UNIVERSIDAD DE CARABOBO
FACULTAD DE CIENCIAS Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES IV

PROCESOS DE DECISIÓN MARKOVIANOS[1]

ESTUDIANTE: LUIS ALEJANDRO RIVAS MALDONADO
CÉDULA DE IDENTIDAD: 15.653.801

[1] Este informe contiene el desarrollo del ejemplo prototipo y la resolución de los problemas propuestos 19.2-4 y 19.3-3 del capítulo 19 del libro de texto **Introducción a la Investigación de Operaciones** de Hillier-Lieberman, novena edición

Vamos a explicar el desarrollo de la solución del ejemplo prototipo que se toma como referencia a lo largo de todo el capítulo.

PRESENTACIÓN DEL PROBLEMA

Se tiene una máquina a la que se le da un uso intensivo, lo cual trae como consecuencia que la calidad y cantidad de la producción disminuye con rapidéz en el tiempo. La máquina puede encontrarse en un estado de cuatro estados posibles

Estado	**Condición**
0	Tan buena como nueva
1	Operable: deterioro menor
2	Operable: deterioro mayor
3	Inoperable: producción de calidad inaceptable

De un análisis estadístico aplicado a datos históricos se obtuvo la evolución del estado de la máquina de un mes a otro. Ésto se refleja en la matriz de transición de un paso

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 7/8 & 1/16 & 1/16 \\ 0 & 3/4 & 1/8 & 1/8 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

en la cual se observa que si la máquina se encuentra en el estado 3 (inoperable) el sistema (representado por la máquina) entra en un estado absorvente. En este caso la máquina debe ser reemplazada para no detener el proceso de producción.

Se sabe que el reemplazo de la máquina toma 1 semana y que el costo de producción perdida debido al reemplazo es de 2 mil dólares, mientras que el costo de reemplazar la máquina es de 4 mil dólares. Así, el costo total cuando la máquina llega al estado 3 es de 6 mil dólares.

También se sabe que antes de que la máquina llegue al estado 3 se generan costos de producción por los artículos defectuosos, los cuales se muestran en la siguiente tabla

Estado	**Costo esperado debido a artículos defectuosos, $**
0	0
1	1000
2	3000

El reemplazar la máquina cuando es inoperable, pero sin hacerle mantenimiento cuando se encuentre en cualquiera de los otros tres estados, es una *política de mantenimiento*. Sin embargo, esta no es la única política de mantenimiento. Las decisiones posibles después de inspeccionar la máquina (al final de cada mes) son la siguientes

Decisión	Acción	Estados relevantes
1	No hacer nada	$0, 1, 2$
2	Reparación general (el sistema regresa al estado 1)	2
3	Reemplazo (el sistema regresa al estado 0)	$1, 2, 3$

sabiendo que los costos de cada decisión para cada estado son

Decisión	**Estado**	**C.E.P.A.D, $**	**C.M, $**	**C.P.P, $**	**C.T.S, $**
1: No hacer nada	0	0	0	0	0
	1	1000	0	0	1000
	2	3000	0	0	3000
2. Reparación general	2	0	2000	2000	4000
3. Reemplazo	$1, 2, 3$	0	4000	2000	6000

donde:
C.E.P.A.D: costo esperado por producir artículos defectuosos
C.M: costo de mantenimiento
C.P.P: costo por producción perdida
C.T.S: costo total por semana

Nuestro objetivo es encontrar la política de mantenimiento óptima, es decir, la forma de mantenimiento y reemplazo de la máquina que minimiza el costo del proceso.

SOLUCIÓN POR ENUMERACIÓN EXHAUSTIVA

Este modelo para encontrar una política óptima consiste en enumerar y comparar "todas" las políticas relevantes, calculando para cada política las probabilidades de estado estable π_i y el costo promedio esperado por unidad de tiempo $E(C)$. En nuestro ejemplo prototipo tenemos cuatro políticas de mantenimiento posibles, y cada política conduce a una matriz de transición diferente que se muestran a continuación (por medio de una tabla), junto con las probabilidades de estado estable y el costo promedio esperado por unidad de tiempo

1) Política R_a: reemplazo en el estado 3

Estado	0	1	2	3
0	0	7/8	1/16	1/16
1	0	3/4	1/8	1/8
2	0	0	1/2	1/2
3	1	0	0	0

Probabilidades de estado estable: $\pi_0 = 2/13, \pi_1 = 7/13, \pi_2 = 2/13, \pi_3 = 2/13$

Costo promedio esperado por unidad de tiempo: $E(C) = \$1923$

2) Política R_b: reemplazo en el estado 3, reparación general en el estado 2

Estado	0	1	2	3
0	0	7/8	1/16	1/16
1	0	3/4	1/8	1/8
2	0	1	0	0
3	1	0	0	0

Probabilidades de estado estable: $\pi_0 = 2/21, \pi_1 = 5/7, \pi_2 = 2/21, \pi_3 = 2/21$

Costo promedio esperado por unidad de tiempo: $E(C) = \$1667$

3) Política R_c: reemplazo en los estado 2 y 3

Estado	0	1	2	3
0	0	7/8	1/16	1/16
1	0	3/4	1/8	1/8
2	1	0	0	0
3	1	0	0	0

Probabilidades de estado estable: $\pi_0 = 2/11, \pi_1 = 7/11, \pi_2 = 1/11, \pi_3 = 1/11$

Costo promedio esperado por unidad de tiempo: $E(C) = \$1727$

4) Política R_d: reemplazo en el estado $1, 2$ y 3

Estado	0	1	2	3
0	0	7/8	1/16	1/16
1	1	0	0	0
2	1	0	0	0
3	1	0	0	0

Probabilidades de estado estable: $\pi_0 = 1/2, \pi_1 = 7/16, \pi_2 = 1/32, \pi_3 = 1/32$

Costo promedio esperado por unidad de tiempo: $E(C) = \$3000$

Notemos que la política óptima es R_b: reemplazar la máquina cuando se encuentre en el estado 3 y hacer una reparación general cuando se encuentre en el estado 2. El costo esperado (a largo plazo) es de \$1667.

En general este modelo de enumeración exhaustiva no es factible cuando el problema a resolver tiene una gran cantidad de políticas. Por tanto, para modelos grandes se deben aplicar algoritmos eficientes para encontrar políticas óptimas.

SOLUCIÓN POR PROGRAMACIÓN LINEAL

El modelo de programación lineal consiste en seleccionar las y_{ik} para minimizar

$$Z = \sum_{i=0}^{M} \sum_{k=1}^{K} C_{ik} y_{ik}$$

sujeta a las restricciones

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{M}\sum_{k=1}^{K} y_{ik} &= 1 \\
\sum_{k=1}^{K} y_{jk} - \sum_{i=0}^{M}\sum_{k=1}^{K} y_{ik}p_{ij}(k) &= 0, \qquad \text{para } j = 0, 1, \ldots, M. \\
y_{ik} &\geq 0, \qquad \text{para } i = 0, 1, \ldots, M;\ k = 1, 2, \ldots, K.
\end{aligned}$$

donde
y_{ik}: es la probabilidad incondicional de estado estable de que el sistema se encuentre en el estado i y se toma la decisión k.
C_{ik}: es el costo inmediato en el estado i al tomar la decisión k.
$p_{ij}(k)$: es la probabilidad de transición del estado i y la decisión k.
$M+1$: es el número de estados del sistema.
K: es el número de decisiones.

Cada y_{ik} se puede escribir $y_{ik} = \pi_i D_{ik}$, con D_{ik} definida como

$$D_{ik} = \begin{cases} 0, & \text{si la decisión } k \text{ debe tomarse en el estado } i \\ \\ 1, & \text{de otra manera} \end{cases}$$

Apliquemos este modelo al ejemplo prototipo. Los coeficientes de la función objetivo están dados en la tabla de costos de cada decisión para cada estado (vease la página 3 de este informe). Así, el modelo de programación lineal es

Minimizar

$$Z = 1000y_{11} + 6000y_{13} + 3000y_{21} + 4000y_{22} + 6000y_{23} + 6000y_{33}$$

sujeta a

$$\begin{aligned}
y_{00} + y_{11} + y_{13} + y_{21} + y_{22} + y_{23} + y_{33} &= 1 \\
y_{01} - (y_{13} + y_{23} + y_{33}) &= 0 \\
y_{11} + y_{13} - \left(\frac{7}{8}y_{01} + \frac{3}{4}y_{11} + y_{22}\right) &= 0 \\
y_{21} + y_{22} + y_{23} - \left(\frac{1}{16}y_{01} + \frac{1}{8}y_{11} + \frac{1}{2}y_{21}\right) &= 0 \\
y_{23} - \left(\frac{1}{16}y_{01} + \frac{1}{8}y_{11} + \frac{1}{2}y_{21}\right) &= 0 \\
y_{ik} &\geq 0
\end{aligned}$$

Al aplicar el método simplex se obtiene la solución óptima:

$$y_{01} = \frac{2}{21}, \quad y_{11} = \frac{5}{7}, \quad y_{13} = 0, \quad y_{21} = 0, \quad y_{22} = \frac{2}{21}, \quad y_{23} = 0, \quad y_{33} = 0$$

de donde:

$$D_{01} = 1, \quad D_{11} = 1, \quad D_{13} = 0, \quad D_{21} = 0, \quad D_{22} = 1, \quad D_{23} = 0, \quad D_{33} = 1$$

la cual indica que la política que debe aplicarse es la siguiente: debe dejarse la máquina como está (decisión 1) cuando se encuentre en el estado 0 o 1, debe hacerse una reparación general (decisión 2) cuando esté en el estado 2 y debe reemplazarse (decisión 3) si está en el estado 3.

ALGORITMO DE MEJORAMIENTO DE LA POLÍTICA

La gran ventaja de este método es su eficiencia porque casi siempre llega a una solución óptima en un número pequeño de iteraciones (muchas menos que en el método simplex con una formulación de programación lineal). Veamos la aplicación de este algoritmo en el ejemplo prototipo.

El paso inicial en el algoritmo de mejoramiento de la política es elegir, de manera arbitraria, una política inicial de prueba. Vamos a elegir la política que dice que se reemplace la máquina (decisión 3) cuando se encuentra en el estado 3, pero que no se haga nada (decisión 1) en otros estados. Para esta política inicial R_1, su matriz de transición y costos se muestran a continuación en forma de tablas

Política R_1:

Estado	**Decisión**
0	1
1	1
2	1
3	3

Estado	0	1	2	3
0	0	7/8	1/16	1/16
1	0	3/4	1/8	1/8
2	0	0	1/2	1/2
3	1	0	0	0

Estado	**Costo** C_{ik}
0	0
1	1000
2	3000
3	6000

Iteración 1: el paso 1 es, para esta política, resolver el sistema de ecuaciones lineales que se obtiene de la relación

$$g(R_1) = C_{ik} + \sum_{j=1}^{M} p_{ik}(k) v_j(R1) - v_i(R_1), \quad \text{para } i = 0, 1, 2, 3$$

El sistema es

$$
\begin{aligned}
g(R_1) &= \frac{7}{8}v_1(R_1) + \frac{1}{16}v_2(R_1) - v_0(R_1) \\
g(R_1) &= 1000 + \frac{3}{4}v_1(R_1) + \frac{1}{8}v_2(R_1) - v_1(R_1) \\
g(R_1) &= 3000 + \frac{1}{2}v_2(R_1) - v_2(R_1) \\
g(R_1) &= 6000 + v_0(R_1)
\end{aligned}
$$

cuya solución es

$$g(R_1) = 1923, \quad v_0(R_1) = -4077, \quad v_1(R_1) = -2615, \quad v_2(R_1) = 2154$$

El paso siguiente (paso 2) es encontrar una política mejorada R_2, tal que la decisión k en el estado i minimice la expresión

$$C_{ik} + \sum_{j=1}^{M} p_{ik}(k)v_j(R_1) - v_i(R_1)$$

Sólo los estados 1 y 2 requieren el cálculo del valor de la expresión.

Para el estado 1, las decisiones posibles son 1 y 3. Para cada una el valor de la expresión se muestra en la tabla siguiente

Estado 1

Decisión	**Valor de la expresión**
1	1923
3	4538

Como la decisión 1 minimiza la expresión, se elige como la decisión que debe tomarse en el estado 1 para la política R_2.

Los resultados para el estado 2 son

Estado 2

Decisión	**Valor de la expresión**
1	1923
2	-769
3	-231

Por tanto, se elige la decisión 2 como la que se debe tomar en el estado 2 para la política R_2.

Los resultados de la nueva política R_2 se muestran mediante tablas

<u>Política R_2</u>:

Estado	**Decisión**
0	1
1	1
2	2
3	3

Estado	0	1	2	3
0	0	7/8	1/16	1/16
1	0	3/4	1/8	1/8
2	0	1	0	0
3	1	0	0	0

Estado	**Costo** C_{ik}
0	0
1	1000
2	4000
3	6000

Como esta política no es idéntica a la política R_1, la prueba de optimalidad establece que se debe realizar otra iteración

Iteración 2: en el paso 1 se debe resolver el sistema

$$\begin{aligned}
g(R_2) &= \frac{7}{8}v_1(R_2) + \frac{1}{16}v_2(R_2) - v_0(R_2) \\
g(R_2) &= 1000 + \frac{3}{4}v_1(R_2) + \frac{1}{8}v_2(R_2) - v_1(R_2) \\
g(R_2) &= 4000 + v_1(R_2) - v_2(R_2) \\
g(R_2) &= 6000 + v_0(R_2)
\end{aligned}$$

Su solución es

$$g(R_2) = 1667, \quad v_0(R_2) = -4333, \quad v_1(R_2) = -3000, \quad v_2(R_2) = -667$$

Ahora aplicamos el paso 2 (mejoramiento de la política). Los estados relevantes son 1 y 2. Para ellos se muestra el valor de la expresión para las decisiones $1, 2$ y 3

Decisión	**Valor del estado 1**	**Valor del estado 2**
1	1667	3333
2	$-$	1667
3	4667	2334

La tabla indica que la decisión 1 minimiza la expresión para el estado 1 y la decisión 2 minimiza la expresión para el estado 2. Por tanto la siguiente política de prueba R_3 es

Política R_3:

Estado	Decisión
0	1
1	1
2	2
3	3

Notemos que la política R_3 es idéntica a la política R_2. Así, la prueba de optimalidad indica que esta política es óptima y el algoritmo termina.

APROXIMACIONES SUCESIVAS

El objetivo del método de aproximaciones sucesivas es encontrar una política óptima para las decisiones que se toman cuando sólo quedan n periodos de operación del proceso antes de terminar, comenzando con $n = 1$ a partir de la relación recursiva

$$V_i^n = \min_k \left\{ C_{ik} + \alpha \sum_{j=1}^{M} p_{ij}(k) V_j^{n-1} \right\}$$

donde α es un *factor de descuento* $(0 < \alpha < 1)$. El valor de k que minimiza proporciona la decisión óptima que se debe tomar cuando el proceso se inicia en el estado i.

Apliquemos este método al ejemplo prototipo que estamos examinando. Tomaremos $\alpha = 0.9$. Los valores de C_{ik} y p_{ik} se encuentran en la tabla de costos y la matriz P en las páginas 3 y 2 de este informe, respectivamente.

Para la primera iteración $(n = 1)$

$$\begin{aligned} V_0^1 &= \min_{k=1} \{C_{0k}\} = 0 \quad (k = 1) \\ V_1^1 &= \min_{k=1,3} \{C_{1k}\} = 1000 \quad (k = 1) \\ V_2^1 &= \min_{k=1,2,3} \{C_{2k}\} = 3000 \quad (k = 1) \\ V_3^1 &= \min_{k=3} \{C_{3k}\} = 6000 \quad (k = 3) \end{aligned}$$

Esto significa que se debe tomar la decisión 1 cuando el sistema está en los estados 0, 1 o 2. Cuando el sistema se encuentra en el estado 3 se toma la decisión 3.

Para la segunda iteración

$$
\begin{aligned}
V_0^2 &= 0 + 0.9\Big[\frac{7}{8}(1000) + \frac{1}{16}(3000) + \frac{1}{16}(6000)\Big] = 1294 \quad (k=1) \\
V_1^2 &= \min\Big\{1000 + 0.9\Big[\frac{3}{4}(1000) + \frac{1}{8}(3000) + \frac{1}{8}(6000)\Big], \\
&\quad 6000 + 0.9[1(0)]\Big\} = 2688 \quad (k=1) \\
V_2^2 &= \min\Big\{3000 + 0.9\Big[\frac{1}{2}(3000) + \frac{1}{2}(6000)\Big], \\
&\quad 4000 + 0.9[1(1000)], 6000 + 0.9[1(0)]\Big\} = 4900 \quad (k=2) \\
V_3^2 &= 6000 + 0.9[1(0)] = 6000 \quad (k=3)
\end{aligned}
$$

Esta segunda aproximación indica que se deje la máquina como está cuando se encuentra en los estados 0 o 1, se haga una reparación general si está en el estado 2 y se reemplace cuando está en el estado 3.

Este procedimiento puede continuar. Para nuestro ejemplo prototipo, la primera y segunda iteración han identificado la decisión óptima para cada estado si el número de periodos que quedan es uno o dos, respectivamente.

PROBLEMA 19.2-4

a) En este problema el sistema es *el grupo de amigos*. Los estados del grupo de amigos son los siguientes:

Estado 0: el grupo de amigos está de buen humor
Estado 1: el grupo de amigos está de mal humor

Las decisiones que puede tomar el hombre que juega poker son:

Decisión 1: ofrecer refrescos
Decisión 2: no ofrecer refrescos

Los costos de cada decisión para cada estado se muestran en la siguiente tabla

Decisión	**Estado**	**Costo inmediato, \$**
1	0	$C_{01} = 14$
2	0	$C_{02} = 0$
1	1	$C_{11} = 14$
2	1	$C_{12} = 75$

b) Hay cuatro políticas R_1, R_2, R_3, R_4 para este problema, las cuales se muestran a continuación junto con su matriz de transición (en forma de tabla) y la expresión del costo promedio esperado C_1, C_2, C_3, C_4 (a largo plazo) en términos de las probabilidades de estado estable desconocidas

Política R_1: ofrecer refrescos cuando el grupo está de buen humor

Estado	0	1
0	0.875	0.125
1	0.875	0.125

$$C_1 = 14\pi_0 + 14\pi_1$$

Política R_2: no ofrecer refrescos cuando el grupo está de buen humor

Estado	0	1
0	0.875	0.125
1	0.125	0.875

$$C_2 = 14\pi_0 + 75\pi_1$$

Política R_3: ofrecer refrescos cuando el grupo está de mal humor

Estado	0	1
0	0.125	0.875
1	0.875	0.125

$$C_3 = 14\pi_1$$

Política R_4: no ofrecer refrescos cuando el grupo está de mal humor

Estado	0	1
0	0.125	0.875
1	0.125	0.875

$$C_4 = 75\pi_1$$

c) Ahora vamos a determinar las probabilidades de estado estable para cada política, por medio de las ecuaciones de estado estable

$$\begin{aligned}\pi_0 &= \pi_0 p_{00} + \pi_1 p_{10}\\ \pi_1 &= \pi_0 p_{01} + \pi_1 p_{11}\\ 1 &= \pi_0 + \pi_1\end{aligned}$$

Política R_1: ofrecer refrescos cuando el grupo está de buen humor

Sustituyendo los valores de las probabilidades de transición, tenemos

$$\begin{aligned}\pi_0 &= 0.875\pi_0 + 0.875\pi_1\\ \pi_1 &= 0.125\pi_0 + 0.125\pi_1\\ 1 &= \pi_0 + \pi_1\end{aligned}$$

La solución de este sistema de ecuaciones es: $\pi_0 = 0.875$ y $\pi_1 = 0.125$. El costo promedio esperado para esta política es $C_1 = \$14$

Política R_2: no ofrecer refrescos cuando el grupo está de buen humor

Sustituyendo los valores de las probabilidades de transición, tenemos

$$\begin{aligned}\pi_0 &= 0.875\pi_0 + 0.125\pi_1\\ \pi_1 &= 0.125\pi_0 + 0.875\pi_1\\ 1 &= \pi_0 + \pi_1\end{aligned}$$

La solución de este sistema de ecuaciones es: $\pi_0 = 0.5$ y $\pi_1 = 0.5$. El costo promedio esperado para esta política es $C_1 = \$44.5$

Política R_3: ofrecer refrescos cuando el grupo está de mal humor

Sustituyendo los valores de las probabilidades de transición, tenemos

$$\begin{aligned}\pi_0 &= 0.125\pi_0 + 0.125\pi_1\\ \pi_1 &= 0.875\pi_0 + 0.875\pi_1\\ 1 &= \pi_0 + \pi_1\end{aligned}$$

La solución de este sistema de ecuaciones es: $\pi_0 = 0.5$ y $\pi_1 = 0.5$. El costo promedio esperado para esta política es $C_1 = \$7$

Política R_4: no ofrecer refrescos cuando el grupo está de mal humor

Sustituyendo los valores de las probabilidades de transición, tenemos

$$\begin{aligned}
\pi_0 &= 0.125\pi_0 + 0.125\pi_1 \\
\pi_1 &= 0.875\pi_0 + 0.875\pi_1 \\
1 &= \pi_0 + \pi_1
\end{aligned}$$

La solución de este sistema de ecuaciones es: $\pi_0 = 0.125$ y $\pi_1 = 0.875$. El costo promedio esperado para esta política es $C_1 = \$65.625$

Finalmente, del análisis y los resultados obtenidos concluimos que la política óptima es R_3: *ofrecer refrescos cuando el grupo está de mal humor*.

PROBLEMA 19.3-3

a) El modelo de programación lineal para encontrar la política óptima es

Minimizar

$$Z = 14y_{01} + 14y_{11} + 75y_{12}$$

sujeto a

$$\begin{aligned}
y_{01} + y_{02} + y_{11} + y_{12} &= 1 \\
y_{01} + y_{02} - \left(\frac{7}{8}y_{01} + \frac{1}{8}y_{02} + \frac{7}{8}y_{11} + \frac{1}{8}y_{12}\right) &= 0 \\
y_{11} + y_{12} - \left(\frac{1}{8}y_{01} + \frac{7}{8}y_{02} + \frac{1}{8}y_{11} + \frac{7}{8}y_{12}\right) &= 0 \\
y_{ik} \geq 0; \quad i = 0, 1 \text{ y } k = 1, 2
\end{aligned}$$

b) La solución óptima del modelo es

$$y_{02} = y_{11} = 0.5, \quad y_{01} = y_{12} = 0, \quad Z = 7$$

la cual indica que se debe tomar la decisión 2 en el estado 0 y la decisión 1 en el estado 1.

Observación: La solución óptima del modelo se obtuvo con Python. El archivo que contiene el código fuente del programa es **Procesos de decisión markovianos [Luis Rivas].py**