Линейная алгебра и геометрия
Глава I. Векторное пространство
§1. Векторное пространство, размерность, изоморфизм

Определение. Множество V называется *векторным пространством* над полем F, если заданы операции $+$ и $\cdot : V \times V \to V$, $F \times V \to V$ и выполнены следующие аксиомы:

1. $\forall v_1, v_2, v_3 \in V$ выполнено $(v_1 + v_2) + v_3 = v_1 + (v_2 + v_3)$
2. $\exists \vec{0} \in V :\ \forall v \in V$ выполнено $v + \vec{0} = v$
3. $\forall v \in V \quad \exists - v \in V$: $v + (-v) = \vec{0}$
4. $\forall v_1, v_2 \in V$ выполнено $v_1 + v_2 = v_2 + v_1$
5. $\forall \alpha, \beta \in F, v \in V$ выполнено $(\alpha\beta)v = \alpha(\beta v)$
6. $\forall v \in V$ выполнено $1 \cdot v = v$
7. $\forall \alpha, \beta \in F, v \in V$ выполнено $(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$
8. $\forall \alpha \in F, v_1, v_2 \in V$ выполнено $\alpha(v_1 + v_2) = \alpha v_1 + \alpha v_2$

Утверждение. Линейным операциям над векторами соотвествует такие же операции над их координатами:

1. $x = eX, y = eY \Rightarrow x + y = e(X + Y)$
2. $\lambda x = e(\lambda X)$

Доказательство. Пусть $e = (e_1, e_2, ..., e_n)$ базис в V. Тогда

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i = (e_1, e_2, ..., e_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = eX$$

□

Определение. $\varphi : V \to W$ *линейно*, если:

1. $\forall v_1, v_2 \in V$ выполнено $\varphi(v_1 + v_2) = \varphi(v_1) + \varphi(v_2)$
2. $\forall v \in V, \lambda \in F$ выполнено $\varphi(\lambda v) = \lambda\varphi(v)$

Определение. φ называется *изоморфизмом*, если φ линейно и биективно.

Следствие. Если φ линейное отображение, то $\varphi(\vec{0}_V) = \varphi(\vec{0}_W)$

Доказательство.

$$\vec{0}_V + \vec{0}_V = \vec{0}_V \Rightarrow \varphi(\vec{0}_V + \vec{0}_V) = \varphi(\vec{0}_V) + (-\varphi(\vec{0}_V)) \Rightarrow \varphi(\vec{0}_V) = \vec{0}_W \Leftrightarrow dimV = dimW$$

□

Следствие. $dim V = n \Leftrightarrow V \cong F^n$, где F^n пространство столбцов высоты n.
("$\cong$"Чубаров обозначает изоморфность)

Доказательство. $\Longleftarrow$ Пусть $V \cong W$ изоморфизм $\Rightarrow dim V = dim W$. По условию $\exists \varphi : V \to W$ изоморфизм. Фиксируем базис $(e_1, e_2, ..., e_n)$ в V и покажем, что
$\varphi(e_1), \varphi(e_2), ..., \varphi(e_n)$ базис в W.
1. $\varphi(e_1), \varphi(e_2), ..., \varphi(e_n)$ - ЛНЗ и $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi(e_i) = \vec{0}_W \Rightarrow \sum\limits_{i=1}^{n} \varphi(\lambda_i e_i) = \vec{0}_W$,
φ - инъективно, но $\varphi(\vec{0}_V) = \vec{0}_W \Rightarrow \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = \vec{0}_V \Rightarrow$ все $\lambda_i = 0$
2. $\varphi(e_1), \varphi(e_2), ..., \varphi(e_n)$ - полная система: $\forall w \in W \ \exists v \in V : \varphi(v) = w$, так как φ - сюръективна. $\Rightarrow \exists x_1, x_2, ..., x_n \in F$; $v = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i \Rightarrow \varphi(v) = w = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \varphi(e_i) \Rightarrow$ $\varphi(e_1), \varphi(e_2), ..., \varphi(e_n)$ - базис в W.

$\Longrightarrow$ Пусть $dim V = dim W = n$. Построим изоморфизм. Фиксируем базис $e = (e_1, e_2, ..., e_n)$ в V и $f = (f_1, f_2, ..., f_n)$ в W. Положим: $\varphi(e_i) = f_i$. Достроим φ до линейного отображения, так что $\forall v \in V$ выполнено $v = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$. Тогда $\varphi(v) = \varphi(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \varphi(e_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i f_i$. Таким образом, φ линейно.

□

<u>**Замена базиса**</u>

Пусть $dim V = n, e = (e_1, ..., e_n)$ - старый базис, $e' = (e'_1, ..., e'_n)$ - новый базис.
Пусть известно, что $\forall e'_j$ выполнено

$$e'_j = \sum_{i=1}^{n} c_{ij} e_i = e \begin{pmatrix} c_{1j} \\ \vdots \\ c_{nj} \end{pmatrix} \Leftrightarrow e' = e C_{e \to e'},$$

где $C = (c_{ij})$.

Лемма. 1. $det\ C \neq 0$
2. $C_{e' \to e} = C^{-1}_{e \to e'}$

Теорема. Пусть e, e' два базиса в пространстве V, X_e и $X_{e'}$ столбцы координат одного и тоже вектора. Тогда $X_e = C X_{e'}$

Доказательство. $\forall x \in V$ выполнено

$$x = e X_e = e' X_{e'} = e C_{e \to e'} X_{e'} = e (C_{e \to e'} X_{e'})$$

□

§2. Подпространство

Определение. Подмножество U в пространстве V называется *подпространством* в V, если:

1. $\forall U \neq 0$
2. $\forall u_1, u_2 \in U$ выполнено $u_1 + u_2 \in U$
3. $\forall u \in U, \lambda \in F$ выполнено $\lambda u \in U$

Способы задания подпространства:

1. $U = \langle a_1, a_2, ..., a_n \rangle$
2. $dimV = n,\ W = \{v = eX | AX = 0\}$

Определение. *Линейная оболочка векторов* $a_1, a_2, ..., a_n \in V$ – это

$$\{\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + ... + \lambda_n a_n | \lambda_i \in F\}$$

Лемма. 1. $\langle a_1, a_2, ..., a_m \rangle := U$ – подпространство в V

2.$dim\ U = rk\{a_1, a_2, ..., a_m\}$

Доказательство. Если $dim\ U = n$, то фиксируем базис и составляем матрицу из столбцов координат $a_1, a_2, ..., a_m$:

$$A = (a_1^{\uparrow}, a_2^{\uparrow}, ..., a_m^{\uparrow}) \sim \begin{pmatrix} a_{1j_1} & \multicolumn{4}{l}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ 0 & a_{1j_2} & \multicolumn{3}{l}{\dots\dots\dots\dots} \\ \multicolumn{5}{l}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ 0 & 0 & \dots & a_{rj_r} & \dots \\ \multicolumn{5}{l}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ 0 & 0 & \multicolumn{3}{l}{\dots\dots\dots\dots} \end{pmatrix}$$

Элементарными преобразованиями строк приводим матрицу A к ступенчатому виду и получаем, что столбцы $a_{j_1}, a_{j_2}, ..., a_{j_r}$ составляют бызис в U.

□

Лемма. Любую ЛНЗ систему векторов в $V(dimV < \infty)$ можно можно дополнить до базиса пространства V.

Алгоритм: Пусть $a_1, a_2, ..., a_m$ - ЛНЗ, $m < n = dimV$, известны координаты этих векторов в некотором базисе. Тогда $rk(a_1^{\uparrow}, a_2^{\uparrow}, ..., a_m^{\uparrow}) = m$. Составим матрицу столбцов из них и припишем столбцы E порядка n:

$$(A|E_n) \sim \begin{pmatrix} \text{Выделим базисные столбцы} \\ \text{Э.П. строк в } A|E_n, \\ \text{включая столбцы А} \end{pmatrix} \sim rk(A|E_n) = n$$

Вывод: к $a_1, a_2, ..., a_m$ надо добавить единичные столбцы, вошедшие в базис матрицы $A|E_n$.

Операции с блочными матрицами

Определение. *Блочная матрица* – матрица, разбитая на подматрицы, которые обозначаются отдельными буквами.

Пример:

$$1.\ A = \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 4 \end{array}\right) = (A_1|A_2) \text{ - блочная строка.}$$

$$2.\ B = \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ \hline 1 & 3 \\ 4 & -2 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} B_1 \\ - \\ B_2 \end{pmatrix} \text{ - блочный столбец.}$$

1. Линейная оболочка.
2. ОСЛУ.

Теорема. Способы 1 и 2 равносильны, если $dimV < \infty$

Доказательство. $2 \Longrightarrow 1$: строим ФСР. $AX = 0$. Проводим элементарные преобразования строк, перенумеровывая неизвестные, таким образом чтобы привести матрицу к следующему виду:

$$A \underset{\text{строк}}{\overset{\text{э.п.}}{\sim}} \begin{pmatrix} \overbrace{1 \ \ \dots \ \ 0}^{r} & a_{1j} & \dots \\ \vdots \ \ \ddots \ \ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 \ \ \dots \ \ 1 & a_{rj} & \dots \\ \dots\dots\dots & \dots & \dots \\ 0 \ \ \dots \ \ 0 & 0 & \dots \end{pmatrix}, r+1 \leq j \leq n$$

Возвращаемся к уравнениям: $x_i = -\sum\limits_{j=r+1}^{n} a_{ij}x_j$, где $1 \leqslant i \leqslant r$, а $(x_{r+1}, ..., x_n)$ – свободные неизвестные. В векторном виде:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \\ x_{r+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sum\limits_{j=r+1}^{n} a_{1j}x_j \\ \vdots \\ -\sum a_{rj}x_j \\ x_{r+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_{r+1} \overbrace{\begin{pmatrix} -a_{1,r+1} \\ \vdots \\ -a_{r,r+1} \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}^{Y_1} + ... + x_n \overbrace{\begin{pmatrix} -a_{1,n} \\ \vdots \\ -a_{r,n} \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}}^{Y_n}$$

где $Y_1, ..., Y_n$ – фундаментальная система решений, т.е. базис пространства решений $AX = 0$.

Составим матрицу из столбцов ФСР.

$$\varPhi = \begin{pmatrix} -a_{1,r+1} & \dots & -a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ -a_{r,r+1} & \dots & -a_{r,n} \\ 1 & & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} = \left(\frac{-B}{E_{n-r}}\right) - \text{ фундаментальная матрица.}$$

В общем случае фундаметальная матрица – это матрица, имеющая $n - r = n - rkA$ ЛНЗ столбцов, которые являются решениями системы $AX = 0$, где $A \sim (E_r|B)$ без нулевых уравнений.

$1 \Longrightarrow 2$. Даны ЛНЗ векторы $c_1, c_2, ..., c_m$ в V.

Нужно найти такую матрицу $A_{p\times n}$, чтобы $W = \{X \in F^n | AX = 0\}$, где X - столбец координат произвольного вектора из $U = \langle c_1, c_2, ..., c_m\rangle$ Если составить матрицу из столбцов $c_1, c_2, ..., c_m$, то оно должна стать фундаметальной матрицей для ОСЛУ: $AX = 0$.

1 этап: Векторы $c_1, c_2, ..., c_m$ расписать по строкам:

$$\begin{pmatrix} \vec{c}_1 \\ \vdots \\ \vec{c}_m \end{pmatrix} \underset{\text{строк}}{\overset{\text{Э.П.}}{\sim}} (E_m|\underbrace{B}_{\text{n-m}})$$

2 этап: $\varPhi = \left(\frac{E_m}{B^T}\right) \rightsquigarrow A = (-B^T|E_{n-m})$ – искомая матрица системы. Значит, $p = n - m$. $\square$

Замечание. Столбец $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ принадлежит $c_1, ..., c_m \Leftrightarrow rk\left(c_1^\uparrow, ..., c_m^\uparrow| \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right) = rk(c_1^\uparrow, ..., c_m^\uparrow)$

Доказательство. Составить матрицу:

$$rk\left(c_1^\uparrow, ..., c_m^\uparrow| \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right) \underset{\text{строк}}{\overset{\text{Э.П.}}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} c_{11} & & & \dots\dots\dots \\ & \ddots & & \vdots \\ & & c_{mm} & \dots\dots\dots \\ \hline 0 & \dots & 0 & \sum a_{m+1,j}x_j \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \sum a_{n,j}x_j \end{array}\right),$$

где суммы $\sum a_{i,j}x_j := 0$, где $i = m + 1, ..., n$. $\square$

§3. Пересечение и сумма подпространств.

Утверждение. Пусть U_i – семейство подпространств векторного пространства V. Тогда $\bigcap\limits_{i\in I} U_i$ – подпространство V.

Доказательство.
1. $\vec{0}_V \in U_i,\ \forall i \in I \Rightarrow \vec{0}_V \in \bigcap\limits_{i\in I} U_i$
2. $\forall x, y \in U_i,\ \forall i \in I \Rightarrow x + y \in U_i, \forall i \in I \Rightarrow (x+y) \in \bigcap\limits_{i\in I} U_i$
3. $\forall x \in U_i,\ \forall i \in I,\ \forall \lambda \in F \Rightarrow \lambda x \in U_i, \forall i \in I \Rightarrow \lambda x \in \bigcap\limits_{i\in I} U_i$

$U_1 \bigcup U_2$ может быть подпространством: $u_1 + u_2 \notin U_1 \bigcup U_2$

□

Определение. *Суммой подпространств* $U_1, ..., U_m \subset V$ называется множество $U_1 + ... + U_m = \{u_1 + ... + u_m | u_i \in U_i\}$.

Утверждение. $U_1 + ... + U_m$ – подпр-во в $V, dim(U_1 + ... + U_m) \leqslant \sum\limits_{i=1}^{n} dim\ U_i$

Доказательство. Если $e_1, ..., e_m$ – базисы в этих подпространствах, то
$U_1 + ... + U_m = \langle e_1, ..., e_m \rangle :\ U_1 = \sum\limits_{i=1}^{n_1} \lambda_{1i} e_{1i}, ..., U_m = \sum\limits_{j=1}^{n_m} \lambda_{mj} e_{mj} \Rightarrow$
$U_1 + ... + U_m$ – линейная комбинация этих векторов.

□

<u>**Формула Грассмана.**</u> Если U_1, U_2 – конечные подпространства V, то $dim(U_1 + U_2) = dim\ U_1 + dim\ U_2 - dim(U_1 \cap U_2)$

Доказательство. $dim\ U_1 = n_1,\ dim\ U_2 = n_2,\ dim(U_1 \cap U_2) = r.$
Выберем $e_1, ..., e_r$ – базис в $U_1 \cap U_2$. Дополним их до базиса в U_1 векторами $a_{r+1}, ..., a_{n_1}$, в U_2 векторами $b_{r+1}, ..., b_{n_2}$ □

Утверждение. $\{a_i, b_j, c_k\}$ – базис $U_1 + U_2$ (их количество $n_1 + n_2 - r$).

Доказательство. Ясно, что это полная система. Докажем ЛНЗ:
Допустим $\sum\limits_{i=r+1}^{n_1} \alpha_i a_i + \sum\limits_{j=r+1}^{n_2} \beta_j b_j + \sum\limits_{k=1}^{r} \gamma_k c_k = 0 \implies$

$$\underbrace{\sum \alpha_i a_i + \sum \gamma_k c_k}_{\in U_1} = \underbrace{- \sum \beta_j b_j}_{\in U_1 \cap U_2} \implies$$

$\gamma_k' := - \sum \beta_j b_j = \sum \gamma_r' c_r \implies \sum \beta_j b_j + \sum \gamma_k' c_k = 0 \overset{\text{ЛНЗ}}{\implies} \beta_j = 0, \forall j = r+1, ..., n_2;$
$\gamma_k' = 0 \implies \sum \alpha_i a_i + \sum \gamma_k c_k = 0 \overset{\text{ЛНЗ}}{\implies} \alpha_i = 0,\ \forall i = r+1, ..., n; \gamma_k = 0,\ \forall k = 1, ..., r.$ □

<u>**Алгоритм вычисления базисов**</u> в $U_1 + U_2,\ U_1 \cap U_2$ $(dimV \leqslant \infty)$.

Замечание. $U_1 + U_2 = \langle a_1, ..., a_{n_1}, b_1, ..., b_{n_2} \rangle$

Доказательство. Можно составить матрицу из столбцов координат и Э.П. строк выявить базисные столбцы в этой расширенной матрице.
Вектор $v \in U_1 \cap U_2 \Longleftrightarrow \exists\ x_i, y_i \in F:\ v = \sum\limits_{i=1}^{n_1} x_i a_i = \sum\limits_{j=1}^{n_2} y_j b_j$, т.е.
$(x_1, ..., x_{n_1}, -y_1, ..., -y_{n_2})$ – решение ОСЛУ с той же самой матрицей.
Базис $U_1 \cap U_2$ будет давать ФСР (ее часть соответственно $\{a_i\}$ или $\{b_i\}$).

$\square$

1. Составить матрицу:

$$\big(\underbrace{a_1^{\uparrow} ... a_{n_1}^{\uparrow}}_{\text{лнз}} \big|\ \underbrace{b_1^{\uparrow} ... b_{n_2}^{\uparrow}}_{\text{лнз}}\big) \underset{\text{строк}}{\overset{\text{Э.П.}}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|ccccc} \multicolumn{3}{c|}{\overbrace{\hphantom{1 \ \dots \ 0}}^{E_{n_1}}} & & & & & \\ 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 & \vdots & \vdots \\ \hline 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 & \vdots & \vdots \end{array}\right)$$

Элементарными преобразованиями строк приводим к улучшенному ступенчатому виду. Ветокторы-столбцы $a_1, ..., a_{n_1}, b_1, ..., b_{n_2}$ – базис $U_1 + U_2$.

2. Вычислить $dim(U_1 \cap U_2) = n_1 + n_2 - m$ (это количество столбцов b_j не вошедших в базис суммы). $m = n_1 + k = dim(U_1 + U_2)$.

3. Выразить векторы $b_{k+1}, ..., b_{n_2}$ через базисы: $b_l = \sum\limits^{m} \alpha_{il} a_i + \sum\limits^{k} \beta_{sl} b_s$ – ЛНЗ $\Longleftrightarrow b_l - \sum \beta_{sl} b_s = \sum \alpha_{il} a_i \in U_1 \cap U_2$ (Их количество $dim(U_1 \cap U_2)$).

§4. Прямая сумма

Пусть V – векторное пространство над полем F, $U_1, ..., U_k$ – подпр-ва в V.

Определение. Сумма $U_1 + ... + U_k$ $(k \geqslant 2)$ называется *прямой суммой подпространств* $U_1, ..., U_k$, если $\forall u$ из суммы представляется в виде $u = u_1 + ... + u_k$ единственным образом.

<u>Обозначение:</u> $U_1 \oplus ... \oplus U_k$

Примеры:

1. $U_1 = \{A \in M_n(\mathbb{R}) | A^T = A\}$ – симметричные матрицы
2. $U_1 = \{B \in M_n(\mathbb{R}) | B^T = -B\}$ – кососимметричные матрицы

Утверждение. $M_n(\mathbb{R}) = U_1 \oplus U_2$, где U_1 – пространство симметричных матриц, а U_2 – пространство кососимметричная матриц.

Теорема. Следующие условия равносильны:

1. $U_1 + U_2 = U_1 \oplus U_2$
2. $U_1 \cap U_2 = \{0\}$
3. $dim(U_1 + U_2) = dim\ U_1 + dim\ U_2$
4. Базис в $U_1 + U_2$ – объединение базисов слагаемых.

Доказательство.
$1 \Rightarrow 2:$ $\forall u \in U_1 + U_2$ выполнено $u = u_1 + u_2$ – единственным образом. Допустим противное: пусть $\exists\ u_0 \in U_1 \cap U_2,\ u_0 \neq 0 \Longrightarrow u_0 = \underbrace{u_0}_{\in U_1} + \underbrace{0}_{\in U_2} = \underbrace{0}_{\in U_1} + \underbrace{u_0}_{\in U_2}$. Противоречие единственности $\Longrightarrow U_1 \cap U_2 = \{0\}$.
$2 \Rightarrow 3:$ По формуле Грассмана.
$3 \Rightarrow 4:$ Ясно, что $U_1 + U_2 = \langle a_1, ..., a_{n_1}, b_1, ..., b_{n_2} \rangle$ – эти векторы ЛНЗ, если

$$\exists \sum_{i=1}^{n_1} \alpha_i a_i + \sum_{j=1}^{n_2} \beta_j b_j = 0 \Longrightarrow \underbrace{\sum \alpha_i a_i}_{=0} = -\underbrace{\sum \beta_j b_j}_{=0} = \{0\} \in U_1 \cap U_2$$

$4 \Rightarrow 1:$ $\forall u = u_1 + u_2 = \sum\limits_{i=1}^{n_1} x_i a_i + \sum\limits_{j=1}^{n_2} y_j b_j$ раскладывается по базису единственным образом $\Rightarrow u_1, u_2$ единственны. $\square$

Теорема. Для $U_1, ..., U_k$ $(k \geqslant 2)$ следующие условия равносильны:

1. $U_1 + ... + U_k = U_1 \oplus ... \oplus U_k$
2. $\forall i = 1, ..., k$ выполнено $U_i \cap (\sum\limits_{j \neq i} U_j) = \{0\}$
3. $dim(U_1 + ... + U_k) = dim\ U_1 + ... + dim\ U_k$
4. Базис в $U_1 + ... + U_k$ – объединение базисов слагаемых.

Утверждение. Для любого пространства $U \subset V$ $\exists$ подпространство $W \subset V$: $V = U \oplus W$, где W – прямое дополнение к U.

Доказательство. Пусть $e_1, ..., e_k$ – базис в U, тогда $\exists$ векторы $e_{k+1}, ..., e_n$ $(n = dimV)$: $\{e_1, ..., e_n\}$ – базис в V, тогда $W := \langle e_{k+1}, ..., e_n \rangle$ $\square$

Факторпространство

Пусть V – векторное пространство, $U \subseteq V$ – подпространство.
Скажем, что векторы v_1 и $v_2 \in V$ сравнимы по модулю, если $v_1 - v_2 \in U$, то есть $v_1 \equiv v_2\ (mod\ U)$.

Утверждение. Отношение: $v_1 \sim v_2 \iff u_1 - u_2 \in U$ является отношением эквивалентности на V.

Класс эквивалентности вектора v:
$\vec{v} = \{v + u \mid \forall u \in U\} = v + U$
$V = \bigsqcup\limits_{v \in V} (v + V)$
Сравним с видом решения системы $AX = b : X = X_r + Y$ – частное решение + общее решение однородной ассоциированной $AY = 0$. Классы эквивалентности множества решений $AX = b$.
Обозначим: V/U – множество классов эквивалентности (смежных классов по U).
Термин: V/U – факторпространство V по U
Определим сложение классов: $(v_1 + U) + (v_2 + U) := v_1 + v_2 + U$
Определим умножение классов на скаляр $\lambda \in F$: $\lambda(v + U) := \lambda v + U$

Утверждение. Множество с введенными операциями является векторным пространством.

Утверждение. 1. Если $dimV < \infty$, то $dim(V/U) = dimV - dim\ U$
2. $(U \oplus W)/U \cong W$

Доказательство. Пусть $V = U \oplus W$
2. I способ: Построим отображение: $\forall v \in V\ \exists!\ u, w,$ такие что
$f : v = u + w \mapsto v + U,\ f$ – линейная. f – сюръективна: $w + u = f(w)$.
f – инъективна, так как если $w_1 + u = w_2 + u \Rightarrow w_1 - w_2 \in U$.
II способ: W имеет единственный общий вектор с любым смежным классом по U. $\forall x \in V = U \oplus W\ \exists!\ u \in U,\ v \in V$: $v = u + w \implies$ Рассмотрим $v + u = w + (u + U) = w + U$. Построим отображение $\varphi : V/U \mapsto W$ по правилу $\varphi(w + U) = w$, причем φ – линейное.
Тогда $\varphi((w_1+U)+(w_2+U)) = \varphi(w_1+w_2+U) = w_1+w_2 = \varphi(w_1+U)+\varphi(w_2+U)$.
$\forall \lambda \in F, \varphi(\lambda w + U) = \lambda w = \lambda\varphi(w + U)$. φ – биективное, $\forall w \in W$,
то $\varphi(w + U) = w$, если $\varphi(w + U) = 0 \in W \implies w + U = U \implies v = 0 \implies$
0 – единственный.

1. Рассмотрим базис V, составленный из базисов слагаемых:

$\underbrace{e_1, ..., e_{n_1}}_{\text{Базис в U}}, \underbrace{e_{n_1+1}, ..., e_n}_{\text{Базис в W}}$ $(n = dimV)$

$$\forall v \in V : v = \sum_{i=1}^{n_1} x_i e_i + \sum_{j=n_1+1}^{n} x_j e_j \Rightarrow \overline{v} = \sum_{j=n_1+1}^{n} x_j \overline{e_j}$$

Т.е. смежные классы векторов $e_{n_1+1}, ..., e_n$ – полная система в V/U.

Они ЛНЗ если $\sum\limits_{j=n_1+1}^{n} x_j \overline{e_j} = \overline{0} = U \Longrightarrow \sum\limits_{j=n_1+1}^{n} x_j e_j \in U \cap W = \{0\} \Longrightarrow$ Все $\lambda_j = 0 \Longrightarrow \{\overline{e}_{n_1+1}, ..., \overline{e_n}\}$ – базис V/U. □

Замечание. Если $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n_1} \\ x_{n_1+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, то $\overline{v} = \begin{pmatrix} x_{n_1+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

<u>**Внешняя прямая сумма пространств:**</u> Пусть $V_1, ..., V_m$ – векторные пространства над полями F.

<u>Обозначение:</u> $V = V_1 + ... + V_m = \{(v_1, ..., v_m) | v_i \in V_i, 1 \leq i \leq m\}$, V– внешняя прямая сумма пространств.

Замечание. Пространство $V = V_1 + ... + V_m$ можно превратить в прямую сумму подпространств: рассмотрим $U_i = \{(0_{V_1}, ..., v_i, ..., 0_{V_m}) | v_i \in V_i\} \subset V$.

$(v_1, ..., v_m) = (v_1, 0, ..., 0) + (0, v_2, 0, ..., 0) + ... \Longrightarrow V = U_1 \oplus ... \oplus U_m$.

В факторпространстве $V/U : \overline{0} = U$ и $-\overline{v} = \overline{(-v)}$

Определение. $dim(V/U)$ – коразмерность пространства U в пространстве V. Если $dimV < \infty$, то $codim_V(U) = dimV - dim\ U$.

§5. Линейные функции и сопряженное (двойственное) пространство.

Пусть V – векторное пространство над полем F.

Определение. Функция $f : V \mapsto F$ называется *линейной* если:

1. $\forall v_1, v_2 \in V \Longrightarrow f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2)$
2. $\forall v \in V, \lambda \in F \Longrightarrow f(\lambda v) = \lambda f(v)$

Определение. *Ядро функции:* $Kerf = \{v \in V | f(v) = 0\}$

Образ функции $Imf = f(V) = \{\alpha \in F | \ \exists v \in V : f(v) = \alpha\}$

Утверждение. $Kerf$ – подпространство в V. Если $f \not\equiv 0$, то $Kerf$ имеет коразмерность 1 в V.

Доказательство.

$$\forall v_1, v_2 \in Kerf, \lambda, \mu \in F \Longrightarrow f(\lambda v_1 + \mu v_2) = \lambda f(v_1) + \mu f(v_2) = 0$$

□

Обозначим: $V^* = \{f : V \mapsto F\}$, где f – линейная функция.

Определим на V^* операции сложения: $\forall f_1, f_2 \in V^*$ выполнено $(f_1 + f_2)(v) := f_1(v) + f_2(v)$. Умножение на элемент поля: $\forall f \in V^*, \lambda \in F$ выполнено $(\lambda f)(v) := \lambda f(v)$

Термин: V^* – пространство сопряженное к V.

Теорема. Если $dimV = n$, то $dimV^* = n \Longrightarrow V^* \cong V$.

Доказательство. Введем в V базис $e_1, ..., e_n, \forall v \in V : v = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$.

Тогда $\forall f \in V^*$, $f(v) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i f(e_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} f(e_i) f_i(v) = (\sum\limits_{i=1}^{n} f(e_i) f_i)(v), \forall v \in V$. $(f(e_1), ..., f(e_n))$ – строка коэффициентов функций f. $f = \sum\limits_{i=1}^{n} f(e_i) f_i(v) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i f_i(v)$. Таким образом $V^* = \langle f_1, ..., f_n \rangle$. Они ЛНЗ, если $\exists \lambda_1, ..., \lambda_n \in F$: $\underbrace{\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i f_i}_{\widetilde{f}} = 0$. $\widetilde{f}(e_j) = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i f_i(e_j) = \lambda_j = 0, \ 1 \le j \le n$. $f_i(e_j) = \begin{cases} 1, j = i \\ 0, j \neq i \end{cases} \Longrightarrow$

$\lambda_1 = ... = \lambda_n = 0$.

□

Примеры:

1.$V=\mathbb{R}[x], x_0\in\mathbb{R}$ – фиксированная точка. $f: p(x)\mapsto p(x_0)$.
Рассмотрим $V_n=\{p(x)|deg\ p\neq n\}, \forall n\in\mathbb{N}$.
Определим $Kerf=\{p(x)\mid p(x_0)=0\}$. Базис: $(x-x_0),(x-x_0)^2,...,(x-x_0)^n$.

2.$dimV=n$, пусть $e_1,...,e_n$ – базис в V. $\forall v\in V, v=\sum\limits_{i=1}^{n}x_ie_i$. Рассмотрим $f_i(v)=x_i$ – i-ая координатная функция.

Определение. Обозначим $f_i:=e^i,\ 1\leq i\leq n$. $\{e^1,...,e^n\}$ – базис в V^*, двойственный (биортогональный) к базису $e_1,...,e_n$.

По построению $e^i(e_j)=\begin{cases}1, j=i\\ 0, j\neq i\end{cases}$ (символ Кронекера)

Разложение $\forall v\in V$ по базису $e_1,...,e_n$ имеет вид $v=\sum\limits_{i=1}^{n}e^i(v)\ e_i$

Утверждение. Строки коэффициентов линейных функций: $f(v)=\sum\limits_{i=1}^{n}a_ix_i$ изменяются при переходе к новому базису по формулам: $\vec{a}=(a_1,...,a_n)$,
$\vec{a'}=\vec{a}C_{e\to e'}$

Доказательство. $f(v)=\vec{a'}x'^{\uparrow}$. Знаем, что $X=CX'\iff\vec{a}(CX')=\vec{a'}X'\iff(\vec{a}\ C)X'=\vec{a'}X'$, верно $\forall x'\in F^n$. □

Примеры взаимных базисов:

Пусть $V=\mathbb{R}_n[x]=\{p(x)=a_0+a_1x+...+a_nx^n|\ n\in\mathbb{N},\ a_i\in\mathbb{R}\}$

1. С базисом: $1,\frac{x-x_0}{1!},...,\frac{(x-x_0)^n}{k!},\ x_0\in\mathbb{R}$ – фиксированное число.

$$p(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{p^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

Можно рассмотреть линейные функции $\delta^{(k)}:\delta^{(k)}(p):=p^{(k)}(x_0),\ k=0,...,n$.
$\{\delta^{(k)},k=0,...,n\}$ – базис в V^* двойственный к тейлоровскому базису.

2. $V=\mathbb{R}_n[x]$. Пусть $x_0,...,x_n$ – попарно различные числа. Рассмотрим линейные функции $\varphi_k(p)=p(x_k),\ k=0,..,n$.

$$\forall p(x)=\sum_{k=0}^{n}p(x_k)l_k(x),\quad l_k(x_i)=\delta_{ik},\quad l_k(x)=\frac{\prod_{i\neq k}(x-y_i)}{\prod_{i\neq k}(x_k-x_i)}$$

<u>Обозначение:</u> $V^{**}=(V^*)^*$ – второе сопряженное

Теорема. Если $dimV < \infty$, то $V^{**} \cong V$, причем изоморфизм не зависит от базиса.

Доказательство. Построим отображение $\varphi: \ V \mapsto V^{**}, \ \forall v \in V:$
$\varphi(v) := \varphi_v, \ \varphi_v \in V^{**}. \ \ \varphi_v(f) := f(v), \ \forall f \in V^*$. Ясно что φ – линейное отображение: $\forall f \in V^* \ \ \varphi_{v_1+v_2}(f) = f(v_1 + v_2) = \varphi_{v_1}(f) + \varphi_{v_2}(f)$, и $\forall \lambda \in F$
$\varphi_{\lambda v}(v) = f(\lambda v) = \lambda f(v) = \lambda \varphi_v(f)$
φ – инъективное отображение $\Longleftrightarrow Ker\varphi = 0:$
$Ker\varphi = \{v \in V | \ f(v) = 0, \ \forall f \in V^*\} = \{0\}$. Таким образом, $\varphi: \ V \longmapsto W$ – инъективное линейное отображение. Но $dimV = dim(V^*)^* \Longrightarrow \varphi$ – сюръективное отображение.
Подробнее: если $\varphi: \ V \longmapsto W$ – инъективное линейное отображение и $dimV = dimW$, то оно сюръективно: $\exists e_1, ..., e_n$ – базис в V, тогда $\varphi(e_1), ..., \varphi(e_n)$– ЛНЗ $\Longrightarrow \varphi(e_1), ..., \varphi(e_n)$ – базис в W. Рассмотрим $\lambda_1\varphi(e_1) + ... + \lambda_n\varphi(e_n) = 0_W \Longleftrightarrow \varphi(\lambda_1 e_1 + ... + \lambda_n e_n) = 0_W$. Но $\varphi(0_V) = 0_W$.
Инъективность $\Longrightarrow \underbrace{\lambda_1 e_1 + ... + \lambda_n e_n}_{\text{лнз}} = 0_V \Longrightarrow \lambda_1 = ... = \lambda_n = 0.$

$\square$

Теорема. Векторы $a_1, ..., a_k \in V$– ЛНЗ $(dimV < \infty) \exists f_1, .., f_k \in V^*:$
$det(f_i(a_j)) \neq 0$.

Доказательство.
$\Longrightarrow$ Дополним векторы до базиса V: $a_1, ..., a_k, ..., a_n$
По нему строим $f_1, ..., f_n$ – двойственный базис. Тогда $f_j(a_i) = \delta_{ij}$. по определению $f_j(a_i) = E \Longrightarrow det(f_j(a_i)) \neq 0$
$\Longleftarrow$ Пусть $P := (f_j(a_i)), \ P \in Mat_{k\times k}$. Предположим, что P – невырожденная, тогда $(a'_1, ..., a'_k) = (a_1, ..., a_k)P^{-1}$

$$(f_j(a'_i)) = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_k \end{pmatrix} (a'_1 \cdot ... \cdot a'_k) = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_k \end{pmatrix} (a_1 \cdot ... \cdot a_k)P^{-1} = PP^{-1} = E \Longrightarrow$$

$a'_1, ..., a'_k$ – ЛНЗ $\Longrightarrow a_1, ..., a_k$ – ЛНЗ.

$\square$

Глава II. Линейные отображения и операторы
§1. Линейные отображения, их матрицы. Ядро и образ.

Пусть V, V' – векторные пространства над полем F.

Определение. $\varphi: \ V \longmapsto V'$ – *линейное отображение*, если:
1. $\forall v_1, v_2 \in V: \ \varphi(v_1 + v_2) = \varphi(v_1) + \varphi(v_2)$
2. $\forall v \in V, \lambda \in F: \varphi(\lambda v) = \lambda\varphi(v)$

Следствие. $\varphi(0_V) = 0_{V'}$

$\varphi : V \longmapsto V$ – *линейный оператор* на V.

Определение. *Ядро линейного отображения* $\varphi : V \longmapsto V'$ $(V \longmapsto V)$.
$Ker\varphi = \{v \in V| \ \varphi(v) = 0_{V'}\}$ (в частности, $0_V \in Ker\varphi$).

Образ линейного отображения φ (или множество значений φ) – это
$Im\varphi = \varphi(V) = \{v' \in V'| \ \exists v \in V : \varphi(v) = v'\}$.

Утверждение. 1. $Ker\varphi$ - подпространство в V.
2. $Im\varphi$ - подпространство в V'.

Доказательство.
1. $0_V \in Ker\varphi$, если $\varphi(v_1) = \varphi(v_2) = 0_{V'}$, то $\varphi(v_1 + v_2) = \varphi(v_1) + \varphi(v_2) = 0_{V'}$, и, если $\lambda \in F$, то $\varphi(\lambda v_1) = \lambda\varphi(v_1) = 0_{V'}$.
2. $0_{V'} \in Im\varphi$, если $v'_1 = \varphi(v_1)$, $v'_2 = \varphi(v_2)$, то $v'_1 + v'_2 = \varphi(v_1) + \varphi(v_2) = \varphi(v_1 + v_2)$ и, если $\forall\lambda \in F$, то $\lambda v'_1 = \varphi(\lambda v_1) \in Im\varphi$

$\square$

Теорема. Если $dimV < \infty$, то $dimIm\varphi = dimV - dimKer\varphi$

Доказательство. Если фикс. базис $e_1, ..., e_n$ в V, то $Im\varphi = \langle\varphi(e_1), ..., \varphi(e_n)\rangle$
$\forall v \in V: \ v = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i \Longrightarrow \varphi(v) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i\varphi(e_i)$. В частности, $dimIm\varphi = m \le n$.
Выберем базис в $Im\varphi: \ f_1, ..., f_m$. $\forall j = 1, ..., m \ \exists a_j \in V: \ \varphi(a_j) = f_j$.
Поймем, что векторы $a_1, ..., a_m$ – ЛНЗ. $\exists\alpha_1, ..., \alpha_m \in F$
Допустим, что $\alpha_1 a_1, ..., \alpha_m a_m = 0 \Longrightarrow \varphi(\sum\limits_{j=1}^{m} \alpha_j a_j) = \sum\limits_{j=1}^{m} \alpha_j\varphi(a_j) = \sum\limits_{j=1}^{m} \alpha_j f_j = 0_{V'}$
Т.к. f_j – ЛНЗ $\Longrightarrow \alpha_j = 0, \ \forall_j = 1, ..., m$
Возьмем произвольный $v' \in Im\varphi: \ v' = \sum\limits_{j=1}^{m} \beta_j f_j$
По определению образа $\exists v \in V: \ \varphi(v) = v'$

Тогда рассмотрим $\varphi(v - \sum\limits_{j=1}^{m} \beta_j a_j) = v' - \sum\limits_{j=1}^{m} \beta_j f_j = 0_{V'} \Longrightarrow v - \sum\limits_{j=1}^{m} \beta_j a_j \in Ker\varphi$
Выберем базис в $Ker\varphi: \ \{b_1, ..., b_r\} \Longrightarrow$

$$v - \sum_{j=1}^{m} \beta_j a_j = \sum_{k=1}^{r} \gamma_k b_k \Longrightarrow v = \sum_{j=1}^{m} \beta_j a_j + \sum_{k=1}^{r} x_k b_k$$

Если взять v произвольным, $v' = \varphi(v)$ – разлагается по базису $f_1, ..., f_m$ в $Im\varphi$, то предыдущие выкладки остаются в силе $\Longrightarrow \forall v \in V$ – линейная комбинация векторов $\{a_j; b_k\}$. Эти векторы ЛНЗ в $V \Longrightarrow$ базис в $V \Longrightarrow dimV = m + r$.
Допустим, что

$$\exists \beta_j, \ \gamma_j: \ \sum_{j=1}^{m} \beta_j a_j + \sum_{k=1}^{r} \gamma_k b_k = 0_V \Longrightarrow \varphi(\sum_j + \sum_k) = \sum_{j=1}^{m} \beta_j f_j + 0 = 0_{V'} \Longrightarrow$$

$$\gamma_j = 0, \ j = 1, ..., m \Longrightarrow \underbrace{\sum_{k=1}^{r} \gamma_k b_k}_{\text{ЛНЗ}} = 0 \Longrightarrow \gamma_k = 0, \ k = 1, ..., r.$$

$\square$

Пусть $e = e_1, ..., e_n$ – базис в $V, \ \forall v \in V: \ v = \sum\limits_{j=1}^{n} x_j e_j \Longrightarrow \varphi(v) = \sum\limits_{j=1}^{n} x_j \varphi(e_j)$.
Если в V' задан базис $f = \{f_1, ..., f_m\}$ и известно разложение векторов $\varphi(e_j)$ по этому базису, $\varphi(e_j) = \sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij} f_i$, то можно вычислить $\varphi(v)$.
$A_{\varphi,e,f} = (a_{ij})$ – матрица линейного отображения φ в паре базисов e и f. Таким образом, столбцы матрицы A_φ – столбцы координат $\varphi(e_1), ..., \varphi(e_m)$ в базисе f.
Для $\varphi: \ V \longmapsto V$ по умолчанию $f = e$ (второй базис равен первому), остается $A_{\varphi,e}$ – матрица линейного оператора φ в базисе e

.

$V \mapsto V^{**} = (V^*)^*$ – канонический изоморфизм.
$\langle f|v\rangle$ – значение функционала f на векторе v
$\langle f|$ – bra-vector
$|v\rangle$ – ket-vector.

Теорема.
1. Если $dimV < \infty$, $\varphi : V \mapsto V'$ – линейное отображение, то $dimIm\varphi = dimV - dimKer\varphi$
2. $Im\varphi \cong V/Ker\varphi$

Доказательство.
1. Пусть $dimIm\varphi = m \leq dimV'$, выберем в образе $Im\varphi$ базис $f_1, ..., f_m$.

$\forall j,\ 1 \le j \le m,\ \exists\ e_j \in V : \varphi(e_j) = f_j.$

$$\forall v \in V : v' = \varphi(v) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j f_j = \varphi\,(\underbrace{\sum_{j=1}^{m} \lambda_j e_j)}_{v_1 \in V} \Longrightarrow \varphi(v - v_1) = 0, \text{т.е. } v - v_1 \in Ker\varphi.$$

Выберем в $Ker\varphi$ базис: $c_1, ..., c_r$ $(r = dimKer\varphi) \Longrightarrow v - v_1 = \sum\limits_{k=1}^{r} \mu_k c_k \Longrightarrow$

$v = \sum\limits_{j=1}^{m} \lambda_j e_j + \sum\limits_{k=1}^{r} \mu_k c_k \Longrightarrow V = \langle e_1, ..., e_m, c_1, ..., c_r \rangle$

$e_1, ..., e_m, c_1, ..., c_r$ – ЛНЗ, если: $\exists\ \varepsilon_j, \gamma_k \in F : \varphi(\sum\limits_{j=1}^{m} \varepsilon_j e_j + \sum\limits_{k=1}^{r} \gamma_k e_k) = 0_V \Longrightarrow$

$\sum\limits_{j=1}^{m} \underbrace{\varepsilon_j f_j}_{\text{ЛНЗ}} = 0_{V'} \Longrightarrow \varepsilon_j = 0,\ 1 \le j \le m \Longrightarrow \sum\limits_{k=1}^{r} \underbrace{\gamma_k e_k}_{\text{ЛНЗ}} = 0 \Longrightarrow \gamma_k = 0,\ 1 \le k \le r.$

2. %Rem: Если $U \subseteq V$, то $V/U = \overline{v} \equiv \{v + u |\ u \in U\} = v + U$ – факторпространство V по U, где $Ker\varphi := U$

Рассмотрим отображение $\pi : V/U \mapsto Im\varphi \subseteq V',\ \pi(\overline{v}) = \varphi(v).$

Корректность определения: если $v_1 \in V : \overline{v_1} = \overline{v}$, то $v_1 = v + u_1$,

где $u_1 \in U = Ker\varphi \Longrightarrow \varphi(v_1) = \varphi(v) + \underbrace{\varphi(u_1)}_{\equiv 0} \Longrightarrow \pi(\overline{v_1}) = \pi(\overline{v})$

π – линейное отображение:

$$\pi(\overline{v_1} + \overline{v_2}) = \pi(\overline{v_1 + v_2}) = \varphi(v_1 + v_2) = \varphi(v_1) + \varphi(v_2) = \pi(\overline{v_1}) + \pi(\overline{v_2}),\ \forall v \in V, \lambda \in F.$$

$$\pi(\lambda\overline{v}) = \pi(\overline{\lambda v}) = \varphi(\lambda v) = \lambda\varphi(v) = \lambda\pi(\overline{v})$$

π – биективное:

Сюръективность: $\forall v' \in Im\varphi\ \exists\ v \in V : \varphi(v) = v' \Longrightarrow \pi(\overline{v}) = \varphi(v) = v'.$

Инъективность: допустим, что $\pi(\overline{v_1}) = \pi(\overline{v_2}) \Longrightarrow \varphi(v_1) = \varphi(v_2) \Longrightarrow$

$v_2 - v_1 \in Ker\varphi \Longrightarrow \exists\ u \in U = Ker\varphi : v_2 = v_1 + u \Longrightarrow \overline{v_2} = \overline{v_1}$

$\square$

<u>Матрицы линейного отображения</u> $\varphi : V \mapsto V'$

$\forall v = \sum\limits_{j=1}^{n} x_j e_j$. $e = (e_1, ..., e_n)$ – базис в V, $f = (f_1, ..., f_m)$ – базис в V',

$(dimV = n,\ dimV' = m) \Longrightarrow$

$$\varphi(v) = \sum_{j=1}^{n} x_j \varphi(e_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij} f_i = \sum_{i=1}^{m} (\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j) f_i \quad (1)$$

Если $\varphi(e_j) = \sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij} f_i,\ (a_{ij}) = A_{\varphi,e,f}.$

<u>Обозначение:</u> $y = \varphi(v),\ v = eX_e^{\uparrow} \Longrightarrow y = \varphi(v) = fY_f^{\uparrow} = \sum\limits_{i=1}^{m} y_i f_i.$

$(1) \Longrightarrow Y_e^{\uparrow} = A_{\varphi,e,f} X_e^{\uparrow} \quad (2)$
$Ker\varphi = \{v = eX_e^{\uparrow} | \varphi(v) = 0\}$. Согласно формуле (2), $v \in Ker\varphi \Longleftrightarrow$ $A_{\varphi,e,f} X_e^{\uparrow} = 0$ – ОСЛУ с матрицей $A_\varphi \Longrightarrow dimKer\varphi = n - rkA_\varphi$
Но $Im\varphi = \langle \varphi(e_1), ..., \varphi(e_n) \rangle$ – линейная оболочка столбцов матрицы $A_\varphi \Longrightarrow$ $dimIm\varphi = rkA_\varphi$. Получили матричное доказательство формулы для $dimIm\varphi$.

Лемма. Линейное отображение $\varphi : V \mapsto V'$ инъективно $\Longleftrightarrow Ker\varphi = \{0\}$
(и $\Longrightarrow \varphi(V) \cong V$)

Доказательство.
$\Longrightarrow$: φ - инъективно. Знаем, что $\varphi(0_V) = 0_{V'}$, а т.к. φ инъективно, то 0_V, единственный вектор из V, $\mapsto 0_{V'} \Longrightarrow Ker\varphi = \{0_V\}$.
$\Longleftarrow$: Пусть $\varphi(v_1) = \varphi(v_2) \Longrightarrow \varphi(v_1 - v_2) = 0_{V'} \Longrightarrow v_1 - v_2 \in Ker\varphi = \{0\} \Longrightarrow$ $v_1 = v_2$

□

Задача: Пусть $\varphi :\ V \mapsto V',\ A_{\varphi,e,f}$ – матрица φ. При каких усл. на A_φ :
1.φ инъективно?
2.φ сюръективно?
3.φ биективно?

Примеры:
1. $V = \mathbb{R}_n[x] = \{a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n \mid a_i \in \mathbb{R}\}$ – пространство многочленов степени $\leq n$. Рассмотрим базис: $1, \frac{x}{1!}, ..., \frac{x^n}{n!}$

$$\frac{x^2}{2!} \mapsto \frac{x}{1!};\ \varphi(e_j) = e_{j-1},\ 1 \leq j \leq n.$$

$$\varphi = \frac{d}{dx},\ \frac{d}{dx} : V \mapsto V \quad (\text{либо} V' = \mathbb{R}_{n-1}[x])$$

$Ker\varphi = \{const\},\ Im\varphi = \mathbb{R}_{n-1}[x]$

$$A_{\varphi,e} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Жорданова клетка порядка $n+1$ с диагональным элементом $\lambda = 0$.
2. Пусть $V = U_1 \oplus U_2$ – прямая сумма подпространств.
Определим $\varphi : V \mapsto V,\ \forall v = u_1 + u_2,\ \varphi(v) = u_1$ – проектирование V на подпространство $U_1 \mid\mid U_2$.

φ – линейный оператор. $Ker\varphi = U_2,\ Im\varphi = U_1$

Если $dim\ U_1 = k,\ dim\ U_2 = n-k.$

Рассмотрим $\underbrace{e_1, ..., e_k}_{\text{базис } U_1}, \underbrace{e_{k+1}, ..., e_n}_{\text{базис } U_2} \Longrightarrow A_{\varphi,e} = \left(\begin{array}{c|c} E_k & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$

<u>**Вычисление матрицы**</u> $A_{\varphi,e,f}$:

$A_\varphi e_j^\uparrow$ – j-й столбец матрицы A_φ в базисе f, где $1 \le j \le n$.

Рассмотрим задачу: даны ЛНЗ векторы $a_1, ..., a_n$ в V и некоторые векторы $b_1, ..., b_n$ в V'. Найти матрицу линейного отображения $\varphi : V \mapsto V'$ такого, чтобы $\varphi(a_i) = b_i,\ 1 \le i \le n.$

По формуле, $b_j^\uparrow = A_\varphi a_j^\uparrow,\ 1 \le j \le n \Longleftrightarrow A_\varphi(a_1^\uparrow, ..., a_n^\uparrow) = (b_1^\uparrow, ..., b_n^\uparrow)$

Уравнение вида: $XA = B,\ detA \neq 0 \Longrightarrow X = BA^{-1}$

$$\left(\frac{A}{B}\right) \underset{\text{столбцов}}{\overset{\text{Э.П.}}{\sim}} \left(\frac{E}{X}\right) \Longrightarrow X = A_{\varphi,e,f}$$

$$(A^T|B^T) \underset{\text{строк}}{\overset{\text{Э.П.}}{\sim}} (E|X^T)$$

<u>**Изменение матрицы линейного отображения (оператора) при замене базисов:**</u>

Пусть $e, e' :\ e' = eC_{e\to e'}$ в V и $f, f' :\ f' = fD_{f\to f'}$ в V'.

Но $X_{e'} :\ X_e = C_{e\to e'}X_{e'}\quad (3)$

$Y_{f'} :\ Y_f = D_{f\to f'}Y_{f'}\quad (3')$

$D_{f\to f'}Y_{f'} = A_{\varphi,e,f}C_{e\to e'}X_{e'}$

$Y_{f'} = (D^{-1}A_\varphi C)X_{e'}\quad (*)$

$(*)$ Сравним это с формулой:

$$Y_{f'} = A_{\varphi,e',f'},\ \forall X \in F^n, Y \in F^m \Longrightarrow A_{\varphi,e',f'} = D^{-1}_{f\to f'}A_{\varphi,e,f}C_{e\to e'}$$

В качестве X по очереди взять столбцы E_n, в качестве Y – столбцы E_m.

Если $\varphi : V \longmapsto V$ – линейный оператор, e, e' – базисы, $C = C_{e\to e'}$, то $a_{\varphi,e'} = C^{-1}A\varphi, e\ C\ (*)$

<u>Термин:</u> Две матрицы называются *подобными*, если

$$\exists C :\ A' = C^{-1}AC\ (detC \neq 0)$$

Утверждение. Если A и A' подобные, то $|A'| = |A|$ и $rkA' = rkA$.

$(*) \Longleftrightarrow CA' = AC$. Составим матрицу $(C|AC) \underset{\text{строк}}{\overset{\text{Э.П.}}{\sim}} (E|A')$.

§2. Действия над линейными отображениями и операторами.

$\varphi, \psi : V \longmapsto V'$ –линейное.
$\forall v \in V \ (\varphi + \psi)(v) := \varphi(v) + \psi(v)$
$\forall \lambda \in F \ (\lambda\varphi)(v) := \lambda\varphi(v)$

Утверждение.
1.$\mathcal{L}(V, V')$ является векторным пространством над F
2. Если $dimV = n, \ dimV' = m$, то $\mathcal{L}(V, V') \cong M_{m\times n}(F)$

Доказательство. 1. "Очевидно".

2. Если фиксировать базисы e в V, f в V', то $\forall\varphi \longleftrightarrow A_{\varphi,e,f}$, причем:
$A_{\varphi+\psi} = A_\varphi + A_\psi, \ \ A_{\lambda\varphi} = \lambda A_\varphi$

Если X – столбец координат вектора v, $v' = \varphi(v)$, Y – столбец координат v'.

$Y = A_\varphi X$,

$\widetilde{Y}$ – столбец координат вектора $\psi(v)$, то $\widetilde{Y} = A_\psi X, \ (\varphi+\psi)(v) = \varphi(v) + \psi(v) \Longrightarrow \varphi(v) + \psi(v)$ имеет столбец координат $Y + \widetilde{Y} = A_\varphi X + A_\psi X = (A_\varphi + A_\psi)X = A_{\varphi+\psi}X \Longrightarrow \varphi \longmapsto A_{\varphi,e,f}$ – изоморфизм $(dim\mathcal{L}(V, V') = n \cdot m)$

□

<u>Умножение (композиция) линейных отображений (операторов):</u>

Пусть $V \xmapsto{\psi} V' \xmapsto{\varphi} V''$

Утверждение. Если $\varphi, \ \psi$ – линейные, то $\varphi \cdot \psi$ – линейное

В частности, для линейных операторов: $\varphi \cdot \psi$ – линейный оператор в этом же пространстве.

<u>Обозначим:</u> $\mathcal{L}(V)$ – множество всех линейных операторов на V.

Теорема. С операциями $+, \ \lambda\cdot$, и $\cdot$ $\ \mathcal{L}(V)$ является [линейной] алгеброй; если $dimV = n$, то $L(V) \cong M_n(F)$

(A – линейная алгебра, если на A заданы операции $+, \cdot, \lambda\ \cdot$, такие что

1. A_+ – кольцо ассоциативное

2. $A_{+,\lambda\cdot,\ \cdot}$ – векторное пространство

3. $\lambda(ab) = (\lambda a)b, \ \forall\lambda \in F, \ a, b \in A$.)

Доказательство. 1, 2 уже проверены.
3. $\forall v \in V, \ (\lambda(ab))(v) = \lambda((ab)(v)) = \lambda a(b(v)) = (\lambda a)(b(v)) \Longrightarrow \lambda(ab) = (\lambda a)b$, для $a, b \in \mathcal{L}(V)$. □

Геометрическое доказательство неравенства $rk(AB) \le \begin{cases} rkA \\ rkB \end{cases}$

(для любых матриц A, B, т.ч. $\exists AB$).

Доказательство. Если $A_{m\times n},\ B_{n\times p}$, то $\mathbb{R}^p \xmapsto{B} \mathbb{R}^n \xmapsto{A} \mathbb{R}^m$
$rk(AB) = dim(AB(\mathbb{R}^p)) \le dimB(\mathbb{R}^p)$
$A(\mathbb{R}^n) \supseteq (AB)(\mathbb{R}^p) \Longrightarrow rk(AB) = dimIm(AB) \le dimImA = rkA.$

Случай равенства. Если $|A| \ne 0$, то A задает изоморфизм между $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^m \Longrightarrow dimB(\mathbb{R}^p) = dim(AB(\mathbb{R}^p))$, т.е. $rkB = rkAB$

□

Многочлены от линейного оператора:

Пусть $p(t) = a_0t^m + a_1t_{m-1} + ... + a_{m-1}t + a_m,\ \forall a_i \in F,\ i = 0, ..., m.$
Тогда $p(\varphi) = a_0\varphi^m + a_1\varphi^{m-1} + ... + a_{m-1}\varphi + a_m\varepsilon$

$\varepsilon(v) = v, \forall v \in V$ – тождественный оператор.

Многочлен $p(t)$ – *аннулирующий многочлен оператора* φ, если $p(\varphi) = 0$ (нулевой оператор).

Теорема. Для любого оператора $\varphi : V_n \longmapsto V_n$ существует аннулирующий многочлен степени $\le n^2 - 1$.

Доказательство. Т.к. $dim\mathcal{L}(V) = n^2$, то операторы, $\varphi^0 = \varepsilon, \varphi, \varphi^2, ..., \varphi^{n^2}$ – ЛЗ. $\Longrightarrow \exists a_0, a_1, ..., a_{n^2} \in F,\ a_0\varepsilon + a_1\varphi + ... + a_{n^2}\varphi^{n^2} = 0 \Longrightarrow p(t) = a_0 + a_1t + ... + a_{n^2}t^{n^2}$ – аннулирующий для φ.

□

§3. Инвариантные пространства.

Пусть $\varphi : V \longmapsto V$ – линейный оператор.

Определение. Подпространство $U \subseteq V$ называется *инвариантым* относительно φ (или для φ, или φ-инвариантным), если $\forall u \in U \Longrightarrow \varphi(u) \in U$, т.е. $\varphi(U) \subseteq U$.

Определение. *Ограничение (сужение) оператора* φ на инвариантное подпространство U – это оператор.

Обозначение: $\varphi|_U : U \longmapsto U$, а именно, $\forall u \in U : \varphi|_U(u) := \varphi(u)$

Примеры:

1. $\varphi = \frac{d}{dx} : \mathbb{R}[x] \longmapsto \mathbb{R}[x],\ \ p(x) \longmapsto p'(x)$

   Для $\forall n = 0, 1, ...,\ \mathbb{R}_n[x] = \{p(x) | deg\ p(x) \le n\}$ являются инвариантными подпространствами

   Вопрос: есть ли другие инвариантные подпространства?

2. φ – проектирование (проектор) $V \longmapsto V = U_1 \oplus U_2$

   $\varphi(u_1 + u_2) = u$ на U_1 вдоль U_2.

   Инвариантные: U_1, U_2, а также $U_1' \oplus U_2'$, для $\forall\ U_1' \subseteq U_1,\ U_2' \subseteq U_2$.

Теорема. Если $\varphi : V \longmapsto V$, то φ-инвариантными являются:

- $Ker\varphi$
- $Im\varphi$
- Любое пространство U: $Im\varphi \subseteq U \subseteq V$
- $\forall k = 1, 2, ...,\ Ker\varphi^k$
- $Im\varphi^k$

Теорема. Если $U_1, ..., U_k$ – φ-инвариантные, то φ-инвариантные:

- $U_1 + ... + U_k$
- $U_1 \cap ... \cap U_k$

Доказательство.

- $\forall v = u_1 + ... + u_k \Longrightarrow \varphi(v) = \varphi(u_1) + ... + \varphi(u_k) \in U_1 + ... + U_k$
- $\forall w \in U_i,\ i = 1, ..., k \Longrightarrow \varphi(w) \in U_i,\ i = 1, ..., k \Longrightarrow \varphi(w) \in \bigcap\limits_{i=1}^{k} U_i$

$\square$

Лемма. (Вид матрицы A_φ при наличии инвариантов подпространства)

1. Пусть U_1 – φ-инвариантное пространство, $\{0\} \ne U_1 \ne V$.
   Тогда в V $\exists$ базис, в котором
   $$A_\varphi = \begin{pmatrix} \underset{m\times m}{B} & \underset{(n-m)\times(n-m)}{D} \\ \underset{m\times m}{0} & \underset{(n-m)\times(n-m)}{C} \end{pmatrix},\ \text{причем}\ B = A_{\varphi|_{U_1}},\ \ dimU_1 = m$$

2. Пусть $V = U_1 \oplus U_2$, причем U_1, U_2 – ненулевые инвариантные подпространства, тогда в V $\exists$ базис, в котором
$A_\varphi = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$, причем $C = A_{\varphi|U_2}$

Доказательство.
1. Надо взять $e_1, ..., e_m$ – базис в U_1, дополнить его произвольно до базиса в V. Тогда для $j = 1, ..., m,\ \varphi(e_j) \in U_1,\ \varphi(e_j) = \sum\limits_{i=1}^{m} b_i e_i$
2. Если базис $e_1, ..., e_m$ пространства U_1 объединить с базисом $e_{m+1}, ..., e_n$ пространства U_2, то в полученном базисе $A_\varphi = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$

$\square$

Утверждение. Верное и обратное

§4. Собственные векторы и собственные значения линейных операторов.

Теорема. Пусть $\varphi : U \longmapsto U$ – линейный оператор, $U \supseteq Im\varphi \Longrightarrow \varphi(U) \subseteq U$

Доказательство. $\forall u \in U,\ \varphi(u) \in Im\varphi \subseteq U \Longrightarrow \varphi(u) \in U,\ \forall u \in U$ $\square$

Определение. Вектор $x \in V$ называется *собственным вектором* оператора φ, если $x \neq 0$ и $\exists \lambda \in F:\ \varphi(x) = \lambda x$ (1). Это λ называется собственным значением оператора φ (x – собственный вектор с собственным значением λ).

Для данного собственного значения $\lambda \in F$ обозначается

$$V_\lambda = \{x \in V |\ \varphi(x) = \lambda x\}\ (2)$$

(Множество собственных векторов с добавленным 0). V_λ – подпространство в V.

Определение. V_λ называется *собственным подпространством* оператора φ, отвечающим собственному значению λ.

Утверждение. 1. $V_\lambda = Ker(\varphi - \lambda\varepsilon)$, ($\varepsilon$ – тождественный оператор).
2. V_λ – φ-инвариантное подпространство.

Доказательство. 1. $v \in Ker(\varphi - \lambda\varepsilon) \Longleftrightarrow \varphi(v) = \lambda v \Longleftrightarrow v \in V_\lambda$.
2. Возьмем $x \in V_\lambda \Longrightarrow \varphi(x) = \lambda x \in V_\lambda$ $\square$

Замечание: если $\varphi(x) = \lambda x\ (x \neq 0),\ \varphi^2(x) = \lambda^2 x, ..., \varphi^m(x) = \lambda^m x \Longrightarrow$ для любого многочлена $p(t) = a_0 + a_1 t + ... + a_n t^n\ (a_i \in F),\ p(\varphi)(x) = p(\lambda)x$. В частности, если $p(t)$ – аннулирующий многочлен для φ, т.е. $p(\varphi) = 0$, то $p(\lambda) = 0$.

Примеры:

1. $\varphi = \frac{d}{dx} \cdot V = C^{\infty}(\mathbb{R})$, $\forall f(x) \longmapsto f'(x)$. Возьмем $f(x) = e^{\lambda x} \Longrightarrow (e^{\lambda x})' = \lambda e^{\lambda x}$, т.е. $e^{\lambda x}$ – собственная функция для φ. Для $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ $\exists!$ функция $f(x)$: $f'(x) = \lambda f(x)$

Пусть $f(x)$ – та функция, рассмотрим $g(x) = f(x)e^{-\lambda x}$,

$$g'(x) = f'(x)e^{-\lambda x} - \lambda f(x)e^{-\lambda x} = \lambda f(x)e^{-\lambda x} - \lambda f(x)e^{-\lambda x} = 0 \text{на} \mathbb{R} \Longrightarrow g(x) \equiv C$$

$\Longrightarrow f(x) = Ce^{\lambda x}$ $(\forall C \neq 0) \Longrightarrow dim V_{\lambda} = 1.$

Теорема. Пусть $x_1, ..., x_m \in V$ – собственные для φ с попарно различными собственными значениями $\lambda_1, ..., \lambda_m$. Тогда $x_1, ..., x_m$ ЛНЗ.

Доказательство. Индукция по m:

База: $m = 1$ – по определению сам себе ЛНЗ.

Шаг: пусть $m > 1$ и векторы в количестве $(m-1)$ ЛНЗ:
$\alpha_1 x_1 + ... + \alpha_{m-1} x_{m-1} + \alpha_m x_m = 0$ (I).
Подествуем на равенство I оператором φ : $\alpha_1 \varphi(x_1) + ... + \alpha_m \varphi(x_m) = 0 \Longleftrightarrow$ $\alpha_1 \lambda_1 x_1 + ... + \alpha_{m-1} \lambda_{m-1} x_{m-1} + \alpha_m \lambda_m x_m = 0$ (II).

Вычтем из II равенство I, умноженное на λ_m :

$\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_m)x_1 + ... + \alpha_{m-1}(\lambda_{m-1} - \lambda_m)x_{m-1} = 0$. По предположению индукции $\alpha_i(\lambda_i - \lambda_m) = 0, \ \forall i = 1, ..., m-1 \Longrightarrow \alpha_i = 0 \Longrightarrow \alpha_m = 0$

□

Следствие. Допустим, что $dim V = n$ и φ имеет n различных собственных значений $\lambda_1, ..., \lambda_n$, тогда отвечающие им собственные векторы оператора φ образуют базис в V [собственный базис].

Обратим внимание, что в этом базисе $e_1, .., e_n$ матрица A_{φ} – диагональная:

$$A_{\varphi} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Причем $\varphi(e_j) = \lambda_j e_j \Longrightarrow$ в координатах это значит, что

$$A_{\varphi} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \lambda_j \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow A_{\varphi} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & & \\ & \lambda_2 & \ddots & \\ & & \ddots & 0 \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Следствие. Пусть $\lambda_1, ..., \lambda_m$ – попарно различные собственные значения оператора φ, тогда сумма $V_{\lambda_1} + ... + V_{\lambda_m} = V_{\lambda_1} \oplus ... \oplus V_{\lambda_m}$

Вычисление собственных значений и собственных векторов с помощью A_φ:

Пусть $dimV = n,\ e = (e_1, ..., e_n)$ – некоторый базис в V, $A_{\varphi,e}$ – матрица оператора φ.

По определению: $\varphi(x) = \lambda x,\ x \neq 0$.

В координатах: $A_\varphi X = \lambda X \Longleftrightarrow (A_\varphi - \lambda E)X = 0$ (3), $X \neq 0$.

Для того чтобы система (3) имела хотя бы одно ненулевое решение, необходимо, чтобы $det(A_\varphi - \lambda E) = 0$ (4)

λ – корень характеритического уравнения (4). (Собственными значениями будут только корни $\lambda \in F$).

Раскроем $det(A_\varphi - \lambda E) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} =$

$= (a_{11} - \lambda) \cdot ... \cdot (a_{nn} - \lambda) +$ (слагаемые сетепени $\leq n - 1$ по λ) $=$

$= (-\lambda)^n + \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ii}(-\lambda)^{n-1} + ... + |A|$

Термин: $det(A_\varphi - \lambda E)$ – характеристический многочлен матрицы A_φ.

Лемма. Характеристический многочлен матрицы A_φ не зависит от выбора базиса.

Доказательство. Пусть $e' = eC$ – новый базис, тогда матрица
$A_{\varphi,e'} = C^{-1}A_{\varphi,e}C \Longrightarrow |A_{\varphi,e'} - \lambda E| = |C^{-1}A_\varphi C - \lambda(C^{-1}C)| = |C^{-1}(A_\varphi - \lambda E)C| =$
$|C^{-1}||A_\varphi - \lambda E||C| = |A_\varphi - \lambda E|$

□

Определение. $\chi_\varphi(\lambda) = |A_\varphi - \lambda E|$ – характеристический многочлен (в любом базисе) оператора φ.

§5. Диагонализируемость линейных операторов.

Пусть $\varphi : V \longmapsto V$ – линейный оператор, $dim V = n$.

Определение. Скажем, что матрица оператора φ диагонализируема, если $\exists$ базис e в V, в котором A_φ диагональна.

$$A_{\varphi,e} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} = diag(\lambda_1, ..., \lambda_n)$$

<u>Термины:</u> для характеритического корня $\lambda \in F$:

1. геометрическая кратность λ, *гкт*$(\lambda) = dim V_\lambda$,

2. алгебраическая кратность λ – это его кратность как корня характеритического многочлена (*алкр*(λ)).

Лемма. $dim V_\lambda \leq$ *алкр*(λ)

Доказательство. Пусть $dim V_\lambda = m$, *алкр*$(\lambda) = k$, нужно доказать, что $m \leq k$

Выберем базис в V_λ : $e_1, ..., e_m$ и дополним его до базиса в V, векторами $e_{m+1}, ..., e_n$

В этом базисе:

$$A_{\varphi,e} = \left(\begin{array}{cccc|c} \lambda & 0 & \dots & 0 & \overbrace{}^{n-m} \\ 0 & \lambda & \dots & 0 & B \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ 0 & 0 & \dots & \lambda & \\ \hline 0 & \dots & \dots & 0 & \\ \vdots & & & \vdots & C \\ \underbrace{0}_{} & \dots & \dots & 0 & \end{array}\right)_{m} \Longrightarrow$$

$$|A_\varphi - tE| = \left|\begin{array}{ccc|c} \lambda - t & & 0 & \\ & \ddots & & B \\ 0 & & \lambda - t & \\ \hline & 0 & & C - tE \end{array}\right| = (\lambda - t)^m \cdot |C - tE| = 0$$

λ может быть корнем $|C - tE| \Longrightarrow$ *алкр*$(\lambda) \geq m$

$\square$

Замечание. $dim V_{\lambda_j} = n - rk(A_\varphi - \lambda_j E)$.

Теорема. (критерий диагонализируемости)

Для оператора $\varphi : V \longmapsto V$ следующие условия равносильны:

1. A_φ диагональна в некотором базисе.
2. В V $\exists$ базис из собственных векторов оператора φ (собственный базис).
3. $\chi_\varphi(\lambda) = det(A_\varphi - \lambda E) = (\lambda_1 - \lambda)^{k_1} \cdot ... \cdot (\lambda_s - \lambda)^{k_s}$ Все характеритические корни $\lambda_i \in F$, и для $\forall i$, $\underbrace{dimV_{\lambda_i}}_{\text{гкр}\lambda_i} = \underbrace{k_i}_{\text{алг}(\lambda_i)}$
4. $V_{\lambda_1} \oplus ... \oplus V_{\lambda_s} = V$

Доказательство. 1. $\Longrightarrow$ 2.

Если $A_{\varphi,e} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$, то координаты вектора

$$\varphi(e_i) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \lambda_i \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_i \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ т.е. } \varphi(e_i) = \lambda_i e_i$$

2. $\Longrightarrow$ 1.

Если e – собственный базис для φ, $\varphi(e_i) = \lambda_i e_i$, то i-й столбец матрицы $A_{\varphi,e}$ равен $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \lambda_i \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, матрица составленная из этих столбцов, и есть $diag(\lambda_1, ..., \lambda_n)$

1. и 2. $\Longleftrightarrow$ 3.

Пусть в базисе e матрица A_φ диагональна.
Занумеруем векторы следующим образом:

$\underbrace{e_1, ..., e_{p_1}}_{\lambda_1}, \underbrace{e_{p_1+1}, ..., e_{p_1+p_2}}_{\lambda_2}, ...$ и т.д.

Ясно, что $e_1, ..., e_{p_1} \in V_{\lambda_1}$, $e_{p_1+1}, ..., e_{p_1+p_2} \in V_{\lambda_2} \Longrightarrow dimV_{\lambda_i} \geq p_i$.
По построению, $\sum\limits_{i=1}^{s} p_i = n = \sum\limits_{i=1}^{s} k_i \Longrightarrow \sum\limits_{i=1}^{s}(p_i - k_i) = 0 \Longrightarrow$ все $p_i = k_i$

Обратно: пусть $\forall i$, $p_i = dimV_{\lambda_i} = k_i$ $(*)$.
Возьмем базисы в собственных подпространствах, объединим их $\Longrightarrow$ получим всего $\sum\limits_{i=1}^{s} p_i = \sum\limits_{i=1}^{s} k_i = n = dimV$.

Остается понять, что все эти векторы ЛНЗ. Это следует из теоремы: если векторы $x_1, ..., x_s$ отвечают попарно различным собственным значениям, то они ЛНЗ.

В линейных комбинации собственных векторов $\underbrace{\alpha_{11}e_1 + ... + \alpha_{1p_1}e_{p_1}}_{x_1} \underbrace{+ ...}_{x_2} = 0$

$x_1 + x_2 + ... + x_s = 0$, что в силу ЛНЗ $\Longrightarrow x_1 = ... = x_s = 0$, но x_i – линейная комбинация базисных векторов из $V_{\lambda_i} \Longrightarrow$ все $\alpha_{ij} = 0$

На самом деле установили, что 4. $\Longleftrightarrow$ 3.

Рассуждение (*) показывает, что базис в $V_{\lambda_1} + ... + V_{\lambda_s}$ – базис в V.

Кроме того, этот базис – собственный, так что 4. $\Longrightarrow$ 2.

$\square$

Примеры применения диагонализируемости:

1. Для решения системы $AX = b$, A – квадратная матрица.

Пусть известно, что матрица C, такая что $A' = C^{-1}AC = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$

Сделаем замену переменных: $X = CY$.

Тогда $(AC)Y = b \Longleftrightarrow (C^{-1}AC)Y = C^{-1}b = b'$

Система равносильна системе:

$\begin{cases} \lambda_1 y_1 = b'_1, \\ ...., \\ \lambda_n y_n = b'_n \end{cases}$, если $|A| = \lambda_1 \cdot ... \cdot \lambda_n \neq 0$, то $Y = \begin{pmatrix} \frac{b'_1}{\lambda_1} \\ \vdots \\ \frac{b'_n}{\lambda_n} \end{pmatrix}$, $X = CY$.

2. Матрицу A порядка n возвести в степень $m \in \mathbb{N}$, если известно, что $C^{-1}AC = diag(\lambda_1, ..., \lambda_n) = A' \Longrightarrow A = CA'C^{-1} \Longrightarrow$

$$A^m = \underbrace{(CA'C^{-1}) \cdot ... \cdot (CA'C^{-1})}_{m} = C(A')^m C^{-1} = C \begin{pmatrix} \lambda_1^m & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^m \end{pmatrix} C^{-1}$$

§6. Аннурующие многочлены линейного оператора. Теорема Гамильтона-Кели. Минимальный многочлен.

Многочлен $p(t) = a_0 + a_1 t + ... + a_m t^m \in F[t]$ – аннулирующий многочлен для φ, если $p(\varphi) = a_0\varepsilon + a_1\varphi + ... + a_m\varphi^m = 0$.

Было доказано, что $\exists$ аннулирующий многочлен степени $\leq n^2$ $(n = dimV)$.

Замечание. Пусть x – собственный вектор для $\varphi:\ \varphi(x) = \lambda x,\ p(t)$ – аннулирующий многочлен для φ, тогда $p(\lambda) = 0$

В самом деле, $\forall k = 1, 2, ...\ \ \varphi^k(x) = \lambda^k x \Longrightarrow p(\varphi)(x) = a_0 x + a_1\lambda x + ... + a_m\lambda^m x = p(\lambda)x$, т.к. $x \neq 0 \Longrightarrow p(\lambda) = 0$

$\mu(t)$ – минимальный многочлен для φ, если $\mu(\varphi) = 0$ и $deg\mu(t)$ минимальная среди степеней всех аннулирующих многочленов.

Утверждение. 1. Любой аннулирующий $p(t)$ делится на минимальный $\mu(t)$
2. $\mu(t)$ единственен, если потребовать, чтобы старший коэффициент $\mu(t)$ был равен 1.

Доказательство.

1.$p(t) = \mu(t)q(t) + r(t) \Longrightarrow \overbrace{p(\varphi)}^{0} = \overbrace{\mu(\varphi)}^{0} q(\varphi) + r(\varphi) \Longrightarrow r(\varphi) = 0$, но
$deg\ r < deg\ \mu \Longrightarrow r = 0$
2. Если $\mu'(t)$ – еще один минимальный многочлен, то $\mu(t)|\mu'(t)$ и $\mu'(t)|\mu(t)$ (по пункту 1) $\Longrightarrow \mu' = \alpha\mu,\ \alpha \neq 0, \alpha \in F$. По условию старший коэффициент равен 1 $\Longrightarrow \alpha = 1$

□

Многочленная матрица

$$\begin{pmatrix} a_{11}(\lambda) & \dots & a_{1n}(\lambda) \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(\lambda) & \dots & a_{nn}(\lambda) \end{pmatrix}$$

Ее можно представить в виде матричного многочлена.
$(a_{ij}(\lambda))$ – многочлены от λ.

Теорема Гамильтона-Кэли. Для любого линейного оператора $\chi_\varphi(\varphi) = 0$. Равносильно: Если $\chi_\varphi(\lambda) = det(A_\varphi - \lambda E)$, то $\chi_\varphi(A_\varphi) = 0$.

Доказательство. Пусть $A = A_\varphi$. Рассмотрим характеристический многочлен $\chi_A(\lambda) = \sum\limits_{i=0}^{n} p_i\lambda^i,\ p_i \in F \Longrightarrow \chi_A(A) = \sum\limits_{i=0}^{n} p_i A^i,\ (A^0 \equiv E)$

Составим присоединенную матрицу для $(A - \lambda E)$:
$D(\lambda) = (d_{ji}(\lambda))$ такой что $d_{ji} = (A - \lambda E)_{ij}$

$$(A - \lambda E)D(\lambda) = \begin{pmatrix} |A - \lambda E| & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & |A - \lambda E| \end{pmatrix} = \chi_\varphi(\lambda)E$$

$d_{ij}(\lambda)$ – многочлены степени $\leq (n-1)$
<u>Обозначим:</u> $D(\lambda) = \sum\limits_{i=0}^{n-1} D_i\lambda^i,\ D_i$ – числовые матрицы.
Имеем $\chi_A(\lambda)E = (A - \lambda E)\sum\limits_{i=0}^{n-1} D_i\lambda^i = \sum\limits_{i=0}^{n-1} AD_i\lambda^i - \sum\limits_{i=0}^{n-1} D_i\lambda^{i+1} =$
$= AD_0 + \sum\limits_{i=1}^{n-1}(AD_i - D_{i-1})\lambda^i - D_{n-1}\lambda^n$

$$\begin{cases} \lambda^0 :\ p_0E = AD_0 & \Big|\times E \\ \lambda^1 :\ p_1E = AD_1 - D_0 & \Big|\times A \\ \vdots & \\ \lambda^i :\ p_iE = AD_i - D_{i-1} & \Big|\times A^i \qquad + \longrightarrow \chi_A(A) = 0 \\ \vdots & \\ \lambda^{n-1} : p_{n-1}E = AD_{n-1} - D_{n-2} & \Big|\times A^{n-1} \\ \lambda^n : p_nE = -D_{n-1} & \Big|\times A^n \end{cases}$$

□

Утверждение. Если λ – собственное значение оператора φ, $p(t)$ – аннулирующий многочлен для φ, то $p(\lambda) = 0$. В частности, все корни характеристического многочлена являются корнями минимального аннулирующего многочлена.

Пусть v – собственный для φ : $\varphi(v) = \lambda v \Longrightarrow \varphi^k(v) = \lambda^k v \Longrightarrow p(\varphi)(v) = p(\lambda)v = 0,\ v \neq 0 \Longrightarrow p(\lambda) = 0$.

§7. Жорданова нормальная форма матрицы линейного оператора.

Жорданова клетка порядка k с собственным значением $\lambda_0 \in F$

$$J_K(\lambda_0) = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_0 \end{pmatrix}$$

Пусть в базисе $e_1, ..., e_k$, k-мерного пространства:

$$A_\varphi = J_k(\lambda_0) \Longrightarrow |A_\varphi - tE| = (\lambda_0 - t)^k,$$

φ имеет единственный вид с точностью до пропорциональности собственного вектора e_1 :

$$(A_\varphi - \lambda_0 E)X = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 \text{ – любой} \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ \dots \\ x_k = 0 \end{cases} \Longrightarrow v = \alpha e_1,\ \alpha \neq 0$$

Кроме того:

$$\begin{cases} \varphi(e_1) = \lambda_0 e_1, \\ \varphi(e_2) = e_1 + \lambda_0 e_2, \\ ... \\ \varphi(e_i) = e_{i-1} + \lambda_0 e_i, \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} Be_1 = 0, \\ Be_2 = e_1, \\ ..., \\ Be_i = e_{i-1},\ (i = 1, ..., k), \end{cases}$$

где $B = J_k(\lambda_0) - \lambda_0 E = J_k(0)$
$Be_k = e_{k-1}$ $(*)$
$\{e_k, Be_k, B^2 e_k, ..., B^{k-1} e_k\}$ – <u>жорданова цепочка длины k</u>.

Лемма. Пусть для некоторого вектора $v \neq 0$ построена цепочка длины k : $v, Bv, ..., B^{k-1}v \neq 0$, $B^k v = 0$. Тогда векторы $\{v, Bv, ..., B^{k-1}v\}$ ЛНЗ.

Доказательство. Рассмотрим $\alpha_1 v + \alpha_2 Bv + ... + \alpha_k B^{k-1} v = 0$ и докажем, что все $\alpha_i = 0$.
$B^{k-1} \cdot | \Longrightarrow \alpha_1 \underbrace{B^{k-1}v}_{\neq 0} + \alpha_2 B^k v + ... = 0 \Longrightarrow \alpha_1 = 0$

На оставшееся равенство подействуем, B^{k-2} : $\alpha_2 B^{k-1} v + \underbrace{...}_{0} = 0 \Longrightarrow \alpha_2 = 0$ и т.д. $\square$

Терминология: в (*) вектор e_2 - присоединенный к e_1 (1-й присоединенный), e_3 - присоединенный к e_2 и т.д.

Определение. $\langle v, Bv, ..., B^{k-1}v\rangle = Z_k(v)$ – циклическое подпространство размерности k, порожденное вектором v. (В этой цепочке вектор $B^{k-1}v \neq 0$ – собственный для B)

Упражнение. Для жордановой клетки характеристическая и минимальная матрицы совпадают. Для каких еще матриц они совпадают?

Жорданова матрица

$$J = \begin{pmatrix} \underline{J_{k_1}(\lambda_1)|} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \overline{|J_{k_p}(\lambda_p)} \end{pmatrix} \text{– клеточно-диагональная матрица}$$

$k_1 + ... + k_p = n$

$\chi(J) = \prod\limits_{i=1}^{p} \chi(J_{k_i}) = (\lambda_1 - t)^{k_1} \cdot ... \cdot (\lambda_p - t)^{k_p}$ (некоторые λ_i могут совпадать).

$J = A_\varphi$ в базисе, составленном из жордановых цепочек для каждой жордановой клетки.

Теорема Жордана. Пусть все характеристические корни линейного оператора $\varphi: V \longmapsto V$ над полем F $(dimV = n)$ принадлежат F. Тогда:

1. $V = \bigoplus\limits_{i=1}^{p} Z_i$ – прямая сумма циклических подпространств.
2. В V существует базис (Жорданов базис), в котором
$$A_\varphi = J = \begin{pmatrix} J_{k_1}(\lambda_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_{k_p}(\lambda_p) \end{pmatrix}$$

Т.е. для любой $A_{n\times n}$ $\exists$ невырожденная матрица $C:\ C^{-1}AC = J,\ AC = CJ$

Корневые подпространства

Пусть $\varphi : V \longmapsto V,\ \lambda$ – собственное значение для φ.

Определение. Вектор $v \in V$ – λ-*корневой* для φ, если $\exists m \in \mathbb{N}$: $(\varphi - \lambda\varepsilon)^m(v) = 0$. Наименьшее такое значение h называется *высотой вектора* v, т.е. $(\varphi - \lambda\varepsilon)^{h-1}v \neq 0,\ (\varphi - \lambda\varepsilon)^h v = 0$. Тогда v порождает жорданову цепочку длины h: $\{v, (\varphi - \lambda\varepsilon)v, ..., (\varphi - \lambda\varepsilon)^{h-1}v\}$.

Утверждение. $\{v \in V : v -$ корневой для данного $\lambda\}$ – подпространство в V.

Доказательство. 0 является корневым. $B = \varphi - \lambda\varepsilon$
Если $v_1 : B^{m_1}v_1 = 0;\ v_2 : B^{m_2}v_2 = 0$, то $B^{\max(m_1,m_2)}(v_1 + v_2) = 0$.
$\forall\lambda \in F,\ B^m v = 0 \Longrightarrow B^m(\lambda v) = \lambda V^m v = 0$ – доказано.
Это подпространство корневое подпространство, отвечающее собственному значению λ, обозначим: $V^{(\lambda)} = \mathcal{K}_\lambda$. □

Теорема. Пусть $\chi_\varphi = (\lambda_1 - t)^{k_1} \cdot \ldots \cdot (\lambda_s - t)^{k_s}$ – каноническое разложение. Тогда:

1. $V = \mathcal{K}_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus \mathcal{K}_{\lambda_s}$, где $\mathcal{K}_{\lambda_i} = \{v \in V \mid \exists k : (\varphi - \lambda_i\varepsilon)^k v = 0\}$
2. $\mathcal{K}_{\lambda_i} = Ker(\varphi - \lambda_i\varepsilon)^{k_i}$
3. $\mathcal{K}_{\lambda_i}$ - инвариантные подпространства, $dim\mathcal{K}_{\lambda_i} = k_i$

Доказательство. Многочлены $(\lambda_1 - t)^{k_1}, \ldots, (\lambda_s - t)^{k_s}$ попарно взаимно просты. Дробь $\frac{1}{\chi_\varphi(t)}$ можно представить в виде:

$$\frac{1}{\chi_\varphi(t)} = \frac{f_1(t)}{(t - \lambda_1)^{k_1}} + \ldots + \frac{f_s(t)}{(t - \lambda_s)^{k_s}} \mid \cdot\, \chi_\varphi(t) \text{ или же } \prod_{i=1}^{s}(t - \lambda_i)^{k_i}$$

$$\underbrace{(t - \lambda_2)^{k_2} \cdot \ldots \cdot (t - \lambda_s)^{k_s} f_1(t)}_{q_1(t)} + \ldots + \underbrace{(t - \lambda_1)^{k_1} \cdot \ldots \cdot (t - \lambda_{s-1})^{k_{s-1}} f_s(t)}_{q_s(t)} = 1$$

$$q_1(t) + \ldots + q_s(t) = 1, \text{ где } q_i(t) = \prod_{j \neq i}(t - \lambda_i)^{k_i} \cdot f_i(t) \Longrightarrow$$

$$q_1(\varphi) + \ldots + q_s(\varphi) = \varepsilon \mid \cdot\, v \in V$$

$$\forall v = \underbrace{q_1(\varphi)v}_{v_1} + \ldots + \underbrace{q_s(\varphi)v}_{v_s} = v_1 + \ldots + v_s \Longrightarrow$$

$$V = \mathrm{Im}\ q_1(\varphi) + \ldots + \mathrm{Im}\ q_s(\varphi),\ v_i \in \mathrm{Im}\ q_i(\varphi)$$

Обратим внимание, что $\mathrm{Im}\ q_i(\varphi) = Q_i$
Для вектора $v_i \in \mathrm{Im}\ q_i(\varphi) = Q_i$ выполнено $(\varphi - \lambda_i\varepsilon)^{k_i} v_i = 0$ в силу Теоремы Гамильтона-Кэли.
Имеем: $V = Q_1 + \ldots + Q_s \subseteq \mathcal{K}_{\lambda_1} + \ldots + \mathcal{K}_{\lambda_s},\ \ Q_i \subseteq \mathcal{K}_{\lambda_i} \Longrightarrow V = \mathcal{K}_{\lambda_1} + \ldots + \mathcal{K}_{\lambda_i}$
Осталось проверить, что эта сумма прямая.
Нужно показать, что если $v \in \mathcal{K}_{\lambda_i} \cap \sum\limits_{i \neq j} \mathcal{K}_{\lambda_j}$, то $v = 0$.
По выбору, $(\varphi - \lambda_i\varepsilon)^{k_i} v = 0 \Longrightarrow (\varphi - \lambda_i\varepsilon)^n v = 0$, где $n = \dim V$.
Если $v_j \in \mathcal{K}_{\lambda_j}$, то $(\varphi - \lambda_j\varepsilon)^n v_j = 0 \Longrightarrow (\prod\limits_{j \neq i}(\varphi - \lambda_j\varepsilon)^n)v = 0$

Т.к. многочлены $(t-\lambda_i)^n$ и $\prod\limits_{j\neq i}(t-\lambda_j)^n$ взаимно просты $\Longrightarrow$
$\exists u(t),\ w(t)$ - многочлены, такие что

$$u(t)(t-\lambda_i)^n + w(t)\prod_{j\neq i}(t-\lambda_j)^n = 1 \Longrightarrow$$

$$u(\varphi)(\varphi-\lambda_i)^n + w(\varphi)\prod_{j\neq i}(\varphi-\lambda_j)^n = \varepsilon \Longrightarrow$$

$$u(\varphi)\underbrace{(\varphi-\lambda_i)^n}_{0} v + w(\varphi)\underbrace{\prod_{j\neq i}(\varphi-\lambda_j)^n}_{0} v = v \Longrightarrow$$

$$v = 0 \Longrightarrow \text{сумма } \mathcal{K}_{\lambda_1} + ... + \mathcal{K}_{\lambda_s} \text{– прямая.}$$

Итак: $V = \mathcal{K}_{\lambda_1} \oplus ... \oplus \mathcal{K}_{\lambda_s}$, причем $\mathcal{K}_{\lambda_i} = Q_i = q_i(\varphi)V = \mathrm{Ker}(\varphi-\lambda_i\varepsilon)^{k_i}$
(Учесть, что $Q_i \subseteq \mathrm{Ker}(\varphi-\lambda_i\varepsilon)^{k_i} \subseteq \mathcal{K}_{\lambda_i},$ доказано, что $Q_i = \mathcal{K}_{\lambda_i}$) $\Longrightarrow$
$\mathcal{K}_{\lambda_i} = \mathrm{Ker}(\varphi-\lambda_i\varepsilon)^{k_i}$
Размерность. Выберем в V базис, составленный из базисов корневых подпространств. В этом базисе:

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} \underline{A_1|} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \overline{|A_s} \end{pmatrix},\ \text{где } A_i = \varphi|_{\mathcal{K}_{\lambda_i}} \text{ порядка } d_i = \dim\mathcal{K}_{\lambda_i}$$

Матрица A_i имеет собственное значение λ_i, (если $\exists v \in \mathcal{K}_{\lambda_i} \cap V_{\lambda_j},\ i \neq j \Longrightarrow v = 0$)
$\Longrightarrow d_i = k_i = \dim\mathcal{K}_{\lambda_i}$

$\square$

Существование базиса, составленного из жордановых цепочек, достаточно доказать для каждого оператора $\psi_i = (\varphi - \lambda_i\varepsilon)|_{\mathcal{K}_i}$

Определение. Оператор $\psi : V \longmapsto V,\ \psi \neq 0$ называется *нильпотентным*, если $\exists m \in \mathbb{N}:\ \psi^m = 0$. Если d -наименьшее значение, при котором
$\psi^d = 0$ ($\psi^{d-1} \neq 0$), то d-показатель (индекс) нильпотентного оператора ψ.

Будем считать, что $V = \mathcal{K}_{\lambda_i},\ \varphi$ имеет на нем единственное собственное значение λ_i, тогда ψ_i – нильпотентный оператор: $\psi_i^{\dim V} = 0$. (Далее индекс i не будем писать). <u>Обозначение:</u> $B = A - \lambda_i E$ – матрица оператора $\psi_i = \psi$

Теорема. Для нильпотентного оператора $\psi : \ V \longmapsto V$ существует базис из жордановых цепочек.

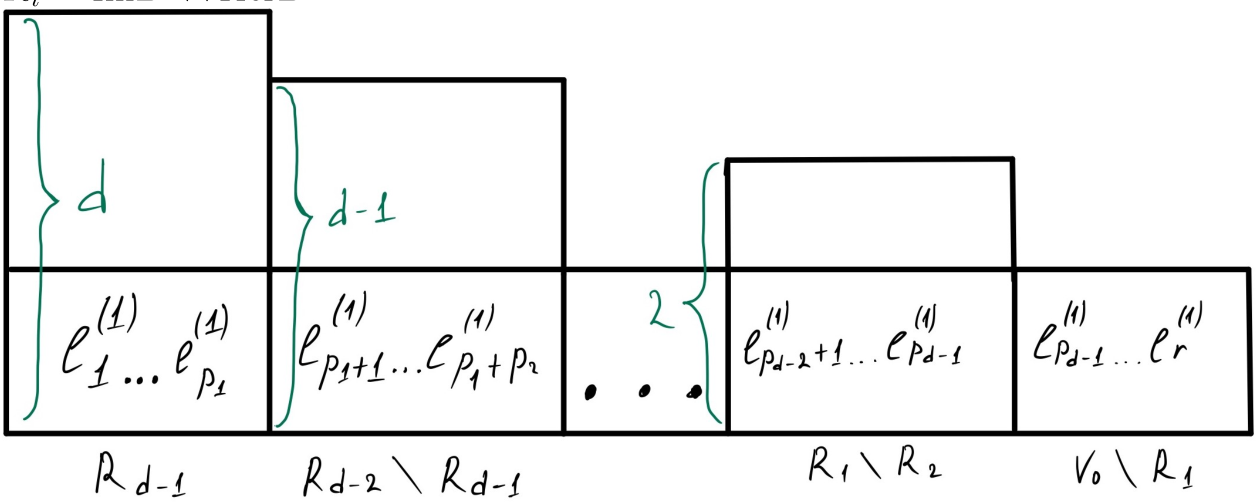
Доказательство. Пусть $\dim V = n$, показатель нильпотентности равен d.
Тогда образы $Im\psi \supset Im\psi^2 \supset ... \supset Im\psi^{d-1} \supset Im\psi^d = 0$ образуют строго убывающую цепочку.
Обозначим: $r = dimV_0 = dimKer\psi$ и рассмотрим подпространства:

$$\underbrace{Ker\psi}_{R_0=V_0} \supseteq \underbrace{Im\psi \cap Ker\psi}_{R_1} \supseteq ... \supseteq \underbrace{Im\psi^{d-1} \cap Ker\psi}_{R_{d-1}} \supseteq \{0\}$$

$$R_0 = V_0 \supseteq R_1 \supseteq ... \supseteq R_{d-1} \supseteq R_d = \{0\}$$

Обозначим: $dimR_0 = dimKer\psi = r = p_d$
$dimR_{d-1} = p_1, dimR_{d-2} = p_2$ и т.д. $dimR_1 = p_{d-1}$.

Выберем в $Ker\psi = V_0$ базис, составленный подпространствами:
$R_i = \mathrm{Im}B^i \cap \mathrm{Ker}B$



Векторы $e_1^{(1)}, ..., e_{p_1}^{(1)} \in \mathrm{Im}\psi^{d-1} \Longrightarrow$ каждый из них имеет $(d-1)$ присоединенный вектор. Например, $e_1^{(1)} = \psi(e_1^{(2)}), \ e_1^{(2)} = \psi(e_1^{(3)})$ и т.д.
$e_1^{(p-2)} = \psi(e_1^{(p-1)})$, т.о. векторы $\{e_1^{(p-1)}, e_1^{(p-2)}, ..., e_1^{(1)}\}$ образует жорданову цепочку длины p.
Эта цепочка имеет вид:

$$\{e_1^{(p-1)}, \psi(e_1^{(p-1)}), \psi^2(e_1^{(p-1)}), ..., \psi^{p-1}(e_1^{(p-1)}) = e_1^{(1)}\}, \quad \psi(e_1^{(1)}) = 0$$

Таким образом, получаем некоторое количество жордановых цепочек длин $\leq d$. Векторы всех этих цепочек образуют базис в V. $\square$

Лемма. Пусть есть t жордановых цепочек

$$\{a_1, \psi(a_1), ..., \psi^{l_1-1}(a_1)\},\ \psi^{l_1}(a_1) = 0$$

$$..$$

$$\{a_t, \psi(a_t), ..., \psi^{l_t-1}(a_t)\},\ \psi^{l_t}(a_t) = 0$$

Причем конечные векторы этих цепочек ЛНЗ. Тогда все векторы этих цепочек ЛНЗ. Кроме того, общее количество векторов в объединении цепочек равно $dimV \implies$ объединение всех цепочек из диаграммы – базис пространства V.

Доказательство. Индукция по общему количеству векторов в цепочках.
База: когда все цепочки имеют длину 1, т.е. $a_1, ..., a_t$ – собственные, ЛНЗ.
Предположение индукции: $\exists$ хотя бы одна цепочка длины > 1.
Запишем линейную комбинацию:

$$\alpha_{11}a_1 + \alpha_{12}\psi(a_1) + ... + \alpha_{1,l_1}\psi^{l_1-1}(a_1) + ... + \alpha_{t,1}a_t + \alpha_{t,2}\psi(a_t) + ... + \alpha_{t,l_t}\psi^{l_t-1}(a_t) = 0$$

Подействуем оператором ψ:

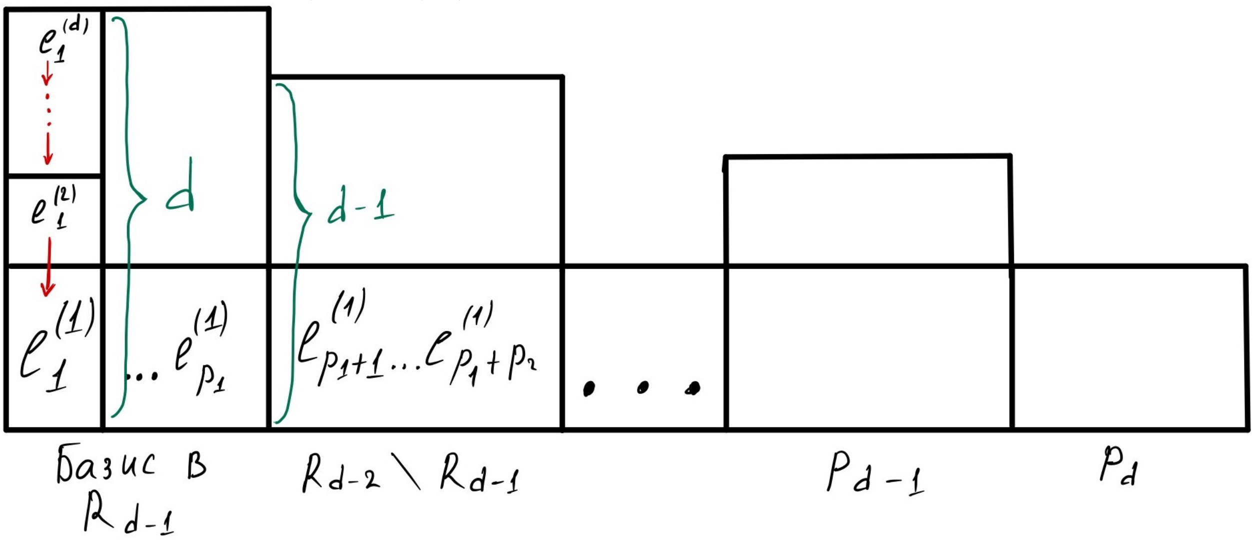
$$\alpha_{11}\psi(a_1) + ... + \alpha_{1,l_1-1}\psi^{l_1-1}(a_1) + ... + \alpha_{t,1}\psi(a_t) + ... + \alpha_{t,l_t-1}\psi^{l_t-1}(a_t) = 0$$

Эти векторы принадлежат цепочкам длины $l_1 - 1, ..., l_t - 1$ (либо какие-то обратятся в 0)
По предположению индукции $\alpha_{11} = ... = \alpha_{1,l_1-1} = ... = \alpha_{t,1} = \alpha_{t,l_1-1} = 0 \implies$

$$\alpha_{a,l_1}\psi^{l_1-1}(a_1) + ... + \alpha_{t,l_t}\psi^{l_t-1}(a_t) = 0 \text{ ЛНЗ} \implies$$

остальные коэффициенты равны 0 $\square$

B – нильпотентный оператор, $B^d = 0 \neq B^{d-1} \implies$ максимальная длина (высота) жордановой цепочки равняется d.
$R_i = \mathrm{Im}B^i \cap \mathrm{Ker}B,\ i = 1, .., d-1$



Базис $\mathrm{Ker}B = R_0$

Общее число векторов в цепочках равно $\dim V$ (в котором действует B):

$$dp_1 + (d-1)p_2 + ... + 2p_{d-1} + p_d =$$

$$= (p_1 + ... + p_d) + (p_1 + ... + p_{d-1}) + ... + (p_1 + p_2) + p_1 =$$

$$= \dim R_0 + \dim R_1 + ... + \dim R_{d-2} + \dim R_{d-1}$$

$$\sum_{i=0}^{d-1} \dim(\mathrm{Im} B^i \cap \mathrm{Ker} B) = \sum_{i=0}^{d-1} (\dim\mathrm{Ker} B^{i+1} - \dim\mathrm{Ker} B^i) =$$

$$= \dim\mathrm{Ker} B^d = \dim V$$

Нужно доказать, что $\dim(\mathrm{Im} B^i \cap \mathrm{Ker} B) = \dim\mathrm{Ker} B^{i+1} - \dim\mathrm{Ker} B^i$

$$\mathrm{Im}(B^i \cap \mathrm{Ker} B) = \mathrm{Ker}(B|_{\mathrm{Im} B^i}) \Longrightarrow$$

$$\dim(\mathrm{Im} B^i \cap \mathrm{Ker} B) = \dim\mathrm{Im} B^i - \dim Im B^{i+1} =$$

$$= n - \dim\mathrm{Ker} B^i - (n - \dim\mathrm{Ker} B^{i+1}) =$$

$$= \dim\mathrm{Ker} B^{i+1} - \dim\mathrm{Ker} B^i$$

$$\dim\mathrm{Ker}\varphi = \dim V - \dim\mathrm{Im}\varphi \Longrightarrow \varphi = B|_{\mathrm{Im} B^i}$$

Единственность жордановой формы

Если $A \sim \mathcal{J}$ и $A \sim \mathcal{J}'$, то $\mathcal{J}$ и $\mathcal{J}'$ могут отличаться только упорядочиваниями жордановых клеток.
Нужно доказать, что $\forall$ собственного значения λ_j $\exists m : 1 \leq m \leq d_j,\ N(m, \lambda_j)$ опеределено по A единственным образом.
Рассмотрим оператор $B = A - \lambda_j E$, достаточно для матрицы B доказать единственность $N(m, 0)$:

$$N(m, 0) = \dim R_{m-1} - \dim R_m =$$

$$= (\dim\mathrm{Ker} B^m - \dim\mathrm{Ker} B^{m-1}) - (\dim\mathrm{Ker} B^{m+1} - \dim\mathrm{Ker} B^m) =$$

$$= 2\dim\mathrm{Ker} B^m - \dim\mathrm{Ker} B^{m-1} - \dim\mathrm{Ker} B^{m+1} =$$

$$= 2(n - rkB^m) - (n - rkB^{m-1}) - (n - rkB^{m+1}) =$$

$$= rkB^{m-1} - 2rkB^m + rkB^{m+1}$$

Эти ранги не зависят от базиса.

Доказательство Теоремы Жордана в общем случае:
Пусть $\varphi : V \longmapsto V$, A_φ – его матрица, $\chi_\varphi(t) = (\lambda_1 - t)^{k_1} \cdot \ldots \cdot (\lambda_s - t)^{k_s}$, $(\lambda_i \in F)$
Тогда $V = \bigoplus\limits_{i=1}^{s} \mathcal{K}_{\lambda_i}$, $\mathcal{K}_{\lambda_i} = \operatorname{Ker}(\varphi - \lambda_i \varepsilon)^{k_i}$– корневые подпространства.
В базисе, согласованном с разложением,

$$\begin{pmatrix} \underline{A_1|} & & & \\ & |\overline{\underline{A_2}}| & & \\ & & \ddots & \\ & & & \overline{|A_s} \end{pmatrix}$$

$\forall i = 1, ..., s$, $A_i = A_{\varphi|_{\mathcal{K}(\lambda_i)}}$ имеет единственное собственное значение λ_i.
Оператор $(\varphi - \lambda_i \varepsilon)$ – нильпотентный оператор $\Longrightarrow$ для него, по Теореме для нильпотентных операторов $\exists$ базис в $\mathcal{K}(\lambda_i)$ из жордановых цепочек. Тогда объединение базисов всех подпространств нужный базис.

Теорема. Пусть $\chi_A(t) = (-1)^n \prod\limits_{i=1}^{s} (t - \lambda_i)^{k_i}$, d_i–максимальный размер жордановой клетки, отвечающей корню λ_i, тогда $\mu_A(t) = \prod\limits_{i=1}^{s} (t - \lambda_i)^{d_i}$ – минимальный многочлен.

Доказательство.
Если $p(t)$ – аннулирующий многочлен для φ (для матрицы A), тогда $\forall i$ $p(\lambda_i) = 0$, если $x_i \neq 0 : \ \varphi(x_i) = \lambda_i x_i$, то

$$p(\varphi(x_i)) = p(\lambda_i) \underbrace{x_i}_{\neq 0} = 0 \Longrightarrow p(\lambda_i) = 0$$

Для одной жордановой клетки $\mathcal{J}_m(\lambda_i)$ $(1 \neq m \neq d_i)$

$$A - \lambda_i E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow (A - \lambda_i E)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & \ddots & 0 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

И т.д. $\Longrightarrow (A - \lambda_i E)^m = 0$
Для $m = d_i$ наименьшая степень $q : \ (A - \lambda_i E)^q = 0$ равна $d_i \Longrightarrow$
$\mu_A(t) \,\vdots\, (t - \lambda_i)^{d_i} \Longrightarrow \mu_A(t) = \prod_{i=1}^{s} (t - \lambda_i)^{d_i}$ □

Следствие. A_φ диагонализируема $\Longleftrightarrow$ все характеристические корни имеют в μ_φ кратность равную 1.

Некоторые применения жордановой формы

1. К решению СЛУ $AX = b,\ A_{(n\times n)}$

Пусть уже найдена матрица C: $C^{-1}AC = \mathcal{J} = \begin{pmatrix} \mathcal{J}_1(\lambda_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mathcal{J}_l(\lambda_l) \end{pmatrix}$

Сделаем замену переменных:

$$X = CY \Longrightarrow A(CY) = b \Longrightarrow (C^{-1}AC)Y = C^{-1}b = b'$$

Для каждой клетки

$$\underset{\lambda\neq 0}{\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix}} \Longrightarrow \begin{cases} \lambda y_1 + y_2 = b'_1 \\ \dots \\ \lambda_n = b'_n \end{cases}$$

Легко дорешать, найдя Y найдем $X = CY$

2. К вычислению функций от матрицы.

$A_n^m,\ m \in \mathbb{N}$

$$A = CYC^{-1} = C\begin{pmatrix} \mathcal{J}_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mathcal{J}_l \end{pmatrix} C^{-1} \Longrightarrow A^m = C\begin{pmatrix} \mathcal{J}_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mathcal{J}_l \end{pmatrix} C^{-1}$$

Для одной клетки:

$$\mathcal{J}_n(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix} = \lambda E + \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix} = \lambda E + B,\ B^n = 0 \neq B^{n-1}$$

$$\Longrightarrow A^m = C\begin{pmatrix} \mathcal{J}_1^m & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mathcal{J}_l^m \end{pmatrix} C^{-1},\ \mathcal{J}_n^m(\lambda) = (\lambda E + B)^m$$

$\mathcal{J}_n^m(\lambda) = (\lambda E + B)^m = \sum\limits_{k=0}^{m} C_m^k \lambda^k B^{m-k}$

Для $m = \frac{1}{2}$ – вычислить $\sqrt{A}$ (нужно, чтобы $\sqrt{\lambda_j}$ были определены)

$$\mathcal{J}_n(\lambda)_{\lambda\neq 0} = (\lambda E + B)^{\frac{1}{2}} = (\sqrt{\lambda}(E + \frac{1}{\lambda}B)^{\frac{1}{2}}) = \sqrt{\lambda}(E + \frac{1}{2}X + C^2_{\frac{1}{2}}X^2 + ...)$$

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = \sum_{k=0}^{\infty} C^k_{\frac{1}{2}} x^k$$

$$C^1_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2},\quad C^2_{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2!}, ..., C^k_{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)...(\frac{1}{2}-k+1)}{k!}$$

Экспонента: $e^A \overset{?!}{=} E + tA + t^2\frac{A}{2!} + ...$

$$A = C\mathcal{J}C^{-1} \Longrightarrow e^A = C\begin{pmatrix} e^{\mathcal{J}_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\mathcal{J}_l}\end{pmatrix}C^{-1}$$

Для одной клетки порядка n:

$$\mathcal{J}_n(\lambda) = \lambda E + B \Longrightarrow e^{\mathcal{J}_n(\lambda)} = e^{\lambda E + B} = e^{\lambda E}e^B = e^{\lambda}Ee^B$$

$$e^B = E + B + \frac{B^2}{2!} + ... + \frac{B^{n-1}}{(n-1)!} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2!} & \cdots & \frac{1}{(k-1)!} \\ & 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & \frac{1}{2!} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix}$$

$(e^{tA})' = Ae^{tA}$
<u>Формула:</u> $\det(e^A) = e^{\mathrm{tr}A}$

Теорема. Для любого линейного оператора $\varphi : V \longmapsto V$ над $\mathbb{R}$ ($\dim V < \infty$) существует одномерное или двумерное инвариантное подпространство.

Доказательство. Пусть $\exists$ собственное значение λ_0, тогда и $\exists x_0 \in V,\ x_0 \neq 0$, т.ч. $\varphi(x_0) = \lambda_0 x_0 \Longrightarrow \langle x_0 \rangle = U$ – инвариантное подпространство.
Комплексному корню отвечает двумерное инвариантное подпространство.
Допустим, что $\lambda_1 = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$ – корень $\chi_\varphi(\lambda) \Longrightarrow \overline{\lambda_1} = \alpha - i\beta$ – тоже корень $\Longrightarrow \chi_\varphi(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \overline{\lambda_1})f(\lambda) = (\lambda^2 - 2\alpha\lambda + (\alpha^2 + \beta^2))f(t),\ f(\lambda) \in \mathbb{R}[\lambda]$
φ с помощью (вещественной) матрицы A_φ действует в $\mathbb{R}^n$:
$\forall x \in \mathbb{R},\ X \longmapsto A_\varphi X$
Рассмотрим оператор φ в $\mathbb{C}^n$ по формуле: $\forall Z \longmapsto A_\varphi Z$
В $\mathbb{C}^n$ $\exists$ вектор $Z_1 :\ A_\varphi Z_1 = \lambda_1 Z_1$
$Z_1 = X_1 + iY_1,\ X_1, Y_1 \in \mathbb{R}^n$

$$A_\varphi X_1 + iA_\varphi Y_1 = (\alpha X_1 - \beta Y_1) + i(\beta X_1 + \alpha Y_1) \Longrightarrow \begin{cases} A_\varphi X_1 = \alpha X_1 - \beta Y_1 \\ A_\varphi Y_1 = \beta X_1 + \alpha Y_1 \end{cases} \Longrightarrow$$

$U = \langle X_1, Y_1 \rangle \subset \mathbb{R}^n$ – двумерное инвариантное подпространство для φ.
Допустим, что $Y_1 = \mu X_1 \Longrightarrow A_\varphi X_1 = (\alpha - \beta\mu) X_1 \Longrightarrow X_1$ – собственный вектор.
$\Longrightarrow X_1,\ Y_1$ – ЛНЗ, $\dim U = 2$

□

Глава III. Билинейные и квадратичные функции. Пространства с формами.

§1. Билинейные функции.

Определение. Функция $f:\ V \times V \longmapsto F$ называется билинейной, если:

1. $f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y) = \alpha_1 f(x_1, y) + \alpha_2 f(x_2, y),\ \forall x_1, x_2, y \in V,\ \alpha_1, \alpha_2 \in F$
2. По y.

Примеры:

1. $V = R[a, b]$

$$(f(x), g(x)) \longmapsto \int_a^b f(x)g(x)dx = \int_a^b g(x)f(x)dx \text{– симметричная}$$

2. $V = M_n(F)$

$$f_1(X, Y) = \mathrm{tr}(XY),\ f_2(X, Y) = \mathrm{tr}(XY^T)$$

Выражение $f(x, y)$ в координатах.
Пусть e – базис в V, $x = \sum\limits_{i=1}^n x_i e_i,\ y = \sum\limits_{j=1}^n y_j e_j \Longrightarrow$

$$f(x, y) = f(\sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{j=1}^n y_j e_j) = \sum_{i,j} \underbrace{f(e_i e_j)}_{f_{ij}} x_i y_j \text{ – билинейная форма. (1)}$$

Обозначение: $B_e = (f_{ij})$ – матрица билинейной формы $f(x, y)$ в базисе e.
Выражение (1) можно записать в виде $f(x, y) = X^T B_e Y$ (2).

Изменение матрицы билинейной формы при замене базиса:
Пусть $e' = eC_{e \to e'}$, тогда $X = CX',\ Y = CY'$ подставим в (2).
$X^T B_e Y = (CX')^T B_e (CY') = (X')^T (C^T B_e C) Y' \overset{?!}{=} (X')^T B_{e'} Y',\ \forall X', Y' \in F^n$
Если $X' = E_i,\ Y' = E_j$, то $(X')^T D Y' = d_{ij},\ \forall i, j \Longrightarrow B_{e'} = C^T B_e C$ (3)

Следствие. 1. $\mathrm{rk}B' = \mathrm{rk}B$, т.к. $|C| \neq 0$

2. $|B'| = |B||C|^2$

Если $F = \mathbb{R}$ и $|B| \neq 0$, то $|B'|$ и $|B|$ имеют одинаковый знак.

В силу следствия 1, $\mathrm{rk}B$ можно называть рангом билинейной функции $f(x, y)$, $\mathrm{rk}f$

Назовем левым ядром билинейной функции $f(x, y)$:

$$\mathrm{Ker}_{\text{л}} f = \{x \in V : \; f(x, y) = 0, \forall y \in V\}$$

$$x \in \mathrm{Ker}_{\text{л}} f \Longleftrightarrow \begin{cases} f(x, e_1) = 0 \\ ... \\ f(x, e_n) = 0 \end{cases} \quad \text{– ОСЛУ с матрицей } B$$

Число ЛНЗ решений равно $n - \mathrm{rk}B = n - \mathrm{rk}f$.

Определение. $f(x, y)$ *симметричная*, если $\forall x, y \in V : \; f(x, y) = f(y, x)$

Определение. $g(x, y)$ *кососимметричная*, если $\forall x, y \in V : \; f(x, y) = -f(y, x)$

Теорема. Если $\mathrm{char}F \neq 2$, то любая билинейная функция $f(x, y)$ единственным образом представляется в виде: $f(x, y) = f_+(x, y) + f_-(x, y)$

Доказательство.

$$\begin{cases} f(x, y) = f_+(x, y) + f_-(x, y) \\ f(x, y) = f_+(x, y) - f_-(x, y) \end{cases}$$

$$f_+(x, y) = \frac{f(x, y) + f(y, x)}{2}, \quad f_-(x, y) = \frac{f(x, y) - f(y, x)}{2}$$

□

§2. Квадратичные функции (формы).

Определение. Пусть $f(x, y)$ – билинейная функция на V. Тогда функция $k_f(x) := f(x, x)$, $\forall x \in V$ называется *квадратичной функцией, порожденной билинейной функцией* f, если $k_f(x) \not\equiv 0$.

Обратим внимание, что если $f(x, y) = f_+(x, y) + f_-(x, y)$, то

$$f(x, x) = f_+(x, x) + \underbrace{f_-(x, x)}_{-f_-(x,x)=0}, \; \mathrm{char}F \neq 2 \Longrightarrow$$

f и f_+ порождают одну и ту же функцию.

Теорема. Для любой квадратичной функции $k(x)$ существует единственная билинейная симметричная функция $f(x,y)$, т.ч. $f(x,x) = k(x)$

Доказательство. Пусть $f(x,y) = f(y,x)$
Рассмотрим $k(x+y) = f(x+y, x+y) = f(x,x) + f(x,y) + f(y,x) + f(y,y) = f(x,x) + 2f(x,y) + f(y,y),\ \forall x, y \in V \Longrightarrow f(x,y) = \frac{k(x+y)-k(x)-k(y)}{2}$ $\square$

Координатная запись:

$$k(x) = X^T B_e X = \sum_{i,j} b_{ij}x_i x_j = \sum_{i,j} b_{ii}x_i^2 + 2\sum_{i<j} b_{ij}x_i x_j,\ b_{ij} = b_{ji},\ \forall i, j,\ (2)$$

Договоримся, что матрица квадратичной формы (2) совпадает с матрицей B.

$$k(x_1, x_2) = 3x_1^2 - 4x_1x_2 + 25x_2^2, \qquad B \stackrel{?}{=} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 25 \end{pmatrix}$$

Упрощение квадратичной формы

Термин: Диагональная квадратичная форма:

$$k(x) = \alpha_1 x_1^2 + ... + \alpha_n x_n^2 = \alpha_1 x_1^2 + ... + \alpha_r x_r^2$$

(При подходящей нумерации переменных). $(x = (x_1, ..., x_n))$
Если $\mathrm{rk} f = rk = k = r \le n$

$$B = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & \alpha_r & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Термин: $(F = \mathbb{R})$ $k(x)$ имеет канонический вид, если

$$k(x) = \sum_{i=1}^{p} x_i^2 - \sum_{i=p+1}^{p+q} x_i^2,\ (p + q = \mathrm{rk}\ k = r)$$

Если $F = \mathbb{C}$, то канонический вид будет

$$\sum_{i=1}^{r} x_i^2$$

Над $\mathbb{R}$: замена $y_i = \sqrt{|\alpha_i|}x_i,\ 1 \le i \le r,\ y_i = x_i,\ i = r+1, ..., n$
Тогда $k(x)$ равен каноническому виду.
Над $\mathbb{C}$: $\forall i = 1, ..., r\ \ y_i = \sqrt{|\alpha_i|}x_i$

Алгоритм Лагранжа (метод выделения квадратов.)

Пусть $k(x_1,...,x_n) = b_{11}x_1^2 + ... + b_{nn}x_n^2 + 2b_{12}x_1x_2 + ... + 2b_{1n}x_1x_n + \underbrace{...}_{x_1 \text{ не входит}}$
Основной случай: $b_{11} \neq 0 \Longrightarrow$

$$b_{11}(x_1^2 + 2x_1\sum_{i=2}^{n}\frac{b_{1i}}{b_{11}}x_i) + ... = b_{11}(x_1^2 + 2x_1(\sum_{i=2}^{n}\frac{b_{1i}}{b_{11}}x_i) + (\sum_{i=2}^{n}\frac{b_{1i}}{b_{11}}x_i)^2) -$$

$$\underbrace{-\frac{1}{b_{11}}(\sum_{i=2}^{n}b_{1i}x_i)^2 + 2\sum_{1<i<j}b_{ij}x_ix_j}_{k_1(x_2,...,x_n)} = b_{11}(x_1 + \sum_{i=2}^{n}\frac{b_{1i}x_i}{b_{11}})^2 + k_1(x_2,...,x_n)$$

Замена: $y_1 = x_1 + \sum\limits_{i=2}^{n}\frac{b_{1i}}{b_{11}}x_i$, остальные пока не заменяем.

Особый случай: $b_{ii} = 0,\ \forall i = 1,...,n$
Т.к. $k(x) \not\equiv 0 \Longrightarrow \exists i,j:\ b_{ij} \neq 0$
Подготовительная замена:

$$\begin{cases} x_i = x_i' - x_j' \\ x_j = x_i' + x_j' \end{cases} \Longrightarrow 2b_{ij}x_ix_j = 2b_{ij}((x_i')^2 - (x_j')^2) \Longrightarrow \text{ перейти к основ. случаю}$$

Заммечание: можно сделать такую замену: $\begin{cases} x_i = \tilde{x}_i + \tilde{x}_j \\ x_j = \tilde{x}_j \end{cases}$

Закон инерции для квадратичных форм над $\mathbb{R}$

Если в некотором базисе e квадратичная форма $k(x_1,...,x_n) = \sum\limits_{i=1}^{p}x_i^2 - \sum\limits_{i=p+1}^{p+q}x_i^2$, а в базисе f: $k(y_1,...,y_n) = \sum\limits_{i=1}^{s}y_i^2 - \sum\limits_{i=s+1}^{s+t}y_i^2$, то $p = s,\ q = t$

Замечание. $p + q = s + t = \mathrm{rk}\ k$, так что достаточно доказать, что $p = s$

Доказательство. От противного. Допустим, что $p > s$
Рассмотрим два подпространства: $L_1 = \langle e_1,...,e_p\rangle$, $L_2 = \langle f_{s+1},...,f_n\rangle$
Обратим внимание, что если $x \in L_1,\ x \neq 0$, то $k(x) > 0$; $\forall y \in L_2:\ k(y) \leq 0$

$$\dim L_1 + \dim L_2 = p + (n - s) = n + (p - s) > n \Longrightarrow$$

$$L_1 \cap L_2 \neq \{0\}:\ n \geq \dim(L_1 + L_2) = \underbrace{\dim L_1 + \dim L_2}_{>n} - dim(L_1 \cap L_2) \Longrightarrow$$

$$dim(L_1 \cap L_2) > 0$$

Но $\forall v \in L_1 \cap L_2,\ v \neq 0:\ k(v) > 0$ и $k(v) < 0$ – противоречие $\Longrightarrow$

$p > s$ не может быть.

Доупустим, что $s > p$, тогда рассмотрим $L_1' = \langle e_{p+1}, ..., e_n \rangle$, $L_2' = \langle f_1, ..., f_s \rangle$

$$n - p + s = n + (s - p) > n \Longrightarrow L_1' \cap L_2' \neq \{0\}$$

$$\forall u \in L_1' \cap L_2',\ u \neq 0:\ k(u) > 0,\ k(u) < 0 \Longrightarrow$$

$$p = s \Longrightarrow q = t$$

□

§3. Знакоопределенные квадратичные формы.

Пусть $k(x)$ – квадратичная форма на пр-ве V над полем F, $\mathrm{char} F \neq 2$.
$f(x,y)$ – полярная билинейная форма, $f(x,y) = f(y,x)$, $f(x,x) \equiv k(x)$.
Скажем, что $u \perp v$, если $f(u,v) = 0$.
Скажем, что базис $e_1, ..., e_n$ в пространстве V ортогональный,

если $f(e_i, e_j) = 0,\ \forall i \neq j$

Замечание. Форма является симметрической $\Longleftrightarrow$ ее матрица является симметрической.

Если $B = \left(\begin{array}{ccc|cc} b_{11} & \dots & b_{ii} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{1i} & \dots & b_{ii} & \dots & b_{in} \\ \hline \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{1n} & \dots & b_{in} & \dots & b_{nn} \end{array}\right)$, то $B = B^T$

Главный угловой минор порядка i матрицы B: $\begin{vmatrix} b_{11} & \dots & b_{1i} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{1i} & \dots & b_{ii} \end{vmatrix}$

Теорема Якоби. Пусть B – матрица квадратичной формы $k(x)$ (в данном базисе e) и все главные миноры этой матрицы отличны от 0: $\Delta_1 \Delta_2 \cdot ... \cdot \Delta_n \neq 0$. Тогда в пространстве V существует базис $e' = \{e_1', ..., e_n'\}$, в котором

$$k = \frac{\Delta_1}{\Delta_0} y_1^2 + \frac{\Delta_2}{\Delta_1} y_2^2 + ... + \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}} y_n^2 \text{ (по договренности } \Delta_0 = 1)$$

Доказательство. Процесс ортогонализации – последовательное построение векторов, начиная с $e'_1 = e_1$, чтобы векторы были ортогональными друг другу.

Это включает требования: $\forall m \geq 2$

1. $f(e'_i, e'_j) = 0, \ \forall i \neq j, \ 1 \leq i, j \leq m$
2. $\langle e'_1, ..., e'_m \rangle = \langle e_1, ..., e_m \rangle$

Берем $e'_1 = e_1, \ e'_2$ ищем в виде $e'_2 = e_2 - \lambda e'_1$

$$f(e'_2, e'_1) = f(e_2 - \lambda e'_1, e'_1) = f(e_2, e'_1) - \lambda f(e'_1, e'_1) = f(e_2, e_1) - \lambda k(e'_1)$$

$$\lambda = \frac{f(e_2, e_1)}{k(e'_1)}, \ k(e'_2) = f(e_2 - \lambda e'_1, e_2 - \lambda e'_1) = f(e_2, e_2) - 2\lambda f(e_2, e'_1) + \lambda^2 k(e'_1)$$

Матрица перехода от $e_1, e_2 \longmapsto e'_1 e'_2$

$C_2 = \begin{pmatrix} 1 & -\lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \Delta'_2 = k(e'_1)k(e'_2) = \Delta_2 \Longrightarrow k(e'_2) = \frac{\Delta_2}{\Delta_1}$

$$B' = \begin{pmatrix} f(e'_1, e'_1) & f(e'_1, e'_2) & \dots \\ f(e'_2, e'_1) & f(e'_2, e'_2) & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} f(e'_1) & 0 & \dots \\ 0 & f(e'_2) & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

$$B' = \begin{pmatrix} \begin{array}{c|} B'_2 \\ \hline \end{array} & \\ & \ddots \end{pmatrix} \qquad B'_2 = C_2^T B_2 C_2, \ |B'_2| = \Delta'_2 = |C_2|^2 |B_2| = |B_2| = \Delta_2$$

Рекурсия. Пусть векторы $e_1, ..., e_{m-1}$ $(m \geq 2)$ уже построены, исходя из условий (1), (2) процесса ортогонализации. Вектор e'_m будем искать в виде:

$$e'_m = e_m - \sum_{i=1}^{m-1} \lambda_i e'_i, \text{ чтобы } f(e'_m, e'_j) = 0, \ \forall j = 1, ..., m-1$$

$$f(e'_m, e'_j) = f(e_m - \sum_{i=1}^{m-1} \lambda_i e'_i, e'_j) = f(e_m, e'_j) - \sum_{i=1}^{m-1} \lambda_i f(e'_i, e'_j) = 0$$

$$f(e'_i, e'_j) = 0, \ i \neq 0 \Longrightarrow \text{ останется } f(e_m, e'_j) - \lambda_i f(e'_j, e'_j) = 0$$

Это можно проделать вплоть до $m = n \Longrightarrow \lambda_i = \frac{f(e_m, e'_j)}{k(e'_j)}, \ 1 \leq j \leq m-1$

Новая матрица:

$$B' = \begin{pmatrix} k(e'_1) & & \\ & \ddots & \\ & & k(e'_n) \end{pmatrix} = C^T B C \Longrightarrow |B'| = |C|^2 |B| = |B| \text{ или } \Delta'_n = \Delta_n$$

Тогда $\Delta'_n = k(e'_1) \cdot ... \cdot k(e'_n) = \Delta_n$

Применим индукцию для $m \leq n-1 \Longrightarrow k(e'_1) \cdot ... \cdot k(e_{n-1'}) = \Delta_{n-1} \Longrightarrow k(e'_n) = \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}$

□

Следствия из теоремы Якоби: (для $\Delta_1 \cdot ... \cdot \Delta_n$, над $\mathbb{R}:\ \mathrm{rk} = n$,)
p (положительный индекс инерции) равен числу сохранений знака,
а q (отрицательный индекс инерции) – числу перемен знака в последовательности $\Delta_0, ..., \Delta_n$

$$k(y_1, ..., y_n) = \sum_{m=1}^{n} \frac{\Delta_m}{\Delta_{m-1}} y_m^2$$

Квадратичная форма $k(x)$ является:

- Положительно определенной на V, если $\forall v \neq 0,\ k(v) > 0$
- Отрицательно определенной, если $\forall v \neq 0,\ k(v) < 0$
- Неотрицательно опеределенная, если $\forall v \neq 0,\ k(v) \geq 0$
- Неположительно опеределенная, если $\forall v \neq 0,\ k(v) \leq 0$

Лемма. Квадратичная форма является:

1. Положительно определенной $\iff p = n,\ q = 0$
2. Отрицательно определенной $\iff p = 0,\ q = n$
3. Неотрицательно определенной $\iff q = 0,\ p > 0$
4. Неположительно определенной $\iff p = 0,\ q > 0$
5. Неопределенной $\iff p > 0,\ q > 0$

Критерий Сильвестра. $k > 0 \iff \Delta_1 > 0, ..., \Delta_n > 0$
$k < 0 \iff (-1)^i \Delta_i > 0,\ \forall i = 1, ..., n$

Доказательство. Докажем для $k > 0$, для $k < 0$ – аналогично.
$\Longleftarrow$ Дано, что $\forall i,\ \Delta_i > 0 \Longrightarrow k > 0$
По теореме Якоби $\exists$ замена координат $X = CY$, что $k = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\Delta_i}{\Delta_{i-1}} y_i^2$
По условию, $\forall i,\ \frac{\Delta_i}{\Delta_{i-1}} > 0 \Longrightarrow p = n \Longrightarrow k > 0$
$\Longrightarrow k > 0 \Longrightarrow$ все $\Delta_i > 0$
Из условия $\Delta_n > 0$, т.к. $\underbrace{\Delta_n'}_{>0} = \Delta_n |C|^2$, известно, что $p = n$
$\forall i$ рассмотрим $k(y_1, ..., y_i, 0, ..., 0) \neq 0 \Longrightarrow$ для нее $\Delta_i = |B_i|$ $\square$

Примеры применения критерия Сильвестра

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{1}{2}d^2f(x_0, y_0) + o((\Delta x^2 + \Delta y^2))$$

(x_0, y_0) – точка экстремума. $\Longrightarrow f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0$

$$d^2f(x_0, y_0) = f''_{xx}(M_0)(\Delta x)^2 + 2f''_{xy}(M_0)\Delta x\Delta y + f''_{yy}(M_0)(\Delta y)^2$$

$$\begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{vmatrix} \qquad (x_0, y_0) - \text{точка минимума} \Longleftrightarrow d^2f(x_0, y_0) > 0$$

§4. Евклидовы пространства.

Определение. Пространство $\mathcal{E}$ над $\mathbb{R}$ называется евклидовым, если на $\mathcal{E}$ задано скалярное произведение (x, y) – симметричная билинейная форма, т.ч. соотвествующая квадратичная функция $(x, x) > 0,\ x \in \mathcal{E},\ x \neq 0$. (В геометрии, $\dim \varepsilon < \infty$)

Примеры:

1. В $C[a, b],\ (f(x), g(x)) = \int_a^b f(x)g(x)dx$

$$(f, f) = \int_a^b f^2(x)dx > 0, \text{ где } f \not\equiv 0$$

2. В $M_n(\mathbb{R})$

$(X, Y) = tr(XY^T)$

$(X, X) = tr(XX^T) = \sum\limits_{i,j=1}^{n} x_{ij}^2$

$(XX^T)_{ii} = (x_{i1} \cdot ... \cdot x_{in}) \begin{pmatrix} x_{i1} \\ \vdots \\ x_{in} \end{pmatrix} = x_{i1}^2 + ... + x_{in}^2$

Неравенство Коши-Буняковского-Шварца.

Пусть $\mathcal{E}$ – евклидово пространство, тогда $\forall x, y \in \mathcal{E}\ |(x, y)| \leq |x||y| \qquad (1)$

Более того, если выполняется равенство, то $x \parallel y$.

Доказательство. Если $x = 0$ или $y = 0$, то (1) имеет вид $0 = 0$.

Можно считать, что $x \neq 0,\ y \neq 0$.

Рассмотрим функцию:

$$f(t) = (y - tx, y - tx) = (y, y) - 2t(x, y) + t^2(x, x),\ \forall t \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow$$

$$\frac{\Delta}{4} = (x, y)^2 - |x|^2|y|^2 \leq 0 \Longrightarrow (x, y)^2 \leq |x|^2|y|^2 \Longleftrightarrow$$

$$|(x,y)| \leq |x||y|$$

Равенство означает, что

$$\Delta = 0 \Longrightarrow \exists!\ t = t_0:\ (y - t_0x, y - t_0x) = 0 \Longrightarrow y = t_0x \Longrightarrow y \parallel x.$$

$\square$

Следствие. $\forall x, y \in \mathcal{E}:\ |x+y| \leq |x| + |y| \quad (2)$

Доказательство. $(2) \Longleftrightarrow |x+y|^2 \leq |x|^2 + 2(x,y) + |y|^2 \leq |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2$

$\square$

Определение. Если $x \neq 0,\ y \neq 0$, то опеределим угол α между x и $y:$

$$\cos\alpha = \frac{(x,y)}{|x||y|}\ (3),\ \ \alpha = \arccos\frac{(x,y)}{|x||y|}$$

Определение. Векторы $a_1, ..., a_m \in \mathcal{E}$ – ортогональная система, если $(a_i, a_j) = 0,\ \forall i \neq j$ и $(a_i, a_i) = 1, \forall i = 1, ..., m.$

Утверждение. Ортогональная система ненулевых векторов ЛНЗ.

Доказательство. Пусть $\lambda_1 a_1 + ... + \lambda_m a_m = 0 \mid \cdot\, a_i \Longrightarrow$

$$\lambda_1 \underbrace{(a_1, a_i)}_{=0} + ... + \lambda_i(a_i, a_i) + ... + \lambda_m \underbrace{(a_m, a_i)}_{=0} = 0 \Longrightarrow$$

$$\lambda_i(a_i, a_i) = 0 \Longrightarrow \lambda_i = 0,\ \forall i = 1, ..., m.$$

$\square$

Теорема. В конечномерном евклидовом пространстве существует ортогональный (более сильное утверждение: ортонормированный) базис.

(Существование ортогонального базиса было доказано при доказательстве теоремы Якоби – процесс ортогонализации).

Если $a_1, ..., a_m$ – ортогональный базис, то $\frac{a_1}{|a_1|}, ..., \frac{a_n}{|a_n|}$ – ортогональный базис.

Запись скалярного произведения (x,y) в координатах:
пусть $e = \{e_1, ..., e_n\}$ – базис в $\mathcal{E}$

$$(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i,\ \sum_{j=1}^{n} y_j e_j) = \sum_{i,j=1}^{n} (e_i, e_j) x_i y_i = X^T G_e Y \qquad (4)$$

Обознач. $G_e = ((e_i, e_j))$ – матрица Грама базиса $e_1, ..., e_n$, она симметрическая, причем положительно определенная.

$$G \text{ явл. матрицей Грама} \Longleftrightarrow \begin{cases} G^T = G \\ \Delta_1, ..., \Delta_n > 0 \end{cases}$$

Если базис ортонормированный то $G_e = E$, тогда $(x, y) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i$
Разложение любого вектора x по ортонормированному базису e:

$$x = \sum_{i=1}^{n} (x, e_i) e_i$$

§5 Ортогональное дополнение.

Определение. Пусть $\mathcal{E}$ – евклидово пространство, $\varnothing \neq U \subseteq \mathcal{E}$, тогда ортогональное дополонение к U в $\mathcal{E}$ – это подмножество $U^{\perp} = \{y \in \mathcal{E} |\ (x, y) = 0,\ \forall x \in U\}$

Заметим, что если $U \neq 0$, то U подпространство в $\mathcal{E}$:

$$0 \in U^{\perp},\ (x, y_1) = 0,\ (x, y_2) = 0 \Longrightarrow$$

$$(x, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \alpha_1 \underbrace{(x, y_1)}_{=0} + \alpha_2 \underbrace{(x, y_2)}_{=0} = 0 \Longrightarrow \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 \in U^{\perp}$$

Теорема. Если $\dim \mathcal{E} = n,\ U \subseteq \mathcal{E}$ – подпространство в $\mathcal{E}$, то
1. $dimU + dimU^{\perp} = dim\mathcal{E} = n$
2. $\mathcal{E} = U \oplus U^{\perp}$

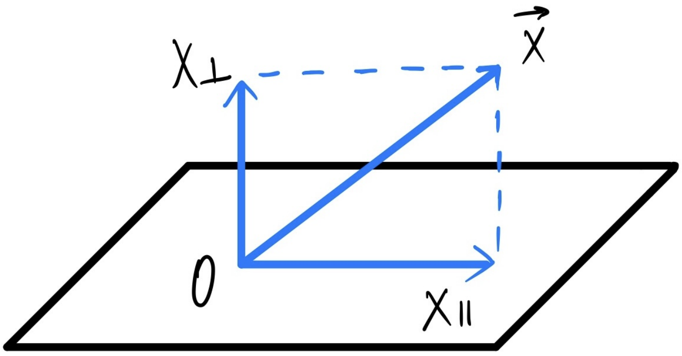
Доказательство. $U \cap U^{\perp} = \{0\}$: если $v \in U \cap U^{\perp} \Longrightarrow (v, v) = 0 \Longrightarrow v = 0$
Выберем базис в $U:\ e_1, ..., e_m$ $(dimU = m,\ 0 < m < n)$.

$$y \in U^{\perp} \Longleftrightarrow (y, e_i) = 0,\ \forall 1 \leq i \leq m$$

$\Longrightarrow$ по определению.
$\Longleftarrow$ если $(y, e_i) = 0,\ \forall i = 1, ..., m$ и $\sum\limits_{i=1}^{m} x_i e_i \Longrightarrow (x, y) = \sum\limits_{i=1}^{m} x_i (e_i, y) = 0$
Получается, что $U^{\perp}$ – подпространство решений ОСЛУ:

$$\begin{cases} (e_1, y) = 0 \\ \dots \\ (e_m, y) = 0 \end{cases} \Longrightarrow dimU^{\perp} = n - m \Longrightarrow dimU^{\perp} + dimU = n \Longrightarrow \mathcal{E} = U \oplus U \perp$$

Это означает, что объединив О.Н.Б. пространства U и О.Н.Б. пространства $U^{\perp}$, получим О.Н.Б в $\mathcal{E}$ (О.Н.Б. - ортонормированный базис). $\square$



$x = x_{||} + x_\perp,\ x_{||} \in U,\ x_\perp \in U^\perp$

$x_{||}$ – ортогональная проекция вектора x на U.

$x_\perp$ – ортогональная проекция вектора x на $U^\perp$.

Конкретно разложение вектора $x \in \mathcal{E}$ на сумму проекции и составляющей.

1 способ. Выбрать О.Н.Б. в ε, $\underbrace{e_1, ..., e_m}_{\text{О.Н.Б в } U}, \underbrace{e_{m+1}, ..., e_n}_{\text{О.Н.Б в } U^\perp}$

$$\forall x = \underbrace{\sum_{i=1}^{m}(x, e_i)e_i}_{x_{||}} + \underbrace{\sum_{i=m+1}^{n}(x, e_i)e_i}_{x_\perp}$$

2 способ. Пусть $a_1, ..., a_m$ – произвольный базис в U.

Искать разложение x в виде:

$$x = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i a_i + x_\perp \mid \cdot a_j \Longrightarrow (x, a_j) = \sum \underbrace{(a_i, a_j)}_{=0} \alpha_i + (\underbrace{x_\perp}_{=0}, a_j)$$

Эта система имеет единственное решение $(\alpha_1, ..., \alpha_m)$. Матрица этой системы – это $G_{a_1,...,a_m}$

Определение. Угол между вектором x и подпространством U – угол между x и $x_{||}$, $\rho(x, U) := ||x_\perp$

"Теорема" Пифагора.

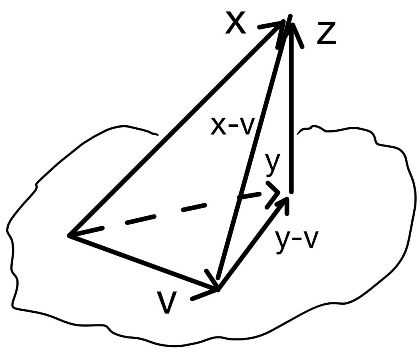
$x = y + z,\ y \in U,\ z \in U^\perp \Longrightarrow |x|^2 = |y|^2|z|^2$

$(x, x) = (y + z, y + z) = |y|^2 + 2\underbrace{(y, z)}_{0} + |z|^2$

Утверждение. $\min\{|x - v| : v \in U\} = |z|$

$$x - v = (x - y) + (y - v) = z + \underbrace{(y - v)}_{\in U}$$

$|x - v|^2 = |z|^2 + |y - v|^2 \geq |z|^2$, равенство $\Longleftrightarrow x = y \underset{\text{док-ть}}{\Longrightarrow} \alpha \leq \beta,\ \forall v \in U$



Свойства операции $\perp$: $(\forall U \subseteq V \longmapsto U^{\perp},\ \dim \mathcal{E} < \infty)$

1. $(U^{\perp})^{\perp} = U$
2. $(U_1 + U_2)^{\perp} = U_1^{\perp} \cap U_2^{\perp}$
3. $(U_1 \cap U_2)^{\perp} = U_1^{\perp} + U_2^{\perp}$

Доказательство.

1. $\forall u \in U,\ \forall v \in U^{\perp} \Longrightarrow (u, v) = 0 \Longrightarrow u \in (U^{\perp})^{\perp}$

Равенство размерностей:

$$\mathrm{dim} U^{\perp} = n - \mathrm{dim} U,\ \dim (U^{\perp})^{\perp} = n - \mathrm{dim} U^{\perp} = \mathrm{dim} U \Longrightarrow U = (U^{\perp})^{\perp}$$

2. Возьмем $v \in U_1^{\perp} \cap U_2^{\perp}$, тогда $\forall w = u_1 + u_2,\ (v, w) = \underbrace{(v, u_1)}_{0} + \underbrace{(v, u_2)}_{0} \Longrightarrow$

$$v \in (U_1 + U_2)^{\perp} \Longrightarrow U_1^{\perp} \cap U_2^{\perp} \subseteq (U_1 + U_2)^{\perp}$$

Равенство размерностей:

$$\dim(U_1 + U_2)^{\perp} = n - \dim(U_1 + U_2) =$$

$$= n - (\mathrm{dim} U_1 + \mathrm{dim} U_2 - \dim(U_1 \cap U_2)) =$$

$$= n + \dim(U_1 \cap U_2) - \mathrm{dim} U_1 - \mathrm{dim} U_2 =$$

$$= (n - \mathrm{dim} U_1) + (n - \mathrm{dim} U_2) + \dim(U_1 \cap U_2) - n \Longrightarrow$$

$$dim(U_1^{\perp} \cap U_2^{\perp}) = \mathrm{dim} U_1^{\perp} + \mathrm{dim} U_2^{\perp} - \dim(U_1^{\perp} \cap U_2^{\perp}) =$$

$$= n - \mathrm{dim} U_1 + n - \mathrm{dim} U_2 - \dim(U_1^{\perp} + U_2^{\perp})$$

$\dim(U_1^{\perp} + U_2^{\perp}) \stackrel{?}{=} n - \dim(U_1 \cap U_2)$
$\dim(U_1^{\perp} + U_2^{\perp}) = \mathrm{dim} U_1^{\perp} + \mathrm{dim} U_2^{\perp} - \dim(U_1^{\perp} \cap U_2^{\perp})$
$(U_1 + U_2) \perp \subseteq U_1^{\perp} \cap U_2^{\perp}$

Если $v \in (U_1 + U_2)^{\perp} \Longrightarrow \begin{cases} (v, u_1) = 0, \forall u_1 \in U_1 \\ (v, u_2) = 0, \forall u_1 \in U_2 \end{cases} \Longrightarrow v \in U_1^{\perp} \cap U_2^{\perp}$

3. $(U_1 \cap U_2)^{\perp} = U_1^{\perp} + U_2^{\perp} \Longleftrightarrow \underbrace{(U_1 \cap U_2)^{\perp\perp}}_{U_1 \cap U_2} \stackrel{?}{=} (U_1^{\perp} + U_2^{\perp}) =$ (свойство 2) $=$

$= (U_1^{\perp})^{\perp} \cap (U_2^{\perp})^{\perp} = U_1 \cap U_2$ $\square$

Изоморфизм евклидовых пространств.

$\varphi: \ \mathcal{E} \longmapsto \mathcal{E}'$ – изоморфизм евклидовых пространств $\mathcal{E}$ и $\mathcal{E}'$, если

1. φ – линейное отображение.
2. φ – биекция.
3. $\forall x_1, x_2 \in \mathcal{E} \Longrightarrow (\varphi(x_1), \varphi(x_2)) = (x_1, x_2)$

Теорема. Если $\dim \mathcal{E} = \dim \mathcal{E}'$, то $\mathcal{E}$ и $\mathcal{E}'$ изоморфны, т.е. существует изоморфизм $\varphi: \ \mathcal{E} \longmapsto \mathcal{E}'$

Доказательство. Выберем $e_1, ..., e_n$ – О.Н.Б. в $\mathcal{E}$, $e'_1, ..., e'_n$ – О.Н.Б. в $\mathcal{E}'$
$\forall x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$, определим $\varphi(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e'_i$ (в частности, $\varphi(e_i) = e'_i$)
φ – линейный изоморфизм.
$\forall x, y \in \mathcal{E}, (x, y) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i, \ \ (\varphi(x), \varphi(y)) = (\sum\limits_{i} x_i e'_i, \sum\limits_{j} y_j e'_j) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i = (x, y)$

$\square$

Теорема.
1. Пусть e, e' – два О.Н.Б. в евклидовом пространстве $\mathcal{E}$, $C_{e\to e'} \Longrightarrow C^T_{e\to e'} = C^{-1}_{e\to e'}$ (ортогональная матрица).
2. Если e – О.Н.Б., C – ортогональная матрица, то $eC = e'$ – тоже О.Н.Б.

Доказательство.
1. Дано: e' – О.Н.Б. $\Longrightarrow (e_i, e_j) = \delta_{ij}$ (символ Кронекера)

$$(e_i, e_j) = (C^T C)_{ij} \Longrightarrow C^T C = E$$

2. $C_{e\to e'} = (e'^{\uparrow}_1 ... e'^{\uparrow}_n)$ в базисе e. Т.к. базис e ортонормированный, то $(e'_i, e'_j) = e'_i \cdot e'^{\uparrow}_j$ – это (i, j) элемент произведения:

$$C^T C = E \Longrightarrow (e'_i, e'_j) = \delta_{ij} \Longrightarrow e' - \text{ О.Н.Б.}$$

$\square$

Понятие объема n-мерного параллелепипеда.

Параллелепипед Π с ребрами $a_1, ..., a_n$ в n-мерном пространстве V.

$$\Pi = \{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i \mid 0 \leq \alpha_i \leq 1, \ 1 \leq i \leq n\}$$

Будем считать, что $a_1, ..., a_n$ ЛНЗ.
В n-мерном евклидовом пространстве $\mathcal{E}_n$

Определение. Объемом n-мерного параллелепипеда V_n называется произведение объема $(n-1)$-мерного основания $\Pi_{\{a_1,...,a_{n-1}\}}$ на высоту $|a_n^\perp|$

Формула: $|a_n^\perp|^2 = \frac{\det G_{\{a_1,...,a_n\}}}{\det G_{\{a_1,...,a_{n-1}\}}}$

Доказательство. Ортогонализуем векторы $a_1, ..., a_n$ – получим попарно ортогональные $b_1, ..., b_n$ (в частности, $b_n \perp b_1, ..., b_{n-1}$, $\langle b_1, ..., b_{n-1}\rangle = \langle a_1, ..., a_{n-1}\rangle$)

$$G_{\{b_1,...,b_n\}} = C^T G_{\{a_1,...,a_n\}} C, \text{ при этом } C = \begin{pmatrix} 1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \det G_{\{b_1,...,b_n\}} = \det G_{\{a_1,...,a_n\}}$$

$$\frac{\det G_{\{a_1,...,a_n\}}}{\det G_{\{a_1,...,a_{n-1}\}}} = \frac{|b_1|^2...|b_n|^2}{|b_1|^2...|b_{n-1}|^2} = |b_n|^2 = |a_n^\perp|^2$$

□

Следствие. По индукции, $V_n^2 = \det G_{\{a_1,...,a_n\}}$

Следствие.

$$\rho^2(x, U) = \frac{\det G_{\{a_1,...,a_m,x\}}}{G_{\{a_1,...,a_m\}}} (U = \langle a_1, ..., a_m\rangle \text{ ЛНЗ})$$

Следствие. Если известны координаты векторов $a_1, ..., a_n$ в О.Н.Б., то

$$V_n = |\det \begin{pmatrix} \vec{a}_1 \\ \vdots \\ \vec{a}_n \end{pmatrix} |$$

Доказательство. Т.к. базис ортонормированный, то

$$\begin{pmatrix} \vec{a}_1 \\ \vdots \\ \vec{a}_1 \end{pmatrix} (a_1^\uparrow ... a_n^\uparrow) = \det G_{\{a_1,...,a_n\}} \Longrightarrow$$

$$V_n^2 = \det G_{\{a_1,...,a_n\}} = \left(\det \begin{pmatrix} \vec{a}_1 \\ \vdots \\ \vec{a}_n \end{pmatrix} \right)^2$$

□

§6. Линейный оператор в евклидовом пространстве

Пусть $\mathcal{E}$ – евклидово пространство, $\varphi: \ \mathcal{E} \longmapsto \mathcal{E}'$

Определение. Оператор φ^* – сопряженный к φ:
$\varphi^* : \ \mathcal{E} \longmapsto \mathcal{E}, \ \forall x, y \in \mathcal{E} : \ (\varphi(x), y) = (x, \varphi^*(y)) \ \ (1)$

Определение. Оператор φ – самосопряженный, если
$\varphi^* = \varphi$, т.е. $\forall x, y \in \mathcal{E} : \ (\varphi(x), y) = (x, \varphi(y))$

Определение. Оператор φ – ортогональный, если

$$\forall x, y \in \mathcal{E} : \ (\varphi(x), \varphi(y)) = (x, y)$$

Условия на матрицу A_φ:

1. (1) в координатах:

$$(A_\varphi X)^T G_e Y = X^T G_e (A_{\varphi^*} Y) \Longrightarrow$$

$$X^T (A_\varphi^T G_e) Y = X^T (G_e A_{\varphi^*}) Y, \ \forall X, Y \in F^n \Longrightarrow$$

$$A_\varphi^T G_e = G_e A_{\varphi *} \Longrightarrow$$

$$A_{\varphi *} = G^{-1} A_\varphi^T G_e$$

Если e – О.Н.Б., то $G_e = E$ и $A_{\varphi *} = A_\varphi^T$

2. $\varphi = \varphi^*$ – самосопряженный $\Longleftrightarrow (\varphi(x), y) = (x, \varphi(y)), \ \forall x, y \in \mathcal{E}$

$$(A_\varphi X)^T G_e Y = X^T G_e A_\varphi Y, \ \forall X, Y \in \mathbb{R}^n$$

$$X^T (A_\varphi^T G_e) y = X^T (G_e A_\varphi) Y \Longleftrightarrow A_\varphi^T G_e = G_e A_\varphi$$

В О.Н.Б. $\Longleftrightarrow A_\varphi^T = A_\varphi$ – симметричная.

3. φ – ортогональный $\Longleftrightarrow \forall x, y : \ (\varphi(x), \varphi(y)) = (x, y) \Longleftrightarrow$

$$(A_\varphi X)^T G_e (A_\varphi Y) = X^T G_e Y$$

$$X^T (A_\varphi^T G_e A_\varphi) Y \equiv X^T G_e Y \Longleftrightarrow A_\varphi^T G_e A_\varphi = G_e$$

В О.Н.Б.: $A_\varphi^T A_\varphi = E, \ A_\varphi$ – ортогональньная.

<u>Комментарий к определению φ^*:</u>
Пусть $\varphi : \ V \longmapsto W$ – линейное отображение.
Тогда $\varphi^* : \ \underbrace{W^*}_{f \in} \longmapsto V^*$ определим по правилу: $\varphi^*(f)(v) = f(\varphi(v)), \ \forall v \in V$
Это φ^* – линейное отображение, в частности, для $W = V$, то $\varphi^* : \ V^* \longmapsto V^*$ – линейный оператор.

Утверждение. Если $\mathcal{E}$ – евклидово пространство, то $\mathcal{E}^* \cong \mathcal{E}$.

Доказательство. Построение изоморфизма:

Выберем в $\mathcal{E}$ О.Н.Б. e, $\forall v \in \mathcal{E}:\ v = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$

$$\forall f \in \mathcal{E}^*,\ f(v) = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{f(e_i)}_{a_i} x_i = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = (a_1, ..., a_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (a, v)$$

Т.к. базис ортонормированный и $a = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i e_i,\ v = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$

Т.е. для функции f найти такой вектор, что $f(v) = (a, v),\ \forall v \in \mathcal{E}$

$f \longleftrightarrow a$, можно "отождествить"$\mathcal{E}$ и $\mathcal{E}^*$ $\square$

Свойства операции сопряжения:

1. $(\varphi^*)^* = \varphi$
2. $(\alpha\varphi + \beta\varphi)^* = \alpha\varphi^* + \beta\varphi^*$
3. $(\varphi\psi)^* = \psi^*\varphi^*$

Доказательство. Достаточно доказать для матриц в О.Н.Б.

1. $A_{\varphi^*} = A_\varphi^T \Longrightarrow A_{\varphi^{**}} = (A_{\varphi^*})^T = A_\varphi^{TT} = A_\varphi$
2. Очевидно.
3. $A_{(\varphi\psi)^*} = A_{\varphi\psi}^T = (A_\varphi A_\psi)^T = A_\psi^T A_\varphi^T = A_{\psi^*} A_{\varphi^*}$ $\square$

Теорема. Пусть $\varphi:\ \mathcal{E} \longmapsto \mathcal{E}$ – линейный оператор. Тогда:

1. Если $\varphi(U) \subseteq U$, то $\varphi^*(U^\perp) \subseteq U^\perp$
2. $\mathrm{Im}\varphi = (\mathrm{Ker}\varphi^*)^\perp$
3. $\mathrm{Ker}\varphi = (\mathrm{Im}\varphi^*)^\perp$

Доказательство.

1. Пусть $x \in U,\ y \in U^\perp$. $\varphi^*(y) \subseteq U^\perp \Longleftrightarrow$

$$0 \stackrel{?}{=} (x, \varphi^*(y)) = (\underbrace{\varphi(x)}_{\in U}, y) = 0 \Longrightarrow \varphi^* \in U^\perp$$

2. Возьмем $y \in \mathrm{Im}\varphi \Longrightarrow \exists x \in \mathcal{E}:\ y = \varphi(x)$

Возьмем $z \in \mathrm{Ker}\varphi^*$. Вычислим:

$$(y, z) = (\varphi(x), z) = (x, \underbrace{\varphi^*(z)}_{0}) = 0 \Longrightarrow$$

$$y \in (\mathrm{Ker}\varphi^*)^\perp \Longrightarrow \mathrm{Im}\varphi \subseteq (\mathrm{Ker}\varphi^*)^\perp$$

$\mathrm{dimIm}\varphi = \mathrm{rk}A_\varphi,\ \mathrm{dimKer}\varphi^* = n - \mathrm{dimIm}\varphi^* = n - \mathrm{rk}A_\varphi$.

Но $\mathrm{rk}A_{\varphi^*} = \mathrm{rk}A_\varphi$ (в О.Н.Б. $A_{\varphi^*} = A_\varphi^T$) $\Longrightarrow$

$$\dim(\mathrm{Ker}\varphi^*)^\perp = n - \dim\mathrm{Ker}\varphi^* = \mathrm{rk}A_\varphi \Longrightarrow \text{размерности равны}$$

3. $\mathrm{Ker}\varphi = (\mathrm{Im}\varphi^*)^\perp \iff (\mathrm{Ker}\varphi)^\perp = \mathrm{Im}\varphi^*$

Заменим φ на φ^*, тогда φ^* на φ^{**} в равенстве 2.

Тогда $(\mathrm{Ker}\varphi^*)^\perp = \mathrm{Im}\varphi$ в исходных обозначениях это дает $(\mathrm{Ker}\varphi)^\perp = \mathrm{Im}\varphi^*$

$\square$

Следствие. (Теорема Фредгольца)

СЛУ $AX = b$ $(*)$ совместна $\iff \forall Y$ – решения сопряженной однородной системы $A^TY = 0$ выполняется условие: $Y^Tb = 0$, (т.е $Y \perp b$)

Система (*) совместна означает, что $b \in \mathrm{Im}\varphi$, если A – матрица оператора φ
По 2, $b \in \mathrm{Im}\varphi \iff b \in (\mathrm{Ker}\varphi^*)^\perp$, т.е. $\forall Y : A^TY = 0,\ (b, Y) = 0$

§7. Самосопряженные операторы.

Определение. $\varphi:\ \mathcal{E} \longmapsto \mathcal{E}$ называется самосопряженным, если
$$\forall x, y \in \mathcal{E}:\ (\varphi(x), y) = (x, \varphi(y))\ \ (1)$$

Теорема. Пусть $\varphi:\ \mathcal{E} \longmapsto \mathcal{E}$ – самосопряженный оператор

1. Если $U \subseteq \mathcal{E}$ – φ-инвариантное подпространство, то $U^\perp$ также φ-инвариантно (это доказано для φ^*)
2. Все характеристические корни φ вещественные.
3. В $\mathcal{E}$ существует О.Н.Б. из собственных векторов оператора φ (в нем A_φ диагональна).

Доказательство.

2. Пусть λ_1 – характеристический корень для $\chi_\varphi(\lambda)$

Если $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ – это собственное значение, и доказывать нечего. (С) Чубаров

Если $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, то существует двумерное инвариантное подпространство $U = \langle X, Y\rangle,\ X, Y \in \mathbb{R}^n$.

$(x, y)|_U$ делает его евклидовым пространством.

$(x, y \in U)$, соотвественно, $\varphi|_U$ будет самосопряженным оператором на $U \Longrightarrow$
в О.Н.Б. $e_1', e_2',\ A_{\varphi|_U} = A,$ т.е. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}^2$$

$$D = (a_{11} + a_{22})^2 - 4(a_{11}a_{22} - a_{12}^2) = (a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2 \geq 0 \Longrightarrow \lambda \in \mathbb{R}$$

3. Индукция по $\dim\mathcal{E} = n$:

$\dim\mathcal{E} = 1 \Longrightarrow \varphi(x) = \lambda x,\ \forall x \in \mathcal{E}$ – верно.

Для $\dim\mathcal{E} = n > 1$ предположение индукции: в $(n-1)$-мерном евклидовом пространстве самосопряженный оператор имеет О.Н.Б. из собственных векторов.

Фикс. одно собственное значение $\lambda_1 \in \mathbb{R}$, обозн. $U = \langle e_1 \rangle$, если
$\varphi(e_1) = \lambda_1 e_1,\ |e_1| = 1$

Тогда $U^\perp$ имеет размерность $(n-1)$ является евклидовым относительно $(x,y)|_{U^\perp}$ и $\varphi|_{U^\perp}$ – самосопряженный $\Longrightarrow$ в $U^\perp$ $\exists$ О.Н.Б. $e_2, ..., e_n :\ \varphi(e_i) = \lambda_i e_i$

Тогда $e_1, ..., e_n$ – нужный О.Н.Б. $\square$

<u>Задача:</u> Пусть φ – самосопряженное оператор в $\mathcal{E}$, $\varphi^2 = \varphi$ (идемпотентный оператор). Тогда либо $\varphi = \mathcal{E}$ или 0, либо φ – ортогональнное проектирование $\mathcal{E}$ на некоторое подмножество.

§8. Ортогональные операторы.

Определение. Линейный оператор $\varphi :\ \mathcal{E} \longmapsto \mathcal{E}$ назывется ортогональным, если $\forall x, y \in \mathcal{E} :\ (\varphi(x), \varphi(y)) = (x, y)$

Заметим, что $|\varphi(x)| = |x|,\ \forall x \in \mathcal{E} \Longrightarrow \varphi$ – невырожденный.

Теорема. $\varphi :\ \mathcal{E} \longmapsto \mathcal{E}$ – ортогональный оператор.

1. Собственные векторы, отвечающие различным собственным значениям ортогональны.
2. Все характеристические корни ортогональльной матрицы $|\lambda| = 1$, вещественные только ± 1.
3. Если $\varphi(U) \subseteq U$, то $\varphi(U^\perp) \subseteq U^\perp$

Доказательство.
3. Пусть $x \in U, y \in U^\perp$, $0 = (x,y) = (\varphi(x), \varphi(y))$
Т.к. φ невырожденно, т.е. обратимо, то $\forall x \in U\ \exists z \in U\ (z = \varphi^{-1}(x))$

$$(x,y) = (\varphi^{-1}(x), y) = (\varphi(\varphi^{-1}(x)), \varphi(y)) = (x, \varphi(y)) \Longrightarrow \varphi(y) \in U^\perp$$

φ^{-1} тоже ортогонален.
1. Пусть $\varphi(x) = \lambda_1 x,\ x \neq 0,\ \varphi(y) = \lambda_2 y,\ y \neq 0,\ \lambda_1 \neq \lambda_2$:

$$(\varphi(x), \varphi(y)) = \lambda_1\lambda_2(x,y) = (x,y)$$

$$(x,y)(1 - \underbrace{\lambda_1\lambda_2}_{-1}) = 0 \Longrightarrow 2(x,y) = 0 \Longrightarrow (x,y) = 0$$

2. Если λ – собственное значение, то $\lambda \in \{1, -1\},\ \varphi(x) = \lambda x,\ x \neq 0:$

$$(\varphi(x), \varphi(x)) = \lambda^2(x, x) = \underbrace{(x, x)}_{\neq 0} \Longrightarrow \lambda^2 = 1,\ \lambda = \pm 1$$

Если $\lambda_1 = \alpha + i\beta,\ (\beta \neq 0)$ – корень матрицы A_φ, то рассмотрим оператор $\varphi^{\mathbb{C}}:\ \mathbb{C}^n \longmapsto \mathbb{C}^n,\ (\dim V = n)$

$$\varphi^{\mathbb{C}}(z) = \lambda_1 z,\ z = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$((1, i), (1, i)) \overset{?!}{=} 1 \cdot 1 + i \cdot i$$

Введем в $\mathbb{C}^n$ скалярное произведение векторов X, Y :

$$(X, Y) := \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i} \Longrightarrow (X, X) = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2$$

При этом, $(Y, X) = \overline{(X, Y)}$, в частности, $\forall \lambda \in \mathbb{C},\ (X, \lambda Y) = \overline{\lambda}(X, Y)$
Пусть $x \in \mathbb{C}^n$ – собственный для $\varphi^{\mathbb{C}}$, т.е. $A_\varphi X = \lambda_1 X$, вычислим

$$(\varphi^{\mathbb{C}}(x), \varphi^{\mathbb{C}}(x)) = (x, x)$$

$$(\lambda_1 X, \lambda_1 X) = \lambda_1 \overline{\lambda_1}(X, X) \Longrightarrow |\lambda_1|^2 = 1,\ |\lambda| = \pm 1$$

$\square$

Определение. Матрица называется канонической, если

$$A = \begin{pmatrix} \Phi_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \Phi_s & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Теорема. Для любого ортогонального оператора в $\mathcal{E}_n$ существует ортонормированный базис, в котором матрица A_φ имеет канонический вид, при этом числа p, q, s и углы α_k $(k = 1, ..., s)$ для φ опеределяется единственным образом, с точностью до порядка следования клеток.

Доказательство. Допустим, что φ имеет хотя бы одно вещественное собственное значение. Рассмотрим $U = \mathcal{E}_1 \oplus \mathcal{E}_{-1}$ (прямая сумма собственных подпространств). Обозначим за $p := \dim\mathcal{E}_1,\ q := \dim U_{-1} \Longrightarrow \dim U = p + q$.
U – инвариантное подпространство, тогда $\mathcal{E} = U^\perp \oplus U,\ U^\perp$ также инвариантно, и $\varphi|_{U^\perp}$ не имеет вещественных собственных значений. Возьмем одно из них $\lambda_1 = \cos\alpha_1 + i\sin\alpha_1 \sim L_1$.

$$A_{\varphi|_{L_1}} = \begin{pmatrix} \cos\alpha_1 & -\sin\alpha_1 \\ \sin\alpha_1 & \cos\alpha_1 \end{pmatrix}$$

Индукция по размерности s (если $s \neq 0$), $\dim U^\perp = 2s$.
Рассмотрим подпространство: $L_1^\perp$ в пространстве $U^\perp$, его размерность равна $2s - 2$.
По предположению индукции, в $L_1^\perp$ в $U^\perp$ существует О.Н.Б., в котором матрица ограничения оператора φ имеет вид

$$\begin{pmatrix} \Phi_2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \Phi_n \end{pmatrix}$$

$\square$

Пример: Пусть $A^T = A^{-1}$ 3-го порядка. Хотим найти матрицу

$$A \overset{?}{\sim} A' = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix},\ \lambda_1 = \pm 1$$

$$|A'| = \begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} \lambda_1 = \lambda_1 = \pm 1$$

Зная, что можно вычислить собственный вектор $\Longrightarrow$ он дает ось поворота (м.б. с симметрией, если $\lambda_1 = -1$)

$$\mathrm{tr}A = \mathrm{tr}A' = 2\cos\alpha + \lambda_1 \Longrightarrow \cos\alpha = \frac{\mathrm{tr}A - \lambda_1}{2}$$

Можно выбрать правый О.Н.Б. e_1, e_2 в плоскости, $\perp e_3,\ \varphi(e_3) = \lambda_1 e_3,\ |e_3| = 1$.
Общий случай: $\varphi : \mathcal{E} \longmapsto \mathcal{E}$.

Лемма. Если φ невырожденная, то все собственные значения оператора $\varphi^* \cdot \varphi$ положительны.

Теорема. Любой невырожденный оператор φ может быть представлен в виде произведения (причем единственным образом) $\varphi = \theta \cdot \psi$, где θ – ортогональный оператор, а ψ – самосопряженный со всеми положительными собственными значениями $\lambda > 0$.

Доказательство. Пусть μ – собственное значение оператора $\varphi^* \cdot \varphi$, $(\varphi^* \cdot \varphi)(x) = \mu x$, $x \neq 0$ Вычислим: $((\varphi^* \cdot \varphi)(x), x) = \mu(x, x)$

$$(\underbrace{\varphi(x)}_{\neq 0}, \varphi(x)) > 0 \Longrightarrow \mu = \frac{(\varphi(x), \varphi(x))}{(x, x)} > 0$$

Матричная формулировка: любую невырожденную вещественную матрицу A можно представить, причем единственным образом, в виде $A = BC$, где $B^T = B^{-1}$, $C^T = C$, с положительными собственными значениями.
Такое разложение называется полярным разложением оператора (матрицы).
Можно выбрать О.Н.Б. $e_1, ..., e_n$ в $\mathcal{E}$, тогда $A = A_\varphi$, $B = B_\theta$, $C = C_\psi$.
Доказательство матричного варианта:
Пусть задача решена:

$$A = BC \Longrightarrow A^T = C^T B^T = CB^{-1} \Longrightarrow A^T A = CB^{-1}BC = C^2$$

Т.к. матрица $A^T A = C^2$ – симметричная, она задает самосопряженный линейный оператор, т.е. существует О.Н.Б. $e'_1, ..., e'_n$, в котором

$$(A^T A)' = \begin{pmatrix} \mu_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_n \end{pmatrix} \text{ все } \mu_i > 0, \text{ по лемме.}$$

Хотим найти матрицу C', чтобы

$$(C')^2 = \begin{pmatrix} \mu_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_n \end{pmatrix} \Longrightarrow C' = \begin{pmatrix} \pm\sqrt{\mu_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \pm\sqrt{\mu_n} \end{pmatrix}$$

С учетом требования положительности

$$C' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}, \ \lambda_i = \sqrt{\mu_i} > 0 - \text{ единственная такая матрица.}$$

Пусть T – (ортогональная) матрица перехода от базиса e к базису e', тогда

$$T^{-1}(A^T A)T = \begin{pmatrix} \mu_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_n \end{pmatrix} \Longrightarrow C = TC'T^{-1} = T \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} T \Longrightarrow$$

$$B = AC^{-1} - \text{ эта матрица оргональная}$$

$$B^T = (C^{-1})TA^T = C^{-1}A^T \Longrightarrow B^TB = (C^{-1}A^T)(AC^{-1}) = C^{-1}(\underbrace{A^TA}_{C^T})C^{-1} = E$$

$\square$

Замечание. Можно также представить A в виде $A = C'B'$. Вопрос: можно ли утверждать, что $B' = B$ или $C' = C$?

Рассмотрим разложение $A = BC$, где $C = T\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} T^{-1}$

$$A = (BT)diag\underbrace{(\lambda_1, ..., \lambda_n)}_{\text{все } >0} T^{-1} = D \cdot diag(\lambda_1, ..., \lambda_n)F,$$

где F, D – ортогональное сингулярное разложение.

§9. Квадратичные формы на евклидовом пространстве.

Пусть $k(x) = f(x, x)$ – квадратичная функция на евклидовом пространстве. $f(x, y)$ – симметрическая билинейная форма, которая ее порождает.
Обозначим F – матрицу этой формы в некотором ортонормированном базисе.
Если ввести другой О.Н.Б. $e' = eC$, $C = C_{e \to e'}$ – ортогональная матрица.
Тогда $F' = C^TFC = C^{-1}FC$. Поэтому можно рассмотреть F как матрицу линейного оператора φ в базисе e, φ – самосопряженный.
По теореме, в $\mathcal{E}$ существует О.Н.Б. e', в котором матрица этого оператора диагональная: $diag(\lambda_1, ..., \lambda_n)$.

$$F_{e'} = C^{-1}FC = C^TFC$$

Т.е. в базисе e', если сделать замену $X = CY$ форма k приобретает вид:

$$k(y) = \lambda_1 y_1^2 + ... + \lambda_n y_n^2$$

Причем $\lambda_1, ..., \lambda_n$ – собственные значения матрицы F.
Базисные векторы $e'_1, ..., e'_n$ называют главными осями для квадратичной формы $k(x)$.

Определение. Линейный оператор $\varphi: \ \mathcal{E} \longmapsto \mathcal{E}$ называется присоединенным к билинейной функции $f(x, y)$, если:

$$\forall x, y \in \mathcal{E} f(x, y) = (x, \varphi(y)) \ \ (1)$$

Утверждение. 1. Для любой билинейной функции $f(x,y)$ существует единственный присоединенный оператор, удовлетворяющий тождеству (1)

2. Если $f(x,y) \equiv f(y,x)$, то φ – самосопряженный.

Доказательство. Пусть e – некоторый базис в $\mathcal{E}$, $x = eX$, $y = eY \Longrightarrow$

$$f(x,y) = X^T F Y \equiv X^T (G_e A_\varphi) Y \Longleftrightarrow F = G_e A_\varphi, \; A_\varphi = G_e^{-1} F \quad (2)$$

Проверка самосопряженности для симметричности $f(x,y)$:

$$\forall x, y \in \mathcal{E} \; (\varphi(x), y) = (y, \varphi(x)) = f(y,x) = f(x,y) = (x, \varphi(y))$$

□

Теорема. (О паре квадратичных форм).
Если $f(x)$, $g(x)$ – квадратичные формы на $\mathcal{E}$ и $g > 0$, то в $\mathcal{E}$ существует такой базис e', что в новых координатах

$$f = \lambda_1 y_1^2 + ... + \lambda_n y_n^2, \; g = y_1^2 + ... + y_n^2$$

Доказательство.
Обозначим $f(x,y)$ и $g(x,y)$ – симметричные билинейные функции:
$f(x,x) = f(x)$, $g(x,x) = g(x)$, F и G их матрицы в некотором базисе e.
Можно ввести в пространстве $\mathcal{E}$ скалярное произведение $(x,y) := g(x,y)$
Пусть $\varphi : \; \mathcal{E} \longmapsto \mathcal{E}$ – линейный оператор, присоединенный к билинейной форме $f(x,y)$, т.е. $\forall x, y : \; f(x,y) = g(x, \varphi(y))$
Т.к. оператор φ самосопряженный, то по основной теореме о самосопряженных операторах в пространстве $\mathcal{E}$ существует базис из собственных векторов для φ ортонормированный относительно скалярного произведения $g(x,y)$.
Пусть e' – этот базис, C – матрица перехода от e к e'

$$X = CY \Longrightarrow g(y) = y_1^2 + ... + y_n^2 = (y,y)$$

$$F' = C^T F C; \quad F = G A_\varphi; \quad A'_\varphi = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$G' = C^T G C = E \Longrightarrow GC = (C^T)^{-1}$$

Тогда

$$C^{-1} A_\varphi C = C^{-1} G^{-1} F C = C^T F C = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$f(y) = \lambda_1 y_1^2 + ... + \lambda_n y_n^2$$

□

Замечание. $\lambda_1, ..., \lambda_n$ – собственные значения матрицы $A_\varphi = G^{-1}F$, т.е. они являются корнями уравнения $|A_\varphi - \lambda E| = 0$, т.е.

$$|G^{-1}F - \lambda E| = 0 \Longleftrightarrow |GG^{-1}F - \lambda G| = |F - \lambda G| = 0$$

(λ-уравнение пары матриц $F,\ G$)
Для каждого корня λ_i надо решить систему уравнений

$$(G^{-1}F - \lambda_i E)X = 0 \Longleftrightarrow (F - \lambda_i G)X = 0$$

$\square$

Пример применения:

Найти наибольшие и наименьшие значения квадратичной формы $f(x)$ в $\mathbb{R}^n$ при условии, что $g(x) = 1$, где $g(x)$ – положительно опеределенная квадратичная форма.
Решение: Можно найти такую замену переменных $X = CY$, что

$$f(x) = \lambda_1 y_1^2 + ... + \lambda_n y_n^2 \qquad g(y) = y_1^2 + ... + y_n^2 = 1 \text{ – единичная сфера в } \mathbb{R}^n$$

Ответ: $f_{\max} = \max\ \lambda_i,\quad f_{\min} = \min\ \lambda_i$ (додумать)

§10. Полуторалинейные функции (формы.)

Пусть V – векторное пространство над полем $\mathbb{C}$.

Определение. Функция $\beta:\ V \times V \longmapsto \mathbb{C}$ называется полуторалинейной, если

1. $\forall x_1, x_2, y \in V$ вып. $\beta(x_1 + x_2, y) = \beta(x_1, y) + b(x_2, y)$ и
   $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ вып. $\beta(\lambda x, y) = \lambda\beta(x, y)$. Линейность по 1 аргументу.
2. $\beta(x, y_1 + y_2) = \beta(x, y_1) + \beta(x, y_2)$ и
   $\beta(x, \lambda y) = \overline{\lambda}\beta(x, y)$

В координатах:

$$\beta(x, y) = \beta(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{j=1}^{n} y_j e_j) = \sum_{i,j=1}^{n} \beta(x_i e_i, y_j e_j) = \sum_{i,j=1}^{n} \beta(e_i, e_j) x_i \overline{y_j}$$

$$B_e = (\beta(e_i, e_j)) \text{ – матрица формы } \beta \text{ в базисе } e.$$

$$\beta(x, y) = X^T B_e \overline{Y} \qquad (1)$$

Квадратичная форма $q := \beta(x, x) \not\equiv 0$.

$$q(x) = \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij} x_i \overline{x_j}$$

Если $\beta_{ij} = 0$, при $i \neq j$, остается $b_{ij} = \beta(e_i, e_j)$

$$q(x) = \sum_{i=1}^{n} b_{ii} x_i \bar(x_i) = \sum_{i=1}^{n} b_{ii} |x_i|^2$$

Эрмитова форма (или эрмитово симметричная)
$\forall x, y \in V$ вып. $\beta(y, x) = \overline{\beta(x, y)}$
Тогда $\beta(x, x) = \overline{\beta(x, x)}$, т.е. $\forall x \in V$ вып. $q(x) = \beta(x, x) \in \mathbb{R}$
Задача. Для термитово квадратичной формы $q(x)$ существует единственная форма $\beta(x, y) : \beta(x, x) = q(x)\ \forall x \in V$.

Замечание. $\beta(x, y)$ эрмитова $\Longleftrightarrow B_e^T = \overline{B_e} \Longleftrightarrow \overline{B_e^T} = B_e$

Теорема. (О приведении эрмитово квадратичной формы к каноническому (нормальному) виду).
Для любой эрмитовой формы (полуторалинейной) существует базис, в котором $\beta(x, y) = \sum\limits_{i=1}^{n} b_{ii} x_i \overline{y_i}$. Точнее,

$$\beta(x, y) = x_1 \overline{y_1} + ... + x_p \overline{y_p} - x_{p+1} \overline{y}_{p+1} - ... - x_{p+q} \overline{y}_{p+q},$$

где $p + q = \mathrm{rk} B$. Соотвественно $q(x) = |x_1|^2 + ... + |x_p|^2 - |x_{p+1}|^2 - ... - |x_{p+q}|^2$ (q и p единственененны).

Определение. Эрмитова квадратичная форма положительно опеределенная, если $q(x) > 0\ \forall x \neq 0$. Отрицательно опеределенная, если $q(x) < 0\ \forall x \neq 0$. (Критерий Сильвестра сохранятеся без изменений).

§11. Унитарные (эрмитовы) пространства.

Определение. Векторное пространство $\mathcal{H}$ над полем $\mathbb{C}$ называется унитарным, если на этом $\mathcal{H}$ задано скалярное произведение (x, y) полуторалинейная форма (полуторалинейная по 2 аргументу), эрмитова: $(y, x) = \overline{(x, y)}$ и $(x, x) > 0,\ \forall x \neq 0$.

Определение. $|x| = \sqrt{(x, x)}$ – длина вектора.
Неравенство КБШ: $\forall x, y \in \mathcal{H} :\ |(x, y)| \leq |x| \cdot |y|$
$\cos \varphi(x, y) = \frac{(x,y)}{|x| \cdot |y|} \in \mathbb{C}$
$(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x \perp y$

Теорема. (Ортогонализация).
В $\mathcal{H}$ существует ортогональльный (и ортонормированный) базис.

Изменение матрицы полуторалинейной формы.

При замене базиса: $B' = C^T B\overline{C}$
$\beta(x, y) = X^T B\overline{Y}$ – в исходном базисе.

$$X = CX',\ Y = CY' \Longrightarrow$$

$$\beta(x,y) = (CX')^T B\overline{(CY')} = (X')^T (C^T B\overline{C})\overline{Y'} \equiv (X')^T B'\overline{Y'} \Longrightarrow$$
$$B' = C^T B\overline{C}$$

Теорема. Если e и e' два О.Н.Б., то матрица перехода $C_{e\to e'}$ унитарно, т.е. если ее подвергнуть эрмитову сопряжению, то она превратится в обратную: $C^*_{e\to e'} = \overline{C}^T_{e\to e'} = C^{-1}_{e\to e'}$

Доказательство. По определению матрица перехода, $C = (e_1'^{\uparrow}, ..., e_n'^{\uparrow}) \Longrightarrow$

$$C^T = \begin{pmatrix} e_1' \\ \vdots \\ e_n' \end{pmatrix} \Longrightarrow C^T\overline{C}_{ij} = e_i' e_j'^{\uparrow}$$

Т.к. базис e О.Н., то $e_i' e_j'^{\uparrow} = (e_i' e_j')$
Т.к. базис e' О.Н., то $(e_i' e_j') = \delta_{ij} \Longrightarrow$

$$C^T\overline{C} = E \Longrightarrow \overline{C^T\overline{C}} = \overline{E} = E \Longrightarrow \overline{C}^T C = E \Longrightarrow \overline{C}^T = C^{-1}$$

□

Процесс ортогонализации:
Если попарно ортогональные векторы $e_1', ..., e_{k-1}'$ $(k \geq 2)$ уже построены, то

$$e_k' = e_k - \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i e_i \mid \cdot\, e_j' \text{ справа } (1 \leq j \leq k-1) \Longrightarrow$$

$$(e_k', e_j') = (e_k, e_j') - \sum_{i=1}^{k-1} (\lambda_i e_i', e_j') = (e_k', e_j') - \lambda_j (e_j', e_j') \Longrightarrow$$

$$\mathrm{pr}_{\langle e_1', ..., e_{k-1}' \rangle}(e_k) = \sum_{i=1}^{k-1} \frac{(e_k, e_i')}{(e_i', e_i')} e_i'$$

$U^\perp = \{u \in \mathcal{H} | (x, y) = 0,\ \forall x \in U\}$
$U \subset \mathcal{H},\ \ \mathcal{H} = U \oplus U^\perp$

§12. Линейный операторы в унитарном пространстве.

Пусть $\varphi : \mathcal{H} \longmapsto \mathcal{H}$ – линейный оператор (над $\mathbb{C}$).

1. Сопряженный оператор: $\forall x, y \in \mathcal{H} : (\varphi(x), y) = (x, \varphi^*(y))$

   Матрица A_{φ^*} (в О.Н.Б.):

$$(\varphi(x), y) = (A_\varphi X)^T \overline{Y} = X^T A_\varphi \overline{Y}^T = X^T \overline{(A_{\varphi^*} Y)} = X^T \overline{A}_{\varphi^*} \overline{Y}$$

$$\forall X, Y \in \mathbb{C} \Longrightarrow \overline{A}_{\varphi^*} = A_\varphi^T \Longleftrightarrow A_{\varphi^*} = \overline{A}_\varphi^T = A_\varphi^*$$

2. Самосопряженный: $\varphi^* = \varphi \Longleftrightarrow A_\varphi = A_\varphi^*$ (в любом О.Н.Б.), т.е. A_φ эрмитова.

3.Унитарный:

$$\forall x, y \in \mathcal{H} : \ (\varphi(x), \varphi(y)) = (x, y) \Longleftrightarrow \text{в любом О.Н.Б.}$$

$$(A_\varphi X)^T \overline{(A_\varphi Y)} = X^T (A_\varphi^T \overline{A}_\varphi) \overline{Y} = X^T \overline{Y}, \ \forall X, Y \in \mathbb{C} \Longleftrightarrow$$

$$A_\varphi^T \overline{A}_\varphi = E \Longleftrightarrow A_\varphi^* A_\varphi = E, \ \text{т.е. } A_\varphi \text{ – унитарна.}$$

Следствие. Если φ – унитарный оператор, то $|\det A_\varphi| = 1$

Доказательство.

$$|E| = |\overline{A}_\varphi^T A_\varphi| = |\overline{A}_\varphi||A_\varphi| = \overline{|A_\varphi|}|A_\varphi| = |\det A_\varphi|^2 = 1 \Longleftrightarrow |\det A_\varphi| = 1$$

□

Свойства операторов:

Теорема. Если $\varphi : \mathcal{H} \longmapsto \mathcal{H}$ – самосопряженный оператор, то

1. Собственные значения $\lambda \in \mathbb{R}$

2. Собственные векторы, овечающие различным собственным значениям перпендикулярны.

3. Если $U \subset \mathcal{H}$ инвариантно относительно φ, то $U^\perp$ инвариантно.

4. В $\mathcal{H}$ существует О.Н.Б. из собственных векторов для φ, и в нем

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}, \ \forall i = 1, ..., n, \ \lambda_i \in \mathbb{R}$$

Доказательство.

1. Если $x \in \mathcal{H}, \ x \neq 0 : \ \varphi(x) = \lambda x$, то

$$\begin{cases} (\varphi(x), x) = (\lambda x, x) = \lambda(x, x) \\ (x, \varphi(x)) = (x, \lambda x) = \overline{\lambda}(x, x) \end{cases} \Longrightarrow \overline{\lambda} = \lambda \in \mathbb{R}$$

2. Пусть $\varphi(x) = \lambda x, \ x \neq 0, \ \varphi(y) = \mu y, \ y \neq 0, \ \lambda \neq \mu \overset{?}{\Longrightarrow} (x, y) = 0$

Вычислим $\begin{cases} (\varphi(x), y) = \lambda(x, y) \\ (x, \varphi(y)) = (x, \mu y) = \overline{\mu}(x, y) = \mu(x, y) \end{cases} \Longrightarrow$

$$(x,y)\underbrace{(\lambda-\mu)}_{\neq 0}=0 \Longrightarrow (x,y)=0$$

3. Пусть $x \in U,\ y \in U^{\perp}$. Надо доказать, что $(x, \varphi(y)) = 0$
По опр. $(x, \varphi(y)) = (\underset{\in U}{\varphi(x)}, y) = 0$
4. Пусть $\lambda_1, ..., \lambda_s$ – все различные собственные значения для φ. Возьмем, $U = \mathcal{H}_{\lambda_1}$ – собственное подпространство – оно инвариантно. $\Longrightarrow U^{\perp}$ также инвариантно, $\mathcal{H} = U \oplus U^{\perp}$, собственные значения $\varphi|_{U^{\perp}}$ – это $\lambda_2, ..., \lambda_s$.
Индукция по $\dim\mathcal{H}$: в $U^{\perp}$ существует О.Н.Б., составленный из О.Н. базисов $\mathcal{H}_{\lambda_2}, ..., \mathcal{H}_{\lambda_s}$. В U надо взять О.Н.Б. (произвольный базис ортогонализовать и нормировать).

$\square$

Теорема. Если $\varphi : \mathcal{H} \longmapsto \mathcal{H}$ – унитарный оператор, то
1. Все собственные значения оператора $\varphi,\ |\lambda| = 1$
2. Собственные векторы, овечающие различным собственным значениям перпендикулярны.
3. Если $\varphi(U) = U$, то $\varphi(U^{\perp}) = U^{\perp}$
4. В $\mathcal{H}$ существует О.Н.Б. из собственных векторов для φ, и в нем

$$A_{\varphi} = \begin{pmatrix} e^{i\alpha_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{i\alpha_n} \end{pmatrix},\ \alpha_i \in \mathbb{R}$$

Доказательство.
1. Если $\varphi(x) = \lambda x,\ x \neq 0$, то

$$(\varphi(x), \varphi(x)) = \lambda\overline{\lambda}(x,x) = (x,x) \neq 0 \Longrightarrow \lambda\overline{\lambda} = |\lambda|^2 = 1 \Longrightarrow |\lambda| = 1$$

2. Если $\varphi(x) = \lambda x,\ \varphi(y) = \mu y,\ x, y \neq 0,\ \lambda \neq \mu$:

$$(\varphi(x), \varphi(y)) = \lambda\overline{\mu}(x,y) = (x,y) \Longrightarrow (x,y)(\lambda\underset{\neq 0}{\overline{\mu}} - 1) = 0 \Longrightarrow (x,y) = 0$$

Либо $(x,y) = 0$, либо $\lambda\overline{\mu} = 1$, т.е. $\mu = \lambda$ – противоречие.

$$(\lambda \neq\Longleftrightarrow \overline{\lambda} \neq \overline{\mu} \Longrightarrow \lambda\overline{\lambda} \neq \lambda\overline{\mu} \neq 1)$$

3. Пусть $x \in U,\ y \in U^{\perp}$, надо доказать, что $(x, \varphi(y)) = 0$
Вычислим

$$(\varphi^{-1}(x), y) = (\varphi(\varphi^{-1}(x)), \varphi(y)) = (x, \varphi(y)) = 0$$

Т.к. $x \in U$, то $\varphi^{-1}(x) \in U$
Комментарий: унитарный оператор невырожден (обратим).

В О.Н.Б. A_φ унитарна $\Longrightarrow |\det A_\varphi| = 1 \neq 0$
По определению подпространства, $\varphi|_U : U \longmapsto U \Longrightarrow \varphi|_U$ биективно, в частности, если $x \in U$, то $\varphi^{-1}(x) \in U$
4. Дословно повторяет доказательство п.4 теоремы для самосопряженного оператора (с заменой $\lambda \in \mathbb{R}$ на $|\lambda| = 1$).

□

Теорема. (О полярном разложении). Любая невырожденная матрица $A \in M_n(\mathbb{C})$ единственным образом представляется в виде произведения: $A = B \cdot U$, где $B^* = B$ – эрмитова матрица с положительными собственными значениями, U – унитарная матрица.

Второй вариант полярного разложения:

$$\underbrace{A^*}_{A^T} = U^*B^* = U^{-1}B \Longrightarrow AA^* = B^2, \text{ и т.д., а также } A = U'B'$$

Теорема. Для любой эрмитово квадратичной формы $q(x)$ на унитарном пространстве существует О.Н.Б., в котором эта форма имеет вид: $q = \lambda_1|y_1|^2 + ... + \lambda_n|y_n|^2$, где $\lambda_1, ..., \lambda_n$ – собственные значения матрицы B.

Глава IV. Аффинные пространства.
§1. Основные определения и свойства.

Определение. Аффинное пространство – это пара $(\mathbb{A}, V)$, где $\mathbb{A}$ – множетсво точек, V – векторное протсранство (над полем F), и выполнены следующие аксиомы: опеределена операция "прибавления"(откладывания) вектора к точке, т.е. $\forall p \in \mathbb{A},\ v \in V$ определим единственную точку $q \in \mathbb{A} : q = p + v$,
$(\mathbb{A} \times V \longmapsto \mathbb{A})$
1. $\forall p \in \mathbb{A},\ \forall u, v \in V:\ p + (u + v) = (p + u) + v$
2. $\forall p \in \mathbb{A},\ p + 0 = p$
3. $\forall p, q \in \mathbb{A}\ \exists v \in V : p + v = q$ (обозн. $v = \overrightarrow{pq}$)

Заметим, что размерностью пространства $\mathbb{A}$, считается размерность пространства V. Из аксиомы 3 следует, что имеется биекци между $\mathbb{A}$ и V.
Фиксируем $p,\ \forall v \in V, \{p + v \mid v \in V\}$.
Пример: $\mathbb{A} = V$, точки-радиус-векторы. Если $q = p + v$, то $v = \overrightarrow{pq}$, а также можно писать $v = q - p$.
Аффинная система координат: $\{0; e\},\ e$ – базис в V.

$\forall p \in \mathbb{A}$ – координаты точки p – это координаты вектора $\overrightarrow{Op}$ в базисе e.
Если $p(x_1, ..., x_n)$, $q(y_1, ..., y_n)$, то

$$\overrightarrow{pq} = q - p = \sum_{i=1}^{n}(y_i - x_i)e_i$$

Вместо системы координат можно задать координаты каких-либо точек $p_0, ..., p_n$ в общем положении (аффинно независимые), т.е. векторы $\overrightarrow{p_0p_1}, ..., \overrightarrow{p_0p_n}$ ЛНЗ
(является базисом в V).

Определение. Барицентрическая комбинация точек $p_0, ..., p_m$ ($m \le n = \dim\mathbb{A} = \dim V$) с коэффициентами $\lambda_0, ..., \lambda_m \in F$ с условием: $\sum\limits_{i=0}^{m} \lambda_i = 1$. Определим $\forall p \in \mathbb{A}$

$$\sum_{i=0}^{m} := p + \sum_{i=0}^{m} \lambda_i \overrightarrow{pp_i} = p + \sum_{i=0}^{m} \lambda_i (p_i - p) \qquad (1)$$

Лемма. Выражение (1) не зависит от выбора точки p (при усл., что $\sum\limits_{i=0}^{m} \lambda_i = 1$).

Доказательство. Возьмем точку $q = p + v$, для некоторого $v \in V$. Тогда

$$q + \sum_{i=0}^{m} \lambda_i \overrightarrow{qp_i} = q + \sum_{i=0}^{m} \lambda_i (p_i - q) = q + \sum_{i=0}^{m} \lambda_i (p_i - p - v) =$$

$$= p + v + \sum_{i=0}^{m} \lambda_i (p_i - p) - \sum_{i=0}^{m} \lambda_i v = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i (p_i - p)$$

□

Если $m = n$ и векторы $\overrightarrow{p_0p_1}, ..., \overrightarrow{p_0p_n}$ ЛНЗ, то любая точка $p = \sum\limits_{i=0}^{n} x_i p_i$, причем $\sum\limits_{i=0}^{n} x_i = 1$, точка $\overrightarrow{p_0p}$ имеет координаты $(x_1, ..., x_n)$, то $x_0 = 1 - \sum\limits_{i=0}^{n} x_i$, $(x_0, ..., x_n)$ – барицентрические координаты точки p.

Изменение декартовых координат точек при замене системы координат.

Пусть $\{O; e\}$ – старая система координат, точка з имеет координаты X (столбец координат), $\{O', e'\}$ – новая система координат, $e' = eC_{e \to e'}$

$$O' \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = X^0 \Longrightarrow X = CX' + X^0 \qquad (2)$$

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'P} \Longrightarrow X = X^0 + CX'$$

Можно ввести "аффинную матрицу перехода"

$$\widetilde{C} = \begin{pmatrix} C & X^0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

и "аффинный столбец"

$$\widetilde{X} = \begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix},$$

тогда

$$\widetilde{C}\widetilde{X}' = CX' + X^0 = \widetilde{X}$$

Таким образом, равентсво (2) $\Longleftrightarrow \widetilde{C}\widetilde{X}' = \widetilde{X} \qquad (2')$

§2. Аффинные подпространства (плоскости или линейные многообразия).

Наболюдение: Пусть $(\mathbb{A}, V)$ – аффинное пространство, и в некоторой системе координат рассмотрим множество точек, координаты которых удовлетворяют совметсной системе линейных уравнений: $AX = b$.

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ – координаты точки p; $A_{n \times n}$; $b \in F^n$

Тогда любое решение представляется в виде $X = X_{\text{част}} + Y_{\text{одн}}$, где $Y_{\text{одн}}$ – общее решение соотвествующее ассоциированной ОСЛУ $AY = 0$.

Обозн. $U\{u = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i e_i \mid AY = 0\}$ – подпространство в V, и

$\pi := \{p_0 + u \mid u \in U\} = p_0 + U$ – смежный класс пространства V/U, если отождествить p_0 с ее радиус-вектором.

Определение. Аффинная плоскость $\pi = p_0 + U$, где U – некоторое подпространство в V, $p_0 \in \mathbb{A}$ (U – направляющая плоскость для π). Если $\dim U = m$, то при $m = 0$ – одна точка, при $m = 1$ – прямая с направляюшим вектором a, если $m = n - 1$ – гиперплоскость.

Утверждение. Для любой точки $q \in \pi$, $p + U = p_0 + U = \pi$ (т.е. определение плоскости π не зависит от выбора начальной точки).

Доказательство. $q = p_0 + u_0,\ u_0 \in U$

$$q = q + U = p_0 + (u_0 + U) = p_0 + U$$

□

U можно определить как $\{pq \mid \forall p, q \in \pi\}$ и $\overline{pq} = q - p = u_0 - u_1 \in U$.

Следствие. Для аффинной плоскости $\pi = p_0 + U$ существует система уравнений $AX = b$, множество решений которой (в координатах) совпадает с π.

Доказательство. Введем систему координат $\{O, e\}$, пусть $\dim U = m$.
Как известно, существует матрица $A_{m \times n}$, такая что $U = \{AY = 0\}$.
Если p_0 имеет координаты в виде столбца X^0, то обозначим $b = AX^0$.
Для любой точки $p \in \pi$ имеем: $p = p_0 + U$, т.е. в координатах:

$$X = X^0 + Y \Longrightarrow AX = AX^0 + AY = b + 0 = b$$

□

Взаимное расположение двух плоскостей.

Пусть $\pi_1 = p_1 + U_1,\ \pi_2 = p_2 + U_2,\ U_1, U_2 \subseteq V$.

Определение. $\pi_1,\ \pi_2$ называются параллельными:

В узком смысле, если $U_1 = U_2$ (направляюшие подпространства совпадают).

В широком смысле, если $U_1 \subseteq U_2$ или $U_2 \subseteq U_1$.

Утверждение. $\pi = \pi_1 \cap \pi_2$ либо пусто, либо является плоскостью с направляющим подпространством $U = U_1 \cap U_2$, точнее $\pi = r + U$, где $r \in \pi_1 \cap \pi_2$.

Доказательство. Если $\pi_1 \cap \pi_2 = \pi \neq \varnothing$, возьмем точку $r \in \pi_1 \cap \pi_2$, тогда

$$\pi_1 = r + U_1,\ \pi_2 = r + U_2 \Longrightarrow \pi_1 \cap \pi_2 = r + (U_1 \cap U_2)$$

Возьмем точку $d \in \pi_1 \cap \pi_2 \Longrightarrow d = r + u_1 = r + u_2,\ u_1 \in U_1,\ u_2 \in U_2 \Longrightarrow$

$$u_1 = u_2 \in U_1 \cap U_2 \Longrightarrow d \in r + (U_1 \cap U_2)$$

Таким образом, либо $\pi_1 \cap \pi_2 = \varnothing$, либо $\dim(\pi_1 \cap \pi_2) = \dim(U_1 \cap U_2)$

□

В общем случае, $\pi_1 \cup \pi_2$ плоскостью не будет.

Определение. Аффинная оболочка плоскостей $\pi_1,\ \pi_2 : \langle \pi_1, \pi_2 \rangle$ – наименьшее по включению плоскость, содержащая обе эти плоскости.

Утверждение. $\langle \pi_1, \pi_2 \rangle = p_0 + \{\overrightarrow{p_1p_2} \mid p_1 \in \pi_1, p_2 \in \pi_2\}$, $p_0 \in \pi_1$ или $p_0 \in \pi_2$.

Доказательство. Таким образом, $\langle \pi_1, \pi_2 \rangle$ – плоскость, с направляющим подпространством вида $U = \langle p_1p_2 \mid p_1 \in \pi_1,\ p_2 \in \pi_2 \rangle$. Если $p \in \langle \pi_1, \pi_2 \rangle$, то точки вида $p_0 + \overrightarrow{p_1p_2}$ принадлежат любой плоскости, содержащей $\langle \pi_1, \pi_2 \rangle \Longrightarrow p_0 + U$ – наименьшая плоскость, содержащая $\langle \pi_1, \pi_2 \rangle$.

□

Теорема. $\langle \pi_1, \pi_2 \rangle = p_1 \mid \langle \overrightarrow{p_1p_2},\ U_1 + U_2 \rangle$

1. $\pi_1 \cap \pi_2 \neq \varnothing \Longleftrightarrow \overrightarrow{p_1p_2} \in U_1 + U_2$ и при этом $\dim\langle \pi_1, \pi_2 \rangle = \dim(U_1 + U_2)$.
2. $\pi_1 \cap \pi_2 = \varnothing$, то $\dim\langle \pi_1, \pi_2 \rangle = \dim(U_1 + U_2) + 1$.

Доказательство. Обозначим $\pi = p_1 + \langle \overrightarrow{p_1p_2},\ U_1 + U_2 \rangle$.
Ясно, что $\pi_1 \subseteq \pi,\ \pi_2 \subseteq \pi \Longrightarrow \langle \pi_1, \pi_2 \rangle \subseteq \pi$ (как наименьшая плоскость.)
Обратное включение $\langle \pi_1, \pi_2 \rangle = p_1 + W,\ W \subseteq V$
Т.к. $p_2 \in \langle \pi_1, \pi_2 \rangle \Longrightarrow \overrightarrow{p_1p_2} \in W$. Также ясно, что $\forall u_1 \in U_1,\ p_1 + u_1 \in \pi_1 \subseteq \pi$ и $\forall u_2 \in U_2,\ p_2 + u_2 \in \pi_2 \subseteq \pi \Longrightarrow \overrightarrow{p_1p_2} + u_2 \in W \Longrightarrow u_2 \in W$.

Таким образом, $\langle\overrightarrow{p_1p_2},\ U_1+U_2\rangle \subseteq W \Longrightarrow \pi \subseteq \langle\pi_1,\pi_2\rangle$ – доказали равенство.
1. Если $\pi_1\cap\pi_2 \neq \varnothing$, то $\overrightarrow{p_1p_2} \in U_1+U_2:\ \exists p \in \pi_1\cap\pi_2 ra\langle\overrightarrow{p_1p_2},\ U_1+U_2\rangle = U_1+U_2$
2. Если $\pi_1\cap\pi_2 = \varnothing$, то $\overrightarrow{p_1p_2} \notin U_1+U_2 \Longrightarrow \dim\langle\overrightarrow{p_1p_2}, U_1+U_2\rangle = \dim(U_1+U_2)+1$

$\square$

Утверждение. Для двух плоскостей $\pi_1,\pi_2 \subset \mathbb{A}$ возможно одно из трех расположений:

1. $\pi_1\cap\pi_2 \neq \varnothing$,
2. $\pi_1\cap\pi_2 = \varnothing$ и $\pi_1||\pi_2$,
3. Не выполнены 1. и 2. пункты: $\pi_1\cap\pi_2 = \varnothing$ и $\pi_1 \nparallel \pi_2$ – скрещиваются.

§3. Аффинные отображения.

Пусть $\mathbb{A}_1,\ \mathbb{A}_2$ – аффинные пространства над векторными пространствами $V_1,\ V_2$ (поле F над которым они определены одно и тоже).

Определение. отображение $\Phi : \mathbb{A}_1 \longmapsto \mathbb{A}_2$ – называется аффинным (или аффинно линейным), если существует линейное отображение линейных пространств $\varphi : V_1 \longmapsto V_2$, т.ч. $\forall a,b \in \mathbb{A}_{\not{1}}:\ \overrightarrow{\Phi(a)\Phi(b)} = \varphi(\overrightarrow{ab})$ (1)
Эквивалентно: $\Phi(b) = \Phi(a) + \varphi(\overrightarrow{ab})$ $(1')$

Замечание. Если фиксировать точку a, а точку $b \in \mathbb{A}_1$ менять, то вектор $\overrightarrow{ab}$ может быть любыи вектором из $V_1 \Longrightarrow$ для отображения Φ его линейная часть определена однозначно: $\forall v \in V_1\ \exists! b \in \mathbb{A}:\ \overrightarrow{ab} = \overrightarrow{v} \Longrightarrow \varphi(v) = \overrightarrow{\Phi(a)\Phi(b)}$ – опеределена однозначно.

Теорема.
1. Пусть $\mathbb{A}_1 \overset{\Phi_1}{\longmapsto} \mathbb{A}_2 \overset{\Phi_2}{\longmapsto} \mathbb{A}_3$, Φ_1,Φ_2 – аффинные отображения, тогда $\Phi_2\circ\Phi_1$ – аффинное отображение с линейной частью $\Phi_1\cdot\Phi_2$.
2. $\Phi : \mathbb{A}_1 \longmapsto \mathbb{A}_2$ биективно (невырождено) $\Longleftrightarrow$ его линейная часть φ биективна, притом Φ^{-1} имеет линейную часть Φ^{-1}.

<u>Координатная запись:</u> $\Phi : \mathbb{A}_1 \longmapsto \mathbb{A}_2$ – аффинное отображение.
$\{p_1; e\}$ – с.к. в $\mathbb{A}_1$ $\dim A_1 = n$,
$\{p_2; e\}$ – с.к. в $\mathbb{A}_2$ $\dim A_2 = m$,
X – столбец координат любой точки $p \in A_1$, X_0 – столбец координат точки $\Phi(p_1)$ в системе координат $\{p_2; f\}$, $A = A_\varphi$ – матрица отображения φ в базисах e, f, Y – столбец координат точки $\Phi(p)$.

Тогда $\Phi(p)=\Phi(p_1)+\varphi(\overrightarrow{p_1p})=p_2+\overrightarrow{p_2\Phi(p_1)}+\varphi(\overrightarrow{p_1p})\Longrightarrow Y=X_0+AX$ (2)
В подробной записи: $y_i=x_i^0+\sum\limits_{i=1}^{n}a_{ij}x_j,\ i=1,...,m$ (2) $\Longrightarrow dy_i=\sum\limits_{j=1}^{n}\alpha_{ij}dx_j$
Обозначим

$$DY=\begin{pmatrix}dy_1\\ \vdots\\ dy_m\end{pmatrix}=A\cdot dX=A\cdot\begin{pmatrix}dx_1\\ \vdots\\ dx_n\end{pmatrix}$$

Мы видим, что (в координатах) $\varphi=D\Phi, D\Phi:\ V_1\longmapsto V_2$

Доказательство.
1. $\mathbb{A}_1\xmapsto{\Phi_1}\mathbb{A}_2\xmapsto{\Phi_2}\mathbb{A}_3$, Φ_1,Φ_2 – аффинные с линейными частями φ_1,φ_2, то $\Phi_2\circ\Phi_1$ – аффинное с линейной частью $\varphi_2\circ\varphi_1$.

$$\forall a_1\in\mathbb{A}_1,\ \forall v_1\in V_1,\ \Phi_1(a_1+v_1)=\Phi_1(a_1)+\varphi_1(v_1),$$

$$\Phi_2(\Phi_1(a_1+v_1))=\Phi_2(\Phi_1(a_1)+\varphi_1(v_1))=\Phi_2(\Phi_1(a_1))+\varphi_2(\varphi_1(v_1))=$$
$$=(\Phi_2\circ\Phi_1)(a_1)+(\varphi_2\circ\varphi_1)(v_1)\Longrightarrow$$

$$\Phi_2\circ\Phi_1-\text{ аффинное отображение, его линейная часть }\varphi_2\circ\varphi_1$$

2. $\mathbb{A}_1\xmapsto{\Phi}\mathbb{A}_2\xmapsto{\Phi^{-1}}\mathbb{A}_1$, Φ^{-1} – тоже аффинное?
отображение Φ биективно $\Longleftrightarrow$ оно обратимо. Обозначим $\Phi':\mathbb{A}_2\longmapsto\mathbb{A}_1$,

$$\Phi'_0\Phi=\mathrm{Id}_{A_1}\qquad\Phi(a_1+v)=\Phi(a_1)+\varphi(v),$$

$$\Phi'(\Phi(a_1+v))=\Phi'(\Phi(a_1))+(\varphi'\varphi)(v)=a_1+v\Longleftrightarrow$$
$$\varphi'\varphi=\mathrm{Id}=\varepsilon,\text{т.е. }\varphi^{-1}\text{ – левый обратимый к }\varphi$$

$\Phi'(\Phi(a_1))=a_1$, при условии, что φ обратимо, Φ' будет обратным к Φ, если $\Phi'(\Phi(a_1))=a_1,\ \varphi'=\varphi^{-1}$ (нужно было бы рассмотреть также $\Phi\circ\Phi'$)

□

Замечание. Можно ввести $\widetilde{X}=\begin{pmatrix}X\\1\end{pmatrix},\ \widetilde{Y}=\begin{pmatrix}Y\\1\end{pmatrix}$, блочную матрицу $\widetilde{A}=\begin{pmatrix}A & X_0\\0 & 1\end{pmatrix}$, тогда (2) $\Longleftrightarrow\widetilde{Y}=\widetilde{A}\cdot\widetilde{X}$ (3)

§4. Аффинные преобразования.

Определение. Аффинное преобразование $\Phi:\mathbb{A}\longmapsto\mathbb{A}$ – это аффинное отображение $\mathbb{A}$ в $\mathbb{A}$. Тогда вторая система координат совпадает с первой.

Примеры:

1. Параллельный перенос на вектор $v \in V$, $t_v(a) = a + v$, $\forall a \in \mathbb{A}$. Ясно, что линейная часть это Id. Очевидно, $\forall v_1, v_2$ выполнено $t_{v_1} \circ t_{v_2} = t_{v_1} \cdot t_{v_2} = t_{v_1+v_2}$
2. Гомотетия с центром в точке $0 \in \mathbb{A}$ и коэффициентом $\lambda \neq 0:$

$$\forall v \in V,\ \Phi(0+v) = 0 + \lambda v \Longrightarrow D\Phi = \lambda \cdot \mathrm{Id}$$

$\lambda = -1$ – это центральная симметрия.

Теорема. Любое обратимое (невырожденное) аффинное преобразование $\Phi : \mathbb{A} \longmapsto \mathbb{A}$ единственным образом представляется в виде композиции: $\Phi = t_v \circ \psi$, где a – фиксированная точка из $\mathbb{A}$, $\psi(a) = a$.

Доказательство. Обозначим $v = \overrightarrow{a\Phi(a)}$. Рассмотрим преобразование

$$\psi = t_v^{-1} \cdot \Phi = t_{-v} \cdot \Phi$$

Тогда $\psi(a) = t_{-v}(\Phi(a)) = \Phi(a) - v = a + v - v = a \Longrightarrow \Phi = t_v \cdot \psi$
Единственность: если $\Phi = t_v \cdot \psi = t_{v'} \cdot \psi'$, $\psi(a) = \psi'(a) \Longrightarrow$

$$t_{v-v'} = \psi'\psi^{-1} \Longrightarrow t_{v-v'}(a) = a \Longrightarrow v - v' = 0 \Longrightarrow$$

$$v = v' \Longrightarrow t_v = t_{v'} \Longrightarrow \psi' = \psi$$

□

Теорема. Для любых наборов точек $\{a_0, a_1, ..., a_n\}$ и $\{b_0, b_1, ..., b_n\}$ в n-мерном аффинном пространстве $\mathbb{A}$, причем таких, что $a_0, a_1, ..., a_n$ аффинно независимы (находятся в общем положении) существует единственное аффинное преобразование $\Phi : \mathbb{A} \longmapsto \mathbb{A}$, такое что $\Phi(a_i) = b_i$, при $i = 0, ..., n$. Если также точки $\{b_0, ..., b_n\}$ аффинно независимы, то Φ биективно (невырождено).

Доказательство. По условию, $\{\overrightarrow{a_0a_1}, ..., \overrightarrow{a_0a_n}\}$ – базис в пространсве V, то существует единствененный линейный оператор $\varphi : V \longmapsto V$, такой что $\varphi(\overrightarrow{a_0a_i}) = \overrightarrow{b_0b_i}$, тогда искомое $\forall v \in V$, $\Phi(a_0 + v) = b_0 + \varphi(v)$.
Если также векторы $\{\overrightarrow{b_0b_1}, ..., \overrightarrow{b_0b_n}\}$ – базис, то φ невырожденный оператор $\Longrightarrow \Phi$ биективно.

$\square$

§5. Аффинные евклидовы пространства (точечные евклидовы пространства.)

Определение. Аффинное пространство $(\mathbb{A}, V)$ называется евклидовым (точечным) пространством, если V – евклидово векторное пространство.

Определение. Расстояние между точками $\rho\underset{x,y\in\mathbb{A}}{(x,y)} := |\overrightarrow{xy}| = \sqrt{(\overrightarrow{xy}, \overrightarrow{xy})}$

Упражение. Так введенное расстояние удовлетворяет всем условиям из определения метрики.

Можно рассматривать систему координат (O, e), где e – О.Н.Б. в V – она называется прямоугольной (ортонормированной) $\Longrightarrow$

$$\rho(x,y) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + ... + (y_n - x_n)^2}$$

Определение. Аффинные евклидовы пространства $(\mathbb{A}_1, V_1), (\mathbb{A}_2, V_2)$ называются изоморфными, если существует биективное аффинное отображение Φ : $\mathbb{A}_1 \longmapsto \mathbb{A}_2$, такое что $\forall a, b \in \mathbb{A}_1,\ \rho(\Phi(a), \Phi(b)) = \rho_1(a,b)$ такое Φ называется изоморфизмом.

Теорема. Если $\dim\mathbb{A}_1 = \dim\mathbb{A}_2 (= n)$, то они изоморфны.

Доказательство. Фиксируем в $\mathbb{A}_1$ и $\mathbb{A}_2$ прямоугольные системы координат: $\{O; e\},\ \{O', e'\}$. Определим линейное отображение $\varphi : V_1 \longmapsto V_2$ по правилу: $\varphi(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i) := \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i'$ – оно линейное и биективное, тогда можно определить отображение $\Phi : \mathbb{A}_1 \longmapsto \mathbb{A}_2$, такое что $\Phi(a + v) = O' + \varphi(v)$, тогда $O' = \Phi(O)$. Для любой точки $a \in \mathbb{A}_1$, точка $a' = \Phi(a)$ будет иметь по построению те же координаты, что и точка a в системе координат своего пространства $\Longrightarrow \rho_1(a,b) = \sqrt{\sum\limits_i (b_i - a_i)^2} = \rho_2(a', b')$ $\square$

Утверждение. Верно и обратное.

<u>Расстоние и угол между аффинными плоскостями:</u>

Пусть $\pi_1 = p_1 + U_1,\ \pi_2 = p_2 + U_2$

Определение. Расстоние: $\rho(\pi_1, \pi_2) = \inf\{\rho(x,y) \mid x\ \in \pi_1, y \in \pi_2\}$
Угол: $\alpha(\pi_1, \pi_2) = \inf\{\alpha(u_1, u_2) \mid u_1 \in U_1, u_2 \in U_2\}$. В частности, $\pi_1 \perp \pi_2$, если этот угол равен $\frac{\pi}{2}$ радиан.

Теорема. Если $\pi_1 = p_1 + U_1,\ \pi_2 = p_2 + U_2$, U_1, U_2 – подпространства в V, то $\rho(\pi_1, \pi_2)$ равно длине ортогональной составляющей вектора $\overrightarrow{p_1p_2}$ относительно $U_1 + U_2$. Замечание: если $\pi_1 \cap \pi_2 \neq \varnothing$, то $\overrightarrow{p_1p_2} \in U_1 + U_2 \Longrightarrow \overrightarrow{p_1p_2}_{\perp} = 0$, и $\rho(\pi_1, \pi_2) = 0$

Доказательство. Обозначим $W = U_1 + U_2$, тогда $V = W \oplus W^{\perp}$, соотвественно $\forall v \in V,\ v = v_{||} + v_{\perp}$, где $v_{||} \in W$ – проекция, $v_{\perp} \in W^{\perp}$ – ортогональная составляющая. В качестве v возьмем $v = \overrightarrow{p_1p_2},\ \rho(\pi_1, \pi_2) \overset{?}{=} |v_{\perp}|$. Выберем для любой точки $x = p_1 + u_1 \in \pi_1,\ y = p_2 + u_2 \in \pi_2$

$$\rho^2(x, y) = |x - y|^2 = |\overrightarrow{p_1p_2} + u_1 - u_2|^2 = |(v_{||} + \underset{\in W}{u_2} - u_1) + \underset{\in W^{\perp}}{v_{\perp}}| =$$

$$\overset{\text{Th. Пифагора}}{=} |v_{||} + u_2 - u_1|^2 + |v_{\perp}|^2 \geq |v_{\perp}|^2$$

Причем равенство достигается, если $v_{||} = u_1 - u_2$, т.к. $v_{||} \in U_1 + U_2$, то также $u_1 \in U_1$ и $u_2 \in U_2$ найдутся.

□

Ортогональные преобразования.

Определение. Пусть $(\mathbb{A}, V)$ – евклидово пространство. Аффинное преобразование $\Phi : \mathbb{A} \longmapsto \mathbb{A}$ называется ортогональным (или движением), если его линейная часть $\varphi = D\Phi$ – ортогональный оператор в V, т.е. $\forall a, b \in \mathbb{A}$, $\rho(\Phi(a), \Phi(b)) = \rho(a, b)$, т.е. $|\overrightarrow{\Phi(a)\Phi(b)}| = |\overrightarrow{ab}| \Longleftrightarrow \varphi$ сохраняет длины.
Из определения следует, что Φ биективно.
Задача. В определении требование аффинности можно отбросить. (Возникает третий термин: изометрия).

В прямоугольной системе координат $\{O, e\}$ пусть $X_0 = \Phi(O)$, X – столбец координат произвольной точки, Y – столбец координат ее образа. Тогда

$$Y = AX + X_0, \text{ причем матрица } A \text{ ортогональна.}$$

У ортогональной матрицы $\det A = \pm 1$, если $\det A = 1$, то Φ – собственное преобразование, если $\det A = -1$, то Φ – несобственное преобразование.

Теорема. (О разложении невырожденного аффинного преобразования.)
Для любого движения $\Phi : \mathbb{A} \longmapsto \mathbb{A}$ с линейной частью φ найдется такой вектор $u \in V :\ \varphi(u) = u$ (остается неподвижным под действем φ), а $\Phi = t_u \cdot \psi$, где ψ имеет неподвижную точку. Замечание: не исключено, что $u = 0$.

Доказательство. Пусть $a \in \mathbb{A}$ – произвольная точка, обозначим $v = \overrightarrow{a\Phi(a)}$. Обозначим $U = \{u \in V \mid \varphi(u) = u\}$ – подпространство неподвижных точек. Если существует $\lambda = 1$, то $U \neq \{0\}$ – собственное подпространство, иначе $U = \{0\}$. Обозначим $W = U^{\perp}$ (при $U \neq \{0\}$) $\Longrightarrow v = u + w$ для подходящих $u \in U, w \in W = U^{\perp}$. Рассмотрим преобразование $\psi = t_u^{-1} \cdot \Phi = t_{-u} \cdot \Phi$.
Докажем, что у ψ есть неподвижная точка. Будем искать ее в виде $b = a + w'$, где $w' \in U^{\perp}$. Вычислим значение ψ в этой точке

$$\psi(a + w') = (t_{-u} \cdot \Phi)(a + w') = t_{-u}(\Phi(a) + \varphi(w')) =$$

$$= t_{-u}(a + v + \varphi(w')) = a + v - u + \varphi(w') = a + w + \varphi(w') =$$
$$= a + w + w' + (\varphi(w') - w') \overset{?!}{=} a + w'$$

Это будет так если выполняется $\varphi(w') - w' = -w$, или что равносильно $(\varphi - \varepsilon)(w') = -w$. Но $(\varphi - \varepsilon)(w') = (\varphi - \varepsilon)|_w(w')$, на W, $\varepsilon = \mathrm{Id}$. Оператор $\varphi - \varepsilon$ обратим $\Longrightarrow w' = -(\varphi - \varepsilon)^{-1}(w) \Longrightarrow \psi(b) = b$. □

Комментарий к теореме: Для любого аффинного преобразования $\Phi = t_u \cdot \psi$ (ψ имеет неподвижную точку.)

Из доказательства: если $\lambda = 1$, u – собственный вектор для $\varphi : \varphi(u) = u$, $u \neq 0$, то все точки прямой $l = b + \langle u \rangle$ неподвижны, т.к.

$$\psi(b) = b, \quad \psi(b + t_u) = \psi(b) + t\varphi(u) = \psi(b) + t_u = b + t_u$$

Эти наблюдения можно использовать, чтобы классифицировать движение при $n = 2$ и 3.

§6. Аффинно-квадратичные функции. Квадрики.

Считаем, что $F = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ (большинство результатов верно для любого поля F, $\mathrm{char} F \neq 2$).

Определение. $Q : \mathbb{A} \longmapsto F$ называется аффинно-квадратичной, если для любой точки $O \in \mathbb{A}$ существует квадратичная функция $q : V \longmapsto F$ и линейная функция $l : V \longmapsto F$, такие что $\forall v \in V$ выполнено:

$$Q(O + v) = Q(O) + q(v) + 2l(v) \qquad (1)$$

По определению $q \neq 0$

В аффинной системе координат $\{O; e\}$, в которой $a(x_1, ..., x_n)$:

$$Q(a) = Q(x_1, ..., x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij} x_i x_j + 2 \sum_{i=1}^{n} a_i x_i + c \qquad (2)$$

Где B – матрица квадратичной формы q в базисе e, $c = Q(0)$, $\vec{a} = (a_1, ..., a_n)$ – коэффициенты формы l.
$Q(x_1, ..., x_n)$ – аффинно-квадратичная форма.

Изменение коэффициентов при замене системы координат.

$\{O; e\} \longmapsto \{O', e'\}$. $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ – координаты точки a в старой системе координат, X' – в новой.
$\widetilde{X} = \begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix}$, вводили блочную матрицу перехода $\widetilde{C} = \begin{pmatrix} C & X_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, где $C = C_{e \longmapsto e'}$, X_0 – столбец координат точки O', $O = (\underbrace{0, ..., 0}_{n})$.

Можно ввести блочную матрицу $\widetilde{B} = \begin{pmatrix} B & a^{\uparrow} \\ a^T & C \end{pmatrix}$, $a^{\uparrow} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$, $a^T = \vec{a}$

Тогда $\widetilde{B'} = \begin{pmatrix} B' & a'^{\uparrow} \\ a'^T & C' \end{pmatrix} = \widetilde{C}^T \widetilde{B} \widetilde{C}$
При умножении блочных матриц: $B' = C^T B C$,

$$a'^{\uparrow} = C^T (B X_0 + a^{\uparrow}), c' = Q(x_1^0, ..., x_n^0) = Q(O')$$

Если базис не менять, то $C = E$, $a'^{\uparrow} = B X_0 + a$ (3)
Из (3) видно, что если $\exists X_0 :\ B X_0 = -a^{\uparrow}$, то $l' = 0$, и Q приобретает вид:

$$\forall v \in V \text{ выполнено } Q(O' + v) = Q(O') + q(-v) = Q(O') + q(v) = Q(O' + v)$$

Точки $O' + v$ и $O' - v$ симметричны относительно точки O'.

Определение. Точка O' – центр квадратичной функции Q, если $\forall v \in V$: $Q(O' + v) = Q(O' - v)$. Система для нахождения центра: $BX = -a^{\uparrow}$ (3)
Обозначим $C(Q)$ – множество центров, то

$$C(Q) = \begin{cases} \text{Единственная точка } O', \text{ если } \mathrm{rk} B = n \Longleftrightarrow |B| \neq 0 \\ \text{Является плоскотью } \dim = n - \mathrm{rk} B > 0 \\ \varnothing \end{cases}$$

Утверждение. Если O_1, O_2 – центры аффинно-квадратичных функций Q, то $Q(O_1) = Q(O_2)$.

Доказательство. $Q(O_2) = Q(O_1) + q(\overrightarrow{O_1O_2}) = Q(O_2) + q(\overrightarrow{O_2O_1}) + q(O_1O_2) \Longrightarrow$

$$q(\overrightarrow{O_1O_2}) = -q(\overrightarrow{O_1O_2}) \Longrightarrow q(\overrightarrow{O_1O_2}) = 0 \ (\text{char}F \neq 2) \Longrightarrow Q(O_2) = Q(O_1)$$

$\square$

Теорема. Любую аффинно-квадратичную форму $Q : \mathbb{A} \longmapsto F$ можно привести заменой координат к одному из видов:

1. $Q(O+v) = \sum\limits_{i=1}^{r} \alpha_i x_i^2 + \alpha_{r+1} \qquad \text{(I)}$
2. $Q(O+v) = \sum\limits_{i=1}^{r} \alpha_i x_i^2 + 2x_{r+1} \qquad \text{(II)},$ где $r = \text{rk}B$, причем $\prod\limits_{i=1}^{r} \alpha_i \neq 0$

Доказательство. Для формы $q(x)$ существует базис e', в котором

$$q(x') = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i x_i'^2, \ r = \text{rk}B, \ \alpha_i \neq 0$$

Выберем другую точку O' и систему координат $\{O'; e'\}$ запишем

$$Q(O'+v) = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i x_i'^2 + 2\sum_{j=1}^{n} a_j' x_j' + c'$$

Выделем квадраты по x_i' :

$$a_i(x_i'^2 + 2\frac{a_i' x_i'}{\alpha_i} + \frac{a_i'^2}{\alpha_i})$$

Делаем замену: $\widetilde{x}_i = x_i' + \frac{a_i'}{\alpha_i}, a \leq i \leq r$ и $\widetilde{x}_i = x_i, r+1 \leq i \leq n$

$$Q(\widetilde{x}_1, ..., \widetilde{x_n}) = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \widetilde{x}_i^{\,2} + 2\sum_{i=r+1}^{n} a_i' \widetilde{x}_i + \widetilde{c}, \ \widetilde{c} = Q(O'')$$

Если $a_i' \neq 0, \ i = r+1, ..., n,$ то O' – это центр, Q приобретает вид (I).
Если $a_i' \neq 0$, то можно положить:

$$\widetilde{\widetilde{x}}_{r+1} = \sum_{i=r+1}^{n} a_i' \widetilde{x}_i + \frac{\widetilde{c}}{\alpha} \Longrightarrow Q \text{ приобретает вид (II)}$$

$\square$

Следствие. Если $F = \mathbb{C}$, то можно делать все $\alpha_i = 1$, если $F = \mathbb{R}$, то можно получить вид:

$$\sum_{i=1}^{p} \widetilde{x}_i^{\,2} - \sum_{i=p+1}^{r} \widetilde{x}_i^{\,2} + \begin{cases} \widetilde{c} \\ 2\widetilde{x}_{r+1} \end{cases}$$

Случай евклидова пространства.

Теорема. Для любой аффнно-квадратичной формы Q (над $\mathbb{R}$) сущетсвует О.Н. система координат $\{O'; e'\}$ в которой $Q = \sum\limits_{i=1}^{r} \lambda_i x_i'^2 + c,\ \lambda_i \neq 0$ – собственное значение матрицы B, либо $Q = \sum\limits_{i=1}^{r} \lambda_i x_i'^2 + 2\lambda_{r+1} x_{r+1}'$, где $\lambda_{r+1} > 0$. Такой вид единственный, с точностью до нумерации.

Доказательство. Существование: для оператора с матрицей B, существует О.Н.Б. e' из собственных векторов, в котором

$$B' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_r & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} - \text{ единственной с точностью до нумерации}$$

Как и в доказательстве прошлой теоремы, после перехода к этому базису либо вид (I), либо вид

$$\text{(II)} \qquad Q = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \widetilde{x}_i + \sum_{i=r+1}^{n} a_i' \widetilde{x}_i + \widetilde{c}$$

$$\widetilde{\widetilde{x}}_{r+1} = \underbrace{\sqrt{(a_{r+1}')^2 + ... + (a_n')^2}}_{\mu}(\sum_{i=r+1}^{n} \frac{a_i'}{\mu} \cdot \widetilde{\widetilde{x}}_i + \frac{\widetilde{\widetilde{c}}}{\mu}) \to \text{ вид (II)}$$

$$\widetilde{\widetilde{e}}_{r+1} = \frac{1}{\mu}(\sum_{i=r+1}^{n} e_i' a_i'), \qquad |\sum_{i=r+1}^{n} e_i' a_i'| = \sqrt{(a_{r_1}')^2 + ... + (a_n')^2} = \mu$$

□

Единственность (прошлой) теоремы:

Сущетсвует О.Н. система координат, в которой либо

$$\text{(I) } Q = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i x_i^2 + c, \text{ либо}$$

$$\text{(II) } Q = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i x_i^2 + 2\mu x_{r+1},\ \mu > 0\ (r < n)$$

Доказательство единственности. $\lambda_1, ..., \lambda_r \neq 0$ однозначно с точностью до нумерации, т.к. это ненулевые собственные значения матрицы $q(x)$,

(I) случай существование центра $c = Q(O)$, O – любой центр.
Вид (I) не может превратиться в вид (II), т.к. (II) – нецентральный случай.
Единственность числа μ в случае (II):
Допустим, что в одной системе координат $\{O; e\}$

$$Q = ... + 2\mu x_{r+1}, \text{ в другой с.к. } \{O'; e'\} \text{ (} e \text{ и } e' \text{ – О.Н.Б.)}$$

$$Q = ... + 2\widetilde{\mu}\widetilde{x}_{r+1}, \text{ причем } \widetilde{\mu} \neq \mu$$

Матрица перехрда от базиса e к e' имеет блочный вид

$$C_{e \to e'} = \left(\begin{array}{c|c} C_1 & 0 \\ \hline 0 & C_2 \end{array}\right) \qquad C_1 := C_{\{e_1,...,e_r\} \to \{e'_1,...,e'_r\}}$$

$\langle e_1, ..., e_r \rangle = \langle e'_1, ..., e'_r \rangle$ – базис подпространства, порожденный собственными векторами $\lambda_1, ..., \lambda_r$.

$$C_2 := C_{\{e_{r+1},...,e_n\} \to \{e'_{r+1},...,e'_n\}}$$

Обе матрицы ортогональные. Коэффициент линейной формы $2\mu x_{r+1}$ преобразуется по формуле:

$$\underbrace{(\widetilde{\mu}, 0, ..., 0)}_{n-r} = (\mu, 0, ..., 0) \cdot C_2, \ \mu > 0, \ \widetilde{\mu} > 0$$

Длина вектора при ортогональной замене сохраняется $\Longrightarrow |\widetilde{\mu}| = |\mu| > 0 \Longrightarrow \widetilde{\mu} = \mu$.

Квадрики (гиперповерхности 2-го порядка.)

Определение. Пусть $Q : \mathbb{A} \longmapsto F$ – аффинно-квадратичная функция [не являющаяся линейной]. Квадрика (гиперповерхность 2-го порядка), задаваемая функцией Q – это $S(Q) = \{a \in \mathbb{A} \mid Q(a) = 0\}$, если $S(Q) \neq \varnothing$

Утверждение. Любая прямая $\pi \subset \mathbb{A}$ либо принадлежит поверхности $S = S(Q)$, либо пересекает ее не более, чем в двух точках.

Доказательство. $\forall a, \ b = a + tv, \ \pi || v \neq 0$

$$Q(a + tv) = Q(a) + q(tv) + 2l(tv) = t^2 q(v) + 2tl(v) + Q(a) = 0$$

Либо это равенство тождественно, либо $q(v) \neq 0$ или $l(v) \neq 0 \Longrightarrow$ существует не более двух корней t. □

Определение. Точка $O \in \mathbb{A}$ – центр квадрики, если для любого вектора $v \in V$ такого что $O + v \in S \Longrightarrow O - v \in S$. Точка O – вершина квадрики, если O – центр, принадлежащий этой поверхности, т.е. $O \in S$.

Утверждение. Если O – вершина, $a \in S,\ a \neq O$, то вся прямая проходящая через точки O и a принадлежит S.

Доказательство. Обозначим $v = \overrightarrow{Oa}$, и рассмотрим точку $O + t \cdot \overrightarrow{Oa} \in S \iff O - t \cdot \overrightarrow{Oa} \in S$. В частности, точки $O,\ a,\ a' = O - \overrightarrow{Oa} \in S$ – три различные точки на $S \implies$ по прошлому утверждению, вся прямая $O + \langle v \rangle \subset S$.

□

Заметим, что

$$Q(O+v) = q(v) + 2l(v) + c = 0,\ c = Q(O) \implies$$

$$Q(O-v) = q(v) - 2l(v) + c = 0$$

$\mathrm{char} F \neq 2 \implies l(v) = 0$. Т.о., если O – центр квадрики $\implies l(v) = 0$.
Координаты центра совпадают с координатами центра $Q(x)$.
Центр определятся системой уравнений:

$$\frac{\partial Q(x)}{\partial x_i} = 0,\ i = 1, ..., n \iff \frac{\partial q}{\partial x_i} + 2a_i = 0,\ \text{где } l(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$$

Замечание. Квадрика, не являющаяся плоскостью, содержит хотя бы одну точку, которая не является вершиной. Если допустить, что вссе точки $a \in S$ являются вершинами, то любая прямая $(O, a) \subset S \implies S$ является плоскотью.

Теорема. Если $|F| = \infty$ ($\mathrm{char} F \neq 2$), то $S(Q_1) = S(Q_2) \implies \exists \lambda \in F,\ \lambda \neq 0 :$ $Q_2 = \lambda Q_1$.

Доказательство.
Если $Q_2 = \lambda Q_1, \lambda \neq 0$, то Q задает ту же поверхность, что и Q_1.
Обратно: пусть $S = S(Q_1) = S(Q_2)$. Возьмем точку $O \in S$, не являющуюся вершиной. Имеем: $Q_1(O) = 0,\ Q_2(O) = 0$. Для $\forall v \in V$ запишем

$Q_1(O+v) = q_1(v) + 2l_1(v),\ l_1 \neq 0$
$Q_2(O+v) = q_2(v) + 2l_2(v),\ l_2 \neq 0$

Прямая $\pi = O + \langle v \rangle$ пересекает S в некоторой точке $p = O + tv$, если $t \in F$ – корень обоих уравнений

$t^2 q_1(v) + 2tl_1(v) = 0$
$t^2 q_2(v) + 2tl_2(v) = 0$

Один из этих корней $t_0 = O$, т.к. $O \in S$, второй t_1.

$t(tq_1(v) + 2l_1(v)) = 0$

$t(tq_2(v)+2l_2(v))=0$
Если $q_1(v)q_2(v)\neq 0 \Longrightarrow$

$$t_1=-\frac{2l_1(v)}{q_1(v)}=-\frac{l_2(v)}{q_2(v)}\Longrightarrow \frac{l_1(v)}{q_1(v)}=\frac{l_2(v)}{q_2(v)}\Longleftrightarrow$$

$$l_1(v)q_2(v)=\frac{l_2(v)q_1(v)}{q_1(v)q_2(v)}\Longrightarrow l_1(v)q_1(v)q_2^2(v)=l_2(v)q_1^2(v)q_2(v)$$

Последнее верно $\forall v\in V$ (даже если $q_1(v)=0$ или $q_2(v)=0$) – равенство двух многочленов от $x_1,...,x_n$ как функций.
Т.к. F бесконечно, то это равносильно равенству многочленов $l_1q_1q_2^2=l_1q_1^2q_2$ как алгебраических выражений. Кольцо многочленов над полем не имеет делителей $0\Longrightarrow$ можно сократить последнее равенство на $q_1q_2\Longrightarrow q_1l_2=q_2l_1$ (*) (как равенство многочленов). Нам достаточно доказать, что $\exists\lambda\neq 0:\ l_2=\lambda l_1$, из (*) $\Longrightarrow q_2=\lambda q_1$. Допустим, что это не так, и $l_1,\ l_2$ не пропорциональны, тогда они ЛНЗ в пространстве V^*, и их можно включить в дуальный базис, т.е. выбрать базис в V так, чтобы $l_1(v)=x_1,\ l_2(v)=x_2,\ \forall v=\sum\limits_{i=1}^{n}x_ie_i$,тогда равенство (*) примет вид: $q_1(x)x_2=q_2(x)x_1$ – равенство двух многочленов, где $x=(x_1,...,x_n)$. Многочлен правой части делится на $x_1\Longrightarrow$ многочлен $q_1(x)x_2\ \vdots\ x_1$, x_1 и x_2 взаимно просты $\Longrightarrow q_1(x)\ \vdots\ x_1\Longrightarrow q_1(v)=l(v)x_1\Longrightarrow q_2(v)=l(v)x_2,\ l(v)$ – линейная форма, $l(v)\neq 0\Longrightarrow$

$Q_1(O+v)=(l(x)+2)x_1$

$Q_2(O+v)=(l(x)+2)x_2$

Пусть $x_1\equiv 0\Longrightarrow Q_1(O+v)=0$, т.е. S содержит плоскость $x_1=0$.
Но $Q_2(O+v)=(l(x)+2)x_2\not\equiv 0$ при $x_1=0$ – противоречие $\Longrightarrow l_2=\lambda l_1$,
$\lambda\neq 0\Longrightarrow q_2=\lambda q_1\Longrightarrow Q_2=\lambda Q_1$

□

После теормы о том, что если $S(Q_1)=S(Q_2)\Longrightarrow Q_2=\lambda Q_1$, докажем, следующее утверждение.

Утверждение. Пусть $S=S(Q)$ – квадрика. Точка $O\in\mathbb{A}$ – центр симметрии $S\Longleftrightarrow l=0$. $(Q(O+v)=q(v)+2l(v)+Q(O))$.

Доказательство.
$\Longleftarrow$ Если $l=0$, то $Q(O-v)=Q(O)+q(-v)=Q(O+v)=O,\ \forall v\in V:\ O+v\in S$ $\Longrightarrow S:\ Q(O+v)=O$, а функция $Q_1(O+v)=Q(O-v)=q(v)-2l(v)+c$ задает ту же поверхность S, если O – центр симметрии $\Longrightarrow\exists\lambda\neq 0:\ Q_1=\lambda Q$, т.е. $\lambda q(v)+2\lambda l(v)+\lambda Q(O)=q(v)-2l(v)+Q(O)$ (разделим обе части на правую часть). Т.к. $q\neq 0$, то $\lambda=1\Longrightarrow l(v)=-l(v)$; т.к. $\mathrm{char}F\neq 2\Longrightarrow l=0$

$\square$

Классификация квадрик.

Теорема. Заменой аффинной системы координат $\{O; e\}$ уравнение любой квадрики можно привести к только одному из следующих видов ($\mathrm{char} F \neq 2$; коэффициенты определяются с точностью до нумерации):

I. (1) $\sum\limits_{i=1}^{r} \alpha_i x_i^2 = 1$ $(r \leq n)$

(2) $\sum\limits_{i=1}^{r} \alpha_i x_i^2 = 0$ $(r \leq n-1)$

I. – центральный случай

II. (нецентральный случай): $\sum\limits_{i=1}^{r} \alpha_i x_i^2 + 2x_{r+1} = 0$ $(r \leq n-1)$

где $\prod\limits_{i=1}^{r} \alpha_i \neq 0$ во всех случаях (I), (II).

Доказательство. См. соотвествующую теорему о классификации аффинно-квадратичных функций:

$$(\mathrm{I}).\ Q(O+v) = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i x_i^2 + c$$

Если $c \neq 0$, то уравнение

$$\sum_{i=1}^{r} \alpha_i x_i^2 = -c \Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{r} (-\frac{\alpha_i}{c}) x_i^2 = 1,\ \widetilde{\alpha}_i = -\frac{\alpha_i}{c}$$

Остальное остается в силе.

$\square$

Следствие. Над $\mathbb{C}$ уравнение квадрики S приводится к одному из видов:

I. (1) $\sum\limits_{i=1}^{r} x_i^2 = 1$ $(r \leq n)$

(2) $\sum\limits_{i=1}^{r} x_i^2 = 0$ $(r \leq n)$

II. $\sum\limits_{i=1}^{r} x_i^2 = 2x_{r+1},$ $(r \leq n-1)$

Доказательство. Согласно прошлой теореме:

$$\sum_{i=1}^{r} x_i^2 = \begin{cases} 1 \\ 0 \\ 2x_{r+1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \widetilde{x}_i = \sqrt{\alpha_i} x_i, \ 1 \le i \le r \\ \widetilde{x}_i = x_i, \ r+1 \le i \le n. \end{cases}$$

$\square$

Следствие. Над $\mathbb{R}$ заменой системы координат $\{O; e\}$ уравнение любой квадрики приводится к одному из видов:

I. (1) $\sum\limits_{i=1}^{s} x_i^2 - \sum\limits_{i=s+1}^{r} x_i^2 = 1 \ (s \le r)$

(2) $\sum\limits_{i=1}^{s} x_i^2 - \sum\limits_{i=s+1}^{r} x_i^2 = 0, \ \frac{r}{2} \le s \le r$

II. $\sum\limits_{i=1}^{s} x_i^2 - \sum\limits_{i=s+1}^{r} x_i^2 = -2x_{r+1}, \ \frac{r}{2} \le s \le r$

(В случаях I. (2) и II., если надо, уравнение можно умножить на (-1) и перенумеруем).

Названия в этой классификации:

I. (1) при $n = z = s$ – эллипсоид; если $1 < n = r$ – гиперболоид.

I. (2) при $r = n$ – конус.

II. при $r = s = n - 1$ – эллиптический параболоид.

при $s < r = n - 1$ – гиперболический параболоид.

I. при $r \le n - 1$, II при $r \le n - 2$ – циллиндры.

Квадрики в аффинном евклидовом пространстве

Теорема. (Об ортогональной классификации квадрик). В аффинном евклидовом пространстве $\mathcal{E}$ выбором подходящей ортонормированной системе координат, уравнение любой квадрики приводятся к одному (и только одному) каноническому типу:

I. (1) $\sum\limits_{i=1}^{s} \frac{\widetilde{x}_i^2}{\alpha_i^2} - \sum\limits_{i=s+1}^{r} \frac{\widetilde{x}_i^2}{\alpha_i^2} = 1, \ 0 < s \le r$

(2) $\sum\limits_{i=1}^{s} \frac{\widetilde{x}_i^2}{\alpha_i^2} - \sum\limits_{i=s+1}^{r} \frac{\widetilde{x}_i^2}{\alpha_i^2} = 0, \ \frac{r}{2} \le s < r$

II. $\sum\limits_{i=1}^{s} \frac{\widetilde{x}_i^2}{\alpha_i^2} - \sum\limits_{i=s+1}^{r} \frac{\widetilde{x}_i^2}{\alpha_i^2} + 2x_{r+1} = 0$ (все $\alpha_i > 0, \ 1 \le i \le r$)

Набросок доказательства. В подходящей ортонормированной системе координат $\{O; e\}$ уравнение Q приводится к виду:

$$\text{(I) } Q = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i x_i^2 + c \text{ либо (II) } \sum_{i=1}^{r} \lambda_i x_i^2 + 2\mu x_{r+1} \ (\mu > 0)$$

(По теореме 2 из лекции от 3.05)
Пусть имеет место (I) и $c \neq 0$, тогда уравнение

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i x_i^2 + c = 0 \text{ разделим на } (-c) \Longrightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{r} \frac{\lambda_i}{-c} x_i^2 = 1, \text{ обозначим за } a_i := \sqrt{\left|\frac{c}{\lambda_i}\right|}$$

Причем можно выбрать нумецию так, чтобы $\lambda_i c < 0$ при $i = 1, ..., s$ и $\lambda_i c > 0$ при $i > s$ $\to$ вид I.(1)
При $c = 0$ просто $a_i = \frac{1}{\sqrt{|\lambda_i|}}$ $\to$ вид I.(2).
В случае (II) можно разделить уравнение на μ:

$$\sum_{i=1}^{r} \frac{\lambda_i x_i^2}{\mu} + 2x_{r+1} = 0, \text{ обозначим за } a_i := \sqrt{\left|\frac{\mu}{\lambda_i}\right|}$$

Выбрать нумерацию так, чтобы $\lambda_i \mu > 0$ при $i = 1, ..., s$ и $\lambda_i \mu < 0$ при $i > s$.

Глава 5. Тензоры.
§1. Базовые понятия.

Под тензором понимают геометрический объект, который задается матрицей (там было еще много слов которые я не успел записать).
Пусть V – векторное пространство над полем F, $\dim V = n < \infty$
V^* – сопряженное ему пространство (пространство линейных функций на V).
Известно, что $V^{**} \cong V$ (изоморфизм не зависит от базиса.)

Определение. Пусть $p, q \in \mathbb{N}_0$. Тензор типа (p, q) – это полилинейная функция $f : \underbrace{V \times ... \times V}_{p} \times \underbrace{V^* \times ... \times V^*}_{q} \longmapsto F$. ($f(v_1, ..., v_p; u_1, ..., u_q)$ линейна по каждому из аргументов). $p + q$ – валентность тензора f (или ранг f), где p – ковариантная валентность, q – контравариантная валентность. Если $pq \neq 0$, то f – смешанный тензор.

Обозначим $T_p^q(V) = T_p^q$ – множество тензоров типа (p, q).

Утверждение. T_p^q – векторное пространство.

Доказательство. Надо определить линейные операции.
Обозначим $\vec{v} = (v_1, ..., v_p)$, $\vec{u} = (u_1, ..., u_q)$.
Если $f_1, f_2 \in T_p^q$, положим

$$(f_1 + f_2)(\vec{v}, \vec{u}) := f_1(\vec{v}, \vec{u}) + f_2(\vec{v}, \vec{u})$$

$$\forall \lambda \in F,\ (\lambda f)(\vec{v}, \vec{u}) := \lambda f(\vec{v}, \vec{u})$$

С этими операциями $T_p^q(V)$ – векторное пространство.

$\square$

Определение. Произведение тензоров: пусть $f_1 \in T_p^q$, $f_2 \in T_r^s$, тогда $f_1 \otimes f_2 : \underbrace{V \times ... \times V}_{p+r} \times \underbrace{V^* \times ... \times V^*}_{q+s} \longmapsto F$, т.е. $f_1 \otimes f_2 \in T_{p+r}^{q+s}$

$$(f_1 \otimes f_2)(\underbrace{v_1, ..., v_p, v_{p+1}, ..., v_{p+r}}_{\text{векторы } \in V}; \underbrace{u_1, ..., u_{q+s}}_{\text{ковекторы } \in V^*}) =$$
$$= f_1(v_1, ..., v_p; u_1, ..., u_q) f_2(v_{p+1}, ..., v_{p+r}; u_{q+1}, ..., u_{q+s})$$

<u>Свойства операции операции $\otimes$:</u>

Утверждение. 1. $f_1 \otimes f_2$ – тензор типа $(p + r, q + s)$

2. $(f_1 \otimes f_2) \otimes f_3 = f_1 \otimes (f_2 \otimes f_3)$ – ассоциативность.

3. $(\alpha f_1 + \beta f_2) \otimes f_3 = \alpha(f_1 \otimes f_3) + \beta(f_2 \otimes f_3)$ – дистрибутивность.

Правило суммирования Эйнштейна.

Договоренность, что координаты вектора пишутся с верхними индексами, тогда разложение вектора по базису:

$$x = \sum_i x^i e_i \equiv x^i e_i$$

В последнем предполагается суммирование по i, ради сокращения записи. Коэффициенты линейной формы – с нижними индексами:

$$u(x, y) = \sum_i a_i x^i$$

Матрица линейного оператора обозначается $A = (a_j^i)$, где i – индекс строки, а j –индекс столбца.

$$\varphi(x) = AX = \sum_i a_j^i x^j$$

Отождествление тензоров малых валентностей (рангов) с геометрическими объектами.

Под тензором понимаем векторы, линейные формы, билинейные формы, операторы.

1. $T_1^0(V) = V^*$
2. $T_0^1(V) = V^{**} = V$
3. $T_2^0(V)$ – билинейная форма.
4. $T_1^1(V) \cong L(V)$

Пусть $f(v,u)$ – тензор типа $(1,1)$. Изоморфизм между V^{**} и V задается правилом:

$$\forall v \in V,\ v \longmapsto \varepsilon_v \in V^{**},\ \forall u \in V^* \text{ выполнено } \varepsilon_v(u) = u(v)$$

(И наоборот, для $l \in V^{**}$ обозначим $v = y_v \in V$ – обратное отображение.)
При фиксированном v, $f(v,u)$ – линейная функция на $V^{**} \Longrightarrow$

$$f(v,u) = \varepsilon_v(u) = u(v) = u(y_v) \qquad (*)$$

Соответствие $\overbrace{v \longmapsto y_v}^{V \overset{\varphi}{\longmapsto} V}$ из условия $(*)$ является линейным оператором. Для f существует единственый. φ
Наоборот, $\forall \varphi : V \longmapsto V$, функция $f(v,u) := u(\varphi(v))$, где $f : V \times V^* \longmapsto F$.

Построение базиса в пространстве $T_p^q(V)$.

Пусть $e = \{e_1, ..., e_n\}$ – базис в V, а $e^* = \{e^1, ..., e^n\}$ – дуальный базис в V^*.

Теорема. Тензоры

$$e^{i_1} \otimes ... \otimes e^{i_p} \otimes e_{j_1} \otimes ... \otimes e_{j_q}\ (i_1, ..., i_p, j_1, ..., j_q = \overline{1,n})$$

образуют базис в пространстве $T_p^q \Longrightarrow \dim T_p^q = n^{p+q}$

Доказательство. Любой тензор f разлагается по тензорам $(**)$.
Пусть $v_1 = x_1^{i_1} e_{i1}, ..., v_p = x_p^{i_p} e_{ip}$
$u_1 = y_{j_1^1} e^{j_1}, ..., u_q = y_{j_q^q} e^{j_q}$

$$f(v_1, ..., v_p; u_1, ..., u_q) = f(x_1^{i_1} e_{i_1}, ...; y_{j_1}^1 e^{j_1}, ...) =$$

Используя линейность по каждому аргументу получаем:

$$= x_1^{i_1} \cdot ... \cdot x_p^{i_p} \cdot y_{j_1}^1 \cdot ... \cdot y_{j_q}^q \cdot f(e_{i_1}, ..., e_{i_p}; e^{j_1}, ..., e^{j_q})$$

Заметим, что $f(e_{i_1}, ..., e_{i_p}; e^{j_1}, ..., e^{j_q}) = T_{i_1, ..., i_p}^{j_1, ..., j_q}$ – координаты тензора $f(\vec{v}; \vec{u})$. Индексы должны быть "и сверху и снизу".

$$(e^{i_1} \otimes ... \otimes e^{i_p} \otimes e_{j_1} \otimes ... \otimes e_{j_q})(e_{i_1'}, ..., e_{i_p'}; e^{j_1'}, ..., e^{j_q'}) =$$

$$= e^{i_1}(e_{i'_1}) \cdot ... \cdot e^{i_p}(e_{i'_p}) \cdot e_{j_1}(e^{j'_1}) \cdot ... \cdot e_{j_q}(e^{j'_q}) =$$

$$= \delta^{i_1}_{i'_1} \cdot ... \cdot \delta^{i_p}_{i'_p} \cdot \delta^{j'_1}_{j_1} \cdot ... \delta^{j'_q}_{j_q} = \begin{cases} 1, (i_1, ..., i_p) = (i'_1, ..., i'_p) \text{ и } (j_1, ..., j_p) = (j'_1, ..., j'_p) \\ 0, \text{ иначе} \end{cases}$$

$$(e^{i'_1} \otimes e^{i'_p} \otimes e_{j'_1} \otimes ... \otimes e_{j'_q})(v_1, ..., v_p; u_1, ..., u_q) =$$

$$x_1^{i_1} \cdot ... \cdot x_p^{i_p} \cdot y^1_{j_1} \cdot ... \cdot y^q_{j_q}(e^{i'_i} \otimes e_{j'_q})(e_{i_1}, ..., e^{j_q})$$

Причем $(e^{i'_i} \otimes e_{j'_q})(e_{i_1}, ..., e^{j_q})$ раняется 1, только когда $(i_1, ..., i_p) = (i'_1, ..., i'_p)$ и $(j_1, ..., j_p) = (j'_1, ..., j'_p)$. Тогда

$$f(v_1, ..., v_p; u_1, ..., u_q) = T^{j_1, ..., j_q}_{i_1, ..., i_p}(e^{i_1} \otimes ... \otimes e^{i_p} \otimes e_{j_1} \otimes ... \otimes e_{j_q})(v_1, ..., v_p; u_1, ..., u_q)$$

$T^{j_1, ..., j_q}_{i_1, ..., i_p}$ фактически являются координатами тензора f в системе тензоров (**).
Тензоры (**) ЛНЗ: допустим, что коэффициенты $\Lambda^{j_1, ..., j_q}_{i_1, ..., i_p}$, такие что

$$\widetilde{f} = \Lambda^{j_1, ..., j_q}_{i_1, ..., i_p}(e^{i_1} \otimes ... \otimes e^{i_p} \otimes e_{j_1} \otimes ... \otimes e_{j_q}) = 0$$

Рассмотрим тензор $\widetilde{f} \equiv 0$, точнее

$$\widetilde{f}(e_{i_1}, ..., e_{i_p}; e^{j_1}, ..., e^{j_q}) = \Lambda^{j_1, ..., j_q}_{i_1, ..., i_p} = 0$$

Для $\forall i_k, j_l$ □

Иземенение координат тензора при замене базиса.

Если $e = (e_1, ..., e_n)$ – старый базис; $e' = (e'_1, ..., e'_n)$ – новый базис в V, $e^* = (e^1, ..., e^n)$ старый базис в V^*, $e'^* = (e'^1, ..., e'^n)$ – новый базис в V^*.

$$x = x^i e_i = x'^{i'} e'_{i'}, \quad x^i = c^i_{i'} x'^{i'}, \quad (c^i_{i'}) = C_{e \to e'}$$

$$u = y_j e^j = y'_{j'} e'^{j'}, \quad y'_{j'} = y_j c^i_{j'} - \text{ ковариантный закон}$$

(В общем у Гайфуллина расписано лучше)
Равносильно: $X' = C^{-1}X$, обозначим $D = C^{-1} \Longrightarrow x'^{i'} = d^{i'}_i x^i$ – контравариантный закон.
В старом базисе:

$$f = T^{j_1, ..., j_q}_{i_1, ..., i_p}(e^{i_1} \otimes ... \otimes e^{i_p} \otimes e_{j_1} \otimes ... \otimes e_{j_q})$$

$$T^{j_1, ..., j_q}_{i_1, ..., i_p} = f(e_{i_1}, ..., e_{i_p}; e^{j_1}, ..., e^{j_q})$$

В новом базисе:

$$T'^{j'_1, ..., j'_q}_{i'_1, ..., i'_p} = f(e'_{i'_1}, ..., e'_{i'_p}; e'^{j'_1}, ..., e'^{j'_q})$$

В координатах:

$$f(e_{i_1},...,e_{i_p};e^{j_1},...,e^{j_q}) = T^{j_1,...,j_q}_{i_1,...,i_p} x^{i_1}_1 ... x^{i_p}_p \cdot y^1_{j_1} ... y^q_{j_q} =$$

$$= T^{j_1,...,j_q}_{i_1,...,i_p} c^{i_1}_{i'_1} x'^{i'_1}_1 ... x'^{i'_p}_p \cdot d^{j'_1}_{j_1} y'^{j_1}_1 ... d^{j'_q}_{j_q} y'^{j_q}_q =$$

$$= T'^{j'_1,...,j'_q}_{i'_1,...,i'_p} x'^{i'_1}_1 ... x'^{i'_p}_p \cdot y'^1_{j'_1} ... y'^q_{j'_q} \Longrightarrow$$

$$T'^{j'_1,...,j'_q}_{i'_1,...,i'_p} = T^{j_1,...,j_q}_{i_1,...,i_p} c^{i_1}_{i'_1} \cdot ... \cdot c^{i_p}_{i'_p} \cdot d^{j'_1}_{j_1} \cdot ... \cdot d^{j'_q}_{j_q} \qquad (*)$$

$(*)$ означает, что этот тензор (или эта матрица) p раз ковариантный и q раз контравариантный.

А теперь докажем то же самое, но методом Гайфуллина.

Формально, он проделывает же те шаги, но с более удобными обозначениями.

$$C_{e\to\overline{e}}: \ (\overline{e_1},...,\overline{e_n}) = (e_1,...,e_n)C \Longrightarrow$$

$$\overline{c}_j = \sum_{i=1}^{n} e_i c_{ij} = \Big|(c_{ij}) := (c^i_j)\Big| = \sum_{i=1}^{n} e_i c^i_j = e_i c^j_i$$

Из-за хейта знак суммирования опущен.
Пусть $D := C^{-1}$. Тогда

$$e_j = \overline{e}_i \cdot d^i_j, \qquad e^j = c^j_i \cdot \overline{e}^i$$

$$f = T^{j_1,...,j_q}_{i_1,...,i_p} e^{i_1} \otimes ... \otimes e^{i_p} \otimes e_{j_1} \otimes ... \otimes e_{j_q} = \overline{T}^{b_1,...,b_q}_{a_1,...,a_p} \cdot \overline{e}^{a_1} \otimes ... \otimes \overline{e}^{a_p} \otimes \overline{e}_{b_1} \otimes ... \otimes \overline{e}_{b_q}$$

$$f = T^{j_1,...,j_q}_{i_1,...,i_p} \cdot c^{i_1}_{a_1} \cdot \overline{e}^{a_1} \otimes ... \otimes c^{i_p}_{a_p} \cdot \overline{e}^{a_p} \otimes d^{b_1}_{j_1} \cdot \overline{e}_{b_1} \otimes ... \otimes d^{b_q}_{j_q} \cdot \overline{e}_{b_q}$$

$$\boxed{\overline{T}^{b_1,...,b_q}_{a_1,...,a_p} = T^{j_1,...,j_q}_{i_1,...,i_p} \cdot c^{i_1}_{a_1} \cdot ... \cdot c^{i_p}_{a_p} \cdot d^{b_1}_{j_1} \cdot ... \cdot d^{b_q}_{j_q}}$$

§2. Свертка, симметризация и альтернирование.

След матрицы линейного оператора

$$\mathrm{tr}A = \sum a^i_i = a^a_i \in T^0_0 - \text{ инвариант}$$

$$T^q_p \to T^{q-1}_{p-1}, \ p,q \geq 1$$

Пусть $f \in T^q_p, \ p,q \geq 1$ и $f = f(v_1,...,v_p;u^1,...,u^q)$
Выбирается $x \in [1,p], \ s \in [1,q]$, можно рассмотреть

$$\overline{f}(v_1,...,\widehat{v}_r,...,v_p;u^1,...,\widehat{u}^s,...,u^q)$$

Сначала для $v_r = e_k,\ u_s = e^k$

$$\overline{f}(e_1, ..., \widehat{e}_r, ..., e_p; e^1, ..., \widehat{e}^s, ..., e^q) = \sum_{k=1}^{n} e^k(e_k) \cdot f(e_1, ..., e_k, ..., e^1, ..., e^k, ..., e^q)$$

В матричном виде пусть $T^{j_1,...,j_q}_{i_1,...,i_p}$ – матрица координат тензора f, а $\overline{T}$ – тензора $\overline{f}$. Тогда

$$\overline{T}^{j_1,...,\widehat{j}_s,...,j_q}_{i_1,...,\widehat{i}_r,...,i_p} = T^{j_1,...,k,...,j_q}_{i_1,...,k,...,i_p} \text{ (по } k \text{ подразумевается суммирование)}$$

$$\mathrm{tr}A = \sum a^i_i = a^i_i \qquad \overline{f} := \mathrm{tr}^s_r(f)$$

Утверждение. $texttr^s_r: \ T^q_p(V) \longmapsto T^{q-1}_{p-1}(V)$ (если $p, q \geq 1$) – линейное отображение.

Можно свертывать по всем наборам верхних и нижних индексов m раз, где $m := min(p, q)$. Если $p = q = m$, то получится тензор типа $(0, 0)$, т.е. скаляр, который является инвариантным. Если же $p \neq q$, то получится не смешанный, а чистый тензор.

Пример: 1. $A = a^i_j,\ x = x^k \Longrightarrow A \otimes x = a^i_j \cdot \overbrace{x^k}^{b^{ik}_j} \in T^2_1$. Если свернуть этот тензор по нижнему индексу j и верхнему k: $\overline{b}^i = a^i_j x^j$ – образ x при действии линейного оператора с матрицей A.

2. $A = a^i_j,\ B = b^k_l,\ A, B \in T^1_1,\ A \otimes B = a^i_j b^k_l$ $(i, j, k, l$ независимы$) \in T^2_2$. Свертка этого тензора по индексу j и индексу k: $a^i_j b^j_l = (a \cdot B)^i_l$

Симметричность.

Для чистого тензора $T^0_p(V)$

$$f = f(v_1, ..., v_p)$$

Определим действие подстановки $\pi \in S_p$ по правилу:

$$\pi \circ f \equiv f_\pi(v_1, ..., v_p) = f(v_{\pi(1)}, ..., v_{\pi(p)})$$

Определение. Тензор f симметрический, если $\forall \pi \in S_p$ выполнено $f_p = f$.
Операция симметризации:

$$\mathrm{Sym}(f)(v_1, ..., v_p) = \frac{1}{p!} \sum_{\pi \in S_p} f_\pi(v_1, ..., v_p)$$

Аналогично можно определить симметричность и симметризацию на $T^q_0(V)$

Утверждение.

1. Если тензор f симметрический, то $\mathrm{Sym}(f) = f$.
2. $\mathrm{Sym}^2 = \mathrm{Sym}$

   Обозначим T_p^+ (соотвественно T_+^q) – пространство симметрических тензоров.
3. $\mathrm{ImSym} = T_p^+$ (соотвественно T_+^q)

   Таким образом Sym – проектор из T_p^0 на T_p^+ (соотвественно T_0^q на T_+^q)

Доказательство. Очевидно. $\square$

Альтернирование (или антисимметричность).

Определение. Тензор $f(v_1, ..., v_p)$ – кососимметрический, если $\forall \pi \in S_p$ выполнено $f_\pi(v_1, ..., v_p) = f(v_{\pi(1)}, ..., v_{\pi(p)}) = \mathrm{sgn}(\pi) f(v_1, ..., v_p)$.
Считаем, что $\mathrm{char} F = 0$. Очевидно, что кососимметричность достаточно требовать для любой транспозиции.

Обозначение: $\Lambda^p(V)$ – пространство кососимметрических тензоров из T_p^0.
Для кососимметрических тензоров типа $(0, q)$ используется обозначение $\Lambda^q(V^*)$.
Операция альтернирования:

Определение. $\mathrm{Alt}(f)(v_1, ..., v_p) := \frac{1}{p!} \sum\limits_{\pi \in S_p} \mathrm{sgn}(\pi) f(v_{\pi(1)}, ..., v_{\pi(p)})$

Утверждение.

1. Alt: $T_p^0 \to T_p^0$ – линейный отображение. Если $f \in \Lambda^p \Longrightarrow \mathrm{Alt}(f) = f$
2. $\mathrm{Alt}^2 = \mathrm{Alt}$
3. $\mathrm{ImAlt} = \Lambda^p$
4. $\mathrm{AltSym} = \mathrm{Sym} \circ \mathrm{Alt} = 0$

$T_2^0(V) = \overbrace{T_2^+(V)}^{\text{симм. тенз.}} \oplus \overbrace{\Lambda^2(V)}^{\text{кососимм. тенз.}}$
Но при $p \geq 3$ выполнено $T_p^+(V) \oplus \Lambda^p(V) \neq T_p^0(v)$

Тензорная алгебра пространства V.

Внешняя прямая сумма пространств: $V_1 \oplus ... \oplus V_k = \{v_1, ..., v_k \mid v_i \in V_i\}$ с покомпонентными линейными операциями.

$$\bigoplus_{i=1}^{\infty} V_i = \{(v_1, v_2, ...) \mid v_i \in V_i,\ i = 1, 2, ...\}$$

Конечное число $v_i \neq 0$ – финитные последовательности.
Рассмотрим в W подпространства $\widetilde{V}_i = \{0, ..., v_i, 0, ...| \ v_i \in V_i\}$. Тогда $\forall w \in W :$

$w = \sum\limits_i \widetilde{v}_i$, можно отождествить $v_i \equiv \widetilde{v}_i, V_i \equiv \widetilde{V}_i$.
Обозначим $T^*(V) = \overset{\infty}{\underset{i=1}{\oplus}} T_p^0(V)$ (внешняя прямая сумма, отождествленная с внутренней).

$$f \in T_p^0,\ g \in T_r^0 \Longrightarrow f \otimes g \in T_{p+r}^0$$

На пространстве $T^*(V)$ определены операции $+, \lambda\cdot, \otimes$, т.е. $T^*(V)$ – алгебра, ассоциативная с $1 \in F$, но не коммутативная. $T_0^0(V) \equiv F$.
В пространстве $T^+(V)$ можно ввести операцию симметрического произведения: (T^+ – множество всех симметрических тензоров).
Если $f \in T_p^+,\ g \in T_r^+ \Longrightarrow f \otimes g \in T_{p+r}$

$$f \vee g = \mathrm{Sym}(f \otimes g) = \frac{1}{(p+r)!} \sum_{\sigma \in S_{p+r}} f(v_{\sigma(1)}, ..., v_{\sigma(p)})$$

Тогда базис в пространстве T_p^+ будут образовывать тензоры $\{e^{i_1} \vee ... \vee e^{i_p}\}$
$\mathrm{dim} T_p^+ = C_n^p$ по всем различным элементам $i_1 \leq ... \leq i_p$.
Обозначим $\Lambda(V^*)$ – кососимметрические тензоры в T_0^q

$$\Lambda(V^*) = \overset{\infty}{\underset{q=0}{\oplus}} \Lambda^q(V^*)$$

Внешнее (косое) произведение:

$$f \wedge g := \mathrm{Alt}(f \otimes g) \text{ по группе } S_{q+s}$$

Базис в пространстве Λ^q образуют тензоры $\{e_{i_1} \wedge ... \wedge e_{i_q}\}$ по всем индексам: $1 \leq i_1 < ... < i_q \leq n$.

$$\mathrm{dim}\Lambda^q(V^*) = C_n^q \text{ при } q \leq n, \text{ иначе } 0$$

$$\Lambda(V^*) = \overset{\infty}{\underset{q=0}{\oplus}} \Lambda(V^*) \Longrightarrow \mathrm{dim}\Lambda(V^*) = 2^n$$

$\Lambda(V^*)$ – внешняя алгебра или алгебра Грассмана.
Рассмотрим тензор типа $T_+^p(V)$ вида

$$T_+^p(V) = \langle \underbrace{e_1 \vee ... \vee e_1}_{k_1} \vee ... \vee \underbrace{e_n \vee ... \vee e_n}_{k_n} \rangle \qquad (\sum_i k_i = p)$$

$$\underset{(r,0)}{f} \vee \underset{(s,0)}{g} = \mathrm{Sym}(f \otimes g) = g \vee f$$

$$f = T^{i_1,...,i_p} \underbrace{e_{i_1} \vee ... \vee e_{i_n}}_{e_1^{k_1} ... e_n^{k_n}}$$

$$e_1^{k_1}...e_n^{k_n} \longleftrightarrow x_1^{k_1}...x_n^{k_n}$$

Изоморфизм векторных пространств: $T_+^p \cong F[x_1, ..., x_n]$ – однородные многочлены степени p.
$\dim F[x_1, ..., x_n]_p =$ количество неупорядоченных выборок объема p с повторениями из n элементов.

$$1...101...101...10.....01...1$$

$n+p-1$ ячеек, $p-1$ нулей, количество C_{n+p-1}^{p}

Тензоры на евклидовых пространствах.

$F = \mathbb{R},\ V = \mathcal{E}$ – евклидово пространство, $\dim\mathcal{E} = n$.
На $\mathcal{E}$ задано скалярное произведение:

$$(x, y) = X^T G_e Y, \text{ т.е. } (x, y) = x^i g_{ij} y^i$$

Заметим, что $g_{ij} \in T_2^+(\mathcal{E})$, его называют ковариантным метрическим тензором.

Определение. $G_e^{-1} = g^{kl}$ – контравариантный метрический тензор.

Замечание. $G \cdot G^{-1} = E, \qquad g_{ij} g^{il} = \delta_j^l$

Опускание и подъем индекса.

Обозанчение: $\bullet$ – вакантное место для индекса. $T_p^q \to T_{p-1}^{q-1}$ по правилу $(p \geq 1)$:

$$a_k^{ij} = a_{\bullet\bullet k}^{ij\bullet} \to g_{li} a_{\bullet\bullet k}^{ij\bullet} = a_{l\bullet k}^{\bullet j\bullet} \qquad (1)$$

(1) – свертка тензора с ковариантным метрическим тензором.
Подъем индекса – свертки с g^{ij} :

$$a_{i\bullet l}^{\bullet j\bullet} \to g^{kl} a_{i\bullet l}^{\bullet j\bullet} = a_{i\bullet\bullet}^{\bullet jk}$$

Примеры:

1. Двойственность между пространством и его сопряженным пространством.

Пусть $f(x) = a_1x_1 + ... + a_nx_n \longrightarrow a = G \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$. Тогда $a^i = g^{ij} a_j$

Можно написать и обратное соответсвие.

2. $\beta(x, y) = (x, \varphi(y)),\ \varphi$ - линейный оператор, присоединенный к билинейной форме $\beta(x, y)$.

$$A_\varphi = G^{-1} B, \qquad a_i^j = g^{ik} b_{kj}$$

Замечание. На $\mathcal{E}$ можно рассматривать евклидовы тензоры. Тензору сопоставляется многомерная матрица только в О.Н.Б. (и заменять его только на О.Н.Б.)

На этом с тензорами мы закончим. А сейчас мы докажем рандомыне теоремы из разных тем курса.

Теорема. Пусть $\{\varphi_i |\ i \in I\}$ – семейство линейных операторов $\varphi_i : V \longmapsto V$, $\dim V = n,\ F = \overline{F}$ (например $F = \mathbb{C}$), $\varphi_i\varphi_j = \varphi_j\varphi_i$. Тогда в V существует общий для них собственный вектор.

Доказательство. Индукция по n.
База: $n = 1$ – тривиально.
Пусть $n > 1$. Если все операторы скалярные, то для любого не равного нулю, вектор подходит. Допустим, что φ_1 не скалярный оператор и $\lambda_1 \in F$ – его собственное значение, тогда собственное подпространство

$$V_{\lambda_1} = \{v \in V \mid \varphi_1(v) = \lambda_1 v\} \neq \{0\} \text{ и } V_{\lambda_1} \neq V$$

Покажем, что $V_{\lambda_1} = U$ инвариантно относительно всех φ_j.
Рассмотрим $v \in V_{\lambda_1},\ v \neq 0,\ \varphi_1(\varphi_j(v)) = \varphi_j(\varphi_1(v)) = \lambda_1\varphi_j(v) \Longrightarrow \varphi_j(v) \in U$.
Тогда семейство операторов $\{\varphi_i|_U,\ i \in I\}$ удовлетворяет условию теоремы,
$0 < \dim U < n \Longrightarrow$ по предположению индукции, $\exists v_0 \in U,\ v_0 \neq 0$ – собственный для всех $\varphi_j|_U$ – он собственный для всех φ_j.

□

О классификации невырожденных кососимметрических билинейных форм.

$\beta(x, y) = -\beta(x, y),\ \beta(x, y)$ – билинейная ($\mathrm{char} F \neq 2$). В любом базисе матрица билинейной формы выглядит следующим образом:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & & b_{ij} \\ & \ddots & \\ -b_{ji} & & 0 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{Ker}\beta(x, y) = \{y \in V |\ \beta(x, y) = 0\}$, т.е. $(x \perp y)$.
β – невырожденная, если $\mathrm{Ker}\beta = \{0\} \Longleftrightarrow \det B \neq 0$.
Если $B^T = -B^T$ и B имеет нечетный порядок, тогда $\det B = 0$.
Будем рассматривать невырожденные формы $\Longrightarrow n = 2m,\ m \geq 1$.

Теорема. Если $\beta(x,y)$ – невырожденная кососимметрическая билинейная форма, $\dim V = n = 2m$ ($m \geq 1$), то в V существует базис e' в котором

$$B_{e'} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & 0 \\ -1 & \ddots & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & & & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Доказательство.
Пусть $\beta \not\equiv 0$, тогда $\exists e_1, e_2 \in V:\ \beta(e_1,e_2) = b_{12} \neq 0 \Longrightarrow \beta(e_2,e_1) = -b_{12}$

$$B = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & b_{12} & \\ b_{12} & 0 & \\ \hline & & \\ & & \end{array}\right)$$

Можно взять $e'_1 = \frac{e_1}{b_{12}} \Longrightarrow \beta(e'_1, e_2) = 1,\ e'_2 = e_2$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & \\ -1 & 0 & \\ \hline & & \\ & & \end{array}\right)$$

Если $m = 1$, то все готовою Если $m > 1$, обозначим $U = \langle e'_1, e'_2 \rangle$,
$W = U^{\perp} = \{y \in V |\ \beta(x,y) = 0,\ \forall x \in U\} \Longrightarrow V = U \oplus W$.
$U^{\perp}$ задается системой уравнений (они ЛНЗ)

$$\begin{cases} \beta(e'_1, y) = 0 \\ \beta(e'_2, y) = 0 \end{cases} \Longrightarrow \dim W = n - 2 = 2(m-1)$$

$$U \cap W = \{y \in U |\ \beta(x,y) = 0,\ \forall x \in U\} \overset{?!}{\Longrightarrow} y = 0.$$

Но по предположению индукции существует базис $e'_3, ..., e'_{2m}$ в пространстве W в котором

$$B_{\beta|_W} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & 0 \\ -1 & \ddots & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & & & -1 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccccc} e'_3 & \qquad & \qquad & \qquad & e'_n \end{array} \end{array}$$

B имеет нужный $e' = \{e'_1, e'_2, e'_3, ...\}$ вид. $\square$

Некоторые линейные и аффинные группы.

Сначала $G = GL(V)$ – группа всех линейных невырожденных линейных операторов $\dim V < \infty$. Если Ввести базис, то $GL(V) \cong GL(n, F)$ – группа матриц $(n \times n)$ с det$\neq A$.

- Специальная группа $SL(n, F) = \{A_{n\times n} : \ \det A = 1\}$.
- Общая (полная) линейная группа.

Пусть в V задана билинейная форма $\beta(x, y)$. Скажем, что линейный оператор φ сохраняет эту форму, если $\forall x, y \in V : \ \beta(\varphi(x), \varphi(y)) = \beta(x, y)$.
Обозначим, $G_\beta = \{\varphi : \ \beta(x, y) = \beta(\varphi(x), \varphi(y))\}$.
В частности, если $b(x, y) = x_1y_1 + ... + x_ny_n$, то G_b – группа ортогональных операторов. В О.Н.Б. $G_b = O(n, F)$ – группа ортогонаьльных матриц.
Если $\beta(x, y) = -\beta(x, y)$ – невырожденная билинейная форма $(n = 2m)$, то $G_\beta = \mathrm{Sp}(2m, F)$ – симплетическая группа.
В матричном виде:

$$X^T(A^TBA)Y = X^TBY \Longleftrightarrow A^TBA = B$$

A имеет специфический вид, когда

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & 0 \\ -1 & \ddots & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & & & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \left(\begin{array}{c|c} 0 & E_m \\ \hline -E_m & 0 \end{array}\right)$$

В аффинном пространстве основная (полная) группа Aff(n) – группа аффинных всех преобразований аффинного пространства.

$$\forall f = T_u \cdot \Phi, \ \Phi(O) = O$$

$$T = \{T_u | \ u \in V\} - \text{ подгруппа } || \text{ переносов}, \ T \cong V$$

$$\{\Phi | \ \Phi(O) = O\} \cong \mathrm{GL}(n, F)$$