## 3.3 鲁棒对等问题（Robust counterpart）

让我们先回到模型 (3.5)：

$$\begin{aligned} &\min F \\ &\text{s.t. } f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}) \le F \quad \forall \boldsymbol{\xi} \in \mathcal{U}, \\ &\qquad h(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}) \le 0 \quad \forall \boldsymbol{\xi} \in \mathcal{U}. \end{aligned}$$

在这个模型中，假如 $\boldsymbol{\xi}$ 有 $N$ 个可能的取值 $\mathcal{U} = \{\boldsymbol{\xi}_1, \dots, \boldsymbol{\xi}_N\}$，那么给定 $\boldsymbol{x}$ 和 $F$，约束 $f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}) \le F \ \forall \boldsymbol{\xi} \in \mathcal{U}$ 就等价于

$$f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}_i) \le F \quad \forall i \in [N],$$

共 $N$ 个约束。相应的，$h(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}) \le 0 \ \forall \boldsymbol{\xi} \in \mathcal{U}$ 也等价于

$$h(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}_i) \le 0 \quad \forall i \in [N],$$

共 $N$ 个约束。

然而，如 3.2 小节所描述，常见的不确定集合大部分都是连续集 (continuous set) 而非离散集 (discrete set), 也即对于模型 (3.5) 来说，它将有无限多个约束，由此产生了一个半无限规划模型。显然，这是难以直接求解的。为了对鲁棒优化问题进行求解，我们需要对原模型做出一定程度的转化，使得转化后模型能够通过商业软件直接进行求解。在这方面做出重要突破的学者有 Allen L. Soyster、Aharon Ben-Tal、Arkadi Nemirovski、Dimitris Bertsimas 和 Melvyn Sim 等。

实际上，对于任意形如

$$g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}) \le 0 \quad \forall \boldsymbol{\xi} \in \mathcal{U},$$

的约束，我们都可以等价地将其写为：

$$\sup_{\boldsymbol{\xi} \in \mathcal{U}} g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}) \le 0.$$

当函数 $g$ 和集合 $\mathcal{U}$ 满足一定条件时，不等式左边的问题可以转化为线性规划问题、凸优化问题、或者是锥优化问题。相应地，所对应的约束转化为线性约束、凸约束、或者锥约束。从而使得模型 (3.5)能用商业软件进行求解。

一般地，我们定义形如

$$g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}) \le 0 \quad \forall \boldsymbol{\xi} \in \mathcal{U}$$

的式子为鲁棒约束 (robust constraint)。而将模型 (3.5)称为鲁棒对等问题 (robust counterpart)。而整个转化的过程大多数时候依赖于对偶理论。举例如下：

**示例 3.1:**考虑如下鲁棒优化问题

$$\begin{aligned} \min \quad & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ \text{s.t.} \quad & b_0 + \boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{\xi} \ge 0 \quad \forall \boldsymbol{\xi} \in \mathcal{U}, \\ & \boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{0}. \end{aligned} \tag{3.11}$$

其中 $\mathcal{U} = \{\boldsymbol{\xi} : \boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{b}, \boldsymbol{\xi} \geq 0\}$.

约束 $b_0 + \boldsymbol{x}^\top\boldsymbol{\xi} \geq 0\ \forall \boldsymbol{\xi} \in \mathcal{U}$ 等价于 $b_0 + \inf_{\boldsymbol{\xi}\in\mathcal{U}}\ \boldsymbol{x}^\top\boldsymbol{\xi} \geq 0$。对于不等式左边的问题 $\inf_{\boldsymbol{\xi}\in\mathcal{U}} \boldsymbol{x}^\top\boldsymbol{\xi}$，由 2.1 可知其对偶问题为：

$$
\begin{aligned}
\sup\quad & \boldsymbol{b}^\top\boldsymbol{p}\\
\text{s.t.}\quad & \boldsymbol{A}^\top\boldsymbol{p} \leq \boldsymbol{x}.
\end{aligned}
$$

也即约束 $b_0 + \boldsymbol{x}^\top\boldsymbol{\xi} \geq 0\ \forall \boldsymbol{\xi} \in \mathcal{U}$ 等价于

$$
b_0 + \sup_{\boldsymbol{A}^\top\boldsymbol{p}\leq\boldsymbol{x}}\ \boldsymbol{b}^\top\boldsymbol{p} \geq 0 \Leftrightarrow b_0 + \boldsymbol{b}^\top\boldsymbol{p} \geq 0 \quad \exists \boldsymbol{p}\ \text{s.t.}\ \boldsymbol{A}^\top\boldsymbol{p} \leq \boldsymbol{x}.
$$

由此，可以得到问题 (3.11) 的鲁棒对等问题为：

$$
\begin{aligned}
\min\quad & \boldsymbol{c}^\top\boldsymbol{x}\\
\text{s.t.}\quad & b_0 + \boldsymbol{b}^\top\boldsymbol{p} \geq 0,\\
& \boldsymbol{A}^\top\boldsymbol{p} \leq \boldsymbol{x},\\
& \boldsymbol{x} \geq \mathbf{0}.
\end{aligned}
\tag{3.12}
$$

## 3.4 经典鲁棒模型

接下来，我们将以Bertsimas and Sim (2003) 为蓝本，简要介绍在鲁棒优化理论发展过程中经典的的三个模型：他们分别来自Soyster (1973)、Ben-Tal and Nemirovski (1999) 和Bertsimas and Sim (2003)。

### 3.4.1 Soyster 的鲁棒模型

如第一章所介绍，Soyster假设以下线性规划问题中

$$
\begin{aligned}
\max\quad & \boldsymbol{c}^\top\boldsymbol{x}\\
\text{s.t.}\quad & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b},\\
& \boldsymbol{x} \geq \mathbf{0},
\end{aligned}
\tag{3.13}
$$

系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的每一列都在一个凸集中（也称为列不确定性），也即，$\boldsymbol{A}_j \in \mathcal{U}_j$，那么线性规划问题(3.13)将变成如下问题：

$$
\begin{aligned}
\max\quad & \boldsymbol{c}^\top\boldsymbol{x}\\
\text{s.t.}\quad & \sum_{j\in[N]} \boldsymbol{A}_j x_j \leq \boldsymbol{b} \quad \forall \boldsymbol{A}_j \in \mathcal{U}_j, j \in [N],\\
& \boldsymbol{x} \geq \mathbf{0}.
\end{aligned}
\tag{3.14}
$$

其所对应的鲁棒对等问题为

$$\begin{aligned}\max\quad & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ \text{s.t.}\quad & \sum_{j\in[N]} \bar{\boldsymbol{A}}_j x_j \le \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{0}.\end{aligned} \tag{3.15}$$

其中，$\bar{a}_{ij} = \sup_{\boldsymbol{A}_j\in\mathcal{U}_j} a_{ij}$。也即，对于每一个参数 $a_{ij}$ 都取其在不确定集范围内的最大值。而这样得到的解虽然具有鲁棒性，但是同时也非常保守。

### 3.4.2 Ben-Tal 和 Nemirovski 的鲁棒模型

Ben-Tal 和 Nemirovski 也认同 $a_{ij}$ 具有不确定性。但是不同于 Soyster (1973)，Ben-Tal and Nemirovski (2000) 假设 $\boldsymbol{A}$ 的第 $i(i\in[M])$ 行中，只有部分系数---用 $\mathcal{J}_i$ 表示---具有不确定性。如果我们用 $\tilde{a}_{ij}$ 表示具有不确定性的系数，且 $\tilde{a}_{ij} = a_{ij} + \hat{a}_{ij}\xi_{ij}$。其中，$\hat{a}_{ij}$ 为波动范围，$\xi_{ij}$ 为在 $[-1,1]$ 内对称分布的随机变量，且满足 $\|\boldsymbol{\xi}_i\|_2 \le \Omega$。也即

$$\begin{aligned}\max\quad & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ \text{s.t.}\quad & \sum_{j\in[N]} (a_{ij} + \xi_{ij}\hat{a}_{ij})x_j \le b_i \quad \forall \boldsymbol{\xi}_i \in \mathcal{U} := \{\boldsymbol{\xi} : \|\boldsymbol{\xi}\|_2 \le \Omega\}, i\in[M], \\ & \boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{0}.\end{aligned} \tag{3.16}$$

其所对应的鲁棒对等问题为

$$\begin{aligned}\max\quad & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ \text{s.t.}\quad & \sum_{j\in[N]} a_{ij}x_j + \Omega\sqrt{\sum_{j\in\mathcal{J}_i} \hat{a}_{ij}^2 x_j^2} \le b_i, \\ & \boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{0}.\end{aligned} \tag{3.17}$$

在此问题中，$\Omega$ 为一给定的常量，并无直观的意义。求解结果高度依赖于常量 $\Omega$。此外，此问题虽然可以通过调节 $\Omega$ 来避免 Soyster (1973) 的极端保守情况，仍然比较保守。同时，此问题为二阶锥规划问题，求解起来稍显繁琐。

### 3.4.3 Bertsimas 和 Sim 的鲁棒模型

为了克服 Soyster (1973) 的保守性和 Ben-Tal and Nemirovski (2000) 中使用椭球不确定集而导致二阶锥规划问题，对于系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中的第 $i$ 行，Bertsimas and Sim (2004) 提出了预算不确定集 (budget uncertainty set):

$$\mathcal{U}_i = \{\boldsymbol{\xi}_i : |\xi_{ij}| \le 1, j\in[N], \|\boldsymbol{\xi}_i\|_1 \le \Gamma_i\}.$$

其中，$\Gamma_i \in [0, |\mathcal{J}_i|]$, $|\mathcal{J}_i|$ 表示第 $i$ 行中不确定的参数个数。也即，通过引入参数 $\Gamma_i$ 来调节模型的保守程度。假设不确定的参数个数不超过 $\lfloor\Gamma_i\rfloor$ 个，其中 $\lfloor\Gamma_i\rfloor$ 是小于等于 $\Gamma_i$

的最大整数，并且假设 $a_{ij}$ 的波动范围为 $(\Gamma_i - \lfloor\Gamma_i\rfloor)\hat{a}_{ij}$，Bertsimas 和 Sim 提出以下鲁棒优化模型：

$$\begin{aligned}
\max \quad & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{j\in[N]} a_{ij}x_j + \max_{\{\mathcal{S}_i\cup\{t_i\}|\mathcal{S}_i\subseteq\mathcal{J}_i,|\mathcal{S}_i|=\lfloor\Gamma_i\rfloor,t_i\in\mathcal{J}_i\setminus\mathcal{S}_i\}} \left\{\sum_{j\in\mathcal{S}_i}\hat{a}_{ij}y_j + (\Gamma_i - \lfloor\Gamma_i\rfloor)\,\hat{a}_{it_i}y_t\right\} \le b_i \quad \forall i\in[M],\\
& -y_j \le x_j \le y_j \quad \forall j\in[N],\\
& \boldsymbol{l} \le \boldsymbol{x} \le \boldsymbol{u},\\
& \boldsymbol{y} \ge \boldsymbol{0}.
\end{aligned} \tag{3.18}$$

当 $\Gamma_i$ 为整数时，此时 $\Gamma_i = \lfloor\Gamma_i\rfloor$，对第 $i$ 个约束，有如下形式：

$$\sum_{j\in[N]} a_{ij}x_j + \max_{\{\mathcal{S}_i\cup\{t_i\}|\mathcal{S}_i\subseteq\mathcal{J}_i,|\mathcal{S}_i|=\lfloor\Gamma_i\rfloor,t_i\in\mathcal{J}_i\setminus\mathcal{S}_i\}} \left\{\sum_{j\in\mathcal{S}_i}\hat{a}_{ij}y_j\right\} \le b_i \tag{3.19}$$

当 $\Gamma_i$ 的值为 0 时，变量的系数均为标称值，约束变为名义问题（nominal problem）。当 $\Gamma_i$ 取最大值 $\lfloor\Gamma_i\rfloor$ 时，此时所有的不确定元素均不为标称值，模型等价于 Soyster 模型。当 $\Gamma_i$ 的值介于最大值和最小值之间变动时，模型的保守度也相应变动。当 $\Gamma_i$ 的值为 $\Omega_i\sqrt{\sum_{j\in\mathcal{J}_i}\left(\hat{a}_{ij}^2x_j^2\right)}$ 时，约束违背（具体参考Bertsimas and Sim 2004）的概率边界值与 Ben-tal 一致。因此，当 $\Gamma_i$ 的值过小时，鲁棒优化模型保守性差，较大概率发生约束违背。当 $\Gamma_i$ 的值过大时，计算结果过于保守。模型(3.18)是非线性模型，不能直接求解，Bertsimas 和 Sim 对模型做出了如下转化：

$$\begin{aligned}
\max \quad & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{j\in[N]} a_{ij}x_j + z_i\Gamma_i + \sum_{j\in\mathcal{J}_i} p_{ij} \le b_i && \forall i\in[M],\\
& z_i + p_{ij} \ge \hat{a}_{ij}y_j && \forall j\in\mathcal{J}_i, i\in[M],\\
& -y_j \le x_j \le y_j && \forall j\in[N],\\
& l_j \le x_j \le u_j && \forall j\in[N],\\
& p_{ij} \ge 0 && \forall j\in\mathcal{J}_i, i\in[M],\\
& y_j \ge 0 && \forall j\in[N],\\
& z_i \ge 0 && \forall i\in[M].
\end{aligned} \tag{3.20}$$

模型转化的理论依据是对偶理论，具体的证明过程在作者稿件中有详细描述，有兴趣的读者可以自行翻阅，这里不再赘述。在此基础上，Bertsimas and Sim (2003) 提出

了鲁棒离散优化的模型:

$$
\begin{aligned}
\max \quad & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} + \max_{\{\mathcal{S}_0|\mathcal{S}_0\subseteq\mathcal{J}_0,|\mathcal{S}_0|\leqslant\Gamma_0\}} \left\{ \sum_{j\in\mathcal{S}_0} d_j \left|x_j\right| \right\} \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{j\in[N]} a_{ij}x_j + \max_{\{\mathcal{S}_i\cup\{t_i\}|\mathcal{S}_i\subseteq\mathcal{J}_i,|\mathcal{S}_i|=\lfloor\Gamma_i\rfloor,t_i\in\mathcal{J}_i\setminus\mathcal{S}_i\}} \left\{ \sum_{j\in\mathcal{S}_i} \hat{a}_{ij}\left|x_j\right| + (\Gamma_i - \lfloor\Gamma_i\rfloor)\,\hat{a}_{it_i}\left|x_{t_i}\right| \right\} \le b_i \quad \forall i\in[M], \\
& x_j \in \mathbb{Z} \qquad \forall j\in[N].
\end{aligned}
\tag{3.21}
$$

其中,$\Gamma_0$ 是区间 $[0,|\mathcal{J}_0|]$ 内的整数,$\mathcal{J}_0=\{j|d_j>0\}$,$|\mathcal{J}_0|$ 是 $\boldsymbol{c}$ 中不确定元素的个数。不同于Bertsimas and Sim (2004), Bertsimas and Sim (2003) 考虑了目标函数的不确定性。对于目标函数中的 $\boldsymbol{c}$,允许变化的不确定元素有 $\Gamma_0$ 个,取值为 $\boldsymbol{c}^\top_{j\in\mathcal{S}_0} + \max_{\{\mathcal{S}_0|\mathcal{S}_0\subseteq\mathcal{J}_0,|\mathcal{S}_0|\leqslant\Gamma_0\}} \sum_{j\in\mathcal{S}_0} d_j$,其余均为标称值。

同样的，模型(3.21)也需要经过处理才能求解，处理后的混合整数规划模型如下所示:

$$
\begin{aligned}
\max \quad & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} + z_0\Gamma_0 + \sum_{j\in\mathcal{J}_0} p_{0j} \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{j\in[N]} a_{ij}x_j + z_i\Gamma_i + \sum_{j\in\mathcal{J}_i} p_{ij} \le b_i && \forall i\in[M], \\
& z_0 + p_{0j} \ge d_j y_j && \forall j\in\mathcal{J}_0, \\
& z_i + p_{ij} \ge \hat{a}_{ij} y_j && \forall j\in\mathcal{J}_i, i\in[M], \\
& p_{ij} \ge 0 && \forall j\in\mathcal{J}_i, i\in[M], \\
& z_i \ge \mathbf{0} && \forall i\in[M]\cup\{0\}, \\
& x_i \in \mathbb{Z} && \forall i\in[M], \\
& \boldsymbol{l} \le \boldsymbol{x} \le \boldsymbol{u}, \\
& -\boldsymbol{y} \le \boldsymbol{x} \le \boldsymbol{y}, \\
& \boldsymbol{y} \ge \mathbf{0}.
\end{aligned}
\tag{3.22}
$$

接下来，我们节选Bertsimas and Sim (2004) 中的组合优化的例子来简要探讨鲁棒优化的具体运用。考虑如下的组合优化模型,

$$
\begin{aligned}
\max \quad & \boldsymbol{p}^\top \boldsymbol{x} - \phi(\boldsymbol{\sigma}\bullet\boldsymbol{x})^\top(\boldsymbol{\sigma}\bullet\boldsymbol{x}) \\
\text{s.t.} \quad & \boldsymbol{x}^\top \mathbf{1} = 1, \\
& \boldsymbol{x} \ge \mathbf{0}.
\end{aligned}
\tag{3.23}
$$

其中，$x_i$ 定义决策变量代表每支股票的投资比例, $p_i$ 和 $\sigma_i$ 分别为股票 $i$ 的期望回报率与回报率标准差，$\phi$ 是控制风险和回报之间交易的一个参数。

考虑 $N=150$ 支股票，假如第 $i$ 支股票的回报率的期望 $p_i$ 和标准差 $\sigma_i$ 分别为 $p_i = 1.15 + i\frac{0.05}{150}$, $\sigma_i = \frac{0.05}{450}\sqrt{2iN(N+1)}$，且假设 $\phi=5$ 来平衡投资的回报期望和风

险。模型(3.23)所对应的鲁棒优化模型为:

$$\begin{aligned}
\max \quad & z \\
\text{s.t.} \quad & z \leq \boldsymbol{p}^\top \boldsymbol{x} + \max_{\{\mathcal{S}_i \cup \{t_i\} | \mathcal{S}_i \subseteq \mathcal{J}_i, |\mathcal{S}_i| = \lfloor \Gamma_i \rfloor, t_i \in \mathcal{J}_i \setminus \mathcal{S}_i\}} \left\{ \sum_{j \in \mathcal{S}_i} \sigma_j x_j + (\Gamma_i - \lfloor \Gamma_i \rfloor) \sigma_i x_{t_i} \right\}, \\
& \boldsymbol{x}^\top \mathbf{1} = 1, \\
& \boldsymbol{x} \geq \mathbf{0}.
\end{aligned} \tag{3.24}$$

其鲁棒对等模型为:

$$\begin{aligned}
\max \quad & z \\
\text{s.t.} \quad & z \leq \boldsymbol{p}^\top \boldsymbol{x} - \left( \sum\nolimits_{i \in [N]} Q_i + \Gamma_i m_i \right), \\
& Q_i + m_i \geq \sigma_i x_i \quad \forall i \in [N], \\
& \boldsymbol{x}^\top \mathbf{1} = 1, \\
& \boldsymbol{x}, \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{m} \geq \mathbf{0}.
\end{aligned} \tag{3.25}$$

此外，根据Bertsimas and Sim (2004) 中的 **Proposition 1**:

$$\max_{\{\mathcal{S}_i \cup \{t_i\} | \mathcal{S}_i \subseteq \mathcal{J}_i, |\mathcal{S}_i| = \lfloor \Gamma_i \rfloor, t_i \in \mathcal{J}_i \setminus \mathcal{S}_i\}} \left\{ \sum_{j \in \mathcal{S}_i} \hat{a}_{ij} y_j + (\Gamma_i - \lfloor \Gamma_i \rfloor) a_{it_i} y_{t_i} \right\}$$

等价为以下的线性优化模型:

$$\begin{aligned}
\beta_i (\boldsymbol{x}^*, \Gamma_i) = \max \quad & \sum\nolimits_{j \in \mathcal{J}_i} \hat{a}_{ij} \left| x_j^* \right| z_{ij} \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{j \in \mathcal{J}_i} z_{ij} \leq \Gamma_i \\
& 0 \leq z_{ij} \leq 1 \quad \forall j \in \mathcal{J}_i
\end{aligned} \tag{3.26}$$

也即，我们可将模型(3.24)写为

$$\begin{aligned}
\max \quad & \min_{\boldsymbol{z} \in \mathcal{U}} \boldsymbol{p}^\top \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^\top (\boldsymbol{\sigma} \bullet \boldsymbol{z}) \\
\text{s.t.} \quad & \boldsymbol{x}^\top \mathbf{1} = 1, \\
& \boldsymbol{x} \geq \mathbf{0}.
\end{aligned}$$

在该模型中，随机变量 $\boldsymbol{z}$ 代表实际股票回报率和期望值间的偏差。这个随机变量被约束在一个预算不确定集（Budget uncertainty set）$\mathcal{U}$ 中:

$$\mathcal{U} = \left\{ \mathbf{z} | \ 0 \leq z_{ij} \leq 1, \sum_{j \in \mathcal{J}_i} z_{ij} \leq \Gamma_i \right\} \tag{3.27}$$

大部分鲁棒优化问题都可以用优化工具直接求解。我们将在本书第十章介绍相关内容。

# 本章参考文献

**A, Cooper WW Chames**, *Chance-Constrained Programming*, INFORMS, 1959.

**Baringo, Luis and Ana Baringo**, "A Stochastic Adaptive Robust Optimization Approach for the Generation and Transmission Expansion Planning," *IEEE Transactions on Power Systems*, 2017, *PP* (99), 1–1.

**Ben-Tal, A. and A. Nemirovski**, "Robust Convex Optimization," *Mathematics of Operations Research*, 1998, *23* (4), 769–805.

**— and —** , "Robust solutions of uncertain linear programs," *Operations Research Letters*, 1999, pp. 1–13.

**Ben-Tal, Aharon and Arkadi Nemirovski**, "Robust solutions of linear programming problems contaminated with uncertain data," *Mathematical Programming*, 2000, *88* (3), 411–424.

**— , Laurent El Ghaoui, and Arkadi Nemirovski**, *Robust Optimization* 2009.

**Bertsimas, Dimitris and Aurl'lie Thiele**, "Robust and Data-Driven Optimization: Modern Decision Making Under Uncertainty," *Tutorials in Operations Research*, 04 2006, *4*.

**— and Melvyn Sim**, "Robust discrete optimization and network flows," *Mathematical Programming*, 2003, *98* (1-3), 49–71.

**— and —** , "The Price of Robustness," *Operations Research*, 2004, *52* (1), 35–53.

**Bertsimas, Dimitris J., David B. Brown, and Constantine Caramanis**, "Theory and Applications of Robust Optimization," *Siam Review*, 2010, *53* (3), 464–501.

**Bertsimas, Dimitris, Vishal Gupta, and Nathan Kallus**, "Data-driven robust optimization," *Mathematical Programming*, 2018, *167* (2), 235–292.

**Birge, John R and Francois Louveaux**, *Introduction to stochastic programming* 2011.

**Boyd, Stephen and Lieven Vandenberghe**, "Convex optimization," *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2006, *51* (11), 1859–1859.

**E, Bellmann R.**, "Decision Making in a Fuzzy Environment," *Management science*, 1970, (17).

**Ghaoui, Laurent Oustry Francois Lebret El**, "Robust Solutions to Uncertain Semidefinite Programs," *SIAM Journal on Optimization*, 1998, *9(1)*, 33–52.

**Laurent, El Ghaoui I. and Lebret I. Herv**, "Robust Solutions To Least-Squares Problems With Uncertain Data," in "International Workshop on Recent Advances in Total Least Squares Techniques & Errors-in-variables Modeling" International Workshop on Recent Advances in Total Least Squares Techniques & Errors-in-variables Modeling 1997.

**Liu, Baoding**, "Dependent-chance programming: A class of stochastic optimization," *Computers & Mathematics with Applications*, 1997, *34* (12), 89–104.

**M, Mulvey J., Vanderbei R. J, and Zenios S. A**, "Zenios S A . Robust Optimization of Large-Scale Systems," *Operations Research*, 1995, *43* (2), 264–281.

**R, Jiang, Zhang M, and Li G**, "Two-Stage Robust Power Grid Optimization Problem," *Social Science Electronic Publishing*, 2010.

**Soyster, Allen L.**, "Technical Note - Convex Programming with Set-Inclusive Constraints and Applications to Inexact Linear Programming.," *Operations Research*, 1973, *21* (5), 1154–1157.

**刘宝碇**, 随机规划与模糊规划, 清华大学出版社, 1998.

**陈宝林**, 最优化理论与算法, 清华大学出版社, 2005.