Ejercicios Investigación de Operaciones IV

Estefania Cassingena 25.093.409

$\boxed{16.5-5}$ Considere el siguiente problema de inventario de sangre al que se enfrenta un hospital. Se tiene necesidad de un tipo raro de sangre, como AB, Rh negativo. La demanda D (en pintas) durante un periodo de tres días está dada por:

$$P\{D=0\}=0.4 \qquad P\{D=1\}=0.3$$

$$P\{D=2\}=0.2 \qquad P\{D=3\}=0.1$$

- Observe que la demanda esperada es de una pinta, puesto que $E(D)=0.3(1)+0.2(2)+0.1(3)=1$. Suponga que se surte de sangre cada tres días. El hospital propone una política para recibir una pinta en cada entrega y usar primero la más antigua. Si se requiere más sangre de la que hay en el banco se hace un pedido de emergencia a un alto costo. La sangre se descarta si en 21 días no se ha usado.
- Denote el estado del sistema como el número de pintas en inventario exactamente después de una entrega. Observe que debido a la política de descartar la sangre, el estado más grande posible es 7.

(a) Construya la matriz de transición (de un paso) para esta cadena de Markov.

- Sea X_n el número de pintas de AB Rh negativo que el hospital tiene en el n-ésimo periodo de 3 días, exactamente después de la entrega.

- El conjunto de estados posibles para $\{X_n\}$ es $S = \{1,2,3,4,5,6,7\}$
- 0 no es un estado porque la política del hospital establece que se debe recibir una pinta en cada entrega y X_n se toma luego de la entrega.

La Matriz de Transición Correspondiente es:

$$P = \begin{array}{c} \text{Estado} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.6 & 0.4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.3 & 0.3 & 0.4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0.4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0.4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0.4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0.2 & 0.7 \end{bmatrix} \end{array}$$

- Las filas de la matriz de transición suman 1.
- Las probabilidades están determinadas por la demanda durante el periodo de 3 días.

(b) Encuentre las probabilidades de estado estable para los estados de esta cadena de Markov.

El vector de probabilidades de estado estable se define como:

$$\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_5, \pi_6, \pi_7)$$

y satisface el sistema de ecuaciones:

$$\pi P = \pi \qquad \text{con} \quad \sum_{i=1}^{7} \pi_i = 1$$

Es decir:

$$\begin{pmatrix} \pi_1 & \pi_2 & \pi_3 & \pi_4 & \pi_5 & \pi_6 & \pi_7 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 0.6 & 0.4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.3 & 0.3 & 0.4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0.4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0.4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0.4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0.2 & 0.7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \pi_3 \\ \pi_4 \\ \pi_5 \\ \pi_6 \\ \pi_7 \end{bmatrix}$$

Sistema de ecuaciones:

$$
\begin{cases}
0.6\pi_1 + 0.3\pi_2 + 0.1\pi_3 = \pi_1 \\
0.4\pi_1 + 0.3\pi_2 + 0.2\pi_3 + 0.1\pi_4 = \pi_2 \\
0.4\pi_2 + 0.3\pi_3 + 0.2\pi_4 + 0.1\pi_5 = \pi_3 \\
0.4\pi_3 + 0.3\pi_4 + 0.2\pi_5 + 0.1\pi_6 = \pi_4 \\
0.4\pi_4 + 0.3\pi_5 + 0.2\pi_6 + 0.1\pi_7 = \pi_5 \\
0.4\pi_5 + 0.3\pi_6 + 0.2\pi_7 = \pi_6 \\
0.4\pi_6 + 0.7\pi_7 = \pi_7 \\
\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 + \pi_5 + \pi_6 + \pi_7 = 0
\end{cases}
$$

Se incluye la la ecuación:

$$\sum_{i=1}^{7} \pi_i = 1$$

Si despejamos el lado derecho para igualar las ecuaciones a cero:

$$
\begin{cases}
-0.4\pi_1 + 0.3\pi_2 + 0.1\pi_3 = 0 \\
0.4\pi_1 - 0.7\pi_2 + 0.2\pi_3 + 0.1\pi_4 = 0 \\
0.4\pi_2 - 0.7\pi_3 + 0.2\pi_4 + 0.1\pi_5 = 0 \\
0.4\pi_3 - 0.7\pi_4 + 0.2\pi_5 + 0.1\pi_6 = 0 \\
0.4\pi_4 - 0.7\pi_5 + 0.2\pi_6 + 0.1\pi_7 = 0 \\
0.4\pi_5 - 0.7\pi_6 + 0.2\pi_7 = 0 \\
0.4\pi_6 - 0.3\pi_7 = 0 \\
\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 + \pi_5 + \pi_6 + \pi_7 = 1
\end{cases}
$$

Se incluye la la ecuación

$$\sum_{i=1}^{7} \pi_i = 1$$

En el sistema.

El sistema de ecuaciones se resolvió en Google Colab ommitiendo uma de las ecuaciones redumdantes. Se obtuvo un sistema con 7 ecuaciones y 7 incógnitas.

A partir de los resultados obtenidos en Python para el sistema de ecuaciones:

$\pi_1 = 0.139$

$\pi_2 = 0.139$

$\pi_3 = 0.139$

$\pi_4 = 0.139$

$\pi_5 = 0.141$

$\pi_6 = 0.130$

$\pi_7 = 0.174$

(c) Use los resultados de (b) para encontrar la probabilidad de estado estable en caso de que sea necesario descartar una pinta durante un periodo de 3 días. (Sugerencia: si se usa primero la sangre más vieja, una pinta tiene sólo 21 días solo si el estado es 7 y entonces D=0).

$$P(\text{descartar sangre}) = \pi_7 \cdot P\{D=0\}$$

$$= (0.174) \cdot 0.4$$

$$= 0.0696$$

(d) Utilice los resultados de (b) para encontrar la probabilidad de estado de que se necesite una entrega de emergencia durante los tres días entre entregas normales.

En cualquier periodo n, se necesitará una entrega de emergencia si $X_n = 1$ y la demanda es 2 o 3, o si $X_n = 2$ y la demanda es 3.

$$P\{\text{entrega de emergencia}\} = \pi_1 \cdot [P\{D=2\} + P\{D=3\}] + \pi_2 \cdot [P\{D=3\}]$$

$$= (0.139)\cdot(0.3) + (0.139)\cdot(0.1)$$

$$= 0.0417 + 0.0139$$

$$= 0.0556$$

Ejercicio 16.6-4

Considere el ejemplo de inventarios de la sección 16.1 pero ahora la demanda tiene la siguiente distribución de probabilidad:

$$P\{D=0\}=\frac{1}{4} \qquad P\{D=2\}=\frac{1}{4}$$

$$P\{D=1\}=\frac{1}{2} \qquad P\{D\geq 3\}=0$$

La política de órdenes cambia al ordenar exactamente dos cámaras al final de la semana si el inventario es cero. Como antes, no se ordena si hay cámaras en inventario. Suponga que se tiene una cámara (al final de la semana) cuando se instituye la política.

(a) Construya la matriz de transición (de un paso)

Los estados posibles de la tienda son:

$$X_{t+1} = \begin{cases} \max\{2-D_{t+1},0\} & \text{si } X_t=0 \\ \max\{X_t-D_{t+1},0\} & \text{si } X_t\geq 1. \end{cases}$$

La matriz de transición de un paso es:

$$P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 3/4 & 1/4 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \end{bmatrix} \end{array}$$

(b) Encuentre la distribución de probabilidad del estado de esta cadena de Markov n semanas después de instituir la nueva política de inventarios, para $n = 2, 5, 10$.

Para $n=2$ (usando decimales)

$$P^{(2)} = P^2 = \begin{bmatrix} 0.25 & 0.5 & 0.25 \\ 0.75 & 0.25 & 0 \\ 0.25 & 0.5 & 0.25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.25 & 0.5 & 0.25 \\ 0.75 & 0.25 & 0 \\ 0.25 & 0.5 & 0.25 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.5 & 0.375 & 0.125 \\ 0.375 & 0.438 & 0.188 \\ 0.5 & 0.375 & 0.125 \end{bmatrix}$$

Para $n=5$:

Inicialmente podemos calcular $P^{(4)}$ ya que $P^{(4)} = P^{(2)} \cdot P^{(2)}$

$$P^{(4)} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.375 & 0.125 \\ 0.375 & 0.488 & 0.188 \\ 0.5 & 0.375 & 0.125 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.5 & 0.375 & 0.125 \\ 0.375 & 0.488 & 0.188 \\ 0.5 & 0.375 & 0.125 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.453 & 0.398 & 0.148 \\ 0.445 & 0.402 & 0.152 \\ 0.453 & 0.398 & 0.148 \end{bmatrix}$$

Luego $P^{(5)} = P^{(4)} \cdot P$:

$$P^{(5)} = \begin{bmatrix} 0.453 & 0.398 & 0.148 \\ 0.445 & 0.402 & 0.152 \\ 0.453 & 0.398 & 0.148 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.25 & 0.5 & 0.25 \\ 0.75 & 0.25 & 0 \\ 0.25 & 0.5 & 0.25 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.449 & 0.400 & 0.150 \\ 0.451 & 0.399 & 0.149 \\ 0.449 & 0.400 & 0.150 \end{bmatrix}$$

Para $n = 10$:

$$P^{(10)} = P^{(5)} \cdot P^{(5)} = \begin{bmatrix} 0.449 & 0.4 & 0.15 \\ 0.451 & 0.399 & 0.149 \\ 0.449 & 0.4 & 0.15 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.449 & 0.4 & 0.15 \\ 0.451 & 0.399 & 0.149 \\ 0.449 & 0.4 & 0.15 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.45 & 0.4 & 0.15 \\ 0.45 & 0.4 & 0.15 \\ 0.45 & 0.4 & 0.15 \end{bmatrix}$$

(c) Encuentre las μ_{ij} (el tiempo esperado de la primera pasada del estado i al j) para toda i y j.

$$\mu_{ij} = 1 + \sum_{k \neq j} P_{ik} \mu_{kj}$$

Para $j = 0$

Luego:

- $\mu_{00} = 1 + 0.5\mu_{10} + 0.25\mu_{20}$
- $\mu_{10} = 1 + 0.25\mu_{10}$
- $\mu_{20} = 1 + 0.5\mu_{10} + 0.25\mu_{20}$

Despejando:

$\mu_{10} = 1 + 0.25\mu_{10}$

$0.75\mu_{10} = 1$

$\mu_{10} = \dfrac{1}{0.75} = \dfrac{1}{\frac{3}{4}} = \dfrac{4}{3}$ $\boxed{\mu_{10} = 4/3}$

- Despejar μ_{20}:

$$\mu_{20} = 1 + 0.5\,\mu_{10} + 0.25\,\mu_{20}$$

$$0.75\,\mu_{20} = 1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}$$ sustituyendo μ_{10}

$$\frac{3}{4}\,\mu_{20} = 1 + \frac{4}{6}$$

$$\frac{3}{4}\,\mu_{20} = \frac{6+4}{6}$$

$$\frac{3}{4}\,\mu_{20} = \frac{10}{6}$$

$$18\,\mu_{20} = 40$$

$$\mu_{20} = \frac{40}{18}$$

$$\mu_{20} = \frac{20}{9} \quad \leftarrow \quad \boxed{\mu_{20} = \frac{20}{9}}$$

- Despejar μ_{00}:

$$\mu_{00} = 1 + 0.5\left(\frac{4}{3}\right) + 0.25\left(\frac{20}{9}\right)$$

$$\mu_{00} = 1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3} + \frac{1}{4}\cdot\frac{20}{9}$$

$$\mu_{00} = 1 + \frac{4}{6} + \frac{20}{36}$$

$$\mu_{00} = \frac{36+24+20}{36} = \frac{80}{36} = \frac{20}{9} \quad \leftarrow \quad \boxed{\mu_{00} = \frac{20}{9}}$$

Para $j=1$:

$$\begin{cases} \mu_{01} = 1 + 0.25\mu_{01} + 0.25\mu_{21} & (1) \\ \mu_{11} = 1 + 0.75\mu_{01} & (2) \\ \mu_{21} = 1 + 0.25\mu_{01} + 0.25\mu_{21} & (3) \end{cases}$$

A partir (1):

- $\mu_{01} = 1 + 0.25\mu_{01} + 0.25\mu_{21}$

$$\mu_{01} = 1 + \frac{1}{4}\mu_{01} + \frac{1}{4}\mu_{21}$$

$$\left(1 - \frac{1}{4}\right)\mu_{01} = 1 + \frac{1}{4}\mu_{21}$$

$$\frac{3}{4}\mu_{01} = 1 + \frac{1}{4}\mu_{21}$$

$$\frac{4}{3}\cdot\left(\frac{3}{4}\mu_{01}\right) = \frac{4}{3}\left(1 + \frac{1}{4}\mu_{21}\right)$$

$$\mu_{01} = \frac{4}{3} + \frac{\cancel{4}}{3}\cdot\frac{1}{\cancel{4}}\mu_{21}$$

$$\boxed{\mu_{01} = \frac{4}{3} + \frac{1}{3}\mu_{21}} \quad (*)$$

Sustituyendo $(*)$ en (3):

$$\mu_{21} = 1 + 0.25\mu_{01} + 0.25\mu_{21}$$

$$\mu_{21} = 1 + \frac{1}{4}\left(\frac{4}{3} + \frac{1}{3}\mu_{21}\right) + \frac{1}{4}\mu_{21}$$

$$\mu_{21} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{12}\mu_{21} + \frac{1}{4}\mu_{21}$$

$$\mu_{21} = \frac{4}{3} + \frac{1}{3}\mu_{21}$$

$$\left(1 - \frac{1}{3}\right)\mu_{21} = \frac{4}{3}$$

$$\frac{2}{\cancel{3}}\mu_{21} = \frac{4}{\cancel{3}}$$

$$2\mu_{21} = 4$$

$$\boxed{\mu_{21} = 2} \leftarrow$$

Para obtener μ_{01} con (*)

$$\mu_{01} = \frac{4}{3} + \frac{1}{3}\mu_{21} = \frac{4}{3} + \frac{1}{3}\cdot 2 = \frac{4}{3} + \frac{2}{3} = \frac{6}{3} = 2$$

$$\boxed{\mu_{01} = 2} \leftarrow$$

y para μ_{11}:

$$\mu_{11} = 1 + \frac{3}{4}\mu_{01} = 1 + \frac{3}{\cancel{4}}\cdot\cancel{2} = 1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$$

$$\boxed{\mu_{11} = \frac{5}{2}} \leftarrow$$

Para $j=2$:

$$\begin{cases} \mu_{02} = 1 + 0.25\mu_{02} + 0.5\mu_{12} & (1) \\ \mu_{12} = 1 + 0.75\mu_{02} + 0.25\mu_{12} & (2) \\ \mu_{22} = 1 + 0.25\mu_{02} + 0.5\mu_{12} & (3) \end{cases}$$

A partir de (1):

$$\mu_{02} = 1 + 0.25\mu_{02} + 0.5\mu_{12}$$

$$\mu_{02} = 1 + \frac{1}{4}\mu_{02} + \frac{1}{2}\mu_{12}$$

$$\left(1 - \frac{1}{4}\right)\mu_{02} = 1 + \frac{1}{2}\mu_{12}$$

$$\frac{3}{4}\mu_{02} = 1 + \frac{1}{2}\mu_{12}$$

$$\frac{4}{3}\left(\frac{3}{4}\mu_{02}\right) = \frac{4}{3} + \frac{\cancel{4}}{3}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}\mu_{12}$$

$$\boxed{\mu_{02} = \frac{4}{3} + \frac{2}{3}\mu_{12}} \quad (*)$$

Sustituyendo $(*)$ en (3):

$$\mu_{12} = 1 + \frac{3}{4}\left(\frac{4}{3} + \frac{2}{3}\mu_{12}\right) + \frac{1}{4}\mu_{12}$$

$$\mu_{12} = 1 + 1 + \frac{6}{12}\mu_{12} + \frac{1}{4}\mu_{12}$$

$$\mu_{12} = 2 + \frac{1}{2}\mu_{12} + \frac{1}{4}\mu_{12}$$

$$\mu_{12} = 2 + \frac{3}{4}\mu_{12}$$

$$\frac{1}{4}\mu_{12} = 2$$

$$\boxed{\mu_{12} = 8} \leftarrow$$

Sustituyendo μ_{12} en (*):

$$\mu_{02} = \frac{4}{3} + \frac{2}{3}\mu_{12} = \frac{4}{3} + \frac{2}{3}(8) = \frac{4}{3} + \frac{16}{3} = \frac{20}{3}$$

$$\boxed{\mu_{02} = \frac{20}{3}} \leftarrow$$

Reemplazando Valores en (3):

$$\mu_{22} = 1 + 0.25\mu_{02} + 0.5\mu_{12}$$

$$\mu_{22} = 1 + \frac{1}{\cancel{4}}\left(\frac{\cancel{20}}{3}\right) + \frac{1}{2}(8)$$

$$\mu_{22} = 1 + \frac{5}{3} + 4$$

$$\boxed{\mu_{22} = \frac{20}{3}} \leftarrow$$

(d) Encuentre las probabilidades de estado estable del estado de esta cadena de Markov.

$$\pi P = \pi \quad \text{con} \quad \sum_{i=0}^{2} \pi_i = 1$$

$$\begin{bmatrix} \pi_0 & \pi_1 & \pi_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.25 & 0.5 & 0.25 \\ 0.75 & 0.25 & 0 \\ 0.25 & 0.5 & 0.25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi_0 \\ \pi_1 \\ \pi_2 \end{bmatrix}$$

Se obtiene el sistema:

$$\begin{cases} 0.25\pi_0 + 0.75\pi_1 + 0.25\pi_2 = \pi_0 & (1) \\ 0.5\pi_0 + 0.25\pi_1 + 0.5\pi_2 = \pi_1 & (2) \\ 0.25\pi_0 + 0\pi_1 + 0.25\pi_2 = \pi_2 & (3) \\ \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 1 \end{cases}$$

Para encontrar la ecuación redundante, sumamos (1) y (2) con su lado derecho igual a 0.

$$-0.75\pi_0 + \cancel{0.75\pi_1} + 0.25\pi_2 = 0$$

$$0.5\pi_0 - \cancel{0.75\pi_1} + 0.5\pi_2 = 0$$

$$-0.25\pi_0 + 0.75\pi_2 = 0 \quad (*)$$

y si igualamos el lado derecho de (3) a 0, obtenemos un múltiplo de (*):

$$0.25\pi_0 + 0.25\pi_2 = \pi_2$$

$$0.25\pi_0 - 0.75\pi_2 = 0 \quad (**)$$

Así que (3) es redundante

Reescribiendo el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 0.25\pi_0 + 0.75\pi_1 + 0.25\pi_2 = \pi_0 \\ 0.5\pi_0 + 0.25\pi_1 + 0.5\pi_2 = \pi_1 \\ \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 1 \end{cases}$$

Despejando para que el lado derecho de cada ecuación sea 0:

$$\begin{cases} -0.75\pi_0 + 0.75\pi_1 + 0.25\pi_2 = 0 & (1) \\ 0.5\pi_0 - 0.75\pi_1 + 0.5\pi_2 = 0 & (2) \\ \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 1 & (3) \end{cases}$$

Despejando π_0 de (3)

$$\boxed{\pi_0 = 1 - \pi_1 - \pi_2}$$

Sustituir π_0 en (1):

$$-0.75(1 - \pi_1 - \pi_2) + 0.75\pi_1 + 0.25\pi_2 = 0$$

$$-0.75 + 0.75\pi_1 + 0.75\pi_2 + 0.75\pi_1 + 0.25\pi_2 = 0$$

$$\boxed{-0.75 + 1.5\pi_1 + \pi_2 = 0} \quad (a)$$

Sustituir π_0 en (2):

$$0.5(1 - \pi_1 - \pi_2) - 0.75\pi_1 + 0.5\pi_2 = 0$$

$$0.5 - 0.5\pi_1 - 0.5\pi_2 - 0.75\pi_1 + 0.5\pi_2 = 0$$

$$0.5 - 1.25\pi_1 = 0$$

$$-1.25\pi_1 = -0.5$$

$$\pi_1 = \frac{-0.5}{-1.25}$$

$$\boxed{\pi_1 = 0.4}$$

Reemplazando π_1 en (a):

$$-0.75 + 1.5\pi_1 + \pi_2 = 0$$

$$\pi_2 = -1.5\pi_1 + 0.75$$

$$\pi_2 = -1.5(0.4) + 0.75$$

$$\boxed{\pi_2 = 0.15}$$

Para π_0:

$$\pi_0 = 1 - \pi_1 - \pi_2$$

$$\pi_0 = 1 - 0.4 - 0.15$$

$$\boxed{\pi_0 = 0.45}$$

El vector resultante es:

$$\boxed{(\pi_0, \pi_1, \pi_2) = (0.45, 0.4, 0.15)}$$

(e) Bajo el supuesto de que la tienda paga un costo de almacenamiento por cada cámara que queda en la repisa al final de la semana, de acuerdo con la funcion $C(0)=0$, $C(1)=\$2$ y $C(2)=\$8$

- Encuentre el costo promedio de almacenamiento a largo plazo por semana.

- $\text{Costo} = 0 \cdot 0.45 + 2 \cdot 0.4 + 8 \cdot 0.15$

(La suma de cada costo por cada probabilidad de estado estable)

$$\boxed{\text{Costo} = 2}$$

Por lo tanto, el costo promedio de almacenamiento a largo plazo por semana es \$2.