UNIVERSIDAD DE CARABOBO
FACULTAD DE CIENCIAS Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES IV

INFORME SOBRE CADENAS DE MARKOV[1]

ESTUDIANTE: LUIS ALEJANDRO RIVAS MALDONADO
CÉDULA DE IDENTIDAD: 15.653.801

[1]Este breve informe se basa en el capítulo 16 del libro de texto **Introducción a la Investigación de Operaciones** de Hillier-Lieberman, novena edición

Andréi Márkov (1865-1922) fue un matemático ruso que sobresalió en la teoría de probabilidades. Su aportación más significativa se encuentra en los procesos estocásticos, estableciendo el modelo matemático conocido como *cadenas de Markov*, que se utilizan mucho en diversas áreas de la economía, ingeniería e investigación de operaciones. En este informe haremos una breve exposición de las cadenas de Markov, e ilustraremos cómo pueden aplicarse en la resolución de problemas que surgen en la investigación de operaciones.

Con frecuencia los analistas de Investigación de Operaciones se enfrentan a problemas cuya solución requiere el uso de modelos probabilísticos. Éstos modelos describen el comportamiento de sistemas que evolucionan en el tiempo (de una manera probabilística) con el propósito de conocer el verdadero estado del sistema en el futuro. En muchos casos la naturaleza del sistema sometido a estudio exige la aplicación de un *proceso estocástico* especial llamado *cadena de Markov*. A continuación daremos la definición de proceso estocástico y cadena de Markov, para luego enfocarnos en un ejemplo de aplicación.

Un **proceso estocástico** es una familia de variables aleatorias $\{X_t\}_{t\in T}$ que proporcionan una descripción de la evolución de un determinado sistema a través del tiempo. La familia está indexada por un parámetro t de un conjunto T. Los procesos estocásticos se clasifican en

1. Discretos: donde t recorre los elementos de un subconjunto T de los enteros no negativos.

2. Continuos: donde t recorre los elementos de un subconjunto T de los números reales no negativos.

Tenemos entonces que los procesos estocásticos describen el comportamiento de un sistema en el tiempo. La estructura de un proceso estocástico es la siguiente:

1. Los estados del sistema y el estado actual. Éste puede ser cualquiera de los $M+1$ estados mutuamente excluyentes del sistema. Por lo general los estados de un proceso estocástico discreto se representan con $0, 1, 2, \ldots, M$. Los estados son una caracterización del sistema en un instante dado.

2. La variable aleatoria X_t, la cual representa el estado del sistema en el tiempo t.

3. Una ley de probabilidad condicional, que defina la probabilidad de un estado futuro del sistema en función de sus estados anteriores.

Una vez establecida la estructura de un proceso estocástico $\{X_t\}_{t\in T}$, se dice que éste representa el modelo matemático de la evolución de un sistema en el tiempo.

Observación: A partir de ahora todo el desarrollo de nuestra exposición se basa en las *cadenas de Markov en tiempo discreto*.

Se dice que un proceso estocástico $\{X_t\}_{t\in T}$ tiene la **propiedad markoviana** si la probabilidad condicional de cualquier estado futuro dados cualesquiera estados pasados y el estado actual $X_t = i$, es independiente de los estados pasados y sólo depende del estado actual del sistema. En símbolos

$$P\{X_{t+1} = j \mid X_0 = k_0, X_1 = k_1, \ldots, X_{t-1} = k_{t-1}, X_t = i\} = P\{X_{t+1} = j \mid X_t = i\}$$

Una **cadena de Markov** se define como un proceso estocástico que tiene la propiedad markoviana. Si una cadena de Markov está en el estado i-ésimo, hay una probabilidad de pasar al próximo estado j-ésimo. A ésta se le llama *probabilidad de transición de un paso*. Además, si para todo $t = 0, 1, 2, \ldots$ se cumple

$$P\{X_{t+1} = j \mid X_t = i\} = P\{X_1 = j \mid X_0 = i\}$$

se dice entonces que las probabilidades de transición de un paso son *estacionarias*. Esto significa que las probabilidades de transición estacionarias no cambian con el tiempo.

La existencia de probabilidades de transición (de un paso) estacionarias implican

$$P\{X_{t+n} = j \mid X_t = i\} = P\{X_n = j \mid X_0 = i\}, \text{con } t = 0, 1, 2, \ldots \text{ y } n = 0, 1, 2, \ldots$$

Estas probabilidades se llaman probabilidades de transición (de n pasos) estacionarias. Las notaciones para las probabilidades de transición estacionarias se simplifican como se muestra:

$$\begin{aligned} p_{ij} &= P\{X_{t+1} = j \mid X_t = i\} \\ p_{ij}^{(n)} &= P\{X_{t+n} = j \mid X_t = i\} \end{aligned}$$

Notemos que la probabilidad de transición (de n pasos) $p_{ij}^{(n)}$ es la probabilidad condicional de que el sistema se encuentre en el estado j exactamente después de n unidades de tiempo, dado que comenzó en el estado i en cualquier tiempo t. Las probabilidades condicionales deben satisfacer para $i = 0, 1, 2, \ldots$ y $n = 0, 1, 2, \ldots$

$$p_{ij}^{(n)} \geq 0$$

y

$$\sum_{j=0}^{M} p_{ij}^{(n)} = 1$$

Las probabilidades de transición de n pasos se pueden representar en forma matricial como sigue

$$P^{(n)} = \begin{bmatrix} p_{00}^{(n)} & p_{01}^{(n)} & \cdots & p_{0M}^{(n)} \\ p_{10}^{(n)} & p_{11}^{(n)} & \cdots & p_{1M}^{(n)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{M0}^{(n)} & p_{M1}^{(n)} & \cdots & p_{0M}^{(n)} \end{bmatrix}$$

Observación: los problemas de este capítulo se modelan mediante cadenas de Markov que tienen un número finito de estados y probabilidades de transición estacionarias. Éstas son las características del problema que vamos a examinar a continuación

Veamos el *ejemplo del clima*. Cuando se quiere resolver un problema cuya formulación matemática es un proceso estocástico que tiene la propiedad markoviana, esto es, una cadena de Markov, es indispensable definir la estructura del sistema, ya que ello constituye el punto de partida en la resolución del problema. En nuestro caso el sistema es *el clima en el pueblo de Centerville*, el cual tiene dos estados:

Estado 0: el día t es seco
Estado 1: el día t es lluvioso

Notemos que t se expresa en días y los estados son mutuamente excluyentes. Como la variable aleatoria $\{X_t\}$ representa el estado del sistema en el tiempo t, se tiene que

$$\{X_t\} = \begin{cases} 0, & \text{si el día } t \text{ es seco} \\ \\ 1, & \text{si el día } t \text{ es lluvioso} \end{cases}$$

Así, el conjunto $\{X_t\} = \{X_0, X_1, \ldots\}$ es un proceso estocástico que representa la forma en que evoluciona el clima en el pueblo de Centerville a través del tiempo.

Sabemos que la probabilidad de que mañana esté seco es de 0.8 si hoy está seco, y es de 0.6 si hoy llueve. En símbolos

$$\begin{aligned} P\{X_{t+1} = 0 \mid X_t = 0\} &= 0.8 \\ P\{X_{t+1} = 0 \mid X_t = 1\} &= 0.6 \end{aligned}$$

Además, estas probabilidades no cambian debido a la información sobre el clima en los días anteriores a hoy. Por lo tanto el proceso estocástico que representa la evolución del clima tiene la propiedad markoviana, lo que lo convierte en una cadena de Markov. Utilizando la notación especial para las probabilidades de transición (de un paso), tenemos

$$\begin{aligned} p_{00} = P\{X_{t+1} = 0 \mid X_t = 0\} &= 0.8 \\ p_{10} = P\{X_{t+1} = 0 \mid X_t = 1\} &= 0.6 \end{aligned}$$

Como $\sum_{j=0}^{1} = 1$ para $i = 0, 1$

$$p_{00} + p_{01} = 1 \quad \Rightarrow \quad p_{01} + 0.8 = 1 \quad \Rightarrow \quad p_{01} = 0.2$$

$$p_{10} + p_{11} = 1 \quad \Rightarrow \quad 0.6 + p_{11} = 1 \quad \Rightarrow \quad p_{11} = 0.4$$

Así, la matriz de transición de un paso es

$$P = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.6 & 0.4 \end{bmatrix}$$

Finalmente hemos obtenido información del estado del clima en el pueblo de Centerville el día de mañana dado el estado del clima el día de hoy, usando el modelo probabilístico de cadenas de Markov.

Supongamos ahora que queremos conocer el estado del clima dentro de n días. Las probabilidades de transición de n pasos proporcionan esa información. Para hallar dichas probabilidades se emplean las **ecuaciones de Chapman-Kolmogorov**, de las cuales se deduce la matriz de transición de n pasos de una manera recursiva

$$\begin{aligned} P^{(2)} &= PP = P^2 \\ P^{(3)} &= P^{(2)}P = P^3 \\ &\vdots \\ P^{(n)} &= P^{(n-1)}P = P^n \end{aligned}$$

Esto indica que las probabilidades de transición de n pasos se obtiene al calcular la n-ésima potencia de la matriz de transición de un paso. Por ejemplo, la matriz de transición de cinco pasos viene dada por

$$P^{(5)} = \begin{bmatrix} 0.75 & 0.25 \\ 0.75 & 0.25 \end{bmatrix}$$

Hemos mostrado "intencionalmente" la matriz de transición de cinco pasos debido a que tiene una característica especial: todas sus filas son idénticas. Ésta característica recibe el nombre de **probabilidades de estado estable**.

En general, si para un n lo suficientemente grande ($n = 5$ en el ejemplo del clima) todas las filas de la matriz de transición de n pasos tienen elementos idénticos, significa que la probabilidad de que el sistema esté en cada estado j ya no depende del estado inicial del sistema. Este comportamiento a largo plazo de una cadena de Markov se cumple en condiciones generales, como se indica: para una cadena de Markov *irreducible ergódica* el $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}$ existe y es independiente de i (el estado inicial). Además $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j > 0$, donde las π_j satisfacen de manera única las siguientes **ecuaciones de estado estable**

$$\begin{aligned} \pi_j &= \sum_{i=0}^{M} \pi_j p_{ij} \quad \text{para } j = 0, 1, \ldots, M \\ \sum_{j=0}^{M} \pi_j &= 1 \end{aligned} \tag{1}$$

Las π_j se denominan **probabilidades de estado estable** de la cadena de Markov. Vamos a determinar las probabilidades de estado estable a nuestro ejemplo del clima. Tenemos las ecuaciones de estado estable

$$\begin{aligned} \pi_0 &= \pi_0 p_{00} + \pi_1 p_{10} \\ \pi_1 &= \pi_0 p_{01} + \pi_1 p_{11} \\ 1 &= \pi_0 + \pi_1 \end{aligned}$$

La solución de este sistema de ecuaciones es: $\pi_0 = 0.25$ y $\pi_1 = 0.75$. Éstas son las probabilidades que obtuvimos en las filas de la matriz $P^{(5)}$. Por tanto cinco transiciones son suficientes para que las probabilidades de estado sean independientes del estado inicial.

Hemos mencionado los términos *irreducible* y *ergódica*. Veamos qué significan. Un estado j es *alcanzable* desde un estado i si existe un camino entre i y j. Un estado es *recurrente* si después de haber entrado a este estado, el sistema regresará a ese estado. Los estados i y j se comunican entre sí, si son alcanzables entre ellos. Una *clase comunicante* en una cadena de Markov es un grupo de estados que se comunican entre sí. Una cadena de Markov *irreducible* es aquella que se compone de una clase comunicante. Un estado es *aperiódico* si el máximo común divisor k_i de todos los caminos de ir de i a i es 1. Los estados recurrentes aperiódicos se denominan *ergódicos*. Finalmente, una cadena de Markov es *ergódica* si todos sus estados son ergódicos.

Hasta ahora hemos establecido que el parámetro t del tiempo es discreto. Este supuesto permite resolver una amplia gama de problemas. Sin embargo, hay problemas que requieren un parámetro t de tiempo continuo, ya que el sistema en estudio evoluciona de manera continua a través del tiempo. La definición dada de cadena de Markov se extiende a los sistemas continuos.

Fuentes consultadas:

Introducción a la Investigación de Operaciones, Hillier-Lieberman, 9na edición

https://docplayer.es/74887491-Cadenas-de-markov.html

https://www.estadistica.net/INVESTIGACION/CADENAS-MARKOV.pdf

http://www.dia.fi.upm.es/ ajimenez/Docu_IO/Transparencias/CMTD.pdf

https://www.unirioja.es/cu/franpere/ModyOptfiles/Tema6.pdf