Алгебра

Ким Никита, 211 группа

4 сентября 2024 г.

Содержание

1 Лекция 2 (краткие выкладки)

Определение. Пусть G, H – группы. *Прямым произведением* $G \times H$ называется множество $\{(g,h) \mid g \in G,\ h \in H\}$ с операцией $(g_1,h_1)\cdot(g_2,h_2) = (g_1g_2, h_1h_2)$

Лемма. $G \times H$ – группа.

Доказательство. Очевидно. □

Определение. $(G, *)$ и $(H, \circ)$ – группы. $\varphi : G \longrightarrow H$ – гоморфизм, если $\varphi(g_1 * g_2) = \varphi(g_1) \circ \varphi(g_2)$

Примеры:

1. $\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_n$, т.е. $a \to a\ (mod\ n)$
2. $GL_n(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}^*$, т.е. $A \to det\ A$

Определение. *Изоморфизм* – биективный гомоморфизм.

Примеры:

1. $\mathbb{Z}_n \cong \mathbb{C}_n$, т.е. $k \to e^{\frac{2\pi k i}{n}} = \cos\frac{2\pi}{n}k + i\sin\frac{2\pi}{n}k$
2. $(\mathbb{R}, +) \cong (\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$, т.е. $x \to e^x$

Лемма. Пусть $\varphi : G \longrightarrow H$ – гомоморфизм. Тогда $\varphi(e_G) = e_H$ и $\varphi(g^{-1}) = (\varphi(g))^{-1}$

Доказательство.

$$\underbrace{\varphi(e_G \cdot e_G)}_{\varphi(e_G)} = \varphi(e_G)\cdot\varphi(e_G) \Big| \cdot \varphi(e_G)^{-1} \Longleftrightarrow e_H = \varphi(e_G)$$

$$\varphi(g^{-1})\cdot\varphi(g) = \varphi(gg^{-1}) = \varphi(e_G) = e_H$$

□

Утверждение. Отношение быть изоорфными – это отношение эквивалентности.

Доказательство. Не совсем очевидно может быть доказательство транзитивности:

$$\varphi : G \cong H,\ \psi : H \cong K \Longrightarrow \psi \circ \varphi : G \longrightarrow K \text{ явл. изоморфизмом}$$

□

Утверждение. Пусть $(G, *)$ – группа, $(H, \circ)$ – группоид. $\exists \varphi : G \longrightarrow H$ – гомоморфизм + биекция (изоморфизм группоидов). Тогда $(H, \circ)$ – группа и φ – изоморфизм групп.

Доказательство. В конспекте Гайффулина. □

1.1 Кватернионы

$\overline{Q_8} \subseteq GL_2(\mathbb{C})$

$$\overline{Q_8} = \{\underbrace{\pm\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}}_{\pm 1},\ \underbrace{\pm\begin{pmatrix}i & 0\\ 0 & -i\end{pmatrix}}_{\pm i},\ \underbrace{\pm\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}}_{\pm j},\underbrace{\pm\begin{pmatrix}0 & i\\ i & 0\end{pmatrix}}_{\pm k}\}$$

$$\begin{cases}\varphi - \text{ изоморфизм группойдов}\\ Q_8 \longrightarrow \overline{Q_8}\end{cases} \Longrightarrow \varphi - \text{ изоморфизм групп.}$$

Определение. Пусть $\varphi : G \longrightarrow H$ – гомоморфизм. *Ядро* φ – это $Ker\ \varphi = \{g \in G \mid \varphi(g) = e\} \subseteq G$. *Образ* φ – это $Im\ \varphi = \{\varphi(g) \mid g \in G\} \subseteq H$.

Теорема. 1. $Ker\ \varphi$ – подгруппа в G.

2. $Im\ \varphi$ – подгруппа в H.

Доказательство.
1. $g_1, g_2 \in Ker\ \varphi \Longrightarrow \varphi(g_1) = e,\ \varphi(g_2) = e \Longrightarrow \varphi(g_1g_2) = \varphi(g_1)\varphi(g_2) = e \cdot e = e$. Т.о. $g_1g_2 \in Ker\ \varphi$. Далее, пусть $g \in Ker\ \varphi$

$$\varphi(g^{-1}) = \varphi^{-1}(g) = e^{-1} = e \Longrightarrow g^{-1} \in Ker\ \varphi$$

2. $a, b \in Im\ \varphi \Longrightarrow a = \varphi(g), = \varphi(g')$

$$ab = \varphi(g)\varphi(g') = \varphi(gg') \Longrightarrow ab \in Im\ \varphi$$

Далее, пусть $a \in Ker\ \varphi$ □

Теорема. (Критерий инъективности гомоморфизма)
$\varphi : G \longrightarrow H$ – гомоморфизм. Тогда φ – инъекция $\Longleftrightarrow Ker\ \varphi = \{e\}$.

Доказательство. $\Longrightarrow$ очевидно.
$\Longleftarrow$ От противного: пусть φ – не инъекция. Тогда $\exists x \neq y :\ \varphi(x) = \varphi(y)$.

$$\underbrace{\varphi(x)}_{\varphi(xy^{-1})}\ \varphi^{-1}(y) = \varphi(y)\varphi^{-1}(y = e) \Longrightarrow \underbrace{xy^{-1}}_{\neq e} \in Ker\ \varphi$$

□

Определение. Степень $g \in G :\ n \in \mathbb{N}\ g^n = \underbrace{g \cdot ... \cdot g}_{n}$ и $g^{-n} = \underbrace{g^{-1} \cdot ... \cdot g^{-1}}_{n}$, ну и $g^0 = e$

Свойства:

- $g^a \cdot g^b = g^{a+b},\ g \in G$
- $(g^a)^b = g^{ab},\ a, b \in \mathbb{Z}$

Определение. $ord(g) = \begin{cases} min\ n\ \in \mathbb{N}:\ g^m = e \text{ если } \exists \\ \infty \text{ иначе} \end{cases}$

Определение. Группа G называется *циклической* (порожденной элементом g), если $G = \{e, g, g^{-1}, g^2, g^{-2}, ...\}$ и обозначается $G = \langle g \rangle$

Теорема. (О классификации циклических групп)
Пусть $G = \langle g \rangle$. Тогда если $ord\ g = \infty$, то $G \cong \mathbb{Z}$, а если $ord\ g = n$,то $G \cong \mathbb{Z}_n$.

Доказательство. Пусть $ord\ g = \infty$. Рассмотрим $\varphi : \mathbb{Z} \longrightarrow G$, т.е. $k \to g^k$.

$$\varphi(k_1 + k_2) = g^{k_1+k_2} = g^{k_1} \cdot g^{k_2} = \varphi(k_1) \cdot \varphi(k_2) \Longrightarrow \varphi - \text{гомоморфизм.}$$

φ – сюръекция по определению. Докажем инъективность.

$$Ker\ \varphi = \{k \in \mathbb{Z} \mid \underbrace{\varphi(k)}_{g^k} = e\}$$

Если φ – не инъективно, то $Ker\ \varphi \neq \{0\} \Longrightarrow k \neq 0 :\ \ g^k = e$. Тогда $g^{-k} = (g^k)^{-1} = e$. Т.е. либо $k \geq 0$, либо $-k > 0$.
Теперь пусть порядок $ord\ g = n$. Рассмотрим ту же функцию φ. Доопределим классы эквивалентности: $g^{\overline{k}} = g^k$. Тогда $g(\overline{k}) = g^{\overline{k}}$, но нужно проверить корректность:

$$k \equiv k'(mod\ n) \overset{?}{\Longrightarrow} g^k = g^{k'}$$

$$\text{ББО } k > k' \Longrightarrow k - k' = m \cdot n \Longrightarrow g^k = g^{k'+mn} = g^{k'} \cdot (\underbrace{g^n}_{e})^m = g^{k'}$$

$$\varphi(\overline{k_1} + \overline{k_2}) = g^{k_1+k_2} = g^{\overline{k_1}} g^{\overline{k_2}} \Longrightarrow \varphi - \text{ гомоморфизм.}$$

Далее, $\begin{cases} g^{n+1} = g \\ g^{n+2} = g^2 \\ \vdots \\ g^{-1} = g^{n-1} \end{cases} \Longrightarrow G = \{e, g, ..., g^{n-1}\} \Longrightarrow \varphi -$ сюръективно. $g^m = g^s \Longrightarrow g^{m-s} = e$, где $n > m > s \geq 0 \Longrightarrow n > m - s \geq 0$ противоречие с $ord\ g = n$ $\square$

Следствие. 1. $|G| = ord\ g$

2. Если $ord\ g = \infty$, то $G = \{e, g, g^{-1}, ...\}$, а если $ord\ g = n$, то $G = \{e, g, ..., g^{n-1}\}$