鲁棒优化入门

An Introduction to Robust Optimization

作者：陈植，黄文杰，覃含章，
苏向阳，孙秋壮，汤勤深，
熊鹏，章宇，周明龙，朱桃增
校对：汤勤深，翁欣，殷方浩
时间：May 9, 2023
邮箱: robustoptbook@gmail.com

版本: 1.0

编者按

《鲁棒优化入门》是应“运筹 · 帷幄”公众号之邀而撰写的鲁棒优化入门读物。版权为全体编者所有。

本书首先介绍了经典鲁棒优化和分布鲁棒优化的基本内容。随后介绍了多阶段问题及如何运用线性决策规则和鲁棒优化对多阶段问题近似求解。同时也囊括了鲁棒性优化和机器学习等最新的一些研究方向，以及如何使用不同的优化语言包对鲁棒优化模型进行求解。

本书仅介绍了一些鲁棒优化的最基本的概念和最新的研究进展，旨在对鲁棒优化进行框架性地梳理，为有志于运用鲁棒优化解决实际问题，有志于从事鲁棒优化学术研究的同学提供概念性和框架性的入门。

本书第一章主要由汤勤深，第二章主要由孙秋壮，第三章主要由苏向阳，第四章主要由章宇，第五章主要由汤勤深和陈植，第六章主要由周明龙，第七章主要由朱桃增，第八章主要由覃含章，第九章主要由黄文杰，第十章主要由汤勤深和熊鹏进行撰写。本书的校对完善主要由汤勤深、翁欣、殷方浩等完成。本书的编写主要以新加坡国立大学沈顺璇（Melvyn SIM）教授上课的 PPT 为蓝本，并且得到了沈教授的大力支持。在此表示衷心感谢。

由于编者水平有限，缺点和错误在所难免，敬请批评指正。欢迎读者朋友将意见或建议更新到 github(https://github.com/Operations-Research-Science/Ebook-An_introduction_to_robust_optimization) 或者发到邮箱robustoptbook@gmail.com。

编者

May 9, 2023

目　　录

序言

Robust optimization is a mathematical optimization technique that takes into account the uncertainty present in real-world problems. Over the past two decades, there has been a significant growth in research in this field and it has now become a dominant approach to tackle uncertainty in optimization problems. The goal of robust optimization is to provide models that can handle uncertainty and produce solutions that are not overly sensitive to inaccuracies or changes in model assumptions. This makes it a valuable tool for solving problems in areas such as finance, engineering, operations management, and machine learning where decision-making must be robust to unpredictable events.

As a graduate student at MIT, I had the privilege of co-authoring “The Price of Robustness" with Dimitris Bertsimas, which has become the most highly cited paper in the leading journal of Operations Research. Upon my return to NUS, I have been fortunate to collaborate with exceptional graduate students to push the boundaries of robust optimization. NUS, at the heart of Asia, has attracted a significant number of Chinese students to pursue their graduate studies in Singapore. Recognizing the scarcity of resources on robust optimization in the Chinese language, my former graduate students and Chinese scholars have joined forces to develop an eBook on the subject.

The innovative project to publish eBooks on robust optimization for readers in Mainland China was initiated in 2018 when Qin Hanzhang approached Tang Qingshen with the idea to utilize the WeChat subscription ‘‘运筹帷幄". Seven authors, including Chen Zhi, Qin Hanzhang, Su Xiangyang, Sun Qiuzhuang, Tang Qinshen, Xiong Peng, and Zhang Yu, came together to create the collaborative eBook. The authors each contributed a chapter to the book, which was published in instalments via the WeChat subscription to gather feedback from readers. In 2021, the first version of the book was completed, and three additional chapters were later added by Huang Wenjie, Zhou Minglong, and Zhu Taozeng on topics such as risk preference, robust satisficing, and joint estimation and robust optimization. The final version of the book was compiled and published as an e-book, available on GitHub for further contributions from readers. The eBook project is a dynamic and collaborative effort, constantly adapting and evolving with new ideas and feedback.

The book was structured as follows:

Chapter 1: Introduction, written by Tang Qinshen

Chapter 2: Overview, written by Sun Qiuzhuang

Chapter 3: Classical Robust Optimization, written by Su Xiangyang

Chapter 4: Distributionally Robust Optimization, written by Zhang Yu

Chapter 5: Multi-Stage Problem and Linear Decision Rule, written by Chen Zhi and Tang Qinshen

Chapter 6: Robust Satisficing, written by Zhou Minglong

Chapter 7: Joint Estimation and Robustness Optimization, written by Zhu Taozeng

Chapter 8: Robust Optimization and Machine Learning, written by Qin Hanzhang

Chapter 9: Robust Optimization and Risk Preference, written by Huang Wenjie

Chapter 10: Robust Optimization and Solvers, written by Tang Qinshen and Xiong Peng

The eBook project is an innovative and a laudable project that will evolve over time. It serves as a platform for producing and disseminating research in the field of robust optimization, fostering new ideas, evaluating their practicality and keeping track of the latest developments. The eBook provides an opportunity for like-minded scholars to contribute to the advancement of the field. This is just the beginning, and I hope that it will attract more individuals to this exciting area of study.

Melvyn Sim
NUS, Singapore
5 Feb, 2023

符号说明

除非特别申明，本书将使用以下符号：我们用 $[N]$ 来表示 $1,\ldots,N$ 的集合，也即 $[N] \triangleq \{1,2,\ldots,N\}$。用加黑的小写字母表示向量，加黑的大写字母表示矩阵，比如 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^N$ 和 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{M\times N}$ 分别表示 $\boldsymbol{x}$ 是一个 N 维的实向量，$\boldsymbol{A}$ 是一个 $M \times N$ 的实矩阵。如无特别说明，本书所有向量和矩阵均在实空间。其中，x_i 表示 $\boldsymbol{x}$ 的第 i 个元素，a_{ij} 表示 $\boldsymbol{A}$ 中第 i 行第 j 列的元素，$\boldsymbol{a}_i^\top$ 表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行，$\boldsymbol{A}_j$ 表示矩阵 A 的第 j 列，$|\boldsymbol{x}| = (|x_1|,\ldots,|x_N|)$ 表示对向量 $\boldsymbol{x}$ 的每一个元素取绝对值。零向量（所有元素均为 0），一向量（所有元素均为 1）和单位向量（除对角元素为 1 之外，其他均为 0）分别为 $\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{1}$ 和 $\boldsymbol{e}$。我们用 $\tilde{\boldsymbol{z}} \sim \mathbb{P} \in \mathcal{P}_0(\mathbb{R}^N)$ 表示 N 维的随机变量服从随机分布 $\mathbb{P}$，而 $\mathcal{P}_0(\mathbb{R}^N)$ 表示在实空间 $\mathbb{R}^N$ 中所有概率分布的集合。对任意的集合 $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{R}^N$，$\mathbb{P}\left[\tilde{\boldsymbol{z}} \in \mathcal{S}\right]$ 表示在概率分布 $\mathbb{P}$ 的度量下，$\boldsymbol{z}$ 在集合 $\mathcal{S}$ 的概率。对于任一概率分布 $\mathbb{P}$，我们用 $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\cdot]$ 表示在概率分布 $\mathbb{P}$ 下的期望。而对于两个向量 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^N$，$\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{y}$ 表示 $\boldsymbol{x}$ 中的每一个元素都不小于 $\boldsymbol{y}$ 中对应的那个元素。假设 $\boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{M\times N}$, $\boldsymbol{A}$ 点乘 $\boldsymbol{B}$ 则表示为 $\boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{B} = \sum_{i\in[M]}\sum_{j\in[N]} a_{ij}b_{ij}$。

第 1 章 鲁棒优化简介（Introduction）

汤勤深

根据维基百科，鲁棒优化（robust optimization）是最优化理论中的一类用来寻求在不确定（uncertain) 环境中使优化问题具有一定程度的鲁棒性（robustness）的方法。其中，不确定性可以通过问题的参数或者解的确定性变异（deterministic variability）来刻画 (Wikipedia, 2019)。也就是说鲁棒优化是用来寻求对不确定性免疫的解的一类方法 (Bertsimas and Sim, 2004).

在传统的优化模型中，通常假设模型的输入数据是具体的、准确的数值。然而，现实生活中所获得的大部分数据都是具有一定的误差。而有时细微的误差也将导致优化问题的最优解不再最优 (suboptimal) 或者导致原问题不具有可行解（infeasible）。以NETLIB中题 PILOT4 为例，其某一约束为：

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{a}^\top \boldsymbol{x} \equiv -15.79081 x_{826} - 8.598819 x_{827} - 1.88789 x_{828} - 1.362417 x_{829} - 1.526049 x_{830} \\
&- 0.031883 x_{849} - 28.725555 x_{850} - 10.792065 x_{851} - 0.19004 x_{852} - 2.757176 x_{853} \\
&- 12.290832 x_{854} + 717.562256 x_{855} - 0.057865 x_{856} - 3.785417 x_{857} - 78.30661 x_{858} \\
&- 122.163055 x_{859} - 6.46609 x_{860} - 0.48371 x_{861} - 0.615264 x_{862} - 1.353783 x_{863} \\
&- 84.644257 x_{864} - 122.459045 x_{865} - 43.15593 x_{866} - 1.712592 x_{870} - 0.401597 x_{871} \\
&+ x_{880} - 0.946049 x_{898} - 0.946049 x_{916} \geq b \equiv 23.387405.
\end{aligned}
$$

用 Cplex 解得这个问题的解为：

$$
\begin{array}{lll}
x^*_{826} = 255.6112787181108 & x^*_{827} = 6240.488912232100 & x^*_{828} = 3624.613324098961 \\
x^*_{829} = 18.20205065283259 & x^*_{849} = 174397.0389573037 & x^*_{870} = 14250.00176680900 \\
x^*_{871} = 25910.00731692178 & x^*_{880} = 104958.3199274139. &
\end{array}
$$

解 $\boldsymbol{x}^*$ 满足 $\boldsymbol{a}^\top \boldsymbol{x}^* = b$。然而，只要稍微改动 $\boldsymbol{a}$ 中某一项的系数，那么 $\boldsymbol{a}^\top \boldsymbol{x}^* \neq b$，也即 $\boldsymbol{x}^*$ 不再是最优解。

如何解决这个问题？最直观的方法是，假设每一个系数都在一定范围内变动，从而求一个解使得对所有在这个范围内变动的系数都是最优的。比如，对于约束

$$ax \leq b,$$

我们希望它对所有 $a \in [\underline{a}, \bar{a}]$ 都成立，也即原有约束将变成

$$ax \leq b \quad \forall a \in [\underline{a}, \bar{a}].$$

这个问题的一般形式首先由 Soyster 在 1973 年研究 (Soyster, 1973)：对于任意线性规划问题，

$$
\begin{aligned}
\max \quad & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\
\text{s.t.} \quad & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{b}, \\
& \boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{0}.
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

假设系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中每一列都在一个凸集（convex set）中（也称为列不确定性），也即，$\boldsymbol{A}_j \in \mathcal{U}_j$，那么线性规划问题(3.11)将变成如下问题：

$$
\begin{aligned}
\max \quad & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{j\in[N]} \boldsymbol{A}_j x_j \le \boldsymbol{b} \quad \forall \boldsymbol{A}_j \in \mathcal{U}_j, j \in [N], \\
& \boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{0}.
\end{aligned}
\tag{1.2}
$$

然而，此种方法因所得到的解太过于保守（conservative）而饱受诟病。随后，Ben-Tal and Nemirovski (1998, 1999, 2000) 和EI-Ghaoui and Lebret (1997); El Ghaoui et al. (1998) 为降低保守性而引进了椭球型不确定集（ellipsoids uncertainty set）。同时也考虑了其他形式的不确定性，比如行不确定性。其中，椭球型不确定集一方面比较难跟现实数据结合，另外一方面，转化（reformulate）之后的模型大都是二阶锥规划（second order cone programming）或者半正定规划（semi-definite programming）问题---求解起来比较复杂。此外，这种方法依然比较保守。

2004 年，Bertsimas and Sim (2004) 为了克服椭球型不确定集的缺点，引进了预算不确定集（budget uncertainty set），将原问题转化成线性规划问题，并且得出了所得解可行概率的下限，也即所得解对所有约束不可行的概率的上限。

本书将在第三章介绍不确定性最优化，不同种类的不确定集，以及鲁棒优化理论中很核心的对等式转换理论（robust counterpart）。此书把这种将模型参数假定在给定不确定集中而进行优化问题求解的方法统称为经典鲁棒优化（classical robust optimization）。

为什么称为经典鲁棒优化？因为经典鲁棒优化构成了现在普遍使用的分布鲁棒优化（distributionally robust optimization）的基础，同时也是分布鲁棒优化的一种特殊形式。

如果在实际中决策者不仅仅已知优化模型某些参数 $\tilde{z}$（以下称为随机变量，即 random variable）的支撑集（support set），还精确已知这些参数服从某一概率分布 $\mathbb{P}$，假设决策变量 $\boldsymbol{x} \in \mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^N$，那此类优化问题称为随机优化问题（stochastic programming）：

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[f(\boldsymbol{x}, \tilde{z})\right] \\
\text{s.t.} \quad & \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[g_i(\boldsymbol{x}, \tilde{z})\right] \le 0 \quad \forall i \in [I], \\
& \boldsymbol{x} \in \mathcal{X}.
\end{aligned}
\tag{1.3}
$$

一般地，我们假设 $f(\cdot)$ 和 $g_i(\cdot)$ 均为凸函数。

可是，恰恰是随机变量服从某一概率分布这个假设导致很多问题。一方面，模型中的随机变量在生产经营或者模型背景中通常是多种因素作用的结果，这就导致很难准确估计某一随机变量的边际分布，更别说所有随机变量的集中分布了。另一方面，就

算已知边际分布或者集中分布，除了很多时候因为随机变量过多而模型维度过大之外，在多阶段问题中，还常常受制于“维度诅咒（curse of dimentionality)”。现今科技发展，各行各业所收集和掌握的数据量呈井喷态势，使得从大量数据中提取一些随机变量的统计信息（比如需求的均值和方差）变得可行。分布鲁棒优化恰好提供了将这些统计信息融入到模型决策中的一种思路。

具体来说，如果我们将所需要用到的概率统计信息集成到一个集合中，假设为 $\mathcal{F}$，那么 $\mathcal{F}$ 就是所有拥有这些统计信息的分布的一个集合。我们称这个集合为模糊集（ambiguity set）。在模糊集中，选取一个分布使得在最坏情况下，进行模型求解。这样所求得的解就具有一定的鲁棒性。也即，模型(1.3)将变成：

$$\begin{array}{ll}\min & \sup\limits_{\mathbb{P}\in\mathcal{F}} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[f(\boldsymbol{x},\tilde{\boldsymbol{z}})\right] \\ \text{s.t.} & \sup\limits_{\mathbb{P}\in\mathcal{F}} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[g_i(\boldsymbol{x},\tilde{\boldsymbol{z}})\right] \le 0 \quad \forall i\in[I], \\ & \boldsymbol{x}\in\mathcal{X}.\end{array} \tag{1.4}$$

我们称模型(1.4)为分布鲁棒优化模型。其中，如果 $\mathcal{F}=\{\mathbb{P}\}$，那模型(1.3)是一个随机优化模型；如果 $\mathcal{F}=\{\hat{\mathbb{P}}\}$，也即只包含经验分布 $\hat{\mathbb{P}}$（empirical distribution），那模型(1.3)是经验优化模型（empirical optimization model）；如果，在 $\mathcal{F}$ 中，我们只知道随机量 $\tilde{\boldsymbol{z}}$ 在某一个集合 $\mathcal{U}$ 中，那分布鲁棒模型退化成经典鲁棒模型。本书将在第四章着重介绍不同的模糊集和分布式鲁棒模型的求解方法。

以上所阐述的经典鲁棒优化模型和分布鲁棒优化模型只适用于单阶段（single stage）问题。而现实中所面临的决策往往是多阶段（multi-stage）的。其中，最经典的莫过于两阶段随机规划模型：

$$\begin{array}{ll}\min & \boldsymbol{c}^\top\boldsymbol{x}+\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[f(\boldsymbol{x},\tilde{\boldsymbol{z}})\right] \\ \text{s.t.} & \boldsymbol{x}\ \mathcal{X},\end{array} \tag{1.5}$$

其中

$$\begin{array}{rll} f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}) = & \min & \boldsymbol{d}^\top\boldsymbol{y} \\ & \text{s.t.} & \boldsymbol{A}(\boldsymbol{z})\boldsymbol{x}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{y}\ge\boldsymbol{b}(\boldsymbol{z}), \\ & & \boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^N,\end{array} \tag{1.6}$$

$\boldsymbol{y}$ 为第二阶段的 N 维决策变量，$\boldsymbol{d},\boldsymbol{b}(\boldsymbol{z}),\boldsymbol{A}(\boldsymbol{z}),\boldsymbol{B}(\boldsymbol{z})$ 为第二阶段模型的参数，而 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{z}),\boldsymbol{B}(\boldsymbol{z})$ 和 $\boldsymbol{b}(\boldsymbol{z})$ 表示这些参数是 $\boldsymbol{z}$ 的函数。也即第二阶段的决策不仅依赖于第一阶段决策变量还依赖于随机变量的实现值（realization）。这就导致各阶段之间决策变量和随机变量之间的交互使得问题的复杂度随着阶段的增加而呈指数增长，也即“维度诅咒”。在随机规划中，学者们通过引入决策规则（decision rule）去近似地解决这一问题。但是，因为近似模型表现不好而被“打入冷宫”。而鲁棒优化的出现，让决策规则重新焕发出了勃勃生机。本书将在第五章详细介绍多阶段随机规划问题以及如何使用不同的决策规则和鲁棒优化的方法对其进行近似，并且取得很好的近似效果。

近年来，随着鲁棒优化在各种不同优化问题求解中的良好表现，其价值越来越被学界和业界所发现。比如，从鲁棒优化的角度去处理具有广泛运用的机会约束问题，可以

收到比较好的效果。而最新的研究显示，被广泛运用在机器学习中回归模型（regression）的正则性（regularization）和鲁棒优化在一定条件下具有等价关系。这一发现启发了越来越多的学者将鲁棒优化和机器学习相结合。本书将在第六章讲解鲁棒优化下的机会约束问题演化而出的鲁棒性优化问题，在第七章讲解鲁棒优化和机器学习结合的一些最新研究成果。

同时，在本书的最后一章，我们将介绍鲁棒模型在不同求解平台上的实现方式。也将在不同的章节中引入不同的案例或算例。

本章参考文献

Ben-Tal, Aharon and Arkadi Nemirovski, "Robust convex optimization," *Mathematics of Operations Research*, 1998, *23* (4), 769–805.

__ **and** __ , "Robust solutions of uncertain linear programs," *Operations Research Letters*, 1999, *25* (1), 1–13.

__ **and** __ , "Robust solutions of linear programming problems contaminated with uncertain data," *Mathematical Programming*, 2000, *88* (3), 411–424.

Bertsimas, Dimitris and Melvyn Sim, "The price of robustness," *Operations Research*, 2004, *52* (1), 35–53.

EI-Ghaoui, L and H Lebret, "Robust solutions to least-square problems to uncertain data matrices," *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 1997, *18*, 1035–1064.

Ghaoui, Laurent El, Francois Oustry, and Hervé Lebret, "Robust solutions to uncertain semidefinite programs," *SIAM Journal on Optimization*, 1998, *9* (1), 33–52.

Soyster, Allen L, "Technical note—convex programming with set-inclusive constraints and applications to inexact linear programming," *Operations Research*, 1973, *21* (5), 1154–1157.

Wikipedia, "Robust optimization — Wikipedia, The Free Encyclopedia," 2019. [Online; accessed 16-April-2019].

第 2 章 概览（Overview）

孙秋壮

在进行系统的鲁棒优化学习之前，我们进行一些预备知识的回顾。本章将对线性规划、凸优化、锥优化以及风险偏好及其度量进行简要介绍。

2.1 线性规划概览（Linear optimization）

线性规划（LP）是数学规划中形式最为简单的一种模型。一个线性规划可以写作：

$$\begin{aligned} \min \quad & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ \text{s.t.} \quad & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x} \geq 0. \end{aligned}$$

可见上式中，目标函数和约束都是线性的形式，所以被叫做“线性规划”。虽然它的形式简单，但线性规划的建模能力非常强大，有很多经典的数学建模问题都可以转化为线性规划，也有很多非线性的函数也可以等价转化为线性规划求解。比如对于如下非线性的规划

$$\begin{aligned} \min \quad & f(\boldsymbol{x}) = \max_k \left\{\boldsymbol{d}_k^\top \boldsymbol{x} + c_k\right\} \\ \text{s.t.} \quad & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}. \end{aligned}$$

我们可以等价地将其转化为线性规划

$$\begin{aligned} \min \quad & z \\ \text{s.t.} \quad & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}, \\ & z \geq \boldsymbol{d}_k^\top \boldsymbol{x} + c_k \quad \forall k. \end{aligned}$$

当然，在实际解决过程的问题中要十分注意转化是否等价！一个常见的错误就是认为如下的两个数学规划问题是等价的。

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{j\in[N]} c_j |x_j| \\ \text{s.t.} \quad & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}. \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \min \quad & \sum_{j\in[N]} c_j z_j \\ \text{s.t.} \quad & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}, \\ & x_j \geq -z_j, \\ & -x_j \geq -z_j. \end{aligned}$$

其实，当第一个规划问题有界，且存在 $c_j < 0$ 时，我们可以令线性规划中对应的 $z_j \mapsto +\infty$，使得第二个问题最优值趋向于 $-\infty$。此时易见两个问题并非等价。

说到数学规划问题，就不得不提到对偶（duality）理论。考虑一个（标准形式的）线性规划问题：

$$\begin{aligned} \min \quad & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ \text{s.t.} \quad & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}. \end{aligned}$$

我们可以使用拉格朗日乘子将上述问题写成：

$$\begin{aligned} g(\boldsymbol{p}) = \min \quad & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} + \boldsymbol{p}^\top(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}) \\ \text{s.t.} \quad & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}. \end{aligned}$$

令 $\boldsymbol{x}^*$ 为线性规划的最优解，可见

$$g(\boldsymbol{p}) \leq \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x}^* + \boldsymbol{p}^\top(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^*) = \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x}^* \quad \forall \boldsymbol{p}.$$

也就是说，$g(\boldsymbol{p})$ 是最优目标函数 $\boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x}^*$ 的一个下界。为了使这个下界尽可能的“紧”一些，我们想要求得 $\max\limits_{\boldsymbol{p}} g(\boldsymbol{p})$，而

$$g(\boldsymbol{p}) = \min_{\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}} \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} + \boldsymbol{p}^\top(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{p}^\top \boldsymbol{b} + \min_{\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}} (\boldsymbol{c} - \boldsymbol{A}^\top \boldsymbol{p})^\top \boldsymbol{x}.$$

对于上式的第二项，我们有

$$\min_{\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}} (\boldsymbol{c} - \boldsymbol{A}^\top \boldsymbol{p})^\top \boldsymbol{x} = \begin{cases} 0, & \text{如果} \boldsymbol{c}^\top - \boldsymbol{p}^\top \boldsymbol{A} \geq \boldsymbol{0}, \\ -\infty, & \text{否则}. \end{cases}$$

至此，我们推出了原问题（primal）的对偶形式

$$\begin{aligned} \max \quad & \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{p} \\ \text{s.t.} \quad & \boldsymbol{A}^\top \boldsymbol{p} \leq \boldsymbol{c}. \end{aligned}$$

关于原问题和对偶问题的关系，我们有弱对偶和强对偶两个定理。其中弱对偶表述的是：当 $\boldsymbol{x}$ 是原问题的可行解且 $\boldsymbol{p}$ 是对偶问题的可行解时，我们一定有 $\boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{p} \leq \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x}$。也就是说原问题（min）的最优目标函数都要比对偶问题（max）最优目标函数要大。由此定理可知，如果我们能找到一组可行解 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p})$ 使得 $\boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{p} = \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x}$，那么 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{p}$ 就一定分别是原问题和对偶问题的最优解。值得一提的是，弱对偶对任意数学规划问题都成立。而强对偶表述的是：当线性规划有一个最优解时，那么它的对偶问题也有最优解，且两个问题的最优目标函数值相同。注意这里我们加上了线性规划这一条件。在更一般的凸优化中，强对偶的成立一般需要一些条件，比如我们可以通过验证 Slater's condition 来确认强对偶是否成立。关于线性规划的详细介绍，可以参阅 Bertsimas and Tsitsiklis (1997)。

2.2 凸优化概览（Convex optimization）

虽然线性规划的建模能力十分强大，现实生活中很多非线性问题依然无法被 LP 解决。这个时候我们需要使用非线性规划（NLP）来求出最优解。一个非线性规划可以写作

$$\begin{aligned} \min \quad & f(\boldsymbol{x}) \\ \text{s.t.} \quad & g_i(\boldsymbol{x}) \leq 0 \quad \forall i \in [I_1], \\ & h_i(\boldsymbol{x}) = 0 \quad \forall i \in [I_2], \\ & \boldsymbol{x} \in \mathcal{X}. \end{aligned}$$

其中，$f(\boldsymbol{x}) : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$，$g_i(\boldsymbol{x}) : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ 和 $h_i(\boldsymbol{x}) : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ 是关于 $\boldsymbol{x}$ 的（通常连续且可微的）函数。

在非线性规划问题中，我们通常关注局部最优点和全局最优点。如果对于可行域中的 $\boldsymbol{x}$，对于任意可行域中的 $\boldsymbol{y}$ 都有 $f(\boldsymbol{x}) \leq f(\boldsymbol{y})$，那么 $\boldsymbol{x}$ 就是全局最小。类似的，如果 $f(\boldsymbol{x})$ 比它周围的点都要小，那么 $\boldsymbol{x}$ 是一个局部最小。（局部最小严格定义是，存在以 $\boldsymbol{x}$ 为中心的一个开球，使得 $f(\boldsymbol{x})$ 比开球和可行域交集中所有可以取到的函数值都要小。）对于一个一般的非线性规划问题，我们通常很难验证一个点是局部最优还是全局最优。而如果一个非线性规划问题是凸优化问题，这个问题便迎刃而解。具体来说，一个函数 $f : \mathcal{S} \mapsto \mathbb{R}$ 如果满足 $f(\lambda \boldsymbol{x}_1 + (1-\lambda)\boldsymbol{x}_2) \leq \lambda f(\boldsymbol{x}_1) + (1-\lambda) f(\boldsymbol{x}_2)$，$\forall \lambda \in [0,1], \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in \mathcal{S}$，那么这个函数就被称为凸函数。在一个非线性规划问题中，如果 $f(\boldsymbol{x})$，$g(\boldsymbol{x})$ 和 $h(\boldsymbol{x})$ 都为凸函数，那么这个 NLP 就是一个凸优化问题。

凸优化中一个重要的定理就是，如果 $\boldsymbol{x}^*$ 是 f 的局部最小，那么 $\boldsymbol{x}^*$ 也是 f 可行域中的全局最小。这个性质使得很多算法（例如各种迭代下降算法、内点算法等等）可以找到凸优化问题的全局最优解。我们也可以应用 KKT 条件来验证一个解是否为凸优化的问题的最优解。凸优化的详细介绍可以参阅 Boyd and Vandenberghe (2004)。然而，在一个凸优化问题中，凸函数 f，g 和 h 的形式太过多元化。相比之下，任意一个线性规划都可以转化为标准形式（参见第 2.1节）。这样的标准形式可以大大减少推导鲁棒对等式（robust counterpart）时的步骤。那么一个凸优化问题可以转变为“标准形式”吗？为了达到这个目的，我们将在下节中介绍锥优化。

2.3 锥优化概览（Conic optimization）

沿用上节的符号系统，我们考虑目标函数 $f(\boldsymbol{x})$ 为线性形式的凸优化问题，即 $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x}$。无论 $g(\boldsymbol{x})$ 和 $h(\boldsymbol{x})$ 形式如何，我们将他们统一放入凸优化问题的可行域 $\mathcal{X}$ 中。那么我们考虑的凸优化问题可以表示为：

$$\begin{aligned} \min \quad & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ \text{s.t.} \quad & \boldsymbol{x} \in \mathcal{X}. \end{aligned}$$

这个问题可以等价为如下规划问题

$$\begin{aligned} \min \quad & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ \text{s.t.} \quad & y = 1, \\ & (\boldsymbol{x}, y) \in \mathcal{K}. \end{aligned}$$

其中，$\mathcal{K} = \mathrm{cl}\{(\boldsymbol{x}, y) : \boldsymbol{x}/y \in \mathcal{X}, y > 0\}$，$\mathrm{cl}\{\cdot\}$ 表示一个集合的闭包。之所以写成这种形式，是因为 $\mathcal{K}$ 是一种叫作“锥”的性质非常好的集合。我们把一个集合 $\mathcal{K}$ 叫作锥，如果对任意的 $\boldsymbol{x} \in \mathcal{K}$，$\lambda \boldsymbol{x} \in \mathcal{K}$ 对所有 $\lambda \geq 0$ 都成立。

基于这个变换，第一个问题是：如何把线性规划和锥联系起来？第二个问题是：如果有办法联系起来，我们可以把线性规划的优良性质借鉴过来吗？我们先解决第一个问题——显然，非负 m 维实数域 $\mathbb{R}^m_+$ 是一个锥。那么，我们可以把一个线性约束等价为

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b} \Leftrightarrow \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b} \geq \boldsymbol{0} \Leftrightarrow \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b} \in \mathcal{K}, \quad \mathcal{K} = \mathbb{R}^m_+.$$

而线性规划中很多非常好的数学性质来源于不等号“$\geq$”。具体来说，不等号满足

- 反射性（reflexibility）：$\boldsymbol{a} \geq \boldsymbol{a}$；
- 反对称性（antisymmetry）：如果 $\boldsymbol{a} \geq \boldsymbol{b}$ 且 $\boldsymbol{b} \geq \boldsymbol{a}$，那么 $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$；
- 传递性（transitivity）：如果 $\boldsymbol{a} \geq \boldsymbol{b}$ 且 $\boldsymbol{b} \geq \boldsymbol{c}$，那么 $\boldsymbol{a} \geq \boldsymbol{c}$；
- 如果 $\boldsymbol{a} \geq \boldsymbol{b}$，那么 $\lambda\boldsymbol{a} \geq \lambda\boldsymbol{b}$ 对于所有 $\lambda \geq 0$ 成立；
- 如果 $\boldsymbol{a} \geq \boldsymbol{b}$ 且 $\boldsymbol{c} \geq \boldsymbol{d}$，那么 $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{c} \geq \boldsymbol{b} + \boldsymbol{d}$。

基于这个观察，我们是否可以对于一个任意的锥 $\mathcal{K}$，定义一个广义的不等式呢？答案是可以的。我们用“$\geq_{\mathcal{K}}$”来定义如下的广义不等式关系：

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \geq_{\mathcal{K}} \boldsymbol{b} \Leftrightarrow \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b} \geq_{\mathcal{K}} \boldsymbol{0} \Leftrightarrow \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b} \in \mathcal{K},$$

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} >_{\mathcal{K}} \boldsymbol{b} \Leftrightarrow \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b} >_{\mathcal{K}} \boldsymbol{0} \Leftrightarrow \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b} \in \mathrm{int}\mathcal{K},$$

其中，$\mathrm{int}\mathcal{K}$ 表示 $\mathcal{K}$ 的内部 (interior)。可以证明，不等关系“$\geq_{\mathcal{K}}$”同样继承了不等号“$\geq$”的上述所有性质。基于这个推导，我们可以将一个（目标函数为线性函数）凸优化问题一般化为锥优化框架

$$\begin{aligned} \min \quad & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ \text{s.t.} \quad & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x} \geq_{\mathcal{K}} \boldsymbol{0}. \end{aligned}$$

这个形式可以比作锥优化的“标准形式”。可见它和线性规划的标准形式有诸多相似之处。推导到这里，几个很自然的问题就是，这个问题的对偶形式是什么样的？强对偶在这个问题中成立吗？为了回答这些问题，首先引入对偶锥的概念。对于锥 $\mathcal{K}$，它的对偶锥定义为

$$\mathcal{K}^* = \left\{\boldsymbol{y} : \boldsymbol{y}^\top \boldsymbol{x} \geq 0, \quad \forall \boldsymbol{x} \in \mathcal{K}\right\}.$$

有了这个定义，我们来推导锥优化的对偶问题。为了简单起见，我们忽略线性约束，考虑

$$\begin{aligned}\min \quad & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ \text{s.t.} \quad & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \geq_{\mathcal{K}} \boldsymbol{b}\end{aligned}$$

的对偶问题。注意到，对任意的 $\boldsymbol{x} \geq_{\mathcal{K}} \boldsymbol{0}$ 和 $\boldsymbol{y} \geq_{\mathcal{K}^*} \boldsymbol{0}$，我们有 $\boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{y} \geq 0$。我们然后便可以引入拉格朗日乘子使问题等价于

$$\min_{\boldsymbol{x}} \max_{\boldsymbol{y} \in \mathcal{K}^*} \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}^\top (\boldsymbol{b} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}).$$

则对偶函数为

$$\min_{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}^\top (\boldsymbol{b} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}) = \begin{cases} \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{y}, & \text{如果} \boldsymbol{A}^\top \boldsymbol{y} = \boldsymbol{c}, \\ -\infty, & \text{否则}. \end{cases}$$

在 $\boldsymbol{y} \in \mathcal{K}^*$ 中最大化对偶函数，我们可以得到对偶问题

$$\begin{aligned}\max \quad & \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{y} \\ \text{s.t.} \quad & \boldsymbol{A}^\top \boldsymbol{y} = \boldsymbol{c}, \\ & \boldsymbol{y} \geq_{\mathcal{K}^*} \boldsymbol{0}.\end{aligned}$$

完成了对偶问题的推导，我们需要回答强对偶在这个问题中是否成立。简单来说，我们有如下结论。对于上述锥优化的“标准型”的原问题和对偶问题：

- 对偶问题的对偶问题等价于原问题。
- 对原问题可行的任意 $\boldsymbol{x}$ 以及对对偶问题可行的任意 $\boldsymbol{y}$，我们有 $\boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{y}$。
- 如果原问题有下界，且对某些 $\boldsymbol{x}$ 有 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b} \in \text{int}\mathcal{K}$ 严格成立，那么对偶问题可解，且原问题和对偶问题最优目标函数值相等。
- 如果原问题或对偶问题有界且严格可行（$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b} \in \text{int}\mathcal{K}$），$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ 是最优解与下列任意一条件等价：（i）$\boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{y}$；或（ii）$\boldsymbol{y}^\top (\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}) = 0$。

2.4 风险偏好及度量（Risk preferences and risk measures）

本节主要介绍关于风险度量的基本知识。现实中，我们来决策做一件事（比如投资）时，在未来得到的回报往往都是不确定的。为了衡量一件事未来的风险和收益，人们引入了风险度量的概念。一件事的收益可以用随机变量来表示。同时，我们令 $\mathcal{V}$ 为所有随机变量构成的空间，则其风险度量（risk measure）μ 需要满足两个特性：

- 单调性：对于任意的 $\tilde{r}, \tilde{s} \in \mathcal{V}$ 且 $\tilde{r} \geq \tilde{s}$，那么 $\mu[\tilde{r}] \leq \mu[\tilde{s}]$。这里，$\tilde{r} \geq \tilde{s}$ 表示的是 state-wise dominance。
- 平移不变性：对于所有的 $c \in \mathbb{R}$，$\mu[\tilde{r} + c] \leq \mu[\tilde{r}] - c$。

直观来说，单调性表示的意义为：当一件事未来的收益在任何可能性下都高于另一件事，那么它的风险一定是较小的。同时，平移不变性意味着：当一个资产确定性地增加了一定的价值，那么它的风险就会相应减少相同的数值。

基于上述定义，人们定义了非常多的风险度量。其中一个非常著名的风险度量就是在险价值（Value-at-Risk，VaR）。VaR 的数学定义如下：

$$\mathrm{VaR}_\alpha[\tilde{r}] := \inf\{m \in \mathbb{R} \mid \mathbb{P}[\tilde{r} + m \geq 0] \geq 1 - \alpha\}.$$

根据上述定义，VaR 衡量了在给定概率 α 下，一份投资可能的损失。例如，一个公司每个月在 $\alpha = 5\%$ 的 VaR 为一亿元。这意味着公司每个月都有 5% 的可能性损失超过一亿元。或者说，一个一亿元的损失平均每 20 个月就要发生一次。根据定义，我们同时可以将 VaR 和表示受益的随机变量 $\tilde{r}$ 的分位数联系起来。下图显示，当一个随机变量 5% 的分位数为 −0.0263 时，对应的 VaR 的数值便为 0.0263。

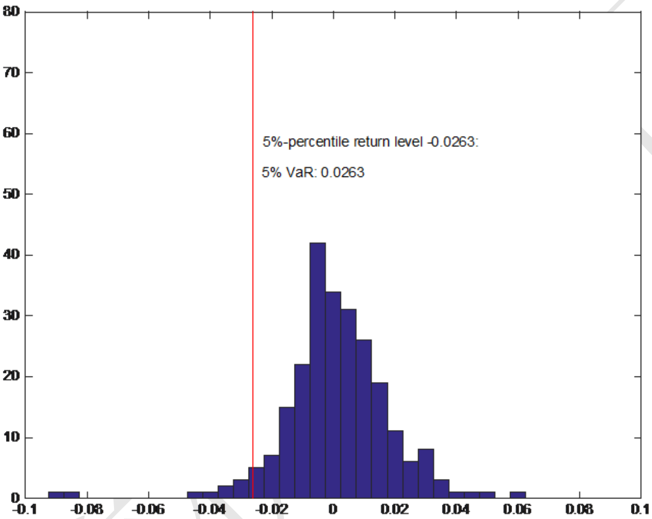

图 2.1: VaR 示例（from lecture slides of Melvyn Sim）。

从上图同样能看出，VaR 的取值只和单独的分位点值相关。而这样的性质会带来一些不便，比如对于有 VaR 介入的优化问题，通常来说都很难求解。同时，VaR 在某些场合不能很好反应出不同投资的风险。假设我们有两种投资策略，其收益分别如下：

- 资产 1：0.95 概率收益 200 万，0.03 概率损失 100 万，0.02 概率损失 200 万；
- 资产 2：0.95 概率收益 200 万，0.03 概率损失 100 万，0.02 概率损失 1000 万。

显而易见资产 2 的风险比资产 1 更大，然而上述两个投资组合的 VaR 都是 100 万。为了解决这个问题，人们又提出了条件风险价值（Conditional Value-at-Risk，CVaR）的概念。CVaR 计算了超过 VaR 值的可能损失的期望值，也就是说对于 $\tilde{r} \sim \mathbb{P}$，

$$\mathrm{CVaR}^*_\alpha[\tilde{r}] \triangleq \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[-\tilde{r} \mid -\tilde{r} \geq \mathrm{VaR}_\alpha(\tilde{r})].$$

这里我们使用 CVaR* 来表示 CVaR，因为我们在后文中将推导出 CVaR 更常用的一个定义。为了区分，我们加上了一个星号上标。上述这个定义使得 CVaR 对于收益/损失的尾部分布的形状更加敏感。我们根据这个定义也可以看出 $\mathrm{CVaR}^*_\alpha[\tilde{r}] \geq \mathrm{VaR}_\alpha(\tilde{r})$。下

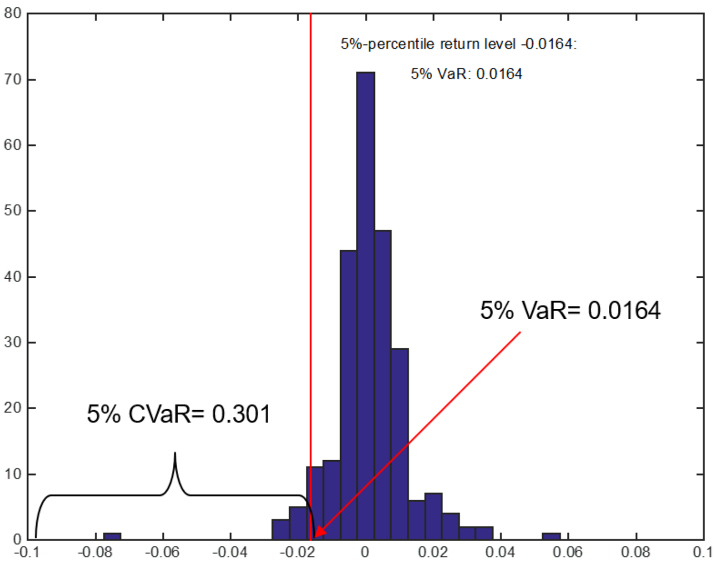

图 2.2: CVaR 示例（from lecture slides of Melvyn Sim）。

图显示了 CVaR 和 VaR 的联系。我们也可以计算出在之前例子中，资产 1 的 CVaR 为 140 万，而资产 2 的 CVaR 为 460 万。

现在我们假设一项投资其未来的收益只能取 T 个可能的值 $r_1, \ldots, r_T$。如果我们取 α 使得 αT 刚好为整数，那么 CVaR 可以等价地表达为

$$\mathrm{CVaR}^*_\alpha[\tilde{r}] = \frac{1}{\alpha T} \max_{\mathcal{S}:\ \mathcal{S}\subseteq[T], |\mathcal{S}|=\alpha T} \sum_{t\in\mathcal{S}} -r_t.$$

但是这个定义并不通用，因为它不能定义当 αT 不是整数的情况。为此，我们将推导出 CVaR 更通用的一个定义。注意到上式可等价地推出：

$$\begin{aligned}
\mathrm{CVaR}^*_\alpha[\tilde{r}] &= \frac{1}{\alpha T} \max_{\substack{\mathcal{S}:\ \mathcal{S}\subseteq[T],\\ |\mathcal{S}|=\alpha T}} \sum_{t\in\mathcal{S}} -r_t \\
&= \frac{1}{\alpha T} \max_{\substack{\boldsymbol{z}\in\{0,1\}^T\\ \boldsymbol{z}^\top\mathbf{1}=\alpha T}} \sum_{t\in[T]} -r_t z_t \\
&= \frac{1}{\alpha T} \max_{\substack{\boldsymbol{z}\in[0,1]^T\\ \boldsymbol{z}^\top\mathbf{1}=\alpha T}} \sum_{t\in[T]} -r_t z_t.
\end{aligned}$$

我们求出上述问题的对偶问题，得到

$$\begin{aligned}
\mathrm{CVaR}_\alpha[\tilde{r}] = \quad \min \quad & s + \tfrac{1}{\alpha T}\mathbf{1}^\top\boldsymbol{p} \\
\text{s.t.} \quad & s\mathbf{1} + \boldsymbol{p} \geq -\boldsymbol{r}, \\
& \boldsymbol{p} \geq \mathbf{0},
\end{aligned}$$

即

$$\mathrm{CVaR}_\alpha[\tilde{r}] = \inf_s \left\{ s + \frac{1}{\alpha}\frac{1}{T}\sum_{t\in[T]}(-r_t - s)^+ \right\}.$$

至此，当 αT 不为整数时，我们可以根据上述推导定义 CVaR 为

$$\mathrm{CVaR}_\alpha[\tilde{r}] \triangleq \inf_v \left\{ v + \frac{1}{\alpha}\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[(-\tilde{r}-v)^+\right] \right\}. \tag{2.1}$$

这也是在优化领域中更常用的关于 CVaR 的定义。可以证明，在这个定义下依然有 $\mathrm{CVaR}_\alpha[\tilde{r}] \geq \mathrm{VaR}_\alpha[\tilde{r}]$。

我们接下来介绍最优化确定等价收益（optimized certainty equivalent，OCE）。对于不确定的收益 $\tilde{r}$，定义其 OCE 为 (Ben-Tal and Teboulle, 2007)

$$S_u(\tilde{r}) = \sup_{\eta\in\mathbb{R}}\{\eta + \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[u(\tilde{r}-\eta)]\}.$$

其中，$u:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$ 为非递减且凹的效用函数，并满足 $u(0)=0$，且 1 是 $u(r)$ 在 $r=0$ 时的次梯度（subgradient）。我们可以通过公式这样解释 OCE：一个决策者希望在未来有 $\tilde{r}$ 的回报，而且在现在可以消费部分 $\tilde{r}$。如果他在现在消费了确定的 η 的价值，那么 $\tilde{r}$ 的现值就是 $\eta+\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[u(\tilde{r}-\eta)]$。对 $\tilde{r}$ 进行现在和未来的最优分配，我们即可得到 OCE。我们可以通过 OCE 来定义对应的风险度量。根据Ben-Tal and Teboulle (2007)，$\mu^{OCE}[\tilde{r}] = -S_u(\tilde{r})$ 是一个一致性风险度量（coherent risk measure）。为了把问题放进凸优化框架，我们记 $v=-\eta$，$U(x)=-u(-x)$。此时 $U:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$ 可以看做一个非递减的凸效用函数，而对应的风险度量表示为

$$\mu^{OCE}[\tilde{r}] = \inf_{v\in\mathbb{R}}\left\{v+\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[U(-\tilde{r}-v)\right]\right\}.$$

对比式(2.1)，我们可以看出 CVaR 是一种特殊的 OCE 度量，满足 $U(r)=r^+/\alpha$。

在鲁棒优化领域，未来收益 $\tilde{r}$ 的分布 $\mathbb{P}$ 往往是不确定的。如果假设分布 $\mathbb{P}$ 处于一个模糊集（ambiguity set）$\mathcal{F}$ 中，那么我们就可以写出在最坏情境（worst case）下对应的风险度量。以 OCE 举例，它在最坏情况下的风险度量写作

$$\mu^{OCE}[\tilde{r}] = \inf_{v\in\mathbb{R}}\left\{v+\sup_{\mathbb{P}\in\mathcal{F}}\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[U(-\tilde{r}-v)\right]\right\}.$$

这样决策优化问题就变成了一个分布鲁棒优化问题。关于分布鲁棒优化问题的求解，具体可以参见第4章。

我们最后介绍凸风险度量（convex risk measure）。对于一个风险度量 μ，它是凸风险度量当且仅当对于任意的 $\tilde{r},\tilde{s}\in\mathcal{V}$，有

$$\mu(\lambda\tilde{r}+(1-\lambda)\tilde{s}) \leq \lambda\mu(\tilde{r})+(1-\lambda)\mu(\tilde{s}).$$

值得一提的是，OCE（包括 CVaR）都是凸风险度量。而且，CVaR 是所有凸风险度量中对 VaR 有最紧上界的一个，即如果 $\mu[\tilde{r}]\geq\mathrm{VaR}_\alpha[\tilde{r}], \forall\tilde{r}\in\mathcal{V}$，那么有 $\mu[\tilde{r}]\geq\mathrm{CVaR}_\alpha[\tilde{r}]\geq\mathrm{VaR}_\alpha[\tilde{r}], \forall\tilde{r}\in\mathcal{V}$。另一个著名的凸风险度量是 shortfall risk measure（Föllmer and Schied, 2002）。由于篇幅所限不在此展开。有关于风险度量系统的知识，感兴趣的读者可以参阅Artzner et al. (1999) 和Föllmer and Schied (2002)。

本章参考文献

Artzner, Philippe, Freddy Delbaen, Jean-Marc Eber, and David Heath, "Coherent measures of risk," *Mathematical Finance*, 1999, *9* (3), 203–228.

Ben-Tal, Aharon and Marc Teboulle, "An old-new concept of convex risk measures: the optimized certainty equivalent," *Mathematical Finance*, 2007, *17* (3), 449–476.

Bertsimas, Dimitris and John N Tsitsiklis, *Introduction to Linear Optimization*, Athena Scientific Belmont, MA, 1997.

Boyd, Stephen and Lieven Vandenberghe, *Convex Optimization*, Cambridge university press, 2004.

Föllmer, Hans and Alexander Schied, "Convex measures of risk and trading constraints," *Finance and Stochastics*, 2002, *6* (4), 429–447.

第 3 章 经典鲁棒优化（Classical robust optimization）

苏向阳

3.1 不确定最优化（Optimization under uncertainty）

在实际生活中不确定性广泛存在，为了更加合理的对不确定问题进行准确描述，不确定性优化逐渐被学界重视。最早在 20 世纪 50 年代 Bellman、Zadeh 和 Charnes 等人便开始对不确定性优化进行了研究 (Chames A, 1959; E, 1970)。在对不确定性优化问题的描述之前，我们先来看一下传统的确定性优化问题：

$$
\begin{aligned}
\min \quad & f(\boldsymbol{x}) \\
\text{s.t.} \quad & h(\boldsymbol{x}) \leq 0; \\
& \boldsymbol{x} \in \mathcal{X}.
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

其中，$\boldsymbol{x} \in \mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^N$ 是决策向量，$f(\boldsymbol{x})$ 为目标函数，$h(\boldsymbol{x})$ 为约束条件。在(3.1)中，无论是约束条件还是目标函数，其对应的参数都是确定的。然而，在实际问题求解中，模型中一些参数我们很难事先确定。对于一些特定的优化问题而言，一个参数的不同就可能导致原本所求得的最优解变得毫无意义 (El Ghaoui, 1998)。为了解决这类问题，不确定性问题的优化求解就变得十分重要。

随着社会的不断发展，我们所需要求解模型的复杂度不断上升，模型的不确定性也在不断扩大，诸如飞机航班的线路规划、电网的最优调度、物流路径的最优规划等等。在实际生活中，造成模型不确定的根源主要来自以下几个方面：

1）数据统计和采集过程造成的数据丢失、数据偏差过大而产生的影响。

2）天气等不可抗力因素的干扰，对问题的分析产生的影响。

3）认知不全导致现有模型与实际生活中存在偏差产生的影响。

4）对于一些难以求解的非凸非线性模型，进行简化描述而产生的影响。

为了更好地对不确定性优化问题进行描述，我们首先给出不确定性优化数学模型的一般表达：

$$
\begin{aligned}
\min \quad & t \\
\text{s.t} \quad & f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) \leq t \quad \forall\, \boldsymbol{z} \in \mathcal{U}; \\
& h(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) \leq 0 \quad \forall\, \boldsymbol{z} \in \mathcal{U}; \\
& \boldsymbol{x} \in \mathcal{X}.
\end{aligned}
\tag{3.2}
$$

在模型(3.2)中，z 为不确定参数，$\mathcal{U}$ 表示不确定参数的集合。为了求解模型(3.2)，以 Bellman 等人的工作为开端，相关学者提出了一系列的求解优化方法，诸如：随机规划 (Birge and Louveaux, 2011)、灵敏度分析 (Ben-Tal et al., 2009)、鲁棒优化 (Ben-Tal et al., 2009) 等等。

随机规划 (Stochastic programming). 当 $\mathcal{U}$ 是一个随机不确定集合时，上述模型成为了处理随机性数据的规划求解问题，即随机规划。随机规划根据不同的决策规则，可以分为三类：

1. 期望模型。首先确定不确定参数的分布模型，然后通过选取离散或连续的概率分布函数对不确定参数进行描述，最终通过期望来代替不确定参数，使不确定问题转化为确定性问题并求解。如果目标函数和约束中存在随机参数，只需要将各随机参数转化为期望值，便可以将模型转化为确定性模型进而求解。
2. 机会约束规划模型。通俗来讲，机会约束规划模型是指允许决策不满足约束条件，但是决策满足约束条件的概率不低于事先设定的置信水平的规划求解模型。该模型是一种在一定概率下达到最优的理论。该模型需要事先给定置信水平 α。模型描述如下：
$$\begin{aligned} \min \quad & f(\boldsymbol{x}) \\ \text{s.t.} \quad & \mathbb{P}[h(\boldsymbol{x}, \tilde{z}) \leq 0)] \geq \alpha; \\ & \boldsymbol{x} \in \mathcal{X}. \end{aligned} \tag{3.3}$$
3. 相关机会约束规划模型 (Liu, 1997)。相关机会约束规划是当决策者面临多个事件时，希望最大化满足这些事件的概率而产生的一种规划方法。无论是期望模型还是机会约束规划模型，最终都是确定性优化求解并得出准确值。相关机会规划虽然求解结果是确定的，但并不代表一定实现，规划的目的是极大化该事件的实现概率。

灵敏度分析 (Sensitivity analysis). 灵敏度分析根据需求的不同也被划分为局部灵敏度分析 (local sensitivity analysis) 和全局灵敏度分析 (global sensitivity analysis)。这里以模型(3.11)为例对灵敏度分析展开一个简短的描述：

$$\begin{aligned} Z = \min \quad & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ \text{s.t} \quad & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x} \geq 0. \end{aligned} \tag{3.4}$$

由于灵敏度分析应对的是不确定性优化问题，因此有时会遇到需要添加新约束的情况。这种情况下，如果最优解满足新添加的约束，则原模型的最优解仍是新模型的最优解，若不满足新添加的约束，则需要重新计算。但更多的研究内容是数据变化对最优解产生的影响。即：$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{c}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 变化导致模型最优值 Z 发生的改变。灵敏度分析研究热点问题是，当参数在什么范围内进行波动时，模型的最优解 $\boldsymbol{x}^*$ 不会发生改变，具体的原理涉及到了基变量、非基变量、对偶单纯性等相关知识，这里不再详细描述，如果有兴趣的读者可以参考 (陈宝林, 2005)。灵敏度分析方法虽然相对其他不确定性优

化方法而言比较简单，但灵敏度分析方法仅是一个评价分析工具，大大限制了该方法的使用领域。

鲁棒优化 (Robust optimization). 鲁棒优化也是一类事前分析方法，之所以单独列出来，是因为鲁棒优化是针对传统优化方法不足，由鲁棒控制理论发展而来替代随机规划和灵敏度分析的方法。在模型(3.2)中，如果 $\mathcal{U}$ 是一个有界闭集，上述模型成为了处理不确定集合内所有不确定参数的优化问题，即鲁棒优化。相对于传统不确定性优化方法，鲁棒优化有如下优点：

1. 鲁棒优化在建模过程中充分考虑了不确定性，并以集合的形式对变量进行描述。相对于随机规划和模糊规划，鲁棒优化不需要不确定参数的分布模型和不确定参数的模糊隶属函数。
2. 鲁棒优化的约束条件是严格成立的，即只要不确定参数 z 属于不确定集合 $\mathcal{U}$，所求出的解都能满足约束条件。即优化模型具有较强的鲁棒性，最优解对参数变化的敏感性低。

鲁棒优化虽然有着随机规划和模糊规划没有的优势，但是鲁棒优化模型本身是一个半无限优化问题，很难直接进行求解，鲁棒优化的计算结果受限于不确定集 $\mathcal{U}$ 的不同。我们会在3.2小节和3.3小节分别对鲁棒优化中的不确定集 $\mathcal{U}$ 和鲁棒优化对等式及转换理论进行阐述。

3.1.1 鲁棒优化理论的发展

1973 年，Soyster 首次用鲁棒优化的思想来解决线性规划中的不确定性 (Soyster, 1973)。虽然该方法基于最坏情况的基础上进行考虑，结果过于保守，但是 Soyster 为不确定性优化的发展开拓了全新的思路，开辟了鲁棒优化发展的道路。

Mulvey 等人在 1995 年首次提出鲁棒优化的概念 (Mulvey et al., 1995)。他们给出了基于情景集鲁棒优化的一般模型框架，提出了解鲁棒（solution robust）和模型鲁棒（model robust）的概念，通过将目标函数拆分为聚合函数与罚函数来消除不确定参数对结果的影响。在此之后，不断有学者投入到鲁棒优化的研究中，在这方面的奠基之作是在 20 世纪 90 年代由以色列学者 Ben-Tal 和 Nemirovski (Ben-Tal and Nemirovski, 1998, 1999) 和美国伯克利大学的 Ghaoui (Laurent and Herv, 1997) 提出。Ben-Tal 证明了如果不确定集合 $\mathcal{U}$ 是一个椭球不确定集（后面具体介绍），那么对于一些最重要的一般凸优化问题 (线性规划、二次约束规划、半定规划等)，其鲁棒对等式要么是精确的，要么近似是一个可处理的问题，可以采用诸如内点法的算法在多项式时间内求解。除此之外，Ben-Tal 给出了一般不确定半定规划问题的计算可处理的近似鲁棒对等式。在此之后，Ben-Tal 等人又提出了可调鲁棒优化概念等概念，并被广泛运用到各行各业中。

21 世纪初，Bertsimas 和 Sim (Bertsimas and Sim, 2004) 在 Soyster、Ben-Tal 和 Nemirovski 的研究基础上提出了全新的鲁棒优化框架。Bertsimas 和 Sim 的鲁棒优化涵盖了离散

优化，最主要的特点是所建立的鲁棒对等式不增加问题求解的复杂度。另一方面，Bertsimas 和 Sim 的鲁棒优化允许出现约束违背 (constraint violation) 的情况，在这种情况下得到的鲁棒解大概率具有可行性。Bertsimas 和 Sim 的理论由于其易处理性及实用性，受到了学界的广泛认可。

3.1.2 鲁棒优化研究路线

鲁棒优化自提出以来便受到广泛关注，也不断地被各个领域的学者应用到各行各业中，对于鲁棒优化问题的求解思路也是大同小异。具体如下：

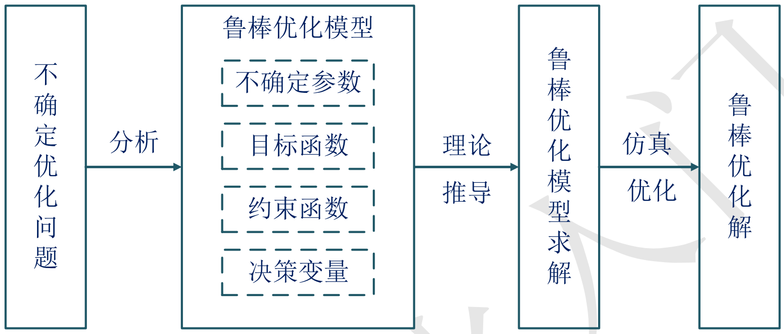

图 3.1: 鲁棒优化研究路线

在前面我们已经提到，当模型(3.2)中的不确定集为闭集合时，(3.2)可以视为一个鲁棒优化模型。但是模型(3.2)通常很难直接求解，为了方便求解我们需要通过数学优化理论将模型(3.2)转换为一个能用商业软件直接求解的问题 (以凸优化问题为主)，即**鲁棒对等问题** (Robust Counterpart)。

目前，鲁棒优化的研究方向主要体现在不确定集的选取及鲁棒对等转换理论上：

1. 不确定集的选取。如何选取合适的不确定集对不确定参数进行准确的描述，直接影响了模型的优化结果，而且不同的不确定集所对应的鲁棒对等问题也不同。

2. 鲁棒对等转换理论。如何把已经构建好的鲁棒优化模型转化成一个在计算上可通过一般商业优化软件直接求解的模型，直接影响了优化时间和优化结果。

3.2 不确定集（Uncertainty set）

鲁棒优化中，不同的不确定集对结果影响十分明显，当不确定集合越精细、模型复杂度越高，求解越困难。当不确定集合越宽泛时，所求出的最优解越保守，越不经济。为了权衡二者的关系，如何选择一个适合的不确定集合一直是相关学者的一个研究热点。常见的不确定集合主要有如下几类：

1. 盒式不确定集（Box uncertainty set）

$$U_\infty = \{z : \|z\|_\infty \leq \tau\}\,. \tag{3.5}$$

盒式不确定集合是最简单的不确定集合，也被称作区间集。由于鲁棒优化是考虑最坏情况下的优化求解方法，对于一些模型可能会出现所有不确定参数都在区间集上下界进行优化的情况，然而实际中该情况发生的概率极低或不会发生，很容易出现过度保守的情况。

2. 椭球不确定集（Ellipsoidal uncertainty set）(Ben-Tal et al., 2009; Boyd and Vandenberghe, 2006)：椭球集/椭球交集

$$\mathcal{U}=\left\{z:\sum_{i\in[N]}z_i^2\le\Omega^2\right\}=\{z:\|z\|_2\le\Omega\} \tag{3.6}$$

$$\mathcal{U}=\left\{z:(z-\boldsymbol{\mu})^\top\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(z-\boldsymbol{\mu})\le\Omega^2\right\} \tag{3.7}$$

在 Ben-Tal 的经典著作《Robust Optimization》称式(3.6)为椭球不确定集合，式(3.7)为椭球交集不确定集合。在 Boyd 的经典著作《Convex Optimization》中称(3.7)为椭球集，(3.6)为退化的椭球。为了方便描述，本文以 Ben-tal 的描述为准。上述公式中，z 为不确定参数向量，$\boldsymbol{\mu}$ 为不确定参数的期望或预测值向量，$\boldsymbol{\Sigma}$ 为协方差矩阵，Ω 为不确定度，用以刻画不确定参数扰动范围。相对于椭球集，椭球交集能更准确地对不确定参数进行描述，但是椭球交集在求解二次优化问题、锥二次优化、半定规划问题时难以直接求解，Ben-tal 已经证明了这些优化问题中使用椭球交集时是 NP-hard 问题。如果采用椭球集，在线性规划、二次优化问题和锥二次优化时可以转化为可处理问题，但是在半定规划中，仍需满足诸多限制才能求解。椭球不确定集虽然可以很好地表示很多类型集合，方便数据输入，在一定程度上可以体现不确定参数之间的关联性。但是椭球不确定集会增加问题求解的复杂度，因此应用不够广泛。

3. 多面体不确定集（Polyhedral uncertainty set）

$$\mathcal{U}=\{z:\boldsymbol{A}z=\boldsymbol{b},z\ge 0\}$$

尽管多面体不确定集难以刻画不确定参数间的相关性，但其具有线性结构、易于控制不确定度，在实际工程问题中广受青睐 (Bertsimas and Thiele, 2006)。

4. 基数/预算不确定集（Budget uncertainty set）

$$\mathcal{U}=\left\{z:\sum_{i\in[N]}|z_i|\le\Gamma,|z_i|\le 1\ \forall i\in[N]\right\} \tag{3.8}$$

最先提出这种不确定集合的是 Bertsimas and Sim (2004)。由于这种不确定集合可以基于不确定参数偏移量的相对值进行构建，能够对更精确描述参数的波动情况，因此也被称为基数不确定集 (Baringo and Baringo, 2017; Bertsimas et al., 2010)。

5. 数据驱动不确定集（Data-driven uncertainty set）

无论是采用盒式还是椭球式不确定集，都会出现所得到的解过于保守的情况，为了解决解的过度保守，一些学者根据历史数据进行不确定集的构造，也被称为数据驱动不确定集。数据驱动不确定集的构建，是使用统计假设检验的置信区间来精确描述不

确定参数的分布。在 04 年 Bertsimas、Sim 和 09 年 Ben-Tal 等人的研究中，假定不确定参数为，其分布不能精确获得。最初始的研究是基于数据结构特性做出的先验假设。这些方法假设是没有依赖的，但是不会认为边界分布是确定的。13 年 Bertsimas 对数据驱动不确定集合的构造进行了进一步的改进。Bertsimas 假设数据 S 有独立分布，这些 S 可以为不确定参数的分布添加更多的细节。并且通过这些细节信息，设计一个概率保证的集合，相对于传统的集合，新的集合更小，所求出的结果也不是那么的精确。关于数据驱动的先验假设和假设检验可以参照 Bertsimas 的研究 (Bertsimas et al., 2018)。

除去以上常见的不确定集合，一些学者为了适应不同的情况以及更精确地对不确定参数进行描述，还衍生出了很多种组合不确定集合，具体如：盒式 + 椭球式不确定集、盒式 + 多面体不确定集、盒式 + 椭球式 + 多面体不确定集等等。

3.3 鲁棒对等问题（Robust counterpart）

让我们先回到模型 (3.2)：

$$
\begin{aligned}
&\min t \\
&\text{s.t. } f(\boldsymbol{x}, z) \le t \quad \forall z \in \mathcal{U}, \\
&\qquad h(\boldsymbol{x}, z) \le 0 \quad \forall z \in \mathcal{U}, \\
&\qquad \boldsymbol{x} \in \mathcal{X}.
\end{aligned}
$$

在这个模型中，假如 z 有 N 个可能的取值 $\mathcal{U} = \{z_1, \ldots, z_N\}$，那么给定 $\boldsymbol{x}$ 和 t，约束 $f(\boldsymbol{x}, z) \le t\ \forall z \in \mathcal{U}$ 就等价于

$$
f(\boldsymbol{x}, z_i) \le t \quad \forall i \in [N],
$$

共 N 个约束。相应的，$h(\boldsymbol{x}, z) \le 0\ \forall z \in \mathcal{U}$ 也等价于

$$
h(\boldsymbol{x}, z_i) \le 0 \quad \forall i \in [N],
$$

共 N 个约束。

然而，如3.2小节所描述，常见的不确定集合大部分都是连续集 (continuous set) 而非离散集 (discrete set), 也即对于模型 (3.2) 来说，它将有无限多个约束，由此产生了一个半无限规划模型。显然，这是难以直接求解的。为了对鲁棒优化问题进行求解，我们需要对原模型做出一定程度的转化，使得转化后模型能够通过商业软件直接进行求解。在这方面做出重要突破的学者有 Allen L. Soyster、Aharon Ben-Tal、Arkadi Nemirovski、Dimitris Bertsimas 和 Melvyn Sim 等。

实际上，对于任意形如

$$
g(\boldsymbol{x}, z) \le 0 \quad \forall z \in \mathcal{U},
$$

的约束，我们都可以等价地将其写为：

$$\sup_{z \in \mathcal{U}} g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) \leq 0.$$

当函数 g 和集合 $\mathcal{U}$ 满足一定条件时，不等式左边的问题可以转化为线性规划问题、凸优化问题、或者是锥优化问题。相应地，所对应的约束转化为线性约束、凸约束、或者锥约束。从而使得模型 (3.2)能用商业软件进行求解。

一般地，我们定义形如

$$g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) \leq 0 \quad \forall \boldsymbol{z} \in \mathcal{U}$$

的式子为鲁棒约束 (robust constraint)。而将模型 (3.2)称为鲁棒对等问题 (robust counterpart)。而整个转化的过程大多数时候依赖于对偶理论。举例如下：

示例 3.1:考虑如下鲁棒优化问题

$$\begin{aligned} \min \quad & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ \text{s.t.} \quad & b_0 + \boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{z} \geq 0 \quad \forall \boldsymbol{z} \in \mathcal{U}, \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}. \end{aligned} \tag{3.9}$$

其中 $\mathcal{U} = \{\boldsymbol{z} : \boldsymbol{A}\boldsymbol{z} = \boldsymbol{b}, \boldsymbol{z} \geq 0\}$.

约束 $b_0 + \boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{z} \geq 0 \ \forall \boldsymbol{z} \in \mathcal{U}$ 等价于 $b_0 + \inf_{\boldsymbol{z} \in \mathcal{U}} \boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{z} \geq 0$。对于不等式左边的问题 $\inf_{\boldsymbol{z} \in \mathcal{U}} \boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{z}$，由 2.1 可知其对偶问题为：

$$\begin{aligned} \sup \quad & \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{p} \\ \text{s.t.} \quad & \boldsymbol{A}^\top \boldsymbol{p} \leq \boldsymbol{x}. \end{aligned}$$

也即约束 $b_0 + \boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{z} \geq 0 \ \forall \boldsymbol{z} \in \mathcal{U}$ 等价于

$$b_0 + \sup_{\boldsymbol{A}^\top \boldsymbol{p} \leq \boldsymbol{x}} \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{p} \geq 0 \Leftrightarrow b_0 + \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{p} \geq 0 \quad \exists \boldsymbol{p} \text{ s.t. } \boldsymbol{A}^\top \boldsymbol{p} \leq \boldsymbol{x}.$$

由此，可以得到问题 (3.9) 的鲁棒对等问题为：

$$\begin{aligned} \min \quad & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ \text{s.t.} \quad & b_0 + \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{p} \geq 0, \\ & \boldsymbol{A}^\top \boldsymbol{p} \leq \boldsymbol{x}, \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}. \end{aligned} \tag{3.10}$$

3.4 经典鲁棒模型

接下来，我们将以Bertsimas and Sim (2003) 为蓝本，简要介绍在鲁棒优化理论发展过程中经典的的三个模型：他们分别来自Soyster (1973)、Ben-Tal and Nemirovski (1999) 和Bertsimas and Sim (2003)。

3.4.1 Soyster 的鲁棒模型

如第一章所介绍，Soyster假设以下线性规划问题中

$$
\begin{aligned}
\max \quad & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\
\text{s.t.} \quad & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{b}, \\
& \boldsymbol{x} \ge 0,
\end{aligned} \tag{3.11}
$$

系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的每一列都在一个凸集中（也称为列不确定性），也即，$\boldsymbol{A}_j \in \mathcal{U}_j$，那么线性规划问题(3.11)将变成如下问题：

$$
\begin{aligned}
\max \quad & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{j\in[N]} \boldsymbol{A}_j x_j \le \boldsymbol{b} \quad \forall \boldsymbol{A}_j \in \mathcal{U}_j, j \in [N], \\
& \boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{0}.
\end{aligned} \tag{3.12}
$$

其所对应的鲁棒对等问题为

$$
\begin{aligned}
\max \quad & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{j\in[N]} \bar{\boldsymbol{A}}_j x_j \le \boldsymbol{b}, \\
& \boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{0}.
\end{aligned} \tag{3.13}
$$

其中，$\bar{a}_{ij} = \sup_{\boldsymbol{A}_j \in \mathcal{U}_j} a_{ij}$。也即，对于每一个参数 a_{ij} 都取其在不确定集范围内的最大值。而这样得到的解虽然具有鲁棒性，但是同时也非常保守。

3.4.2 Ben-Tal 和 Nemirovski 的鲁棒模型

不同于 Soyster (1973)，Ben-Tal and Nemirovski (2000) 假设 $\boldsymbol{A}$ 的第 $i(i \in [M])$ 行中，只有部分系数---用 $\mathcal{J}_i$ 表示---具有不确定性。如果我们用 $\tilde{a}_{ij}$ 表示具有不确定性的系数，且 $\tilde{a}_{ij} = a_{ij} + \hat{a}_{ij} z_{ij}$。其中，$\hat{a}_{ij}$ 为波动范围，ξ_{ij} 为在 $[-1, 1]$ 内对称分布的随机变量，且满足 $\|\boldsymbol{z}_i\|_2 \le \Omega$。也即

$$
\begin{aligned}
\max \quad & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{j\in[N]} (a_{ij} + z_{ij}\hat{a}_{ij}) x_j \le b_i \quad \forall \boldsymbol{z}_i \in \mathcal{U} := \{\boldsymbol{z} : \|\boldsymbol{z}\|_2 \le \Omega\}, i \in [M], \\
& \boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{0}.
\end{aligned} \tag{3.14}
$$

其所对应的鲁棒对等问题为

$$
\begin{aligned}
\max \quad & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{j\in[N]} a_{ij} x_j + \Omega \sqrt{\sum_{j\in\mathcal{J}_i} \hat{a}_{ij}^2 x_j^2} \le b_i, \\
& \boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{0}.
\end{aligned} \tag{3.15}
$$

在此问题中，Ω 为一给定的常量，并无直观的意义。求解结果高度依赖于常量 Ω。此外，此问题虽然可以通过调节 Ω 来避免 Soyster (1973) 的极端保守情况，仍然比较保守。同时，此问题为二阶锥规划问题，求解起来稍显繁琐。

3.4.3 Bertsimas 和 Sim 的鲁棒模型

为了克服 Soyster (1973) 的保守性和 Ben-Tal and Nemirovski (2000) 中使用椭球不确定集而导致二阶锥规划问题，对于系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中的第 i 行，Bertsimas and Sim (2004) 提出了预算不确定集 (budget uncertainty set):

$$\mathcal{U}_i = \{z_i : |z_{ij}| \le 1\ \forall j \in [N], \|z_i\|_1 \le \Gamma_i\}.$$

其中，$\Gamma_i \in [0, |\mathcal{J}_i|], |\mathcal{J}_i|$ 表示第 i 行中不确定的参数个数。也即，通过引入参数 Γ_i 来调节模型的保守程度。假设不确定的参数个数不超过 $\lfloor\Gamma_i\rfloor$ 个，其中 $\lfloor\Gamma_i\rfloor$ 是小于等于 Γ_i 的最大整数，并且假设 a_{ij} 的波动范围为 $(\Gamma_i - \lfloor\Gamma_i\rfloor)\hat{a}_{ij}$，Bertsimas 和 Sim 提出以下鲁棒优化模型：

$$\begin{aligned}
\max\quad & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\
\text{s.t.}\quad & \sum_{j\in[N]} a_{ij}x_j + \max_{\{\mathcal{S}_i\cup\{t_i\}|\mathcal{S}_i\subseteq\mathcal{J}_i,|\mathcal{S}_i|=\lfloor\Gamma_i\rfloor,t_i\in\mathcal{J}_i\backslash\mathcal{S}_i\}} \left\{\sum_{j\in\mathcal{S}_i} \hat{a}_{ij}y_j + (\Gamma_i - \lfloor\Gamma_i\rfloor)\,\hat{a}_{it_i}y_t\right\} \le b_i \quad \forall i \in [M], \\
& -y_j \le x_j \le y_j \quad \forall j \in [N], \\
& \boldsymbol{l} \le \boldsymbol{x} \le \boldsymbol{u}, \\
& \boldsymbol{y} \ge \boldsymbol{0}.
\end{aligned} \tag{3.16}$$

当 Γ_i 为整数时，此时 $\Gamma_i = \lfloor\Gamma_i\rfloor$，对第 i 个约束，有如下形式:

$$\sum_{j\in[N]} a_{ij}x_j + \max_{\{\mathcal{S}_i\cup\{t_i\}|\mathcal{S}_i\subseteq\mathcal{J}_i,|\mathcal{S}_i|=\lfloor\Gamma_i\rfloor,t_i\in\mathcal{J}_i\backslash\mathcal{S}_i\}} \left\{\sum_{j\in\mathcal{S}_i} \hat{a}_{ij}y_j\right\} \le b_i \tag{3.17}$$

当 Γ_i 的值为 0 时，变量的系数均为标称值，约束变为名义问题（nominal problem）。当 $\Gamma_i = |\mathcal{J}_i|$ 时，此时所有的不确定元素均不为标称值，模型等价于 Soyster 模型。当 Γ_i 的值介于最大值和最小值之间变动时，模型的保守度也相应变动。当 Γ_i 的值为 $\Omega_i\sqrt{\sum_{j\in\mathcal{J}_i}\left(\hat{a}_{ij}^2x_j^2\right)}$ 时，约束违背（具体参考Bertsimas and Sim 2004）的概率边界值与 Ben-tal 一致。因此，当 Γ_i 的值过小时，鲁棒优化模型保守性差，较大概率发生约束违背。当 Γ_i 的值过大时，计算结果过于保守。模型(3.16)是非线性模型，不能直接求解。

命题 3.1: (Bertsimas and Sim, 2004)

给定任意的 $\boldsymbol{x}^*$，定义

$$\beta_i(\boldsymbol{x}^*, \Gamma_i) = \max_{\{\mathcal{S}_i\cup\{t_i\}|\mathcal{S}_i\subseteq\mathcal{J}_i,|\mathcal{S}_i|=\lfloor\Gamma_i\rfloor,t_i\in\mathcal{J}_i\backslash\mathcal{S}_i\}} \left\{\sum_{j\in\mathcal{S}_i} \hat{a}_{ij}y_j + (\Gamma_i - \lfloor\Gamma_i\rfloor)\,a_{it_i}y_{t_i}\right\}$$

那么，

$$\begin{aligned} \beta_i\left(\boldsymbol{x}^*, \Gamma_i\right) = \max \quad & \sum\nolimits_{j\in\mathcal{J}_i} \hat{a}_{ij}\left|x_j^*\right| z_{ij} \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{j\in\mathcal{J}_i} z_{ij} \le \Gamma_i \\ & 0 \le z_{ij} \le 1 \quad \forall j \in \mathcal{J}_i \end{aligned} \tag{3.18}$$

♠

由此命题可将模型(3.16)转化成如下对等模型：

$$\begin{aligned} \max \quad & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{j\in[N]} a_{ij}x_j + \phi_i\Gamma_i + \sum_{j\in\mathcal{J}_i} p_{ij} \le b_i && \forall i \in [M], \\ & \phi_i + p_{ij} \ge \hat{a}_{ij}y_j && \forall j \in \mathcal{J}_i, i \in [M], \\ & -y_j \le x_j \le y_j && \forall j \in [N], \\ & l_j \le x_j \le u_j && \forall j \in [N], \\ & p_{ij} \ge 0 && \forall j \in \mathcal{J}_i, i \in [M], \\ & y_j \ge 0 && \forall j \in [N], \\ & \phi_i \ge 0 && \forall i \in [M]. \end{aligned} \tag{3.19}$$

模型转化的理论依据是对偶理论，具体的证明过程在作者稿件中有详细描述，有兴趣的读者可以自行翻阅，这里不再赘述。在此基础上，Bertsimas and Sim (2003) 提出了鲁棒离散优化的模型:

$$\begin{aligned} \max \quad & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} + \max_{\{\mathcal{S}_0 | \mathcal{S}_0 \subseteq \mathcal{J}_0, |\mathcal{S}_0| \le \Gamma_0\}} \left\{ \sum_{j\in\mathcal{S}_0} d_j \left|x_j\right| \right\} \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{j\in[N]} a_{ij}x_j + \\ & \max_{\{\mathcal{S}_i \cup \{t_i\} | \mathcal{S}_i \subseteq \mathcal{J}_i, |\mathcal{S}_i| = \lfloor \Gamma_i \rfloor, t_i \in \mathcal{J}_i \setminus \mathcal{S}_i\}} \left\{ \sum_{j\in\mathcal{S}_i} \hat{a}_{ij}\left|x_j\right| + \left(\Gamma_i - \lfloor \Gamma_i \rfloor\right) \hat{a}_{it_i}\left|x_{t_i}\right| \right\} \le b_i && \forall i \in [M], \\ & x_j \in \mathbb{Z} && \forall j \in [N], \\ & \boldsymbol{l} \le \boldsymbol{x} \le \boldsymbol{u}. \end{aligned} \tag{3.20}$$

其中，Γ_0 是区间 $[0, |\mathcal{J}_0|]$ 内的整数，$\mathcal{J}_0 = \{j | d_j > 0\}$, $|\mathcal{J}_0|$ 是 $\boldsymbol{c}$ 中不确定元素的个数。不同于Bertsimas and Sim (2004)，Bertsimas and Sim (2003) 考虑了目标函数的不确定性。

同样的，模型(3.20)无法直接求解，但可以转化为如下混合整数规划模型：

$$
\begin{aligned}
\max\quad & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} + \phi_0\Gamma_0 + \sum_{j\in\mathcal{J}_0} p_{0j} \\
\text{s.t.}\quad & \sum_{j\in[N]} a_{ij}x_j + \phi_i\Gamma_i + \sum_{j\in\mathcal{J}_i} p_{ij} \le b_i && \forall i\in[M], \\
& \phi_0 + p_{0j} \ge d_j y_j && \forall j\in\mathcal{J}_0, \\
& \phi_i + p_{ij} \ge \hat{a}_{ij} y_j && \forall j\in\mathcal{J}_i, i\in[M], \\
& p_{ij} \ge 0 && \forall j\in\mathcal{J}_i, i\in[M], \\
& \phi_i \ge 0 && \forall i\in[M]\cup\{0\}, \\
& x_i \in \mathbb{Z} && \forall i\in[M], \\
& \boldsymbol{l} \le \boldsymbol{x} \le \boldsymbol{u}, \\
& -\boldsymbol{y} \le \boldsymbol{x} \le \boldsymbol{y}, \\
& \boldsymbol{y} \ge \boldsymbol{0}.
\end{aligned}
\tag{3.21}
$$

接下来，我们节选Bertsimas and Sim (2004) 中的组合优化的例子来简要探讨鲁棒优化的具体运用。传统的组合优化一般会考虑如下的二次规划模型：

$$
\begin{aligned}
\max\quad & \boldsymbol{p}^\top \boldsymbol{x} - \phi(\boldsymbol{\sigma}\bullet\boldsymbol{x})^\top(\boldsymbol{\sigma}\bullet\boldsymbol{x}) \\
\text{s.t.}\quad & \boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{1} = 1, \\
& \boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{0}.
\end{aligned}
\tag{3.22}
$$

其中，x_i 定义决策变量代表每支股票的投资比例，p_i 和 σ_i 分别为股票 i 的期望回报率与回报率标准差，ϕ 是控制风险和回报之间交易的一个参数。

在Bertsimas and Sim (2004) 中，作者并没有直接考虑二次规划问题，而是考虑了如下的组合优化问题：模型(3.22)所对应的鲁棒优化模型为：

$$
\begin{aligned}
\max\quad & z \\
\text{s.t.}\quad & z \le \boldsymbol{p}^\top \boldsymbol{x} + \max_{\{\mathcal{S}\cup\{t\}|\mathcal{S}\subseteq[N],|\mathcal{S}|=\lfloor\Gamma\rfloor,t\in[N]\setminus\mathcal{S}\}} \left\{ \sum_{j\in\mathcal{S}} \sigma_j x_j + (\Gamma - \lfloor\Gamma\rfloor)\,\sigma_t x_t \right\}, \\
& \boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{1} = 1, \\
& \boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{0}.
\end{aligned}
\tag{3.23}
$$

根据命题3.4.3，我们可将模型(3.23)写为

$$
\begin{aligned}
\max\quad & \min_{\boldsymbol{z}\in\mathcal{U}} \boldsymbol{p}^\top \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^\top(\boldsymbol{\sigma}\bullet\boldsymbol{z}) \\
\text{s.t.}\quad & \boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{1} = 1, \\
& \boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{0}.
\end{aligned}
$$

其中，

$$
\mathcal{U} = \left\{ \boldsymbol{z} \mid \sum_{j\in[N]} z_j \le \Gamma, 0 \le z_j \le 1\ \forall j\in[N] \right\}
\tag{3.24}
$$

近些年，各种优化工具层出不穷，大部分鲁棒优化问题都可以用优化工具直接求解。我们将在本书第十章介绍相关内容。

本章参考文献

A, Cooper WW Chames, *Chance-Constrained Programming*, INFORMS, 1959.

Baringo, Luis and Ana Baringo, "A Stochastic Adaptive Robust Optimization Approach for the Generation and Transmission Expansion Planning," *IEEE Transactions on Power Systems*, 2017, *PP* (99), 1–1.

Ben-Tal, A. and A. Nemirovski, "Robust Convex Optimization," *Mathematics of Operations Research*, 1998, *23* (4), 769–805.

— **and** — , "Robust solutions of uncertain linear programs," *Operations Research Letters*, 1999, pp. 1–13.

Ben-Tal, Aharon and Arkadi Nemirovski, "Robust solutions of linear programming problems contaminated with uncertain data," *Mathematical Programming*, 2000, *88* (3), 411–424.

— **, Laurent El Ghaoui, and Arkadi Nemirovski**, *Robust Optimization* 2009.

Bertsimas, Dimitris and Aurélie Thiele, "Robust and data-driven optimization: modern decision making under uncertainty," in "Models, methods, and applications for innovative decision making," INFORMS, 2006, pp. 95–122.

— **and Melvyn Sim**, "Robust discrete optimization and network flows," *Mathematical Programming*, 2003, *98* (1-3), 49–71.

— **and** — , "The Price of Robustness," *Operations Research*, 2004, *52* (1), 35–53.

Bertsimas, Dimitris J., David B. Brown, and Constantine Caramanis, "Theory and Applications of Robust Optimization," *Siam Review*, 2010, *53* (3), 464–501.

Bertsimas, Dimitris, Vishal Gupta, and Nathan Kallus, "Data-driven robust optimization," *Mathematical Programming*, 2018, *167* (2), 235–292.

Birge, John R and Francois Louveaux, *Introduction to stochastic programming* 2011.

Boyd, Stephen and Lieven Vandenberghe, "Convex optimization," *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2006, *51* (11), 1859–1859.

E, Bellmann R., "Decision Making in a Fuzzy Environment," *Management science*, 1970, (17).

Ghaoui, Laurent Oustry Francois Lebret El, "Robust Solutions to Uncertain Semidefinite Programs," *SIAM Journal on Optimization*, 1998, *9(1)*, 33–52.

Laurent, El Ghaoui I. and Lebret I. Herv, "Robust Solutions To Least-Squares Problems With Uncertain Data," in "International Workshop on Recent Advances in Total Least Squares Techniques & Errors-in-variables Modeling" International Workshop on Recent Advances in Total Least Squares Techniques & Errors-in-variables Modeling 1997.

Liu, Baoding, "Dependent-chance programming: A class of stochastic optimization," *Computers & Mathematics with Applications*, 1997, *34* (12), 89–104.

Mulvey, John M, Robert J Vanderbei, and Stavros A Zenios, "Robust optimization of large-scale systems," *Operations research*, 1995, *43* (2), 264–281.

Soyster, Allen L., "Technical Note - Convex Programming with Set-Inclusive Constraints and Applications to Inexact Linear Programming.," *Operations Research*, 1973, *21* (5), 1154–1157.

陈宝林, 最优化理论与算法, 清华大学出版社, 2005.

第 4 章 分布鲁棒优化（Distributionally robust optimization）

章宇

现实世界的优化问题指在满足相关约束条件的前提下，确定一组决策变量的值，使预设的目标函数值最优。相关研究成果（理论、模型、算法、应用）在管理科学、金融工程、军事指挥等领域发挥着巨大指导作用，创造了巨大的社会经济价值。

由于本书定位为入门级、科普级，本章将以优化问题中一类简单但重要的线性优化（亦称线性规划）问题为例，阐述**分布鲁棒优化**的基本思想、基本模型、基本结论。感兴趣的读者需细读相关文献以获得更深入广泛的理解。

线性规划问题 (4.1) 中，决策变量为 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^N$，环境参数包括费用向量 $\boldsymbol{a}_0 \in \mathbb{R}^N$、约束条件左端项系数向量 $\boldsymbol{a}_m \in \mathbb{R}^N$、右端项系数 $b_m \in \mathbb{R}$，这些参数为确定值。线性规划可用于解决许多现实问题，例如投资组合优化、生产计划、最短路等问题。

$$\begin{aligned} \min_{\boldsymbol{x}} \quad & \boldsymbol{a}_0^\top \boldsymbol{x}, \\ \text{s.t.} \quad & \boldsymbol{a}_m^\top \boldsymbol{x} \le b_m \quad m \in [M]. \end{aligned} \tag{4.1}$$

现实世界中描述未来发生事件的环境参数在优化/规划/计划阶段往往不确定，例如未来某商品需求量、两地间旅行时长、某股票回报率等。为了让优化结果对现实更具指导意义，在优化模型中考虑环境参数的不确定性至关重要。

在不确定环境下，(4.1) 中对于某一 $m \in [M]$ 的约束式变成了

$$\boldsymbol{a}(\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}})^\top \boldsymbol{x} \le b(\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}). \tag{4.2}$$

其中，为了阐述方便，忽略下标 m；随机变量 $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$ 表示影响环境参数的随机因素（例如，旅行时长受天气、交通灯时长等随机因素影响），假设 $\boldsymbol{a}(\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}})$ 和 $b(\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}})$ 皆为 $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$ 的仿射函数，即 $\boldsymbol{a}(\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}) \triangleq \boldsymbol{a}^0 + \sum_{j\in[J]} \boldsymbol{a}^j \tilde{\varepsilon}_j, b(\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}) \triangleq b^0 + \sum_{j\in[J]} b^j \tilde{\varepsilon}_j$, 则有

$$\boldsymbol{a}(\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}})^\top \boldsymbol{x} - b(\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}) = \underbrace{(\boldsymbol{a}^0)^\top \boldsymbol{x} - b^0}_{=y^0(\boldsymbol{x})} + \sum_{j\in[J]} \big(\underbrace{(\boldsymbol{a}^j)^\top \boldsymbol{x} - b^j}_{=y^j(\boldsymbol{x})}\big)\tilde{\varepsilon}_j = y^0(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{y}(\boldsymbol{x})^\top \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}.$$

因此，约束式 (4.2) 等价于

$$y^0(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{y}(\boldsymbol{x})^\top \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} \le 0. \tag{4.3}$$

不确定环境下的线性规划从技术上主要关注如何处理约束式 (4.3)。因其左端项为随机变量而右端项为实数，故通常意义上无法直接比较大小，“≤”符号用在此处不够

严谨。对此，本章主要介绍两种典型处理方式，第4.2节基于**分布鲁棒机会约束规划**思想，介绍如何处理

$$\mathbb{P}[y^0(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{y}(\boldsymbol{x})^\top \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} \leq 0] \geq 1-\delta \quad \forall \mathbb{P} \in \mathcal{F}, \tag{4.4}$$

也就是约束 (4.3) 成立的概率不小于 $1-\delta$，其中阈值 $\delta \in [0,1]$ 典型取值为 1% 或 5%。第4.3节基于**分布鲁棒线性优化**范式，介绍如何处理

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[y^0(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{y}(\boldsymbol{x})^\top \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}] \leq 0 \quad \forall \mathbb{P} \in \mathcal{F}, \tag{4.5}$$

也就是约束 (4.3) 需在其左端项通过均值来度量的情况下满足。

事实上，目标函数参数不确定性亦可纳入约束讨论，因为通过引入辅助决策变量 $b_0 \in \mathbb{R}$，(4.1) 等价于

$$\begin{aligned} \min_{b_0,\boldsymbol{x}} \quad & b_0, \\ \text{s.t.} \quad & \boldsymbol{a}_m^\top \boldsymbol{x} \leq b_m \quad \forall m \in [M] \cup \{0\}. \end{aligned}$$

进而将目标函数中不确定参数 $\boldsymbol{a}_0$ 置于约束中。

约束式 (4.4) 和 (4.5) 中，随机变量 $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$ 服从联合概率分布 $\mathbb{P}$，而 $\mathbb{P}$ 本身也不确定，属于模糊集 $\mathcal{F}$；第4.1节将介绍模糊集相关内容。分布鲁棒优化采取保守策略，令这两个约束条件对模糊集中所有概率分布皆满足，它也是因此得名--- “鲁棒”的内涵是考虑最坏情况，而“分布”表明最坏情况的主体是环境参数的分布函数。望本章内容能抛砖引玉，启发读者研究和处理更复杂的形式，并用于解决实际问题。

4.1 模糊集（Ambiguity set）

问题环境中随机参数的分布函数往往难以从现实世界直接获取。鉴于此，分布鲁棒优化方法假设其分布函数并不明确，而是处于一个**模糊集** (ambiguity set) 中。模糊集通过随机变量的不完全分布信息构建而成。特别地，它还需保证相应分布鲁棒优化模型在计算上可处理 (tractable)，也就是现实规模问题可在允许时间范围内求解。

从数学上说，分布鲁棒优化囊括随机规划 (stochastic programming) 和传统鲁棒优化 (robust optimization) 为特殊形式，因此分布鲁棒优化更具一般性。当环境变量 $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$ 的分布函数 $\mathbb{P}_0$ 可获知时，可令模糊集为单元素集 $\mathcal{F}_S \triangleq \{\mathbb{P}_0\}$，则分布鲁棒优化退化为随机规划；当仅知环境变量的不确定集 Ξ 时，可令模糊集为 $\mathcal{F}_R \triangleq \mathcal{P}_0(\Xi)$，即支撑集为 Ξ 的所有概率分布函数之集合，则分布鲁棒优化退化为经典鲁棒优化。

按照描述分布函数的信息种类划分，目前相关研究主要提出了两类模糊集。

4.1.1 基于广义矩信息（generalized moment information）的模糊集

在统计学中，矩 (moment) 表征随机变量的分布。对于随机变量 $\tilde{\varepsilon}$，其 n 阶矩被定义为 $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\tilde{\varepsilon}^n]$，$n \geq 1$。因此，随机变量一阶矩为均值，表征其位置 (location)，二阶矩与方差有关，表征其散度 (dispersion)，三阶矩表征其偏斜度，等等。

更广义地，还可利用其它形式表征随机变量的位置、散度、偏斜度等特性。例如，绝对离差均值 $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[|\tilde{\varepsilon}-\mu|]$ 可表征 $\tilde{\varepsilon}$ 的散度，其中 μ 为其均值。再如，半绝对离差均值 $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[(\tilde{\varepsilon}-\mu)^{+}]$ 和 $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[(\mu-\tilde{\varepsilon})^{+}]$ 可从某种程度刻画 $\tilde{\varepsilon}$ 的偏斜度，其中 $(x)^{+} \triangleq \max\{x,0\}$。

早期研究往往假设随机参数的概率分布无法准确获取，但其部分广义矩信息（和支撑集）可获取或估计，于是根据这些信息构建模糊集。例如，通过 $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$ 的均值 $\boldsymbol{\mu}$ 和协方差矩阵 $\boldsymbol{\Sigma}$ 构成的模糊集 (Ghaoui et al., 2003; Popescu, 2007; Chen and Sim, 2009) 为

$$\mathcal{F}_{MV}=\left\{\mathbb{P}\in\mathcal{P}_0(\mathbb{R}^J)\ \middle|\ \begin{array}{l}\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}\sim\mathbb{P}\\ \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}]=\boldsymbol{\mu}\\ \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[(\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}-\boldsymbol{\mu})(\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}-\boldsymbol{\mu})^{\top}]=\boldsymbol{\Sigma}\end{array}\right\}. \tag{4.6}$$

如果进一步考虑支撑集 Ξ，则模糊集为 $\mathcal{F}_{MVS}=\mathcal{F}_{MV}\cap\mathcal{P}_0(\Xi)$. 但研究表明，基于 $\mathcal{F}_{MVS}$ 的分布鲁棒优化模型一般不可处理 (Bertsimas and Popescu, 2005; Natarajan et al., 2011)。而如果给定的 $\boldsymbol{\Sigma}$ 不是准确协方差而是协方差的上界时，则模糊集为

$$\mathcal{F}_{M}=\left\{\mathbb{P}\in\mathcal{P}_0(\Xi)\ \middle|\ \begin{array}{l}\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}\sim\mathbb{P}\\ \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}]=\boldsymbol{\mu}\\ \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[(\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}-\boldsymbol{\mu})(\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}-\boldsymbol{\mu})^{\top}]\preceq\boldsymbol{\Sigma}\end{array}\right\}, \tag{4.7}$$

其中“$\preceq$”为半正定锥空间意义上的小于等于，也就是 $\boldsymbol{X}\preceq\boldsymbol{Y}$ 意味着 $\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{X}$ 为半正定矩阵。有趣的是，基于 $\mathcal{F}_M$ 的分布鲁棒线性优化模型却可处理 (Wiesemann et al., 2014; Hanasusanto et al., 2015)。

Delage and Ye (2010) 研究了 $\mathcal{F}_M$ 的一个变种

$$\mathcal{F}_{DY}=\left\{\mathbb{P}\in\mathcal{P}_0(\Xi)\ \middle|\ \begin{array}{l}\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}\sim\mathbb{P}\\ (\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}]-\boldsymbol{\mu})^{\top}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}]-\boldsymbol{\mu})\le\gamma_1\\ \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[(\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}-\boldsymbol{\mu})(\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}-\boldsymbol{\mu})^{\top}]\preceq\gamma_2\boldsymbol{\Sigma}\end{array}\right\}, \tag{4.8}$$

其中第一个约束指 $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$ 的均值处于一个以 $\boldsymbol{\mu}$ 为球心的椭球中，$\gamma_1\ge 0$ 和 $\gamma_2\ge 1$ 为两个参数。从数据驱动的视角看，假设 $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$ 客观上服从概率分布 $\mathbb{P}_0$，但无法观测该分布，而仅能观测其 S 组样本/历史数据/观测值 $(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_s)_{s\in[S]}$，令

$$\boldsymbol{\mu}\triangleq\frac{1}{S}\sum_{s\in[S]}\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_s,\qquad \boldsymbol{\Sigma}\triangleq\frac{1}{S}\sum_{s\in[S]}(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_s-\boldsymbol{\mu})(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_s-\boldsymbol{\mu})^{\top},$$

且 γ_1 和 γ_2 通过与样本量 S 和参数 $\delta>0$ 有关的某函数给定时（随着 $S\to\infty$，有 $\gamma_1\to 0$ 和 $\gamma_2\to 1$），则 Delage and Ye (2010) 证明了在统计学上 $\mathbb{P}_0\in\mathcal{F}_{DY}$ 的置信度大于等于 $1-\delta$。

并非任意基于广义矩信息（和支撑集）的模糊集都能保证相应分布鲁棒优化模型可处理。Wisemann，Kuhn 和 Sim 提出了一种具有一般性的模糊集表达形式，能囊括 $\mathcal{F}_M$ 和 $\mathcal{F}_{DY}$ 为其特殊形式，能建模许多其它的广义矩信息，如绝对离差、半方差、高阶矩等，

且（在一些技术性假设条件下）对于分布鲁棒线性优化在计算上可处理 (Wiesemann et al., 2014; Hanasusanto et al., 2015)。其形式为

$$\mathcal{F}_{WKS}=\left\{\mathbb{P}\in\mathcal{P}_0(\mathbb{R}^J\times\mathbb{R}^L)\;\middle|\;\begin{array}{l}(\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}},\tilde{\boldsymbol{u}})\sim\mathbb{P}\\ \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}+\boldsymbol{B}\tilde{\boldsymbol{u}}]=\boldsymbol{b}\\ \mathbb{P}[(\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}},\tilde{\boldsymbol{u}})\in\Xi_k]\in[\underline{p}_k,\overline{p}_k]\ \forall k\in[K]\end{array}\right\},\tag{4.9}$$

其中 $\mathbb{P}$ 为 $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$ 和辅助随机变量 $\tilde{\boldsymbol{u}}$ 的联合概率分布，$\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{J\times Q}$，$\boldsymbol{B}\in\mathbb{R}^{L\times Q}$，$\boldsymbol{b}\in\mathbb{R}^{Q}$；置信集合 Ξ_k 给定为

$$\Xi_k=\{(\boldsymbol{\varepsilon},\boldsymbol{u})\in\mathbb{R}^J\times\mathbb{R}^L|\boldsymbol{C}_k\boldsymbol{\varepsilon}+\boldsymbol{D}_k\boldsymbol{u}\preceq_{\mathcal{K}_k}\boldsymbol{c}_k\},\tag{4.10}$$

其中 $\boldsymbol{C}_k\in\mathbb{R}^{J\times R}$，$\boldsymbol{D}_k\in\mathbb{R}^{L\times R}$，$\boldsymbol{c}\in\mathbb{R}^R$，而 $\mathcal{K}_k$ 代表某一真锥 (proper cone)，如非负象限、二阶锥、半正定锥等。在此，“$\preceq_{\mathcal{K}_k}$” 是在该锥空间意义上的小于等于；关于锥和相应的锥规划 (conic programming) 问题相关介绍，可参见 Ben-Tal and Nemirovski (2001)。对于表示概率界的 $\underline{\boldsymbol{p}},\overline{\boldsymbol{p}}\in[0,1]^K$，有 $\underline{\boldsymbol{p}}\leq\overline{\boldsymbol{p}}$。

模糊集 $\mathcal{F}_{WKS}$ 巧妙之处在于引入了辅助随机变量 $\tilde{\boldsymbol{u}}$，这为计算上的可处理性提供了一种有效途径，如下例所示。

示例 4.1: 通过 $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$ 的均值 $\boldsymbol{\mu}$ 、绝对离差均值上界 $\boldsymbol{\sigma}$、半绝对离差均值上界 $\boldsymbol{h}$ 及满足 (4.10) 形式的支撑集 Ξ 构成的模糊集为

$$\mathcal{F}_{MAD}=\left\{\mathbb{P}\in\mathcal{P}_0(\Xi)\;\middle|\;\begin{array}{l}\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}\sim\mathbb{P}\\ \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}]=\boldsymbol{\mu}\\ \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[|\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}-\boldsymbol{\mu}|]\leq\boldsymbol{\sigma}\\ \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[(\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}-\boldsymbol{\mu})^+]\leq\boldsymbol{h}\end{array}\right\},\tag{4.11}$$

其中 $|\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}|$ 代表对向量 $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$ 的每个元素分别取绝对值构成的向量，取正符 $(\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}})^+$ 亦然。目前虽无法**直接**处理基于 $\mathcal{F}_{MAD}$ 的分布鲁棒优化模型，但如引入辅助变量，$\mathcal{F}_{MAD}$ 则变成

$$\mathcal{F}_{MADL}=\left\{\mathbb{P}\in\mathcal{P}_0(\bar{\Xi})\;\middle|\;\begin{array}{l}(\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}},\tilde{\boldsymbol{u}},\tilde{\boldsymbol{v}})\sim\mathbb{P}\\ \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}]=\boldsymbol{\mu}\\ \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\tilde{\boldsymbol{u}}]=\boldsymbol{\sigma}\\ \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\tilde{\boldsymbol{v}}]=\boldsymbol{h}\end{array}\right\},\tag{4.12}$$

其中，扩展的支撑集为

$$\bar{\Xi}=\{(\boldsymbol{\varepsilon},\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})|\boldsymbol{\varepsilon}\in\Xi,\boldsymbol{u}\geq\boldsymbol{\varepsilon}-\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{u}\geq\boldsymbol{\mu}-\boldsymbol{\varepsilon},\boldsymbol{v}\geq\boldsymbol{\varepsilon}-\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{v}\geq\boldsymbol{0}\}.$$

在此，$\mathcal{F}_{MADL}$ 即为 $\mathcal{F}_{WKS}$ 的一个特例，因此变得可处理；对于具体处理方法，可参见 Wiesemann et al. (2014); Hanasusanto et al. (2015)。类似地，前文提到的 $\mathcal{F}_{DY}$ 和 $\mathcal{F}_{M}$ 以及文献中更多有趣的形式 (例如， Bertsimas et al., 2019) 也可借助辅助变量化为 $\mathcal{F}_{WKS}$ 的形式。

4.1.2 基于统计距离 (statistical distance) 的模糊集

在大数据时代背景下，问题环境中随机参数的历史数据越来越容易获取。为了获得随机参数概率分布，一种自然的想法是通过历史数据对应的经验分布来近似描述真实概率分布。经验分布是建立在 S 条历史数据点上的离散均匀分布，它视每一条历史数据 $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_s$ 为随机变量的一个支撑点，出现概率为 $1/S$，即

$$\hat{\mathbb{P}}[\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^\dagger = \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_s] = \frac{1}{S} \quad \forall s \in [S].$$

其中 $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^\dagger$ 表示 $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$ 对应的经验随机变量。

但经验分布并不等同于真正概率分布，分布鲁棒优化的思想是假设真正概率分布与经验分布在概率空间中的统计距离不超过某一阈值，并以此构建模糊集。基于此思想，如何定义两个概率分布间的统计距离成为了关键，它不仅需要具有良好的统计学意义，而且需要保证相应的分布鲁棒优化模型可处理。在此例举两种典型形式。

第一是基于 ϕ-散度 (ϕ-divergence) 的模糊集，定义为

$$\mathcal{F}_\phi = \left\{ \mathbb{P} \in \mathcal{P}_0(\mathbb{R}^J) \;\middle|\; \begin{array}{l} \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} \sim \mathbb{P}, \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^\dagger \sim \hat{\mathbb{P}}, \\ D_\phi(\mathbb{P}||\hat{\mathbb{P}}) \le \theta \end{array} \right\}, \tag{4.13}$$

其中 $D_\phi(\mathbb{P}||\hat{\mathbb{P}})$ 表示所认为的真正分布 $\mathbb{P}$ 对于经验分布 $\hat{\mathbb{P}}$ 的 **ϕ-散度**（“距离”），定义如 (4.14)；而 $\theta > 0$ 为给定的“距离”上界。

$$D_\phi(\mathbb{P}||\hat{\mathbb{P}}) = \sum_{s\in[S]} \hat{\mathbb{P}}(s)\phi\left(\frac{\mathbb{P}(s)}{\hat{\mathbb{P}}(s)}\right) \tag{4.14}$$

在 (4.14) 中，$\phi : \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}$ 为满足以下条件的凸函数：$\phi(1) = 0$，对于 $x > 0$ 有 $0\phi(x/0) \triangleq x \lim_{t\to+\infty} \phi(t)/t$，且 $0\phi(0/0) \triangleq 0$；$\mathbb{P}(s)$ 表示概率分布 $\mathbb{P}$ 中第 $s \in [S]$ 个观测值发生的概率。可见，该模糊集要求真正的概率分布函数支撑集与经验分布支撑集相同，也就无法考量到历史数据以外的点/场景，而仅仅是将历史数据发生的概率从经验分布的各 $1/S$ 变成了更具“鲁棒性”的值。

示例 4.2: 在此例举一种研究相对较多的 ϕ 函数形式：当 $\phi(x) = x\log x - x + 1$ 时，ϕ 散度具体化为 (4.15)，名为 **Kullback-Leibler 散度** (KL divergence)，又名**相对熵** (relative entropy)。

$$D_{KL}(\mathbb{P}||\hat{\mathbb{P}}) = \sum_{s\in[S]} \mathbb{P}(s) \log\left(\frac{\mathbb{P}(s)}{\hat{\mathbb{P}}(s)}\right) \tag{4.15}$$

为后文阐述方便，将其模糊集记为 $\mathcal{F}_{KL}$，也就是 (4.13) 中的将 D_ϕ 具体化为 D_{KL}。对于更多的 ϕ 函数形式，可参见 Ben-Tal et al. (2013); Jiang and Guan (2016)。

第二是基于 Wasserstein 距离的模糊集，定义为

$$\mathcal{F}_W = \left\{ \mathbb{P} \in \mathcal{P}_0(\Xi) \;\middle|\; \begin{array}{l} \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} \sim \mathbb{P}, \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^\dagger \sim \hat{\mathbb{P}}, \\ d_W(\mathbb{P}, \hat{\mathbb{P}}) \le \theta, \end{array} \right\}. \tag{4.16}$$

此模糊集囊括了概率空间中以 Wasserstein 距离为度量标准，以经验分布 $\hat{\mathbb{P}}$ 为球心，以 $\theta \in \mathbb{R}_+$ 为半径的球中所有的概率分布。Esfahani and Kuhn (2018) 的研究表明，记真实但未知的概率分布为 $\mathbb{P}_0$，则当 θ 通过与样本量 S 和参数 $\beta \in (0,1)$ 有关的某函数取值时（随着 $S \to \infty$，有 $\theta \to 0$），从统计学上可证明 $\mathbb{P} \in \mathcal{F}_W$ 的置信度大于等于 $1-\beta$。**Wasserstein 距离** $d_W : \mathcal{P}_0(\Xi) \times \mathcal{P}_0(\Xi) \mapsto [0, +\infty)$ 表示所考虑的分布与经验分布在概率空间中的一种距离，定义为

$$
\begin{aligned}
d_W(\mathbb{P}, \hat{\mathbb{P}}) = \inf \quad & \mathbb{E}_{\bar{\mathbb{P}}}\left[\|\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} - \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\dagger}\|\right] \\
\text{s.t.} \quad & \left(\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}, \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\dagger}\right) \sim \bar{\mathbb{P}}, \\
& \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} \sim \mathbb{P}, \\
& \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\dagger} \sim \hat{\mathbb{P}}, \\
& \bar{\mathbb{P}}\left[\left(\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}, \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\dagger}\right) \in \Xi \times \Xi\right] = 1,
\end{aligned} \tag{4.17}
$$

其中的 $\bar{\mathbb{P}}$ 表示 $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$ 和 $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\dagger}$ 的联合概率分布，$\|\cdot\|$ 表示范数。根据定义，可直观地将 Wasserstein 距离视为从真实分布 $\mathbb{P}$ 向经验分布 $\hat{\mathbb{P}}$ 移动概率质量 (probability mass) 的最小费用。上述定义准确说是 **1 型 Wasserstein 距离**，对于更一般的 Wasserstein 距离定义及更详细深入的介绍可参见 Esfahani and Kuhn (2018); Gao and Kleywegt (2016); Zhao and Guan (2018)。

4.2 机会约束问题（Chance constraint）

机会约束规划是指当优化问题环境参数为随机变量时，在以一定概率满足约束条件的情况下进行优化。自从 Charnes and Cooper (1959) 提出来以来，该框架在管理科学等各领域得到了广泛研究与应用。作为抛砖引玉，本节讨论如何处理分布鲁棒独立机会约束 (4.4)，读者可进而自行研究更一般也更难处理的联合机会约束 (4.18)：

$$
\mathbb{P}[y_m^0(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{y}_m(\boldsymbol{x})^{\top}\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} \le 0 \quad \forall m \in [M]] \ge 1 - \delta \quad \forall \mathbb{P} \in \mathcal{F}, \tag{4.18}
$$

其中的 M 个约束同时成立的概率不小于 $1-\delta$。

从计算角度看，约束式 (4.4) 左端项可等价表示为

$$
\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\mathbb{1}\{y^0(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{y}(\boldsymbol{x})^{\top}\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} \le 0\}\right], \tag{4.19}
$$

其中，$\mathbb{1}\{\cdot\}$ 为指示函数，当其事件发生取值为 1，否则为 0。指示函数为非凸函数，导致 (4.19) 对 $\boldsymbol{x}$ 或 $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$ 而言皆为非凸函数，除个别特殊情况（如 $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$ 服从联合正态分布）外难以处理。事实上，即便给定决策变量 $\boldsymbol{x}$ 和概率分布 $\mathbb{P}$，计算 (4.4) 左端项的概率值一般而言已是 NP 难问题，更何况还要基于此对 $\boldsymbol{x}$ 进行优化 (Nemirovski and Shapiro, 2006)。而有趣的是，在给定某些模糊集 $\mathcal{F}$ 的情况下，(4.4) 却可处理。

接下来讲述如何在分布鲁棒优化框架下对机会约束式 (4.4) 进行处理。易知，约束式 (4.4) 等价于

$$
\inf_{\mathbb{P} \in \mathcal{F}} \mathbb{P}[y^0(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{y}(\boldsymbol{x})^{\top}\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} \le 0] \ge 1 - \delta. \tag{4.20}
$$

当 (4.20) 中模糊集取 $\mathcal{F} \triangleq \mathcal{F}_{MV}$ 且其中的 $\boldsymbol{\mu} \triangleq \mathbf{0}$ 时，Ghaoui et al. (2003) 的研究表明，(4.20) 等价于

$$y^0(\boldsymbol{x}) + \sqrt{\frac{1-\delta}{\delta}}\sqrt{\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x})^\top \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{y}(\boldsymbol{x})} \le 0. \tag{4.21}$$

这里，令 $\boldsymbol{\mu} \triangleq \mathbf{0}$ 并不失一般性，因为如果 $\boldsymbol{\mu} \neq \mathbf{0}$ 则可通过变量替换的方法，令 $\tilde{\boldsymbol{z}} \triangleq \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} - \boldsymbol{\mu}$ 并将 $\tilde{\boldsymbol{z}}$ 视为 (4.20) 中的 $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$。有趣的是，(4.21) 恰好等价于传统鲁棒优化约束式

$$y^0(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{y}(\boldsymbol{x})^\top \boldsymbol{\varepsilon} \le 0 \quad \forall \boldsymbol{\varepsilon} \in \Xi(\delta), \tag{4.22}$$

其中，不确定集为椭球形，给定为

$$\Xi(\delta) \triangleq \left\{ \boldsymbol{\varepsilon} \in \mathbb{R}^J \,\middle|\, \|\boldsymbol{\Sigma}^{1/2}\boldsymbol{\varepsilon}\|_2 \le \sqrt{\frac{1-\delta}{\delta}} \right\}.$$

关于 (4.21) 与 (4.22) 的关系，可参见 Natarajan et al. (2009)。

当 (4.20) 中模糊集取 $\mathcal{F} \triangleq \mathcal{F}_{MVS}$ 时，分布鲁棒机会约束规划一般不可处理。研究者们提出了基于**条件风险值** (Conditional Value-at-Risk) 的近似方法进行处理，感兴趣的读者可参见 Chen et al. (2010); Zymler et al. (2013) 等。

当 $\mathcal{F} \triangleq \mathcal{F}_{WKS}$ 且其中 $K = 1, \underline{p}_1 = \overline{p}_1 = 1$ 时，Hanasusanto et al. (2015) 证明了 (4.20) 等价于如下一系列锥优化约束：

$$\begin{array}{lll}
\beta + \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{\gamma} \ge (1-\delta)\tau, & \beta + \boldsymbol{c}_1^\top \boldsymbol{\phi} \le \tau, & \beta + \boldsymbol{c}_1^\top \boldsymbol{\psi} \le -y^0(\boldsymbol{x}), \\
\boldsymbol{A}^\top \boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{C}_1^\top \boldsymbol{\phi}, & \boldsymbol{B}^\top \boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{D}_1^\top \boldsymbol{\phi}, & \\
\boldsymbol{A}^\top \boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{y}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{C}_1^\top \boldsymbol{\psi}, & \boldsymbol{B}^\top \boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{D}_1^\top \boldsymbol{\psi}, & \\
\beta \in \mathbb{R}, \boldsymbol{\gamma} \in \mathbb{R}^L, \tau \in \mathbb{R}_+, & \boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\psi} \in \mathcal{K}_1^* &
\end{array}$$

其中 $\mathcal{K}_1^*$ 表示 $\mathcal{K}_1$ 的对偶锥 (Ben-Tal and Nemirovski, 2001)。考虑到 $\mathcal{F}_M$ 和 $\mathcal{F}_{DY}$ 均为 $\mathcal{F}_{WKS}$ 的特例，当 $\mathcal{F} \triangleq \mathcal{F}_M$ (其中支撑集为 (4.10) 的形式) 或 $\mathcal{F} \triangleq \mathcal{F}_{DY}$ 时，(4.4) 可等价转化成锥优化约束形式。

作为 Hanasusanto et al. (2015) 的扩展，Xie and Ahmed (2018) 考虑了更一般的模糊集，研究了分布鲁棒独立机会约束规划和联合机会约束规划的等价凸优化形式。对于考虑均值、散度上界、支撑集的一类模糊集，Hanasusanto et al. (2017) 研究了其分布鲁棒联合机会约束规划的计算复杂度及求解方法。

当 (4.20) 中模糊集取 $\mathcal{F} \triangleq \mathcal{F}_{KL}$ 时，Jiang and Guan (2016) 的研究表明，(4.20) 等价于

$$\hat{\mathbb{P}}[y^0(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{y}(\boldsymbol{x})^\top \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} \le 0] \ge 1 - \bar{\delta}. \tag{4.23}$$

其中，

$$\bar{\delta} \triangleq 1 - \inf_{t \in (0,1)} \frac{e^{-\theta} t^{1-\delta} - 1}{t - 1}.$$

由此可见，它与随机规划中基于采样平均近似 (sample average approximation) 的机会约束式 (4.24) 相比，仅仅是具有不同的概率界 $\bar{\delta}$ 而已。此外，对于一般的 ϕ 散度形式下分布鲁棒联合机会约束规划的处理方法，可详见 Jiang and Guan (2016)。

$$\hat{\mathbb{P}}[y^0(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{y}(\boldsymbol{x})^\top \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} \le 0] \ge 1 - \delta. \tag{4.24}$$

作为常用技巧，(4.24) 可通过引入 0-1 辅助决策变量的方法等价转换为

$$
\begin{aligned}
& y^0(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{y}(\boldsymbol{x})^\top \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_s \le M_0(1-\phi_s) \quad \forall s \in [S], \\
& \frac{1}{S}\sum_{s\in[S]} \phi_s \ge 1-\delta, \\
& \boldsymbol{\phi} \in \{0,1\}^S.
\end{aligned} \tag{4.25}
$$

其中，M_0 为一个足够大的实数。观察可知，当 $y^0(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{y}(\boldsymbol{x})^\top \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_s \le 0$ 时，ϕ_s 可取值 1，代表该约束在第 s 个场景中成立，否则不得不取值 0。

当 $\mathcal{F} \triangleq \mathcal{F}_W$ 时，Chen et al. (2022); Xie (2019) 讨论了如何处理分布鲁棒（独立和联合）机会约束规划问题，他们用不同的方法得到了相同的结论。此时，独立机会约束 (4.20) 等价于如下混合 0-1 锥优化约束

$$
\begin{aligned}
& \delta S t - \mathbf{1}^\top \boldsymbol{v} \ge \theta S \|\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x})\|_*, \\
& -\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x})^\top \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_s - y^0(\boldsymbol{x}) + M_0\phi_s \ge t - v_s \quad && \forall s \in [S], \\
& M_0(1-\phi_s) \ge t - v_s && \forall s \in [S], \\
& t \in \mathbb{R}, \boldsymbol{\phi} \in \{0,1\}^S, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^S.
\end{aligned}
$$

其中 $\|\cdot\|_*$ 为 (4.17) 中 $\|\cdot\|$ 对应的对偶范数 (Boyd et al., 2004)。

4.3 分布鲁棒线性优化（Distributionally robust linear optimization）

现实世界中很多优化问题可建模或近似为线性规划问题。线性约束不仅本身可描述许多现实问题的资源约束，而且可建模或近似更复杂的资源约束。作为抛砖引玉，本节讨论如何处理分布鲁棒线性优化约束式 (4.5)，读者可进而自行研究更一般也更难处理的非线性约束，例如：

$$
\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\Big[\max_{k\in[K]}\{y_k^0(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{y}_k(\boldsymbol{x})^\top \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}\}\Big] \le 0 \quad \forall \mathbb{P} \in \mathcal{F}, \tag{4.26}
$$

其左端项为关于 $\boldsymbol{x}$ 和 $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$（各自）的分段线性凸函数；此形式出现在许多管理科学问题中，如库存管理 (See and Sim, 2010; Mamani et al., 2017)、预约调度 (Mak et al., 2015; Kong et al., 2013; Qi, 2017)、带时间窗的车辆路径问题 (Zhang et al., 2019)，等等。

接下来探讨如何处理分布鲁棒线性优化约束式 (4.5)。易知，它等价于

$$
\sup_{\mathbb{P}\in\mathcal{F}} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[y^0(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{y}(\boldsymbol{x})^\top \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}] \le 0. \tag{4.27}
$$

处理该约束的关键是考察左端项中优化问题

$$
Z_P(\boldsymbol{x}) = \sup_{\mathbb{P}\in\mathcal{F}} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x})^\top \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}] \tag{4.28}
$$

的对偶问题。注意，该优化问题中 $\boldsymbol{x}$ 被视为给定参数，而概率分布 $\mathbb{P}$ 才是决策变量。抽象地，(4.28) 的对偶问题形式为

$$Z_D(\boldsymbol{x}) = \inf_{\boldsymbol{p}\in\mathcal{P}(\boldsymbol{x})} f(\boldsymbol{p}). \tag{4.29}$$

其中 $\boldsymbol{p}$ 为对偶决策变量，$\mathcal{P}(\boldsymbol{x})$ 为其可行域，$f(\boldsymbol{p})$ 为目标函数，$\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x})$ 作为参数被包含于 $\mathcal{P}(\boldsymbol{x})$ 中。在某些条件下，强对偶定理对此成立，则 $Z_P = Z_D$。于是，(4.27) 等价于

$$\begin{aligned} & y^0(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{p}) \le 0, \\ & \boldsymbol{p} \in \mathcal{P}(\boldsymbol{x}). \end{aligned} \tag{4.30}$$

因此，技术上主要关注如何在取不同模糊集 $\mathcal{F}$ 的情况下求解 (4.28) 的对偶问题并证明强对偶定理成立。

当 $\mathcal{F} \triangleq \mathcal{F}_{MV}$ 或 $\mathcal{F} \triangleq \mathcal{F}_{MVS}$ 时，由于已知 $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$ 的均值 $\boldsymbol{\mu}$，故 (4.28) 等价于 $Z_P(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y}(\boldsymbol{x})^\top\boldsymbol{\mu}$。Popescu (2007) 针对 $\mathcal{F} \triangleq \mathcal{F}_{MV}$ 且 (4.28) 目标函数变为某一类非线性函数的情形，研究了其等价模型与求解方法。

当 (4.28) 中 $\mathcal{F} \triangleq \mathcal{F}_{DY}$ 时，则在某些技术性条件下，Delage and Ye (2010) 推导出其对偶问题 (4.29) 的具体形式：

$$\begin{aligned} Z_D(\boldsymbol{x}) = \min_{\boldsymbol{Q},\boldsymbol{q},r,t} \quad & r + t \\ \text{s.t.} \quad & r \ge \boldsymbol{y}(\boldsymbol{x})^\top\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^\top\boldsymbol{Q}\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^\top\boldsymbol{q} \quad \forall\boldsymbol{\varepsilon}\in\Xi, \\ & t \ge (\gamma_2\Sigma + \boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\mu}^\top)\bullet\boldsymbol{Q} + \boldsymbol{\mu}^\top\boldsymbol{q} + \sqrt{\gamma_1}\|\Sigma^{1/2}(\boldsymbol{q}+2\boldsymbol{Q}\boldsymbol{\mu})\|, \\ & \boldsymbol{Q} \succeq \boldsymbol{0}, \end{aligned} \tag{4.31}$$

其中 “•” 表示矩阵间的弗罗贝尼乌斯内积。注意到 (4.31) 中的第一个约束实则为（传统）鲁棒优化约束，因此求解 $\mathcal{F}_{DY}$ 模糊集下的分布鲁棒优化问题 (4.28) 等价于求解鲁棒优化问题 (4.31)，而上一章已讲述如何求解鲁棒优化问题。

当 (4.28) 中 $\mathcal{F} \triangleq \mathcal{F}_{WKS}$ 时，则在某些技术性条件下，Wiesemann et al. (2014) 推导出其对偶问题 (4.29) 的具体形式：

$$\begin{aligned} Z_D(\boldsymbol{x}) = \min_{\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\phi}} \quad & \boldsymbol{b}^\top\boldsymbol{\beta} + \sum_{k\in[K]} \overline{p}_k\eta_k - \underline{p}_k\lambda_k \\ \text{s.t.} \quad & \boldsymbol{c}_k^\top\boldsymbol{\phi}_k \le \sum_{k'\in\mathcal{A}(k)} (\eta_{k'} - \lambda_{k'}) && \forall k\in[K], \\ & \boldsymbol{C}_k^\top\boldsymbol{\phi}_k + \boldsymbol{A}^\top\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{y}(\boldsymbol{x}) && \forall k\in[K], \\ & \boldsymbol{D}_k^\top\boldsymbol{\phi}_k + \boldsymbol{B}^\top\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{0} && \forall k\in[K], \\ & \boldsymbol{\phi}_k \in \mathcal{K}_k^* && \forall k\in[K], \end{aligned} \tag{4.32}$$

其中，$\mathcal{A}(k) \triangleq \{k'\in[K] \mid \Xi_{k'}\text{严格包含于}\Xi_k\}$，$\mathcal{K}_k^*$ 表示 $\mathcal{K}$ 的对偶锥。

当 (4.28) 中 $\mathcal{F} \triangleq \mathcal{F}_{KL}$ 时，则在某些技术性条件下，Hu and Hong (2013) 推导出其对偶问题 (4.29) 的具体形式：

$$Z_D(\boldsymbol{x}) = \min_{\alpha\ge 0} \quad \alpha\log\mathbb{E}_{\hat{\mathbb{P}}}[e^{\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x})^\top\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^\dagger/\alpha}] + \alpha\theta. \tag{4.33}$$

其中的目标函数为凸函数，因此可用内点法 (Ben-Tal et al., 2013) 或分段线性函数逼近 (Long and Qi, 2014) 等方法进行处理。

当 (4.28) 中 $\mathcal{F} \triangleq \mathcal{F}_W$ 且其中的支撑集为 $\Xi \triangleq \{\boldsymbol{\varepsilon} \in \mathbb{R}^I \mid \boldsymbol{C}\boldsymbol{\varepsilon} \le \boldsymbol{d}\}$ 时，则在某些技术性条件下，Esfahani and Kuhn (2018) 推导出其对偶问题 (4.29) 的具体形式：

$$
\begin{aligned}
Z_D(\boldsymbol{x}) = \inf_{\lambda,\boldsymbol{v},\boldsymbol{\gamma}} \quad & \lambda\theta + \frac{1}{S}\sum_{s\in[S]} v_s \\
\text{s.t.} \quad & \boldsymbol{y}(\boldsymbol{x})^\top \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_s + \boldsymbol{\gamma}_s^\top(\boldsymbol{d} - \boldsymbol{C}\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_s) \le v_s && \forall s \in [S], \\
& \|\boldsymbol{C}^\top \boldsymbol{\gamma}_s - \boldsymbol{y}(\boldsymbol{x})\|_* \le \lambda && \forall s \in [S], \\
& \boldsymbol{\gamma}_s \ge \boldsymbol{0} && \forall s \in [S].
\end{aligned} \tag{4.34}
$$

将以上各结果嵌入到 (4.30) 即可得到 (4.27) 的等价形式，进而求解鲁棒线性规划问题。

事实上，Popescu (2007); Delage and Ye (2010); Wiesemann et al. (2014); Esfahani and Kuhn (2018) 的研究均解决了 (4.26) 的等价转化问题，而上述结论针对 (4.27)，只是 (4.26) 中 $K = 1$ 时的特例，感兴趣的读者可细读他们的论文。

本章参考文献

Ben-Tal, Aharon and Arkadi Nemirovski, *Lectures on modern convex optimization: analysis, algorithms, and engineering applications*, Vol. 2, Siam, 2001.

— **, Dick Den Hertog, Anja De Waegenaere, Bertrand Melenberg, and Gijs Rennen**, "Robust solutions of optimization problems affected by uncertain probabilities," *Management Science*, 2013, *59* (2), 341–357.

Bertsimas, Dimitris and Ioana Popescu, "Optimal inequalities in probability theory: A convex optimization approach," *SIAM Journal on Optimization*, 2005, *15* (3), 780–804.

— **, Melvyn Sim, and Meilin Zhang**, "Adaptive distributionally robust optimization," *Management Science*, 2019, *65* (2), 604–618.

Boyd, Stephen, Stephen P Boyd, and Lieven Vandenberghe, *Convex optimization*, Cambridge university press, 2004.

Charnes, Abraham and William W Cooper, "Chance-constrained programming," *Management Science*, 1959, *6* (1), 73–79.

Chen, Wenqing and Melvyn Sim, "Goal-driven optimization," *Operations Research*, 2009, *57* (2), 342–357.

— **, — , Jie Sun, and Chung-Piaw Teo**, "From CVaR to uncertainty set: Implications in joint chance-constrained optimization," *Operations Research*, 2010, *58* (2), 470–485.

Chen, Zhi, Daniel Kuhn, and Wolfram Wiesemann, "Data-driven chance constrained programs over Wasserstein balls," *Operations Research*, 2022.

Delage, Erick and Yinyu Ye, "Distributionally robust optimization under moment uncertainty with application to data-driven problems," *Operations Research*, 2010, *58* (3), 595–612.

Esfahani, Peyman Mohajerin and Daniel Kuhn, "Data-driven distributionally robust optimization using the Wasserstein metric: Performance guarantees and tractable reformulations," *Mathematical Programming*, 2018, *171* (1-2), 115–166.

Gao, Rui and Anton J Kleywegt, "Distributionally robust stochastic optimization with Wasserstein distance," *Available at arXiv:1604.02199*, 2016.

Ghaoui, Laurent El, Maksim Oks, and Francois Oustry, "Worst-case value-at-risk and robust portfolio optimization: A conic programming approach," *Operations Research*, 2003, *51* (4), 543–556.

Hanasusanto, Grani A, Vladimir Roitch, Daniel Kuhn, and Wolfram Wiesemann, "A distributionally robust perspective on uncertainty quantification and chance constrained programming," *Mathematical Programming*, 2015, *151* (1), 35–62.

— **, — , — , and —** , "Ambiguous joint chance constraints under mean and dispersion information," *Operations Research*, 2017, *65* (3), 751–767.

Hu, Zhaolin and Lj Hong, "Kullback-Leibler Divergence Constrained Distributionally Robust Optimization," *Optimization Online*, 2013, (2), 1–34.

Jiang, Ruiwei and Yongpei Guan, "Data-driven chance constrained stochastic program," *Mathematical Programming*, 2016, *158* (1-2), 291–327.

Kong, Qingxia, Chung-Yee Lee, Chung-Piaw Teo, and Zhichao Zheng, "Scheduling arrivals to a stochastic service delivery system using copositive cones," *Operations Research*, 2013, *61* (3), 711–726.

Long, Daniel Zhuoyu and Jin Qi, "Distributionally robust discrete optimization with Entropic Value-at-Risk," *Operations Research Letters*, 2014, *42* (8), 532–538.

Mak, Ho-Yin, Ying Rong, and Jiawei Zhang, "Appointment scheduling with limited distributional information," *Management Science*, 2015, *61* (2), 316–334.

Mamani, Hamed, Shima Nassiri, and Michael R Wagner, "Closed-form solutions for robust inventory management," *Management Science*, 2017, *63* (5), 1625–1643.

Natarajan, Karthik, Chung Piaw Teo, and Zhichao Zheng, "Mixed 0-1 linear programs under objective uncertainty: A completely positive representation," *Operations Research*, 2011, *59* (3), 713–728.

__ , Dessislava Pachamanova, and Melvyn Sim, "Constructing Risk Measures from Uncertainty Sets," *Operations Research*, 2009, *57* (5), 1129–1141.

Nemirovski, Arkadi and Alexander Shapiro, "Convex approximations of chance constrained programs," *SIAM Journal on Optimization*, 2006, *17* (4), 969–996.

Popescu, Ioana, "Robust mean-covariance solutions for stochastic optimization," *Operations Research*, 2007, *55* (1), 98–112.

Qi, Jin, "Mitigating delays and unfairness in appointment systems," *Management Science*, 2017, *63* (2), 566–583.

See, Chuen-Teck and Melvyn Sim, "Robust approximation to multiperiod inventory management," *Operations Research*, 2010, *58* (3), 583–594.

Wiesemann, Wolfram, Daniel Kuhn, and Melvyn Sim, "Distributionally robust convex optimization," *Operations Research*, 2014, *62* (6), 1358–1376.

Xie, Weijun, "On distributionally robust chance constrained programs with Wasserstein distance," *Mathematical Programming*, 2019, pp. 1–41.

__ and Shabbir Ahmed, "On deterministic reformulations of distributionally robust joint chance constrained optimization problems," *SIAM Journal on Optimization*, 2018, *28* (2), 1151–1182.

Zhang, Yu, Roberto Baldacci, Melvyn Sim, and Jiafu Tang, "Routing optimization with time windows under uncertainty," *Mathematical Programming*, 2019, *175* (1-2), 263–305.

Zhao, Chaoyue and Yongpei Guan, "Data-driven risk-averse stochastic optimization with Wasserstein metric," *Operations Research Letters*, 2018, *46* (2), 262–267.

Zymler, Steve, Daniel Kuhn, and Berç Rustem, "Distributionally robust joint chance constraints with second-order moment information," *Mathematical Programming*, 2013, *137* (1-2), 167–198.

第 5 章 多阶段问题与线性决策规则（Multi-stage problem and LDR）

陈植, 汤勤深

第三章和第四章分别介绍了经典鲁棒优化和分布鲁棒优化的方法和模型。然而这些方法和模型主要针对单阶段（single stage）的问题。而在企业或者决策者面对的问题中，很大一部分都是多阶段的（multi-stage）。也即，决策者需要在一定的时间内，按时间顺序进行多个决策，且决策时只知道过去已发生的随机变量（random variable）而无法预知未来的。多阶段问题的这些特性，使得对相应问题的建模和求解特别复杂。在优化领域，一般是用随机规划或者动态规划进行建模和求解。然而，随机规划和动态规划都遭受 ‘‘维度诅咒"（curse of dimensionality）。

针对随机规划和动态规划的这个致命缺点，鲁棒优化用一些决策规则（decision rule）进行规避。现有的决策规则已经可以达到很好的近似效果，甚至在某些条件下有一些决策规则可以达到最优。

在这一章，我们将聚焦于如何用这些决策规则对多阶段问题（主要是两阶段问题）进行求解。在此之前，我们先着重介绍两阶段的随机规划问题。

备注： 正如后面会讨论，决策规则近来越来越多地被改称为近似规则（recourse approximation）。如若称为决策规则，则有后面阶段的决策将根据规则直接得到之嫌。而实际上，如果直接使用决策规则对后面阶段决策进行决策，其效果非常不可控。大多时候，模型可能会表现非常差。在模型的实施过程中，往往都是用滚动法（rolling horizon），也即，在知道这一期的不确定性之后，将现在系统的状态当成初始状态，重新对模型进行求解，以获得下一期的最优决策。从这个角度来说，我们使用一定的规则去近似未来的决策和不确定性之间的关系，从而达到简化模型的效果。

5.1 随机规划（Stochastic programming）

为了更好地理解随机规划，我们举例如下。

示例 5.1（单阶段库存管理模型）： 小王前不久在小区开了一个小卖部。他发现，小区对苹果的需求 $\tilde{z}$ 满足分布 $F(\cdot)$。他每天需要决定向 20 里外小张定 x 斤苹果。每斤苹果的进货单价为 c，销售价格为 p。若库存不足, 也即真实需求 z 大于订货量 x，居民可以先下单，等有货了再送过去。针对这种情况，小王一般会给一定的折扣。折算下来，每一斤苹果将增加 b 的成本。而如果订货量太多，也即 $x - z \geq 0$，苹果可能会变

质，折算下来一斤苹果将增加 h 的成本。小王的利润为：

$$\pi(x,z) = p\min\{x,z\} - cx - b(z-x)^+ - h(x-z)^+.$$

小王想最大化他的期望利润，也即他将要解以下问题:

$$\begin{aligned} &\max\ \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\pi(x,\tilde{z})] \\ &\text{s.t. } x \geq 0 \end{aligned} \tag{5.1}$$

示例5.1就是一个在商业环境中随处可见的随机规划问题：在已知随机分布和满足一定的约束的情况下，进行决策使得期望利润最大化。一般地，随机规划关注以下问题:

$$\begin{aligned} \min\ & \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[g(\boldsymbol{x},\tilde{\boldsymbol{z}})] \\ \text{s.t. } & \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[f_i(\boldsymbol{x},\tilde{\boldsymbol{z}})] \leq 0 \quad \forall i \in [I], \\ & \boldsymbol{x} \in \mathcal{X}. \end{aligned}$$

其中，$\tilde{\boldsymbol{z}}$ 为随机变量。

示例5.1是一个单阶段的问题。但是，如果我们把卖多少苹果，$\min\{x,z\}$，当成决策 y，那示例5.1就变成了一个两阶段的问题：第一阶段，决定定多少苹果，之后观测到需求；第二阶段，决定卖多少苹果。也即，模型(5.1)可以写成

$$\begin{aligned} \max\ & -cx - b\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\tilde{z}] - hx + \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[g(x,\tilde{z})] \\ \text{s.t. } & x \geq 0 \end{aligned}$$

其中，

$$\begin{aligned} g(x,z) = \max\ & (p+b+h)y \\ \text{s.t. } & y \leq x, \\ & y \leq z. \end{aligned}$$

此模型可归类于由 Dantzig (1955) 首先引入的经典的（线性）两阶段随机规划问题（two stage stochastic programming）：第一阶段的决策变量为 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{N_1}$，也称为“现时决策（here-and-now decision）”。不失一般性，假设 $\boldsymbol{x}$ 的可行集为 $\mathcal{X}$。与 $\boldsymbol{x}$ 相关的成本参数 $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^{N_1}$。之后，随机变量 $\tilde{\boldsymbol{z}} \in \mathcal{Z} \in \mathbb{R}^{I_z}$ 实现为 $\boldsymbol{z}$。其中 $\mathcal{Z}$ 为 $\tilde{\boldsymbol{z}}$ 的支撑集。第二阶段决策变量为 $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^{N_2}$，也称“等待决策（wait-and-see decision）”。其相应的成本参数为 $\boldsymbol{d} \in \mathbb{R}^{N_2}$。此两阶段随机规划问题模型如下：

$$\begin{aligned} \min\ & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} + \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[g(\boldsymbol{x},\tilde{\boldsymbol{z}})], \\ \text{s.t. } & \boldsymbol{x} \in \mathcal{X}, \end{aligned} \tag{5.2}$$

其中

$$
\begin{aligned}
g(\boldsymbol{x}, z) = \min\ & \boldsymbol{d}^\top \boldsymbol{y}, \\
\text{s.t.}\ & \boldsymbol{A}(z)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b}(z), \\
& \boldsymbol{y} \geq 0.
\end{aligned} \tag{5.3}
$$

模型(5.3)中，$\boldsymbol{A} \in \mathcal{R}^{I_z, M\times N_1}, \boldsymbol{b} \in \mathcal{R}^{I_z, M}$ 是 $z \in \mathcal{Z}$ 的函数。在接下来的讨论中，我们假设他们仿射依赖于 $z \in \mathbb{R}^{I_z}$：

$$
\boldsymbol{A}(z) = \boldsymbol{A}^0 + \sum_{i\in[I_z]} \boldsymbol{A}^i z_i, \quad \boldsymbol{b}(z) = \boldsymbol{b}^0 + \sum_{i\in[I_z]} \boldsymbol{b}^i z_i,
$$

其中，$\boldsymbol{A}^0, \ldots, \boldsymbol{A}^{I_z} \in \mathbb{R}^{M\times N_1}$，$\boldsymbol{b}^0, \ldots, \boldsymbol{b}^{I_z} \in \mathbb{R}^M$。

另外，矩阵 $\boldsymbol{B}$ 称为补偿矩阵（recourse matrix）。第二阶段的模型(5.3)不一定总是有可行解。但是如果 $\boldsymbol{B}$ 是完全补偿的（complete recourse）---对任意的 $z \in \mathbb{R}^{I_z}$，存在 $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^{N_2}$ 使得 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{y} \geq z$---那么可以保证对于所有 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{N_1}$ 和 $z \in \mathbb{R}^{I_z}$，模型(5.3)都有可行解。然而完全补偿的假设过于苛刻，有些问题不一定具有这个性质。通常情况下，我们会假设模型(5.3)对于所有的 $\boldsymbol{x} \in \mathcal{X}$ 和 $z \in \mathcal{Z}$ 都有可行解，也即模型(5.3)具有相对完全补偿（relatively complete recourse）。

然而，两阶段随机模型具有以下难点:

1. 大量变量和约束。
2. 难以获得 $\tilde{z}$ 的集中分布。
3. 难以评估（evaluate）目标函数。尤其当 $\tilde{z}$ 的维度较大时。
4. 难以获得一个第一阶段的可行解 $\boldsymbol{x}$ 能够保证第二阶段的解 $\boldsymbol{y}$ 也是可行的。

以上难点，使得最简单的两阶段随机规划问题是一个 NP-难的问题；而如果阶段大于 2，这个问题则是一个 PSPACE-难的问题 (Dyer and Stougie, 2006)。为了部分解决以上的这些问题，我们接下来介绍动态鲁棒优化和近似决策规则。

5.2 动态鲁棒优化（Dynamic robust optimization）

在两阶段随机规划问题(5.2)中，假如 $\tilde{z}$ 的分布 $\mathbb{P}$ 的具体分布未知，但是可以构建某个模糊集 $\mathcal{P}$ 使得真实的分布在这个集合中，那么我们可以得到以下动态鲁棒优化模型：

$$
\begin{aligned}
\min\ & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} + \sup_{\mathbb{P}\in\mathcal{P}} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[g(\boldsymbol{x}, \tilde{z})\right], \\
\text{s.t.}\ & \boldsymbol{x} \in \mathcal{X},
\end{aligned} \tag{5.4}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
g(\boldsymbol{x}, z) = \min\ & \boldsymbol{d}^\top \boldsymbol{y} \\
\text{s.t.}\ & \boldsymbol{A}(z)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b}(z), \\
& \boldsymbol{y} \geq 0.
\end{aligned}
$$

我们可以等价地把模型(5.4)写成：

$$\begin{aligned} Z^* = \min\ & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} + \sup_{\mathbb{P}\in\mathcal{P}} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\boldsymbol{d}^\top \boldsymbol{y}(\tilde{z})\right], \\ \text{s.t.}\ & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{A}(z)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{y}(z) = \boldsymbol{b}(z)\ \forall z \in \mathcal{Z}, \\ & \boldsymbol{y} \in \mathcal{R}^{I_z, N_2}, \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}. \end{aligned} \tag{5.5}$$

然而，模型(5.5)一般来说是不可解的，因为 $\boldsymbol{y}$ 是 z 的任意一个函数。如果我们假设 $\boldsymbol{y}$ 和 z 之间的映射是可知的，比如是仿射或者二次的，那么模型(5.5)是否可能有解呢？答案是肯定的。

备注： 模型(5.2)是一个分布鲁棒优化的两阶段模型。由第三章和第四章可知，当模糊集只包含随机变量的支撑集时，分布鲁棒优化模型退化成传统的鲁棒优化模型。因此，这一章节只讨论分布鲁棒优化下的多阶段问题和线性决策规则。

5.3 线性决策规则（Linear decision rule）

线性决策规则（LDR）是一种在动态优化模型中，假设当前阶段的决策**线性**依赖于（之前阶段）随机变量的决策机制。也即，这是对决策变量和随机变量之间复杂关系的一种近似。相对应的，也有非线性的决策规则，比如二次决策规则（Quadratic Decision Rule, Ben-Tal et al. 2009）和多项式决策规则（Polynomial Decision Rules, Bertsimas et al. 2011）。

决策规则的提出旨在降低随机规划问题中的维度。有关于早期决策规则和随机规划结合的文献可参考Garstka and Wets等人 1974 年写的综述。然而，由于此近似所得模型过于保守而被弃用。之后，Ben-Tal et al. (2004) 创造性地将 LDR 和鲁棒优化相结合，使得线性决策规则焕发出勃勃生机。具体地，对于模型(5.5)我们可以假设 $\boldsymbol{y}$ 是 z 的仿射函数，

$$\boldsymbol{y}(z) = \boldsymbol{y}^0 + \sum_{i\in[I_z]} \boldsymbol{y}_i^1 z_i.$$

不失一般性，我们定义以下集合

$$\mathcal{L}^{I,N} = \left\{ \boldsymbol{y} \in \mathcal{R}^{I,N} \middle| \begin{array}{l} \exists \boldsymbol{y}^0, \boldsymbol{y}_i^1, i \in [I_z] : \\ \boldsymbol{y}(z) = \boldsymbol{y}^0 + \sum_{i\in[I_z]} \boldsymbol{y}_i^1 z_i \end{array} \right\}.$$

在线性规则下，模型(5.5)可以写成

$$\begin{aligned} Z^L = \min\ & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} + \sup_{\mathbb{P}\in\mathcal{P}} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\boldsymbol{d}^\top \boldsymbol{y}(\tilde{z})\right], \\ \text{s.t.}\ & \boldsymbol{A}(z)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{y}(z) = \boldsymbol{b}(z)\ \forall z \in \mathcal{Z}, \\ & \boldsymbol{y} \in \mathcal{L}^{I_z, N_2}, \boldsymbol{x} \in \mathcal{X}. \end{aligned} \tag{5.6}$$

由此，我们可以得到模型(5.5)的一个上界。

定理 5.1

$Z^* \leq Z^L$. ♡

既然是上界，那么很自然的问题是，这个近似的效果如何？近似之后的问题和原问题的差距多大？什么条件下这两个问题是一样的，也即，什么条件可以保证线性决策规则是最优的？对于前两个问题，据笔者所知，暂时没有一般性的结论。而对于第三个问题，Iancu et al. (2013) 给出了模糊集中只包含随机变量的支撑集时，线性决策规则最优的条件和技术性假设。Bertsimas et al. (2010) 和Bertsimas and Goyal (2012) 探讨了某几种特殊的多阶段问题中 LDR 最优的条件。而对于下一小节要介绍的拓展式线性决策规则（ELDR），Bertsimas et al. (2019) 证明了当第二阶段的决策变量为一维时，ELDR 为最优。He et al. (2020) 证明了 ELDR 对于车辆调度问题（vehicle repositioning problem) 在满足一定的技术性假设条件下，对于任意维度的补偿决策都是最优的。对于第五小节要介绍的情景仿射补偿近似规则，Perakis et al. (2023) 证明了在三阶段的定价和库存模型中，当只考虑一个产品时，事件式近似法则是最优的。而对于多个产品的情况，从数值例子来看，也接近于最优。

LDR 的运用使得多阶段的鲁棒优化问题受到了越来越多的学者的关注。然而，线性决策规则有一个很明显的缺点，近似模型太保守或者容易使得模型不可解。比如，Chen et al. (2008) 指出，当 z 的支撑集 $\mathcal{Z} = (-\infty, +\infty)$ 时，

$$\boldsymbol{y}(z) = \boldsymbol{y}^0 + \sum_{i \in [I_z]} \boldsymbol{y}_i^1 z_i \geq \boldsymbol{0},$$

可以得到 $\boldsymbol{y}_i^1 = \boldsymbol{0}, \forall i \in [I_z]$。此时，$\boldsymbol{y}(z) = \boldsymbol{y}^0$ 是静态的（Static policy），而不是动态地依赖于 z。这就很容易导致所得的解过于保守或者模型不可解。比如考虑如下的随机优化问题：

$$\begin{aligned}
&\min \mathbb{E}_{\mathbb{P}} [y_1(z) + y_2(z)] \\
&\text{s.t. } y_1(z) - y_2(z) = b(z), \\
&\quad y_1(z) \geq 0, y_2(z) \geq 0.
\end{aligned}$$

如果 z 的支撑集 $\mathcal{Z} = (-\infty, +\infty)$，那么 $y_1(z) = y_1^0, y_2(z) = y_2^0$。而此时，等式 $y_1(z) - y_2(z) = b(z)$ 将无法被满足。有鉴于此，Chen et al. (2008) 提出了偏转线性决策规则（Deflected Linear Decision Rule, DLDR）和分离线性决策规则（Segregated Linear Decision Rule,SLDR）。进一步地，See and Sim (2010) 提出了截断线性决策规则（Truncated linear decision rule），Goh and Sim (2010) 则将 DLDR 和 SLDR 扩展到双偏转线性决策规则（Bideflected Linear Decision Rule）和广义分离线性决策规则（Generalized Segregated Linear Decision Rule）。

对于 LDR 在多阶段问题中的更多的运用，读者可以阅读Delage and Iancu (2015) 和 Georghiou et al. (2019)。

下面，我们举个 LDR 在多阶段鲁棒库存管理中的例子 (See and Sim, 2010; Bertsimas et al., 2019)。

示例 5.2（多阶段库存管理模型）： 假如示例5.1中的小王每天都要定苹果。总共要定 T 天。所有的成本都是波动的，也即都跟 $t \in [T]$ 相关。假如第 t 天早上的库存水平（inventory level）为 y_t，那么第 $t+1$ 天的库存水平 y_{t+1} 可以通过 y_t, x_t 和 d_t 得到：

$$y_{t+1} = y_t + x_t - d_t.$$

假设需求是随机变量 $\tilde{z}$ 的函数

$$d_t(\tilde{z}_t) = \tilde{z}_t + \alpha\tilde{z}_{t-1} + \cdots + \alpha\tilde{z}_1 + \mu,$$

其中，$\alpha \in [0,1], \tilde{z}_t \triangleq (\tilde{z}_1, \ldots, \tilde{z}_t)$。$\tilde{z}_t$ 的期望为零且 $\tilde{z}_t$ 和 $\tilde{z}_s (s \neq t, s, t \in [T])$ 两两互不相关 (uncorrelated)。那么，我们可以把小王这 T 天的问题写成如下鲁棒优化模型:

$$\begin{array}{lll}
\min & \sup_{\mathbb{P}\in\mathcal{P}} \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\sum_{t\in[T]} c_t x_t(\tilde{z}_{t-1}) + v_t(\tilde{z}_t)) \right] & \\
\text{s.t.} & y_{t+1}(z_t) = y_t(z_{t-1}) + x_t(z_{t-1}) - d_t(z_t) & \forall z \in \mathcal{Z}, t \in [T], \\
& v_t(z_t) \geq h_t y_{t+1}(z_t) & \forall z \in \mathcal{Z}, t \in [T], \\
& v_t(z_t) \geq -b_t y_{t+1}(z_t) & \forall z \in \mathcal{Z}, t \in [T], \\
& 0 \leq x(z_{t-1}) \leq \bar{x}_t & \forall z \in \mathcal{Z}, t \in [T], \\
& x_t \in \mathcal{L}^{t-1,1}, y_{t+1} \in \mathcal{L}^{t,1}, v_t \in \mathcal{L}^{t,1} & \forall t \in [T].
\end{array}$$

5.4 拓展式线性决策规则 (Extended linear decision rule)

在章节4.1.1中，我们介绍了基于广义矩信息的模糊集。其中，Wiesemann et al. (2014) 巧妙地引入了辅助随机变量 $\tilde{\boldsymbol{u}}$ 使得升维之后的模糊集（lifted ambiguity set）中的约束皆化为线性约束，而将非线性部分转移到了支撑集中。相应地，在模型(5.5)中，如果假设 $\boldsymbol{y}$ 是 z 和 $\boldsymbol{u}$ 的仿射函数，也即

$$\mathcal{L}^{I_z+I_u,N_2} = \left\{ \boldsymbol{y} \in \mathcal{R}^{I_z+I_u,N_2} \,\middle|\, \begin{array}{l} \exists \boldsymbol{y}^0, \boldsymbol{y}_i^1, \boldsymbol{y}_j^2 \in \mathbb{R}^N, \forall i \in [I_z], j \in [I_u]: \\ \boldsymbol{y}(z,\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{y}^0 + \sum_{i\in[I_z]} \boldsymbol{y}_i^1 z_i + \sum_{j\in[I_u]} \boldsymbol{y}_j^2 u_j \end{array} \right\}.$$

我们称之为拓展式线性决策规则 (extended linear decision rule, ELDR)。

在 ELDR 下，模型(5.5)可以写成

$$\begin{aligned}
Z^E = \min\ & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} + \sup_{\mathbb{P}\in\mathcal{P}} \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\boldsymbol{d}^\top \boldsymbol{y}(\tilde{z}, \tilde{\boldsymbol{u}}) \right], \\
\text{s.t.}\ & \boldsymbol{A}(z)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{y}(z, \tilde{\boldsymbol{u}}) = \boldsymbol{b}(z)\ \forall (z, \boldsymbol{u}) \in \bar{\mathcal{Z}}, \\
& \boldsymbol{y} \in \mathcal{L}^{I_z+I_u,N_2}, \boldsymbol{x} \in \mathcal{X}.
\end{aligned} \tag{5.7}$$

由此，我们可以得到一个比 LDR 更好的近似模型。

定理 5.2

$Z^* \le Z^E \le Z^L$.

详细的证明请参考Bertsimas et al. (2019).

5.5 事件式近似法则 (Event-wise affine recourse approximation)

Chen et al. (2020) 提出了鲁棒随机优化（robust stochastic optimization, RSO）模型的统一框架。在这个框架中，定义静态决策 $\boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^{J_w}$，连续随机变量 $\tilde{z}$，和离散随机变量 $\tilde{s}$。定义只取决于离散随机变量 $\tilde{s}$ 的动态决策 $\boldsymbol{x}(s) : [S] \mapsto \mathbb{R}^{J_x}$, 以及同时取决于连续随机变量 $\tilde{z}$ 和离散随机变量 $\tilde{s}$ 的动态决策 $\boldsymbol{y}(s,z) : [S] \times \mathbb{R}^{I_z} \mapsto \mathbb{R}^{J_y}$。与线性近似法则类似，对应离散随机变量的不同取值，动态决策 $\boldsymbol{y}(s,z)$ 为连续随机变量 $\tilde{z}$ 的不同的线性函数：

$$\boldsymbol{y}(s,z) \triangleq \boldsymbol{y}^0(s) + \sum_{i\in[I_z]} \boldsymbol{y}^i(s) z_i.$$

其中，系数 $\boldsymbol{y}^0(s), \ldots, \boldsymbol{y}^{I_z}(s)$ 是最终模型的实际决策变量。

定义线性映射

$$\left\{\begin{array}{rcl} \boldsymbol{a}_m(s,z) & \triangleq & \boldsymbol{a}^0_{ms} + \sum_{i\in[I_z]} \boldsymbol{a}^i_{ms} z_i, \\ \boldsymbol{b}_m(s,z) & \triangleq & \boldsymbol{b}^0_{ms} + \sum_{i\in[I_z]} \boldsymbol{b}^i_{ms} z_i, \\ \boldsymbol{c}_m(s) & \triangleq & \boldsymbol{c}_{ms}, \\ d_m(s,z) & \triangleq & d^0_{ms} + \sum_{i\in[I_z]} d^i_{ms} z_i, \end{array}\right. \quad \forall m \in [M] \cup \{0\}.$$

其中，参数维度如下

$$\boldsymbol{a}^i_{ms} \in \mathbb{R}^{J_w}, \boldsymbol{b}^i_{ms} \in \mathbb{R}^{J_x}, \boldsymbol{c}_{ms} \in \mathbb{R}^{J_y}, d^i_{ms} \in \mathbb{R} \quad \forall i \in [I_z] \cup \{0\},\ s \in [S].$$

RSO 模型的目标函数取分布集合 $\mathcal{F}$（稍后介绍）下的最坏期望

$$\sup_{\mathbb{P}\in\mathcal{F}} \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\boldsymbol{a}'_0(\tilde{s},\tilde{z})\boldsymbol{w} + \boldsymbol{b}'_0(\tilde{s},\tilde{z})\boldsymbol{x}(\tilde{s}) + \boldsymbol{c}'_0(\tilde{s})\boldsymbol{y}(\tilde{s},\tilde{z}) + d_0(\tilde{s},\tilde{z})\right].$$

RSO 模型主要包含两类约束。第一类“硬”线性约束 ($m \in \mathcal{M}_1$) 为一般鲁棒约束，需要在随机变量任意可能的取值下均满足：

$$\boldsymbol{a}'_m(s,z)\boldsymbol{w} + \boldsymbol{b}'_m(s,z)\boldsymbol{x}(s) + \boldsymbol{c}'_m(s)\boldsymbol{y}(s,z) + d_m(s,z) \le 0 \quad \forall z \in \mathcal{Z}_s,\ s \in [S].$$

第二类“软”线性约束 ($m \in \mathcal{M}_2$) 与目标函数类似，考虑分布集合 $\mathcal{F}$ 下的最坏期望，并要求该最坏期望不为正：

$$\sup_{\mathbb{P}\in\mathcal{F}} \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\boldsymbol{a}'_m(\tilde{s},\tilde{z})\boldsymbol{w} + \boldsymbol{b}'_m(\tilde{s},\tilde{z})\boldsymbol{x}(\tilde{s}) + \boldsymbol{c}'_m(\tilde{s})\boldsymbol{y}(\tilde{s},\tilde{z}) + d_m(\tilde{s},\tilde{z})\right] \le 0 \quad \forall m \in \mathcal{M}_2.$$

除以上两类约束之外，在离散随机变量的不同取值下，RSO 还包含非线性约束（如凸约束，整数约束等）

$$\boldsymbol{r}(s) \triangleq \left(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{x}(s), \boldsymbol{y}^0(s), \ldots, \boldsymbol{y}^{I_z}(s)\right) \in \mathcal{X}_s \quad \forall s \in [S],$$

5.5.1 事件式近似法则

记离散随机变量 $\tilde{s}$ 的取值范围为 $[S]$。特别地，离散随机变量 $\tilde{s}$ 每一个取值 s 对应一个情景 s。定义由情景组成的一个非空集合为一个事件 $\mathcal{E} \subseteq [S]$。如此，全部情景的一个划分（partition）定义了一个相互独立（mutually exclusive）又完全穷尽（collectively exhaustive）的 MECE 事件集合，记为 $\mathcal{C}$。相应地，满足 $\mathcal{H}_{\mathcal{C}}(s) = \mathcal{E}$ 函数 $\mathcal{H}_{\mathcal{C}} : [S] \mapsto \mathcal{C}$ 确定了情景 s 在一个 MECE 事件集合中唯一所属的事件 $\mathcal{E}$。

给定一个 MECE 事件集合，事件式静态近似法则定义如下

$$\mathcal{A}(\mathcal{C}) \triangleq \left\{ x : [S] \mapsto \mathbb{R} \;\middle|\; \begin{array}{l} x(s) = x^{\mathcal{E}},\ \mathcal{E} = \mathcal{H}_{\mathcal{C}}(s) \\ \text{for some } x^{\mathcal{E}} \in \mathbb{R} \end{array} \right\},$$

亦即，不同事件下，静态决策不同。

类似地，事件式线性近似法则定义如下

$$\bar{\mathcal{A}}(\mathcal{C}, \mathcal{I}) \triangleq \left\{ y : [S] \times \mathbb{R}^{I_z} \mapsto \mathbb{R} \;\middle|\; \begin{array}{l} y(s, z) = y^0(s) + \sum\limits_{i \in \mathcal{I}} y^i(s) z_i \\ \text{for some } y^0, y^i \in \mathcal{A}(\mathcal{C}), i \in \mathcal{I} \end{array} \right\}$$

其中，信息集合 $\mathcal{I} \subseteq [I_z]$ 为连续随机变量 $\tilde{z}$ 的部分索引 (indices)，声明了连续随机变量 $\tilde{z}$ 中，事件式线性近似法则所能线性依赖的成分。事件式线性近似法则声明了在不同事件下，动态决策不同，并且动态决策为连续随机变量 $\tilde{z}$ 的线性函数。

基于事件式近似法则，完整的 RSO 模型如下

$$\begin{array}{lll} \min & \sup\limits_{\mathbb{P} \in \mathcal{F}} \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\boldsymbol{a}_0'(\tilde{s}, \tilde{z}) \boldsymbol{w} + \boldsymbol{b}_0'(\tilde{s}, \tilde{z}) \boldsymbol{x}(\tilde{s}) + \boldsymbol{c}_0'(\tilde{s}) \boldsymbol{y}(\tilde{s}, \tilde{z}) + d_0(\tilde{s}, \tilde{z}) \right] & \\ \text{s.t.} & \boldsymbol{a}_m'(s, z) \boldsymbol{w} + \boldsymbol{b}_m'(s, z) \boldsymbol{x}(s) + \boldsymbol{c}_m'(s) \boldsymbol{y}(s, z) + d_m(s, z) \le 0 & \forall z \in \mathcal{Z}_s,\ s \in [S],\ m \in \mathcal{M}_1, \\ & \sup\limits_{\mathbb{P} \in \mathcal{F}} \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\boldsymbol{a}_m'(\tilde{s}, \tilde{z}) \boldsymbol{w} + \boldsymbol{b}_m'(\tilde{s}, \tilde{z}) \boldsymbol{x}(\tilde{s}) + \boldsymbol{c}_m'(\tilde{s}) \boldsymbol{y}(\tilde{s}, \tilde{z}) + d_m(\tilde{s}, \tilde{z}) \right] \le 0 & \forall m \in \mathcal{M}_2, \\ & \left(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{x}(s), \boldsymbol{y}^0(s), \ldots, \boldsymbol{y}^{I_z}(s) \right) \in \mathcal{X}_s & \forall s \in [S] \\ & x_j \in \mathcal{A}(\mathcal{C}_x^j) & \forall j \in [J_x], \\ & y_j \in \bar{\mathcal{A}}(\mathcal{C}_y^j, \mathcal{I}_y^j) & \forall j \in [J_y]. \end{array}$$

其中，$\mathcal{C}_x^j, j \in [J_x]$，$\mathcal{C}_y^j, j \in [J_y]$ 为 MECE 事件集合, $\mathcal{I}_y^j, j \in [J_y]$ 为信息集合。

5.5.2 事件式分布模糊集

事件式分布模糊集刻画了连续随机变量 $\tilde{z}$ 和离散随机变量 $\tilde{s}$ 的联合分布的分布性质，包含了联合分布的分布信息。事件式分布模糊集取如下一般形式

$$\mathcal{F} = \left\{ \mathbb{P} \in \mathcal{P}_0\left(\mathbb{R}^{I_z} \times [S] \right) \;\middle|\; \begin{array}{ll} (\tilde{z}, \tilde{s}) \sim \mathbb{P} & \\ \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\tilde{z} \mid \tilde{s} \in \mathcal{E}_k \right] \in \mathcal{Q}_k & \forall k \in [K] \\ \mathbb{P}\left[\tilde{z} \in \mathcal{Z}_s \mid \tilde{s} = s \right] = 1 & \forall s \in [S] \\ \mathbb{P}\left[\tilde{s} = s \right] = p_s & \forall s \in [S] \\ \text{for some } \boldsymbol{p} \in \mathcal{P} & \end{array} \right\}$$

其中，$\mathcal{E}_k, k \in [K]$ 为不同事件（这些事件不需要组成 MECE 事件集合），$\mathcal{Z}_s, s \in [S]$, $\mathcal{Q}_k, k \in [K]$, 和 $\mathcal{P} \subseteq \{\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^S_{++} \mid \sum_{s\in[S]} p_s = 1\}$ 为封闭的凸集合。事件式分布模糊集声明了

(1) 不同事件（$\mathcal{E}_k$）下连续随机变量 $\tilde{\boldsymbol{z}}$ 的事件期望（即条件期望）。

(2) 不同情景（s）下连续随机变量 $\tilde{\boldsymbol{z}}$ 的支撑集合（即条件支撑集合）。

(3) 不同情景（s）发生的概率。

不确定集合 $\mathcal{Q}_k, k \in [K]$ 和 $\mathcal{P} \subseteq \{\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^S_{++} \mid \sum_{s\in[S]} p_s = 1\}$ 分别允许条件信息（1）和（3）亦可以是不确定的。

Chen et al. (2020) 证明了事件式分布模糊集有非常好的普适性。它可以描述随机优化中常用的确定的离散分布（deterministic discrete distribution），以及分布鲁棒优化中用到的不确定的离散分布（uncertain discrete distribution），确定的（或不确定的）混合分布（mixture distribution），基于矩信息的分布模糊集（moments ambiguity set），以及数据驱动下（1）基于机器学习聚类或分类算法的分布模糊集（K-means ambiguity set）与（2）基于 Wasserstein 距离的分布模糊集（Wasserstein ambiguity set）。

5.5.3 经典鲁棒优化转化

给定情景 s，RSO 模型中目标函数和“软（硬）”约束实际上是决策变量和连续随机变量 $\tilde{\boldsymbol{z}}$ 的取值 $\boldsymbol{z}$ 的双线性函数。因为，我们可以将它们方便地记为

$$\boldsymbol{a}'_m(s,\boldsymbol{z})\boldsymbol{w} + \boldsymbol{b}'_m(s,\boldsymbol{z})\boldsymbol{x}(s) + \boldsymbol{c}'_m(s)\boldsymbol{y}(s,\boldsymbol{z}) + d_m(s,\boldsymbol{z}) \triangleq \boldsymbol{r}'(s)\boldsymbol{G}_m(s)\boldsymbol{z} + h_m(s) \quad \forall m \in [M]\cup\{0\}.$$

其中，$\boldsymbol{G}_m(s) \in \mathbb{R}^{J_r \times I_z}$ 和 $h_m(s) \in \mathbb{R}$ 为参数。这样的双线性函数在事件式分布模糊集下的最坏期望可以通过求解一个经典鲁棒优化模型得到。换句话说，RSO 模型可以很方便地通过的配套建模工具包进行建模。目前，Chen et al. (2020) 论文中所提到的建模工具包 RSOME 的 MATLAB 版本和 Python 版本都已发布。读者可以下载进行测试，并通过用户手册中的实例学习 RSO 的应用场景。在后续章节也将进行相关的介绍。

定理 5.3: 模型等价转换

最坏期望

$$\sup_{\mathbb{P}\in\mathcal{F}} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\boldsymbol{r}'(\tilde{s})\boldsymbol{G}_m(\tilde{s})\tilde{\boldsymbol{z}} + h_m(\tilde{s})\right]$$

等于如下经典鲁棒优化模型的最优目标函数值

$$\begin{array}{lll}
\inf & \gamma & \\
\text{s.t.} & \gamma \geq \boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{p} + \sum\limits_{k\in[K]} \boldsymbol{\beta}'_k \boldsymbol{\mu}_k & \forall \boldsymbol{p} \in \mathcal{P},\ \dfrac{\boldsymbol{\mu}_k}{\sum_{s\in\mathcal{E}_k} p_s} \in \mathcal{Q}_k,\ k \in [K], \\
& \alpha_s + \sum\limits_{k\in\mathcal{K}_s} \boldsymbol{\beta}'_k \boldsymbol{z} \geq \boldsymbol{r}'(s)\boldsymbol{G}_m(s)\boldsymbol{z} + h_m(s) & \forall \boldsymbol{z} \in \mathcal{Z}_s,\ s \in [S], \\
& \gamma \in \mathbb{R},\ \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^S,\ \boldsymbol{\beta}_k \in \mathbb{R}^{I_z} & \forall k \in [K],
\end{array}$$

其中对每一个 $s \in [S], \mathcal{K}_s = \{k \in [K] \mid s \in \mathcal{E}_k\}$. ♡

本章参考文献

Ben-Tal, Aharon, Alexander Goryashko, Elana Guslitzer, and Arkadi Nemirovski, "Adjustable robust solutions of uncertain linear programs," *Mathematical Programming*, 2004, *99* (2), 351–376.

——, **Laurent El Ghaoui, and Arkadi Nemirovski**, *Robust optimization*, Vol. 28, Princeton University Press, 2009.

Bertsimas, Dimitris and Vineet Goyal, "On the power and limitations of affine policies in two-stage adaptive optimization," *Mathematical Programming*, 2012, *134* (2), 491–531.

——, **Dan A Iancu, and Pablo A Parrilo**, "Optimality of affine policies in multistage robust optimization," *Mathematics of Operations Research*, 2010, *35* (2), 363–394.

——, **Dan Andrei Iancu, and Pablo A Parrilo**, "A hierarchy of near-optimal policies for multistage adaptive optimization," *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2011, *56* (12), 2809–2824.

——, **Melvyn Sim, and Meilin Zhang**, "Adaptive distributionally robust optimization," *Management Science*, 2019, *65* (2), 604–618.

Chen, Xin, Melvyn Sim, Peng Sun, and Jiawei Zhang, "A linear decision-based approximation approach to stochastic programming," *Operations Research*, 2008, *56* (2), 344–357.

Chen, Zhi, Melvyn Sim, and Peng Xiong, "Robust stochastic optimization made easy with RSOME," *Management Science*, 2020, *66* (8), 3329–3339.

Dantzig, George B, "Linear programming under uncertainty," *Management Science*, 1955, *1* (3-4), 197–206.

Delage, Erick and Dan A Iancu, "Robust multistage decision making," in "The operations research revolution," INFORMS, 2015, pp. 20–46.

Dyer, Martin and Leen Stougie, "Computational complexity of stochastic programming problems," *Mathematical Programming*, 2006, *106* (3), 423–432.

Garstka, Stanley J and Roger J-B Wets, "On decision rules in stochastic programming," *Mathematical Programming*, 1974, *7* (1), 117–143.

Georghiou, Angelos, Daniel Kuhn, and Wolfram Wiesemann, "The decision rule approach to optimization under uncertainty: methodology and applications," *Computational Management Science*, 2019, *16* (4), 545–576.

Goh, Joel and Melvyn Sim, "Distributionally robust optimization and its tractable approximations," *Operations Research*, 2010, *58* (4-part-1), 902–917.

He, Long, Zhenyu Hu, and Meilin Zhang, "Robust repositioning for vehicle sharing," *Manufacturing & Service Operations Management*, 2020, *22* (2), 241–256.

Iancu, Dan A, Mayank Sharma, and Maxim Sviridenko, "Supermodularity and affine policies in dynamic robust optimization," *Operations Research*, 2013, *61* (4), 941–956.

Perakis, Georgia, Melvyn Sim, Qinshen Tang, and Peng Xiong, "Robust pricing and production with information partitioning and adaptation," *Management Science*, 2023, *69* (3), 1398–1419.

See, Chuen-Teck and Melvyn Sim, "Robust approximation to multiperiod inventory management," *Operations Research*, 2010, *58* (3), 583–594.

Wiesemann, Wolfram, Daniel Kuhn, and Melvyn Sim, "Distributionally robust convex optimization," *Operations Research*, 2014, *62* (6), 1358–1376.

第 6 章 目标鲁棒性优化（Robust Satisficing）

周明龙

6.1 满意度优化模型（Satisficing Models）

当考虑复杂系统中的优化问题时，决策者通常会将复杂的系统简化后并求得对于简化系统的最优解，或选择在复杂系统中找到一个较为理想的解。在经济学中，Simon (1955) 在其有限理性模型（bounded rationality model）中指出在现实生活中决策者更倾向于找到一个较为理想并有效可行的方案。例如，企业决策者可以将利润作为一个约束条件并使其尽可能达到一定的理想程度（aspirational level），而不是将其作为目标函数来进行最大化。Simon (1959) 将这样的决策方式称为 **satisficing**。Satisficing 一词由 satisfy 和 suffice 合并产生，直观的描述了决策者寻求一个足够好并使人满意的方案。经济学和心理学中常用 Satisficing 理论来研究决策者在不确定环境下的决策过程。在 satisficing 的框架下，出现了许多优化模型。Charnes and Cooper (1963) 最早将 satisficing 的思想融入优化模型中以最大化约束满足的概率。此模型被称为 P-model，其简化形式可以写为：

$$\begin{aligned} \max \quad & \ln \mathbb{P}\left(\boldsymbol{A}(\tilde{z})\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}(\tilde{z})\right) \\ \text{s.t.} \quad & \boldsymbol{x} \in \mathcal{X}. \end{aligned}$$

P-model 假设随机参数的分布是已知的。决策者依据能够同时满足全部约束的可能性大小来对各决策进行排序，并选取其中最有可能同时满足全部约束的决策为最优决策。例如，当约束集包含利润目标时，P-model 会倾向于更稳定的达到目标利润的解，而不是给予决策者最大期望利润的解。P-model 是一个非线形的优化问题，因此在实际问题中不容易求解。以下，我们先介绍两类更加实际可行，并且在目前被广泛应用的满意度优化模型。

6.1.1 基于最大参数不确定集合的满意度模型（Satisficing models based on maximal uncertainty sets）

P-model 的目标函数，$\nu(\boldsymbol{x}) = \ln \mathbb{P}\left(\boldsymbol{A}(\tilde{z})\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}(\tilde{z})\right)$，可被看作一个满意度方法的决策准则（satisficing decision criterion）。让我们首先定义一个约束可行集合（tolerance set）$\mathcal{T}(\boldsymbol{x})$ 来表示所有使得决策 $\boldsymbol{x}$ 保持可行的参数集合。例如，在 P-model 中，$\mathcal{T}(\boldsymbol{x}) := \{z \in \mathcal{Z} \mid \boldsymbol{A}(z)\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}(z)\}$.

Jaillet et al. (2016) 对 satisficing decision criterion 进行了如下的定义：

定义 6.1: Satisficing decision criterion

给定一系列约束可行集合（tolerance set）$\mathcal{T}(\boldsymbol{x}) \in \mathcal{Z}$，$\forall \boldsymbol{x} \in \mathcal{X}$。函数 $\nu : \mathbb{R}^{n_x} \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ 是一个满意度方法的决策准则（satisficing decision criterion）当且仅当其符合以下两个性质。对于所有 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathcal{X}$，

1. Satisficing dominance：如果 $\mathcal{T}(\boldsymbol{x}) \subseteq \mathcal{T}(\boldsymbol{y})$，那么 $\nu(\boldsymbol{x}) \le \nu(\boldsymbol{y})$。
2. Infeasibility：如果 $\mathcal{T}(\boldsymbol{x}) = \emptyset$，那么 $\nu(\boldsymbol{x}) = -\infty$。 ♣

如以上定义的满意度方法的决策准则存在一个关于参数不确定集合的表示定理。Jaillet et al. (2016) 提出以下结论。

定理 6.1: 满意度方法决策准则的表示定理（Representation theorem）

一个函数 $\nu : \mathbb{R}^{n_x} \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ 是一个满意度方法的决策准则（satisficing decision criterion）当且仅当

$$\nu(\boldsymbol{x}) = \max_{\boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{S}} \{\rho(\boldsymbol{\alpha}) \mid \boldsymbol{z} \in \mathcal{T}(\boldsymbol{x}) \ \ \forall \boldsymbol{z} \in \mathcal{U}(\boldsymbol{\alpha})\}.$$

其中 $\rho : \mathcal{S} \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ 是一个定义域在 $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{R}^{n_\alpha}$ 的函数，$\mathcal{U}(\boldsymbol{\alpha}) \in \mathcal{Z}$ 是定义在所有 $\boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{S}$ 上的一系列参数不确定集合。 ♡

基于以上定理，Jaillet et al. (2016) 提出如下基于最大参数不确定集合的满意度模型

$$\begin{aligned} \max \quad & \rho(\boldsymbol{\alpha}) \\ \text{s.t.} \quad & \boldsymbol{A}(\boldsymbol{z})\boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{b}(\boldsymbol{z}) \quad \forall \boldsymbol{z} \in \mathcal{U}(\boldsymbol{\alpha}), \\ & \boldsymbol{x} \in \mathcal{X}, \\ & \boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{S}. \end{aligned}$$

一般地，对参数化不确定集合 $\mathcal{U}(\boldsymbol{\alpha})$, 可行决策 $\boldsymbol{x} \in \mathcal{X}$ 需要满足鲁棒约束

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{z})\boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{b}(\boldsymbol{z}) \quad \forall \boldsymbol{z} \in \mathcal{U}(\boldsymbol{\alpha}).$$

参数 $\boldsymbol{\alpha}$ 决定了不确定集合 $\mathcal{U}(\boldsymbol{\alpha})$ 的大小，函数 $\rho(\boldsymbol{\alpha})$ 则反映了决策者对这一参数的喜好程度。

最简单的，取一维参数 α，$\mathcal{S} = \mathbb{R}_+$，和 $\rho(\alpha) = \alpha$, 上述模型即变为

$$\begin{aligned} \max \quad & \alpha \\ \text{s.t.} \quad & \boldsymbol{A}(\boldsymbol{z})\boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{b}(\boldsymbol{z}) \quad \forall \boldsymbol{z} \in \mathcal{U}(\alpha), \\ & \boldsymbol{x} \in \mathcal{X}, \\ & \alpha \ge 0. \end{aligned}$$

Jaillet et al. (2016) 称之为鲁棒性优化（robustness optimization）模型。

从 Satisficing 理论出发，鲁棒性优化模型为一般鲁棒优化模型

$$\begin{aligned} \max \quad & \boldsymbol{c}'\boldsymbol{x} \\ \text{s.t.} \quad & \boldsymbol{A}(\boldsymbol{z})\boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{b}(\boldsymbol{z}) \quad \forall \boldsymbol{z} \in \mathcal{U}(\Gamma), \\ & \boldsymbol{x} \in \mathcal{X}, \end{aligned}$$

提供了新的解释。一般鲁棒优化模型需要决策者声明自己对不确定性的偏好，即声明不确定集合 $\mathcal{U}(\Gamma)$ 的大小。不确定集合 $\mathcal{U}(\Gamma)$ 的大小通常由参数 Γ 直接调控。例如，Bertsimas and Sim (2004) 提出的鲁棒价格 Γ 调控了不确定参数中有多少成分能够同时取到最坏情况。对于一些决策者而言，这并不是一件容易的事，因为他们对自己的偏好并没有清楚的认识；相反，声明自身可接受的成本（亦即 $\boldsymbol{c}'\boldsymbol{x}$）也许更容易。对这样的决策者而言，求解如下鲁棒性优化模型或许更为直观

$$\begin{aligned} \max \quad & \alpha \\ \text{s.t.} \quad & \boldsymbol{A}(\boldsymbol{z})\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}(\boldsymbol{z}) \quad \forall \boldsymbol{z} \in \mathcal{U}(\alpha), \\ & \boldsymbol{x} \in \mathcal{X}, \\ & \boldsymbol{c}'\boldsymbol{x} \leq B, \\ & \alpha \geq 0. \end{aligned}$$

在可控成本范围内（$\boldsymbol{c}'\boldsymbol{x} \leq B$），在更大的不确定集合影响下依然能满足不确定性约束的决策则更优。这样的决策标准，正好可以在 Satisficing 理论的框架下进行解释。本节讨论的基于最大参数不确定集合的满意度模型的思想已经被应用在了许多实际问题当中，例如Zhu et al. (2021).

6.1.2 目标满意度优化模型（shortfall-based satisficing models）

Brown and Sim (2009) 提出的满意度模型是基于目标差额（target premium）的满意度模型。考虑一个可测空间 $(\Omega, \mathcal{F})$ 和在 Ω 上的所有随机变量的集合 $\mathcal{L}$。一个随机变量 $\tilde{z} \in \mathcal{L}$ 表示一个随机回报。为了方便，我们用 $\tilde{z}_1 \geq \tilde{z}_2$ 来表示 $\tilde{z}_1(\omega) \geq \tilde{z}_2(\omega)$，$\forall \omega \in \Omega$。我们定义目标差额为 $\tilde{v} := \tilde{z} - \tau$，其中 $\tilde{z} \in \mathcal{L}$，$\tau$ 是一个对于回报的目标（target）。在此定义下，目标差额 $\tilde{v}$ 表示超过目标的回报。对于目标差额的满意度测量的一个直观描述是目标差额大于等于零的概率，$\mathbb{P}(\tilde{v} \geq 0)$。

那么是否存在一个更加广义的描述来定义对于目标差额的满意度呢？Brown and Sim (2009) 对目标满意度（satisficing measure）进行了如下定义。

定义 6.2: 目标满意度（Satisficing measure）

一个函数 $\rho : \mathcal{L} \to [0, \bar{\rho}]$，$\bar{\rho} \in \{1, +\infty\}$，是一个定义在目标差额上的目标满意度当且仅当它有以下性质。对于所有 $\tilde{v}, \tilde{v}_1, \tilde{v}_2 \in \mathcal{L}$：

1. 获得满足性（attainment content）：如果 $\tilde{v} \geq 0$，那么 $\rho(\tilde{v}) = \bar{\rho}$。
2. 未获得消极性（nonattainment apathy）：如果 $\tilde{v} < 0$，那么 $\rho(\tilde{v}) = 0$。
3. 单调性（monotonicity）：如果 $\tilde{v}_1 \geq \tilde{v}_2$，那么 $\rho(\tilde{v}_1) \geq \rho(\tilde{v}_2)$。
4. 取得连续性（gain continuity）：$\lim_{a \downarrow 0} \rho(\tilde{v} + a) = \rho(\tilde{v})$. ♣

基于目标差额的目标满意度也存在一个简洁的表示定理。Brown and Sim (2009) 提出此表示定理并展示了目标满意度与风险测度（risk measure）之间的关系。我们首先来定义风险测度。

定义 6.3: 风险测度（Risk measure）

当一个函数 $\mu : \mathcal{L} \to \mathbb{R}$ 具有以下性质时，它被称作一个风险测度。对于所有 $\tilde{z}_1, \tilde{z}_2 \in \mathcal{L}$：

1. 单调性（monotonicity）：如果 $\tilde{z}_1 \geq \tilde{z}_2$，那么 $\mu(\tilde{z}_1) \leq \mu(\tilde{z}_2)$。
2. 平移不变性（translation invariance）：如果 $c \in \mathbb{R}$，那么 $\mu(\tilde{z}_1 + c) = \mu(\tilde{z}) - c$。♣

风险测度表示一个最小的确定性回报以使得随机回报 $\tilde{z}$ 可以被接受，而可被接受的条件即为定义风险测度的一个要素。常见的风险测度包括 value-at-risk，conditional value-at-risk 和 entropic risk measure。在此文中，我们不对风险测度的理论进行更加深入的探讨。对风险测度有兴趣的读者可以参考Föllmer and Schied (2002) 和Föllmer et al. (2004)。

基于目标满意度和风险测度的定义，Brown and Sim (2009) 提出了以下表示定理。

定理 6.2: 基于风险测度的的表示定理（Representation theorem）

一个函数 $\rho : \mathcal{L} \to [0, \bar{\rho}]$，$\bar{\rho} \in \{1, +\infty\}$，是一个目标满意度（satisficing measure）当且仅当存在一系列风险测度 $\{\mu_\alpha | \alpha \in (0, \bar{\rho}]\}$ 使得

$$\rho(\tilde{v}) = \sup\{\alpha > 0 \mid \mu_\alpha(\tilde{v}) \leq 0\}.$$

其中 μ_α 在 $\alpha \in (0, \bar{\rho}]$ 中不递减，并且 $\mu_0 = -\infty$。相类似的，给定任何目标满意度 ρ, 其相对应的风险测度可被写为

$$\mu_k(\tilde{v}) = \inf\{a \mid \rho(\tilde{v} + a) \geq k\}.$$

♡

上述定理确立了每个目标满意度函数都可以用一系列风险测度来描述。同样的，给定一个目标满意度函数。我们也可以构造出其对应的风险测度。此定理展示了在经济学中常见的风险测度和目标满意度之间的关联，并赋予了目标满意度一个实际的含义。具体来说，目标满意度量化了决策者达成回报目标的同时可以接受的最大风险厌恶程度。在实际应用中，我们常用凸风险测度（convex risk measure）和一致性风险测度（coherent risk measure）来构造目标满意度，以得到更好的性质，如拟凹和一致性。

定义 6.4: 拟凹目标满意度（Quasiconcave satisficing measure）

一个函数 $\rho : \mathcal{L} \to [0, \bar{\rho}]$，$\bar{\rho} \in \{1, +\infty\}$，是一个定义在目标差额上的拟凹目标满意度当且仅当它符合目标满意度定义并有以下性质。对于所有 $\tilde{v}, \tilde{v}_1, \tilde{v}_2 \in \mathcal{L}$：

1. 拟凹（quasiconcavity）：对于任何 $\lambda \in [0, 1]$，$\rho(\lambda\tilde{v}_1 + (1-\lambda)\tilde{v}_2) \geq \min\{\tilde{v}_1, \tilde{v}_2\}$。

另外，如果 ρ 还满足以下条件，那么它被称为一致性目标满意度（coherent satisficing measure）。对于任何 $\lambda > 0$：

2. 尺度不变性（scale invariance）：$\rho(\lambda\tilde{v}) = \lambda\rho(\tilde{v})$。♣

定理 6.3: 拟凹与一致性目标满意度

一个函数目标满意度 ρ 是一个拟凹目标满意度当且仅当其对应的风险测度 $\{\mu_\alpha|\alpha \in (0,\bar{\rho}]\}$ 是一系列凸风险测度。类似的，目标满意度 ρ 是一个一致性目标满意度当且仅当其对应的风险测度 $\{\mu_\alpha|\alpha \in (0,\bar{\rho}]\}$ 是一系列一致性风险测度。♡

接下来我们考虑如何求解以下的目标满意度优化模型：

$$\rho^* = \max_{\tilde{v}\in\mathcal{L}} \rho(\tilde{v}).$$

以上模型可以被写为以下等价模型

$$\begin{aligned} \rho^* = \quad & \max \quad \alpha \\ & \text{s.t.} \quad \mu_\alpha(\tilde{v}) \le 0, \\ & \qquad\;\; \tilde{v} \in \mathcal{L}. \end{aligned}$$

对于任意 $\alpha > 0$，集合 $\{\tilde{v} \in \mathcal{L} \mid \mu_\alpha(\tilde{v}) \le 0\}$ 是一个凸集合。因此，我们可以使用二分法来解决以上目标满意度优化问题。在二分法步骤中, 每个子问题都是一个对于一个给定的 $\alpha > 0$ 值的可行性问题：

$$\begin{aligned} & \max \quad 0 \\ & \text{s.t.} \quad \mu_\alpha(\tilde{v}) \le 0, \\ & \qquad\;\; \tilde{v} \in \mathcal{L}. \end{aligned}$$

具体的二分法步骤可以参考Brown and Sim (2009)，我们在此不再详细描述。

此类目标满意度模型已经被广泛应用到很多实际问题当中。在实际应用中，大家经常会选择用 conditional value-at-risk 和 entropic risk measure 来构造目标满意度。例如，基于 conditional value-at-risk 的目标满意度被应用在Zhang et al. (2019)；基于 entropic risk measure 的目标满意度被应用在Hall et al. (2015); Zhou et al. (2021)。我们推荐感兴趣的读者参考这一系列的文献以进一步了解目标满意度优化模型的应用。

6.2 目标鲁棒性优化（Robust satisficing）

Long et al. (2022) 提出了一个数据驱动的满意度优化的框架。此框架被称为目标鲁棒性优化（robust Satisficing）。

考虑一个成本函数 $f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}) : \mathcal{X} \times \mathcal{Z} \to \mathbb{R}$，其中 $\boldsymbol{x} \in \mathcal{X}$ 代表决策变量，$\boldsymbol{z} \in \mathcal{Z}$ 表示影响成本的一系列不确定性参数。当不确定性参数为随机变量并服从某个分布 $\mathbb{P}^*$ 时，决策者常常考虑以下风险中性的优化模型：

$$\begin{aligned} & \min \quad \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}[f(\boldsymbol{x},\tilde{\boldsymbol{z}})] \\ & \text{s.t.} \quad \boldsymbol{x} \in \mathcal{X}. \end{aligned}$$

虽然我们在实际当中通常无法知晓模型中不确定性参数的真实分布 $\mathbb{P}^*$，但是决策者可以利用历史数据来估测或近似不确定性参数的分布。我们用 $\hat{z}_1, \ldots, \hat{z}_S$ 来代表历史数据中的 S 个对于随机参数取值的观测，并用 $\hat{\mathbb{P}}$ 来表示经验分布（empirical distribution）。对于任何 $s \in [S]$，$\hat{\mathbb{P}}[\tilde{z} = \hat{z}_s] = 1/S$。我们可以利用以下 empirical optimization 方法来近似最优期望成本：

$$\begin{aligned} Z_0 = \min \quad & \mathbb{E}_{\hat{\mathbb{P}}}\left[f(\boldsymbol{x}, \tilde{z})\right] \\ \text{s.t.} \quad & \boldsymbol{x} \in \mathcal{X}. \end{aligned}$$

当经验分布不能够准确的近似真实分布时，基于经验分布的 empirical optimization 方法可能会得到较差的解。

为了减少解对经验分布的过度拟合（overfitting），我们可以借助鲁棒优化的思想。我们首先定义一个数据驱动模糊集

$$\mathcal{B}(\Gamma) := \left\{ \mathbb{P} \in \mathcal{P}_0(\mathcal{Z}) \;\middle|\; \begin{array}{l} \tilde{z} \sim \mathbb{P} \\ \Delta(\mathbb{P}, \hat{\mathbb{P}}) \le \Gamma \end{array} \right\}$$

其中，$\mathcal{P}_0(\mathcal{Z})$ 代表定义在 $\mathcal{Z}$ 上的分布的集合，Δ 是一个非负的函数，并满足 $\Delta(\mathbb{P}, \mathbb{P}) = 0$。$\Delta$ 代表了两个分布之间的距离，在数据驱动的分布鲁棒优化框架下，我们常选用 Wasserstein distance (例如，Mohajerin Esfahani and Kuhn, 2018; Gao and Kleywegt, 2016)。我们考虑以下数据驱动的分布鲁棒优化模型：

$$\begin{aligned} Z_\Gamma = \min \quad & \sup_{\mathbb{P} \in \mathcal{B}(\Gamma)} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[f(\boldsymbol{x}, \tilde{z})\right] \\ \text{s.t.} \quad & \boldsymbol{x} \in \mathcal{X}. \end{aligned} \tag{6.1}$$

当 Δ 被定为 Wasserstein distance 时，以上分布鲁棒优化模型可以被转化为一个简洁的传统鲁棒优化模型：

$$\begin{aligned} \min \quad & k\Gamma + \frac{1}{S} \sum_{s \in [S]} y_s \\ \text{s.t.} \quad & y_s \ge \sup_{z_s \in \mathcal{Z}} \left\{ f(\boldsymbol{x}, z_s) - k\|z_s - \hat{z}_s\| \right\} \quad \forall s \in [S], \\ & \boldsymbol{x} \in \mathcal{X}. \end{aligned} \tag{6.2}$$

我们现在考虑另一种减少对经验分布过度拟合的框架，即Long et al. (2022) 提出的目标鲁棒性优化框架。目标鲁棒性优化一般被写为以下形式：

$$\begin{aligned} \kappa_\tau = \quad \min \quad & k \\ \text{s.t.} \quad & \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[f(\boldsymbol{x}, \tilde{z})\right] - \tau \le k\Delta(\mathbb{P}, \hat{\mathbb{P}}) \qquad \forall \mathbb{P} \in \mathcal{P}_0(\mathcal{Z}), \\ & \boldsymbol{x} \in \mathcal{X}, \quad k \ge 0. \end{aligned} \tag{6.3}$$

其中，$\tau \ge Z_0$ 为模型参数，表示一个目标成本预算。

由于不确定性参数的真实分布 $\mathbb{P}^*$ 很可能与经验分布 $\hat{\mathbb{P}}$ 不同，基于经验分布而得到的最优成本 Z_0 在实际中常常是无法达到的。为了提高模型的鲁棒性，目标鲁棒性优

化模型设置一个目标成本 $\tau \geq Z_0$，并尽可能的在不确定性环境中达到目标成本 τ。当 $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[f(\boldsymbol{x}, \tilde{z})] \geq \tau$，我们说在分布 $\mathbb{P}$ 下的期望成本超过了目标成本。在目标鲁棒性优化的框架下，在任何分布 $\mathbb{P}$ 下，期望成本超过目标成本的大小会被 Δ 函数限制。从直观上讲，目标鲁棒性优化模型旨在最小化模型的脆弱性（fragility）。具体来说，系统的脆弱性是通过其目标函数 κ_τ 衡量的。当目标鲁棒性优化的目标函数变小，亦即 κ_τ 变小，在任何分布 $\mathbb{P}$ 下的期望成本的上界都会更靠近目标成本。因此，当 κ_τ 变小时，目标鲁棒性优化模型的最优解也就能更好的将期望成本控制在目标成本附近。

与鲁棒优化不同，目标满意度优化模型考虑了所有可能的分布 $\{\mathbb{P} \mid \mathbb{P} \in \mathcal{P}_0(\mathcal{Z})\}$，而不只是在模糊集中的分布 $\{\mathbb{P} \mid \mathbb{P} \in \mathcal{B}(r)\}$。决策者不再设定模糊集的大小 Γ，而是设定目标成本 τ。由于目标成本 τ 可以直接联系到经验分布优化模型的目标函数 Z_0，我们认为 τ 是一个更加容易理解并有具体意义的模型参数。例如，对于一个 $\varphi \geq 1$，决策者可以将目标成本设置为 $Z_0(1+\varphi)$，表示我们可以接受比经验分布下的最优期望成本多 $\varphi\%$ 的成本。

模型(6.3)是否可解很大程度上取决于函数 f 和 Δ 的形式。在本文中，我们只着重于 Δ 为 Wasserstein distance 的情况。在此情况下，模型(6.3)可以被写为：

$$
\begin{aligned}
\kappa_\tau = \quad & \min \quad k \\
& \text{s.t.} \quad \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[f(\boldsymbol{x}, \tilde{z})] - \tau \leq k \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\|\tilde{z} - \tilde{\boldsymbol{u}}\|] \qquad \forall \mathbb{Q} \in \mathcal{Q}, \\
& \qquad\quad \boldsymbol{x} \in \mathcal{X}, \quad k \geq 0.
\end{aligned} \tag{6.4}
$$

其中，我们定义模糊集

$$
\mathcal{Q} := \left\{ \mathbb{Q} \in \mathcal{P}_0(\mathcal{Z}^2) \;\middle|\; \begin{array}{l} (\tilde{z}, \tilde{\boldsymbol{u}}) \sim \mathbb{Q} \\ \mathbb{Q}[\tilde{\boldsymbol{u}} = \hat{z}_s] = 1/S \ \forall s \in [S] \end{array} \right\}.
$$

当集合 $\mathcal{Z}$ 为凸并是闭集时，模型(6.4)可以被写为以下的传统鲁棒优化模型：

$$
\begin{aligned}
\kappa_\tau = \quad & \min \quad k \\
& \text{s.t.} \quad \frac{1}{S} \sum_{s \in [S]} y_s \leq \tau \\
& \qquad\quad y_s \geq \sup_{z_s \in \mathcal{Z}} \{ f(\boldsymbol{x}, z_s) - k \|z_s - \hat{z}_s\| \} \qquad \forall s \in [S], \\
& \qquad\quad \boldsymbol{x} \in \mathcal{X}, k \geq 0.
\end{aligned} \tag{6.5}
$$

模型(6.5)与模型(6.2)在形式上有很多共同之处。这也使得目标鲁棒性优化模型与分布鲁棒优化模型的复杂度相似。基于 Wasserstein distance 的性质，目标鲁棒性优化模型有以下的样本外表现保障：

命题 6.1: 样本外表现保障

考虑 Wasserstein distance，Δ。假设产生真实数据的分布 $\mathbb{P}^*$，$\tilde{z} \sim \mathbb{P}^*$，是一个轻尾分布（light-tailed distribution），并对于一个 $\xi > 1$ 满足

$$
\delta := \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}[\exp(\|\tilde{z}\|^\xi)] < \infty.
$$

让 $\mathbb{P}^S$ 表示从 $\mathbb{P}^*$ 中抽取独立样本 $\hat{z}_1,\ldots,\hat{z}_S$ 的分布。对于模型(6.4)的任何可行解 $\boldsymbol{x}$ 和 k，我们有以下不等式

$$\mathbb{P}^S\left[\mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}\left[f\left(\boldsymbol{x},\tilde{z}\right)\right]>\tau+k\Gamma\right]\leq\begin{cases}c_1\exp(-c_2S\Gamma^{\max\{N,2\}}) & \text{if } 0<\Gamma\leq 1,\\ c_1\exp(-c_2S\Gamma^{\xi}) & \text{if } \Gamma>1,\end{cases}$$

其中 c_1 和 c_2 是只取决于 ξ，δ 和 N 的正常数。♠

目标鲁棒性优化的解可以以高概率保证真实的期望成本与目标成本之间的差距不会超过 $k\Gamma$。并且，这个概率上界对于 r 以指数形式缩减。因此，目标鲁棒性优化模型的可行解对于更大的目标超额拥有更高的概率保证。对于同一组参数 c_1，c_2，ξ，δ 和 Γ，减小 k 可以在不影响概率上界的前提下减少目标超额。换言之，增长模型的鲁棒性和减少 k 的值是相互统一的，而目标鲁棒性优化的目标函数正是最小化 k。

6.2.1 目标脆弱度（Fragility measure）

注意到模型(6.1)的决策标准为最差期望。最差期望是一个一致性风险测度，拥有良好的性质以促进分布鲁棒优化得到更合理的解。那么，目标鲁棒性优化模型的决策标准是否也有一系列良好的性质呢？我们首先来定义目标鲁棒性优化模型的决策标准，目标脆弱度（Fragility measure）。考虑一个可测空间 $(\Omega,\mathcal{F})$ 和在 Ω 上的所有随机变量的集合 $\mathcal{L}$，并用 $\mathcal{P}_0$ 表示这个空间上的所有分布的集合。我们用一个随机变量 $\tilde{v}\in\mathcal{L}$ 来表示在一个给定的 $\boldsymbol{x}$ 下不确定性的目标超额 $f(\boldsymbol{x},\tilde{z})-\tau$。

定义 6.5: 目标脆弱度（Fragility measure）

一个函数 $\rho:\mathcal{L}\to[0,+\infty]$ 是一个定义在经验分布 $\hat{\mathbb{P}}\in\mathcal{P}_0$ 上的目标脆弱度当且仅当它符合以下表达形式：

$$\begin{aligned}\rho(\tilde{v})=\ \min\ & k\\ \text{s.t.}\ & \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\tilde{v}\right]\leq k\Delta(\mathbb{P},\hat{\mathbb{P}})\quad \forall\mathbb{P}\in\mathcal{P}_0,\\ & k\geq 0.\end{aligned}$$

其中，Δ 是一个测量分布间距离的函数，Δ 非负，并满足 $\Delta(\mathbb{P},\mathbb{P})=0$。♣

基于上述目标脆弱度的定义，目标鲁棒性优化模型(6.3)可以被写为以下简化形式：

$$\begin{aligned}\kappa_\tau=\ \min\ & \rho(f(\boldsymbol{x},\tilde{z})-\tau)\\ \text{s.t.}\ & \boldsymbol{x}\in\mathcal{X}.\end{aligned}$$

换言之，目标鲁棒性优化模型旨在最小化一个目标脆弱度。接下来我们研究目标脆弱度是否具有合理的决策准则所需的良好的性质。

定理 6.4: 目标脆弱度的性质

一个定义在分布 $\hat{\mathbb{P}} \in \mathcal{P}_0$ 上的目标脆弱度 $\rho : \mathcal{L} \to [0, +\infty]$ 是一个有下半连续性的函数，并具有以下性质：

1. 单调性（monotonicity）：如果对于所有的 $\mathbb{P} \in \mathcal{P}_0$ 都满足 $\mathbb{P}[\tilde{v}_1 \geq \tilde{v}_2] = 1$，那么 $\rho(\tilde{v}_1) \geq \rho(\tilde{v}_2)$.
2. 正齐次性（positive homogeneity）：对于任何 $\lambda \geq 0$，$\rho(\lambda\tilde{v}) = \lambda\rho(\tilde{v})$。
3. 次可加性（subadditivity）：$\rho(\tilde{v}_1 + \tilde{v}_2) \leq \rho(\tilde{v}_1) + \rho(\tilde{v}_2)$.
4. 稳健性（pro-robustness）：如果 $\tilde{v} \leq 0$，那么 $\rho(\tilde{v}) = 0$。
5. 反脆弱性（anti-fragility）：如果 $\mathbb{E}_{\hat{\mathbb{P}}}[\tilde{v}] > 0$，那么 $\rho(\tilde{v}) = \infty$.

在额外的理论条件下 (例如 Föllmer and Schied, 2002, 中的定理 6)，相对应的分布距离函数 Δ 可以被表示为

$$\Delta(\mathbb{P}, \hat{\mathbb{P}}) = \sup_{\tilde{v} \in \mathcal{L}} \{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\tilde{v}] \ \mid \ \rho(\tilde{v}) \leq 1\}.$$

♡

前三条性质与一致性风险测度定义中的三条性质相同，这也很大程度的确保目标脆弱度是一个合理的决策准则。由于前三条性质相对常见，我们在此不再解释前三条性质。第四条性质（稳健性）表示如果模型的约束总是可行的，那么相应的目标脆弱度应该是最低值零。第五条性质（反脆弱性）确保任何具有有限目标脆弱度的解在经验分布下可以满足 $\mathbb{E}_{\hat{\mathbb{P}}}[\tilde{v}] \leq 0$。

6.2.2 目标鲁棒性优化的应用

Long et al. (2022) 探讨了目标鲁棒性优化在不同问题中的可解性并展示如何将目标鲁棒性优化应用在基于风险的线性优化、组合优化，和多阶段优化问题中。在此，我们不过多讲述这一部分内容。我们仅用Long et al. (2022) 中的一部分仿真实验模型来展示目标鲁棒性优化在实际问题中的应用。

我们首先考虑一个数据驱动下的投资组合选择问题。决策者投资 N 个风险资产，其中投资组合的风险是依据经验分布 $\hat{\mathbb{P}}$ 来进行评估的。基于经验分布的基准模型如下：

$$\begin{aligned} Z_0 = \quad \max \quad & \mathbb{E}_{\hat{\mathbb{P}}}[\boldsymbol{x}^\top \tilde{\boldsymbol{z}}] \\ \text{s.t.} \quad & \mathbb{C}^{\epsilon}_{\hat{\mathbb{P}}}[-\boldsymbol{x}^\top \tilde{\boldsymbol{z}}] \leq \beta, \\ & \mathbf{1}^\top \boldsymbol{x} = 1, \\ & \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^N_+. \end{aligned}$$

其中 $\tilde{\boldsymbol{z}}$ 代表资产的回报，$\mathbb{C}^{\epsilon}_{\hat{\mathbb{P}}}$ 代表如下定义的 Conditional Value-at-Risk（CVaR）风险测度：

$$\mathbb{C}^{\epsilon}_{\mathbb{P}}[\tilde{v}] := \inf_{\eta \in \mathbb{R}} \eta + \frac{1}{\epsilon}\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[(\tilde{v} - \eta)^+\right].$$

此基准优化模型最大化在经验分布下的期望回报，并用 CVaR 测度来限制投资风险。

根据此基准优化模型，我们考虑以下目标鲁棒性优化模型：

$$
\begin{aligned}
\kappa_\tau = \quad \min \quad & k_0 + w k_1 \\
\text{s.t.} \quad & \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\boldsymbol{x}^\top \tilde{\boldsymbol{z}}\right] \ge \tau - k_0 \Delta_W(\mathbb{P}, \hat{\mathbb{P}}) && \forall \mathbb{P} \in \mathcal{P}_0(\mathcal{Z}), \\
& \eta + \frac{1}{\epsilon}\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[(-\boldsymbol{x}^\top \tilde{\boldsymbol{z}} - \eta)^+\right] \le \beta + k_1 \Delta_W(\mathbb{P}, \hat{\mathbb{P}}) && \forall \mathbb{P} \in \mathcal{P}_0(\mathcal{Z}), \\
& \mathbf{1}^\top \boldsymbol{x} = 1, \\
& \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^N_+.
\end{aligned}
\tag{6.6}
$$

其中，目标回报为 $\tau \le Z_0$，w 为调节两个目标的权重参数。在一定条件下，模型(6.6)可以被写为一个线性规划问题。

命题 6.2

当 Δ 是用 ℓ_1-范数定义的 Wasserstein distance，$\mathcal{Z} = \mathbb{R}^N$，目标鲁棒性优化模型(6.6)可以被写为以下形式：

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \|\boldsymbol{x}\|_\infty \\
\text{s.t.} \quad & \frac{1}{S}\sum_{s\in[S]} y_{1s} \ge \tau, \\
& y_{1s} \le \boldsymbol{x}^\top \hat{\boldsymbol{z}}_s && \forall s \in [S], \\
& \eta + \frac{1}{\epsilon S}\sum_{s\in[S]} y_{2s} \le \beta, \\
& y_{2s} \ge -\boldsymbol{x}^\top \hat{\boldsymbol{z}}_s - \eta && \forall s \in [S], \\
& y_{2s} \ge 0 && \forall s \in [S], \\
& \mathbf{1}^\top \boldsymbol{x} = 1, \\
& \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^N_+,\ \eta \in \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

♠

可以看出，目标鲁棒性优化可以被应用于在复杂的环境中，并且通常有较低的计算复杂度。在很多问题中，目标鲁棒性优化模型的解具有良好的性质并很容易被决策者理解。例如，在以上投资组合的问题背景下，目标鲁棒性优化模型(6.6)的解会尽可能的倾向于多元化投资组合，在此我们不展开讨论。有兴趣的读者可以参考Long et al. (2022)。

本章参考文献

Bertsimas, Dimitris and Melvyn Sim, "The price of robustness," *Operations Research*, 2004, *52* (1), 35–53.

Brown, David B and Melvyn Sim, "Satisficing measures for analysis of risky positions," *Management Science*, 2009, *55* (1), 71–84.

Charnes, Abraham and William W Cooper, "Deterministic equivalents for optimizing and satisficing under chance constraints," *Operations Research*, 1963, *11* (1), 18–39.

Esfahani, Peyman Mohajerin and Daniel Kuhn, "Data-driven distributionally robust optimization using the Wasserstein metric: performance guarantees and tractable reformulations," *Mathematical Programming*, 2018, *171* (1), 115–166.

Föllmer, Hans, Alexander Schied, and Terry J Lyons, "Stochastic finance. An introduction in discrete time," *The Mathematical Intelligencer*, 2004, *26* (4), 67–68.

__ **and** __ , "Convex measures of risk and trading constraints," *Finance and Stochastics*, 2002.

Gao, Rui and Anton J Kleywegt, "Distributionally robust stochastic optimization with Wasserstein distance," *Available at arXiv:1604.02199*, 2016.

Hall, Nicholas G, Daniel Zhuoyu Long, Jin Qi, and Melvyn Sim, "Managing underperformance risk in project portfolio selection," *Operations Research*, 2015, *63* (3), 660–675.

Jaillet, Patrick, Sanjay Dominik Jena, Tsan Sheng Ng, and Sim Melvyn, "Satisficing Awakens: Models to Mitigate Uncertainty.," 2016, p. *Available at Optimization Online*.

Long, Daniel Zhuoyu, Melvyn Sim, and Minglong Zhou, "Robust Satisficing," *Operations Research (forthcoming)*, 2022.

Simon, Herbert A, "A behavioral model of rational choice," *The Quarterly Journal of Economics*, 1955, *69* (1), 99–118.

__ , "Theories of decision-making in economics and behavioral science," *The American Economic Review*, 1959, *49* (3), 253–283.

Zhang, Yu, Roberto Baldacci, Melvyn Sim, and Jiafu Tang, "Routing optimization with time windows under uncertainty," *Mathematical Programming*, 2019, *175* (1), 263–305.

Zhou, Minglong, Gar Goei Loke, Chaithanya Bandi, Zi Qiang Glen Liau, and Wilson Wang, "Intraday scheduling with patient re-entries and variability in behaviours," *Manufacturing and Operations Management*, 2021.

Zhu, Taozeng, Jingui Xie, and Melvyn Sim, "Joint estimation and robustness optimization," *Management Science*, 2021.

第 7 章 鲁棒预测与优化（Joint Estimation and Robustness Optimization）

朱桃增

7.1 鲁棒性优化（Robustness optimization）

在建模求解实际问题过程中，我们通常需要预测一些参数或者未知变量和优化模型。由于联合预测和优化（joint prediction and optimization）问题的复杂性，先预测后优化（predict-then-optimize）成为解决这类问题常用的方法。因此，决策者往往需要先使用历史数据估计模型所需参数，然后求解以下优化模型：

$$
\begin{aligned}
\hat{Z} = \min \quad & f_0(\boldsymbol{x}, \hat{\boldsymbol{w}}) \\
\text{s.t.} \quad & f_i(\boldsymbol{x}, \hat{\boldsymbol{w}}) \le \tau \quad \forall i \in [I], \\
& \boldsymbol{x} \in \mathcal{X}.
\end{aligned}
$$

其中，$\boldsymbol{x} \in \mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^N$ 为决策变量，$\hat{\boldsymbol{w}}$ 为模型的输入参数，$f_i : \bar{\mathcal{X}} \times \mathcal{W} \to \mathbb{R}$ 为定义在 $\bar{\mathcal{X}} \times \mathcal{W} \subseteq \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M$ 上的函数。本章着重于讨论当 f_i 是在 $\bar{\mathcal{X}} \times \mathcal{W}$ 上的鞍函数（saddle function）的情形。有关鞍函数的定义如下：

定义 7.1: 鞍函数 (Saddle function)

当一个函数 $f : \bar{\mathcal{X}} \times \mathcal{W} \to \mathbb{R}$ 满足以下性质时：

- 给定 $\boldsymbol{x} \in \bar{\mathcal{X}}$, $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{w})$ 是关于 $\boldsymbol{w}$ 的凹函数，
- 给定 $\boldsymbol{w} \in \mathcal{W}$，$f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{w})$ 是关于 $\boldsymbol{x}$ 的凸函数，

称之为定义在 $\bar{\mathcal{X}} \times \mathcal{W}$ 上的鞍函数。 ♣

通常，我们可以通过统计方法得到上述优化模型的参数 $\hat{\boldsymbol{w}}$。然而，参数的估计值与真实值之间常常存在差异，从而可能导致优化问题的目标函数值严重偏离决策者可承受的范围。更有甚者，这会导致某些硬性约束条件不再满足以至于所得解不再具有可行性。有鉴于此，传统鲁棒优化考虑了如下优化模型：

$$
\begin{aligned}
Z_R(r) = \min \quad & \tau \\
\text{s.t.} \quad & f_0(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{w}) \le \tau \quad \forall \boldsymbol{w} \in \mathcal{U}(r), \\
& f_i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{w}) \le \tau_i \quad \forall \boldsymbol{w} \in \mathcal{U}(r), \ i \in [I], \\
& \boldsymbol{x} \in \mathcal{X}.
\end{aligned} \tag{7.1}
$$

此处，$\mathcal{U}(r)$ 是参数 $\boldsymbol{w}$ 的不确定集，通常可以定义为

$$\mathcal{U}(r) \triangleq \left\{\boldsymbol{w} \in \mathcal{W} \;\middle|\; \|\boldsymbol{w} - \hat{\boldsymbol{w}}\| \le r\right\}.$$

如何确定此集合的大小，也即 r 的值，是鲁棒优化面临的一个难题。虽然参数不确定集的大小和概率约束存在一定的联系，但是概率边界极度依赖于概率分布的假设以及函数 $f_i(\cdot,\cdot)$ 的形式。Zhu et al. (2021) 提出了如下鲁棒性优化模型：

$$\begin{aligned} Z_S(\tau_0) = \max \quad & r \\ \text{s.t.} \quad & f_0(\boldsymbol{x},\boldsymbol{w}) \le \tau_0 \quad \forall \boldsymbol{w} \in \mathcal{U}(r), \\ & f_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{w}) \le \tau_i \quad\; \forall \boldsymbol{w} \in \mathcal{U}(r),\, i \in [I], \\ & \boldsymbol{x} \in \mathcal{X},\ r \ge 0. \end{aligned} \tag{7.2}$$

此模型旨在提供一个能够使得满足条件的参数不确定集尽可能的大的解，从而降低参数不在所考虑集合中的可能性。与此同时，此解需要让成本控制在决策者设定的目标成本 $\tau_0(\le \hat{Z})$ 之内。由于参数不确定集的大小关于 r 是单调递增的，我们可以采用二分法来求解模型(7.2)。

实际上决策者可以根据自身偏好来改变参数不确定集的大小从而选择问题的解。然而，对于目标导向（target-oriented）类型的决策者，鲁棒性优化的方法则更具有吸引力。虽然在规范性分析（prescriptive analytics）中这种决策准则并不多见，但已有实证研究表明目标（target）在决策过程中起着至关重要的作用 (Payne et al., 1980, 1981; Merchant and Manzoni, 1989; Kőszegi and Rabin, 2006)。有关鲁棒性优化的起源以及相关介绍，读者可参考 Jaillet et al. (2022) 及其中的相关文献。

7.2 基于参数估计的鲁棒性优化

在给定数据集 $\mathcal{D}$ 情况下，参数 $\hat{\boldsymbol{w}}$ 可以通过求解如下优化问题得到：

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{w}} = \arg\min \quad & \rho\left(\boldsymbol{w};\mathcal{D}\right) \\ \text{s.t.} \quad & \boldsymbol{w} \in \mathcal{W}. \end{aligned}$$

其中，$\rho\left(\boldsymbol{w};\mathcal{D}\right)$ 被称作为估计方法（estimation metric）。例如，在最小二乘估计中，$\rho\left(\boldsymbol{w};\mathcal{D}\right)$ 为残差（即观测值与预测值之间的差距）平方总和。此外，假定 $\mathcal{W}$ 是一个凸集（convex set）且其相对内点集（relative interior）非空，即 $\operatorname{relint}(\mathcal{W}) \neq \emptyset$。

7.2.1 基于参数估计的参数不确定集（Estimate uncertainty set）及其统计意义

定义 7.2: (Estimate Uncertainty Set)

基于参数估计方法，我们定义基于参数估计的参数不确定集：

$$\mathcal{E}(r;\mathcal{D}) \triangleq \left\{ \boldsymbol{w} \in \mathcal{W} \middle| \rho(\boldsymbol{w};\mathcal{D}) \le \hat{\rho} + r \right\}. \tag{7.3}$$

其中，$\hat{\rho} = \rho(\hat{\boldsymbol{w}};\mathcal{D})$ 是估计方法的最优值，$r \ge 0$ 为 $\rho(\boldsymbol{w};\mathcal{D})$ 与最优值 $\hat{\rho}$ 之间的差距。♣

对于给定的显著性水平 α，上述定义的基于参数估计的参数不确定集可以近似地看作不能够拒绝原假设的参数的所有可能取值的集合。

命题 7.1

考虑一个线性模型，假设其扰动项是独立同分布的，并且其均值为 0，而方差 σ^2 未知。此外，存在由 S 个独立相互独立的观测组成的数据集 $\mathcal{D} = \{\boldsymbol{z}, \boldsymbol{Y}\}$，其中 $\boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^S$、$\boldsymbol{Y} = \{\boldsymbol{1}, \boldsymbol{y}_1, \ldots, \boldsymbol{y}_{M-1}\} \in \mathbb{R}^{S\times M}$ 为列满秩矩阵。选取 $\rho(\boldsymbol{w};\mathcal{D}) = \|\boldsymbol{z} - \boldsymbol{Y}\boldsymbol{w}\|_2^2$：

- 如果
$$r = \hat{\rho}\frac{\chi^2_{M,1-\alpha}}{S-M}, \tag{7.4}$$
对于任意给定 $\boldsymbol{\theta} \in \mathcal{E}(r;\mathcal{D})$ 及原假设 $H_0 : \boldsymbol{w} = \boldsymbol{\theta}$，则在显著性水平 α 下通过卡方检验 (近似) 不能拒绝原假设；此处，$\chi^2_{M,1-\alpha}$ 是自由度为 M 的卡方分布的 $1-\alpha$ 分位点，M 为 $\boldsymbol{w}$ 的维度。
- 如果考虑的是一个正态线性模型且
$$r = \hat{\rho}F^{-1}_{M,S-M}(1-\alpha)\frac{M}{S-M}, \tag{7.5}$$
对于任意给定 $\boldsymbol{\theta} \in \mathcal{E}(r;\mathcal{D})$ 及原假设 $H_0 : \boldsymbol{w} = \boldsymbol{\theta}$，则在显著性水平 α 下通过 F 检验不能拒绝原假设；此处，$F^{-1}_{M,S-M}(1-\alpha)$ 是第一自由度为 M、第二自由度为 $S-M$ 的 F 分布的 $1-\alpha$ 分位点，M 为 $\boldsymbol{w}$ 的维度。♠

接下来，我们可以通过下述命题得到基于极大似然估计（maximum likelihood estimation）构造的参数不确定集。这一集合可以近似地看作对应显著性水平下似然比检验（likelihood ratio test）不能够拒绝原假设的参数的所有可能取值的集合。

命题 7.2

考虑一个由 S 个独立同分布的观测组成的数据集 $\mathcal{D}$。假设其对应的对数似然函

数可以表示为

$$l(\boldsymbol{w};\mathcal{D}) \triangleq \ln\left(\prod_{i=1}^{S} f(\boldsymbol{z}_i \mid \boldsymbol{w})\right).$$

此处，选取 $\rho(\boldsymbol{w};\mathcal{D}) = -l(\boldsymbol{w};\mathcal{D})/S$。在一些技术性假设条件下，如果

$$r = \frac{\chi^2_{M,1-\alpha}}{2S}, \tag{7.6}$$

对于任意给定 $\boldsymbol{\theta} \in \mathcal{E}(r;\mathcal{D})$ 及原假设 $H_0 : \boldsymbol{w} = \boldsymbol{\theta}$，则在显著性水平 α 下通过似然比检验 (近似) 不能拒绝原假设；此处，$\chi^2_{M,1-\alpha}$ 是自由度为 M 的卡方分布的 $1-\alpha$ 分位点，M 为 $\boldsymbol{w}$ 的维度。♠

由此可见，最大化基于参数估计的参数不确定集的大小可以近似等价于最大化其对应的置信水平。

7.2.2 基于参数估计的鲁棒性优化

根据上述定义可知，$\mathcal{E}(r;\mathcal{D})$ 表示在集合 $\mathcal{W}$ 中使得 $\rho(\boldsymbol{w};\mathcal{D})$ 与最优值 $\hat{\rho}$ 之间的差值小于 r 的所有参数的集合，从而有 $\hat{\boldsymbol{w}} \in \mathcal{E}(0;\mathcal{D})$。相应地，Zhu et al. (2021) 提出了如下基于参数估计的鲁棒性优化模型：

$$\begin{aligned} Z_E(\tau_0) = \max\ & r \\ \text{s.t.}\ & f_0(\boldsymbol{x},\boldsymbol{w}) \le \tau_0 \quad \forall \boldsymbol{w} \in \mathcal{E}(r;\mathcal{D}), \\ & f_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{w}) \le \tau_i \quad \forall \boldsymbol{w} \in \mathcal{E}(r;\mathcal{D}),\ i \in [I], \\ & \boldsymbol{x} \in \mathcal{X},\ r \ge 0, \end{aligned} \tag{7.7}$$

称之为 JERO(joint estimation and robustness optimization) 模型。此模型旨在提供一个结合参数估计和后续优化问题的框架，来降低参数估计的误差以及不确定性对后续优化问题的影响。

虽然模型(7.7)的约束未必是关于 $\boldsymbol{x}$ 和 r 的联合凸函数，但其是关于 $\boldsymbol{x}$ 的凸函数。因此，可以通过求解以下一系列子问题得到模型的最优解：

$$\begin{aligned} Z_E^r(\tau_0) = \min\ & t - \tau_0 \\ \text{s.t.}\ & f_0(\boldsymbol{x},\boldsymbol{w}) \le t \quad \forall \boldsymbol{w} \in \mathcal{E}(r;\mathcal{D}), \\ & f_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{w}) \le \tau_i \quad \forall \boldsymbol{w} \in \mathcal{E}(r;\mathcal{D}),\ i \in [I], \\ & \boldsymbol{x} \in \mathcal{X}. \end{aligned} \tag{7.8}$$

假设存在一个方法可以得到模型(7.8)的最优解，则可以通过二分法求得模型(7.7)的最优解。有关二分法的具体步骤可参考 Zhu et al. (2021)，故在此不再赘述。

命题 7.3

假设存在算法可以得到模型(7.8)的最优解且存在 $\bar{r} > 0$ 使得 $Z_E^{\bar{r}}(\tau_0) > 0$。此外，如果模型(7.7)存在可行解，则对任意 $\Delta > 0$, 至多需要求解 $\lceil \log_2(\bar{r}/\Delta) \rceil$ 次模型(7.8)，从而得到一个解 $\boldsymbol{x}$ 及对应的 $r^\dagger$，使得 $r^\dagger$ 与模型(7.7)的最优值 r^* 之间的差值小于等于 Δ, 也即 $|r^\dagger - r^*| \le \Delta$。♠

事实上，JERO 模型是否可解依赖于能否将如下一般鲁棒约束：

$$f_i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{w}) \le \tau_i \quad \forall \boldsymbol{w} \in \mathcal{E}(r; \mathcal{D}),\ i \in [I] \cup \{0\}, \tag{7.9}$$

或者

$$\max_{\boldsymbol{w} \in \mathcal{E}(r;\mathcal{D})} f_i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{w}) \le \tau_i \qquad i \in [I] \cup \{0\},$$

转化为可求解的等价形式。

下述命题提供了一种求鲁棒约束等价形式的方法。

命题 7.4

假设 $\mathcal{E}(r; \mathcal{D})$ 是一个闭合凸集（closed convex set），$f_i(\boldsymbol{x}, \cdot)$ 是一个闭凹函数（closed concave function），并且 $\operatorname{relint}(\mathcal{E}(r; \mathcal{D})) \cap \operatorname{relint}(\mathcal{W}) \neq \emptyset$。当且仅当存在 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{v}$ ($\boldsymbol{x} \in \bar{\mathcal{X}}$, $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^M$) 使得

$$\delta_r^*(\boldsymbol{v}) - f_i^*(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}) \le \tau_i$$

时，$\boldsymbol{x}$ 是鲁棒约束(7.9)的一个可行解。其中，

$$f_i^*(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}) \triangleq \inf_{\boldsymbol{w} \in \mathcal{W}} \left\{ \boldsymbol{w}'\boldsymbol{v} - f_i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{w}) \right\}$$

和

$$\delta_r^*(\boldsymbol{v}) \triangleq \sup_{\boldsymbol{w} \in \mathcal{W}} \left\{ \boldsymbol{w}'\boldsymbol{v} \mid \rho(\boldsymbol{w}; \mathcal{D}) \le \hat{\rho} + r \right\}$$

分别表示函数 $f_i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v})$ 的凹共轭函数（concave conjugate function）以及集合 $\mathcal{E}(r; \mathcal{D})$ 的支撑函数（support function）。♠

下述命题提供了一种计算集合 $\mathcal{E}(r; \mathcal{D})$ 的支撑函数 $\delta_r^*(\boldsymbol{v})$ 的方法。

命题 7.5

假设 $r > 0$，$\operatorname{relint}(\mathcal{E}(r; \mathcal{D})) \neq \emptyset$，并且 $\rho(\boldsymbol{w}; \mathcal{D})$ 是关于 $\boldsymbol{w}$ 的凸函数（convex function）。则集合 $\mathcal{E}(r; \mathcal{D})$ 的支撑函数可以表示为：

$$\delta_r^*(\boldsymbol{v}) = \inf_{\mu > 0} \left\{ (\hat{\rho} + r)\mu + \mu\rho^*(\boldsymbol{v}/\mu; \mathcal{D}) \right\}, \tag{7.10}$$

其中，

$$\rho^*(\boldsymbol{v}; \mathcal{D}) \triangleq \sup_{\boldsymbol{w} \in \mathcal{W}} \left\{ \boldsymbol{w}'\boldsymbol{v} - \rho(\boldsymbol{w}; \mathcal{D}) \right\}$$

表示 $\rho(\boldsymbol{w}; \mathcal{D})$ 的凸共轭函数（convex conjugate function）。♠

有关共轭函数的计算，感兴趣的读者可参考 Boyd and Vandenberghe (2004)、Ben-Tal et al. (2015) 及其所涉及的相关文献，故在此不再展开。

7.2.3 基于参数估计的鲁棒性优化的应用

下面通过一个鲁棒投资组合优化（robust portfolio optimization）问题来展示 JERO 模型在实际问题中的应用。有关其他可能的应用场景可参考 Zhu et al. (2021)。

考虑一个有 N 种风险资产的投资组合优化问题。此外，存在由风险资产的历史收益组成的数据集 $\mathcal{D} = \{z_1, \ldots, z_S\}$，其中 $z_i \in \mathbb{R}^N$ 表示 N 种风险资产的一组历史收益的观测值。通过历史数据可计算如下统计量：

$$\hat{\boldsymbol{w}} = \frac{1}{S}\sum_{i=1}^{S} z_i, \qquad \hat{\boldsymbol{\Sigma}} = \frac{1}{S}\sum_{i=1}^{S}(z_i - \hat{\boldsymbol{w}})(z_i - \hat{\boldsymbol{w}})^\top.$$

若 $\hat{\boldsymbol{\Sigma}} \succ \boldsymbol{0}$，则可选取

$$\rho(\boldsymbol{w}; \mathcal{D}) = \frac{1}{2}\Big(M + \ln\det\hat{\boldsymbol{\Sigma}} + \ln\left(1 + (\boldsymbol{w} - \hat{\boldsymbol{w}})'\hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1}(\boldsymbol{w} - \hat{\boldsymbol{w}})\right)\Big).$$

从而，决策者可求解如下 JERO 模型得到相应的投资方案：

$$\begin{aligned} \max \quad & r \\ \text{s.t.} \quad & \boldsymbol{w}'\boldsymbol{x} \geq \tau \qquad\qquad \forall \boldsymbol{w} \in \mathcal{E}(r; \mathcal{D}), \\ & \boldsymbol{x}'\boldsymbol{1} = 1, \\ & \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}_+^N,\ r \in \mathbb{R}_+. \end{aligned} \tag{7.11}$$

其中，$\boldsymbol{x}$ 代表投资组合决策，$\boldsymbol{w}$ 代表风险资产的期望收益，τ 代表投资组合的最低期望收益。

命题 7.6

模型(7.11)可转化为

$$\begin{aligned} \max \quad & r \\ \text{s.t.} \quad & -\hat{\boldsymbol{w}}'\boldsymbol{x} + \sqrt{e^{2r} - 1}\left\|\hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{1/2}\boldsymbol{x}\right\|_2 + \tau \leq 0, \\ & \boldsymbol{x}'\boldsymbol{1} = 1, \\ & \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}_+^N,\ r \in \mathbb{R}_+. \end{aligned}$$

♠

可以看出，

$$-\hat{\boldsymbol{w}}'\boldsymbol{x} + \sqrt{e^{2r} - 1}\|\hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{1/2}\boldsymbol{x}\|_2 + \tau \leq 0,$$

可表示为

$$SR(\boldsymbol{x}) \triangleq \frac{\hat{\boldsymbol{w}}'\boldsymbol{x} - \tau}{\left\|\hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{1/2}\boldsymbol{x}\right\|_2} \geq \sqrt{e^{2r} - 1}.$$

其中，$SR(\boldsymbol{x})$ 为夏普指数（sharpe ratio），有关夏普指数的介绍可参考 Sharpe (1966, 1994)。此处，JERO 模型等价于最大化投资组合对应的夏普指数。本章节旨在通过一个简单的鲁棒投资组合优化问题来向读者展示 JERO 模型在实际问题中的应用；有关更一般化的鲁棒投资组合优化问题，感兴趣的读者可参考 Goldfarb and Iyengar (2003)。

本章参考文献

Ben-Tal, Aharon, Dick Den Hertog, and Jean-Philippe Vial, "Deriving robust counterparts of nonlinear uncertain inequalities," *Mathematical Programming*, 2015, *149* (1-2), 265–299.

Boyd, Stephen and Lieven Vandenberghe, *Convex optimization*, Cambridge University Press, 2004.

Goldfarb, Donald and Garud Iyengar, "Robust portfolio selection problems," *Mathematics of Operations Research*, 2003, *28* (1), 1–38.

Jaillet, Patrick, Sanjay Dominik Jena, Tsan Sheng Ng, and Sim Melvyn, "Satisficing Models under Uncertainty.," *Informs Journal on Optimization*, 2022.

Kőszegi, Botond and Matthew Rabin, "A model of reference-dependent preferences," *The Quarterly Journal of Economics*, 2006, *121* (4), 1133–1165.

Merchant, Kenneth A and Jean-François Manzoni, "The Achievability of Budget Targets in Profit Centers: A Field Study," *Accounting Review*, 1989, pp. 539–558.

Payne, John W, Dan J Laughhunn, and Roy Crum, "Translation of gambles and aspiration level effects in risky choice behavior," *Management Science*, 1980, *26* (10), 1039–1060.

—— , —— , and —— , "Further Tests of Aspiration Level Effects in Risky Choice Behavior," *Management Science*, 1981, *27* (8), 953–958.

Sharpe, William F, "Mutual fund performance," *The Journal of Business*, 1966, *39* (1), 119–138.

—— , "The Sharpe ratio," *Journal of Portfolio Management*, 1994, *21* (1), 49–58.

Zhu, Taozeng, Jingui Xie, and Melvyn Sim, "Joint estimation and robustness optimization," *Management Science*, 2021.

第 8 章　鲁棒优化与机器学习（Machine learning）

覃含章

本章中我们介绍鲁棒优化与机器学习相结合的一些研究的最新进展。这是一个很有趣的研究方向并有诸多实际应用,其出发点是: 传统统计学习和机器学习模型中，往往数据噪声的假设是随机（stochastic）的。然而，我们却也可以假设数据噪声并不满足一个随机分布（在机器学习中，经常会假设一个正态或者 sub-Gaussian 的分布），而是只是假设其在一个不确定集中。由这种新的假设，我们可以得到许多新的机器学习模型与算法，比如著名的 LASSO 算法虽然并不是最早通过鲁棒优化的模型推出的，但也可以看成一种具有鲁棒性的回归算法。

8.1 从鲁棒优化角度看回归模型（Regression）：正则性（Regularization）和鲁棒性（Robustness）

我们知道，著名的 LASSO 算法实际上是求解带有 L_1 正则项的线性回归模型。即，一般是考虑求解这样一个优化问题

$$\min_{\boldsymbol{\beta}} \|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta}\|_2 + \lambda\|\boldsymbol{\beta}\|_1,$$

其中 $\boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^{M\times N}$ 是描述数据特征（feature）的矩阵，$\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^M$ 是描述数据标签（label）的向量，$\lambda > 0$ 是正则项前的系数。在一些限制条件和假设下，可以证明存在某个自然数 k, 使得 LASSO 等价于求解如下问题（我们使用 $\|\cdot\|_0$ 表示一个向量非零元素的个数，即 $\|\boldsymbol{\beta}\|_0 = \text{card}(\{i : \boldsymbol{\beta}_i \neq 0\})$）:

$$\begin{aligned} \min_{\boldsymbol{\beta}} \ & \|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta}\|_2 \\ \text{s.t.} \ & \|\boldsymbol{\beta}\|_0 \le k. \end{aligned}$$

也就是说在这种情况下 LASSO 所得到的解是稀疏（sparse）的。这里我们主要考虑这样一种非概率的统计模型，即我们认为我们只能得到 $\boldsymbol{X}$ 的一个带有误差的样本 $\boldsymbol{X}'$。我们利用鲁棒优化的思想，认为 $\boldsymbol{X}' = \boldsymbol{X} + \boldsymbol{\Delta}$，而 $\boldsymbol{\Delta} \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^{M\times N}$，这里的 $\mathcal{U}$ 就是我们的不确定集合（uncertainty set），注意这个集合是非随机的（non-stochastic）的。我们因此就可以考虑这样一个鲁棒线性回归问题:

$$\min_{\boldsymbol{\beta}} \max_{\boldsymbol{\Delta}\in\mathcal{U}} \|\boldsymbol{y} - (\boldsymbol{X} + \boldsymbol{\Delta})\boldsymbol{\beta}\|_2. \tag{8.1}$$

这个鲁棒线性回归是个什么意思呢，也就是说我们现在优化的时候，所选择的 $\boldsymbol{\beta}$ 是最小化了不确定集里最差的那个 $\boldsymbol{X}'$，即我们要让“最坏情况”下的损失函数值最小。而在传统的 LASSO 或者线性回归中，我们的目标可以看成是要让期望的损失函数值最小。下面先初步解答如下问题：在线性回归模型中，我们什么时候可以将正则性和鲁棒性，这样一个来自统计/机器学习，一个来自优化理论的性质等同看待？这里就以回归模型中最出名的脊回归（Ridge Regression）和 LASSO 为例。

$$\min_{\boldsymbol{\beta}} \|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta}\|_2+\lambda\|\boldsymbol{\beta}\|_2=\min_{\boldsymbol{\beta}} \max_{\boldsymbol{\Delta}\in\mathcal{U}_{\text{RLS}}} \|\boldsymbol{y}-(\boldsymbol{X}+\boldsymbol{\Delta})\boldsymbol{\beta}\|_2, \tag{8.2}$$

$$\min_{\boldsymbol{\beta}} \|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta}\|_2+\lambda\|\boldsymbol{\beta}\|_1=\min_{\boldsymbol{\beta}} \max_{\boldsymbol{\Delta}\in\mathcal{U}_{\text{LASSO}}} \|\boldsymbol{y}-(\boldsymbol{X}+\boldsymbol{\Delta})\boldsymbol{\beta}\|_2. \tag{8.3}$$

注意到脊回归和 LASSO 说白了只是正则项不同（选用 L_1 和 L_2 正则）的最小二乘法（least squares method），那么我们就发现上面的结果告诉了我们它们都对应特定的鲁棒线性优化模型，只是对应的不确定集不同罢了！具体来说，我们有 $\mathcal{U}_{\text{RLS}}$ 和 $\mathcal{U}_{\text{LASSO}}$ 对应两个不同的二阶锥（second-order cone）约束集：

$$\mathcal{U}_{\text{RLS}}=\left\{\boldsymbol{\Delta}:\left(\sum_{ij}\Delta_{ij}^2\right)^{1/2}\le\lambda\right\}, \tag{8.4}$$

$$\mathcal{U}_{\text{LASSO}}=\left\{\boldsymbol{\Delta}:\boldsymbol{\Delta}\text{的每列 }\Delta_i\text{ 都满足: }\|\Delta_i\|_2\le\lambda\right\}. \tag{8.5}$$

那么这边我们就获得了对脊回归、LASSO 的一种基于鲁棒优化的新认识：这两种带正则项的线性回归其实可以看成一种鲁棒线性回归算法！那么自然，我们接下来应该也会对这两个问题感兴趣：

- 正则性和鲁棒性在线性回归中是否都是一回事？
- 如果不都是一回事的话，在什么条件下是？什么条件下不是？

定理 8.1: 鲁棒线性回归定理 (Bertsimas and Copenhaver, 2018)

（1）存在 $0<\alpha\le 1$ 使得对任何 $\boldsymbol{y},\boldsymbol{X},\boldsymbol{\beta}$,

$$\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta}\|_p+\alpha\max_{\boldsymbol{\Delta}\in\mathcal{U}}\|\boldsymbol{\Delta}\boldsymbol{\beta}\|_p\le\max_{\boldsymbol{\Delta}\in\mathcal{U}}\|\boldsymbol{y}-(\boldsymbol{X}+\boldsymbol{\Delta})\boldsymbol{\beta}\|_p\le\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta}\|_p+\max_{\boldsymbol{\Delta}\in\mathcal{U}}\|\boldsymbol{\Delta}\boldsymbol{\beta}\|_p.$$

（2）我们令 $\mathcal{U}=\{\boldsymbol{\Delta}:\|\boldsymbol{\Delta}\|\le\lambda\}$，其中的范数 $\|\cdot\|$ 如下表中所示，则有

$\|\cdot\|$	$\|\boldsymbol{\Delta}\|$ 的取值	$\alpha=1$ 的“当且仅当”条件
q-Frobenuis 范数	$\left(\sum_{ij}\lvert\Delta_{ij}\rvert^q\right)^{1/q}$	$p\in\{1,q,\infty\}$
q-谱范数	奇异值的 L_q 范数	$p\in\{1,2,\infty\}$
(L_q,L_r)– 诱导范数	$\max_{\boldsymbol{\beta}}\frac{\|\boldsymbol{\Delta}\boldsymbol{\beta}\|_r}{\|\boldsymbol{\beta}\|_q}$	$p\in\{1,r,\infty\}$

♡

定理8.1是Bertsimas and Copenhaver (2018) 的文章中给出的基于上述两个问题的一般化回答。定理中的（1）表明一般来说我们都能用正则项的形式将鲁棒问题的取值控制住，但一般来说两者并不是完全一致的（文章中也给出了一些详细的例子来佐证）；

而（2）则给出了鲁棒性 = 正则性，即（1）中的 $\alpha = 1$ 的“当且仅当”条件。比如这其中的 q-Frobenuis 范数情形，其中 $p = 1$ 和 $q = 2$ 的时候就对应了我们前面的 (8.3) 和 (8.2)。表中的其他内容则表明类似结论也可以被推广到其它矩阵范数上。

8.2 基于对抗样本（Adversarial samples）的鲁棒学习（Robust learning）

本节我们将前一节仅仅针对回归模型的思路拓展，介绍在更一般的机器学习任务里，如果出现所谓的对抗样本，如何训练我们的模型，和相应的样本复杂度（相比于非对抗情境的机器学习任务）。我们主要考虑如下优化问题：

$$\min_{\boldsymbol{\theta}} \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \max_{\boldsymbol{x}_i' \in \mathcal{U}_i} g(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{x}_i', y_i).$$

其中，$g(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{x}_i', y_i)$ 是一个损失函数（和前一节不同，这里的 g 不一定要是某个范数了），比如说，现在我们也可以将它看成一个基于人工神经网络（artifical neural network）的损失函数。$\boldsymbol{\theta}$ 就是我们要优化的参数，$(\boldsymbol{x}_i, y_i)$ 是一个数据点，$\mathcal{U}_i$ 则是针对每个数据点定义的一个不确定集。我们注意到，这个最优化问题可以利用常见的交替方向法来求解。具体来说，算法每一步中我们将 $\boldsymbol{\theta}$ 的值固定，然后我们通过如下方式计算 $\boldsymbol{\Delta}_{x_i}$：

$$\boldsymbol{\Delta}_{x_i} = \arg \max_{\boldsymbol{\Delta}:\boldsymbol{x}_i+\boldsymbol{\Delta}\in\mathcal{U}_i} g(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{x}_i + \boldsymbol{\Delta}, y_i). \tag{8.6}$$

当然这个优化问题 (8.6) 一般来说是难以直接求得的（我们这里没有限制 g），那么如果我们认为 g 是光滑的，就可以求解一个一阶泰勒展开的近似问题：

$$\boldsymbol{\Delta}_{x_i}' = \arg \max_{\boldsymbol{\Delta}:\boldsymbol{x}_i+\boldsymbol{\Delta}\in\mathcal{U}_i} g(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{x}_i, y_i) + \left\langle \nabla_{\boldsymbol{x}} g(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{x}, y_i), \boldsymbol{\Delta} \right\rangle. \tag{8.7}$$

根据式 (8.7) 我们就可以在固定 $\boldsymbol{\theta}$ 值的情况下更新 $\boldsymbol{\Delta}_{x_i}'$，也即 $\boldsymbol{x}_i' = \boldsymbol{x}_i + \boldsymbol{\Delta}_{x_i}'$。假设算法每步一共更新了 mb 次，那么在固定数据点集 $\{(\boldsymbol{x}_i', y_i)\}_{i=1}^{|mb|}$ 的情况下，我们就可以对 $\boldsymbol{\theta}$ 采用一步批梯度下降法（mini-batch gradient descent）的迭代。如此，我们就描述了我们的对抗训练（adversarial training）算法，算法的具体实现细节和一些数值实例可见Shaham et al. (2018) 的工作。本节我们接着讨论对抗训练中的一些复杂度问题，我们将仅限于讨论分类（classification）问题。

我们先定义分类错误（classification error）为：对分布 $\mathcal{P} : \mathbb{R}^d \times \{\pm 1\} \to \mathbb{R}$, 分类器（classifier）$f : \mathbb{R} \to \{\pm 1\}$ 的分类错误率 e 为 $e = \mathbb{P}_{(\boldsymbol{x},y)\sim\mathcal{P}}[f(\boldsymbol{x}) \neq y]$. 也就是分类错误率其实就是分类器出错的概率。然后我们将这个定义拓展，定义所谓的 $\mathcal{U}$-鲁棒分类错误率：对分布 $\mathcal{P} : \mathbb{R}^d \times \{\pm 1\} \to \mathbb{R}$, 定义 $\mathcal{U} : \mathbb{R}^d \to \mathrm{P}(\mathbb{R}^d)$（$\mathrm{P}(\mathbb{R}^d)$ 表示 $\mathbb{R}^d$ 的支撑集，即所有子集的集合）。分类器（classifier）$f : \mathbb{R} \to \{\pm 1\}$ 的 $\mathcal{U}$-鲁棒分类错误率 e 为 $e = \mathbb{P}_{(\boldsymbol{x},y)\sim\mathcal{P}}[\exists\, \boldsymbol{x}' \in \mathcal{U}(\boldsymbol{x}) : f(\boldsymbol{x}') \neq y]$. Schmidt et al. (2018) 的文章在 $\mathcal{P}$ 为高斯分布和伯努利分布的假设下研究了 $\mathcal{U}(\boldsymbol{x}) = \mathcal{U}_\infty^\epsilon(x) = \{x' \in \mathbb{R}^d | \|x' - x\|_\infty \le \epsilon\}$.

定理 8.2: 鲁棒分类样本复杂度定理 (Schmidt et al., 2018)

(1) 高斯模型：令 $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ 是从 $\mathcal{N}(\theta^*, \sigma)$ 中独立同分布抽样得到的样本，其中高斯分布的参数满足 $\|\theta^*\|_2 = \sqrt{d}, \sigma \le c \cdot d^{1/4}$（$c > 0$ 是一个常数）.

- 有高概率 $f_{\hat{w}} = y_1 \cdot x_1$ 的分类错误率不超过 1%。
- 如果取 ϵ 使得 $\frac{1}{4}d^{-1/4} \le \epsilon \le \frac{1}{4}$，那么如果 $n \ge \epsilon^2\sqrt{d}$，有高概率 $f_{\hat{w}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i x_i$ 的 $\mathcal{U}_\infty^\epsilon$-鲁棒分类错误率不超过 1%。
- 基于样本 $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$，对任意 0/1 分类器 f_n，如果 $n \le c' \frac{\epsilon^2\sqrt{d}}{\log d}$ ($c' > 0$ 是一个常数)，期望的 $\mathcal{U}_\infty^\epsilon$-鲁棒分类错误率至少为 $\frac{1}{2}(1 - 1/d)$.

(2) 伯努利模型：存在参数 $\theta^* \in \{\pm 1\}^d, \tau > 0$，使得抽样机制定义为先均匀地抽样 $y \in \{-1, 1\}$，再对 $\boldsymbol{x}$ 的每个坐标独立以 $1/2 + \tau$ 概率抽得 $y \cdot \theta_i^*$，以 $1/2 - \tau$ 概率抽得 $-y \cdot \theta_i^*$。令 $\tau \ge c \cdot d^{-1/4}$，$\epsilon < 3\tau < 1, \gamma < 1/2$。

- 有高概率 $f_{\hat{w}} = y_1 \cdot \boldsymbol{x}_1$ 的分类错误率不超过 1%。
- 如果取 ϵ 使得 $\frac{1}{4}d^{-1/4} \le \epsilon \le \frac{1}{4}$，那么如果 $n \ge \epsilon^2\sqrt{d}$，有高概率 $f_{\hat{w}} = y_1 \cdot T(\boldsymbol{x}_1)$ 的 $\mathcal{U}_\infty^\epsilon$-鲁棒分类错误率不超过 1%。$T$ 是一个非线性算子，使得 $\boldsymbol{x}$ 的每个非负坐标取 1，负坐标取 −1。
- 基于样本 $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$，对任意 0/1 分类器 f_n，如果 $n \le c' \frac{\epsilon^2\gamma^2 d}{\log d/\gamma}$（$c' > 0$ 是一个常数），期望的 $\mathcal{U}_\infty^\epsilon$-鲁棒分类错误率至少为 $\frac{1}{2} - \gamma$. ♡

定理8.2给我们最大的一个启示就是看起来对于分类问题，鲁棒分类错误是和样本遵循的分布高度相关的。具体来说，在高斯模型中，我们对于常规的分类错误来说只需要一个数据点就可以做到高概率的完美分类，但对于鲁棒分类错误我们至少需要 $\sqrt{d}$ 阶的样本数量才能做到比较好的分类（这是由线性分类器对于鲁棒分类错误的样本复杂度和鲁棒分类错误的样本复杂度下界放在一起说明的）。而作为对比，对于伯努利模型，除了对于常规的分类错误来说同样一个数据点就可以做到高概率的完美分类，对于鲁棒分类错误来说用一个非线性的分类器也只需要一个数据点就可以做到完美分类。而在高斯模型中，下界保证了任何非线性的分类器在理论上也无法突破 $\sqrt{d}$ 样本数量。

这便是Schmidt et al. (2018) 的工作主要要说明的，为此它们利用了两个著名的开放分类数据集，MNIST 和 CIFAR10，利用卷积神经网络和前面提到的对抗训练算法，它们发现基于前者训练出来的分类器，在测试数据集上利用 $\mathcal{U}_\infty^\epsilon$ 的定义扰动数据，可以达到很低的鲁棒分类错误率。而对于 CIFAR，虽然还能保持一般意义上很低的分类错误率，却有很高的鲁棒分类错误率。基于前面的结果，一种可以接受的解释就是 MNIST 这个数据集更接近伯努利模型，而 CIFAR10 更接近高斯模型。另外，我们也可以体会到实际上神经网络模型对于标准意义上的分类错误能达到很高的标准，但往往对于鲁棒分类错误就不那么在行了。

关于鲁棒分类器，Bertsimas et al. (2019) 给出了基于支持向量机（Support Vector Machine），逻辑回归（Logistic Regression）和决策树（Decision Tree）的鲁棒版本。在

大规模数据集上，他们发现这些更加具有鲁棒性的分类器可以提升传统机器学习模型的分类精度。具体来说，样本外的精度（out-of-sample accuracy）对支持向量机提升了 5.3%，逻辑回归提升了 4.0%，决策树提升了 1.3%。

8.3 神经网络（Neural network）中的分布鲁棒优化

本节我们讨论上一节所引入的问题的一种更高级的尝试，利用分布鲁棒优化进行对抗训练，具体来说我们主要介绍Sinha et al. (2018) 的工作。注意，和前面不同的是，这里的分布式鲁棒优化里的不确定集不再是“确定性”的了，而是成了一个描述“分布”（测度）的集合。因此，我们相当于要考虑这样一个以对抗训练为目标的优化问题

$$\min_{\boldsymbol{\theta}\in\Theta}\max_{\mathbb{P}\in\mathcal{P}}\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[g(\boldsymbol{\theta};\boldsymbol{Z})]. \tag{8.8}$$

其中，$\boldsymbol{\theta}$ 仍然是训练模型的参数，$\mathcal{P}$ 就是一个描述分布/测度的模糊集，而 $\boldsymbol{Z}$ 为将所有数据 $Z=[\boldsymbol{X};\boldsymbol{y}]$ 简写起来的形式。这边一个很关键的概念就是近些年机器学习和优化领域都十分热门的 Wasserstein 度量，令我们考虑的数据集 $\boldsymbol{Z}\in\mathcal{Z}$ 且 $\mathcal{Z}$ 是实数域的一个子集，如果存在一个“价格”函数 $c:\mathcal{Z}\times\mathcal{Z}\to\mathbb{R}_+\cup\{\infty\}$, 那么对任意两个取值在 $\mathcal{Z}$ 上的概率测度 $\mathbb{P},\mathbb{Q}$，我们有 $\mathbb{P},\mathbb{Q}$ 之间的 Wasserstein 距离为

$$W_c(\mathbb{P},\mathbb{Q}):=\inf_{\mu\in\Gamma(\mathbb{P},\mathbb{Q})}\int_{\mathcal{Z}\times\mathcal{Z}}c(p,q)d\mu(p,q), \tag{8.9}$$

其中 $\Gamma(\mathbb{P},\mathbb{Q})$ 是所有取值在 $\mathcal{Z}\times\mathcal{Z}$ 上的边缘分布为 $\mathbb{P}$ 和 $\mathbb{Q}$ 的概率测度的集合。于是，我们考虑我们的模糊集用 Wasserstein 度量定义，即 $\mathcal{P}=\{\mathbb{P}:W_c(\mathbb{P},\mathbb{P}_0)\le\rho\}$。然后我们可以证明，考虑问题 (8.8) 的拉格朗日松弛形式，我们有如下等价关系（松弛因子 $\gamma>0$）：

$$\min_{\boldsymbol{\theta}\in\Theta}\underbrace{\max_{\mathbb{P}}\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[g(\boldsymbol{\theta};\boldsymbol{Z})-\gamma W_c(\mathbb{P},\mathbb{P}_0)]}_{F(\boldsymbol{\theta})}=\min_{\boldsymbol{\theta}\in\Theta}\mathbb{E}_{\mathbb{P}_0}[\underbrace{\max_{\boldsymbol{Z}'\in\mathcal{Z}}(g(\boldsymbol{\theta};\boldsymbol{Z}')-\gamma c(\boldsymbol{Z}',\boldsymbol{Z}))}_{\phi_\gamma(\boldsymbol{\theta};\boldsymbol{Z})}]. \tag{8.10}$$

然后，利用 $\mathbb{P}_0$ 的样本得到的经验分布 $\hat{\mathbb{P}}_n$ 代替 $\mathbb{P}_0$，我们需要求解优化问题：

$$\min_{\boldsymbol{\theta}\in\Theta}\mathbb{E}_{\hat{\mathbb{P}}_n}[\phi_\gamma(\boldsymbol{\theta};\boldsymbol{Z})]. \tag{8.11}$$

对此，Sinha et al. (2018) 给出了基于随机梯度下降法（SGD）的算法：

- 输入：分布 $\mathbb{P}_0$ 的样本，$\Theta,\mathcal{Z}$，算法步长 $\{\alpha_t>0\}_{t=0}^{T}$
- **for** $t=0,\dots,T-1$ **do**
  - 抽样 $\boldsymbol{Z}^t\sim\mathbb{P}_0$ 且找到 $g(\boldsymbol{\theta}^t;\boldsymbol{Z})-\gamma c(\boldsymbol{Z},\boldsymbol{Z}^t)$ 的一个（局部）ϵ-最优解 $\boldsymbol{Z}_t'$
  - $\boldsymbol{\theta}^{t+1}\leftarrow\mathrm{Proj}_\Theta(\boldsymbol{\theta}^t-\alpha_t\nabla_{\boldsymbol{\theta}})g(\boldsymbol{\theta}^t;\boldsymbol{Z}_t')$

Sinha et al. (2018) 证明，在假设 c 是连续，且 $c(\cdot,\boldsymbol{Z})$ 对任意 $\boldsymbol{Z}\in\mathcal{Z}$ 是 1-强凸，并且 g 对于 $\boldsymbol{\theta}$ 和 $\boldsymbol{Z}$ 都是关于系数 $L_{\boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\theta}},L_{\boldsymbol{\theta}\boldsymbol{Z}},L_{\boldsymbol{Z}\boldsymbol{Z}},L_{\boldsymbol{Z}\boldsymbol{\theta}}$ 和 L_2 范数李普希茨（Lipschitz）连续的，算法对于问题 (8.10) 的全局最优值（g 是凸的）/局部最优值的收敛速度。

定理 8.3: 非凸 SGD 的分布鲁棒优化收敛性定理 (Sinha et al., 2018)

假设 $\mathbb{E}[\|\nabla F(\boldsymbol{\theta}) - \nabla_{\boldsymbol{\theta}}\phi_\gamma(\boldsymbol{\theta};\mathbf{Z})\|_2^2] \le \sigma^2$, $\Theta = \mathbb{R}^d$, 取 $\Delta_F \ge F(\boldsymbol{\theta}^0) - \min_{\boldsymbol{\theta}} F(\theta)$, $L_\phi := L_{\boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\theta}} + \frac{L_{\boldsymbol{\theta}\mathbf{Z}}L_{\mathbf{Z}\boldsymbol{\theta}}}{\gamma - L_{\mathbf{Z}\mathbf{Z}}}$, $\alpha_t \equiv \sqrt{\frac{2\Delta_F}{L_\phi \sigma^2 T}}$。我们的算法保证

$$\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\mathbb{E}\left[\|\nabla F(\boldsymbol{\theta}^t)\|_2^2\right] - \frac{2L_{\boldsymbol{\theta}\mathbf{Z}}^2}{\gamma - L_{\mathbf{Z}\mathbf{Z}}}\epsilon \le \sigma\sqrt{\frac{8L_\phi\Delta_F}{T}}.$$

♡

这个收敛性定理成立的关键还是在于我们对于 g 有光滑性假设，也就是说这里的分析对于常见的光滑的神经网络损失函数都是成立的。接下来，我们考虑理论上在鲁棒情形下这个算法的泛化（generalization）能力（对应前一节的鲁棒分类错误率）。事实上，Sinha et al. (2018) 证明了如下结论：对任意 $\theta \in \Theta$，

$$\max_{\mathbb{P}: W_c(\mathbb{P},\mathbb{P}_0)\le\rho} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[g(\boldsymbol{\theta};\mathbf{Z})] \le \gamma\rho + \mathbb{E}_{\hat{\mathbb{P}}_n}[\phi_\gamma(\boldsymbol{\theta};\mathbf{Z})] + O(1/\sqrt{n}). \tag{8.12}$$

具体的分析仍然是基于 Monge 映射 $T_\gamma(\boldsymbol{\theta};\mathbf{Z}_0) := \arg\max_{\mathbf{Z}\in\mathcal{Z}}\{g(\boldsymbol{\Theta};\mathbf{Z}) - \gamma c(\mathbf{Z},\mathbf{Z}_0)\}$ 的光滑性，这里我们不再展开讨论了，有兴趣的读者可以参阅他们的文章。

本章参考文献

Bertsimas, Dimitris and Martin S Copenhaver, “Characterization of the equivalence of robustification and regularization in linear and matrix regression,” *European Journal of Operational Research*, 2018, *270* (3), 931–942.

—, **Jack Dunn, Colin Pawlowski, and Ying Daisy Zhuo**, “Robust classification,” *INFORMS Journal on Optimization*, 2019, *1* (1), 2–34.

Schmidt, Ludwig, Shibani Santurkar, Dimitris Tsipras, Kunal Talwar, and Aleksander Madry, “Adversarially robust generalization requires more data,” in “Advances in Neural Information Processing Systems” 2018, pp. 5019–5031.

Shaham, Uri, Yutaro Yamada, and Sahand Negahban, “Understanding adversarial training: Increasing local stability of supervised models through robust optimization,” *Neurocomputing*, 2018, *307*, 195–204.

Sinha, Aman, Hongseok Namkoong, and John Duchi, “Certifying some distributional robustness with principled adversarial training,” in “International Conference on Learning Representations” 2018.

第 9 章 鲁棒优化与风险偏好（Risk preference）

黄文杰

在 2.4 节中，我们已经介绍了关于风险度量的基本知识。本章中，我们将给出风险度量定义，并介绍其与鲁棒优化之间的联系。同时我们会讲述与风险偏好相关的一系列优化问题，包括风险规避优化和偏好鲁棒优化问题。

9.1 风险度量与鲁棒优化的联系

现实中，我们来决策做一件事（比如投资）时，在未来得到的回报往往都是不确定的。在一些投资组合优化的问题中，如以最大化期望收益为目标，最优的结果是将所有的资金都投入到期望回报率最大的资产当中。但是这样的决策是不合理的，因为没有将风险考虑在内，实际的回报发生时，存在着损失所有投资资金的可能性。因此需要通过合理地分散投资来降低风险。为了衡量一件事未来的与风险相关的收益和成本，人们引入了风险度量的概念。风险度量可以用来反映决策者对小概率极端事件的态度，提升决策在不确定环境下的可靠性（比如说风险规避的决策者而言，在获得随机收益时，风险度量可以反映其对小概率但低收益事件的态度；而其在损失随机成本时，风险度量可以反映其对小概率但高成本事件的态度）。

首先，我们给出风险度量的一般化定义。定义 $(\Omega, \mathcal{F})$ 为样本空间，用 $\mathcal{F}$ 表示其 σ-代数。定义随机变量的空间为 $\mathcal{X} := \mathcal{L}_p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, 即给定随机变量 $X \in \mathcal{X}$, 我们假设 $X(\omega)$, $\omega \in \Omega$ 的 p 阶矩（pth order moment）是有限的，并且其概率测度为 $\mathbb{P}$。定义拓展实数线为 $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$。

风险度量 ρ 可以定义为从随机变量空间到拓展实数线的 proper 映射，$\rho : \mathcal{X} \to \bar{\mathbb{R}}$. 通常来讲风险度量包含以下的性质：

1. 归一化（normalized）：$\rho(0) = 0$.
2. 凸性（convexity）：$\rho(tX + (1-t)X') \le t\rho(X) + (1-t)\rho(X')$, 对于任意的 $X, X' \in \mathcal{X}$ 和 $t \in [0, 1]$.
3. 单调性（monotonicity）：如果 $X, X' \in \mathcal{X}$ 且 $X(\omega) \ge X'(\omega)$ 对于 $\omega \in \Omega$ 几乎处处成立，那么 $\rho(X) \ge \rho(X')$（这里我们假设 X 的实现值是越小越好，例如 X 是随机成本。）
4. 平移不变性（translation invariance）: 如果 $a \in \mathbb{R}$ 且 $X \in \mathcal{X}$, 那么 $\rho(X+a) = \rho(X)+a$.
5. 同质性（positive homogeneity）：如果 $t > 0$ 且 $X \in \mathcal{X}$，那么 $\rho(tX) = t\rho(X)$.
6. 分布不变性（law invariance）：如果对于任意 $t \in \mathbb{R}$, $\mathbb{P}[X \le t] = \mathbb{P}[X' \le t]$ 成立，那么 $\rho(X) = \rho(X')$.

若风险度量满足上述性质 1-4，则称其为凸风险度量（convex risk measure）；若风险度量满足上述性质 1-5，则称其为一致风险度量（coherent risk measure）。关于分布不变性的风险度量，我们由于篇幅限制不进行介绍，有兴趣的读者可以阅读文献Kusuoka (2001); Shapiro (2013); Shapiro et al. (2021).

Ruszczyński and Shapiro (2006); Shapiro et al. (2021) 将风险度量和分布鲁棒优化（distributionally robust optimization）进行了联系，可以将凸风险度量和一致性风险度量以分布鲁棒优化的方式进行表达。给定 $\mathcal{X}$ 的对偶空间 $\mathcal{X}^* = \mathcal{L}_q(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$，其中 $q \in (1, +\infty)$ 满足 $1/p + 1/q = 1$。对于 $X \in \mathcal{X}$ 及 $\zeta \in \mathcal{X}^*$, 它们的点积（scalar product）定义为

$$\langle \zeta, X \rangle = \int_\Omega \zeta(\omega) X(\omega) d\mathbb{P}(\omega).$$

风险度量 ρ 的共轭函数（conjugate function）$\rho^* : X^* \to \bar{\mathbb{R}}$ 定义为

$$\rho^*(\zeta) := \sup_{X \in \mathcal{X}} \left\{ \langle \zeta, X \rangle - \rho(X) \right\}. \tag{9.1}$$

根据 Fenchel-Moreau 定理, 如果凸风险度量 ρ 是下半连续的（lower semi-continuous）的，式（9.1）的等价表达为

$$\rho(X) = \sup_{\zeta \in \mathcal{A}} \left\{ \langle \zeta, X \rangle - \rho^*(\zeta) \right\}, \tag{9.2}$$

其中 $\mathcal{A} := \mathrm{dom}(\rho^*)$ 是共轭函数 ρ 的定义域。下述定理是 Fenchel–Moreau 定理的直接结果，反映出了对偶空间 $\mathcal{A}$ 对风险度量各个性质的影响。

定理 9.1: 凸风险度量的对偶 (Ruszczyński and Shapiro, 2006; Shapiro et al., 2021)

假设 $\rho : \mathcal{X} \to \bar{\mathbb{R}}$ 是常义和下半连续的凸风险度量，则表达式 (9.2) 成立且 $\mathcal{A} := \mathrm{dom}(\rho^*)$。此外，有以下结论（i）风险度量的单调性满足当且仅当所有的 $\zeta \in \mathcal{A}$ 是非负的，即 $\zeta \geq 0$ 对 $\omega \in \Omega$ 几乎处处成立；（ii）风险测度的平移不变性满足当且仅当对所有的 $\zeta \in \mathcal{A}$, $\int_\omega \zeta d\mathbb{P} = 1$ 成立；（iii）风险测度的同质性满足当且仅当 ρ 为集合 $\mathcal{A}$ 的支撑函数（support function），并可由以下方式表达

$$\rho(X) = \sup_{\zeta \in \mathcal{A}} \langle \zeta, X \rangle, \forall X \in \mathcal{X}. \tag{9.3}$$

♡

定理9.1指出了当 ρ 是下半连续的凸风险测度时，可以将其用式（9.2）表达，且 $\mathcal{A}$ 是如下概率密度分布（probability density functions）的集合的一个子集

$$\mathcal{B} := \left\{ \zeta \in \mathcal{X}^* : \int_\Omega \zeta(\omega) d\mathbb{P}(\omega) = 1, \ \zeta(\omega) \geq 0 \text{ for a.e. } \omega \in \Omega \right\}.$$

该定理还指出了当 ρ 为一致性风险的时候，它的共轭函数 ρ^* 是集合 $\mathcal{A} \subset \mathcal{X}^*$ 的指示函数（indicator function），集合 $\mathcal{A}$ 可以特别地表达为

$$\mathcal{A} = \{ \zeta \in \mathcal{B} : \langle \zeta, X \rangle \leq \rho(X), \forall X \in \mathcal{X} \}.$$

事实上，我们可以把 $\mathcal{A}$ 看成是一个概率密度分布的集合，那么对于任意的 $\zeta \in \mathcal{A}$, 点积 $\langle \zeta, X \rangle$ 是基于概率测度 $\zeta d\mathbb{P}$ 的期望值 $\mathbb{E}_{\zeta}[X]$。

如何从实际决策者风险度量的角度去理解分布鲁棒优化表达式（9.3）呢？可以将 ζ 看成在原始概率分布 $\mathbb{P}$ 上对每个事件 $\omega \in \Omega$ 的加权调整（也可以将其看成是在随机变量的实现值 $X(\omega)$ 上的加权调整）。如果决策者是风险规避（risk-averse）的，那么在面对需要损失随机成本时，其会在小概率且极端高成本上附以更高的权重---关于这一观点，有兴趣的读者可以进一步阅读关于频谱风险测度（spectral risk measure）和扭曲风险度量（distortion risk measure）的相关工作：Acerbi (2002); Balbás et al. (2009)。决策者的风险偏好对应了一类附权重的准则，即以集合 $\mathcal{A}$ 来表达，风险度量需要同时考虑随机变量实现和原始概率分布的情况，通过分布鲁棒优化中最差结果（worst-case）的形式，求解得到最优（可能是唯一）的附权方式，也得到最极端的度量结果。

以下我们以四个经典的风险测度为例，给出它们在定理9.1下的对偶结果。

示例 9.1: 条件风险价值（Conditional Value-at-Risk，CVaR）：在 2.4 节中我们已经给出了 CVaR 的几种数学表达式。CVaR_{α} 是一致性风险度量，若以式（9.3）进行表达，对应的集合 $\mathcal{A}$ 为

$$\mathcal{A} = \{\eta \in \mathcal{B} : \zeta(\omega) \in [0, 1/\alpha] \text{ a.e. } \omega \in \Omega\}.$$

即决策者给定了准则，对每个事件的加权分布都允许在 0 到 $1/\alpha$ 之间波动，CVaR_{α} 是在该准则下的最极端（分布鲁棒优化）结果。

示例 9.2: 熵风险度量（Entropic risk measure）：熵风险度量表达为

$$\rho_e(X) = \ln(\mathbb{E}[\exp(X)]).$$

该测度满足凸性，但不满足一致性，因此根据定理9.1和式（9.2）的结果，它的共轭函数表达为

$$\rho_e^* = \begin{cases} \mathbb{E}[\zeta \ln \zeta] & \text{if } \zeta \in \mathcal{B}, \\ +\infty & \text{if } \zeta \notin \mathcal{B}. \end{cases}$$

示例 9.3: p 阶平均-偏差风险度量（mean-deviation risk measures of order p）：p 阶平均-偏差风险度量表达为

$$\rho(X) = \mathbb{E}[X] + c\left(\mathbb{E}[|X - \mathbb{E}[X]|^p]\right)^{1/p},$$

其中 $p \in [1, +\infty)$ 及 $c \geq 0$。该测度满足凸性和同质性，若以式（9.3）进行表达，对应的集合 $\mathcal{A}$ 为

$$\mathcal{A} = \{\zeta' \in \mathcal{X}^* : \zeta' = 1 + \zeta - \mathbb{E}[\zeta],\ \|\zeta\|_q \leq c\}.$$

若 $c \leq 1/2$, 则该风险度量满足单调性即其为一致性风险测度；若 $c > 1/2$ 时，其单调性需要进一步分析，在这里我们不多赘述，有兴趣的读者可以参考Shapiro et al. (2021, Section 6.3.2)。

示例 9.4: p 阶平均-上半偏差风险度量（mean-upper-semideviation of order p）：p 阶平均-上半偏差风险度量表达为

$$\rho(X) = \mathbb{E}[X] + c\left(\mathbb{E}\left[[X - \mathbb{E}[X]]_+^p\right]\right)^{1/p},$$

其中 $p \in [1, +\infty)$ 及 $c \geq 0$, 符号 $[x]_+$ 给出 x 和 0 更大值（即 $\max\{x, 0\}$）。该测度满足凸性和同质性，若以式（9.3）进行表达，对应的集合 $\mathcal{A}$ 为

$$\mathcal{A} = \{\zeta' \in \mathcal{X}^* : \zeta' = 1 + \zeta - \mathbb{E}[\zeta],\ |\zeta\|_q \leq c,\ \zeta(\omega) \geq 0 \text{ for a.e. } \omega \in \Omega\}.$$

若 $c \leq 1$, 则该风险度量满足单调性即其为一致性风险测度；若 $c > 1$ 时，其单调性需要进一步分析，在这里我们同样不多赘述，有兴趣的读者可以参考Shapiro et al. (2021, 6.3.2)。

9.2 风险度量优化 (Optimization of risk measures)

在本章节我们将介绍风险度量应用在优化问题中的理论。我们定义决策变量的可行域 $\mathcal{Z}$ 为 $\mathbb{R}^n$ 的非空凸闭子集（nonempty convex closed subset）。考虑复合函数（composition function）$\phi(\cdot) := \rho(F(\cdot))$, 关联了映射 $F:\ \mathbb{R}^n \to \mathcal{X}$ 和风险度量 $\rho:\ \mathcal{X} \to \bar{\mathbb{R}}$。我们将 $[F(z)](\omega)$ 记作 $f(z, \omega)$，可以将 $f(z, \omega)$ 看作定义在测度空间 $(\Omega, \mathcal{F})$ 上的一个随机函数。由于 $F(z)$ 是空间 $\mathcal{L}_p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上的一个元素，则 $f(z, \cdot)$ 是 $\mathcal{F}$-可测的，且其数值是有限的。

我们研究的优化问题可以表达为复合函数的最小化问题

$$\min_{z \in \mathcal{Z}} \left\{\phi(z) := \rho(F(z))\right\}. \tag{9.4}$$

在不同的现实问题中，$F(z)$ 和 z 有不同的定义和结构。例如在投资组合优化 (portfolio optimization) 问题中，z 为各个资产的投资比例，$F(z)$ 为其对应的随机成本（收益的负值）；在库存控制（inventory control）问题中，z 为订货量，$F(z)$ 为其对应的库存运营成本。基于定理9.1的结果，我们可将式（9.2）带入到问题（9.4）中得到

$$\min_{z \in \mathcal{Z}} \sup_{\zeta \in \mathcal{A}} \Phi(z, \zeta),$$

其中 $\mathcal{A} := \mathrm{dom}(\rho^*)$ 并且函数 $\Phi : \mathbb{R}^n \times \mathcal{X}^* \to \bar{\mathbb{R}}$ 定义为

$$\Phi(z, \zeta) = \int_\Omega f(z, \omega)\zeta(\omega)d\mathbb{P}(\omega) - \rho^*(\zeta).$$

特别地，当 ρ 为常义下半连续的一致性风险测度时，问题（9.4）可以写成一个最小最大化（minmax）问题

$$\min_{z \in \mathcal{Z}} \sup_{\zeta \in \mathcal{A}} \mathbb{E}_\zeta[f(z, \omega)], \tag{9.5}$$

其中符号 $\mathbb{E}_\zeta$ 指针对概率分布 $\zeta d\mathbb{P}$ 的期望。

假设映射 $F: \mathbb{R}^n \to \mathcal{X}$ 是凸的，即对于几乎处处 $\omega \in \Omega$，函数 $f(\cdot, \omega)$ 都是凸的。这点说明了对于所有的 $\zeta \geq 0$, 函数 $\Phi(\cdot, \zeta)$ 是连续凸函数。我们同时可以得知对 $\zeta \in \mathcal{X}^*$, $\langle F(x), \zeta \rangle$ 是线性的且 $\rho^*(\zeta)$ 是凸的。因此对任意的 $z \in \mathcal{Z}$, 函数 $\Phi(z, \cdot)$ 是凹的。问题 (9.4) 和它互换最小和最大算子得到的对偶问题

$$\max_{\zeta \in \mathcal{A}} \inf_{z \in \mathcal{Z}} \Phi(z, \zeta). \tag{9.6}$$

是没有对偶间隙（duality gap）的。存在一个鞍点（saddle point）$(\bar{z}, \bar{\zeta}) \in \mathcal{Z} \times \mathcal{A}$ 使得其同时为问题 (9.4) 和 (9.6) 的最优解。

命题 9.1: 风险规避优化次微分 (Shapiro et al., 2021)

假设映射 $F: \mathbb{R}^n \to \mathcal{X}$ 是凸的，且 $\rho: \mathcal{X} \to \bar{\mathbb{R}}$ 是常义、下半连续的凸风险度量，则 $(\bar{z}, \bar{\zeta}) \in \mathcal{Z} \times \mathcal{A}$ 是 $\Phi(z, \cdot)$ 的鞍点当且仅当 $\bar{\zeta} \in \partial\rho(\bar{X})$，以及

$$0 \in N_{\mathcal{Z}}(\bar{z}) + \mathbb{E}_{\bar{\zeta}}[\partial_z f(\bar{z}, \omega)],$$

其中 $\bar{X} := F(\bar{z})$, $N_{\mathcal{Z}}(\cdot)$ 表示对集合 $\mathcal{Z}$ 的标准锥（norm cone），风险度量的次微分 $\partial\rho(\cdot)$ 定义为

$$\partial\rho(\bar{X}) := \arg\max_{\zeta \in \mathcal{A}} \left\{ \langle \zeta, \bar{X} \rangle - \rho^*(\zeta) \right\}.$$

关于风险度量次梯度的存在性(和次微分非空性)证明，鞍点和问题 (9.4) 和 (9.6) 最优解之间的充分性和必要性证明，有兴趣的读者可以参考 (Shapiro et al., 2021, Proposition 6.33，Corollary 6.34，Theorem 6.35.)。上述结论的意义在于对于一些常见的凸优化问题（满足映射 F 是凸的），例如库存控制问题和投资组合优化问题，可以通过搜索鞍点的算法来找到风险规避优化的最优解。关于如何使用设计算法（如原始-对偶次梯度（primal-dual subgradient）算法）来解决该类问题，有兴趣的读者可以参考Drori et al. (2015); Nedić and Ozdaglar (2009); Nesterov (2009) 等相关文献。特别地，我们给出下述两个风险规避优化解决现实问题的例子。

示例 9.5: 风险规避的库存控制 (Risk averse optimization of an inventory model): 该问题的成本函数为

$$F(z, d) = cz + b[d - z]_+ + h[x - d]_+,$$

其中 $c, b, h > 0$ 分别代表订货成本，延期交货和存货成本, z 和 d 分别代表订货量和需求量。这里我们假设 $b > c$，即延期交货成本要高于订货成本。定义随机的需求量 $D \in \mathcal{X} := \mathcal{L}_p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$。风险规避的优化问题为

$$\min_{z \geq 0} \{C(z) := \rho(F(z, D))\},$$

其中 ρ 是一个特定的风险度量，即我们找到最优的订货量来希望最小化库存运营成本的风险。这里如果我们特别地考虑 ρ 是一致性风险度量时，会有以下的结论

命题 9.2: 库存运营成本风险的等价表达 (Ahmed et al., 2007; Shapiro et al., 2021)

假设 $\mathcal{G}$ 为一个累积概率分布函数（cumulative distribution functions）的集合，其中的元素 $\mathbb{Q} \in \mathcal{G}$ 满足 $\mathbb{Q}(t) = 0$ 对于 $t < 0$ 和 $\sup_{\mathbb{Q}\in\mathcal{G}} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[D] < +\infty$。那么存在一个于集合 $\mathcal{G}$ 和参数 $b/(b+h)$ 相关的累积概率分布函数 $\bar{\mathbb{Q}}$（满足 $\bar{\mathbb{Q}}(t) = 0$ 对于任意 $t < 0$），则库存控制成本的风险度量可以表达为

$$C(z) = b \sup_{\mathbb{Q}\in\mathcal{G}} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[D] + (c-b)z + (b+h)\int_{-\infty}^{z} \bar{\mathbb{Q}}(t)dt. \tag{9.7}$$

基于式子 (9.7)，我们发现最优的订货量其实是分布 $\bar{\mathbb{Q}}$ 的 $\frac{b-c}{b+h}$ 分位数 (quantile)。对于特定的某些一致性风险测度，我们可以得到 $\bar{\mathbb{Q}}$ 解析形式。例如我们可以考虑一类风险度量表达为

$$\rho(X) = \mathbb{E}[X] + \inf_{\eta\in\mathbb{R}} \mathbb{E}\left\{\beta_1[\eta - X]_+ + \beta_2[X-\eta]_+\right\},$$

其中 $\beta_1 \in [0, 1]$ 和 $\beta_2 \geq 0$。特别地我们假设需求量是在 $[0, 1]$ 上满足均匀分布的，则

$$\bar{\mathbb{Q}}(t) := \max\left\{(1-\beta_1)t, (1+\beta_2)t - \beta_2\right\}, \forall t \in [0, 1].$$

而当 $\beta_1 = 1$ 且 $\alpha = 1/(1+\beta_2)$ 时，风险度量即为 CVaR_α，此时的最优订货量为

$$z^* = 1 - \alpha + \sqrt{\frac{2\alpha(b-c)}{b+h}}.$$

示例 9.6: 风险规避的投资组合优化 (Risk averse portfolio selection)：我们考虑如下风险规避的投资组合优化问题。假设一共有 n 个资产，每一个资产回报是随机的，用 $\xi_i, i = 1, ..., n$。现在我们希望将总量为 W_0 的预算分配到各个资产当中，使得投资的损失 (回报的负值) 风险最小化。

$$\min_{z\in\mathcal{Z}} \rho(-\sum_{i=1}^{n} \xi_i z_i), \tag{9.8}$$

其中 $\mathcal{Z} := \left\{z \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^{n} z_i = W_0, z \geq 0\right\}$。如果我们考虑 ρ 为一致性风险度量，根据最小最大表达式（9.5），我们可以把问题（9.8）转化为如下形式

$$\min_{z\in\mathcal{Z}} \sup_{\zeta\in\mathcal{A}} \sum_{i=1}^{n} \left(-\mathbb{E}_\zeta[\xi_i]\right) z_i,$$

等价于

$$\max_{z\in\mathcal{Z}} \inf_{\zeta\in\mathcal{A}} \sum_{i=1}^{n} \left(\mathbb{E}_\zeta[\xi_i]\right) z_i. \tag{9.9}$$

由于集合 $\mathcal{Z}$ 是一个紧集 (compact set)，问题 (9.8) 存在一个最优解 z^*。问题 (9.9) 存在一个鞍点，且 (z^*, ζ^*) 是鞍点当且仅当其满足 $\zeta^* \in \partial\rho(\bar{X})$ 以及 $z^* \in \arg\max_{z\in\mathcal{Z}} \sum_{i=1}^{n} \bar{\mu}_i z_i$，其中 $\bar{X}(\omega) := -\sum_{i=1}^{n} \xi_i(\omega) z_i^*$ 且 $\bar{u}_i := \mathbb{E}_{\zeta^*}[\xi_i]$。我们可以将上述风险规避最优解 (z^*, ζ^*)

的求解看成一个博弈问题。当 $W_0 = 1$ 时，投资分配 z 可以看成投资者的混合策略（mixed strategy）（对于其他的 W_0，z_i/W_0 可以看成一个混合策略）。测度 ζ 代表对手（市场）的混合策略。这个混合策略是从集合 $\mathcal{A}$ 中选取的。风险规避的最优解是这个博弈问题的均衡策略。不难发现集合 $\arg\max_{z\in\mathcal{Z}} \sum_{i=1}^{n} \bar{\mu}_i z_i$ 可由向量 $W_0 e_i,\ i \in \mathfrak{L}$ 的凸组合 (convex combination) 组成，其中 $e_i \in \mathbb{R}^n$ 表示第 i 个坐标向量 (coordinate vector) (除了第 i 个元素为 1 外，其他元素皆为 0)，集合 $\mathfrak{L} := \{i' : \bar{\mu}_{i'} = \max_{1\le i\le n} \bar{\mu}_i,\ i' = 1, ..., n\}$。此外，根据命题 (9.2) 中对风险度量次微分的定义，我们也得知次微分满足 $\partial\rho(\bar{X}) \subset \mathcal{A}$.

9.3 偏好鲁棒优化 (Preference robust optimization)

在本章最后，我们介绍偏好鲁棒优化（preference robust optimization）的相关内容。偏好鲁棒优化是鲁棒优化近年来的一个新兴方向。偏好鲁棒优化所研究的不确定性并非来源于环境和模型（如鲁棒优化模型的参数和分布鲁棒优化模型的概率分布），而是来自于决策者本身对风险的偏好 (风险偏好相对于风险度量是更广义的概念，风险度量是对决策者风险偏好的一类建模方式)。

Grable and Lytton (1999) 设置一个简单的调查来研究不同人的风险偏好：决策者需要从以下四种方案中选择一种：A）拿到 1000 美元；B）有 50% 的概率拿到 5,000 美元；C）有 25% 的概率拿到 10,000 美元；D）有 5% 的概率拿到 100,000 美元。如果只考虑最大化期望收益那么方案 D 是最优的。但在实际调查时，依旧有决策者选择了其他的几个方案，其原因是决策者对风险偏好的不同。对于极端风险厌恶的决策者而言，方案 A 是保证收益最稳妥的方案。所以在实际的决策问题中，我们很难设置一个固定的风险度量来精确反应任何决策者对于风险的偏好。事实上对于决策者自己来讲，常常也无法使用一个精确的数学模型来表达自己的风险偏好。如何在决策者的风险偏好信息不完整的情况下，依然得到可靠性高的决策呢？偏好鲁棒优化就是来解决这类问题的。

Armbruster and Delage (2015) 研究了基于期望效用函数（expected utility）理论的偏好鲁棒优化问题。假设决策者的效用函数属于某一个集合 $\mathcal{U}$，有一类偏好鲁棒优化问题可以写成如下的形式

$$\max_{z\in\mathcal{Z}} \left\{ \psi(z; \mathcal{U}, X) := \inf_{u\in\mathcal{U}} \mathbb{E}[u(f(z,\xi) - u(X)] \right\} \tag{9.10}$$

其中函数 $f(z,\xi)$ 基于决策变量 z 和随机变量 ξ 的一个映射，随机变量 X 代表决策的基准。问题（9.10）可以理解成效用最坏情况下的使 $f(z,\xi)$ 和 X 之间期望效用差距越大越好。事实上我们还发现该目标保证了 $f(z,\xi)$ 二次随机占优（second-order stochastic dominance）于 X 是恒成立的。

集合 $\mathcal{U}$ 包含了满足某些性质的所有效用函数，可由以下集合来描述：

$$\mathcal{U}_2 := \{u : u\text{是单调递增且凹的}\},$$

$$\mathcal{U}_s := \{u: \ u\text{是单调递增的,在}(-\infty,\ 0]\text{上是凸的,在}[0,\ \infty)\text{上是凹的}\},$$

$$\mathcal{U}_3 := \{u: \ \text{一阶导数}u'\text{存在且是凸的}\},$$

$$\mathcal{U}_n := \{u: \ \mathbb{E}[W_0] - \mathbb{E}[Y_0] = 1\},$$

$$\mathcal{U}_a := \{u: \ \mathbb{E}[W_k] \geq \mathbb{E}[W_k],\ \forall k = 1, ..., K\},$$

其中 $W_0, ..., W_K, Y_0, ..., Y_K$ 是随机变量代表不同的奖券（lottery）。$\mathcal{U}_2$ 描述了风险规避的特性。$\mathcal{U}_s$ 描述了 S 形的函数，即在收益上是风险规避的，在损失上是风险喜好的。$\mathcal{U}_3$ 描述了谨慎型效用函数（prudent utility）。$\mathcal{U}_n$ 用来进行归一化。最后偏好抽取（preference elicitation）集合 $\mathcal{U}_a$ 代表了对于任意的 k，决策者对奖券 W_k 的偏好都要高于 Y_k，这个集合需要通过和决策者互动提问得到。其中集合 $\mathcal{U}_2, \mathcal{U}_s, \mathcal{U}_3, \mathcal{U}_n$ 称为全局（global）信息，是该类决策者的效用函数都需要服从的性质，独立于决策者个体。集合 $\mathcal{U}_a$ 称为局部（local）信息，反映特定决策者效用的情况。效用函数的集合 $\mathcal{U}$ 便是由各类全局信息的组合与局部信息的交集构成的。

我们以集合 $\mathcal{U}^2 := \mathcal{U}_2 \cap \mathcal{U}_n \cap \mathcal{U}_a$ 为例来进行研究。该集合包含了所有单调递增的凹效用函数，且满足一定的局部信息。一个重要的问题是如何将问题（9.10）转化成为一个有限维的易处理的（finite dimentional and tractable）优化问题。我们假设这里所有的随机变量 $X, W_0, ..., W_K, Y_0, ..., Y_K$ 的支集是有限的 (finite support)。随机变量的支集用 supp 符合表示。集合 $\mathcal{S} = \mathrm{supp}(X) \cup \bigcup_{k=0}^{K} (\mathrm{supp}(Y_k) \cup \mathrm{supp}(W_k))$，同时集合 $\mathcal{S}$ 对所有随机变量的结果（outcome）进行从小到大的排序。我们用 $\bar{y}_j$ 代表集合 $\mathcal{S}$ 中第 j 小的结果。我们用 i 表示随机变量 ξ 事件的序号（事件的总数为 M），以 j 表示集合 $\mathcal{S}$ 内结果的序号（总数为 $N := |\mathcal{S}|$），用 k 来代表奖券比选的序号，总共有 K 组。

定理 9.2: 偏好鲁棒优化的线性规划表达 (Armbruster and Delage, 2015, Theorem 1)

以下线性规划问题的最优值

$$\min_{\alpha, \beta, v, w} \ \sum_i p_i(v_i h(z, \xi_i) + w_i) - \sum_j \mathbb{P}[X = \bar{y}_j]\alpha_j \tag{9.11}$$

$$\text{s.t. } \bar{y}_j v_i + w_i \geq \alpha_j, \qquad \forall i = 1, ..., M, \ \forall j = 1, ..., N, \tag{9.12}$$

$$\sum_j \left(\mathbb{P}[W_0 = \bar{y}_j]\alpha_j - \mathbb{P}[Y_0 = \bar{y}_j]\alpha_j\right) = 1, \tag{9.13}$$

$$\sum_j \mathbb{P}[W_k = \bar{y}_j]\alpha_j \geq \mathbb{P}[Y_k = \bar{y}_j]\alpha_j, \qquad \forall k = 1, ..., K, \tag{9.14}$$

$$(\alpha_{j+1} - \alpha_j) \geq \beta_{j+1}(\bar{y}_{j+1} - \bar{y}_j), \qquad \forall j = 1, ..., N-1, \tag{9.15}$$

$$(\alpha_{j+1} - \alpha_j) \leq \beta_j(\bar{y}_{j+1} - \bar{y}_j), \qquad \forall j = 1, ..., N-1, \tag{9.16}$$

$$\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\beta} \geq 0, \tag{9.17}$$

对于给定的 $z \in \mathcal{Z}$, 等于函数值 $\psi(z; \mathcal{U}, X)$。此外，最坏情况情况下的效用函数

（取到 $\psi(z; \mathcal{U}, X)$ 中的最小值）可以表达为

$$u^*(y) = \begin{cases} \alpha_N, & y \geq \bar{y}_N, \\ \frac{\alpha_{j+1}-\alpha_j}{\bar{y}_{j+1}-\bar{y}_j} y + \frac{\bar{y}_{j+1}\alpha_j - \bar{y}_j\alpha_{j+1}}{\bar{y}_{j+1}-\bar{y}_j}, & \bar{y}_j \leq y \leq \bar{y}_{j+1}, \\ -\infty, & y < \bar{y}_1. \end{cases}$$

上述的函数是一个分段线性（piecewise linear）函数连接了满足 $u(\bar{y}_j) = \alpha_j$ 的各点，其次梯度为 $\beta_j \in \partial u(\bar{y}_j)$。♡

定理 9.2 表明了偏好鲁棒优化的内层问题 $\psi(z; \mathcal{U}, X)$ 等价于求解一个有限维的线性规划问题，包含 $2(N + M)$ 个决策变量和 $MN + K + M + 2N - 1$ 个约束。定理 9.2 的难点在于推导目标函数（9.11）和约束（9.13），其利用了效用函数满足单调递增和凹的条件，所以对于给定的事件 ξ_i 所在的线性分段，其对于 $\bar{y}_j$ 的函数值不会低于其最坏情况情况下的效用函数值 α_j。

Armbruster and Delage (2015) 使用类似的思想给出了 S 形效用函数和谨慎型效用函数的等价线性规划表达。同时他们还考虑出了问题（9.10）外的其他偏好鲁棒优化问题，包括了随机占优约束问题和鲁棒确定等值 (certainty equivalent) 。此外他们也研究如何用尽可能少的问题来构建偏好抽取集合来降低等价线性规划问题的规模，以及如何消除偏好抽取集合中包含的各类错误和偏差。通过实验发现，当 K 增大的时候，风险偏好的不确定性会逐渐消除，最坏情况下的效用函数也逐步逼近决策者真实的效用函数。当 $K = 80$ 时已经能得到质量非常高的决策结果（即接近决策真实的最优决策）

近年来，偏好鲁棒优化领域得到了长足的关注和发展。有一些比较有代表性的工作。Delage and Li (2018) 建立了基于凸风险度量的偏好鲁棒优化理论。后续一些研究分别考虑了特定风险度量的偏好鲁棒优化，包括了频谱风险度量（Wang and Xu (2020); Guo and Xu (2021a)）和亏空（shortfall）风险度量（Zhang et al. (2020); Guo and Xu (2021b); Delage et al. (2022)）等。Haskell et al. (2016) 同时考虑了偏好鲁棒和分布鲁棒结合的优化问题。Wu et al. (2020); Haskell et al. (2022) 研究了多准则（multi-attribute）偏好鲁棒优化问题，分别基于结果空间和概率分布空间来构建选择函数（choice function）集合，他们提出的选择函数理论相比效用函数理论和风险度量理论包含了更多的决策者偏好，也能消除现有的决策分析当中的一些悖论。Liu et al. (2021) 将偏好鲁棒的思想扩展到了多阶段决策问题中。有兴趣的读者可以深入阅读上述文献。

本章参考文献

Acerbi, Carlo, "Spectral measures of risk: A coherent representation of subjective risk aversion," *Journal of Banking & Finance*, 2002, *26* (7), 1505–1518.

Ahmed, Shabbir, Ulaş Çakmak, and Alexander Shapiro, "Coherent risk measures in inventory problems," *European Journal of Operational Research*, 2007, *182* (1), 226–238.

Armbruster, Benjamin and Erick Delage, "Decision making under uncertainty when preference information is incomplete," *Management science*, 2015, *61* (1), 111–128.

Balbás, Alejandro, José Garrido, and Silvia Mayoral, "Properties of distortion risk measures," *Methodology and Computing in Applied Probability*, 2009, *11* (3), 385–399.

Delage, Erick and Jonathan Yu-Meng Li, "Minimizing risk exposure when the choice of a risk measure is ambiguous," *Management Science*, 2018, *64* (1), 327–344.

——, Shaoyan Guo, and Huifu Xu, "Shortfall Risk Models When Information on Loss Function Is Incomplete," *Operations Research*, 2022.

Drori, Yoel, Shoham Sabach, and Marc Teboulle, "A simple algorithm for a class of nonsmooth convex–concave saddle-point problems," *Operations Research Letters*, 2015, *43* (2), 209–214.

Grable, John and Ruth H Lytton, "Financial risk tolerance revisited: the development of a risk assessment instrument," *Financial services review*, 1999, *8* (3), 163–181.

Guo, Shaoyan and Huifu Xu, "Robust spectral risk optimization when the subjective risk aversion is ambiguous: a moment-type approach," *Mathematical Programming*, 2021, pp. 1–36.

—— and ——, "Statistical robustness in utility preference robust optimization models," *Mathematical Programming*, 2021, *190* (1), 679–720.

Haskell, William B, Huifu Xu, and Wenjie Huang, "Preference robust optimization for choice functions on the space of CDFs," *SIAM Journal on Optimization*, 2022, *32* (2), 1446–1470.

——, Lunce Fu, and Maged Dessouky, "Ambiguity in risk preferences in robust stochastic optimization," *European Journal of Operational Research*, 2016, *254* (1), 214–225.

Kusuoka, Shigeo, "On law invariant coherent risk measures," in "Advances in mathematical economics," Springer, 2001, pp. 83–95.

Liu, Jia, Zhiping Chen, and Huifu Xu, "Multistage Utility Preference Robust Optimization," *arXiv preprint arXiv:2109.04789*, 2021.

Nedić, Angelia and Asuman Ozdaglar, "Subgradient methods for saddle-point problems," *Journal of optimization theory and applications*, 2009, *142* (1), 205–228.

Nesterov, Yurii, "Primal-dual subgradient methods for convex problems," *Mathematical programming*, 2009, *120* (1), 221–259.

Ruszczyński, Andrzej and Alexander Shapiro, "Optimization of convex risk functions," *Mathematics of operations research*, 2006, *31* (3), 433–452.

Shapiro, Alexander, "On Kusuoka representation of law invariant risk measures," *Mathematics of Operations Research*, 2013, *38* (1), 142–152.

——, Darinka Dentcheva, and Andrzej Ruszczyński, *Lectures on Stochastic Programming: Modeling and Theory*, Vol. 28, SIAM, 2021.

Wang, Wei and Huifu Xu, "Robust spectral risk optimization when information on risk spectrum is incomplete," *SIAM Journal on Optimization*, 2020, *30* (4), 3198–3229.

Wu, Jian, William B Haskell, Wenjie Huang, and Huifu Xu, "Preference robust optimization with quasi-concave choice functions for multi-attribute prospects," *arXiv preprint arXiv:2008.13309*, 2020.

Zhang, Yuan, Huifu Xu, and Wei Wang, "Preference robust models in multivariate utility-based shortfall risk minimization," *Optimization Methods and Software*, 2020, pp. 1–41.

第 10 章 鲁棒优化模型求解（Model implementation）

汤勤深，熊鹏

随着鲁棒优化方法的价值不断地被学界和业界发现，出现了越来越多的语言包支持鲁棒优化模型的直接求解。其中，有基于 Julia 的 JuMPeR (Dunning et al., 2017)，基于 C++ 语言的 ROC (https://sites.google.com/site/meilinzhang1985/platform)，基于 Matlab 的XProg和YALMIP以及 XProg 的升级版RSOME。JUMPeR 和 YALMIP 主要支持经典鲁棒优化模型，而 ROC 和 RSOME 既支持经典鲁棒优化模型也支持分布鲁棒优化模型，并且还可以比较简洁地定义各种决策规则。在本章中，我们将简要介绍如何在 JUMPeR 和 YALMIP 上对鲁棒优化模型求解而着重介绍如何用 RSOME 求解不同形式的鲁棒优化模型。进行表示。

10.1 鲁棒模型在 JuMPeR 上的实现（Implementation on JuMPeR）

JuMPeR全称 Robust Optimization with JuMP。是基于 Julia 中 JuMP 而开发的一个用来求解鲁棒优化模型的语言包。Julia是一门免费和开源的编程语言，于 2018 年 8 月 1 日正式发布。

JuMPeR 可以处理大部分的经典鲁棒优化问题：

$$
\begin{aligned}
&\min g(\boldsymbol{x}) \\
&\text{s.t. } f_i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) \le 0, \forall \boldsymbol{z} \in \mathcal{U} \triangleq \{\boldsymbol{z} : h(\boldsymbol{z}) \le 0\}, i \in [I], \\
&\quad \boldsymbol{x} \in \mathcal{X}.
\end{aligned}
\tag{10.1}
$$

其中，在 JuMPeR 中，鲁棒优化模型不能包含以下几种情况：

1. 不能有二次项，也即不能有变量乘变量（$x * y$），不确定项乘不确定项（$z * \varepsilon$）。但是允许不确定项和变量相乘（$z * x$）。
2. 目标函数中不能包含不确定项。如果有的话，通过引入辅助变量将其转为约束条件。
3. 在有不确定性的约束中不支持宏（macros），所以必须使用 “addConstraint”。

使用 JuMPeR 时，先用

```
using JuMPeR
```

申明调用 JuMPeR，并且用

```
m = RobustModel()
```

来定义模型 m。之后可以定义变量“@defVar()”、约束“addConstraint()”、不确定集“@defUnc()”，或者设定目标函数“setObjective()”。举个例子：

示例 10.1:考虑如下鲁棒优化问题：

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + x_2 \\ \text{s.t.} \quad & z_1 x_1 + x_2 \le 2 \quad z_1 \in [0.3, 0.5] \\ & z_2 x_1 + x_2 \le 6 \quad z_2 \in [0, 2] \\ & x_1, x_2 \ge 0, \end{aligned}$$

其 JuMPeR 程序为：

```
# 调用JuMPeR
using JuMPeR

# 定义鲁棒模型$m$
m = RobustModel()

# 定义决策变量$x_1, x_2$
@defVar(m, x[1:2] >= 0)

# 定义不确定参数$z_1, z_2$
@defUnc(m, 0.3 <= z1 <= 0.5)
@defUnc(m, 0.0 <= z2 <= 2.0)

# 设定目标函数
setObjective(m, :Max, x[1] + x[2])

# 添加约束条件
addConstraint(m, z1*x[1] + 1*x[2] <= 2.0)
addConstraint(m, z2*x[1] + 1*x[2] <= 6.0)

# 求解鲁棒模型
status = solveRobust(m)

# 输出解
println(getValue(x[1]))  # = 2.6666
```

```
        println(getValue(x[2]))   # = 0.6666
```

由此，可以看出，类似 JuMPeR 这种编程语言包，已经最大化地节约了编程时间。只要模型满足一定的条件（标准型），即可直接输入进行求解。然而，JuMPeR 暂时只能对经典鲁棒优化问题求解。而对于分布鲁棒优化问题，则需要先手动求对偶，化成 JuMPeR 可以识别的形式之后才可直接编程求解。同样的，接下来要介绍的 YALMIP 也存在这个问题。不过，这些语言包已经大大减少了编程时间。

10.2 鲁棒优化在 YALMIP 和 CVX 上的实现

YALMIP和CVX都是依托于 MATLAB 而建的优化语言包，旨在用最直观简洁的语言进行优化模型的编程和求解。其中，YAPMIP 主要由林雪平大学（Linköping University）的 Johan Löfberg 教授，而 CVX 由斯坦福大学的 Stephen P .Boyd 和 Michael C. Grant 开发和维护。除 YALMIP 自有部分优化器外，二者主要都通过调用开源（比如 OR-Tools, CyLP）或者商业优化器（比如 Gurobi, MOSEK）对模型进行求解。这两个优化语言包功能都非常强大，各有其长短。感兴趣的读者可以到官网（https://yalmip.github.io/）和（http://cvxr.com/cvx/）进行了解。现阶段，YALMIP 支持经典鲁棒优化模型（当然模型本身必须是凸问题），而如果要用 CVX 得化成相应的 LP，SOCP，或者 SDP 才能求解。在这一节中，我们主要介绍如何用 YAPMIP 这个语言包进行经典鲁棒模型的求解。

YALMIP 可以直接处理以下鲁棒优化问题：

$$\begin{aligned} &\min \max_{z} g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) \\ &\qquad \text{s.t. } f_i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) \le 0, \forall \boldsymbol{z} \in \mathcal{U} \triangleq \{\boldsymbol{z} : h(\boldsymbol{z}) \le 0\}, i \in [I], \quad \boldsymbol{x} \in \mathcal{X}. \end{aligned} \tag{10.2}$$

其中，约束和不确定集 $\mathcal{U}$ 需满足以下几种情况之一：

1. 给定 $\boldsymbol{x}$，每一个约束（elementwise constraints）都仿射依赖于不确定变量 $\boldsymbol{z}$，并且不确定集为多面（polytopic）或者锥（conic）集。
2. 每一个约束都仿射依赖于 $\boldsymbol{z}$，并且 $\boldsymbol{z}$ 在一个范数球（norm-ball, $p = 1, 2, \infty$）。
3. 约束条件为锥约束并且仿射依赖于 $\boldsymbol{z}$，而不确定集为多面集。

另外 YALMIP 在还有某些特殊条件下适用。详情可参考`https://yalmip.github.io/tutorial/robustoptimization/`。

YALMIP 通过 sdpvar 来定义变量，uncertain 来定义不确定集，optimize 来进行问题求解（默认为最小化问题）。接下来，我们举两个简单的例子来阐述如何在 YALMIP 上进行鲁棒优化模型的求解。

示例 10.2:考虑如下简单鲁棒优化问题：

$$\begin{aligned} \max \quad & x \\ \text{s.t.} \quad & x + z \le 1, \forall z \in [-0.5, 0.5]. \end{aligned} \tag{10.3}$$

此问题的 YALMIP 的程序如下：

```
    sdpvar x z
F = [x + z <= 1];    W = [-0.5 <= z <= 0.5, uncertain(z)];
    objective = -x;
    sol = optimize(F + W,objective)
```

对于不确定集为锥的问题，亦可用类似的方法求解：

示例 10.3:考虑如下鲁棒锥优化问题：

$$\begin{aligned} \max \quad & x \\ \text{s.t.} \quad & x + z^\top \mathbf{1} \le 1, \ \forall z \in \mathcal{U}. \end{aligned} \tag{10.4}$$

其中 $\mathcal{U} = \{z : \|z\|_2 \le 1/\sqrt{2}\}$。此问题的 YALMIP 的程序如下：

```
    sdpvar x z(2,1)
    F = [x + sum(z) <= 1];
    W = [norm(z) <= 1/sqrt(2), uncertain(z)];
    objective = -x;
    sol = optimize(F + W,objective)
```

10.3 鲁棒模型在 RSOME 上的实现

RSOME全称 Robust Stochastic Optimization Modeling Environment，是一个针对 MATLAB 的优化建模工具包，可以在 Windows，macOS，以及 Linux 操作系统下运行。该软件工具包为用户提供了丰富便捷的语法环境，可以直观高效地处理各类优化模型，如经典的随机规划和鲁棒优化模型，以及分布鲁棒优化和鲁棒随机优化模型等。目前版本的 RSOME 提供了调用商用求解器，如 Gurobi，MOSEK，以及 CPLEX 的接口。用户可以根据自己的需求选择求解器对模型进行求解。更多详情和下载资源请参考官网（https://www.rsomerso.com/）。

10.3.1 RSOME 建模求解的基本步骤

RSOME 工具包提供了灵活的函数和语法环境来定义各类优化模型。具体的建模和求解步骤如下：

1. 用 rsome 函数创建一个优化模型对象
2. 为优化模型创建随机变量和决策变量
3. 创建和定义模糊集合
4. 定义动态决策的近似表达式
5. 定义目标函数和约束条件

6. 求解模型和返回最优解

我们首先用一个简单的凸优化问题来演示使用 RSOME 工具包建模求解的基本步骤。

示例 10.4: Bertsimas and Sim (2004) 介绍了一个经典的投资组合优化（Portfolio optimization）问题：

$$\begin{aligned}\max \quad & \sum_{i=1}^{n} p_i x_i - \phi \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2 x_i^2 \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \\ & x_i \geq 0, \forall i = 1, 2, \ldots, n\end{aligned} \tag{10.5}$$

这个模型考虑了 $n = 150$ 支股票。对第 i 支股票，回报率的期望是 p_i，标准差是 σ_i。我们用 x_i 定义决策变量代表每支股票的投资比例，并用参数 $\phi = 5$ 来平衡投资的回报期望和风险。这个投资组合优化问题可以写成下面的代码。

```
%% 定义模型参数
n = 150;                                        % 股票支数
p = 1.15 + 0.05/150*(1:n)';                     % 回报率期望
sigma = 0.05/450*sqrt(2*n*(n+1)*(1:n)');        % 回报率标准差
phi = 5;                                        % 平衡参数

%% 创建模型和决策变量
model = rsome('投资组合优化');                   % 创建一个模型model
x = model.decision(n);                          % 定义决策变量x

%% 定义目标函数和约束条件
model.max(p'*x - phi*sumsqr(sigma.*x));         % 最大化目标函数
model.append(sum(x) == 1);                      % 定义约束条件
model.append(x >= 0);                           % 定义变量边界

%% 求解模型和返回最优解
model.solve;                                    % 求解模型
obj = model.get;                                % 最优目标值
X = x.get                                       % x的最优解
```

这个投资组合优化模型被转化成一个二阶锥规划问题并由内置的 CPLEX 求解器求解，得到的最优值是 1.185。在建模和求解过程中，我们提醒读者注意：

1. 就像 MATLAB 中的其他程序应用，RSOME 工具包在处理向量和矩阵时的效率会远远高于循环。因此在这个例子中，我们把决策变量 x_i 创建成一个向量 $\boldsymbol{x}$，并用矩阵运算来定义目标函数和约束条件。

2. MATLAB 中的绝大部分矩阵运算符号和法则也适用于 RSOME 模型的表达式，比如这个例子中的矩阵乘法、点乘、以及加减法等。
3. RSOME 工具包提供了一系列凸函数，比如绝对值 `abs`，范数 `norm`，和这个示例中的平方和 `sumsqr` 等。在模型中使用凸函数时，必须保证该模型的可行域为凸集，否则程序会出现错误信息。

10.3.2 用 RSOME 定义事件式分布模糊集合

RSOME 利用在5.5.2中介绍的事件式分布模糊集合来表达随机变量的概率分布情况。和之前介绍的软件工具相比，这个事件式分布模糊集合更加的通用，因此我们可以使用 RSOME 方便地建立各类鲁棒优化和随机规划的模型，比如下面的例子。

示例 10.5: Bertsimas and Sim (2004) 介绍的投资组合优化（Portfolio optimization）问题可以写成一个经典鲁棒优化模型：

$$
\begin{aligned}
\max \quad & \min_{z\in\mathcal{U}} \sum_{i=1}^{n}(p_i - \sigma_i z_i)x_i \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \\
& x_i \geq 0, \forall i = 1, 2, \ldots, n
\end{aligned}
\tag{10.6}
$$

在该模型中，随机变量 z 代表实际股票回报率和期望值间的偏差。这个随机被约束在一个预算不确定集（budget uncertainty set）$\mathcal{U}$ 中，其表达式如下：

$$
\mathcal{U} = \{z | \|z\|_\infty \leq 1, \|z\|_1 \leq \Gamma\} \tag{10.7}
$$

其中 Γ 代表不确定性预算（budget of uncertainty）。以上的预算不确定集可以用事件式分布模糊集合中的支撑集合来表示，这个经典鲁棒优化模型因而由以下代码建立。

```
%% 定义模型参数
n = 150;                                       % 股票支数
p = 1.15 + 0.05/150*(1:n)';                    % 回报率期望
sigma = 0.05/450*sqrt(2*n*(n+1)*(1:n)');       % 回报率标准差
gamma = 5;                                     % 不确定性预算

%% 创建模型，随机变量和决策变量
model = rsome('投资组合鲁棒优化');               % 创建一个模型model
xi = model.random(n);                          % 定义随机变量xi
x = model.decision(n);                         % 定义决策变量x

%% 创建和定义分布模糊集合
```

```
    P = model.ambiguity;                           % 创建分布模糊集合
    P.suppset(norm(xi, Inf) <= 1, ...
norm(xi, 1) <= Gamma);              % 定义支撑集信息    model.with(P);
                                                 % 传递模糊信息到模型

    %% 定义目标函数和约束条件
    model.max((p + sigma.*xi)' * x);               % 最大化目标函数
    model.append(sum(x) == 1);                     % 定义约束条件
    model.append(x >= 0);                          % 定义变量边界

    %% 求解模型
    model.solve;                                   % 求解模型
```

在这个例子中，我们在定义一个模型 `model` 和其对应的随机变量 `xi` 和决策变量 `x` 之后，使用 `ambiguity` 方法函数创建一个模糊集对象。该模糊集通过 `suppset` 方法函数定义了随机变量 z 的多面体（polyhedral）支撑集，等价于这个鲁棒优化模型的不确定集 U (10.7). 最后我们用 `with` 方法函数将模糊集信息传递到模型本身，并在定义模型的目标函数以及约束条件之后，即可调用 solve 函数求解。在求解过程中，RSOME 将模型自动转化为一个线性规划标准型，并通过求解器得到最后的最优解。

示例 10.6: Chen et al. (2020) 介绍的报童问题可以写成以下分布鲁棒优化模型:

$$\begin{aligned} \max \quad & (p-c)x - \sup_{\mathbb{P}\in\mathcal{F}} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\max\left\{p(x-z), 0\right\}\right] \\ \text{s.t.} \quad & x \ge 0 \end{aligned} \tag{10.8}$$

其中参数 p 和 c 分别是产品的销售价格和预定价格，决策变量 x 代表商品的预定量，随机变量 z 代表商品的需求。随机变量 z 的分布由一个基于 Wasserstein 距离的分布模糊集（Wasserstein ambiguity set）刻画。Chen et al. (2020) 证明了这个模糊集可以写成:

$$\mathcal{F} = \left\{ \mathbb{P}\in\mathcal{P}_0\left(\mathbb{R}\times[S]\right) \;\middle|\; \begin{array}{ll} (\tilde{z}, \tilde{s}) \sim \mathbb{P} & \\ \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\rho(\tilde{z}, \hat{z}_{\tilde{s}}) \mid \tilde{s}\in[S]\right] \le \theta & \\ \mathbb{P}\left[\tilde{z}\in[0, \bar{Z}] \mid \tilde{s}=s\right] = 1 & \forall s\in[S] \\ \mathbb{P}\left[\tilde{s}=s\right] = 1/S & \forall s\in[S] \end{array} \right\}$$

其中 $\bar{Z}$ 是商品需求的上限，而 $\hat{z}_s$, $s = 1, 2, 3, ..., S$ 代表随机变量 z 的历史经验数据（empirical data）。这个模糊集定义了所有和经验数据的 Wasserstein 距离不大于常数 θ 的所有分布函数，并且可以写成下面的事件式分布模糊集:

$$\mathcal{G} = \left\{ \mathbb{P}\in\mathcal{P}_0\left(\mathbb{R}^2\times[S]\right) \;\middle|\; \begin{array}{ll} ((\tilde{z}, \tilde{u}), \tilde{s}) \sim \mathbb{P} & \\ \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\tilde{u} \mid \tilde{s}\in[S]\right] \le \theta & \\ \mathbb{P}\left[\tilde{z}\in[0, \bar{Z}],\ \rho(\tilde{z}, \hat{z}_{\tilde{s}}) \le \tilde{u} \mid \tilde{s}=s\right] = 1 & \forall s\in[S] \\ \mathbb{P}\left[\tilde{s}=s\right] = 1/S & \forall s\in[S] \end{array} \right\}$$

基于上面的事件式分布模糊集，这个报童问题可以写成下面的 RSOME 程序。

```
%% 定义模型参数
Zbar = 100;                          % 商品需求上限
S=500;                               % 经验数据的数目
Zhat = Zbar * rand(1, S);            % 生成经验数据
p = 1.5;                             % 销售价格
c = 1.0;                             % 预定成本
theta = Zbar * 0.01;                 % Wasserstein 距离

%% 创建模型，随机变量和决策变量
model = rsome('报童问题');            % 创建一个模型model
z = model.random;                    % 定义随机变量z
u = model.random;                    % 定义辅助随机变量u
x = model.decision;                  % 定义决策变量x

%% 创建和定义分布模糊集合
P = model.ambiguity(S);              % 创建S个情景的分布模糊集
for s = 1:S
    P(s).suppset(0 <= z, z <= Zbar, ...
                 norm(z-Zhat(s)) <= u); % 定义每个情景s的支撑集
end
P.exptset(expect(u) <= theta)        % 定义整体的期望值信息
pr = P.prob;                         % 每个情景s的概率
P.probset(pr == 1/S);                % 定义每个情景概率的值
model.with(P);                       % 传递模糊信息到模型

%% 定义目标函数和约束条件
model.max((p-c)*x - ...
          expect(maxfun({p*(x-z), 0})));% 最大化目标函数
model.append(x >= 0);                % 定义变量边界

%% 求解模型
model.solve;                         % 求解模型
```

请注意以上程序中的函数 `expect()` 代表了表达式的最坏期望。这个例子体现了 RSOME 工具包的优势：我们可以直观便捷地定义分布模糊集的各类概率分布信息，比如：

1. 我们用 `P(s).suppset()` 来分别定义每一个情景 `s` 下的支撑集；

2. 函数 `P.exptset()` 定义随机变量期望值的集合表达式；
3. 模糊集 `P` 的属性 `P.prob` 返回一个包含每个情景 `s` 概率的列向量，并且情景概率的集合可以通过 `P.probset()` 来定义。

由此可见，RSOME 代码有着更好的可读性和通用性。用户可以轻松地将模糊集合的数学表达式用程序表达出来，因此能够更快更方便地求解和调试各类鲁棒优化模型。

10.3.3 用 RSOME 定义事件式近似法则

在前文5.1中，我们提到在多阶段问题（Multi-stage problems）中，一些决策变量可以根据未来观测到的一部分随机变量的值而动态变化。这类“等待决策（wait-and-see decisions)”可能给建模和求解带来巨大的困难。因此在5.5中我们介绍了两种近似处理的方法：一是事件式静态近似法则，也就是在不同的事件下，决策取不同的常数值；另一种称为事件式线性近似法则，在该法则中，决策在不同的事件下为随机变量的不同仿射函数。在实际应用中，我们可以使用 RSOME 方便灵活地定义这两类近似法则。在定义各类近似法则中，用户可以设定：

1. 一个相互独立又完全穷尽（MECE）的事件集合，使得被定义的决策在不同的事件下动态变化。这样的事件适应（event-wise adaptation) 集合可以通过函数 `evtadapt()` 来实现。
2. 被定义的决策对随机变量的仿射适应（affine adaptation）表达式。这个仿射适应表达式可以通过函数 `affadapt()` 来设定。

接下来，我们用一个实际的例子来演示如何使用 RSOME 处理此类问题。

示例 10.7:在之前的示例10.6中，表达式 $\max\{p(x-z),0\}$ 可以用动态决策近似函数 $y(\tilde{s},(\tilde{z},\tilde{u}))$ 替代，由此之前的问题可以写成一个两阶段（two-stage）模型如下：

$$
\begin{aligned}
\max \quad & (p-c)x - \sup_{\mathbb{P}\in\mathcal{F}} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[y(\tilde{s},(\tilde{z},\tilde{u}))\right] \\
\text{s.t.} \quad & x \geq 0 \\
& y(\tilde{s},(\tilde{z},\tilde{u})) \geq p(x-z) \\
& y(\tilde{s},(\tilde{z},\tilde{u})) \geq 0 \\
& y \in \bar{\mathcal{A}}([S],2)
\end{aligned}
\tag{10.9}
$$

其中 $y \in \bar{\mathcal{A}}([S],2)$ 意味着动态决策 y 在每一个情景 $s \in [S]$ 下，都是不同的关于随机变量 z 和 u 的仿射函数。这样的一个两阶段模型可以用如下程序来表达。

```
%% 定义模型参数
Zbar = 100;                          % 商品需求上限
S=500;                               % 经验数据的数目
Zhat = Zbar * rand(1, S);            % 生成经验数据
p = 1.5;                             % 销售价格
c = 1.0;                             % 预定成本
```

```
    theta = Zbar * 0.01;                          % Wasserstein 距离
%% 创建模型，随机变量和决策变量     model = rsome('报童问题');
                    % 创建一个模型model
    z = model.random;                             % 定义随机变量z
    u = model.random;                             % 定义辅助随机变量u
    x = model.decision;                           % 定义决策变量x
    y = model.decision;                           % 定义动态决策变量y

    %% 创建和定义分布模糊集合
    P = model.ambiguity(S);                       % 创建S个情景的分布模糊集
    for s = 1:S
        P(s).suppset(0 <= z, z <= Zbar, ...
                    norm(z-Zhat(s)) <= u);        % 定义每个情景s的支撑集
    end
    P.exptset(expect(u) <= theta)                 % 定义整体的期望值信息
    pr = P.prob;                                  % 每个情景s的概率
    P.probset(pr == 1/S);                         % 定义每个情景概率的值
    model.with(P);                                % 传递模糊信息到模型

    %% 定义动态决策的事件适应和仿射适应表达式
    for s = 1:S
        y.evtadapt(s);                            % y随不同的情景s变化
    end
    y.affadapt(z);                                % y线性依赖随机变量z
    y.affadapt(u);                                % y线性依赖随机变量u

    %% 定义目标函数和约束条件
    model.max((p-c)*x - expect(y));               % 最大化目标函数
    model.append(y >= 0);                         % 定义约束条件
    model.append(y >= p * (w-z));                 % 定义约束条件
    model.append(x >= 0);                         % 定义变量边界

    %% 求解模型
    model.solve;                                  % 求解模型
```

这一节主要介绍了 RSOME 优化建模工具包的基本概念和使用方法。从以上的示例中，我们可以看出，RSOME 提供了一个简洁友好的建模环境，让用户可以通过近似

数学表达式的程序语言定义复杂的模糊集合动态决策表达式，极大地提高了用户建立和求解各类鲁棒和随机优化模型的效率。关于 RSOME 工具包的更多细节可以参考https://www.rsomerso.com/。另 RSOME 已开发 Python 版本，且其语法与 Matlab 版本略有不同。有关于 Python 版本的更多细节可以参考https://xiongpengnus.github.io/rsome/。

本章参考文献

Bertsimas, Dimitris and Melvyn Sim, "The price of robustness," *Operations Research*, 2004, *52* (1), 35–53.

Chen, Zhi, Melvyn Sim, and Peng Xiong, "Robust stochastic optimization made easy with RSOME," *Management Science*, 2020, *66* (8), 3329–3339.

Dunning, Iain, Joey Huchette, and Miles Lubin, "JuMP: A modeling language for mathematical optimization," *SIAM Review*, 2017, *59* (2), 295–320.