UNIVERSIDAD DE CARABOBO
FACULTAD DE CIENCIAS Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES IV

SOLUCIÓN DE LOS PROBLEMAS 16.5-8 Y 16.6-1[1]

ESTUDIANTE: LUIS ALEJANDRO RIVAS MALDONADO
CÉDULA DE IDENTIDAD: 15.653.801

[1]Estos problemas están propuestos en el capítulo 16 del libro de texto **Introducción a la Investigación de Operaciones** de Hillier-Lieberman, novena edición

PROBLEMA 16.6-1

En este problema el sistema es la computadora, y los estados son:

Estado 0: la computadora está trabajando en la hora t
Estado 1: la computadora está descompuesta en la hora t

Del enunciado del problema obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} p_{00} &= P\{X_{t+1} = 0 \mid X_t = 0\} = 0.95 \\ p_{11} &= P\{X_{t+1} = 1 \mid X_t = 1\} = 0.5 \end{aligned}$$

a) Matriz de transición de un paso.

$$p_{00} + p_{01} = 1 \quad \Rightarrow \quad 0.95 + p_{01} = 1 \quad \Rightarrow \quad p_{01} = 0.05$$

$$p_{10} + p_{11} = 1 \quad \Rightarrow \quad p_{10} + 0.5 = 1 \quad \Rightarrow \quad p_{10} = 0.5$$

Así, la matriz de transición de un paso es

$$P = \begin{bmatrix} 0.95 & 0.05 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$$

b) Tiempo esperado de primera pasada (μ_{ij}) del estado i al estado j, para todo i y j.

$$\mu_{ij} = 1 + \sum_{k \neq j} p_{ik}\mu_{kj}$$

De ésta relación se desprenden las ecuaciones:

$$\mu_{00} = 1 + p_{01}\mu_{10} \tag{1}$$
$$\mu_{01} = 1 + p_{00}\mu_{01} \tag{2}$$
$$\mu_{10} = 1 + p_{11}\mu_{10} \tag{3}$$
$$\mu_{11} = 1 + p_{10}\mu_{01} \tag{4}$$

De la ecuación (2) tenemos

$$\mu_{01} = \frac{1}{1 - 0.95} \quad \Rightarrow \quad \mu_{01} = 20$$

De la ecuación (3) tenemos

$$\mu_{10} = \frac{1}{1 - 0.5} \quad \Rightarrow \quad \mu_{10} = 2$$

Sustituyendo los valores de μ_{10} y μ_{01} en las ecuaciones (1) y (4) obtenemos los valores de μ_{00} y μ_{11}

$$\mu_{00} = 1 + (0.05)(2) \quad \Rightarrow \quad \mu_{00} = 1.1$$

$$\mu_{11} = 1 + (0.5)(20) \quad \Rightarrow \quad \mu_{11} = 11$$

PROBLEMA 16.5-8

a) Matriz de transición de un paso.

$$
\begin{aligned}
p_{11} &= P(D_{n+1}=0)+P(D_{n+1}=2)+P(D_{n+1}=4)=\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}=\frac{3}{5}\\
p_{12} &= P(D_{n+1}=1)+P(D_{n+1}=3)=\frac{1}{5}+\frac{1}{5}=\frac{2}{5}\\
p_{21} &= P(D_{n+1}=1)+P(D_{n+1}=3)=\frac{1}{5}+\frac{1}{5}=\frac{2}{5}\\
p_{22} &= P(D_{n+1}=0)+P(D_{n+1}=2)+P(D_{n+1}=4)=\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}=\frac{3}{5}
\end{aligned}
$$

Así, la matriz de transición de un paso es

$$
P=\begin{bmatrix} 3/5 & 2/5 \\ 2/5 & 3/5 \end{bmatrix}
$$

b) Probabilidades de estado estable a partir de las ecuaciones de estado estable.
Las ecuaciones de estado estable proporcionan el sistema de ecuaciones cuyas incógnitas son las probabilidades de estado estable

$$
\begin{aligned}
\pi_1 &= \pi_1 p_{11}+\pi_2 p_{21}\\
\pi_2 &= \pi_1 p_{12}+\pi_2 p_{22}\\
1 &= \pi_1+\pi_2
\end{aligned}
$$

Notemos que al simplificar las dos primeras ecuaciones se obtiene la misma ecuación: $\pi_1=\pi_2$. Así, las probabilidades de estado estable son $\pi_1=\pi_2=1/2$.

c) Cálculo de las probabilidades de estado estable utilizando el resultado del problema 16.5-2
La matriz P de transición de un paso es doblemente estocástica. Por tanto, para $j=1,2$

$$
\pi_j=\frac{1}{M+1}
$$

donde $M+1$ es el número de estados del sistema. Así, $\pi_1=\pi_2=1/2$.