ПРОПИСАННЫЕ БИЛЕТЫ ПО МАТАН-2

Лактюхин Никита, 113 группа

May 10, 2024

ЕСЛИ НАЙДЕТЕ ОШИБКИ, ТО ПИШИТЕ МНЕ, БУДУ ИСПРАВЛЯТЬ.

Содержание

1 Тема 1. Множества точек пространств R^m

1.1 Определения

1.1.1 Окрестность точки А пространства R^m

$\forall$ открытое связное множество, содержащее точку А.

1.1.2 Шаровая окрестность точки пространства R^m

1.1.3 Прямоугольная окрестность точки А пространства R^m

Пусть $A(a_1, \dots, a_m) \in R^m$ и $d_1, \dots, d_m$ - некоторые положительные числа. Множество $\{M(x_1, \dots, x_m) : |x_1 - a_1| \leq d_1, \dots, |x_m - a_m| \leq d_m\}$ — прямоугольная окрестность точки А пространства R^m.

1.1.4 Внутренняя точка множества D точек пространства R^m

Точка А называется внутренней точкой множества $\{D\}$, если
$\exists$ ε - окрестность точки А, целиком принадлежащая множеству $\{D\}$.

1.1.5 Изолированная точка множества D точек пространства R^m

Точка А называется изолированной точкой множества $\{D\}$, если она принадлежит $\{D\}$ и $\exists$ ε-окрестность точки А, в которой нет других точек из $\{D\}$, кроме А.

1.1.6 Граничная точка множества D точек пространства R^m

Точка А называется граничной точкой множества $\{D\}$, если в любой ε -окрестности точки А содержатся как точки множества $\{D\}$, так и точки, которые этому множеству не принадлежат.

1.1.7 Граница множества D точек пространства R^m

Множество всех граничных точек называется границей множества $\{D\}$

1.1.8 Открытое множество точек пространства R^m

Множество $\{D\}$ называется открытым, если все его точки — внутренние.

1.1.9 Замкнутое множество точек пространства R^m

Множество $\{D\}$ называется замкнутым, если оно содержит все свои граничные точки.

1.1.10 Предельная точка множества D точек пространства R^m

Точка A называется предельной точкой множества $\{D\}$, если в любой ε -окрестности точки A содержатся точки из множества $\{D\}$, отличные от A (при этом предельная точка может как принадлежать, так и не принадлежать множеству $\{D\}$).

1.1.11 Непрерывая кривая в пространстве R^m

Множество точек L $= \{M(x_1, \ldots, x_m) : x_1 = \varphi_1(t), \ldots, x_m = \varphi_m(t), \alpha \leq \beta\}$, где $\varphi_1(t), \ldots, \varphi_m(t)$ – непрерывные на сегменте $[\alpha, \beta]$ функции.

1.1.12 Связное множество точек пространства R^m

Множество $\{D\}$ называется связным, если любые две его точки можно соединить непрерывной кривой, все точки которой принадлежат $\{D\}$.

2 Тема 2. Последовательности точек пространства R^m

2.1 Определения

2.1.1 Ограниченная последовательность точек пространства R^m

Последовательность $\{M_n\}$ называется ограниченной, если все ее члены лежат в некотором шаре.
Эквивалентное определение: $\exists$ R>0 : $\forall$ n: $\rho(M_n, O) \leq$ R. Точка O - начало координат.

2.1.2 Неограниченная последовательность точек пространства R^m

$\forall$R>0 $\exists$n: $\rho(M_n, O) >$ R.

2.1.3 Предел последовательности точек пространства R^m

Точка A $\in R_m$ называется пределом последовательности $\{R_m\}$, если $\lim\limits_{n\to+\infty} \rho(M_n, O) = 0$.
Обозначение:

$$\lim_{n\to+\infty} M_n = A$$

2.1.4 Сходящаяся последовательность точек пространства R^m

Последовательность точек, имеющая предел.

2.1.5 Предельная точка последовательности точек пространства R^m

Точка A - предельная точка, если в $\forall$ ε-окрестности точки A содержится бесконечно много членов последовательности точек M_n.

2.1.6 Фундаментальная последовательность точек пространства R^m

Последовательность точек $\{M_n\}$ называется фундаментальной, если
$\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ N, такое что, $\forall$ n>N и $\forall$ m>N: $\rho(M_n, M_m) < \varepsilon$.

2.2 Теоремы(без доказательства)

2.2.1 Теорема о критерии Коши сходимости последовательности точек пространства R^m

Для того, чтобы последовательность $\{M_n\}$ сходилась, необходимо и достаточно, чтобы она была фундаментальной.

2.2.2 Теорема Больцано-Вейерштрасса для последовательности точек пространства R^m.

Из всякой ограниченной последовательности $\{M_n\}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

2.3 Теоремы(с доказательством)

2.3.1 Докажите, что любая ограниченная последовательность точек на плоскости имеет по крайней мере одну предельную точку.

Пусть $\{M_n(x_n, y_n)\}$ - ограничена. Отсюда следует, что числовые последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ также ограничены.

Тогда по теореме Больцано-Вейерштрасса для числовой последовательности из $\{x_n\}$ можно выделить подпоследовательность $\{x_{k_n}\}$, сходящуюся к некоторому числу a_1. Из подпоследовательности $\{y_{k_n}\}$ также можно выделить сходящуюся подпоследовательность: $\{y_{m_n}\} \to a_2$. При этом $\{x_{m_n}\} \to a_1$.

Тогда подпоследовательность точек $\{M_{m_n}\}$ сходится к числу $A(a_1, a_2)$, что и требовалось доказать.

2.3.2 Докажите, что если последовательность точек $\{M_n(x_n, y_n)\}$ на плоскости является сходящейся, то числовые последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ являются сходящимися.

Т.к. последовательность точек $\{M_n(x_n, y_n)\}$ является сходящейся(пусть сходится к точке A(a_1, a_2)), то
$\lim\limits_{n\to+\infty} \rho(M_n, \text{A}) = 0$, т.е. $\exists$ R>0 : $\forall$ n:$\sqrt{(x_n - a_1)^2 + (y_n - a_2)^2} \leq$ R.

Отсюда следует, что $\exists$ R>0 : $\forall$ n: $|(x_n - a_1)| \leq$ R и $|(y_n - a_2)| \leq$ R, т.е $\{x_n\} \to a_1$ и $\{y_n\} \to a_2$, что и требовалось доказать.

2.3.3 Докажите, что если числовые последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ являются сходящимися, то последовательность точек $\{M_n(x_n, y_n)\}$ на плоскости является сходящейся

Пусть $\{x_n\} \to a_1$ и $\{y_n\} \to a_2$. Тогда последовательности $\{x_n - a_1\}$ и $\{y_n - a_2\}$ – бесконечно малые последовательности. Отсюда следует, что
$\rho(M_n, A) = \sqrt{(x_n - a_1)^2 + (y_n - a_2)^2}$ – тоже бесконечно малая последовательность.

А это по определению обозначает, что $\{M_n\} \to A$. Что и требовалось доказать.

2.3.4 Сформулируйте и докажите теорему о критерии Коши сходимости последовательности точек пространства R^m

Формулировка: Для того, чтобы последовательность $\{M_n\}$ сходилась, необходимо и достаточно, чтобы она была фундаментальной.

Доказательство:

1. Необходимость:

Пусть $\{M_n(x_1^{(n)}, \dots, x_m^{(n)})\}$ – сходится.

1. Т.к. $\{M_n\}$ сходится, то $\{x_n^1\}, \dots, \{x_n^m\}$ – сходятся.

2. По критерию Коши в R^m $\{x_n^1\}, \dots, \{x_n^m\}$ – фундаметальные последовательности.
$\forall i \in [1, \dots, m]$ $\forall \varepsilon$>0 $\exists$N : $\forall$ k,l > N : $|x_k^i - x_l^i| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}$.

3. Пусть M_k и M_l – точки последовательности $\{M_n\}$.
$\forall \varepsilon$>0 $\exists$ N : $\forall$ k,l > N : $\rho(M_k, M_l) = \sqrt{(x_k^1 - x_l^1)^2 + \ldots + (x_l^m - x_l^m)^2} < \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{m} \cdot m} < \varepsilon$.
Следовательно, $\{M_n\}$ - фундаментальная.

2. Достаточность:

Пусть последовательность $\{M_n(x_1^{(n)}, \dots, x_m^{(n)})\}$ – фундаментальная.

1. $\forall \varepsilon$>0 $\exists$N : $\forall$ k,l > N : $\rho(M_k, M_l) < \varepsilon$.
$\rho(M_k, M_l) = \sqrt{(x_k^1 - x_l^1)^2 + \ldots + (x_l^m - x_l^m)^2} < \varepsilon$.

2. $\forall i \in [1, \dots, m] \quad |x_k^i - x_l^i| < \varepsilon$.
$\forall \varepsilon$>0 $\exists$N : $\forall$ k,l > N : $|x_k^i - x_l^i| < \varepsilon$, т.е $\forall i \in [1, \dots, m] \quad x_n^i$ – фундаментальная.

3. Т.к. x_n^i - фундаментальная, то по критерию Коши в R^1 x_n^i – сходится$(\forall i \in [1, \dots, m]) \Rightarrow \{M_n\}$ - сходится.

3 Тема 3. Функции, предел, непрерывность.

3.1 Определения

3.1.1 Ограниченная сверху (снизу) функция u(M), заданная на множестве D точек пространства R^m

$\exists$ R : $\forall M \in \{D\}$: u(M) $\leq$ R   (u(M) $\geq$ R).

3.1.2 Неограниченная сверху (снизу) функция u(M), заданная на множестве D точек пространства R^m

$\forall$ R : $\exists M \in \{D\}$: u(M) $>$ R   (u(M) $<$ R).

3.1.3 Точная верхняя (нижняя) грань функции u(M), заданной на множестве D точек пространства R^m

A $= \underset{\{D\}}{sup}$ u(M), если:

1. $\forall D \in \{D\}$: u(D) $\leq$ A   (u(D) $\geq$ A)
2. $\forall \widetilde{A} <$ A   ($\forall \widetilde{A} >$ A) $\exists\ \widetilde{D} \in \{D\}$: u($\widetilde{D}$) $> \widetilde{A}$.   (u($\widetilde{D}$) $< \widetilde{A}$)

3.1.4 Предел функции u(M) в точке $M_0 \in R^m$ "по Коши"

Число b называется пределом функции u = f(M) в точке A (при M→A), если $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0 : \forall M \in \{M\}, 0 < \rho(M, A) < \delta : |f(M) - b| < \varepsilon$.

3.1.5 Предел функции u(M) в точке $M_0 \in R^m$ "по Гейне"

Число b называется пределом функции u = f(M) в точке A (при M→A)
если $\forall \{M_n\} \to$ A($M_n \in \{M\}$, $M_n \neq A$) соответствующая последовательность $\{f(M_n)\} \to b$.

3.1.6 Предел функции u(M) в бесконечно удаленной точке пространства R^m "по Гейне"

Число b называется пределом функции u = f(M) в точке A (при M$\to \infty$)
если $\forall \{M_n\} \to \infty$ ($M_n \in \{M\}$) соответствующая последовательность $\{f(M_n)\} \to b$.

3.1.7 Предел функции u(M) в бесконечно удаленной точке пространства R^m "по Коши"

Число b называется пределом функции u = f(M) в точке A (при M→A), если $\forall \varepsilon > 0$ $\exists R > 0 : \forall M \in \{M\}, \rho(M, O) > R : |f(M) - b| < \varepsilon$.

3.1.8 Функция u(x,y), непрерывная по переменной x в точке $M_0(x_0, y_0)$

$\lim\limits_{\triangle x \to 0} \triangle_x u = 0$, где $\triangle_x u = f(x_0 + \triangle x, y_0) - f(x_0, y_0)$.

3.1.9 Функция u(x,y), непрерывная по совокупности переменных в точке $M_0(x_0, y_0)$

$\lim\limits_{M \to M_0}$ f(M) = f(M_0). $\lim\limits_{M \to M_0} \triangle u = \lim\limits_{M \to M_0}$(f(M) - f($M_0$)) = 0.

3.1.10 Повторный предел функции u(x, y) в точке $M_0(x_0, y_0)$

3.2 Теоремы(без доказательства)

3.2.1 Теорема о критерии Коши существования предела функции в точке $M_0 \in R^m$

Для того, чтобы функция f(M) имела предел в точке A, необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла в этой точке условию Коши.

$\lim\limits_{M \to A}$ f(M) = b $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \forall M_1$ и $M_2 \in \{M\}$ $0 < \rho(M_1, A) < \delta$ и $0 < \rho(M_2, A) < \delta : |f(M_2) - f(M_1)| < \varepsilon$

3.2.2 Теорема о непрерывности суммы двух функций нескольких переменных

Если функции f(M) и g(M) определены на множестве $\{M\}$ и непрерывны в точке A, то функция f(M)+g(M) непрерывна в точке A.

3.2.3 Теорема о непрерывности произведения двух функций нескольких переменных

Если функции f(M) и g(M) определены на множестве $\{M\}$ и непрерывны в точке A, то функция f(M)·g(M) непрерывна в точке A.

3.2.4 Теорема о непрерывности частного от деления двух функций нескольких переменных

Если функции f(M) и g(M) определены на множестве $\{M\}$ и непрерывны в точке A, то функция $\frac{f(M)}{g(M)}$ (при условии g(A) $\neq 0$) непрерывна в точке A.

3.2.5 Теорема об устойчивости знака непрерывной функции нескольких переменных

Если функция u = f(M) непрерывна в точке A и f(A) > 0 (< 0), то $\exists$ δ-окрестность точки A, в которой f(M) > 0 (< 0).

3.2.6 Теорема о прохождении непрерывной функции нескольких переменных через любое промежуточное значение

Пусть функция u = f(M) = f($x_1, \ldots, x_m$) непрерывна на связном множестве $\{M\}$, пусть M_1 и M_2 — две любые точки из $\{M\}$, f(M_1) = u_1, f(M_2) = u_2, и пусть u_0 — любое число из сегмента $[u_1, u_2]$. Тогда на любой непрерывной кривой L, соединяющей точки M_1 и M_2 и целиком принадлежащей множеству $\{M\}$, найдется такая точка M_0, такая, что f(M_0) = u_0.

3.2.7 Первая теорема Вейерштрасса для функции нескольких переменных

Если функция u = f(M) непрерывна на замкнутом ограниченном множестве $\{M\}$, то она ограничена на этом множестве.

3.2.8 Вторая теорема Вейерштрасса для функции нескольких переменных

Непрерывная на замкнутом ограниченном множестве функция достигает на этом множестве своих точных нижней и верхней граней.

3.2.9 Теорема о непрерывности сложной функции нескольких переменных

Пусть функции $x_1 = \varphi_1(t_1, \ldots, t_k), \ldots, x_m = \varphi_m(t_1, \ldots, t_k)$ непрерывны в точке A($a_1, \ldots, a_k$), а функция u = f($x_1, \ldots, x_m$) непрерывна в точке B($b_1, \ldots, b_m$), где $b_1 = \varphi_1(a_1, \ldots, a_k)$,..., $b_m = \varphi_m(a_1, \ldots, a_k)$.
Тогда сложная функция u = f ($\varphi_1(t_1, \ldots, t_k)$, ..., $\varphi_m(t_1, \ldots, t_k)$) непрерывна в точке A.

3.2.10 Теорема Кантора для функции нескольких переменных

Непрерывная на замкнутом ограниченном множестве функция равномерно непрерывна на этом множестве.

3.3 Теоремы(с доказательством)

3.3.1 Докажите теорему о пределе суммы двух функций нескольких переменных в данной точке.

Формулировка:

3.3.2 Докажите теорему о пределе произведения двух функций нескольких переменных в данной точке.

fgfdg

3.3.3 Докажите теорему о непрерывности суммы двух функций нескольких переменных.

Формулировка: Если функции f(M) и g(M) определены на множестве $\{M\}$ и непрерывны в точке A, то функция f(M)+g(M) непрерывна в точке A.

Доказательство:

1. $\lim\limits_{M\to A}$ f(M)+g(M) = $\lim\limits_{M\to A}$f(M) + $\lim\limits_{M\to A}$ g(M) = f(A) + g(A).

3.3.4 Докажите теорему о непрерывности произведения двух функций нескольких переменных.

Формулировка: Если функции f(M) и g(M) определены на множестве $\{M\}$ и непрерывны в точке A, то функция f(M)·g(M) непрерывна в точке A.

Доказательство:

1. $\lim\limits_{M\to A}$ f(M)·g(M) = $\lim\limits_{M\to A}$f(M) · $\lim\limits_{M\to A}$ g(M) = f(A) · g(A).

3.3.5 Докажите теорему о непрерывности частного от деления двух функций нескольких переменных.

Формулировка: Если функции f(M) и g(M) определены на множестве $\{M\}$ и непрерывны в точке A, то функция $\frac{f(M)}{g(M)}$ (при условии g(A) $\neq$ 0) непрерывна в точке A.

Доказательство:

1. $\dfrac{\lim\limits_{M\to A} f(M)}{\lim\limits_{M\to A} g(M)} = \frac{f(A)}{g(A)}$

3.3.6 Докажите теорему о непрерывности сложной функции нескольких переменных.

3.3.7 Докажите теорему об устойчивости знака непрерывной функции двух переменных.

Формулировка: Если функция u = f(M) непрерывна в точке A и f(A) $>$ 0 ($<$ 0), то $\exists$ δ-окрестность точки A, в которой f(M) $>$ 0 ($<$ 0).

Доказательство:

Докажем для f(A) $>$ 0 (Для f(A) $<$ 0 аналогично):

По определению непрерывности функции в т. A: $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 :\ \forall M \in \{M\}$, $0 < \rho(M, A) < \delta : |f(M) - f(A)| < \varepsilon$.

Возьмем ε = f(A). Тогда $\exists\delta > 0 : \forall M \in \{M\}$, $0 < \rho(M, A) < \delta :$ 0 $<$ f(M) $<$ 2f(A), то есть $\exists\delta$-окрестность т.A, в которой f(M) $>$ 0, что и требовалось доказать.

3.3.8 Докажите теорему о прохождении непрерывной функции двух переменных через любое промежуточное значение.

Формулировка: Пусть функция u = f(M) = f($x_1, \dots, x_m$) непрерывна на связном множестве $\{M\}$, пусть M_1 и M_2 — две любые точки из $\{M\}$, f(M_1) = u_1, f(M_2) = u_2, и пусть u_0 — любое число из сегмента $[u_1,\ u_2]$. Тогда на любой непрерывной кривой L, соединяющей точки M_1 и M_2 и целиком принадлежащей множеству $\{M\}$, найдется такая точка M_0, такая, что f(M_0) = u_0.

Доказательство:

Пусть L = $\{M(x_1, \dots, x_m)\colon\ x_1 = \varphi_1(t), \dots, x_m = \varphi_m(t), \alpha \le t \le \beta\}$ – непрерывная кривая, соединяющая точки M_1 и M_2 и целиком принадлежащая множеству {M}.

Точки M_1 и M_2 имеют координаты: $M_1(\varphi_1(\alpha), \dots, \varphi_m(\alpha))$, $M_2(\varphi_1(\beta), \dots, \varphi_m(\beta))$.

На кривой L заданная функция является сложной функцией переменной t:
u = f($\varphi_1(t), \dots, \varphi_m(t)$) =: F(t) (По теореме о непрерывности сложной функции F(t) непрерывна на сегменте $[\alpha, \beta]$).

F(α) = f($\varphi_1(\alpha), \dots, \varphi_m(\alpha)$) = f($M_1$) = u_1 и F(β) = f(M_2) = u_2.

В силу известной теоремы для функции одной переменной $\forall u_0 \in [u_1, u_2]$
$\exists\ t_0 \in [\alpha, \beta]$, такое, что F($t_0$) = u_0. Но F(t_0) = f($\varphi_1(t_0), \dots, \varphi_m(t_0)$) = f($M_0$), причем точка $M_0(\varphi_1(t_0), \dots, \varphi_m(t_0)) \in$ L.

Итак, $\exists$ точка $M_0 \in$ L: f(M_0) = u_0, что и требовалось доказать.

3.3.9 Докажите первую теорему Вейерштрасса для функции двух переменных.

Формулировка: Если функция u = f(M) непрерывна на замкнутом ограниченном множестве $\{M\}$, то она ограничена на этом множестве.

Доказательство:

1. Допустим, u = f(M) не ограничена на заданном множестве $\{M\}$.

2. Тогда $\forall$ n$\in$N $\exists\ M_n \in \{M\}$: $|f(M_n)| >$ n. Тем самым последовательность $\{M_n\}$ – бесконечно большая.

3. $\{M_n\}$ – ограниченная последовательность $\Rightarrow$ из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность $M_{k_n} \to$ A.

4. Покажем, что A $\in \{M\}$. $M_{k_n} \to$ A, т.е. в любой ε-окрестности т. A содержатся члены подпоследовательности M_{k_n}. Поэтому т. A - либо внутренняя, либо граничная. Если A - внутренняя, то A $\in \{M\}$.
Если A - граничная, то A тоже $\in \{M\}$, т.к. $\{M\}$ - замкнутое множество.

5. Т.к. т. A $\in \{M\}$, то f(M) непрерывна в т. A $\Rightarrow \lim\limits_{M \to A}$ f(M) = f(A), т.е. $\{f(M_{k_n})\} \to$ f(A), что противоречит тому, что $\{f(M_{k_n})\}$ неограничена в т. A $\Rightarrow$ u = f(M) ограничена на заданном множестве $\{M\}$, что и требовалось доказать.

3.3.10 Докажите вторую теорему Вейерштрасса для функции двух переменных.

Формулировка: Непрерывная на замкнутом ограниченном множестве функция достигает на этом множестве своих точных нижней и верхней граней.
Доказательство:

Докажем методом от противного. Пусть $\forall$ M $\in \{M\}$ f(M) $<$ U, где U – точная верхняя грань.

Введем функцию F(M) $= \frac{1}{U-f(M)} > 0$, непрерыва на $\{M\} \Rightarrow$ ограничена на $\{M\}$ (по 1 теореме Вейерштрасса), т.е. $\exists$A: $\forall$ M $\in \{M\}$ $0 <$ F(M) $<$ A $\Rightarrow$ f(M) $\leq$ U - $\frac{1}{A} <$ U, т.е. f(M) имеет верхнюю грань, меньшую U $\Rightarrow$ противоречие. Значит, f(M) $\leq$ U, что и требовалось доказать.

4 Тема 4. Дифференцируемые функции.

4.1 Определения

4.1.1 Функция f$(x_1, \ldots, x_m)$, дифференцируемой в точке M$(x_1, x_2, \ldots, x_m)$

Функция f$(x_1, \ldots, x_m)$ называется дифференцируемой в точке M$(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, если ее полное приращение в этой точке можно представить в виде
$\triangle$u $= A_1x_1 + \ldots + A_mx_m + \alpha_1\triangle x_1 + \ldots + \alpha_m\triangle x_m$, где $A_1, \ldots, A_m$ – некоторые числа(не зависят от $\triangle x_1, \ldots, \triangle x_m$), $\alpha_i = \alpha_i(\triangle x_1, \ldots, \triangle x_m)$, i = 1, 2, ..., m – бесконечно малые функции при $\{\triangle x_1 \to 0, \ldots, \triangle x_m \to 0\}$, равные нулю при $\triangle x_1 = \ldots = x_m = 0$.

4.1.2 Частная производная функции f$(x_1, \ldots, x_m)$ по переменной x_k в точке M$(x_1, x_2, \ldots, x_m)$

Пусть M$(x_1, \ldots, x_m)$ – внутренняя точка области определения функции u = f(M) = f$(x_1, \ldots, x_m)$. Рассмотрим $\triangle_{x_k}$u = f$(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k + \triangle x_k, x_{k+1}, \ldots, x_m)$ -
f$(x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_m)$.
Если $\exists \lim\limits_{\triangle x_k \to 0} \frac{\triangle_{x_k} u}{x_k}$, то он называется частной производной функции u = f$(x_1, \ldots, x_m)$ в точке M по переменной x_k

4.1.3 Первый дифференциал функции нескольких переменных

Первым дифференциалом функции u = f(M) называется линейная относительно $\triangle x_1, \ldots, \triangle x_m$ часть приращения функции в точке M:
u $= ux_1$(M)$\triangle x_1$ + ... + ux_m(M)$\triangle x_m$
Если x_i(i = 1, ..., m) – независимые переменные, то $x_i = \triangle x_i$. Тогда:
$u = ux_1$(M)x_1 + ... + ux_m(M)$x_m = \sum\limits_{j=1}^{m} ux_jx_j$.

4.1.4 Касательная плоскость к графику функции z = f(x, y) в точке $M_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$

Плоскость P, проходящая через точку N_0 поверхности S, называется касательной плоскостью к поверхности S в этой точке, если при N $\to$ N_0 (N $\in$ S) расстояние ρ(N, N_1) является бесконечно малой величиной более высокого порядка, чем ρ(N, N_0), т.е. $\lim\limits_{\substack{N \Rightarrow N_0 \\ N \in S}} \frac{\rho(N, N_1)}{\rho(N, N_0)} = 0$.
S = {N(x, y, f(x, y)), (x, y) $\in$ D}
$N_0 \in$ S
N – произвольная точка на S
NN_1 $\perp$ P, $N_1 \in$ P.

4.1.5 Функция нескольких переменных, n раз дифференцируемая в данной точке

Функция u = f($x_1, \ldots, x_m$) n раз дифференцируема в точке M_0, если она (n - 1) раз дифференцируема в некоторой окрестности точки M_0 и все ее частные производные (n - 1) - го порядка дифференцируемы в самой точке M_0.

4.1.6 Второй дифференциал функции f($x_1, \ldots, x_m$) в данной точке

Дифференциалом второго порядка (или вторым дифференциалом) функции u = f(x, y) в точке M_0 называется дифференциал от первого дифференциала u при следующих условиях:
1. u рассматривается как функция только $x_1, \ldots, x_m$
2. При вычислении дифференциалов от $ux_1(x_1, \ldots, x_m)$, ..., $ux_m(x_1, \ldots, x_m)$ приращения $\triangle x_1, \ldots, \triangle x_m$ независимых переменных $x_1, \ldots, x_m$ берутся равными $x_1, \ldots, x_m$.

$${}^2u = (u)$$

4.1.7 n – ый дифференциал функции f($x_1, \ldots, x_m$) в данной точке

Дифференциалом n-го порядка функции u = f(x, y) в точке M_0 называется дифференциал от (n - 1) дифференциала u при следующих условиях:
1. u рассматривается как функция только $x_1, \ldots, x_m$
2. При вычислении дифференциалов от частных производных (n - 1) порядка приращения $\triangle x_1, \ldots, \triangle x_m$ независимых переменных $x_1, \ldots, x_m$ берутся равными $x_1, \ldots, x_m$.

$${}^nu = ({}^(n-1)u)$$

4.1.8 Градиент функции f(x, y, z) в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$

Вектор grad $\vec{u}(M) = ux(M_0)\vec{i} + uy(M_0)\vec{j} + uz(M_0)\vec{k}$

4.1.9 производная по направлению $\vec{l} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ функции f(x, y, z) в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$

Если существует $\lim\limits_{\substack{M \Rightarrow M_0 \\ M \in L}} \frac{f(M)-f(M_0)}{M_0M}$, то он называется производной функции

u = f(M) в точке M_0 по направлению $\vec{l}$ и обозначается $ul(M_0)$.

$$M_0M = \begin{cases} |\overrightarrow{M_0M}|, & \overrightarrow{M_0M} \uparrow\uparrow \vec{l} \\ -|\overrightarrow{M_0M}| & \overrightarrow{M_0M} \uparrow\downarrow \vec{l} \end{cases}$$

$\vec{l}$ – направляющий вектор L.

4.2 Теоремы(без доказательства)

4.2.1 Сформулируйте теорему о необходимых условиях дифференцируемости функции $f(x_1, \ldots, x_m)$ в точке M_0 пространства R^m

Если функция u = f$(x_1, \ldots, x_m)$ дифференцируема в точке M$(x_1, \ldots, x_m)$, то она имеет в точке M частные производные по всем переменным.

4.2.2 Сформулируйте теорему о достаточных условиях дифференцируемости функции $f(x_1, \ldots, x_m)$ в точке M_0 пространства R^m

Если функция u = f$(x_1, \ldots, x_m)$ имеет частные производные по всем переменным в некоторой ε-окрестности точки M$(x_1, \ldots, x_m)$, причем в самой точке M эти частные производные непрерывны, то функция дифференцируема в точке M.

4.2.3 Сформулируйте теорему о достаточных условиях равенства $f_{xy} = f_{yx}$ в точке $M_0(x_0, y_0)$

Если в некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$ функция u = f(x, y) имеет смешанные частные производные f_{xy} и f_{yx}, и если эти смешанные производные непрерывны в точке M_0, то они равны в этой точке: $f_{xy} = f_{yx}$.

4.2.4 Сформулируйте теорему о касательной плоскости к графику функции двух переменных

Если функция z = f(x, y) дифференцируема в точке $M_0(x_0, y_0)$, то в точке $N_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, существует касательная плоскость к графику этой функции.

4.2.5 Сформулируйте теорему о дифференцируемости сложной функции нескольких переменных

Пусть:
1. функции x = $\varphi(u,v), y = \psi(u,v)$ дифференцируемы в точке (u_0, v_0)
2. функция z = f(x, y) дифференцируема в точке (x_0, y_0), где $x_0 = \varphi(u_0, v_0)$, $y_0 = \psi(u_0, v_0)$
Тогда сложная функция z = f($\varphi(u,v), \psi(u,v)$) дифференцируема в точке (u_0, v_0).

4.2.6 Запишите формулу для частных производных сложной функции

u =f($x_1, \ldots, x_m$), где $x_1 = \varphi_1(t_1, \ldots, t_k)$, ... , $x_m = \varphi_m(t_1, \ldots, t_k)$. Тогда:
$ut_i = ux_1 \cdot x_1 t_i + \ldots + ux_m \cdot x_m t_i = \sum\limits_{j=1}^{m} ux_j \cdot x_j t_i$ (i = 1, ... , k).

4.2.7 Запишите выражение производной функции f(x, y, z) по заданному направлению в данной точке через частные производные функции в этой точке

u = f(x, y, z) = f($x_0 + t\cos\alpha,\ y_0 + t\cos\beta,\ z_0 + t\cos\gamma$) = φ(t).
$ul(M_0) = \lim\limits_{M\to M_0} \frac{f(M)-f(M_0)}{M_0 M} = \lim\limits_{t\to 0} \frac{\varphi(t)-\varphi(0)}{t} = \varphi t\ (0)$.
$\varphi t(0) = ux(M_0)\ xt(0) + uy(M_0)\ yt(0) + uz(M_0)\ zt(0)$
$ul(M_0) = ux(M_0)\cos\alpha + uy(M_0)\cos\beta + uz(M_0)\cos\gamma$

4.2.8 Запишите выражение производной функции f(x, y, z) по заданному направлению в данной точке через градиент функции в этой точке

$ul(M_0)$ = (grad u(M_0)$\cdot$ $\vec{l}$) = |grad u|$\cdot|\vec{l}|\cdot \cos\varphi$ = |grad u|$\cdot$ $\cos\varphi$ = $Pr_{\vec{l}}$ grad u(M_0)

4.2.9 Запишите формулу Лагранжа конечных приращений для функции нескольких переменных. При каких условиях эта формула верна?

u = f($x_1, \ldots, x_m$) дифференцируема в ε-окрестности точки $M_0(x_1^0, \ldots, x_m^0)$. Тогда $\forall$ точки $M_0(x_1^0 + \triangle x_1, \ldots, x_m^0 + \triangle x_m)$ из этой ε-окрестности:
$\triangle u$ = f($x_1^0 + \triangle x_1, \ldots, x_m^0 + \triangle x_m$) - f($x_1^0, \ldots, x_m^0$) $= u|_N = ux_1(N)\triangle x_1 + \ldots + ux_m(N)\triangle x_m$
(N $\in MM_0$)

4.2.10 Запишите выражение для второго дифференциала функции нескольких независимых переменных

$[2]u = (u) = (uxx + uyy) = \Big(x(ux)x + y(ux)y\Big)x +$
$+ \Big(x(uy)x + y(uy)y\Big)y = [2]ux\ (x)^2 + 2uxyxy + [2]uy\ (y)^2$
$[2]u = (xx + yy)^2$u

4.2.11 Запишите выражение для дифференциала n –го порядка функции двух независимых переменных

$[n] = ([n-1]u) = (xx + xy)^n$u

4.2.12 Запишите выражение для второго дифференциала функции f(u, v), если u = u(x, y), v = v(x, y), причем (x, y) – независимые переменные

$$[2]u = (fuu + fvv) = \big[(fu)\big]x + fu[2]x + \big[(fv)\big]v + fv[2]y =$$
$$= \Big[(uu+vv)^2 f\Big] + \Big\{fu[2]u + fv[2]v\Big\}.$$

4.2.13 Запишите выражение для второго дифференциала функции f(u, v), если u = u(t), v = v(t), причем t – независимая переменная

4.2.14 Запишите выражение для второго дифференциала функции f(u, v, w), если u = u(x, y), v = v(x, y), w = w(x, y) причем (x, y) – независимые переменные

4.2.15 Запишите выражение для второго дифференциала функции f(u, v, w), если u = u(x, y, z), v = v(x, y, z), w = w(x, y, z), причем (x, y, z) – независимые переменные

4.2.16 Сформулируйте теорему о формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа для функции f(x, y)

4.2.17 Сформулируйте теорему о формуле Тейлора с остаточным членом в форме Пеано для функции f(x, y)

4.2.18 Сформулируйте теорему о формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа для функции $f(x_1, \ldots, x_m)$

4.2.19 Сформулируйте теорему о формуле Тейлора с остаточным членом в форме Пеано для функции $f(x_1, \ldots, x_m)$

sdfgsdfg

4.3 Теоремы(с доказательством)

4.3.1 Докажите теорему о непрерывности дифференцируемой функции нескольких переменных в точке

4.3.2 Докажите теорему о дифференциале суммы двух дифференцируемых функций нескольких переменных в данной точке

4.3.3 Докажите теорему о дифференциале произведения двух дифференцируемых функций нескольких переменных в данной точке

4.3.4 Докажите теорему о необходимых условиях дифференцируемости функции $f(x_1, \dots, x_m)$ в точке $f(x_1, \dots, x_m)$ пространства R^m

4.3.5 Докажите теорему о достаточных условиях дифференцируемости функции $f(x_1, \dots, x_m)$ в точке $f(x_1, \dots, x_m)$ пространства R^m

4.3.6 Докажите теорему о достаточных условиях равенства $f_{xy} = f_{yx}$ в точке $M_0(x_0, y_0)$

4.3.7 Докажите теорему о касательной плоскости к графику функции двух переменных.

4.3.8 Докажите теорему о дифференцируемости сложной функции f(u, v), , если u = u(x, y), , v = v(x, y), , причем (x, y) – независимые переменные

4.3.9 Докажите, что производная дифференцируемой в точке $M(x_0, y_0, z_0)$ функции f(x, y, z) по направлению $\vec{l} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ равна скалярному произведению вектора $\vec{l}$ и градиента функции f в точке M

4.3.10 Докажите теорему о формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа для функции $f(x_1, \dots, x_m)$

4.3.11 Докажите теорему о формуле Тейлора с остаточным членом в форме Пеано для функции f(x, y)

asfsdgr