Universidad de Carabobo
Facultad Experimental de Ciencias y Tecnología
Departamento de Matemáticas
Investigación de Operaciones IV

Cadenas de Markov

Estefania
Profesora Nathylyn Mendoza

Cadenas de Markov (informe creado por Estefania)

Definición de Cadena de Markov

Una Cadena de Markov es un proceso probabilístico cuyo estado evoluciona a medida que transcurre el tiempo. Este tipo de proceso probabilístico se denomina “proceso estocástico”. En una Cadena de Markov se tienen varias alternativas posibles para la evolución del proceso y se debe crear un modelo que tome en cuenta estas alternativas y las probabilidades de realizar transiciones de un estado a otro. La característica principal de una Cadena de Markov es que la probabilidad de realizar una transición a un nuevo estado no depende de los estados previos en los cuales ha estado el proceso. Solo depende de su estado actual (Hillier & Lieberman, 2010).

De acuerdo con Mahfuz (2021), el algoritmo usado por Google para determinar la importancia de una página web y por consiguiente, su puesto en los resultados de su motor de búsqueda está basado en el uso de Cadenas de Markov. Además, las cadenas de Markov son usadas para crear modelos probabilísticos para predecir el clima. Hillier y Lieberman también mencionan que se usan para clasificar clientes, para analizar secuencias de ADN y redes genéticas y para estimar demanda y créditos.

Procesos Estocásticos

Un proceso estocástico es un proceso probabilístico representado a través de una colección de variables aleatorias que representan el estado de un proceso en un momento dado **t**. Estas variables aleatorias representan una característica que se desea estudiar o analizar.

Podemos representar el modelo matemático de una Cadena de Markov de la siguiente forma:

$$\{X_t\} = \{X_0, X_1, X_2, ..., X_M\}$$

Donde X_t representa el estado del proceso en el momento t = 0, 1, 2, …. A medida que transcurre el tiempo, el estado del proceso puede cambiar. Esto se representa con las variables aleatorias indexadas. Su índice representa un estado posible del sistema. En este informe se presentan Cadenas de Markov con un número finito de estados denotamos con 0, 1, 2, …, M.

Al cambio de estado de una Cadena de Markov se le denomina “transición”. Esta transición es probabilística ya que el proceso puede tener varias alternativas para realizar una transición y el resultado final se decide de forma probabilística. Cada posible transición tiene una probabilidad asociada.

Cadenas de Markov (informe creado por Estefania)

En un proceso, el tiempo puede ser representado como discreto o continuo. Este informe se enfocará en procesos con tiempo discreto y se hará una mención breve de procesos con tiempo continuo. En procesos con tiempo discreto, t solo puede tomar valores enteros positivos denotados con $t = 0, 1, 2, \ldots, M$.

Por lo tanto, en este informe se presentarán cadenas de Markov de procesos estocásticos de tiempo discreto con espacio de estados finitos.

Ejemplo del Clima

En el ejemplo del clima de la página 674 del libro, se describe un proceso estocástico de predicción del clima en el pueblo de Centerville. Se describen únicamente dos estados: seco y lluvioso. Además, se indica que la probabilidad de que mañana esté seco es de 0.8 si hoy está seco. Esta probabilidad es de 0.6 si hoy el día está lluvioso.

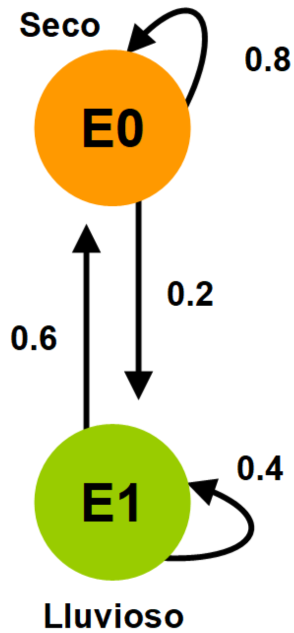
En este modelo, el valor de X_t es 0 o 1. Estos valores representan el estado “seco” (0) y “lluvioso” (1). Sin embargo, el valor de t (el subíndice de la variable aleatoria) puede tomar valores $t = 0, 1, 2, \ldots$ ya que t se refiere al día que se está analizando.

De acuerdo a la descripción del escenario, la probabilidad de una transición de estado 0 a 0 (seco a seco) de un día a otro es 0.8. Por lo tanto, podemos inferir que la probabilidad de un cambio de estado de 0 a 1 (seco a lluvioso) es de 0.2 ya que la probabilidad de que el clima esté seco o lluvioso debe ser 1.

Igualmente, la transición de 1 a 0 (lluvioso a seco) tiene una probabilidad de 0.6 según el enunciado, así que podemos inferir que la probabilidad de una transición de 1 a 1 (lluvioso a lluvioso) sería de 0.4.

En el siguiente diagrama se representa el proceso estocástico como un grafo dirigido que posee dos nodos los cuales representan los estados seco y lluvioso y los arcos representan las transiciones entre los estados. Los pesos de los arcos son las probabilidades de que ocurran dichas transiciones.

Cadenas de Markov (informe creado por Estefania)



Ejemplo de Inventarios

Este ejemplo de inventarios ilustra un proceso estocástico que se requiere analizar en la tienda de fotografía de Dave. Específicamente, se quiere analizar el inventario de un modelo especial de cámaras con el fin de predecir el número de cámaras disponibles al final de cada semana.

En este caso, la variable aleatoria X_t representa el número de cámaras disponibles al final de la semana t, iniciando con la semana 0. La variable aleatoria D_t representa la demanda teórica de cámaras durante la semana t si el inventario nunca se agotase. Se supone que las D_t son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas que tienen una distribución Poisson con media de 1.

Nos piden suponer que $X_0 = 3$, así que al comenzar la primera semana del análisis, la tienda de Dave cuenta con 3 cámaras especiales en el inventario.

Cadenas de Markov (informe creado por Estefania)

Dave quiere analizar su política actual de pedidos. Actualmente hace los pedidos el sábado en la noche y le entregan la mercancía el lunes en la mañana.

Esta es su política de pedidos:

Si $X_t = 0$, ordena 3 cámaras.
Si $X_t > 0$, no ordena ninguna cámara.

Por lo tanto, si no quedan cámaras al final de la semana, Dave hace un pedido de 3 cámaras pero si queda una o más cámaras, no ordena ninguna cámara. Los estados posibles del sistema son 0, 1, 2, o 3 porque el máximo número de cámaras en cualquier momento es de 3 cámaras. Estas variables aleatorias son dependientes.

Podemos representarlas con la siguiente expresión según Hillier y Lieberman (2010):

$$X_t +_1 \begin{cases} \text{máx}\{3 - D_{t+1}, 0\} & \text{si} \quad X_t = 0 \\ \text{máx}\{X_t - D_{t+1}, 0\} & \text{si} \quad X_t \geq 1, \end{cases}$$

para $t = 0, 1, 2, \ldots$

Introducción a las Cadenas de Markov

Para realizar cálculos probabilísticos, asumimos algo muy importante sobre la distribución conjunta de las variables aleatorias X_t que caracteriza a una Cadena de Markov, la **propiedad markoviana**. Esta propiedad establece que la probabilidad de eventos futuros no depende de eventos que hayan ocurrido en el pasado. Solo depende del estado actual del proceso.

Formalmente, según Hillier y Lieberman (2010):

Se dice que un proceso estocástico $\{X_t\}$ tiene la **propiedad markoviana** si $P\{X_{t+1} = j | X_0 = k_0, X_1 = k_1, \ldots, X_{t-1} = k_{t-1}, X_t = i\} = P\{X_{t+1} = j | X_t = i\}$, para $t = 0, 1, \ldots$ y toda sucesión $i, j, k_0, k_1, \ldots, k_{t-1}$.

Cadenas de Markov (informe creado por Estefania)

También existen otros conceptos probabilísticos relacionados con las Cadenas de Markov. Las **probabilidades de transición** son las probabilidades condicionales:

$$\boxed{P\{X_{t+1} = j | X_t = i\}}$$

Es decir, la probabilidad de que el próximo estado en el tiempo t+1 sea j si actualmente en el tiempo t el estado es i.

Las probabilidades de transición de un paso son **estacionarias** si no cambian con el tiempo. Es decir, si para cada i y j, se cumple que:

$$\boxed{P\{X_{t+1} = j | X_t = i\} = P\{X_1 = j | X_0 = i\}, \quad \text{para toda } t = 1, 2, \ldots,}$$

La interpretación de esta condición es que para cualquier tiempo t y t+1, la probabilidad de transición entre los estados i y j es la misma probabilidad de la transición entre ambos estados en los tiempos 0 y 1.

Además, también el concepto de probabilidades de transición de un paso implica que existen **probabilidades de transición de n pasos**.

Para cada i, j, y n (con n = 0, 1, 2, …) se cumple que:

$$\boxed{P\{X_{t+n} = j | X_t = i\} = P\{X_n = j | X_0 = i\}}$$

Es decir, la probabilidad de transición entre los estados i y j entre el tiempo 0 y n es la misma probabilidad de transición entre los estados i y j en los tiempos t y t+n. Por eso se denomina “de n pasos”, porque transcurren n periodos discretos de tiempo antes del evento específico de transición.

Esto representa la probabilidad de que el proceso se encuentre en el estado j después de n pasos si comienza en el estado i.

Cadenas de Markov (informe creado por Estefania)

Esta es la notación usada para representar la probabilidad condicional de n pasos según Hillier y Lieberman (2010):

$$\boxed{\begin{aligned} p_{ij} &= P\{X_{t+1} = j \mid X_t = i\}, \\ p_{ij}^{(n)} &= P\{X_{t+n} = j \mid X_t = i\}. \end{aligned}}$$

Si solo nos referimos a un paso, no se escribe el superíndice.

Condiciones de las Probabilidades de n Pasos

Las probabilidades deben satisfacer las siguientes condiciones:

Condición 1: todas las probabilidades de n pasos deben ser positivas.

$$p_{ij}^{(n)} \geq 0, \qquad \text{para toda } i \text{ y } j;\ n = 0, 1, 2, \ldots,$$

Condición 2: la suma de todas las probabilidades de n pasos debe ser 1.

$$\sum_{j=0}^{M} p_{ij}^{(n)} = 1 \qquad \text{para toda } i;\ n = 0, 1, 2, \ldots$$

Matriz de Transición de n Pasos

Una forma útil de representar las probabilidades de transición de n pasos es usar una matriz cuyas entradas son las probabilidades de transición de n pasos entre el estado de la fila y el estado de la columna. Cada fila y cada columna representa un estado posible del proceso.

$$\mathbf{P}^{(n)} = \begin{array}{c} \text{Estado} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ M \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 0 & 1 & \cdots & M \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc} p_{00}^{(n)} & p_{01}^{(n)} & \cdots & p_{0M}^{(n)} \\ p_{10}^{(n)} & p_{11}^{(n)} & \cdots & p_{1M}^{(n)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{M0}^{(n)} & p_{M1}^{(n)} & & p_{MM}^{(n)} \end{array}\right] \end{array}$$

Si solo nos referimos a un paso, no se escribe el superíndice y esta matriz se denomina **Matriz de Transición**.

Suposiciones para el Estudio de Cadenas de Markov

Para el estudio analítico de las Cadenas de Markov, supondremos que el sistema tiene:

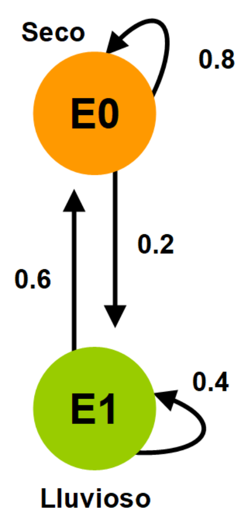
- Un número finito de estados.
- Probabilidades de transición estacionarias (es decir, no cambian con el tiempo).
- Probabilidades iniciales conocidas $P\{X_0 = i\}$ para todo i.

Formulación del ejemplo del clima como una cadena de Markov

A partir de los conceptos explicados previamente, podemos expandir el ejemplo del clima en Centerville y representarlo matemáticamente como una Cadena de Markov.

Sabemos que:

- Tenemos dos posibles estados para un día t: seco y lluvioso, representados por 0 y 1.
- Como es una Cadena de Markov, cumple la propiedad markoviana, así que la probabilidad de eventos futuros no depende de eventos que hayan ocurrido pasado. Solo del estado actual del sistema.
- Las probabilidades de transición estacionarias se representan en el siguiente diagrama. Las probabilidades que no se mencionan en el enunciado se determinan a partir de la propiedad que establece que la suma de todas las probabilidades de transición de un estado específico debe ser 1.



Estos resultados nos llevan a representar las probabilidades en una matriz de transición. En este caso se denomina matriz de transición porque sólo consideramos un paso.

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c} \text{Estado} \\ 0 \\ 1 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} 0 & 1 \end{array} \\ \begin{bmatrix} p_{00} & p_{01} \\ p_{10} & p_{11} \end{bmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \text{Estado} \\ 0 \\ 1 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} 0 & 1 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.6 & 0.4 \end{bmatrix} \end{array}$$

En esta matriz tenemos la probabilidad de transición de un estado a otro. Del estado de la fila al estado de la columna. Por ejemplo, la probabilidad de transición del estado 0 (seco) al estado lluvioso (lluvioso) es 0.2. Así mismo, la probabilidad de transición del estado 0 (seco) al estado 0 (seco) es 0.8.

Podemos observar que las probabilidades de cada fila suman 1, así que los valores de cada fila de la matriz de transición suman 1.

Formulación del ejemplo de inventarios como una cadena de Markov

También podemos formular el ejemplo de inventarios que vimos al inicio del informe como una Cadena de Markov porque cumple la propiedad markoviana. Cumple esta propiedad porque X_{t+1} (el número de cámaras especiales disponibles al final de la semana t+1) solo depende de la demanda de la semana t+1 y de X_t, el inventario disponible en la semana t.

Así vemos que X_{t+1} no depende de estados anteriores del sistema, solo depende de X_t, el estado actual.

Obtenemos la matriz de transición:

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c} \text{Estado} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} & p_{03} \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{20} & p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{30} & p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix} \end{array}$$

Cadenas de Markov (informe creado por Estefania)

Al realizar los cálculos con la función de probabilidad de la distribución Poisson con media de 1, obtenemos:

$$P\{D_{t+1} = n\} = \frac{(1)^n e^{-1}}{n!}, \qquad \text{para } n = 0, 1, \ldots,$$

Así, se obtiene:

$$\begin{aligned}
&P\{D_{t+1} = 0\} = e^{-1} = 0.368,\\
&P\{D_{t+1} = 1\} = e^{-1} = 0.368,\\
&P\{D_{t+1} = 2\} = \frac{1}{2}e^{-1} = 0.184,\\
&P\{D_{t+1} \geq 3\} = 1 - P\{D_{t+1} \leq 2\} = 1 - (0.368 + 0.368 + 0.184) = 0.080.
\end{aligned}$$

Para encontrar la primera fila de la matriz de transición del estado $X_t = 0$ a un estado X_{t+1}, usamos:

$$X_{t+1} = \text{máx}\{3 - D_{t+1}, 0\} \quad \text{si} \quad X_t = 0.$$

Ya que el sistema se había representado con la siguiente expresión:

$$X_t +_1 \begin{cases} \text{máx}\{3 - D_{t+1}, 0\} & \text{si} \quad X_t = 0 \\ \text{máx}\{X_t - D_{t+1}, 0\} & \text{si} \quad X_t \geq 1, \end{cases}$$

$$\text{para } t = 0, 1, 2, \ldots$$

Por lo tanto, para la transición a $X_{t+1} = 3$, o $X_{t+1} = 2$ o $X_{t+1} = 1$, se obtienen los siguientes resultados si la demanda es 0, 1, o 2 respectivamente:

$$\begin{aligned}
p_{03} &= P\{D_{t+1} = 0\} = 0.368,\\
p_{02} &= P\{D_{t+1} = 1\} = 0.368,\\
p_{01} &= P\{D_{t+1} = 2\} = 0.184.
\end{aligned}$$

Una transición del estado 0 al estado 0 implica que las 3 cámaras se vendieron entre el sábado y el siguiente sábado cuando hay que realizar la orden. Por lo tanto, la demanda D_{t+1} fue de 3 o más cámaras.

$$p_{00} = P\{D_{t+1} \geq 3\} = 0.080.$$

Cadenas de Markov (informe creado por Estefania)

Para las siguientes filas de la matriz de transición se usa la siguiente expresión porque ahora en lugar de tener un número fijo de cámaras para iniciar la semana, el resultado depende del número de cámaras que hay en el inventario al inicio de la semana:

$$\boxed{X_{t+1} = \text{máx } \{X_t - D_{t+1}, 0\} \qquad \text{si} \qquad X_t \geq 1.}$$

Esta expresión implica que el número de cámaras disponibles al final de la siguiente semana t+1 será menor o igual al número de cámaras disponibles al final de la semana t.

De esta forma:

$$\boxed{p_{12} = 0, p_{13} = 0 \text{ y } p_{23} = 0}$$

Para las otras situaciones:

$$\boxed{\begin{aligned}
&p_{11} = P\{D_{t+1} = 0\} = 0.368, \\
&p_{10} = P\{D_{t+1} \geq 1) = 1 - P\{D_{t+1} = 0\} = 0.632, \\
&p_{22} = P\{D_{t+1} = 0\} = 0.368, \\
&p_{21} = P\{D_{t+1} = 1\} = 0.368, \\
&p_{20} = P\{D_{t+1} \geq 2\} = 1 - P\{D_{t+1} \leq 1\} = 1 - (0.368 + 0.368) = 0.264.
\end{aligned}}$$

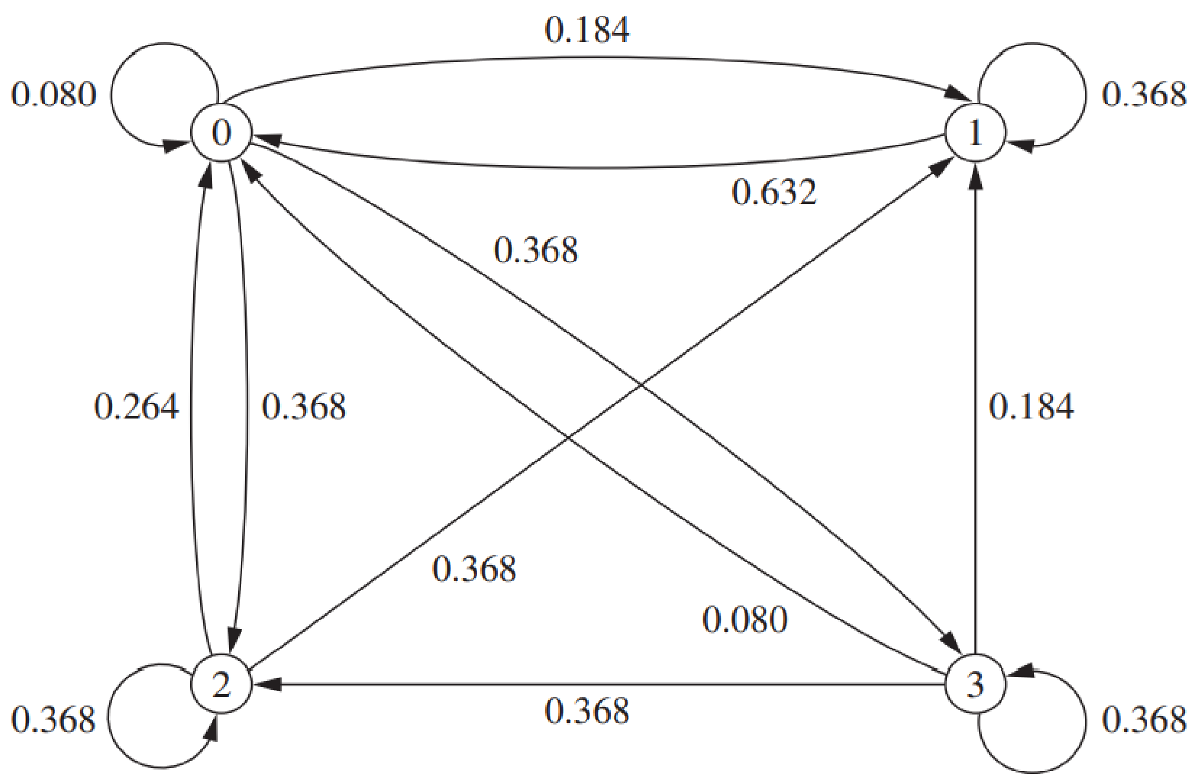
Obtenemos la matriz de transición:

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c} \text{Estado} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.080 & 0.184 & 0.368 & 0.368 \\ 0.632 & 0.368 & 0 & 0 \\ 0.264 & 0.368 & 0.368 & 0 \\ 0.080 & 0.184 & 0.368 & 0.368 \end{bmatrix} \end{array}$$

Vemos que, por ejemplo, la probabilidad de transición desde el estado 1 al estado 2 es 0 porque Dave solo ordena cámaras cuando no queda ninguna en el inventario. Otro ejemplo es la probabilidad de transición desde el estado 2 al estado 1, la cual es 0.368.

Cadenas de Markov (informe creado por Estefania)

Hillier y Lieberman (2010) ilustran el resultado en un diagram de transición:



Ejemplos adicionales de cadenas de Markov

Ejemplo de acciones

"Considere el siguiente modelo del valor de una acción. Al final de un día dado se registra el precio. Si la acción subió, la probabilidad de que suba mañana es de 0.7. Si la acción bajó, la probabilidad de que suba mañana es de sólo 0.5. (Para simplificar, cuando la acción permanezca con el mismo precio se considerará un aumento.)"

Podemos representar este ejemplo como una Cadena de Markov porque cumple la propiedad markoviana. La probabilidad de que el valor de la acción suba o baje mañana no depende de eventos que hayan ocurrido pasado. Solo depende del estado actual del proceso.

Cadenas de Markov (informe creado por Estefania)

Los posibles estados de cada día son:

- 0 - El precio de la acción **subió** en el día t.
- 1 - El precio de la acción **bajó** en el día t.

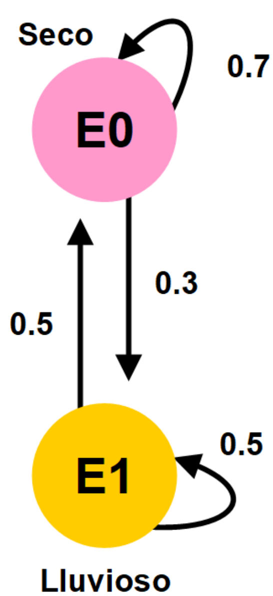
La matriz de transición dada es:

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c c} \text{Estado} & \begin{array}{cc} 0 & 1 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} & \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \end{array}$$

Es decir:

- La probabilidad de transición del estado 0 al estado 0 es 0.7.
- La probabilidad de transición del estado 0 al estado 1 es 0.3.
- La probabilidad de transición del estado 1 al estado 0 es 0.5.
- La probabilidad de transición del estado 1 al estado 1 es 0.5.

Estas probabilidades se reflejan en el siguiente diagrama de transición:



Segundo ejemplo de acciones

"Suponga ahora que el modelo del mercado de acciones se cambia de manera que el hecho de que una acción suba mañana depende de que haya subido hoy y ayer. En particular, si la acción subió los dos días, ayer y hoy, la probabilidad de que suba mañana es de 0.9. Si la acción subió hoy pero ayer bajó, la probabilidad de que mañana suba es de 0.6. Si la acción bajó hoy pero ayer subió, la probabilidad de que mañana suba es de 0.5. Por último, si bajó durante estos dos días, la probabilidad de que mañana suba es de 0.3. Si se define el estado como la representación del hecho de que la acción baje o suba hoy, el sistema ya no es una cadena de Markov. Sin embargo, se puede transformar en una de ellas si se defi nen los estados como sigue:

- Estado 0: la acción aumentó hoy y ayer.
- Estado 1: la acción aumentó hoy y ayer bajó.
- Estado 2: la acción bajó hoy y ayer aumentó.
- Estado 3: la acción bajó hoy y ayer."

De esta forma, tenemos estados finitos del sistema que podemos representar como nodos y como entradas en la matriz de transición:

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c} \text{Estado} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.9 & 0 & 0.1 & 0 \\ 0.6 & 0 & 0.4 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0.3 & 0 & 0.7 \end{bmatrix} \end{array}$$

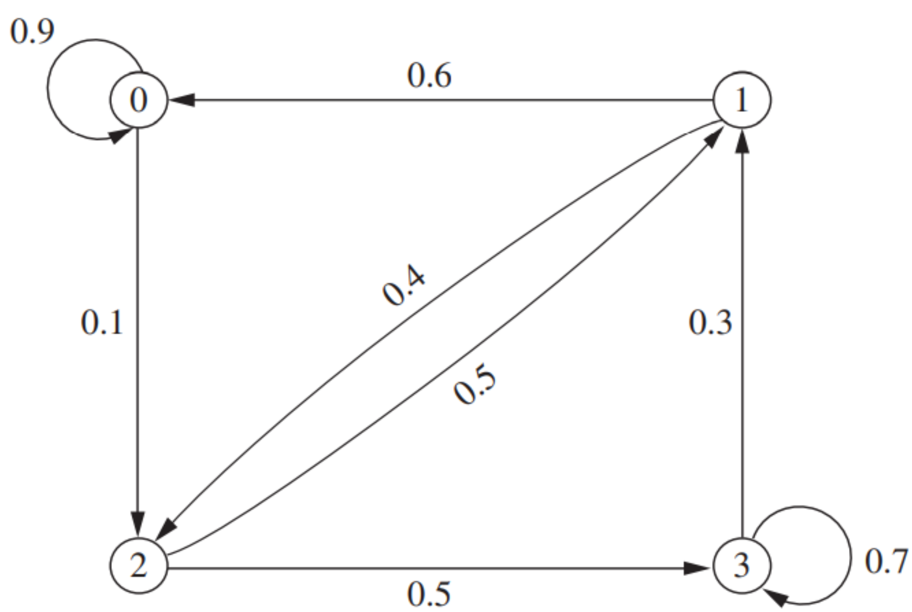
Si tenemos tres días y los representamos como días A, B y C:

- La probabilidad de transición entre el estado 0 y estado 0 es 0.9. Es decir, es posible que la acción aumente en el día A, B, y C.
- La probabilidad de transición entre el estado 0 y 1 es 0 porque no es posible que la acción aumente en el día A y en el día B y luego baje en el día B y aumente en el día C. Hay una contradicción en el estado del día B. El mismo principio aplica para la transición entre el estado 0 y 3, entre el estado 1 y 1, entre el estado 1 y 3, entre el estado 2 y 0 y entre el estado 3 y 0. La probabilidad de estas transiciones es 0.
- La probabilidad de transición entre el estado 0 y 2 es 0.1. Esta es la probabilidad de que la acción aumente en los días A y B y luego baje en el día C.

Cadenas de Markov (informe creado por Estefania)

- La probabilidad de transición entre el estado 1 y 0 es 0.6. Esta es la probabilidad de que la acción baje en el día A, luego aumente en el día B y luego aumente en el día C.
- La probabilidad de transición entre el estado 1 y 2 es 0.4. Esta es la probabilidad de que la acción baje en el día A, aumente en el día B y baje en el día C.
- La probabilidad de transición entre el estado 2 y 1 es 0.5. Esta es la probabilidad de que la acción aumente en el día A, baje en el día B y aumente en el día C.
- La probabilidad de transición entre el estado 3 y 1 es 0.3. Esta es la probabilidad de que la acción baje en los días A y B y aumente el día C.
- La probabilidad de transición entre el estado 2 y 3 es 0.5. Esta es la probabilidad de que la acción aumente en el día A, baje en el día B, y luego baje en el día C.
- La probabilidad de transición entre el estado 3 y 3 es 0.7. Esta es la probabilidad de que la acción baje en los días A, B y C.

Hillier y Lieberman (2010) representan las probabilidades de transición con el siguiente diagrama:



Cadenas de Markov (informe creado por Estefania)

Ejemplo de Juego

"Otro ejemplo se refiere al juego. Suponga que un jugador tiene 1 dólar y que cada jugada gana 1 dólar con probabilidad $p > 0$ o pierde 1 dólar con probabilidad $1 - p > 0$. El juego termina cuando el jugador acumula 3 dólares o cuando quiebra."

Según la descripción del problema, los tres posibles estados del sistema (la fortuna del jugador) puede ser 0, 1, 2, o 3. Este problema es una Cadena de Markov porque cada estado sólo depende del estado anterior del sistema, no de estados anteriores.

Esta es la matriz de transición dada:

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c} \text{Estado} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1-p & 0 & p & 0 \\ 0 & 1-p & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Análisis:

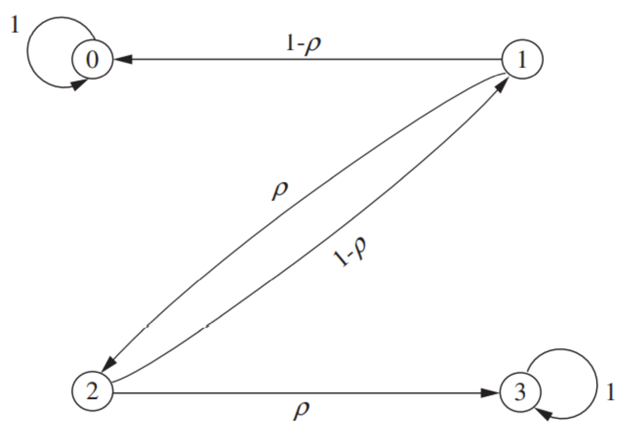
- La probabilidad de transición entre el estado 0 y el estado 0 es 1 porque el juego termina si llega a 0.
- La probabilidad de transición entre el estado 0 y 1 es 0 porque el jugador inicia con un dólar y el juego termina si llega a 0. Este mismo principio aplica para las transiciones entre los estados 0 y 2, 0 y 3.
- La probabilidad de transición entre el estado 1 y 0 es 1 - p porque dicha transición implica perder 1 dólar. Esto mismo aplica a la transición entre los estados 2 y 1.
- La probabilidad de transición entre el estado 2 y 0 es 0 porque solo se puede perder o ganar 1 dólar por ronda y este caso implicaría perder 2 dólares en una sola ronda.
- La probabilidad de transición entre el estado 2 y 2 es 0 porque en cada ronda se gana o se pierde 1 dólar y este caso implicaría no ganar ni perder dinero.
- La probabilidad de transición entre el estado 2 y 3 es p porque se ganaría 1 dólar.
- La probabilidad de transición entre el estado 3 y 0 es 0 porque en cada ronda sólo se puede perder o ganar 1 dólar por ronda y este caso implicaría perder 3 dólares en una sola ronda. El mismo principio aplica para la transición entre 3 y 1.

Cadenas de Markov (informe creado por Estefania)

- La probabilidad de transición entre el estado 3 y 2 es 0 porque el juego se detiene al llegar a 3, así que no se puede regresar al estado 2.
- La probabilidad de transición entre el estado 3 y 3 es 1 porque el juego se detiene al llegar a 3.

Este ejemplo ilustra un concepto importante: **Estado Absorbente.** Un estado es absorbente cuando no se puede cambiar de estado una vez que se alcanza dicho estado.

Hillier y Lieberman (2010) ilustran esta cadena de Markov con el siguiente diagrama de transición:



Ecuaciones de Chapman-Kolmogorov

Estas ecuaciones nos permiten calcular la probabilidad de transición de n pasos según Hillier y Lieberman (n.d.):

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{k=0}^{M} p_{ik}^{(m)} p_{kj}^{(n-m)}, \quad \text{para toda } i = 0, 1, \ldots, M,$$
$$j = 0, 1, \ldots, M,$$
$$\text{y cualquier } m = 1, 2, \ldots, n-1,$$
$$n = m+1, m+2, \ldots^{3}$$

Estas ecuaciones representan que al ir del estado i al estado j en n pasos, el sistema estará en el estado k después de m pasos, con m menor que n.

Los casos específicos de m = 1 y m = n - 1 conducen a las siguientes expresiones para todos los valores de i y j (los estados posibles del sistema):

$$\boxed{p_{ij}^{(n)} = \sum_{k=0}^{M} p_{ik} p_{kj}^{(n-1)}}$$

y

$$\boxed{p_{ij}^{(n)} = \sum_{k=0}^{M} p_{ik}^{(n-1)} p_{kj}}$$

A partir de cálculos matemáticos podemos obtener una expresión recursiva para expresar la probabilidad de transición de n pasos a partir de la probabilidad de transición de un paso:

$$P^{(n)} = P^{n}$$

Es decir, la probabilidad de transición de n pasos es el resultado de calcular la n-ésima potencia de la matriz de transición de un paso.

Probabilidades de estado incondicionales

Si n es lo suficientemente pequeño para que las probabilidades de transición de n pasos no sean las probabilidades del estado estable, podemos calcular las probabilidades incondicionales de que el sistema se encuentre en un estado específico:

$$\boxed{P\{X_n = j\}}$$

Anteriormente, calculamos probabilidades condicionales porque la probabilidad estaba caracterizada por el estado actual del sistema. Por ejemplo, la probabilidad de transición del estado 1 al estado 2. Con las probabilidades de estado incondicionales podemos calcular la probabilidad de que el sistema esté en un estado específico dado el valor de n sin considerar el estado anterior. En este caso, se debe conocer la distribución de probabilidades del estado inicial.

Cadenas de Markov (informe creado por Estefania)

Formalmente:

Sea $p\{X_0 = i\}$ con i = 0, 1, 2, …, M

Entonces:

$$P\{X_n = j\} = P\{X_0 = 0\}\, p_{0j}^{(n)} + P\{X_0 = 1\} p_{1j}^{(n)} + \cdots + P\{X_0 = M\} p_{Mj}^{(n)}.$$

Clasificación de estados en una cadena de Markov

- **Estado Accessible:**
  Un estado j es accesible desde el estado i si existe una probabilidad de que el sistema pueda pasar del estado i al estado j después de realizar un cierto número de pasos. En este caso, se dice que los estados i y j se comunican.
  - También se cumple que cada estado se comunica con sí mismo porque el sistema podría permanecer en el mismo estado en la próxima unidad de tiempo discreto.
  - Si el estado i se comunica con el estado j, el estado j también se comunica con el estado i.
  - Dos estados se pueden comunicar indirectamente a través de otros estados intermedios. Así, si el estado i se comunica con el estado j y el estado j se comunica con el estado k, decimos que el estado i se comunica con el estado k.
- **Clase:** una clase es un conjunto de estados que se comunican.
- **Cadena de Markov irreducible:** una cadena de Markov en la cual todos los estados se comunican. Es decir, solo existe una clase.
- **Estado transitorio:** un estado es transitorio si luego de haber estado en dicho estado, el proceso nunca regresa a él.
- **Estado recurrente:** un estado es recurrente si luego de haber estado en dicho estado, el proceso seguramente regresa a él.
- **Estado absorbente:** un estado absorbente es un tipo especial de estado recurrente. Si el proceso ingresa en un estado absorbente, nunca saldrá de dicho estado. Es decir, a medida que transcurra el tiempo discreto, la única posibilidad es que el proceso se mantenga en el mismo estado absorbente.

Cadenas de Markov (informe creado por Estefania)

Propiedades de periodicidad

La Universidad Española (n.d.) define el periodo de un estado i de una cadena de Markov como el máximo común divisor del número de pasos que se requieren para volver al estado i suponiendo que se ha iniciado el proceso en dicho estado. Un estado con periodo 1 se denomina **aperiódico**.

Hillier y Lieberman (2010) mencionan que la periodicidad es una propiedad de clase, al igual que la recurrencia. Es decir, si un estado tiene un periodo dado t, entonces todos los estados que pertenecen a la clase también tienen un periodo dado t.

- **Estados ergódicos**
  Estados recurrentes aperiódicos en una cadena de Markov de estado finito.
- **Cadena de Markov ergódica**
  Es una cadena de Markov en la cual todos los estados son ergódicos.

Probabilidades a Largo Plazo de las Cadenas de Markov

- **Probabilidades de estado estable**
  Las probabilidades de estado estable de una cadena de Markov son las probabilidades de que el sistema se encuentre en un estado específico luego de un número suficientemente grande de transiciones. Estas probabilidades no dependen del estado inicial del sistema.

  Es importante mencionar que esta probabilidad no significa que el sistema se quedará estático en dicho estado. Puede continuar realizando transiciones a distintos estados.

Cadenas de Markov (informe creado por Estefania)

Formalmente, según Hilier y Lieberman (2010):

Para una cadena de Markov irreducible ergódica el $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}$ existe y es independiente de i.

Aún más,

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j > 0,$$

donde las π_j satisfacen de manera única las siguientes **ecuaciones de estado estable**

$$\pi_j = \sum_{i=0}^{M} \pi_i p_{ij}, \qquad \text{para } j = 0, 1, \ldots, M,$$

$$\sum_{j=0}^{M} \pi_j = 1.$$

- **Tiempos de Primera Pasada**
  El tiempo de primera pasada representa el número de transiciones o cambios de un estado a otro que realiza el sistema para ir de un estado i a un estado j por primera vez.

- **Tiempo de Recurrencia**
  Es el tiempo de primera pasada en una situación especial: cuando i es igual a j. Cuando esto ocurre, el tiempo de primera pasada es el número de transiciones que se realizan hasta llegar nuevamente al estado inicial i.

- **Tiempo Esperado de Recurrencia**
  Es el número esperado de transiciones realizadas hasta que el proceso regresa a su estado inicial i.

- **Probabilidad de Absorción**
  Si k es un estado absorbente y el proceso de la cadena de Markov inicia en un estado inicial i, la probabilidad de absorción es la probabilidad de llegar en algún momento al estado k.

- **Caminata Aleatoria**
  Es una cadena de Markov con la propiedad de que si el sistema se encuentra en el estado i, en la siguiente transición habrán dos opciones, o el sistema permanecerá en el estado i o realizará una transición a uno de los dos estados inmediatamente adyacentes a i.

Cadenas de Markov de tiempo continuo

Este tipo de cadenas de Markov representa procesos en los cuales el tiempo se considera continuo en lugar de discreto.

En este tipo de cadena de Markov:

- Se representan estados que se pueden etiquetar con 0, 1, …, M.
- Se incluye un parámetro t' para representar el tiempo continuo, iniciando en 0 cuando inicia el proceso.
- El estado del sistema en un momento t' se modela como $X(t')$.
- Cumple la propiedad markoviana. Esta propiedad establece que la probabilidad de eventos futuros no depende de eventos que hayan ocurrido pasado. Solo depende del estado actual del proceso.
- Al igual que en las cadenas de Markov, la transición entre cada estado tiene una probabilidad de transición.

En el libro de Hillier y Lieberman (2010) se estudian cadenas de Markov de tiempo continuo con un número finito de estados y con probabilidades de transición estacionarias.

Variables aleatorias y conceptos importantes en las cadenas de Markov con tiempo continuo

- El tiempo que transcurre desde que el sistema entra en el estado i y realiza una transición al estado j se modela como una variable aleatoria. Esta variable aleatoria se representa como T_i y tiene una distribución exponencial con media $1/q_i$, donde q_i es el parámetro de la distribución exponencial.
- Las **intensidades de transición** tienen un papel análogo en las cadenas de Markov de tiempo continuo a lo que representan las probabilidades de transición en las cadenas de Markov de tiempo discreto.

Bibliografía

Hillier, F. & Lieberman G. (2010). Introducción a la Investigación de Operaciones.

Mahfuz, F. (2021). Markov Chains and their Applications.
https://scholarworks.uttyler.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=1010&context=math_grad

Universidad Española. (n.d.). Tema 1 Cadenas de Markov en Tiempo Discreto.
http://www.dia.fi.upm.es/~ajimenez/Docu_IO/Transparencias/CMTD.pdf