_i}_{x_{\perp}}$$

2 способ. Пусть a_1, \dots, a_m – произвольный базис в U .

Искать разложение x в виде:

$$x = \sum_{i=1}^m \alpha_i a_i + x_{\perp} \mid \cdot a_j \implies (x, a_j) = \sum \underbrace{(a_i, a_j)}_{=0} \alpha_i + \underbrace{(x_{\perp}, a_j)}_{=0}$$

Эта система имеет единственное решение $(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$. Матрица этой системы – это G_{a_1, \dots, a_m}

Определение. Угол между вектором x и подпространством U – угол между x и x_{\parallel} , $\rho(x, U) := \|x_{\perp}\|$

"Теорема" Пифагора.

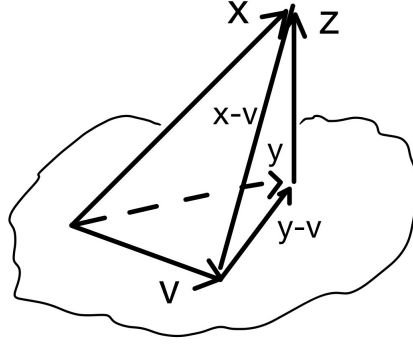
$$x = y + z, \quad y \in U, \quad z \in U^{\perp} \implies |x|^2 = |y|^2 + |z|^2$$

$$(x, x) = (y + z, y + z) = |y|^2 + \underbrace{2(y, z)}_0 + |z|^2$$

Утверждение. $\min\{|x - v| : v \in U\} = |z|$

$$x - v = (x - y) + (y - v) = z + \underbrace{(y - v)}_{\in U}$$

$$|x - v|^2 = |z|^2 + |y - v|^2 \geq |z|^2, \text{ равенство } \iff x = y \xRightarrow{\text{ДОК-ТЬ}} \alpha \leq \beta, \quad \forall v \in U$$



Свойства операции \perp : $(\forall U \subseteq V \mapsto U^\perp, \dim \mathcal{E} < \infty)$

1. $(U^\perp)^\perp = U$
2. $(U_1 + U_2)^\perp = U_1^\perp \cap U_2^\perp$
3. $(U_1 \cap U_2)^\perp = U_1^\perp + U_2^\perp$

Доказательство.

1. $\forall u \in U, \forall v \in U^\perp \implies (u, v) = 0 \implies u \in (U^\perp)^\perp$

Равенство размерностей:

$$\dim U^\perp = n - \dim U, \dim (U^\perp)^\perp = n - \dim U^\perp = \dim U \implies U = (U^\perp)^\perp$$

2. Возьмем $v \in U_1^\perp \cap U_2^\perp$, тогда $\forall w = u_1 + u_2, (v, w) = \underbrace{(v, u_1)}_0 + \underbrace{(v, u_2)}_0 \implies$

$$v \in (U_1 + U_2)^\perp \implies U_1^\perp \cap U_2^\perp \subseteq (U_1 + U_2)^\perp$$

Равенство размерностей:

$$\begin{aligned} \dim(U_1 + U_2)^\perp &= n - \dim(U_1 + U_2) = \\ &= n - (\dim U_1 + \dim U_2 - \dim(U_1 \cap U_2)) = \\ &= n + \dim(U_1 \cap U_2) - \dim U_1 - \dim U_2 = \\ &= (n - \dim U_1) + (n - \dim U_2) + \dim(U_1 \cap U_2) - n \implies \\ \dim(U_1^\perp \cap U_2^\perp) &= \dim U_1^\perp + \dim U_2^\perp - \dim(U_1^\perp \cap U_2^\perp) = \\ &= n - \dim U_1 + n - \dim U_2 - \dim(U_1^\perp + U_2^\perp) \end{aligned}$$

$$\dim(U_1^\perp + U_2^\perp) \stackrel{?}{=} n - \dim(U_1 \cap U_2)$$

$$\dim(U_1^\perp + U_2^\perp) = \dim U_1^\perp + \dim U_2^\perp - \dim(U_1^\perp \cap U_2^\perp)$$

$$(U_1 + U_2)^\perp \subseteq U_1^\perp \cap U_2^\perp$$

$$\text{Если } v \in (U_1 + U_2)^\perp \implies \begin{cases} (v, u_1) = 0, \forall u_1 \in U_1 \\ (v, u_2) = 0, \forall u_2 \in U_2 \end{cases} \implies v \in U_1^\perp \cap U_2^\perp$$

$$3. (U_1 \cap U_2)^\perp = U_1^\perp + U_2^\perp \iff \underbrace{(U_1 \cap U_2)^{\perp\perp}}_{U_1 \cap U_2} \stackrel{?}{=} (U_1^\perp + U_2^\perp) = (\text{свойство 2}) =$$

$$= (U_1^\perp)^\perp \cap (U_2^\perp)^\perp = U_1 \cap U_2$$

□

Изоморфизм евклидовых пространств.

$\varphi : \mathcal{E} \mapsto \mathcal{E}'$ – изоморфизм евклидовых пространств \mathcal{E} и \mathcal{E}' , если

1. φ – линейное отображение.
2. φ – биекция.
3. $\forall x_1, x_2 \in \mathcal{E} \implies (\varphi(x_1), \varphi(x_2)) = (x_1, x_2)$

Теорема. Если $\dim \mathcal{E} = \dim \mathcal{E}'$, то \mathcal{E} и \mathcal{E}' изоморфны, т.е. существует изоморфизм $\varphi : \mathcal{E} \mapsto \mathcal{E}'$

Доказательство. Выберем e_1, \dots, e_n – О.Н.Б. в \mathcal{E} , e'_1, \dots, e'_n – О.Н.Б. в \mathcal{E}'

$\forall x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, определим $\varphi(x) = \sum_{i=1}^n x_i e'_i$ (в частности, $\varphi(e_i) = e'_i$)

φ – линейный изоморфизм.

$$\forall x, y \in \mathcal{E}, (x, y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i, (\varphi(x), \varphi(y)) = \left(\sum_i x_i e'_i, \sum_j y_j e'_j \right) = \sum_{i=1}^n x_i y_i = (x, y)$$

□

Теорема.

1. Пусть e, e' – два О.Н.Б. в евклидовом пространстве \mathcal{E} , $C_{e \rightarrow e'} \implies C_{e \rightarrow e'}^T = C_{e \rightarrow e'}^{-1}$ (ортогональная матрица).
2. Если e – О.Н.Б., C – ортогональная матрица, то $eC = e'$ – тоже О.Н.Б.

Доказательство.

1. Дано: e' – О.Н.Б. $\implies (e_i, e_j) = \delta_{ij}$ (символ Кронекера)

$$(e_i, e_j) = (C^T C)_{ij} \implies C^T C = E$$

2. $C_{e \rightarrow e'} = (e'_1 \uparrow \dots e'_n \uparrow)$ в базисе e . Т.к. базис e ортонормированный, то $(e'_i, e'_j) = e'_i \cdot e'_j \uparrow$ – это (i, j) элемент произведения:

$$C^T C = E \implies (e'_i, e'_j) = \delta_{ij} \implies e' - \text{О.Н.Б.}$$

□

Понятие объема n-мерного параллелепипеда.

Параллелепипед Π с ребрами a_1, \dots, a_n в n-мерном пространстве V .

$$\Pi = \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i a_i \mid 0 \leq \alpha_i \leq 1, 1 \leq i \leq n \right\}$$

Будем считать, что a_1, \dots, a_n ЛНЗ.

В n-мерном евклидовом пространстве \mathcal{E}_n

Определение. Объемом n -мерного параллелепипеда V_n называется произведение объема $(n - 1)$ -мерного основания $\Pi_{\{a_1, \dots, a_{n-1}\}}$ на высоту $|a_n^\perp|$

Формула: $|a_n^\perp|^2 = \frac{\det G_{\{a_1, \dots, a_n\}}}{\det G_{\{a_1, \dots, a_{n-1}\}}}$

Доказательство. Ортогонализуем векторы a_1, \dots, a_n – получим попарно ортогональные b_1, \dots, b_n (в частности, $b_n \perp b_1, \dots, b_{n-1}$, $\langle b_1, \dots, b_{n-1} \rangle = \langle a_1, \dots, a_{n-1} \rangle$)

$$G_{\{b_1, \dots, b_n\}} = C^T G_{\{a_1, \dots, a_n\}} C, \text{ при этом } C = \begin{pmatrix} 1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow G_{\{b_1, \dots, b_n\}} = G_{\{a_1, \dots, a_n\}}$$

$$\frac{\det G_{\{a_1, \dots, a_n\}}}{\det G_{\{a_1, \dots, a_{n-1}\}}} = \frac{|b_1|^2 \dots |b_n|^2}{|b_1|^2 \dots |b_{n-1}|^2} = |b_n|^2 = |a_n^\perp|^2$$

□

Следствие. По индукции, $V_n^2 = \det G_{\{a_1, \dots, a_n\}}$

Следствие.

$$\rho^2(x, U) = \frac{\det G_{\{a_1, \dots, a_m, x\}}}{G_{\{a_1, \dots, a_m\}}}(U = \langle a_1, \dots, a_m \rangle \text{ ЛНЗ})$$

Следствие. Если известны координаты векторов a_1, \dots, a_n в О.Н.Б., то

$$V_n = \left| \det \begin{pmatrix} \vec{a}_1 \\ \vdots \\ \vec{a}_n \end{pmatrix} \right|$$

Доказательство. Т.к. базис ортонормированный, то

$$\begin{pmatrix} \vec{a}_1 \\ \vdots \\ \vec{a}_n \end{pmatrix} (a_1^\uparrow \dots a_n^\uparrow) = \det G_{\{a_1, \dots, a_n\}} \Rightarrow$$

$$V_n^2 = \det G_{\{a_1, \dots, a_n\}} = \left(\det \begin{pmatrix} \vec{a}_1 \\ \vdots \\ \vec{a}_n \end{pmatrix} \right)^2$$

□

§6. Линейный оператор в евклидовом пространстве

Пусть \mathcal{E} – евклидово пространство, $\varphi : \mathcal{E} \mapsto \mathcal{E}'$

Определение. Оператор φ^* – сопряженный к φ :

$$\varphi^* : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}, \quad \forall x, y \in \mathcal{E} : (\varphi(x), y) = (x, \varphi^*(y)) \quad (1)$$

Определение. Оператор φ – самосопряженный, если

$$\varphi^* = \varphi, \text{ т.е. } \forall x, y \in \mathcal{E} : (\varphi(x), y) = (x, \varphi(y))$$

Определение. Оператор φ – ортогональный, если

$$\forall x, y \in \mathcal{E} : (\varphi(x), \varphi(y)) = (x, y)$$

Условия на матрицу A_φ :

1. (1) в координатах:

$$\begin{aligned} (A_\varphi X)^T G_e Y &= X^T G_e (A_{\varphi^*} Y) \implies \\ X^T (A_\varphi^T G_e) Y &= X^T (G_e A_{\varphi^*}) Y, \quad \forall X, Y \in F^n \implies \\ A_\varphi^T G_e &= G_e A_{\varphi^*} \implies \\ A_{\varphi^*} &= G^{-1} A_\varphi^T G_e \end{aligned}$$

Если e – О.Н.Б., то $G_e = E$ и $A_{\varphi^*} = A_\varphi^T$

2. $\varphi = \varphi^*$ – самосопряженный $\iff (\varphi(x), y) = (x, \varphi(y)), \quad \forall x, y \in \mathcal{E}$

$$\begin{aligned} (A_\varphi X)^T G_e Y &= X^T G_e A_\varphi Y, \quad \forall X, Y \in \mathbb{R}^n \\ X^T (A_\varphi^T G_e) y &= X^T (G_e A_\varphi) Y \iff A_\varphi^T G_e = G_e A_\varphi \end{aligned}$$

В О.Н.Б. $\iff A_\varphi^T = A_\varphi$ – симметричная.

3. φ – ортогональный $\iff \forall x, y : (\varphi(x), \varphi(y)) = (x, y) \iff$

$$\begin{aligned} (A_\varphi X)^T G_e (A_\varphi Y) &= X^T G_e Y \\ X^T (A_\varphi^T G_e A_\varphi) Y &\equiv X^T G_e Y \iff A_\varphi^T G_e A_\varphi = G_e \end{aligned}$$

В О.Н.Б.: $A_\varphi^T A_\varphi = E$, A_φ – ортогональная.

Комментарий к определению φ^* :

Пусть $\varphi : V \longrightarrow W$ – линейное отображение.

Тогда $\varphi^* : \underbrace{W^*}_{f \in} \longrightarrow V^*$ определим по правилу: $\varphi^*(f)(v) = f(\varphi(v)), \quad \forall v \in V$

Это φ^* – линейное отображение, в частности, для $W = V$, то $\varphi^* : V^* \longrightarrow V^*$ – линейный оператор.

Утверждение. Если \mathcal{E} – евклидово пространство, то $\mathcal{E}^* \cong \mathcal{E}$.

Доказательство. Построение изоморфизма:

Выберем в \mathcal{E} О.Н.Б. e , $\forall v \in \mathcal{E} : v = \sum_{i=1}^n x_i e_i$

$$\forall f \in \mathcal{E}^*, f(v) = \sum_{i=1}^n \underbrace{f(e_i)}_{a_i} x_i = \sum_{i=1}^n a_i x_i = (a_1, \dots, a_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (a, v)$$

Т.к. базис ортонормированный и $a = \sum_{i=1}^n a_i e_i$, $v = \sum_{i=1}^n x_i e_i$

Т.е. для функции f найти такой вектор, что $f(v) = (a, v)$, $\forall v \in \mathcal{E}$

$f \longleftrightarrow a$, можно "отождествить" \mathcal{E} и \mathcal{E}^* □

Свойства операции сопряжения:

1. $(\varphi^*)^* = \varphi$
2. $(\alpha\varphi + \beta\varphi)^* = \alpha\varphi^* + \beta\varphi^*$
3. $(\varphi\psi)^* = \psi^*\varphi^*$

Доказательство. Достаточно доказать для матриц в О.Н.Б.

1. $A_{\varphi^*} = A_{\varphi}^T \implies A_{\varphi^{**}} = (A_{\varphi^*})^T = A_{\varphi}^{TT} = A_{\varphi}$
2. Очевидно.
3. $A_{(\varphi\psi)^*} = A_{\varphi\psi}^T = (A_{\varphi}A_{\psi})^T = A_{\psi}^T A_{\varphi}^T = A_{\psi^*}A_{\varphi^*}$ □

Теорема. Пусть $\varphi : \mathcal{E} \mapsto \mathcal{E}$ – линейный оператор. Тогда:

1. Если $\varphi(U) \subseteq U$, то $\varphi^*(U^{\perp}) \subseteq U^{\perp}$
2. $\text{Im}\varphi = (\text{Ker}\varphi^*)^{\perp}$
3. $\text{Ker}\varphi = (\text{Im}\varphi^*)^{\perp}$

Доказательство.

1. Пусть $x \in U$, $y \in U^{\perp}$. $\varphi^*(y) \subseteq U^{\perp} \iff$

$$0 \stackrel{?}{=} (x, \varphi^*(y)) = \underbrace{(\varphi(x), y)}_{\in U} = 0 \implies \varphi^* \in U^{\perp}$$

2. Возьмем $y \in \text{Im}\varphi \implies \exists x \in \mathcal{E} : y = \varphi(x)$

Возьмем $z \in \text{Ker}\varphi^*$. Вычислим:

$$(y, z) = (\varphi(x), z) = (x, \underbrace{\varphi^*(z)}_0) = 0 \implies$$

$$y \in (\text{Ker}\varphi^*)^{\perp} \implies \text{Im}\varphi \subseteq (\text{Ker}\varphi^*)^{\perp}$$

$$\dim \text{Im}\varphi = \text{rk} A_{\varphi}, \dim \text{Ker}\varphi^* = n - \dim \text{Im}\varphi^* = n - \text{rk} A_{\varphi}.$$

$$\text{Но } \text{rk} A_{\varphi^*} = \text{rk} A_{\varphi} \text{ (в О.Н.Б. } A_{\varphi^*} = A_{\varphi}^T) \implies$$

$$\dim(\text{Ker}\varphi^*)^\perp = n - \dim\text{Ker}\varphi^* = \text{rk}A_\varphi \implies \text{размерности равны}$$

$$3. \text{Ker}\varphi = (\text{Im}\varphi^*)^\perp \iff (\text{Ker}\varphi)^\perp = \text{Im}\varphi^*$$

Заменяем φ на φ^* , тогда φ^* на φ^{**} в равенстве 2.

Тогда $(\text{Ker}\varphi^*)^\perp = \text{Im}\varphi$ в исходных обозначениях это дает $(\text{Ker}\varphi)^\perp = \text{Im}\varphi^*$

□

Следствие. (Теорема Фредгольца)

СЛУ $AX = b$ (*) совместна $\iff \forall Y$ – решения сопряженной однородной системы $A^TY = 0$ выполняется условие: $Y^Tb = 0$, (т.е. $Y \perp b$)

Система (*) совместна означает, что $b \in \text{Im}\varphi$, если A – матрица оператора φ
По 2, $b \in \text{Im}\varphi \iff b \in (\text{Ker}\varphi)^\perp$, т.е. $\forall Y : A^TY = 0, (b, Y) = 0$

§7. Самосопряженные операторы.

Определение. $\varphi : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ называется самосопряженным, если

$$\forall x, y \in \mathcal{E} : (\varphi(x), y) = (x, \varphi(y)) \quad (1)$$

Теорема. Пусть $\varphi : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ – самосопряженный оператор

1. Если $U \subseteq \mathcal{E}$ – φ -инвариантное подпространство, то U^\perp также φ -инвариантно (это доказано для φ^*)
2. Все характеристические корни φ вещественные.
3. В \mathcal{E} существует О.Н.Б. из собственных векторов оператора φ (в нем A_φ диагональна).

Доказательство.

2. Пусть λ_1 – характеристический корень для $\chi_\varphi(\lambda)$

Если $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ – это собственное значение, и доказывать нечего. (С) Чубаров

Если $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, то существует двумерное инвариантное подпространство $U = \langle X, Y \rangle$, $X, Y \in \mathbb{R}^n$.

$(x, y)|_U$ делает его евклидовым пространством.

$(x, y \in U)$, соответственно, $\varphi|_U$ будет самосопряженным оператором на $U \implies$

в О.Н.Б. e'_1, e'_2 , $A_{\varphi|_U} = A$, т.е. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}^2$$

$$D = (a_{11} + a_{22})^2 - 4(a_{11}a_{22} - a_{12}^2) = (a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2 \geq 0 \implies \lambda \in \mathbb{R}$$

3. Индукция по $\dim \mathcal{E} = n$:

$\dim \mathcal{E} = 1 \implies \varphi(x) = \lambda x, \forall x \in \mathcal{E}$ – верно.

Для $\dim \mathcal{E} = n > 1$ предположение индукции: в $(n - 1)$ -мерном евклидовом пространстве самосопряженный оператор имеет О.Н.Б. из собственных векторов.

Фикс. одно собственное значение $\lambda_1 \in \mathbb{R}$, обозн. $U = \langle e_1 \rangle$, если $\varphi(e_1) = \lambda_1 e_1, |e_1| = 1$

Тогда U^\perp имеет размерность $(n - 1)$ является евклидовым относительно $(x, y)|_{U^\perp}$ и $\varphi|_{U^\perp}$ – самосопряженный \implies в $U^\perp \exists$ О.Н.Б. $e_2, \dots, e_n : \varphi(e_i) = \lambda_i e_i$

Тогда e_1, \dots, e_n – нужный О.Н.Б. \square

Задача: Пусть φ – самосопряженный оператор в \mathcal{E} , $\varphi^2 = \varphi$ (идемпотентный оператор). Тогда либо $\varphi = \mathcal{E}$ или 0, либо φ – ортогональное проектирование \mathcal{E} на некоторое подмножество.

§8. Ортогональные операторы.

Определение. Линейный оператор $\varphi : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ называется ортогональным, если $\forall x, y \in \mathcal{E} : (\varphi(x), \varphi(y)) = (x, y)$

Заметим, что $|\varphi(x)| = |x|, \forall x \in \mathcal{E} \implies \varphi$ – невырожденный.

Теорема. $\varphi : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ – ортогональный оператор.

1. Собственные векторы, отвечающие различным собственным значениям ортогональны.
2. Все характеристические корни ортогональной матрицы $|\lambda| = 1$, вещественные только ± 1 .
3. Если $\varphi(U) \subseteq U$, то $\varphi(U^\perp) \subseteq U^\perp$

Доказательство.

3. Пусть $x \in U, y \in U^\perp, 0 = (x, y) = (\varphi(x), \varphi(y))$

Т.к. φ невырожденно, т.е. обратимо, то $\forall x \in U \exists z \in U (z = \varphi^{-1}(x))$

$$(x, y) = (\varphi^{-1}(x), y) = (\varphi(\varphi^{-1}(x)), \varphi(y)) = (x, \varphi(y)) \implies \varphi(y) \in U^\perp$$

φ^{-1} тоже ортогонален.

1. Пусть $\varphi(x) = \lambda_1 x, x \neq 0, \varphi(y) = \lambda_2 y, y \neq 0, \lambda_1 \neq \lambda_2$:

$$(\varphi(x), \varphi(y)) = \lambda_1 \lambda_2 (x, y) = (x, y)$$

$$(x, y)(1 - \underbrace{\lambda_1 \lambda_2}_{-1}) = 0 \implies 2(x, y) = 0 \implies (x, y) = 0$$

2. Если λ – собственное значение, то $\lambda \in \{1, -1\}$, $\varphi(x) = \lambda x$, $x \neq 0$:

$$(\varphi(x), \varphi(x)) = \lambda^2(x, x) = \underbrace{(x, x)}_{\neq 0} \implies \lambda^2 = 1, \lambda = \pm 1$$

Если $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, ($\beta \neq 0$) – корень матрицы A_φ , то рассмотрим оператор $\varphi^{\mathbb{C}} : \mathbb{C}^n \mapsto \mathbb{C}^n$, ($\dim V = n$)

$$\varphi^{\mathbb{C}}(z) = \lambda_1 z, \quad z = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$((1, i), (1, i)) \stackrel{?!}{=} 1 \cdot 1 + i \cdot i$$

Введем в \mathbb{C}^n скалярное произведение векторов X, Y :

$$(X, Y) := \sum_{i=1}^n x_i \overline{y_i} \implies (X, X) = \sum_{i=1}^n |x_i|^2$$

При этом, $(Y, X) = \overline{(X, Y)}$, в частности, $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, $(X, \lambda Y) = \overline{\lambda} (X, Y)$

Пусть $x \in \mathbb{C}^n$ – собственный для $\varphi^{\mathbb{C}}$, т.е. $A_\varphi X = \lambda_1 X$, вычислим

$$(\varphi^{\mathbb{C}}(x), \varphi^{\mathbb{C}}(x)) = (x, x)$$

$$(\lambda_1 X, \lambda_1 X) = \lambda_1 \overline{\lambda_1} (X, X) \implies |\lambda_1|^2 = 1, |\lambda| = \pm 1$$

□

Определение. Матрица называется канонической, если

$$A = \begin{pmatrix} \Phi_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \Phi_s & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Теорема. Для любого ортогонального оператора в \mathcal{E}_n существует ортонормированный базис, в котором матрица A_φ имеет канонический вид, при этом числа p, q, s и углы α_k ($k = 1, \dots, s$) для φ определяется единственным образом, с точностью до порядка следования клеток.

Доказательство. Допустим, что φ имеет хотя бы одно вещественное собственное значение. Рассмотрим $U = \mathcal{E}_1 \oplus \mathcal{E}_{-1}$ (прямая сумма собственных подпространств). Обозначим за $p := \dim \mathcal{E}_1$, $q := \dim U_{-1} \implies \dim U = p + q$.

U – инвариантное подпространство, тогда $\mathcal{E} = U^\perp \oplus U$, U^\perp также инвариантно, и $\varphi|_{U^\perp}$ не имеет вещественных собственных значений. Возьмем одно из них $\lambda_1 = \cos \alpha_1 + i \sin \alpha_1 \sim L_1$.

$$A_{\varphi|_{L_1}} = \begin{pmatrix} \cos \alpha_1 & -\sin \alpha_1 \\ \sin \alpha_1 & \cos \alpha_1 \end{pmatrix}$$

Индукция по размерности s (если $s \neq 0$), $\dim U^\perp = 2s$.

Рассмотрим подпространство: L_1^\perp в пространстве U^\perp , его размерность равна $2s - 2$.

По предположению индукции, в L_1^\perp в U^\perp существует О.Н.Б., в котором матрица ограничения оператора φ имеет вид

$$\begin{pmatrix} \Phi_2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \Phi_n \end{pmatrix}$$

□

Пример: Пусть $A^T = A^{-1}$ 3-го порядка. Хотим найти матрицу

$$A \stackrel{?}{\sim} A' = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}, \quad \lambda_1 = \pm 1$$

$$|A'| = \begin{vmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{vmatrix} \lambda_1 = \lambda_1 = \pm 1$$

Зная, что можно вычислить собственный вектор \implies он дает ось поворота (м.б. с симметрией, если $\lambda_1 = -1$)

$$\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} A' = 2 \cos \alpha + \lambda_1 \implies \cos \alpha = \frac{\operatorname{tr} A - \lambda_1}{2}$$

Можно выбрать правый О.Н.Б. e_1, e_2 в плоскости, $\perp e_3$, $\varphi(e_3) = \lambda_1 e_3$, $|e_3| = 1$.

Общий случай: $\varphi : \mathcal{E} \mapsto \mathcal{E}$.

Лемма. Если φ невырожденная, то все собственные значения оператора $\varphi^* \cdot \varphi$ положительны.

Теорема. Любой невырожденный оператор φ может быть представлен в виде произведения (причем единственным образом) $\varphi = \theta \cdot \psi$, где θ – ортогональный оператор, а ψ – самосопряженный со всеми положительными собственными значениями $\lambda > 0$.

Доказательство. Пусть μ – собственное значение оператора $\varphi^* \cdot \varphi$, $(\varphi^* \cdot \varphi)(x) = \mu x$, $x \neq 0$. Вычислим: $((\varphi^* \cdot \varphi)(x), x) = \mu(x, x)$

$$\underbrace{(\varphi(x), \varphi(x))}_{\neq 0} > 0 \implies \mu = \frac{(\varphi(x), \varphi(x))}{(x, x)} > 0$$

Матричная формулировка: любую невырожденную вещественную матрицу A можно представить, причем единственным образом, в виде $A = BC$, где $B^T = B^{-1}$, $C^T = C$, с положительными собственными значениями.

Такое разложение называется полярным разложением оператора (матрицы).

Можно выбрать О.Н.Б. e_1, \dots, e_n в \mathcal{E} , тогда $A = A_\varphi$, $B = B_\theta$, $C = C_\psi$.

Доказательство матричного варианта:

Пусть задача решена:

$$A = BC \implies A^T = C^T B^T = CB^{-1} \implies A^T A = CB^{-1}BC = C^2$$

Т.к. матрица $A^T A = C^2$ – симметричная, она задает самосопряженный линейный оператор, т.е. существует О.Н.Б. e'_1, \dots, e'_n , в котором

$$(A^T A)' = \begin{pmatrix} \mu_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_n \end{pmatrix} \text{ все } \mu_i > 0, \text{ по лемме.}$$

Хотим найти матрицу C' , чтобы

$$(C')^2 = \begin{pmatrix} \mu_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_n \end{pmatrix} \implies C' = \begin{pmatrix} \pm\sqrt{\mu_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \pm\sqrt{\mu_n} \end{pmatrix}$$

С учетом требования положительности

$$C' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}, \lambda_i = \sqrt{\mu_i} > 0 - \text{ единственная такая матрица.}$$

Пусть T – (ортогональная) матрица перехода от базиса e к базису e' , тогда

$$T^{-1}(A^T A)T = \begin{pmatrix} \mu_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_n \end{pmatrix} \implies C = TC'T^{-1} = T \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} T \implies$$

$B = AC^{-1}$ – эта матрица ортогональная

$$B^T = (C^{-1})TA^T = C^{-1}A^T \implies B^TB = (C^{-1}A^T)(AC^{-1}) = C^{-1}(\underbrace{A^TA}_{C^T})C^{-1} = E$$

□

Замечание. Можно также представить A в виде $A = C'B'$. Вопрос: можно ли утверждать, что $B' = B$ или $C' = C$?

Рассмотрим разложение $A = BC$, где $C = T \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} T^{-1}$

$$A = (BT)diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n)T^{-1} = D \cdot diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n)F,$$

все >0

где F, D – ортогональное сингулярное разложение.

§9. Квадратичные формы на евклидовом пространстве.

Пусть $k(x) = f(x, x)$ – квадратичная функция на евклидовом пространстве. $f(x, y)$ – симметрическая билинейная форма, которая ее порождает.

Обозначим F – матрицу этой формы в некотором ортонормированном базисе.

Если ввести другой О.Н.Б. $e' = eC$, $C = C_{e \rightarrow e'}$ – ортогональная матрица.

Тогда $F' = C^TFC = C^{-1}FC$. Поэтому можно рассмотреть F как матрицу линейного оператора φ в базисе e , φ – самосопряженный.

По теореме, в \mathcal{E} существует О.Н.Б. e' , в котором матрица этого оператора диагональная: $diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

$$F_{e'} = C^{-1}FC = C^TFC$$

Т.е. в базисе e' , если сделать замену $X = CY$ форма k приобретает вид:

$$k(y) = \lambda_1 y_1^2 + \dots + \lambda_n y_n^2$$

Причем $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ – собственные значения матрицы F .

Базисные векторы e'_1, \dots, e'_n называют главными осями для квадратичной формы $k(x)$.

Определение. Линейный оператор $\varphi : \mathcal{E} \mapsto \mathcal{E}$ называется присоединенным к билинейной функции $f(x, y)$, если:

$$\forall x, y \in \mathcal{E} f(x, y) = (x, \varphi(y)) \quad (1)$$

Утверждение. 1. Для любой билинейной функции $f(x, y)$ существует единственный присоединенный оператор, удовлетворяющий тождеству (1)

2. Если $f(x, y) \equiv f(y, x)$, то φ – самосопряженный.

Доказательство. Пусть e – некоторый базис в \mathcal{E} , $x = eX$, $y = eY \implies$

$$f(x, y) = X^T F Y \equiv X^T (G_e A_\varphi) Y \iff F = G_e A_\varphi, \quad A_\varphi = G_e^{-1} F \quad (2)$$

Проверка самосопряженности для симметричности $f(x, y)$:

$$\forall x, y \in \mathcal{E} \quad (\varphi(x), y) = (y, \varphi(x)) = f(y, x) = f(x, y) = (x, \varphi(y))$$

□

Теорема. (О паре квадратичных форм).

Если $f(x)$, $g(x)$ – квадратичные формы на \mathcal{E} и $g > 0$, то в \mathcal{E} существует такой базис e' , что в новых координатах

$$f = \lambda_1 y_1^2 + \dots + \lambda_n y_n^2, \quad g = y_1^2 + \dots + y_n^2$$

Доказательство.

Обозначим $f(x, y)$ и $g(x, y)$ – симметричные билинейные функции:

$f(x, x) = f(x)$, $g(x, x) = g(x)$, F и G их матрицы в некотором базисе e .

Можно ввести в пространстве \mathcal{E} скалярное произведение $(x, y) := g(x, y)$

Пусть $\varphi : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ – линейный оператор, присоединенный к билинейной форме $f(x, y)$, т.е. $\forall x, y : f(x, y) = g(x, \varphi(y))$

Т.к. оператор φ самосопряженный, то по основной теореме о самосопряженных операторах в пространстве \mathcal{E} существует базис из собственных векторов для φ ортонормированный относительно скалярного произведения $g(x, y)$.

Пусть e' – этот базис, C – матрица перехода от e к e'

$$X = CY \implies g(y) = y_1^2 + \dots + y_n^2 = (y, y)$$

$$F' = C^T F C; \quad F = G A_\varphi; \quad A'_\varphi = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$G' = C^T G C = E \implies G C = (C^T)^{-1}$$

Тогда

$$C^{-1} A_\varphi C = C^{-1} G^{-1} F C = C^T F C = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \implies$$

$$f(y) = \lambda_1 y_1^2 + \dots + \lambda_n y_n^2$$

□

Замечание. $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ – собственные значения матрицы $A_\varphi = G^{-1}F$, т.е. они являются корнями уравнения $|A_\varphi - \lambda E| = 0$, т.е.

$$|G^{-1}F - \lambda E| = 0 \iff |GG^{-1}F - \lambda G| = |F - \lambda G| = 0$$

(λ -уравнение пары матриц F, G)

Для каждого корня λ_i надо решить систему уравнений

$$(G^{-1}F - \lambda_i E)X = 0 \iff (F - \lambda_i G)X = 0$$

□

Пример применения:

Найти наибольшие и наименьшие значения квадратичной формы $f(x)$ в \mathbb{R}^n при условии, что $g(x) = 1$, где $g(x)$ – положительно определенная квадратичная форма.

Решение: Можно найти такую замену переменных $X = CY$, что

$$f(x) = \lambda_1 y_1^2 + \dots + \lambda_n y_n^2 \quad g(y) = y_1^2 + \dots + y_n^2 = 1 \text{ – единичная сфера в } \mathbb{R}^n$$

Ответ: $f_{\max} = \max \lambda_i, \quad f_{\min} = \min \lambda_i$ (додумать)

§10. Полуторалинейные функции (формы.)

Пусть V – векторное пространство над полем \mathbb{C} .

Определение. Функция $\beta : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ называется полуторалинейной, если

1. $\forall x_1, x_2, y \in V$ вып. $\beta(x_1 + x_2, y) = \beta(x_1, y) + \beta(x_2, y)$ и
 $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ вып. $\beta(\lambda x, y) = \lambda \beta(x, y)$. Линейность по 1 аргументу.
2. $\beta(x, y_1 + y_2) = \beta(x, y_1) + \beta(x, y_2)$ и
 $\beta(x, \lambda y) = \bar{\lambda} \beta(x, y)$

В координатах:

$$\beta(x, y) = \beta\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{j=1}^n y_j e_j\right) = \sum_{i,j=1}^n \beta(x_i e_i, y_j e_j) = \sum_{i,j=1}^n \beta(e_i, e_j) x_i \bar{y}_j$$

$B_e = (\beta(e_i, e_j))$ – матрица формы β в базисе e .

$$\beta(x, y) = X^T B_e \bar{Y} \quad (1)$$

Квадратичная форма $q := \beta(x, x) \neq 0$.

$$q(x) = \sum_{i,j=1}^n b_{ij} x_i \bar{x}_j$$

Если $\beta_{ij} = 0$, при $i \neq j$, остается $b_{ij} = \beta(e_i, e_j)$

$$q(x) = \sum_{i=1}^n b_{ii} x_i \overline{(x_i)} = \sum_{i=1}^n b_{ii} |x_i|^2$$

Эрмитова форма (или эрмитово симметричная)

$$\forall x, y \in V \text{ вып. } \beta(y, x) = \overline{\beta(x, y)}$$

Тогда $\beta(x, x) = \overline{\beta(x, x)}$, т.е. $\forall x \in V \text{ вып. } q(x) = \beta(x, x) \in \mathbb{R}$

Задача. Для эрмитово квадратичной формы $q(x)$ существует единственная форма $\beta(x, y) : \beta(x, x) = q(x) \forall x \in V$.

Замечание. $\beta(x, y)$ эрмитова $\iff B_e^T = \overline{B_e} \iff \overline{B_e^T} = B_e$

Теорема. (О приведении эрмитово квадратичной формы к каноническому (нормальному) виду).

Для любой эрмитовой формы (полуторалинейной) существует базис, в котором $\beta(x, y) = \sum_{i=1}^n b_{ii} x_i \overline{y_i}$. Точнее,

$$\beta(x, y) = x_1 \overline{y_1} + \dots + x_p \overline{y_p} - x_{p+1} \overline{y_{p+1}} - \dots - x_{p+q} \overline{y_{p+q}},$$

где $p + q = \text{rk} B$. Соответственно $q(x) = |x_1|^2 + \dots + |x_p|^2 - |x_{p+1}|^2 - \dots - |x_{p+q}|^2$ (q и p единственны).

Определение. Эрмитова квадратичная форма положительно определенная, если $q(x) > 0 \forall x \neq 0$. Отрицательно определенная, если $q(x) < 0 \forall x \neq 0$. (Критерий Сильвестра сохраняются без изменений).

§11. Унитарные (эрмитовы) пространства.

Определение. Векторное пространство \mathcal{H} над полем \mathbb{C} называется унитарным, если на этом \mathcal{H} задано скалярное произведение (x, y) полуторалинейная форма (полуторалинейная по 2 аргументу), эрмитова: $(y, x) = \overline{(x, y)}$ и $(x, x) > 0, \forall x \neq 0$.

Определение. $|x| = \sqrt{(x, x)}$ – длина вектора.

Неравенство КБШ: $\forall x, y \in \mathcal{H} : |(x, y)| \leq |x| \cdot |y|$

$$\cos \varphi(x, y) = \frac{(x, y)}{|x| \cdot |y|} \in \mathbb{C}$$

$$(x, y) = 0 \iff x \perp y$$

Теорема. (Ортогонализация).

В \mathcal{H} существует ортогональный (и ортонормированный) базис.

Изменение матрицы полуторалинейной формы.

При замене базиса: $B' = C^T B \overline{C}$

$\beta(x, y) = X^T B \overline{Y}$ – в исходном базисе.

$$X = CX', Y = CY' \implies$$

$$\beta(x, y) = (CX')^T B \overline{(CY')} = (X')^T (C^T B \overline{C}) \overline{Y'} \equiv (X')^T B' \overline{Y'} \implies$$

$$B' = C^T B \overline{C}$$

Теорема. Если e и e' два О.Н.Б., то матрица перехода $C_{e \rightarrow e'}$ унитарно, т.е. если ее подвергнуть эрмитову сопряжению, то она превратится в обратную: $C_{e \rightarrow e'}^* = \overline{C}_{e \rightarrow e'}^T = C_{e \rightarrow e'}^{-1}$

Доказательство. По определению матрица перехода, $C = (e_1'^\uparrow, \dots, e_n'^\uparrow) \implies$

$$C^T = \begin{pmatrix} e_1' \\ \vdots \\ e_n' \end{pmatrix} \implies C^T \overline{C}_{ij} = e_i' e_j'^\uparrow$$

Т.к. базис e О.Н., то $e_i' e_j'^\uparrow = (e_i' e_j')$

Т.к. базис e' О.Н., то $(e_i' e_j') = \delta_{ij} \implies$

$$C^T \overline{C} = E \implies \overline{C^T \overline{C}} = \overline{E} = E \implies \overline{C}^T C = E \implies \overline{C}^T = C^{-1}$$

□

Процесс ортогонализации:

Если попарно ортогональные векторы e_1', \dots, e_{k-1}' ($k \geq 2$) уже построены, то

$$e_k' = e_k - \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i e_i \mid \cdot e_j' \text{ справа } (1 \leq j \leq k-1) \implies$$

$$(e_k', e_j') = (e_k, e_j') - \sum_{i=1}^{k-1} (\lambda_i e_i', e_j') = (e_k', e_j') - \lambda_j (e_j', e_j') \implies$$

$$\text{pr}_{\langle e_1', \dots, e_{k-1}' \rangle}(e_k) = \sum_{i=1}^{k-1} \frac{(e_k, e_i')}{(e_i', e_i')} e_i'$$

$$U^\perp = \{u \in \mathcal{H} \mid (x, u) = 0, \forall x \in U\}$$

$$U \subset \mathcal{H}, \quad \mathcal{H} = U \oplus U^\perp$$

§12. Линейные операторы в унитарном пространстве.

Пусть $\varphi : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ – линейный оператор (над \mathbb{C}).

1. Сопряженный оператор: $\forall x, y \in \mathcal{H} : (\varphi(x), y) = (x, \varphi^*(y))$

Матрица A_{φ^*} (в О.Н.Б.):

$$(\varphi(x), y) = (A_{\varphi}X)^T \bar{Y} = X^T A_{\varphi} \bar{Y}^T = X^T \overline{(A_{\varphi^*}Y)} = X^T \bar{A}_{\varphi^*} \bar{Y}$$

$$\forall X, Y \in \mathbb{C} \implies \bar{A}_{\varphi^*} = A_{\varphi}^T \iff A_{\varphi^*} = \bar{A}_{\varphi}^T = A_{\varphi}^*$$

2. Самосопряженный: $\varphi^* = \varphi \iff A_{\varphi} = A_{\varphi}^*$ (в любом О.Н.Б.), т.е. A_{φ} эрмитова.

3. Унитарный:

$$\forall x, y \in \mathcal{H} : (\varphi(x), \varphi(y)) = (x, y) \iff \text{в любом О.Н.Б.}$$

$$(A_{\varphi}X)^T \overline{(A_{\varphi}Y)} = X^T (A_{\varphi}^T \bar{A}_{\varphi}) \bar{Y} = X^T \bar{Y}, \quad \forall X, Y \in \mathbb{C} \iff$$

$$A_{\varphi}^T \bar{A}_{\varphi} = E \iff A_{\varphi}^* A_{\varphi} = E, \quad \text{т.е. } A_{\varphi} \text{ – унитарна.}$$

Следствие. Если φ – унитарный оператор, то $|\det A_{\varphi}| = 1$

Доказательство.

$$|E| = |\bar{A}_{\varphi}^T A_{\varphi}| = |\bar{A}_{\varphi}| |A_{\varphi}| = \overline{|A_{\varphi}|} |A_{\varphi}| = |\det A_{\varphi}|^2 = 1 \iff |\det A_{\varphi}| = 1$$

□

Свойства операторов:

Теорема. Если $\varphi : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ – самосопряженный оператор, то

1. Собственные значения $\lambda \in \mathbb{R}$
2. Собственные векторы, отвечающие различным собственным значениям перпендикулярны.
3. Если $U \subset \mathcal{H}$ инвариантно относительно φ , то U^{\perp} инвариантно.
4. В \mathcal{H} существует О.Н.Б. из собственных векторов для φ , и в нем

$$A_{\varphi} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad \forall i = 1, \dots, n, \quad \lambda_i \in \mathbb{R}$$

Доказательство.

1. Если $x \in \mathcal{H}$, $x \neq 0$: $\varphi(x) = \lambda x$, то

$$\begin{cases} (\varphi(x), x) = (\lambda x, x) = \lambda(x, x) \\ (x, \varphi(x)) = (x, \lambda x) = \bar{\lambda}(x, x) \end{cases} \implies \bar{\lambda} = \lambda \in \mathbb{R}$$

2. Пусть $\varphi(x) = \lambda x$, $x \neq 0$, $\varphi(y) = \mu y$, $y \neq 0$, $\lambda \neq \mu \xrightarrow{?} (x, y) = 0$

$$\text{Вычислим } \begin{cases} (\varphi(x), y) = \lambda(x, y) \\ (x, \varphi(y)) = (x, \mu y) = \bar{\mu}(x, y) = \mu(x, y) \end{cases} \implies$$

$$(x, y) \underbrace{(\lambda - \mu)}_{\neq 0} = 0 \implies (x, y) = 0$$

3. Пусть $x \in U$, $y \in U^\perp$. Надо доказать, что $(x, \varphi(y)) = 0$

По опр. $(x, \varphi(y)) = (\varphi(x), y) = 0$
 $\in U$

4. Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ – все различные собственные значения для φ . Возьмем, $U = \mathcal{H}_{\lambda_1}$ – собственное подпространство – оно инвариантно. $\implies U^\perp$ также инвариантно, $\mathcal{H} = U \oplus U^\perp$, собственные значения $\varphi|_{U^\perp}$ – это $\lambda_2, \dots, \lambda_s$.

Индукция по $\dim \mathcal{H}$: в U^\perp существует О.Н.Б., составленный из О.Н. базисов $\mathcal{H}_{\lambda_2}, \dots, \mathcal{H}_{\lambda_s}$. В U надо взять О.Н.Б. (произвольный базис ортогонализировать и нормировать).

□

Теорема. Если $\varphi : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ – унитарный оператор, то

1. Все собственные значения оператора φ , $|\lambda| = 1$
2. Собственные векторы, отвечающие различным собственным значениям перпендикулярны.
3. Если $\varphi(U) = U$, то $\varphi(U^\perp) = U^\perp$
4. В \mathcal{H} существует О.Н.Б. из собственных векторов для φ , и в нем

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} e^{i\alpha_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{i\alpha_n} \end{pmatrix}, \quad \alpha_i \in \mathbb{R}$$

Доказательство.

1. Если $\varphi(x) = \lambda x$, $x \neq 0$, то

$$(\varphi(x), \varphi(x)) = \lambda \bar{\lambda} (x, x) = (x, x) \neq 0 \implies \lambda \bar{\lambda} = |\lambda|^2 = 1 \implies |\lambda| = 1$$

2. Если $\varphi(x) = \lambda x$, $\varphi(y) = \mu y$, $x, y \neq 0$, $\lambda \neq \mu$:

$$(\varphi(x), \varphi(y)) = \lambda \bar{\mu} (x, y) = (x, y) \implies (x, y) (\lambda \bar{\mu} - 1) = 0 \implies (x, y) = 0$$

$$\neq 0$$

Либо $(x, y) = 0$, либо $\lambda \bar{\mu} = 1$, т.е. $\mu = \lambda$ – противоречие.

$$(\lambda \neq \mu \iff \bar{\lambda} \neq \bar{\mu} \implies \lambda \bar{\lambda} \neq \lambda \bar{\mu} \neq 1)$$

3. Пусть $x \in U$, $y \in U^\perp$, надо доказать, что $(x, \varphi(y)) = 0$

Вычислим

$$(\varphi^{-1}(x), y) = (\varphi(\varphi^{-1}(x)), \varphi(y)) = (x, \varphi(y)) = 0$$

Т.к. $x \in U$, то $\varphi^{-1}(x) \in U$

Комментарий: унитарный оператор невырожден (обратим).

В О.Н.Б. A_φ унитарна $\implies |\det A_\varphi| = 1 \neq 0$

По определению подпространства, $\varphi|_U : U \mapsto U \implies \varphi|_U$ биективно, в частности, если $x \in U$, то $\varphi^{-1}(x) \in U$

4. Дословно повторяет доказательство п.4 теоремы для самосопряженного оператора (с заменой $\lambda \in \mathbb{R}$ на $|\lambda| = 1$).

□

Теорема. (О полярном разложении). Любая невырожденная матрица $A \in M_n(\mathbb{C})$ единственным образом представляется в виде произведения: $A = B \cdot U$, где $B^* = B$ – эрмитова матрица с положительными собственными значениями, U – унитарная матрица.

Второй вариант полярного разложения:

$$\underbrace{A^*}_{A^T} = U^* B^* = U^{-1} B \implies A A^* = B^2, \text{ и т.д., а также } A = U' B'$$

Теорема. Для любой эрмитовой квадратичной формы $q(x)$ на унитарном пространстве существует О.Н.Б., в котором эта форма имеет вид: $q = \lambda_1 |y_1|^2 + \dots + \lambda_n |y_n|^2$, где $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ – собственные значения матрицы B .

Глава IV. Аффинные пространства.

§1. Основные определения и свойства.

Определение. Аффинное пространство – это пара (\mathbb{A}, V) , где \mathbb{A} – множество точек, V – векторное пространство (над полем F), и выполнены следующие аксиомы: определена операция "прибавления" (откладывания) вектора к точке, т.е. $\forall p \in \mathbb{A}, v \in V$ определим единственную точку $q \in \mathbb{A} : q = p + v$,
($\mathbb{A} \times V \mapsto \mathbb{A}$)

1. $\forall p \in \mathbb{A}, \forall u, v \in V : p + (u + v) = (p + u) + v$
2. $\forall p \in \mathbb{A}, p + 0 = p$
3. $\forall p, q \in \mathbb{A} \exists v \in V : p + v = q$ (обозн. $v = \overrightarrow{pq}$)

Заметим, что размерностью пространства \mathbb{A} , считается размерность пространства V . Из аксиомы 3 следует, что имеется биекция между \mathbb{A} и V .

Фиксируем $p, \forall v \in V, \{p + v \mid v \in V\}$.

Пример: $\mathbb{A} = V$, точки-радиус-векторы. Если $q = p + v$, то $v = \overrightarrow{pq}$, а также можно писать $v = q - p$.

Аффинная система координат: $\{0; e\}$, e – базис в V .

$\forall p \in \mathbb{A}$ – координаты точки p – это координаты вектора \overrightarrow{Op} в базисе e .

Если $p(x_1, \dots, x_n)$, $q(y_1, \dots, y_n)$, то

$$\overrightarrow{pq} = q - p = \sum_{i=1}^n (y_i - x_i) e_i$$

Вместо системы координат можно задать координаты каких-либо точек p_0, \dots, p_n в общем положении (аффинно независимые), т.е. векторы $\overrightarrow{p_0p_1}, \dots, \overrightarrow{p_0p_n}$ ЛНЗ

(является базисом в V).

Определение. Барицентрическая комбинация точек p_0, \dots, p_m ($m \leq n = \dim \mathbb{A} = \dim V$) с коэффициентами $\lambda_0, \dots, \lambda_m \in F$ с условием: $\sum_{i=0}^m \lambda_i = 1$. Определим $\forall p \in \mathbb{A}$

$$\sum_{i=0}^m := p + \sum_{i=0}^m \lambda_i \overrightarrow{pp_i} = p + \sum_{i=0}^m \lambda_i (p_i - p) \quad (1)$$

Лемма. Выражение (1) не зависит от выбора точки p (при усл., что $\sum_{i=0}^m \lambda_i = 1$).

Доказательство. Возьмем точку $q = p + v$, для некоторого $v \in V$. Тогда

$$\begin{aligned} q + \sum_{i=0}^m \lambda_i \overrightarrow{qp_i} &= q + \sum_{i=0}^m \lambda_i (p_i - q) = q + \sum_{i=0}^m \lambda_i (p_i - p - v) = \\ &= p + v + \sum_{i=0}^m \lambda_i (p_i - p) - \sum_{i=0}^m \lambda_i v = \sum_{i=0}^m \lambda_i (p_i - p) \end{aligned}$$

□

Если $m = n$ и векторы $\overrightarrow{p_0p_1}, \dots, \overrightarrow{p_0p_n}$ ЛНЗ, то любая точка $p = \sum_{i=0}^n x_i p_i$, причем $\sum_{i=0}^n x_i = 1$, точка $\overrightarrow{p_0p}$ имеет координаты (x_1, \dots, x_n) , то $x_0 = 1 - \sum_{i=0}^n x_i$, (x_0, \dots, x_n) – барицентрические координаты точки p .

Изменение декартовых координат точек при замене системы координат.

Пусть $\{O; e\}$ – старая система координат, точка z имеет координаты X (столбец координат), $\{O', e'\}$ – новая система координат, $e' = e C_{e \rightarrow e'}$

$$O' \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = X^0 \implies X = C X' + X^0 \quad (2)$$

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'P} \implies X = X^0 + CX'$$

Можно ввести "аффинную матрицу перехода"

$$\tilde{C} = \begin{pmatrix} C & X^0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

и "аффинный столбец"

$$\tilde{X} = \begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix},$$

тогда

$$\tilde{C}\tilde{X}' = CX' + X^0 = \tilde{X}$$

Таким образом, равенство (2) $\iff \tilde{C}\tilde{X}' = \tilde{X}$ (2')

§2. Аффинные подпространства (плоскости или линейные многообразия).

Наблюдение. Пусть (\mathbb{A}, V) – аффинное пространство, и в некоторой системе координат рассмотрим множество точек, координаты которых удовлетворяют совместной системе линейных уравнений: $AX = b$.

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} - \text{координаты точки } p; A_{n \times n}; b \in F^n$$

Тогда любое решение представляется в виде $X = X_{\text{част}} + Y_{\text{одн}}$, где $Y_{\text{одн}}$ – общее решение соответствующее ассоциированной ОСЛУ $AY = 0$.

Обозн. $U\{u = \sum_{i=1}^n y_i e_i \mid AY = 0\}$ – подпространство в V , и

$\pi := \{p_0 + u \mid u \in U\} = p_0 + U$ – смежный класс пространства V/U , если отождествить p_0 с ее радиус-вектором.

Определение. Аффинная плоскость $\pi = p_0 + U$, где U – некоторое подпространство в V , $p_0 \in \mathbb{A}$ (U – направляющая плоскость для π). Если $\dim U = m$, то при $m = 0$ – одна точка, при $m = 1$ – прямая с направляющим вектором a , если $m = n - 1$ – гиперплоскость.

Утверждение. Для любой точки $q \in \pi$, $p + U = p_0 + U = \pi$ (т.е. определение плоскости π не зависит от выбора начальной точки).

Доказательство. $q = p_0 + u_0$, $u_0 \in U$

$$q = q + U = p_0 + (u_0 + U) = p_0 + U$$

□

U можно определить как $\{pq \mid \forall p, q \in \pi\}$ и $\overline{pq} = q - p = u_0 - u_1 \in U$.

Следствие. Для аффинной плоскости $\pi = p_0 + U$ существует система уравнений $AX = b$, множество решений которой (в координатах) совпадает с π .

Доказательство. Введем систему координат $\{O, e\}$, пусть $\dim U = m$.

Как известно, существует матрица $A_{m \times n}$, такая что $U = \{AY = 0\}$.

Если p_0 имеет координаты в виде столбца X^0 , то обозначим $b = AX^0$.

Для любой точки $p \in \pi$ имеем: $p = p_0 + U$, т.е. в координатах:

$$X = X^0 + Y \implies AX = AX^0 + AY = b + 0 = b$$

□

Взаимное расположение двух плоскостей.

Пусть $\pi_1 = p_1 + U_1$, $\pi_2 = p_2 + U_2$, $U_1, U_2 \subseteq V$.

Определение. π_1 , π_2 называются параллельными:

В узком смысле, если $U_1 = U_2$ (направляющие подпространства совпадают).

В широком смысле, если $U_1 \subseteq U_2$ или $U_2 \subseteq U_1$.

Утверждение. $\pi = \pi_1 \cap \pi_2$ либо пусто, либо является плоскостью с направляющим подпространством $U = U_1 \cap U_2$, точнее $\pi = r + U$, где $r \in \pi_1 \cap \pi_2$.

Доказательство. Если $\pi_1 \cap \pi_2 = \pi \neq \emptyset$, возьмем точку $r \in \pi_1 \cap \pi_2$, тогда

$$\pi_1 = r + U_1, \pi_2 = r + U_2 \implies \pi_1 \cap \pi_2 = r + (U_1 \cap U_2)$$

Возьмем точку $d \in \pi_1 \cap \pi_2 \implies d = r + u_1 = r + u_2$, $u_1 \in U_1$, $u_2 \in U_2 \implies$

$$u_1 = u_2 \in U_1 \cap U_2 \implies d \in r + (U_1 \cap U_2)$$

Таким образом, либо $\pi_1 \cap \pi_2 = \emptyset$, либо $\dim(\pi_1 \cap \pi_2) = \dim(U_1 \cap U_2)$

□

В общем случае, $\pi_1 \cup \pi_2$ плоскостью не будет.

Определение. Аффинная оболочка плоскостей $\pi_1, \pi_2 : \langle \pi_1, \pi_2 \rangle$ – наименьшее по включению плоскость, содержащая обе эти плоскости.

Утверждение. $\langle \pi_1, \pi_2 \rangle = p_0 + \{\overrightarrow{p_1 p_2} \mid p_1 \in \pi_1, p_2 \in \pi_2\}$, $p_0 \in \pi_1$ или $p_0 \in \pi_2$.

Доказательство. Таким образом, $\langle \pi_1, \pi_2 \rangle$ – плоскость, с направляющим подпространством вида $U = \langle p_1 p_2 \mid p_1 \in \pi_1, p_2 \in \pi_2 \rangle$. Если $p \in \langle \pi_1, \pi_2 \rangle$, то точки вида $p_0 + \overrightarrow{p_1 p_2}$ принадлежат любой плоскости, содержащей $\langle \pi_1, \pi_2 \rangle \implies p_0 + U$ – наименьшая плоскость, содержащая $\langle \pi_1, \pi_2 \rangle$.

□

Теорема. $\langle \pi_1, \pi_2 \rangle = p_1 + \langle \overrightarrow{p_1 p_2}, U_1 + U_2 \rangle$

1. $\pi_1 \cap \pi_2 \neq \emptyset \iff \overrightarrow{p_1 p_2} \in U_1 + U_2$ и при этом $\dim \langle \pi_1, \pi_2 \rangle = \dim(U_1 + U_2)$.

2. $\pi_1 \cap \pi_2 = \emptyset$, то $\dim \langle \pi_1, \pi_2 \rangle = \dim(U_1 + U_2) + 1$.

Доказательство. Обозначим $\pi = p_1 + \langle \overrightarrow{p_1 p_2}, U_1 + U_2 \rangle$.

Ясно, что $\pi_1 \subseteq \pi$, $\pi_2 \subseteq \pi \implies \langle \pi_1, \pi_2 \rangle \subseteq \pi$ (как наименьшая плоскость.)

Обратное включение $\langle \pi_1, \pi_2 \rangle = p_1 + W$, $W \subseteq V$

Т.к. $p_2 \in \langle \pi_1, \pi_2 \rangle \implies \overrightarrow{p_1 p_2} \in W$. Также ясно, что $\forall u_1 \in U_1$, $p_1 + u_1 \in \pi_1 \subseteq \pi$ и $\forall u_2 \in U_2$, $p_2 + u_2 \in \pi_2 \subseteq \pi \implies \overrightarrow{p_1 p_2} + u_2 \in W \implies u_2 \in W$.

Таким образом, $\langle \overrightarrow{p_1 p_2}, U_1 + U_2 \rangle \subseteq W \implies \pi \subseteq \langle \pi_1, \pi_2 \rangle$ – доказали равенство.

1. Если $\pi_1 \cap \pi_2 \neq \emptyset$, то $\overrightarrow{p_1 p_2} \in U_1 + U_2 : \exists p \in \pi_1 \cap \pi_2 \text{ r.a. } \langle \overrightarrow{p_1 p_2}, U_1 + U_2 \rangle = U_1 + U_2$
2. Если $\pi_1 \cap \pi_2 = \emptyset$, то $\overrightarrow{p_1 p_2} \notin U_1 + U_2 \implies \dim \langle \overrightarrow{p_1 p_2}, U_1 + U_2 \rangle = \dim(U_1 + U_2) + 1$

□

Утверждение. Для двух плоскостей $\pi_1, \pi_2 \subset \mathbb{A}$ возможно одно из трех расположений:

1. $\pi_1 \cap \pi_2 \neq \emptyset$,
2. $\pi_1 \cap \pi_2 = \emptyset$ и $\pi_1 \parallel \pi_2$,
3. Не выполнены 1. и 2. пункты: $\pi_1 \cap \pi_2 = \emptyset$ и $\pi_1 \nparallel \pi_2$ – скрещиваются.

§3. Аффинные отображения.

Пусть $\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2$ – аффинные пространства над векторными пространствами V_1, V_2 (поле F над которым они определены одно и тоже).

Определение. отображение $\Phi : \mathbb{A}_1 \mapsto \mathbb{A}_2$ – называется аффинным (или аффинно линейным), если существует линейное отображение линейных пространств $\varphi : V_1 \mapsto V_2$, т.ч. $\forall a, b \in \mathbb{A}_\# : \overrightarrow{\Phi(a)\Phi(b)} = \varphi(\overrightarrow{ab})$ (1)

Эквивалентно: $\Phi(b) = \Phi(a) + \varphi(\overrightarrow{ab})$ (1')

Замечание. Если фиксировать точку a , а точку $b \in \mathbb{A}_1$ менять, то вектор \overrightarrow{ab} может быть любым вектором из $V_1 \implies$ для отображения Φ его линейная часть определена однозначно: $\forall v \in V_1 \exists! b \in \mathbb{A} : \overrightarrow{ab} = \vec{v} \implies \varphi(v) = \overrightarrow{\Phi(a)\Phi(b)}$ – определена однозначно.

Теорема.

1. Пусть $\mathbb{A}_1 \xrightarrow{\Phi_1} \mathbb{A}_2 \xrightarrow{\Phi_2} \mathbb{A}_3$, Φ_1, Φ_2 – аффинные отображения, тогда $\Phi_2 \circ \Phi_1$ – аффинное отображение с линейной частью $\Phi_1 \cdot \Phi_2$.
2. $\Phi : \mathbb{A}_1 \mapsto \mathbb{A}_2$ биективно (невырождено) \iff его линейная часть φ биективна, притом Φ^{-1} имеет линейную часть Φ^{-1} .

Координатная запись: $\Phi : \mathbb{A}_1 \mapsto \mathbb{A}_2$ – аффинное отображение.

$\{p_1; e\}$ – с.к. в \mathbb{A}_1 $\dim A_1 = n$,

$\{p_2; e\}$ – с.к. в \mathbb{A}_2 $\dim A_2 = m$,

X – столбец координат любой точки $p \in A_1$, X_0 – столбец координат точки $\Phi(p_1)$ в системе координат $\{p_2; f\}$, $A = A_\varphi$ – матрица отображения φ в базисах e, f , Y – столбец координат точки $\Phi(p)$.

$$\text{Тогда } \Phi(p) = \Phi(p_1) + \varphi(\overrightarrow{p_1 p}) = p_2 + \overrightarrow{p_2 \Phi(p_1)} + \varphi(\overrightarrow{p_1 p}) \implies Y = X_0 + AX \quad (2)$$

$$\text{В подробной записи: } y_i = x_i^0 + \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j, \quad i = 1, \dots, m \quad (2) \implies dy_i = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} dx_j$$

Обозначим

$$DY = \begin{pmatrix} dy_1 \\ \vdots \\ dy_m \end{pmatrix} = A \cdot dX = A \cdot \begin{pmatrix} dx_1 \\ \vdots \\ dx_n \end{pmatrix}$$

Мы видим, что (в координатах) $\varphi = D\Phi, D\Phi : V_1 \mapsto V_2$

Доказательство.

1. $\mathbb{A}_1 \xrightarrow{\Phi_1} \mathbb{A}_2 \xrightarrow{\Phi_2} \mathbb{A}_3$, Φ_1, Φ_2 – аффинные с линейными частями φ_1, φ_2 , то $\Phi_2 \circ \Phi_1$ – аффинное с линейной частью $\varphi_2 \circ \varphi_1$.

$$\forall a_1 \in \mathbb{A}_1, \forall v_1 \in V_1, \Phi_1(a_1 + v_1) = \Phi_1(a_1) + \varphi_1(v_1),$$

$$\begin{aligned} \Phi_2(\Phi_1(a_1 + v_1)) &= \Phi_2(\Phi_1(a_1) + \varphi_1(v_1)) = \Phi_2(\Phi_1(a_1)) + \varphi_2(\varphi_1(v_1)) = \\ &= (\Phi_2 \circ \Phi_1)(a_1) + (\varphi_2 \circ \varphi_1)(v_1) \implies \end{aligned}$$

$\Phi_2 \circ \Phi_1$ – аффинное отображение, его линейная часть $\varphi_2 \circ \varphi_1$

2. $\mathbb{A}_1 \xrightarrow{\Phi} \mathbb{A}_2 \xrightarrow{\Phi^{-1}} \mathbb{A}_1$, Φ^{-1} – тоже аффинное?

отображение Φ биективно \iff оно обратимо. Обозначим $\Phi' : \mathbb{A}_2 \mapsto \mathbb{A}_1$,

$$\Phi'_0 \Phi = \text{Id}_{\mathbb{A}_1} \quad \Phi(a_1 + v) = \Phi(a_1) + \varphi(v),$$

$$\Phi'(\Phi(a_1 + v)) = \Phi'(\Phi(a_1)) + (\varphi' \varphi)(v) = a_1 + v \iff$$

$$\varphi' \varphi = \text{Id} = \varepsilon, \text{ т.е. } \varphi^{-1} \text{ – левый обратимый к } \varphi$$

$\Phi'(\Phi(a_1)) = a_1$, при условии, что φ обратимо, Φ' будет обратным к Φ , если $\Phi'(\Phi(a_1)) = a_1$, $\varphi' = \varphi^{-1}$ (нужно было бы рассмотреть также $\Phi \circ \Phi'$)

□

Замечание. Можно ввести $\tilde{X} = \begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix}$, $\tilde{Y} = \begin{pmatrix} Y \\ 1 \end{pmatrix}$, блочную матрицу

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A & X_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ тогда } (2) \iff \tilde{Y} = \tilde{A} \cdot \tilde{X} \quad (3)$$

§4. Аффинные преобразования.

Определение. Аффинное преобразование $\Phi : \mathbb{A} \mapsto \mathbb{A}$ – это аффинное отображение \mathbb{A} в \mathbb{A} . Тогда вторая система координат совпадает с первой.

Примеры:

1. Параллельный перенос на вектор $v \in V$, $t_v(a) = a + v$, $\forall a \in \mathbb{A}$. Ясно, что линейная часть это Id . Очевидно, $\forall v_1, v_2$ выполнено $t_{v_1} \circ t_{v_2} = t_{v_1} \cdot t_{v_2} = t_{v_1+v_2}$
2. Гомотетия с центром в точке $0 \in \mathbb{A}$ и коэффициентом $\lambda \neq 0$:

$$\forall v \in V, \Phi(0 + v) = 0 + \lambda v \implies D\Phi = \lambda \cdot \text{Id}$$

$\lambda = -1$ – это центральная симметрия.

Теорема. Любое обратимое (невырожденное) аффинное преобразование $\Phi : \mathbb{A} \mapsto \mathbb{A}$ единственным образом представляется в виде композиции: $\Phi = t_v \circ \psi$, где a – фиксированная точка из \mathbb{A} , $\psi(a) = a$.

Доказательство. Обозначим $v = \overrightarrow{a\Phi(a)}$. Рассмотрим преобразование

$$\psi = t_v^{-1} \cdot \Phi = t_{-v} \cdot \Phi$$

Тогда $\psi(a) = t_{-v}(\Phi(a)) = \Phi(a) - v = a + v - v = a \implies \Phi = t_v \cdot \psi$

Единственность: если $\Phi = t_v \cdot \psi = t_{v'} \cdot \psi'$, $\psi(a) = \psi'(a) \implies$

$$t_{v-v'} = \psi' \psi^{-1} \implies t_{v-v'}(a) = a \implies v - v' = 0 \implies$$

$$v = v' \implies t_v = t_{v'} \implies \psi' = \psi$$

□

Теорема. Для любых наборов точек $\{a_0, a_1, \dots, a_n\}$ и $\{b_0, b_1, \dots, b_n\}$ в n -мерном аффинном пространстве \mathbb{A} , причем таких, что a_0, a_1, \dots, a_n аффинно независимы (находятся в общем положении) существует единственное аффинное преобразование $\Phi : \mathbb{A} \mapsto \mathbb{A}$, такое что $\Phi(a_i) = b_i$, при $i = 0, \dots, n$. Если также точки $\{b_0, \dots, b_n\}$ аффинно независимы, то Φ биективно (невырождено).

Доказательство. По условию, $\{\overrightarrow{a_0 a_1}, \dots, \overrightarrow{a_0 a_n}\}$ – базис в пространстве V , то существует единственный линейный оператор $\varphi : V \mapsto V$, такой что $\varphi(\overrightarrow{a_0 a_i}) = \overrightarrow{b_0 b_i}$, тогда искомое $\forall v \in V$, $\Phi(a_0 + v) = b_0 + \varphi(v)$.

Если также векторы $\{\overrightarrow{b_0 b_1}, \dots, \overrightarrow{b_0 b_n}\}$ – базис, то φ невырожденный оператор $\implies \Phi$ биективно.

§5. Аффинные евклидовы пространства (точечные евклидовы пространства.)

Определение. Аффинное пространство (\mathbb{A}, V) называется евклидовым (точечным) пространством, если V – евклидово векторное пространство.

Определение. Расстояние между точками $\rho(x, y) := |\vec{xy}| = \sqrt{(\vec{xy}, \vec{xy})}$
 $x, y \in \mathbb{A}$

Упражнение. Так введенное расстояние удовлетворяет всем условиям из определения метрики.

Можно рассматривать систему координат (O, e) , где e – О.Н.Б. в V – она называется прямоугольной (ортонормированной) \Rightarrow

$$\rho(x, y) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + \dots + (y_n - x_n)^2}$$

Определение. Аффинные евклидовы пространства $(\mathbb{A}_1, V_1), (\mathbb{A}_2, V_2)$ называются изоморфными, если существует биективное аффинное отображение $\Phi : \mathbb{A}_1 \rightarrow \mathbb{A}_2$, такое что $\forall a, b \in \mathbb{A}_1, \rho(\Phi(a), \Phi(b)) = \rho_1(a, b)$ такое Φ называется изоморфизмом.

Теорема. Если $\dim \mathbb{A}_1 = \dim \mathbb{A}_2 (= n)$, то они изоморфны.

Доказательство. Фиксируем в \mathbb{A}_1 и \mathbb{A}_2 прямоугольные системы координат: $\{O; e\}, \{O'; e'\}$. Определим линейное отображение $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$ по правилу: $\varphi(\sum_{i=1}^n x_i e_i) := \sum_{i=1}^n x_i e'_i$ – оно линейное и биективное, тогда можно определить отображение $\Phi : \mathbb{A}_1 \rightarrow \mathbb{A}_2$, такое что $\Phi(a + v) = O' + \varphi(v)$, тогда $O' = \Phi(O)$. Для любой точки $a \in \mathbb{A}_1$, точка $a' = \Phi(a)$ будет иметь по построению те же координаты, что и точка a в системе координат своего пространства $\Rightarrow \rho_1(a, b) = \sqrt{\sum_i (b_i - a_i)^2} = \rho_2(a', b')$ □

Утверждение. Верно и обратное.

Расстояние и угол между аффинными плоскостями:

Пусть $\pi_1 = p_1 + U_1, \pi_2 = p_2 + U_2$

Определение. Расстояние: $\rho(\pi_1, \pi_2) = \inf\{\rho(x, y) \mid x \in \pi_1, y \in \pi_2\}$

Угол: $\alpha(\pi_1, \pi_2) = \inf\{\alpha(u_1, u_2) \mid u_1 \in U_1, u_2 \in U_2\}$. В частности, $\pi_1 \perp \pi_2$, если этот угол равен $\frac{\pi}{2}$ радиан.

Теорема. Если $\pi_1 = p_1 + U_1$, $\pi_2 = p_2 + U_2$, U_1, U_2 – подпространства в V , то $\rho(\pi_1, \pi_2)$ равно длине ортогональной составляющей вектора $\overrightarrow{p_1 p_2}$ относительно $U_1 + U_2$. Замечание: если $\pi_1 \cap \pi_2 \neq \emptyset$, то $\overrightarrow{p_1 p_2} \in U_1 + U_2 \implies \overrightarrow{p_1 p_2}_\perp = 0$, и $\rho(\pi_1, \pi_2) = 0$

Доказательство. Обозначим $W = U_1 + U_2$, тогда $V = W \oplus W^\perp$, соответственно $\forall v \in V$, $v = v_\parallel + v_\perp$, где $v_\parallel \in W$ – проекция, $v_\perp \in W^\perp$ – ортогональная составляющая. В качестве v возьмем $v = \overrightarrow{p_1 p_2}$, $\rho(\pi_1, \pi_2) \stackrel{?}{=} |v_\perp|$. Выберем для любой точки $x = p_1 + u_1 \in \pi_1$, $y = p_2 + u_2 \in \pi_2$

$$\rho^2(x, y) = |x - y|^2 = |\overrightarrow{p_1 p_2} + u_1 - u_2|^2 = |(v_\parallel + u_2 - u_1) + \underbrace{v_\perp}_{\in W^\perp}|^2 =$$

$$\stackrel{\text{Th. Пифагора}}{=} |v_\parallel + u_2 - u_1|^2 + |v_\perp|^2 \geq |v_\perp|^2$$

Причем равенство достигается, если $v_\parallel = u_1 - u_2$, т.к. $v_\parallel \in U_1 + U_2$, то также $u_1 \in U_1$ и $u_2 \in U_2$ найдутся. □

Ортогональные преобразования.

Определение. Пусть (\mathbb{A}, V) – евклидово пространство. Аффинное преобразование $\Phi : \mathbb{A} \mapsto \mathbb{A}$ называется ортогональным (или движением), если его линейная часть $\varphi = D\Phi$ – ортогональный оператор в V , т.е. $\forall a, b \in \mathbb{A}$, $\rho(\Phi(a), \Phi(b)) = \rho(a, b)$, т.е. $|\overrightarrow{\Phi(a)\Phi(b)}| = |\overrightarrow{ab}| \iff \varphi$ сохраняет длины.

Из определения следует, что Φ биективно.

Задача. В определении требование аффинности можно отбросить. (Возникает третий термин: изометрия).

В прямоугольной системе координат $\{O, e\}$ пусть $X_0 = \Phi(O)$, X – столбец координат произвольной точки, Y – столбец координат ее образа. Тогда

$$Y = AX + X_0, \text{ причем матрица } A \text{ ортогональна.}$$

У ортогональной матрицы $\det A = \pm 1$, если $\det A = 1$, то Φ – собственное преобразование, если $\det A = -1$, то Φ – несобственное преобразование.

Теорема. (О разложении невырожденного аффинного преобразования.)

Для любого движения $\Phi : \mathbb{A} \mapsto \mathbb{A}$ с линейной частью φ найдется такой вектор $u \in V$: $\varphi(u) = u$ (остается неподвижным под действием φ), а $\Phi = t_u \cdot \psi$, где ψ имеет неподвижную точку. Замечание: не исключено, что $u = 0$.

Доказательство. Пусть $a \in \mathbb{A}$ – произвольная точка, обозначим $v = \overrightarrow{a\Phi(a)}$. Обозначим $U = \{u \in V \mid \varphi(u) = u\}$ – подпространство неподвижных точек. Если существует $\lambda = 1$, то $U \neq \{0\}$ – собственное подпространство, иначе $U = \{0\}$. Обозначим $W = U^\perp$ (при $U \neq \{0\}$) $\implies v = u + w$ для подходящих $u \in U, w \in W = U^\perp$. Рассмотрим преобразование $\psi = t_u^{-1} \cdot \Phi = t_{-u} \cdot \Phi$. Докажем, что у ψ есть неподвижная точка. Будем искать ее в виде $b = a + w'$, где $w' \in U^\perp$. Вычислим значение ψ в этой точке

$$\begin{aligned}\psi(a + w') &= (t_{-u} \cdot \Phi)(a + w') = t_{-u}(\Phi(a) + \varphi(w')) = \\ &= t_{-u}(a + v + \varphi(w')) = a + v - u + \varphi(w') = a + w + \varphi(w') = \\ &= a + w + w' + (\varphi(w') - w') \stackrel{?!}{=} a + w'\end{aligned}$$

Это будет так если выполняется $\varphi(w') - w' = -w$, или что равносильно $(\varphi - \varepsilon)(w') = -w$. Но $(\varphi - \varepsilon)(w') = (\varphi - \varepsilon)|_W(w')$, на W , $\varepsilon = \text{Id}$. Оператор $\varphi - \varepsilon$ обратим $\implies w' = -(\varphi - \varepsilon)^{-1}(w) \implies \psi(b) = b$. \square

Комментарий к теореме: Для любого аффинного преобразования $\Phi = t_u \cdot \psi$ (ψ имеет неподвижную точку.)

Из доказательства: если $\lambda = 1$, u – собственный вектор для $\varphi : \varphi(u) = u$, $u \neq 0$, то все точки прямой $l = b + \langle u \rangle$ неподвижны, т.к.

$$\psi(b) = b, \quad \psi(b + t_u) = \psi(b) + t\varphi(u) = \psi(b) + t_u = b + t_u$$

Эти наблюдения можно использовать, чтобы классифицировать движение при $n = 2$ и 3 .

§6. Аффинно-квадратичные функции. Квадрики.

Считаем, что $F = \mathbb{R}$ или \mathbb{C} (большинство результатов верно для любого поля F , $\text{char} F \neq 2$).

Определение. $Q : \mathbb{A} \longrightarrow F$ называется аффинно-квадратичной, если для любой точки $O \in \mathbb{A}$ существует квадратичная функция $q : V \longrightarrow F$ и линейная функция $l : V \longrightarrow F$, такие что $\forall v \in V$ выполнено:

$$Q(O + v) = Q(O) + q(v) + 2l(v) \quad (1)$$

По определению $q \neq 0$

В аффинной системе координат $\{O; e\}$, в которой $a(x_1, \dots, x_n)$:

$$Q(a) = Q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^n b_{ij}x_i x_j + 2 \sum_{i=1}^n a_i x_i + c \quad (2)$$

Где B – матрица квадратичной формы q в базисе e , $c = Q(0)$, $\vec{a} = (a_1, \dots, a_n)$ – коэффициенты формы l .

$Q(x_1, \dots, x_n)$ – аффинно-квадратичная форма.

Изменение коэффициентов при замене системы координат.

$\{O; e\} \mapsto \{O', e'\}$. $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ – координаты точки a в старой системе координат, X' – в новой.

$\tilde{X} = \begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix}$, вводили блочную матрицу перехода $\tilde{C} = \begin{pmatrix} C & X_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, где $C = C_{e \mapsto e'}$, X_0 – столбец координат точки O' , $O = (\underbrace{0, \dots, 0}_n)$.

Можно ввести блочную матрицу $\tilde{B} = \begin{pmatrix} B & a^\uparrow \\ a^T & C \end{pmatrix}$, $a^\uparrow = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$, $a^T = \vec{a}$

Тогда $\tilde{B}' = \begin{pmatrix} B' & a'^\uparrow \\ a'^T & C' \end{pmatrix} = \tilde{C}^T \tilde{B} \tilde{C}$

При умножении блочных матриц: $B' = C^T B C$,

$$a'^\uparrow = C^T (B X_0 + a^\uparrow), c' = Q(x_1^0, \dots, x_n^0) = Q(O')$$

Если базис не менять, то $C = E$, $a'^\uparrow = B X_0 + a$ (3)

Из (3) видно, что если $\exists X_0 : B X_0 = -a^\uparrow$, то $l' = 0$, и Q приобретает вид:

$$\forall v \in V \text{ выполнено } Q(O' + v) = Q(O') + q(-v) = Q(O') + q(v) = Q(O' + v)$$

Точки $O' + v$ и $O' - v$ симметричны относительно точки O' .

Определение. Точка O' – центр квадратичной функции Q , если $\forall v \in V : Q(O' + v) = Q(O' - v)$. Система для нахождения центра: $B X = -a^\uparrow$ (3)

Обозначим $C(Q)$ – множество центров, то

$$C(Q) = \begin{cases} \text{Единственная точка } O', \text{ если } \text{rk} B = n \iff |B| \neq 0 \\ \text{Является плоскостью } \dim = n - \text{rk} B > 0 \\ \emptyset \end{cases}$$

Утверждение. Если O_1, O_2 – центры аффинно-квадратичных функций Q , то $Q(O_1) = Q(O_2)$.

Доказательство. $Q(O_2) = Q(O_1) + q(\overrightarrow{O_1O_2}) = Q(O_2) + q(\overrightarrow{O_2O_1}) + q(O_1O_2) \implies$
 $q(\overrightarrow{O_1O_2}) = -q(\overrightarrow{O_1O_2}) \implies q(\overrightarrow{O_1O_2}) = 0 \text{ (char } F \neq 2) \implies Q(O_2) = Q(O_1)$

□

Теорема. Любую аффинно-квадратичную форму $Q : \mathbb{A} \longrightarrow F$ можно привести заменой координат к одному из видов:

1. $Q(O + v) = \sum_{i=1}^r \alpha_i x_i^2 + \alpha_{r+1} \quad (\text{I})$
2. $Q(O + v) = \sum_{i=1}^r \alpha_i x_i^2 + 2x_{r+1} \quad (\text{II}), \text{ где } r = \text{rk} B, \text{ причем } \prod_{i=1}^r \alpha_i \neq 0$

Доказательство. Для формы $q(x)$ существует базис e' , в котором

$$q(x') = \sum_{i=1}^r \alpha_i x_i'^2, \quad r = \text{rk} B, \quad \alpha_i \neq 0$$

Выберем другую точку O' и систему координат $\{O'; e'\}$ запишем

$$Q(O' + v) = \sum_{i=1}^r \alpha_i x_i'^2 + 2 \sum_{j=1}^n a'_j x'_j + c'$$

Выделим квадраты по x'_i :

$$a_i(x_i'^2 + 2\frac{a'_i x'_i}{\alpha_i} + \frac{a_i'^2}{\alpha_i})$$

Делаем замену: $\tilde{x}_i = x'_i + \frac{a'_i}{\alpha_i}, a \leq i \leq r$ и $\tilde{x}_i = x_i, r+1 \leq i \leq n$

$$Q(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n) = \sum_{i=1}^r \alpha_i \tilde{x}_i^2 + 2 \sum_{i=r+1}^n a'_i \tilde{x}_i + \tilde{c}, \quad \tilde{c} = Q(O'')$$

Если $a'_i \neq 0, i = r+1, \dots, n$, то O' – это центр, Q приобретает вид (I).

Если $a'_i \neq 0$, то можно положить:

$$\tilde{\tilde{x}}_{r+1} = \sum_{i=r+1}^n a'_i \tilde{x}_i + \frac{\tilde{c}}{\alpha} \implies Q \text{ приобретает вид (II)}$$

□

Следствие. Если $F = \mathbb{C}$, то можно делать все $\alpha_i = 1$, если $F = \mathbb{R}$, то можно получить вид:

$$\sum_{i=1}^p \tilde{x}_i^2 - \sum_{i=p+1}^r \tilde{x}_i^2 + \begin{cases} \tilde{c} \\ 2\tilde{x}_{r+1} \end{cases}$$

Случай евклидова пространства.

Теорема. Для любой аффинно-квадратичной формы Q (над \mathbb{R}) существует О.Н. система координат $\{O'; e'\}$ в которой $Q = \sum_{i=1}^r \lambda_i x_i'^2 + c$, $\lambda_i \neq 0$ – собственное значение матрицы B , либо $Q = \sum_{i=1}^r \lambda_i x_i'^2 + 2\lambda_{r+1}x'_{r+1}$, где $\lambda_{r+1} > 0$. Такой вид единственный, с точностью до нумерации.

Доказательство. Существование: для оператора с матрицей B , существует О.Н.Б. e' из собственных векторов, в котором

$$B' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_r & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} - \text{единственной с точностью до нумерации}$$

Как и в доказательстве прошлой теоремы, после перехода к этому базису либо вид (I), либо вид

$$(II) \quad Q = \sum_{i=1}^r \lambda_i \tilde{x}_i + \sum_{i=r+1}^n a'_i \tilde{x}_i + \tilde{c}$$

$$\tilde{x}_{r+1} = \underbrace{\sqrt{(a'_{r+1})^2 + \dots + (a'_n)^2}}_{\mu} \left(\sum_{i=r+1}^n \frac{a'_i}{\mu} \cdot \tilde{x}_i + \frac{\tilde{c}}{\mu} \right) \rightarrow \text{вид (II)}$$

$$\tilde{e}_{r+1} = \frac{1}{\mu} \left(\sum_{i=r+1}^n e'_i a'_i \right), \quad \left| \sum_{i=r+1}^n e'_i a'_i \right| = \sqrt{(a'_{r+1})^2 + \dots + (a'_n)^2} = \mu$$

□

Единственность (прошлой) теоремы:

Существует О.Н. система координат, в которой либо

$$(I) \quad Q = \sum_{i=1}^r \lambda_i x_i^2 + c, \text{ либо}$$

$$(II) \quad Q = \sum_{i=1}^r \lambda_i x_i^2 + 2\mu x_{r+1}, \quad \mu > 0 \quad (r < n)$$

Доказательство единственности. $\lambda_1, \dots, \lambda_r \neq 0$ однозначно с точностью до нумерации, т.к. это ненулевые собственные значения матрицы $q(x)$,

(I) случай существования центра $c = Q(O)$, O – любой центр.

Вид (I) не может превратиться в вид (II), т.к. (II) – нецентральный случай.

Единственность числа μ в случае (II):

Допустим, что в одной системе координат $\{O; e\}$

$$Q = \dots + 2\mu x_{r+1}, \text{ в другой с.к. } \{O'; e'\} (e \text{ и } e' - \text{О.Н.Б.})$$

$$Q = \dots + 2\tilde{\mu} \tilde{x}_{r+1}, \text{ причем } \tilde{\mu} \neq \mu$$

Матрица перехода от базиса e к e' имеет блочный вид

$$C_{e \rightarrow e'} = \left(\begin{array}{c|c} C_1 & 0 \\ \hline 0 & C_2 \end{array} \right) \quad C_1 := C_{\{e_1, \dots, e_r\} \rightarrow \{e'_1, \dots, e'_r\}}$$

$\langle e_1, \dots, e_r \rangle = \langle e'_1, \dots, e'_r \rangle$ – базис подпространства, порожденный собственными векторами $\lambda_1, \dots, \lambda_r$.

$$C_2 := C_{\{e_{r+1}, \dots, e_n\} \rightarrow \{e'_{r+1}, \dots, e'_n\}}$$

Обе матрицы ортогональные. Коэффициент линейной формы $2\mu x_{r+1}$ преобразуется по формуле:

$$\underbrace{(\tilde{\mu}, 0, \dots, 0)}_{n-r} = (\mu, 0, \dots, 0) \cdot C_2, \quad \mu > 0, \quad \tilde{\mu} > 0$$

Длина вектора при ортогональной замене сохраняется $\implies |\tilde{\mu}| = |\mu| > 0 \implies \tilde{\mu} = \mu$.

Квадрики (гиперповерхности 2-го порядка.)

Определение. Пусть $Q : \mathbb{A} \mapsto F$ – аффинно-квадратичная функция [не являющаяся линейной]. Квадрика (гиперповерхность 2-го порядка), задаваемая функцией Q – это $S(Q) = \{a \in \mathbb{A} \mid Q(a) = 0\}$, если $S(Q) \neq \emptyset$

Утверждение. Любая прямая $\pi \subset \mathbb{A}$ либо принадлежит поверхности $S = S(Q)$, либо пересекает ее не более, чем в двух точках.

Доказательство. $\forall a, b = a + tv, \pi \parallel v \neq 0$

$$Q(a + tv) = Q(a) + q(tv) + 2l(tv) = t^2 q(v) + 2tl(v) + Q(a) = 0$$

Либо это равенство тождественно, либо $q(v) \neq 0$ или $l(v) \neq 0 \implies$ существует не более двух корней t . \square

Определение. Точка $O \in \mathbb{A}$ – центр квадрики, если для любого вектора $v \in V$ такого что $O + v \in S \implies O - v \in S$. Точка O – вершина квадрики, если O – центр, принадлежащий этой поверхности, т.е. $O \in S$.

Утверждение. Если O – вершина, $a \in S$, $a \neq O$, то вся прямая проходящая через точки O и a принадлежит S .

Доказательство. Обозначим $v = \overrightarrow{Oa}$, и рассмотрим точку $O + t \cdot \overrightarrow{Oa} \in S \iff O - t \cdot \overrightarrow{Oa} \in S$. В частности, точки O , a , $a' = O - \overrightarrow{Oa} \in S$ – три различные точки на $S \implies$ по прошлому утверждению, вся прямая $O + \langle v \rangle \subset S$.

□

Заметим, что

$$Q(O + v) = q(v) + 2l(v) + c = 0, \quad c = Q(O) \implies$$

$$Q(O - v) = q(v) - 2l(v) + c = 0$$

$\text{char} F \neq 2 \implies l(v) = 0$. Т.о., если O – центр квадрики $\implies l(v) = 0$.

Координаты центра совпадают с координатами центра $Q(x)$.

Центр определяется системой уравнений:

$$\frac{\partial Q(x)}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n \iff \frac{\partial q}{\partial x_i} + 2a_i = 0, \quad \text{где } l(x) = \sum_{i=1}^n a_i x_i$$

Замечание. Квадрика, не являющаяся плоскостью, содержит хотя бы одну точку, которая не является вершиной. Если допустить, что все точки $a \in S$ являются вершинами, то любая прямая $(O, a) \subset S \implies S$ является плоскостью.

Теорема. Если $|F| = \infty$ ($\text{char} F \neq 2$), то $S(Q_1) = S(Q_2) \implies \exists \lambda \in F, \lambda \neq 0 : Q_2 = \lambda Q_1$.

Доказательство.

Если $Q_2 = \lambda Q_1, \lambda \neq 0$, то Q задает ту же поверхность, что и Q_1 .

Обратно: пусть $S = S(Q_1) = S(Q_2)$. Возьмем точку $O \in S$, не являющуюся вершиной. Имеем: $Q_1(O) = 0, Q_2(O) = 0$. Для $\forall v \in V$ запишем

$$Q_1(O + v) = q_1(v) + 2l_1(v), \quad l_1 \neq 0$$

$$Q_2(O + v) = q_2(v) + 2l_2(v), \quad l_2 \neq 0$$

Прямая $\pi = O + \langle v \rangle$ пересекает S в некоторой точке $p = O + tv$, если $t \in F$ – корень обоих уравнений

$$t^2 q_1(v) + 2t l_1(v) = 0$$

$$t^2 q_2(v) + 2t l_2(v) = 0$$

Один из этих корней $t_0 = 0$, т.к. $O \in S$, второй t_1 .

$$t(t q_1(v) + 2l_1(v)) = 0$$

$$t(tq_2(v) + 2l_2(v)) = 0$$

Если $q_1(v)q_2(v) \neq 0 \implies$

$$t_1 = -\frac{2l_1(v)}{q_1(v)} = -\frac{l_2(v)}{q_2(v)} \implies \frac{l_1(v)}{q_1(v)} = \frac{l_2(v)}{q_2(v)} \iff$$

$$l_1(v)q_2(v) = \frac{l_2(v)q_1(v)}{q_1(v)q_2(v)} \implies l_1(v)q_1(v)q_2^2(v) = l_2(v)q_1^2(v)q_2(v)$$

Последнее верно $\forall v \in V$ (даже если $q_1(v) = 0$ или $q_2(v) = 0$) – равенство двух многочленов от x_1, \dots, x_n как функций.

Т.к. F бесконечно, то это равносильно равенству многочленов $l_1q_1q_2^2 = l_1q_1^2q_2$ как алгебраических выражений. Кольцо многочленов над полем не имеет делителей $0 \implies$ можно сократить последнее равенство на $q_1q_2 \implies q_1l_2 = q_2l_1$ (*) (как равенство многочленов). Нам достаточно доказать, что $\exists \lambda \neq 0 : l_2 = \lambda l_1$, из (*) $\implies q_2 = \lambda q_1$. Допустим, что это не так, и l_1, l_2 не пропорциональны, тогда они ЛНЗ в пространстве V^* , и их можно включить в дуальный базис, т.е. выбрать базис в V так, чтобы $l_1(v) = x_1, l_2(v) = x_2, \forall v = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, тогда равенство (*) примет вид: $q_1(x)x_2 = q_2(x)x_1$ – равенство двух многочленов, где $x = (x_1, \dots, x_n)$. Многочлен правой части делится на $x_1 \implies$ многочлен $q_1(x)x_2 : x_1, x_1$ и x_2 взаимно просты $\implies q_1(x) : x_1 \implies q_1(v) = l(v)x_1 \implies q_2(v) = l(v)x_2, l(v)$ – линейная форма, $l(v) \neq 0 \implies$

$$Q_1(O + v) = (l(x) + 2)x_1$$

$$Q_2(O + v) = (l(x) + 2)x_2$$

Пусть $x_1 \equiv 0 \implies Q_1(O + v) = 0$, т.е. S содержит плоскость $x_1 = 0$.

Но $Q_2(O + v) = (l(x) + 2)x_2 \neq 0$ при $x_1 = 0$ – противоречие $\implies l_2 = \lambda l_1$,

$$\lambda \neq 0 \implies q_2 = \lambda q_1 \implies Q_2 = \lambda Q_1$$

□

После теоремы о том, что если $S(Q_1) = S(Q_2) \implies Q_2 = \lambda Q_1$, докажем, следующее утверждение.

Утверждение. Пусть $S = S(Q)$ – квадрика. Точка $O \in \mathbb{A}$ – центр симметрии $S \iff l = 0$. ($Q(O + v) = q(v) + 2l(v) + Q(O)$).

Доказательство.

\Leftarrow Если $l = 0$, то $Q(O - v) = Q(O) + q(-v) = Q(O + v) = O, \forall v \in V : O + v \in S \implies S : Q(O + v) = O$, а функция $Q_1(O + v) = Q(O - v) = q(v) - 2l(v) + c$ задает ту же поверхность S , если O – центр симметрии $\implies \exists \lambda \neq 0 : Q_1 = \lambda Q$, т.е. $\lambda q(v) + 2\lambda l(v) + \lambda Q(O) = q(v) - 2l(v) + Q(O)$ (разделим обе части на правую часть). Т.к. $q \neq 0$, то $\lambda = 1 \implies l(v) = -l(v)$; т.к. $\text{char } F \neq 2 \implies l = 0$

□

Классификация квадрик.

Теорема. Заменой аффинной системы координат $\{O; e\}$ уравнение любой квадрики можно привести к только одному из следующих видов ($\text{char} F \neq 2$; коэффициенты определяются с точностью до нумерации):

$$\text{I. (1) } \sum_{i=1}^r \alpha_i x_i^2 = 1 \quad (r \leq n)$$

$$(2) \sum_{i=1}^r \alpha_i x_i^2 = 0 \quad (r \leq n-1)$$

I. – центральный случай

$$\text{II. (нецентральный случай): } \sum_{i=1}^r \alpha_i x_i^2 + 2x_{r+1} = 0 \quad (r \leq n-1)$$

где $\prod_{i=1}^r \alpha_i \neq 0$ во всех случаях (I), (II).

Доказательство. См. соответствующую теорему о классификации аффинно-квадратичных функций:

$$\text{(I). } Q(O + v) = \sum_{i=1}^r \alpha_i x_i^2 + c$$

Если $c \neq 0$, то уравнение

$$\sum_{i=1}^r \alpha_i x_i^2 = -c \iff \sum_{i=1}^r \left(-\frac{\alpha_i}{c}\right) x_i^2 = 1, \quad \tilde{\alpha}_i = -\frac{\alpha_i}{c}$$

Остальное остается в силе.

□

Следствие. Над \mathbb{C} уравнение квадрики S приводится к одному из видов:

$$\text{I. (1) } \sum_{i=1}^r x_i^2 = 1 \quad (r \leq n)$$

$$(2) \sum_{i=1}^r x_i^2 = 0 \quad (r \leq n)$$

$$\text{II. } \sum_{i=1}^r x_i^2 = 2x_{r+1}, \quad (r \leq n-1)$$

Доказательство. Согласно прошлой теореме:

$$\sum_{i=1}^r x_i^2 = \begin{cases} 1 \\ 0 \\ 2x_{r+1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tilde{x}_i = \sqrt{\alpha_i} x_i, & 1 \leq i \leq r \\ \tilde{x}_i = x_i, & r+1 \leq i \leq n. \end{cases}$$

□

Следствие. Над \mathbb{R} заменой системы координат $\{O; e\}$ уравнение любой квадрики приводится к одному из видов:

$$\begin{aligned} \text{I. (1)} \quad & \sum_{i=1}^s x_i^2 - \sum_{i=s+1}^r x_i^2 = 1 \quad (s \leq r) \\ \text{(2)} \quad & \sum_{i=1}^s x_i^2 - \sum_{i=s+1}^r x_i^2 = 0, \quad \frac{r}{2} \leq s \leq r \\ \text{II.} \quad & \sum_{i=1}^s x_i^2 - \sum_{i=s+1}^r x_i^2 = -2x_{r+1}, \quad \frac{r}{2} \leq s \leq r \end{aligned}$$

(В случаях I. (2) и II., если надо, уравнение можно умножить на (-1) и перенумеруем).

Названия в этой классификации:

- I. (1) при $n = z = s$ – эллипсоид; если $1 < n = r$ – гиперboloид.
- I. (2) при $r = n$ – конус.
- II. при $r = s = n - 1$ – эллиптический параболоид.
при $s < r = n - 1$ – гиперболический параболоид.
- I. при $r \leq n - 1$, II при $r \leq n - 2$ – цилиндры.

Квадрики в аффинном евклидовом пространстве

Теорема. (Об ортогональной классификации квадрик). В аффинном евклидовом пространстве \mathcal{E} выбором подходящей ортонормированной системы координат, уравнение любой квадрики приводятся к одному (и только одному) каноническому типу:

$$\begin{aligned} \text{I. (1)} \quad & \sum_{i=1}^s \frac{\tilde{x}_i^2}{\alpha_i^2} - \sum_{i=s+1}^r \frac{\tilde{x}_i^2}{\alpha_i^2} = 1, \quad 0 < s \leq r \\ \text{(2)} \quad & \sum_{i=1}^s \frac{\tilde{x}_i^2}{\alpha_i^2} - \sum_{i=s+1}^r \frac{\tilde{x}_i^2}{\alpha_i^2} = 0, \quad \frac{r}{2} \leq s < r \\ \text{II.} \quad & \sum_{i=1}^s \frac{\tilde{x}_i^2}{\alpha_i^2} - \sum_{i=s+1}^r \frac{\tilde{x}_i^2}{\alpha_i^2} + 2x_{r+1} = 0 \quad (\text{все } \alpha_i > 0, \quad 1 \leq i \leq r) \end{aligned}$$

Набросок доказательства. В подходящей ортонормированной системе координат $\{O; e\}$ уравнение Q приводится к виду:

$$\text{(I)} \quad Q = \sum_{i=1}^r \lambda_i x_i^2 + c \quad \text{либо} \quad \text{(II)} \quad \sum_{i=1}^r \lambda_i x_i^2 + 2\mu x_{r+1} \quad (\mu > 0)$$

(По теореме 2 из лекции от 3.05)

Пусть имеет место (I) и $c \neq 0$, тогда уравнение

$$\sum_{i=1}^r \lambda_i x_i^2 + c = 0 \text{ разделим на } (-c) \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^r \frac{\lambda_i}{-c} x_i^2 = 1, \text{ обозначим за } a_i := \sqrt{\left| \frac{c}{\lambda_i} \right|}$$

Причем можно выбрать нумерацию так, чтобы $\lambda_i c < 0$ при $i = 1, \dots, s$ и $\lambda_i c > 0$ при $i > s \rightarrow$ вид I.(1)

При $c = 0$ просто $a_i = \frac{1}{\sqrt{|\lambda_i|}} \rightarrow$ вид I.(2).

В случае (II) можно разделить уравнение на μ :

$$\sum_{i=1}^r \frac{\lambda_i x_i^2}{\mu} + 2x_{r+1} = 0, \text{ обозначим за } a_i := \sqrt{\left| \frac{\mu}{\lambda_i} \right|}$$

Выбрать нумерацию так, чтобы $\lambda_i \mu > 0$ при $i = 1, \dots, s$ и $\lambda_i \mu < 0$ при $i > s$.

Глава 5. Тензоры.

§1. Базовые понятия.

Под тензором понимают геометрический объект, который задается матрицей (там было еще много слов которые я не успел записать).

Пусть V – векторное пространство над полем F , $\dim V = n < \infty$

V^* – сопряженное ему пространство (пространство линейных функций на V).

Известно, что $V^{**} \cong V$ (изоморфизм не зависит от базиса.)

Определение. Пусть $p, q \in \mathbb{N}_0$. Тензор типа (p, q) – это полилинейная функция $f : \underbrace{V \times \dots \times V}_p \times \underbrace{V^* \times \dots \times V^*}_q \mapsto F$. $(f(v_1, \dots, v_p; u_1, \dots, u_q))$ линейна по каждому из аргументов). $p + q$ – валентность тензора f (или ранг f), где p – ковариантная валентность, q – контравариантная валентность. Если $pq \neq 0$, то f – смешанный тензор.

Обозначим $T_p^q(V) = T_p^q$ – множество тензоров типа (p, q) .

Утверждение. T_p^q – векторное пространство.

Доказательство. Надо определить линейные операции.

Обозначим $\vec{v} = (v_1, \dots, v_p)$, $\vec{u} = (u_1, \dots, u_q)$.

Если $f_1, f_2 \in T_p^q$, положим

$$(f_1 + f_2)(\vec{v}, \vec{u}) := f_1(\vec{v}, \vec{u}) + f_2(\vec{v}, \vec{u})$$

$$\forall \lambda \in F, (\lambda f)(\vec{v}, \vec{u}) := \lambda f(\vec{v}, \vec{u})$$

С этими операциями $T_p^q(V)$ – векторное пространство.

□

Определение. Произведение тензоров: пусть $f_1 \in T_p^q$, $f_2 \in T_r^s$, тогда $f_1 \otimes f_2 :$

$$\underbrace{V \times \dots \times V}_{p+r} \times \underbrace{V^* \times \dots \times V^*}_{q+s} \mapsto F, \text{ т.е. } f_1 \otimes f_2 \in T_{p+r}^{q+s}$$

$$\begin{aligned} & (f_1 \otimes f_2)(\underbrace{v_1, \dots, v_p, v_{p+1}, \dots, v_{p+r}}_{\text{векторы} \in V}; \underbrace{u_1, \dots, u_{q+s}}_{\text{ковекторы} \in V^*}) = \\ & = f_1(v_1, \dots, v_p; u_1, \dots, u_q) f_2(v_{p+1}, \dots, v_{p+r}; u_{q+1}, \dots, u_{q+s}) \end{aligned}$$

Свойства операции операции \otimes :

- Утверждение.**
1. $f_1 \otimes f_2$ – тензор типа $(p+r, q+s)$
 2. $(f_1 \otimes f_2) \otimes f_3 = f_1 \otimes (f_2 \otimes f_3)$ – ассоциативность.
 3. $(\alpha f_1 + \beta f_2) \otimes f_3 = \alpha(f_1 \otimes f_3) + \beta(f_2 \otimes f_3)$ – дистрибутивность.

Правило суммирования Эйнштейна.

Договоренность, что координаты вектора пишутся с верхними индексами, тогда разложение вектора по базису:

$$x = \sum_i x^i e_i \equiv x^i e_i$$

В последнем предполагается суммирование по i , ради сокращения записи. Коэффициенты линейной формы – с нижними индексами:

$$u(x, y) = \sum_i a_i x^i$$

Матрица линейного оператора обозначается $A = (a_j^i)$, где i – индекс строки, а j – индекс столбца.

$$\varphi(x) = AX = \sum_i a_j^i x^j$$

Отождествление тензоров малых валентностей (рангов) с геометрическими объектами.

Под тензором понимаем векторы, линейные формы, билинейные формы, операторы.

1. $T_1^0(V) = V^*$
2. $T_0^1(V) = V^{**} = V$
3. $T_2^0(V)$ – билинейная форма.
4. $T_1^1(V) \cong L(V)$

Пусть $f(v, u)$ – тензор типа $(1, 1)$. Изоморфизм между V^{**} и V задается правилом:

$$\forall v \in V, v \mapsto \varepsilon_v \in V^{**}, \forall u \in V^* \text{ выполнено } \varepsilon_v(u) = u(v)$$

(И наоборот, для $l \in V^{**}$ обозначим $v = y_v \in V$ – обратное отображение.)

При фиксированном v , $f(v, u)$ – линейная функция на $V^{**} \implies$

$$f(v, u) = \varepsilon_v(u) = u(v) = u(y_v) \quad (*)$$

Соответствие $\overbrace{v \mapsto y_v}^{V \xrightarrow{\varphi} V}$ из условия $(*)$ является линейным оператором. Для f существует единственный φ

Наоборот, $\forall \varphi : V \mapsto V$, функция $f(v, u) := u(\varphi(v))$, где $f : V \times V^* \mapsto F$.

Построение базиса в пространстве $T_p^q(V)$.

Пусть $e = \{e_1, \dots, e_n\}$ – базис в V , а $e^* = \{e^1, \dots, e^n\}$ – дуальный базис в V^* .

Теорема. Тензоры

$$e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_p} \otimes e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_q} \quad (i_1, \dots, i_p, j_1, \dots, j_q = \overline{1, n})$$

образуют базис в пространстве $T_p^q \implies \dim T_p^q = n^{p+q}$

Доказательство. Любой тензор f разлагается по тензорам $(**)$.

$$\begin{aligned} \text{Пусть } v_1 &= x_1^{i_1} e_{i_1}, \dots, v_p = x_p^{i_p} e_{i_p} \\ u_1 &= y_{j_1}^1 e^{j_1}, \dots, u_q = y_{j_q}^q e^{j_q} \end{aligned}$$

$$f(v_1, \dots, v_p; u_1, \dots, u_q) = f(x_1^{i_1} e_{i_1}, \dots; y_{j_1}^1 e^{j_1}, \dots) =$$

Используя линейность по каждому аргументу получаем:

$$= x_1^{i_1} \cdot \dots \cdot x_p^{i_p} \cdot y_{j_1}^1 \cdot \dots \cdot y_{j_q}^q \cdot f(e_{i_1}, \dots, e_{i_p}; e^{j_1}, \dots, e^{j_q})$$

Заметим, что $f(e_{i_1}, \dots, e_{i_p}; e^{j_1}, \dots, e^{j_q}) = T_{i_1, \dots, i_p}^{j_1, \dots, j_q}$ – координаты тензора $f(\vec{v}; \vec{u})$.

Индексы должны быть "и сверху и снизу".

$$(e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_p} \otimes e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_q})(e_{i'_1}, \dots, e_{i'_p}; e^{j'_1}, \dots, e^{j'_q}) =$$

$$= e^{i_1}(e_{i'_1}) \cdot \dots \cdot e^{i_p}(e_{i'_p}) \cdot e_{j_1}(e^{j'_1}) \cdot \dots \cdot e_{j_q}(e^{j'_q}) =$$

$$= \delta_{i'_1}^{i_1} \cdot \dots \cdot \delta_{i'_p}^{i_p} \cdot \delta_{j_1}^{j'_1} \cdot \dots \cdot \delta_{j_q}^{j'_q} = \begin{cases} 1, & (i_1, \dots, i_p) = (i'_1, \dots, i'_p) \text{ и } (j_1, \dots, j_p) = (j'_1, \dots, j'_p) \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$(e^{i'_1} \otimes e^{i'_p} \otimes e_{j'_1} \otimes \dots \otimes e_{j'_q})(v_1, \dots, v_p; u_1, \dots, u_q) =$$

$$x_1^{i'_1} \cdot \dots \cdot x_p^{i'_p} \cdot y_{j_1}^1 \cdot \dots \cdot y_{j_q}^q (e^{i'_1} \otimes e_{j'_1})(e_{i_1}, \dots, e_{j_q})$$

Причем $(e^{i'_1} \otimes e_{j'_1})(e_{i_1}, \dots, e_{j_q})$ равняется 1, только когда $(i_1, \dots, i_p) = (i'_1, \dots, i'_p)$ и $(j_1, \dots, j_p) = (j'_1, \dots, j'_p)$. Тогда

$$f(v_1, \dots, v_p; u_1, \dots, u_q) = T_{i_1, \dots, i_p}^{j_1, \dots, j_q}(e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_p} \otimes e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_q})(v_1, \dots, v_p; u_1, \dots, u_q)$$

$T_{i_1, \dots, i_p}^{j_1, \dots, j_q}$ фактически являются координатами тензора f в системе тензоров (**).

Тензоры (**) ЛНЗ: допустим, что коэффициенты $\Lambda_{i_1, \dots, i_p}^{j_1, \dots, j_q}$, такие что

$$\tilde{f} = \Lambda_{i_1, \dots, i_p}^{j_1, \dots, j_q}(e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_p} \otimes e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_q}) = 0$$

Рассмотрим тензор $\tilde{f} \equiv 0$, точнее

$$\tilde{f}(e_{i_1}, \dots, e_{i_p}; e^{j_1}, \dots, e^{j_q}) = \Lambda_{i_1, \dots, i_p}^{j_1, \dots, j_q} = 0$$

Для $\forall i_k, j_l$

□

Изменение координат тензора при замене базиса.

Если $e = (e_1, \dots, e_n)$ – старый базис; $e' = (e'_1, \dots, e'_n)$ – новый базис в V , $e^* = (e^1, \dots, e^n)$ старый базис в V^* , $e'^* = (e'^1, \dots, e'^n)$ – новый базис в V^* .

$$x = x^i e_i = x'^{i'} e'_{i'}, \quad x^i = c_{i'}^i x'^{i'}, \quad (c_{i'}^i) = C_{e \rightarrow e'}$$

$$u = y_j e^j = y'_{j'} e'^{j'}, \quad y'_{j'} = y_j c_{j'}^j - \text{ковариантный закон}$$

(В общем у Гайфуллина расписано лучше, пишите в тг, если что)

Равносильно: $X' = C^{-1}X$, обозначим $D = C^{-1} \implies x'^{i'} = d_i^{i'} x^i$ – контравариантный закон.

В старом базисе:

$$f = T_{i_1, \dots, i_p}^{j_1, \dots, j_q}(e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_p} \otimes e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_q})$$

$$T_{i_1, \dots, i_p}^{j_1, \dots, j_q} = f(e_{i_1}, \dots, e_{i_p}; e^{j_1}, \dots, e^{j_q})$$

В новом базисе:

$$T_{i'_1, \dots, i'_p}^{j'_1, \dots, j'_q} = f(e'_{i'_1}, \dots, e'_{i'_p}; e'^{j'_1}, \dots, e'^{j'_q})$$

В координатах:

$$\begin{aligned}
f(e_{i_1}, \dots, e_{i_p}; e^{j_1}, \dots, e^{j_q}) &= T_{i_1, \dots, i_p}^{j_1, \dots, j_q} x_1^{i_1} \dots x_p^{i_p} \cdot y_{j_1}^1 \dots y_{j_q}^q = \\
&= T_{i_1, \dots, i_p}^{j_1, \dots, j_q} c_{i'_1}^{i_1} x_1^{i'_1} \dots x_p^{i'_p} \cdot d_{j'_1}^{j_1} y_1^{j'_1} \dots d_{j'_q}^{j_q} y_q^{j'_q} = \\
&= T_{i'_1, \dots, i'_p}^{j'_1, \dots, j'_q} x_1^{i'_1} \dots x_p^{i'_p} \cdot y_{j'_1}^1 \dots y_{j'_q}^q \implies \\
T_{i'_1, \dots, i'_p}^{j'_1, \dots, j'_q} &= T_{i_1, \dots, i_p}^{j_1, \dots, j_q} c_{i'_1}^{i_1} \cdot \dots \cdot c_{i'_p}^{i_p} \cdot d_{j'_1}^{j_1} \cdot \dots \cdot d_{j'_q}^{j_q} \quad (*)
\end{aligned}$$

(*) означает, что этот тензор (или эта матрица) p раз ковариантный и q раз контравариантный.

§2. Свертка, симметризация и альтернирование.

След матрицы линейного оператора

$$\text{tr} A = \sum a_i^i = a_i^a \in T_0^0 - \text{инвариант}$$

$$T_p^q \rightarrow T_{p-1}^{q-1}, \quad p, q \geq 1$$