

3.3 鲁棒对等问题 (Robust counterpart)

让我们先回到模型 (3.5):

$$\begin{aligned} & \min F \\ \text{s.t. } & f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \leq F \quad \forall \boldsymbol{\xi} \in \mathcal{U}, \\ & h(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \leq 0 \quad \forall \boldsymbol{\xi} \in \mathcal{U}. \end{aligned}$$

在这个模型中，假如 $\boldsymbol{\xi}$ 有 N 个可能的取值 $\mathcal{U} = \{\boldsymbol{\xi}_1, \dots, \boldsymbol{\xi}_N\}$ ，那么给定 \mathbf{x} 和 F ，约束 $f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \leq F \forall \boldsymbol{\xi} \in \mathcal{U}$ 就等价于

$$f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}_i) \leq F \quad \forall i \in [N],$$

共 N 个约束。相应的， $h(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \leq 0 \forall \boldsymbol{\xi} \in \mathcal{U}$ 也等价于

$$h(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}_i) \leq 0 \quad \forall i \in [N],$$

共 N 个约束。

然而，如 3.2 小节所描述，常见的不确定集合大部分都是连续集 (continuous set) 而非离散集 (discrete set)，也即对于模型 (3.5) 来说，它将有无限多个约束，由此产生了一个半无限规划模型。显然，这是难以直接求解的。为了对鲁棒优化问题进行求解，我们需要对原模型做出一定程度的转化，使得转化后模型能够通过商业软件直接进行求解。在这方面做出重要突破的学者有 Allen L. Soyster、Aharon Ben-Tal、Arkadi Nemirovski、Dimitris Bertsimas 和 Melvyn Sim 等。

实际上，对于任意形如

$$g(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \leq 0 \quad \forall \boldsymbol{\xi} \in \mathcal{U},$$

的约束，我们都可以等价地将其写为：

$$\sup_{\boldsymbol{\xi} \in \mathcal{U}} g(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \leq 0.$$

当函数 g 和集合 \mathcal{U} 满足一定条件时，不等式左边的问题可以转化为线性规划问题、凸优化问题、或者是锥优化问题。相应地，所对应的约束转化为线性约束、凸约束、或者锥约束。从而使得模型 (3.5) 能用商业软件进行求解。

一般地，我们定义形如

$$g(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \leq 0 \quad \forall \boldsymbol{\xi} \in \mathcal{U}$$

的式子为鲁棒约束 (robust constraint)。而将模型 (3.5) 称为鲁棒对等问题 (robust counterpart)。而整个转化的过程大多数时候依赖于对偶理论。举例如下：

示例 3.1: 考虑如下鲁棒优化问题

$$\begin{aligned} & \min \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \\ \text{s.t. } & b_0 + \mathbf{x}^\top \boldsymbol{\xi} \geq 0 \quad \forall \boldsymbol{\xi} \in \mathcal{U}, \\ & \mathbf{x} \geq 0. \end{aligned} \tag{3.11}$$



其中 $\mathcal{U} = \{\boldsymbol{\xi} : \mathbf{A}\boldsymbol{\xi} = \mathbf{b}, \boldsymbol{\xi} \geq 0\}$.

约束 $b_0 + \mathbf{x}^\top \boldsymbol{\xi} \geq 0 \forall \boldsymbol{\xi} \in \mathcal{U}$ 等价于 $b_0 + \inf_{\boldsymbol{\xi} \in \mathcal{U}} \mathbf{x}^\top \boldsymbol{\xi} \geq 0$ 。对于不等式左边的问题 $\inf_{\boldsymbol{\xi} \in \mathcal{U}} \mathbf{x}^\top \boldsymbol{\xi}$, 由 2.1 可知其对偶问题为:

$$\begin{aligned} & \sup \quad \mathbf{b}^\top \mathbf{p} \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{A}^\top \mathbf{p} \leq \mathbf{x}. \end{aligned}$$

也即约束 $b_0 + \mathbf{x}^\top \boldsymbol{\xi} \geq 0 \forall \boldsymbol{\xi} \in \mathcal{U}$ 等价于

$$b_0 + \sup_{\mathbf{A}^\top \mathbf{p} \leq \mathbf{x}} \mathbf{b}^\top \mathbf{p} \geq 0 \Leftrightarrow b_0 + \mathbf{b}^\top \mathbf{p} \geq 0 \quad \exists \mathbf{p} \text{ s.t. } \mathbf{A}^\top \mathbf{p} \leq \mathbf{x}.$$

由此, 可以得到问题 (3.11) 的鲁棒对等问题为:

$$\begin{aligned} & \min \quad \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \\ \text{s.t.} \quad & b_0 + \mathbf{b}^\top \mathbf{p} \geq 0, \\ & \mathbf{A}^\top \mathbf{p} \leq \mathbf{x}, \\ & \mathbf{x} \geq 0. \end{aligned} \tag{3.12}$$

3.4 经典鲁棒模型

接下来, 我们将以Bertsimas and Sim (2003) 为蓝本, 简要介绍在鲁棒优化理论发展过程中经典的三个模型: 他们分别来自 Soyster (1973)、Ben-Tal and Nemirovski (1999) 和Bertsimas and Sim (2003)。

3.4.1 Soyster 的鲁棒模型

如第一章所介绍, Soyster 假设以下线性规划问题中

$$\begin{aligned} & \max \quad \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}, \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \end{aligned} \tag{3.13}$$

系数矩阵 \mathbf{A} 的每一列都在一个凸集中 (也称为列不确定性), 也即, $\mathbf{A}_j \in \mathcal{U}_j$, 那么线性规划问题(3.13)将变成如下问题:

$$\begin{aligned} & \max \quad \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{j \in [N]} \mathbf{A}_j x_j \leq \mathbf{b} \quad \forall \mathbf{A}_j \in \mathcal{U}_j, j \in [N], \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}. \end{aligned} \tag{3.14}$$



其所对应的鲁棒对等问题为

$$\begin{aligned} \max \quad & \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{j \in [N]} \bar{\mathbf{A}}_j x_j \leq \mathbf{b}, \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}. \end{aligned} \tag{3.15}$$

其中， $\bar{a}_{ij} = \sup_{\mathbf{A}_j \in \mathcal{U}_j} a_{ij}$ 。也即，对于每一个参数 a_{ij} 都取其在不确定集范围内的最大值。而这样得到的解虽然具有鲁棒性，但是同时也非常保守。

3.4.2 Ben-Tal 和 Nemirovski 的鲁棒模型

Ben-Tal 和 Nemirovski 也认同 a_{ij} 具有不确定性。但是不同于 Soyster (1973), Ben-Tal and Nemirovski (2000) 假设 \mathbf{A} 的第 i ($i \in [M]$) 行中，只有部分系数---用 \mathcal{J}_i 表示---具有不确定性。如果我们用 \tilde{a}_{ij} 表示具有不确定性的系数，且 $\tilde{a}_{ij} = a_{ij} + \hat{a}_{ij}\xi_{ij}$ 。其中， \hat{a}_{ij} 为波动范围， ξ_{ij} 为在 $[-1, 1]$ 内对称分布的随机变量，且满足 $\|\xi_i\|_2 \leq \Omega$ 。也即

$$\begin{aligned} \max \quad & \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{j \in [N]} (a_{ij} + \xi_{ij}\hat{a}_{ij})x_j \leq b_i \quad \forall \xi_i \in \mathcal{U} := \{\xi : \|\xi\|_2 \leq \Omega\}, i \in [M], \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}. \end{aligned} \tag{3.16}$$

其所对应的鲁棒对等问题为

$$\begin{aligned} \max \quad & \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{j \in [N]} a_{ij}x_j + \Omega \sqrt{\sum_{j \in \mathcal{J}_i} \hat{a}_{ij}^2 x_j^2} \leq b_i, \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}. \end{aligned} \tag{3.17}$$

在此问题中， Ω 为一给定的常量，并无直观的意义。求解结果高度依赖于常量 Ω 。此外，此问题虽然可以通过调节 Ω 来避免 Soyster (1973) 的极端保守情况，仍然比较保守。同时，此问题为二阶锥规划问题，求解起来稍显繁琐。

3.4.3 Bertsimas 和 Sim 的鲁棒模型

为了克服 Soyster (1973) 的保守性和 Ben-Tal and Nemirovski (2000) 中使用椭球不确定集而导致二阶锥规划问题，对于系数矩阵 \mathbf{A} 中的第 i 行，Bertsimas and Sim (2004) 提出了预算不确定集 (budget uncertainty set):

$$\mathcal{U}_i = \{\xi_i : |\xi_{ij}| \leq 1, j \in [N], \|\xi_i\|_1 \leq \Gamma_i\}.$$

其中， $\Gamma_i \in [0, |\mathcal{J}_i|]$, $|\mathcal{J}_i|$ 表示第 i 行中不确定的参数个数。也即，通过引入参数 Γ_i 来调节模型的保守程度。假设不确定的参数个数不超过 $\lfloor \Gamma_i \rfloor$ 个，其中 $\lfloor \Gamma_i \rfloor$ 是小于等于 Γ_i



的最大整数，并且假设 a_{ij} 的波动范围为 $(\Gamma_i - \lfloor \Gamma_i \rfloor) \hat{a}_{ij}$ ，Bertsimas 和 Sim 提出以下鲁棒优化模型：

$$\begin{aligned} \max \quad & \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{j \in [N]} a_{ij} x_j + \max_{\{\mathcal{S}_i \cup \{t_i\} | \mathcal{S}_i \subseteq \mathcal{J}_i, |\mathcal{S}_i| = \lfloor \Gamma_i \rfloor, t_i \in \mathcal{J}_i \setminus \mathcal{S}_i\}} \left\{ \sum_{j \in \mathcal{S}_i} \hat{a}_{ij} y_j + (\Gamma_i - \lfloor \Gamma_i \rfloor) \hat{a}_{it_i} y_t \right\} \leq b_i \quad \forall i \in [M], \\ & -y_j \leq x_j \leq y_j \quad \forall j \in [N], \\ & \mathbf{l} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{u}, \\ & \mathbf{y} \geq \mathbf{0}. \end{aligned} \tag{3.18}$$

当 Γ_i 为整数时，此时 $\Gamma_i = \lfloor \Gamma_i \rfloor$ ，对第 i 个约束，有如下形式：

$$\sum_{j \in [N]} a_{ij} x_j + \max_{\{\mathcal{S}_i \cup \{t_i\} | \mathcal{S}_i \subseteq \mathcal{J}_i, |\mathcal{S}_i| = \lfloor \Gamma_i \rfloor, t_i \in \mathcal{J}_i \setminus \mathcal{S}_i\}} \left\{ \sum_{j \in \mathcal{S}_i} \hat{a}_{ij} y_j \right\} \leq b_i \tag{3.19}$$

当 Γ_i 的值为 0 时，变量的系数均为标称值，约束变为名义问题 (nominal problem)。当 Γ_i 取最大值 $\lfloor \Gamma_i \rfloor$ 时，此时所有的不确定元素均不为标称值，模型等价于 Soyster 模型。当 Γ_i 的值介于最大值和最小值之间变动时，模型的保守度也相应变动。当 Γ_i 的值为 $\Omega_i \sqrt{\sum_{j \in \mathcal{J}_i} (\hat{a}_{ij}^2 x_j^2)}$ 时，约束违背（具体参考 Bertsimas and Sim 2004）的概率边界值与 Ben-tal 一致。因此，当 Γ_i 的值过小时，鲁棒优化模型保守性差，较大概率发生约束违背。当 Γ_i 的值过大时，计算结果过于保守。模型(3.18)是非线性模型，不能直接求解，Bertsimas 和 Sim 对模型做出了如下转化：

$$\begin{aligned} \max \quad & \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{j \in [N]} a_{ij} x_j + z_i \Gamma_i + \sum_{j \in \mathcal{J}_i} p_{ij} \leq b_i \quad \forall i \in [M], \\ & z_i + p_{ij} \geq \hat{a}_{ij} y_j \quad \forall j \in \mathcal{J}_i, i \in [M], \\ & -y_j \leq x_j \leq y_j \quad \forall j \in [N], \\ & l_j \leq x_j \leq u_j \quad \forall j \in [N], \\ & p_{ij} \geq 0 \quad \forall j \in \mathcal{J}_i, i \in [M], \\ & y_j \geq 0 \quad \forall j \in [N], \\ & z_i \geq 0 \quad \forall i \in [M]. \end{aligned} \tag{3.20}$$

模型转化的理论依据是对偶理论，具体的证明过程在作者稿件中有详细描述，有兴趣的读者可以自行翻阅，这里不再赘述。在此基础上，Bertsimas and Sim (2003) 提出



了鲁棒离散优化的模型:

$$\begin{aligned} \max \quad & \mathbf{c}^\top \mathbf{x} + \max_{\{\mathcal{S}_0 | \mathcal{S}_0 \subseteq \mathcal{J}_0, |\mathcal{S}_0| \leq \Gamma_0\}} \left\{ \sum_{j \in \mathcal{S}_0} d_j |x_j| \right\} \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{j \in [N]} a_{ij} x_j + \max_{\{\mathcal{S}_i \cup \{t_i\} | \mathcal{S}_i \subseteq \mathcal{J}_i, |\mathcal{S}_i| = \lfloor \Gamma_i \rfloor, t_i \in \mathcal{J}_i \setminus \mathcal{S}_i\}} \left\{ \sum_{j \in \mathcal{S}_i} \hat{a}_{ij} |x_j| + (\Gamma_i - \lfloor \Gamma_i \rfloor) \hat{a}_{it_i} |x_{t_i}| \right\} \leq b_i \quad \forall i \in [M], \\ & x_j \in \mathbb{Z} \quad \forall j \in [N]. \end{aligned} \quad (3.21)$$

其中, Γ_0 是区间 $[0, |\mathcal{J}_0|]$ 内的整数, $\mathcal{J}_0 = \{j | d_j > 0\}$, $|\mathcal{J}_0|$ 是 \mathbf{c} 中不确定元素的个数。不同于 Bertsimas and Sim (2004), Bertsimas and Sim (2003) 考虑了目标函数的不确定性。对于目标函数中的 \mathbf{c} , 允许变化的不确定元素有 Γ_0 个, 取值为 $\mathbf{c}^\top + \max_{\{\mathcal{S}_0 | \mathcal{S}_0 \subseteq \mathcal{J}_0, |\mathcal{S}_0| \leq \Gamma_0\}} \sum_{j \in \mathcal{S}_0} d_j$, 其余均为标称值。

同样的, 模型(3.21)也需要经过处理才能求解, 处理后的混合整数规划模型如下所示:

$$\begin{aligned} \max \quad & \mathbf{c}^\top \mathbf{x} + z_0 \Gamma_0 + \sum_{j \in \mathcal{J}_0} p_{0j} \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{j \in [N]} a_{ij} x_j + z_i \Gamma_i + \sum_{j \in \mathcal{J}_i} p_{ij} \leq b_i \quad \forall i \in [M], \\ & z_0 + p_{0j} \geq d_j y_j \quad \forall j \in \mathcal{J}_0, \\ & z_i + p_{ij} \geq \hat{a}_{ij} y_j \quad \forall j \in \mathcal{J}_i, i \in [M], \\ & p_{ij} \geq 0 \quad \forall j \in \mathcal{J}_i, i \in [M], \\ & z_i \geq \mathbf{0} \quad \forall i \in [M] \cup \{0\}, \\ & x_i \in \mathbb{Z} \quad \forall i \in [M], \\ & \mathbf{l} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{u}, \\ & -\mathbf{y} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{y}, \\ & \mathbf{y} \geq \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

接下来, 我们节选 Bertsimas and Sim (2004) 中的组合优化的例子来简要探讨鲁棒优化的具体运用。考虑如下的组合优化模型,

$$\begin{aligned} \max \quad & \mathbf{p}^\top \mathbf{x} - \phi(\boldsymbol{\sigma} \bullet \mathbf{x})^\top (\boldsymbol{\sigma} \bullet \mathbf{x}) \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{x}^\top \mathbf{1} = 1, \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (3.23)$$

其中, x_i 定义决策变量代表每支股票的投资比例, p_i 和 σ_i 分别为股票 i 的期望回报率与回报率标准差, ϕ 是控制风险和回报之间交易的一个参数。

考虑 $N = 150$ 支股票, 假如第 i 支股票的回报率的期望 p_i 和标准差 σ_i 分别为 $p_i = 1.15 + i \frac{0.05}{150}$, $\sigma_i = \frac{0.05}{450} \sqrt{2iN(N+1)}$, 且假设 $\phi = 5$ 来平衡投资的回报期望和风



险。模型(3.23)所对应的鲁棒优化模型为：

$$\begin{aligned} & \max z \\ \text{s.t. } & z \leq \mathbf{p}^\top \mathbf{x} + \max_{\{\mathcal{S}_i \cup \{t_i\} | \mathcal{S}_i \subseteq \mathcal{J}_i, |\mathcal{S}_i| = \lfloor \Gamma_i \rfloor, t_i \in \mathcal{J}_i \setminus \mathcal{S}_i\}} \left\{ \sum_{j \in \mathcal{S}_i} \sigma_j x_j + (\Gamma_i - \lfloor \Gamma_i \rfloor) \sigma_i x_{t_i} \right\}, \\ & \mathbf{x}^\top \mathbf{1} = 1, \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (3.24)$$

其鲁棒对等模型为：

$$\begin{aligned} & \max z \\ \text{s.t. } & z \leq \mathbf{p}^\top \mathbf{x} - \left(\sum_{i \in [N]} Q_i + \Gamma_i m_i \right), \\ & Q_i + m_i \geq \sigma_i x_i \quad \forall i \in [N], \\ & \mathbf{x}^\top \mathbf{1} = 1, \\ & \mathbf{x}, \mathbf{Q}, \mathbf{m} \geq \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (3.25)$$

此外，根据Bertsimas and Sim (2004) 中的 **Proposition 1**：

$$\max_{\{\mathcal{S}_i \cup \{t_i\} | \mathcal{S}_i \subseteq \mathcal{J}_i, |\mathcal{S}_i| = \lfloor \Gamma_i \rfloor, t_i \in \mathcal{J}_i \setminus \mathcal{S}_i\}} \left\{ \sum_{j \in \mathcal{S}_i} \hat{a}_{ij} y_j + (\Gamma_i - \lfloor \Gamma_i \rfloor) a_{it_i} y_{t_i} \right\}$$

等价为以下的线性优化模型：

$$\begin{aligned} \beta_i(\mathbf{x}^*, \Gamma_i) &= \max \sum_{j \in \mathcal{J}_i} \hat{a}_{ij} |x_j^*| z_{ij} \\ \text{s.t. } & \sum_{j \in \mathcal{J}_i} z_{ij} \leq \Gamma_i \\ & 0 \leq z_{ij} \leq 1 \quad \forall j \in \mathcal{J}_i \end{aligned} \quad (3.26)$$

也即，我们可将模型(3.24)写为

$$\begin{aligned} & \max \min_{z \in \mathcal{U}} \mathbf{p}^\top \mathbf{x} - \mathbf{x}^\top (\boldsymbol{\sigma} \bullet \mathbf{z}) \\ \text{s.t. } & \mathbf{x}^\top \mathbf{1} = 1, \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}. \end{aligned}$$

在该模型中，随机变量 \mathbf{z} 代表实际股票回报率和期望值间的偏差。这个随机变量被约束在一个预算不确定集 (Budget uncertainty set) \mathcal{U} 中：

$$\mathcal{U} = \left\{ \mathbf{z} | 0 \leq z_{ij} \leq 1, \sum_{j \in \mathcal{J}_i} z_{ij} \leq \Gamma_i \right\} \quad (3.27)$$

大部分鲁棒优化问题都可以用优化工具直接求解。我们将在本书第十章介绍相关内容。



本章参考文献



- A, Cooper WW Chames**, *Chance-Constrained Programming*, INFORMS, 1959.
- Baringo, Luis and Ana Baringo**, “A Stochastic Adaptive Robust Optimization Approach for the Generation and Transmission Expansion Planning,” *IEEE Transactions on Power Systems*, 2017, PP (99), 1–1.
- Ben-Tal, A. and A. Nemirovski**, “Robust Convex Optimization,” *Mathematics of Operations Research*, 1998, 23 (4), 769–805.
- and —, “Robust solutions of uncertain linear programs,” *Operations Research Letters*, 1999, pp. 1–13.
- Ben-Tal, Aharon and Arkadi Nemirovski**, “Robust solutions of linear programming problems contaminated with uncertain data,” *Mathematical Programming*, 2000, 88 (3), 411–424.
- , **Laurent El Ghaoui, and Arkadi Nemirovski**, *Robust Optimization* 2009.
- Bertsimas, Dimitris and Aurlie Thiele**, “Robust and Data-Driven Optimization: Modern Decision Making Under Uncertainty,” *Tutorials in Operations Research*, 04 2006, 4.
- and **Melvyn Sim**, “Robust discrete optimization and network flows,” *Mathematical Programming*, 2003, 98 (1-3), 49–71.
- and —, “The Price of Robustness,” *Operations Research*, 2004, 52 (1), 35–53.
- Bertsimas, Dimitris J., David B. Brown, and Constantine Caramanis**, “Theory and Applications of Robust Optimization,” *Siam Review*, 2010, 53 (3), 464–501.
- Bertsimas, Dimitris, Vishal Gupta, and Nathan Kallus**, “Data-driven robust optimization,” *Mathematical Programming*, 2018, 167 (2), 235–292.
- Birge, John R and Francois Louveaux**, *Introduction to stochastic programming* 2011.
- Boyd, Stephen and Lieven Vandenberghe**, “Convex optimization,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2006, 51 (11), 1859–1859.
- E, Bellmann R.**, “Decision Making in a Fuzzy Environment,” *Management science*, 1970, (17).
- Ghaoui, Laurent Oustry Francois Lebret El**, “Robust Solutions to Uncertain Semidefinite Programs,” *SIAM Journal on Optimization*, 1998, 9(1), 33–52.
- Laurent, El Ghaoui I. and Lebret I. Herv**, “Robust Solutions To Least-Squares Problems With Uncertain Data,” in “International Workshop on Recent Advances in Total Least Squares Techniques & Errors-in-variables Modeling” International Workshop on Recent Advances in Total Least Squares Techniques & Errors-in-variables Modeling 1997.
- Liu, Baoding**, “Dependent-chance programming: A class of stochastic optimization,” *Computers & Mathematics with Applications*, 1997, 34 (12), 89–104.
- M, Mulvey J., Vanderbei R. J, and Zenios S. A**, “Zenios S A . Robust Optimization of Large-Scale Systems,” *Operations Research*, 1995, 43 (2), 264–281.
- R, Jiang, Zhang M, and Li G**, “Two-Stage Robust Power Grid Optimization Problem,” *Social Science Electronic Publishing*, 2010.
- Soyster, Allen L.**, “Technical Note - Convex Programming with Set-Inclusive Constraints and Applications to Inexact Linear Programming.,” *Operations Research*, 1973, 21 (5), 1154–1157.
- 刘宝碇**, 随机规划与模糊规划, 清华大学出版社, 1998.
- 陈宝林**, 最优化理论与算法, 清华大学出版社, 2005.