

Eléments de théorie des groupes

Résolutions des exercices

Enoncés de Josette Calais.
Résolutions de Oestromemes abonnez vous

Table des matières

1	Structure de groupe	2
2	Classes modulo un sous-groupe	20

STRUCTURE DE GROUPE

1) Soit \mathbb{Z} l'ensemble des entiers rationnels, muni de la loi de composition interne notée $*$, définie par :

$$\begin{aligned} * : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} &\rightarrow \mathbb{Z}, \\ (a, b) &\mapsto a - b. \end{aligned}$$

- a) La loi $*$ est-elle associative ? commutative ?
 b) Vérifier qu'il existe dans $(\mathbb{Z}, *)$ un élément neutre à droite, c'est-à-dire un élément e tel que

$$\forall a \in \mathbb{Z}, a * e = a.$$

e est-il neutre dans $(\mathbb{Z}, *)$?

- c) Existe-t-il, pour tout $a \in \mathbb{Z}$, un symétrique à droite relativement à e , c'est-à-dire un élément a' tel que $a * a' = e$

-
- a) $\forall a, b, c \in \mathbb{Z}, (a * b) * c = a - b - c$, et $a * (b * c) = a - b + c$, la loi n'est pas associative car par exemple on a $(0 * 0) * 1 = -1 \neq 1 = 0 * (0 * 1)$. Et $2 * 1 = 1 \neq -1 = 1 * 2$ montre qu'elle n'est pas non plus commutative.
 b) On vérifie que 0 est un neutre à droite pour $*$: $\forall a \in \mathbb{Z}, a * 0 = a - 0 = a$. Il n'est cependant pas un neutre pour $*$, car $0 * a = -a \neq a$, car on a par exemple $0 * 1 = -1 \neq 1$.
 c) $\forall a \in \mathbb{Z}, a * a' = e \Rightarrow a = a'$. Pour tout élément $a \in \mathbb{Z}$, a est son propre inverse à droite.

2) Soit \mathbb{Q} l'ensemble des nombres rationnels muni de la loi de composition interne notée $*$ définie par :

$$\begin{aligned} * : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} &\rightarrow \mathbb{Q}, \\ (a, b) &\mapsto a + b + ab. \end{aligned}$$

$(\mathbb{Q}, *)$ est-il un groupe ?

La loi $*$ admet 0 comme élément neutre, en effet, $\forall a \in \mathbb{Q}, a * 0 = 0 * a = a$. Cependant, -1 n'est pas symétrisable par cette loi, car on a $\forall a \in \mathbb{Q} a * -1 = a - 1 - a = -1 \neq 0$, donc $(\mathbb{Q}, *)$ n'est pas un groupe.

3) Soit G un ensemble non vide muni d'une loi de composition interne *associative* notée \cdot : on suppose que dans (G, \cdot) les deux conditions suivantes sont vérifiées :

- 1° il existe un élément *neutre à droite* e (voir exercice 1) ;
 2° tout élément $x \in G$ admet un *symétrique à droite*, x' (voir exercice 1).

Démontrer que (G, \cdot) est un groupe ; vérifier, par un contre exemple, que, sans l'associativité de la loi \cdot , ce résultat n'est plus vrai.

Montrons que le symétrique à droite de tout élément a de G est aussi son symétrique à gauche.

$$\begin{aligned} aa' = e &\Rightarrow a'(aa') = a', \\ &\Rightarrow (a'a)a' = a'. \end{aligned}$$

En multipliant des deux cotés par le symétrique à droite de a' , on obtient :

$$a'a = e.$$

Ainsi, le symétrique à droite de a est aussi son symétrique à gauche.

Montrons que le neutre à droite de G est aussi un neutre à gauche, et donc un neutre tout court.

$$\begin{aligned} \forall a \in G, \quad ea &= (aa')a, \\ &= a(a'a), \\ &= a. \end{aligned}$$

Ainsi, le neutre à droite de G est aussi un neutre à gauche.

(G, \cdot) est donc un groupe.

On a vérifié dans l'exercice 1 que pour $(\mathbb{Z}, -)$, la loi n'est pas associative, mais que 0 est un neutre à droite (et non à gauche) et que tout élément est symétrisable.

4) Soit G un ensemble *fini*, non vide, muni d'une loi de composition interne notée \cdot ; on suppose que la loi \cdot est associative et que dans (G, \cdot) tout élément est simplifiable à droite et à gauche.

Démontrer que (G, \cdot) est un groupe.

Comme tout les éléments de G sont simplifiables à droite et à gauche, les applications :

$$\begin{aligned} \tau_g^y : G &\rightarrow G, & \tau_d^y : G &\rightarrow G \\ x &\mapsto yx, & x &\mapsto xy, \end{aligned}$$

Sont injectives. Le cardinal de G étant fini, ces translations sont bijectives.

Ainsi, pour a et b fixé, les équations $a = xb$ et $a = bx$ ont chacune une unique solution.

En particulier, pour chaque élément a de G , il existe des uniques e_d^a et e_g^a tel que $a = e_d^a a$ et $a = a e_g^a$.

Vérifions qu'ils sont égaux :

$$\begin{aligned} \forall a \in G, \quad aa &= aa, \\ a(e_g^a a) &= (a e_d^a) a, \\ a e_g^a a &= a e_d^a a, \\ a e_g^a &= a e_d^a \text{ (Simplification à droite),} \\ e_g^a &= e_d^a \text{ (Simplification à gauche).} \end{aligned}$$

Vérifions maintenant que tout les éléments ont le même neutre :

$$\begin{aligned} \forall a, b \in G, \quad ab &= ab, \\ (a e^a) b &= a(e^b b), \\ a e^a b &= a e^b b, \\ a e^a &= a e^b \text{ (Simplification à droite),} \\ e^a &= e^b \text{ (Simplification à gauche).} \end{aligned}$$

Ainsi, dans G , il existe un unique élément neutre e .

Reste à montrer que chaque élément a admet un unique inverse a^{-1} .

On sait que les équations $e = ax$ et $e = xa$ ont une unique solution chacune, notées respectivement a_g^* et a_d^* . Vérifions qu'il est le même des deux cotés, et est donc l'inverse de a .

$$\begin{aligned} \forall a \in G, \quad a &= a, \\ a(a_g^* a) &= (a a_d^*) a, \\ a a_g^* a &= a a_d^* a, \\ a_g^* &= a_d^* \text{ en simplifiant à droite et à gauche.} \end{aligned}$$

Chaque élément possède un unique inverse, et G possède un élément neutre pour la loi associative \cdot . Ainsi, (G, \cdot) est un groupe.

5) Soit G un groupe d'élément unité e vérifiant la condition (C) :

$$\forall x \in G, x^2 = e.$$

- a) Donner au moins un exemple de groupe, non réduit à l'élément unité, vérifiant la condition (C).
- b) Démontrer que tout groupe vérifiant la condition (C) est abélien.

a) Le groupe $\left(\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}, +\right)$ vérifie de façon évidente la condition.

b) la condition (C) implique que chaque élément est son propre inverse, ainsi :

$$\begin{aligned} \forall a, b \in G, \quad (ab)^2 &= e, \\ abab &= e, \\ bab &= a, \\ ab &= ba. \end{aligned}$$

Tout groupe vérifiant la propriété est donc abélien.

6) G étant un groupe, prouver que l'application $f: \begin{matrix} G & \rightarrow & G, \\ x & \mapsto & x^{-1}. \end{matrix}$ est une permutation de G et que f

est un automorphisme si et seulement si G est abélien.

Chaque élément d'un groupe possède un unique inverse, l'application est donc trivialement bijective.

Supposons que G soit abélien :

$$\begin{aligned} \forall a, b \in G, \quad f(ab) &= (ab)^{-1}, \\ &= b^{-1}a^{-1}, \\ &= a^{-1}b^{-1}, \\ &= f(a)f(b). \end{aligned}$$

Donc G abélien $\Rightarrow f$ est un automorphisme.

Supposons que f soit un automorphisme :

$$\begin{aligned} \forall a, b \in G, \quad f(ab) &= f(a)f(b) \Rightarrow b^{-1}a^{-1} = a^{-1}b^{-1}, \\ &\Rightarrow ab = ba \text{ en appliquant } f \text{ des deux côtés.} \end{aligned}$$

ainsi, f est un automorphisme si et seulement si G est abélien.

7) Montrer que si G est un groupe fini d'ordre pair, il existe au moins un élément $x \neq e$, dans G , tel que $x^2 = e$.

Soit G d'ordre $2n$, définissons la relation d'équivalence :

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x = y \text{ ou } x = y^{-1}.$$

Soit $\{x_i\}_{i \in I}$ une famille de représentants des classes modulo \mathcal{R} . pour tout $\bar{x} \in G/\mathcal{R}$ a $1 \leq |\bar{x}| \leq 2$. le groupe se partitionne en k classes d'un élément (correspondant aux éléments qui sont leur propre inverse) et l classes de deux éléments de la forme $\{x, x^{-1}\}$, et on a donc :

$$2n = k + 2l$$

Pour respecter la parité, il faut donc que k soit pair, et sachant que $k > 1$, qu'il existe au moins un élément différent du neutre tel que $x^2 = e$.

8) Dans l'ensemble des entiers \mathbb{Z} , on pose $U = \{-1, 1\}$.

a) Vérifier que U est un groupe relativement à la multiplication des entiers, donc un sous-groupe de (\mathbb{Q}^*, \times) .

b) Montrer que le groupe U est isomorphe au groupe $\left(\frac{\mathbb{Z}}{(2)}, +\right)$.

a) On a $U \subset \mathbb{Z}$. On vérifie aussi que, $\forall x, y \in U$, $xy \in U$ et $x^{-1} \in U$, c'est donc un sous-groupe de (\mathbb{Q}^*, \times) .

b) On pose l'application :

$$\begin{aligned} \varphi : \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} &\rightarrow U, \\ x &\mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x = \bar{0} \\ -1 & \text{si } x = \bar{1} \end{cases}. \end{aligned}$$

On vérifie de façon exhaustive que c'est un morphisme :

$$\begin{aligned} \varphi(\overline{0+0}) &= 1 = 1 \times 1 = \varphi(\bar{0})\varphi(\bar{0}) \\ \varphi(\overline{0+1}) &= -1 = 1 \times -1 = \varphi(\bar{0})\varphi(\bar{1}) \\ \varphi(\overline{1+0}) &= -1 = -1 \times 1 = \varphi(\bar{1})\varphi(\bar{0}) \\ \varphi(\overline{1+1}) &= 1 = -1 \times -1 = \varphi(\bar{1})\varphi(\bar{1}) \end{aligned}$$

Elle est aussi bijective par définition, ainsi, U est isomorphe à $\left(\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}, +\right)$

9) Soit \mathbf{D} le sous ensemble de \mathbb{Q} formé par les nombres décimaux :

$$\mathbf{D} = \left\{ \frac{a}{10^n}; a \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Prouvez que \mathbf{D} est un sous-groupe de $(\mathbb{Q}, +)$.

De façon évidente, $\mathbf{D} \subset \mathbb{Q}$. Soit $\frac{a}{10^n}, \frac{b}{10^m} \in \mathbf{D}$,

$$\frac{a}{10^n} - \frac{b}{10^m} = \frac{10^m a - 10^n b}{10^{n+m}}.$$

On a $10^m a - 10^n b \in \mathbb{Z}$ car $a, b \in \mathbb{Z}$, et $n + m \in \mathbb{N}$, donc $\frac{a}{10^n} - \frac{b}{10^m} \in \mathbf{D}$, ainsi $(\mathbf{D}, +)$ est un sous groupe de $(\mathbb{Q}, +)$

10) Soit, dans \mathbb{N} , un nombre premier p . On pose :

$$\mathbb{Q}_p = \left\{ \frac{a}{p^n}; a \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

a) Vérifier que \mathbb{Q}_p est un sous-groupe de $(\mathbb{Q}, +)$ et que $\mathbb{Q}_p = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \langle \frac{1}{p^n} \rangle$.

b) Montrer que l'application $\varphi : \mathbb{Q}_p \rightarrow \mathbb{Q}_p$, est une permutation de \mathbb{Q}_p . L'application φ est-elle un automorphisme de $(\mathbb{Q}_p, +)$?

a) $\mathbb{Q}_p \in \mathbb{Q}$, et soit $\frac{a}{p^n}, \frac{b}{p^m} \in \mathbb{Q}_p$:

$$\frac{a}{p^n} - \frac{b}{p^m} = \frac{p^m a - p^n b}{p^{n+m}}.$$

On a $p^m a - p^n b \in \mathbb{Z}$, et $n + m \in \mathbb{N}$, donc $\frac{a}{p^n} - \frac{b}{p^m} \in \mathbb{Q}_p$, ainsi $(\mathbb{Q}_p, +)$ est un sous groupe de $(\mathbb{Q}, +)$. De plus :

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \langle \frac{1}{p^n} \rangle = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left\{ \frac{a}{p^n}; a \in \mathbb{Z} \right\} = \left\{ \frac{a}{p^n}; a \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\} = \mathbb{Q}_p.$$

b) φ est clairement injective. De plus, comme $\frac{a}{p^n} = p \frac{a}{p^{n+1}}$, on en déduit que φ est surjective, donc que c'est une permutation.

$$\begin{aligned} \forall x, y \in \mathbb{Q}_p, \quad \varphi(x + y) &= p(x + y), \\ &= px + py, \\ &= \varphi(x) + \varphi(y). \end{aligned}$$

ce qui prouve que φ est un morphisme, et donc un automorphisme.

11) Soit p un nombre premier dans \mathbb{N} . Vérifier les propriétés suivantes :

- $\{a + b\sqrt{p}; (a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}\} < (\mathbb{R}, +)$
- $\{a + b\sqrt{p}; a \text{ et } b \text{ dans } \mathbb{Q} \text{ et non simultanément nuls}\} < (\mathbb{R}^*, \times)$
- $\{a + ib\sqrt{p}; (a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}\} < (\mathbb{C}, +)$
- $\{a + ib\sqrt{p}; a \text{ et } b \text{ dans } \mathbb{Q} \text{ et non simultanément nuls}\} < (\mathbb{C}^*, \times)$

On note que si p n'est pas un carré parfait, \sqrt{p} est irrationnel, chaque élément du groupe s'écrit de façon unique et tout se passe nickel.

Posons $G = \{a + b\sqrt{p}; (a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}\}$

De façon évidente, $G \subset \mathbb{R}$. Soit $a + b\sqrt{p}, a' + b'\sqrt{p} \in G$:

$$a + b\sqrt{p} - (a' + b'\sqrt{p}) = (a - a') + (b - b')\sqrt{p} \in G$$

Et idem pour les 3 autres flemmes.

12) On pose :

$$\Gamma_\infty = \{z \in \mathbb{C}; \exists n \in \mathbb{N}, z^n = 1\}.$$

Vérifier que Γ_∞ est un sous-groupe de (\mathbb{C}^*, \times) .

$\Gamma_\infty \subset \mathbb{C}$, soit $z_1, z_2 \in \Gamma_\infty$, il existe $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tel que $z_1^{n_1} = z_2^{n_2} = 1$.

On constate que $(z_1 z_2^{-1})^{n_1 n_2} = (z_1^{n_1})^{n_2} (z_2^{n_2})^{-n_1} = 1$, et donc $z_1 (z_2)^{-1} \in \Gamma_\infty$, donc Γ_∞ est un sous-groupe de (\mathbb{C}^*, \times) .

13) A tout nombre réel a on associe l'application

$$\begin{aligned} \tau_a : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}, \\ x &\mapsto a + x. \end{aligned}$$

Justifier la propriété :

$T = \{\tau_a; a \in \mathbb{R}\}$ est un sous-groupe du groupe symétrique $S_{\mathbb{R}}$ et le groupe T est isomorphe au groupe $(\mathbb{R}, +)$.

Lemme (1.77)

14) On considère les groupes multiplicatifs \mathbb{R}^* , \mathbb{R}_+^* et \mathbb{C}^* (voir exemple (1.29)) et les applications :

$$f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}_+^*, \quad \text{où } |x| \text{ est la valeur absolue de } x.$$

$$x \mapsto |x|.$$

et $g: \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{R}_+^*$, où $|z|$ est le module de z .

$$z \mapsto |z|.$$

Vérifier que f et g sont des épimorphismes de groupes.

Déterminer les noyaux de f et g .

Soit x un élément de \mathbb{R}_+^* , on a $f(x) = x$, donc f est surjective, vérifions que c'est un morphisme :

$$\begin{aligned} \forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f(xy) &= |xy|, \\ &= |x||y|, \\ &= f(x)f(y). \end{aligned}$$

C'est donc un épimorphisme de groupe, déterminons son noyau :

$$\begin{aligned} \text{Ker } f &= \{x \in \mathbb{R}^*, f(x) = 1\}, \\ &= \{x \in \mathbb{R}^*, |x| = 1\}, \\ &= \{-1, 1\}. \end{aligned}$$

Soit x un élément de \mathbb{R}_+^* , on a $g(x) = x$, donc g est surjective, vérifions que c'est un morphisme :

$$\begin{aligned} \forall x, y \in \mathbb{R}, \quad g(xy) &= |xy|, \\ &= |x||y|, \\ &= g(x)g(y). \end{aligned}$$

C'est donc un épimorphisme de groupe, déterminons son noyau :

$$\begin{aligned} \text{Ker } g &= \{x \in \mathbb{C}^*, f(x) = 1\}, \\ &= \{x \in \mathbb{C}^*, |x| = 1\}, \\ &= \mathbb{U}. \end{aligned}$$

15) Démontrer que l'application $\lambda: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$, est un isomorphisme du groupe $(\mathbb{R}, +)$ sur le groupe

$$(x \mapsto 10^x, \times).$$

Vérifions que c'est une morphisme :

$$\begin{aligned} \forall a, b \in \mathbb{R}, \quad \lambda(a+b) &= 10^{a+b}, \\ &= 10^a 10^b, \\ &= \lambda(a)\lambda(b). \end{aligned}$$

L'injectivité :

$$x \in \text{Ker } \lambda \Rightarrow 10^x = 1 \Rightarrow x = 0.$$

La surjectivité :

$$\forall y \in \mathbb{R}_+^*, \quad \lambda(\log_{10} y) = y.$$

Donc λ est une isomorphisme de groupe.

16)

a) Le centre d'un groupe G étant désigné par $Z(G)$, démontrer la propriété :

$$H \leq G \Rightarrow Z(G) \cap H \leq Z(H)$$

b) G et G' étant deux groupes, si f est un épimorphisme de G sur G' , prouver que l'on a : $f(Z(G)) \leq Z(G')$

a) Un élément de H qui commute avec tout les éléments de G commute aussi avec tout les éléments de H , d'où $Z(G) \cap H \subset Z(H)$. De plus, l'intersection de sous-groupes est un sous-groupe, donc $Z(G) \cap H \leq Z(H)$.

b) Soit $y \in f(Z(G))$, il existe $x \in Z(G)$ tel que $y = f(x)$. f étant surjective, pour tout $z \in G'$, il existe $w \in G$ tel que $z = f(w)$. On a donc :

$$yz = f(x)f(w) = f(xw) = f(wx) = f(w)f(x) = zy.$$

D'où $y \in Z(G')$, et comme $f(Z(G))$ est un sous-groupe de G' inclus dans $Z(G')$, on a bien $f(Z(G)) \leq Z(G')$.

17) Soit S une partie non vide d'un groupe G ; on pose :

$$C_G(S) = \{g \in G; gx = xg, \forall x \in S\}.$$

a) Vérifier que $C_G(S)$ est un sous-groupe de G .

$C_G(S)$ est appelé le *centralisateur* de S dans G . Si $S = \{x\}$, on le note $C_G(x)$ et on l'appelle le *centralisateur* de x dans G .

b) $Z(G)$ étant le centre de G , démontrer la relation : $\bigcap_{x \in G} C_G(x) = Z(G)$

c) Pour $x \in G$, posons $H = C_G(x)$; Vérifier que $x \in Z(H)$.

a) Soit $h, g \in C_G(S)$, pour tout $x \in S$, on a :

$$(hg^{-1})x = hxg^{-1} = xhg^{-1}.$$

Donc $\forall h, g \in C_G(S)$, $hg^{-1} \in C_G(S)$, c'est donc bien un sous-groupe de G .

b)

$$g \in Z(G) \Leftrightarrow \forall x \in G, gx = xg \Leftrightarrow \forall x \in G, g \in C_G(x) \Leftrightarrow g \in \bigcap_{x \in G} C_G(x)$$

c)

$$H = C_G(x) \Leftrightarrow \forall h \in H, hx = xh \Leftrightarrow x \in Z(H).$$

18) Soit A, B, C trois parties non vides d'un groupe G .

Soit $H = \langle A, B \rangle$ le sous-groupe de G engendré par $A \cup B$.

Si $K = \langle A, B, C \rangle$ est le sous-groupe de G engendré par $A \cup B \cup C$, démontrer que $K = \langle H, C \rangle$.

(j'ai repris la demo d'un mec, qui est pas complete je crois, la mienne a environ 200 indices avec des sommes donc chiant a taper)

Soit \mathcal{H}_S l'ensemble des sous groupe de G contenant S . Par définition,

$$H = \bigcap_{L \in \mathcal{H}_{A \cup B}} L, \quad K = \bigcap_{L \in \mathcal{H}_{A \cup B \cup C}} L.$$

Montrons que $\mathcal{H}_{A \cup B \cup C} = \mathcal{H}_{H \cup C}$

Soit $L \in \mathcal{H}_{A \cup B \cup C}$, comme $A \cup B \subset L$, on a $L \in \mathcal{H}_{A \cup B}$, et donc $L \in \mathcal{H}_{H \cup C}$.

De façon réciproque, soit $L \in \mathcal{H}_{H \cup C}$, on a $A \cup B \subset H \subset L$, donc $L \in \mathcal{H}_{A \cup B \cup C}$.

Ainsi, on a $\mathcal{H}_{A \cup B \cup C} = \mathcal{H}_{H \cup C}$, et donc que $K = \langle H, C \rangle$.

19) Démontrer que le groupe des quaternions (exemple (1.16)) est engendré par les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

Soit le groupe des quaternions :

$$\left\{ \begin{array}{l} q_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, q_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, q_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, q_4 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ q_5 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, q_6 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, q_7 = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, q_8 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \end{array} \right\}$$

On peut exprimer tout les q_i en fonction de A, B :

- $q_1 = A^0$
- $q_2 = A^2 = B^2$
- $q_3 = A$
- $q_4 = q_2 A = A^3$
- $q_5 = B$
- $q_6 = q_2 B = B^3$
- $q_7 = BA$
- $q_8 = B^3 A$

20) Dans l'ensemble $M_2(\mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre 2 sur \mathbb{R} , on considère le sous-ensemble Γ tel que :

$$\Gamma = \left\{ \begin{pmatrix} x & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R}^* \right\}.$$

Démontrer que Γ est un groupe par rapport à la multiplication des matrices, mais que ce groupe n'est pas un sous-groupe de $GL_2(\mathbb{R})$.

Vérifier que le groupe Γ est isomorphe au groupe (\mathbb{R}^*, \times) .

Soit $\begin{pmatrix} x & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \Gamma$:

$$\begin{pmatrix} x & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xy & xy \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \Gamma.$$

De plus, pour tout $\begin{pmatrix} x & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \Gamma$, son inverse $\begin{pmatrix} 1/x & 1/x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \Gamma$, et $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est le neutre pour la multiplication des matrices dans cet ensemble.

On sait la loi associative, ainsi, Γ est un groupe pour la multiplication des matrices.

Ce n'est cependant pas un sous-groupe de $GL_2(\mathbb{R})$, car elles ne sont pas inversibles, ayant toutes un déterminant nul.

On vérifie directement que $\varphi : \mathbb{R}^* \rightarrow \Gamma$, est un isomorphisme de groupe.

$$x \mapsto \begin{pmatrix} x & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

21) Soit $n > 1$ dans \mathbb{N} et $\left(\frac{\mathbb{Z}}{(n)}, +\right)$ le groupe des classes de congruence modulo n . On considère la correspondance μ définie par :

$$\begin{aligned} \mu : \frac{\mathbb{Z}}{(n)} \times \frac{\mathbb{Z}}{(n)} &\rightarrow \frac{\mathbb{Z}}{(n)}, \\ (\bar{x}, \bar{y}) &\mapsto \overline{xy}. \end{aligned}$$

- a) Prouver que la correspondance μ est une application [c'est-à-dire que : $(\overline{x'} = \overline{x}$ et $\overline{y'} = \overline{y} \Rightarrow \overline{x'y'} = \overline{xy})$].
En déduire que l'on peut définir dans $\frac{\mathbb{Z}}{(n)}$ une multiplication telle que $\overline{x} \cdot \overline{y} = \overline{x \cdot y}$.
Montrer alors que $\frac{\mathbb{Z}}{(n)}$ est un anneau unitaire. et commutatif.
- b) Soit, dans \mathbb{N} , un nombre premier p . On désigne par G_p l'ensemble des éléments non nuls de $\frac{\mathbb{Z}}{(p)}$.
Prouver, en utilisant le résultat de l'exercice 4, que G_p est un groupe par rapport à la multiplication définie dans $\frac{\mathbb{Z}}{(p)}$.
En conclure que $\frac{\mathbb{Z}}{(p)}$ est un corps.
- c) Vérifier que si n n'est pas premier $\frac{\mathbb{Z}}{(p)}$ n'est pas un corps.

- a) Soit $x, y, x', y' \in \mathbb{Z}$ tel que $\overline{x} = \overline{x'}$ et $\overline{y} = \overline{y'}$. On rappelle que :

$$\begin{aligned}\overline{x} = \overline{x'} &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, x = x' + kn, \\ \overline{y} = \overline{y'} &\Leftrightarrow \exists k' \in \mathbb{Z}, y = y' + k'n.\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}\overline{xy} &= \overline{(x' + kn)(y' + k'n)}, \\ &= \overline{x'y' + x'k'n + y'kn + kk'n^2}, \\ &= \overline{x'y' + n(x'k' + y'k + kk'n)}, \\ &= \overline{x'y'}.\end{aligned}$$

la multiplication ainsi définie est associative, commutative, de neutre $\overline{1}$, et est distributive par rapport à l'addition. $\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$ est donc un anneau unitaire commutatif.

- b) L'ensemble G_p est fini, est dans le a) on a montré que la loi de multiplication associée est associative. Montrons que chaque élément est simplifiable à droite et à gauche. Soit $\overline{a}, \overline{x}, \overline{y} \in G_p$ tel que $\overline{ax} = \overline{ay}$. On a $\overline{ax} = \overline{ay}$, autrement dit, que $ax - ay = a(x - y)$ est un multiple de p . Comme p est un nombre premier ne divisant pas a par hypothèse, $x - y$ est un multiple de p d'après le lemme d'Euclide, et donc $\overline{x} = \overline{y}$. Par commutativité, tout les éléments sont simplifiable à droite et à gauche. D'après l'exo 4, G_p est un groupe. De plus, tout élément non nul de $\frac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}}$ est inversible, donc c'est un corps.
- c) Chapitre 3.

22) Vérifier que

$$\Gamma = \left\{ I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \gamma_1 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \gamma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \gamma_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \gamma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \gamma_5 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

est un sous-groupe de $GL(2, \mathbb{R})$ isomorphe au groupe $GL\left(2, \frac{\mathbb{Z}}{(2)}\right)$.

Ecrire la table de multiplication du groupe Γ ; en déduire que Γ est isomorphe au groupe symétrique S_3 .

Toutes les matrices de cet ensemble ont pour déterminant 1, la multiplication des matrices est associative, et $I \in \Gamma$. Posons dès maintenant la table de multiplication de Γ :

\times	I	γ_1	γ_2	γ_3	γ_4	γ_5
I	I	γ_1	γ_2	γ_3	γ_4	γ_5
γ_1	γ_1	γ_2	I	γ_5	γ_3	γ_4
γ_2	γ_2	I	γ_1	γ_4	γ_5	γ_3
γ_3	γ_3	γ_4	γ_5	I	γ_1	γ_2
γ_4	γ_4	γ_5	γ_3	γ_2	I	γ_1
γ_5	γ_5	γ_3	γ_4	γ_1	γ_2	I

On remarque que chaque élément possède un unique inverse. Γ est donc bien un sous-groupe de $GL(2, \mathbb{R})$.

On constate que ce groupe se décompose en deux sous-groupes, $H = \{I, \gamma_1, \gamma_2\}$ et $K = \{I, \gamma_4\}$, tel que $\Gamma = HK$. D'où l'isomorphisme évident (aka, flemme de rédiger) avec $GL(2, \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}})$ et S_3 .

23)

a) Démontrer les résultats suivants :

$$\Gamma_1 = \left\{ I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \gamma_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \gamma_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

est un sous-groupe de $GL(2, \mathbb{R})$.

$$\Gamma_2 = \{1, i, -1, -i\} \text{ où } i^2 = -1,$$

est un sous-groupe de (\mathbb{C}^*, \times) .

$$\Gamma_3 = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\}$$

sous-ensemble de $\frac{\mathbb{Z}}{(5)}$ est un groupe par rapport à la multiplication définie dans $\frac{\mathbb{Z}}{(5)}$.

b) Prouver que $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ sont trois groupes isomorphes. Sont-ils cycliques ?

De façon immédiate, on a que $\Gamma_1 \subset GL(2, \mathbb{R})$, $\Gamma_2 \subset \mathbb{C}^*$ et $\Gamma_3 \subset \frac{\mathbb{Z}}{5\mathbb{Z}}$. Ecrivons leur table de Cayley pour vérifier la stabilité et l'existence d'un unique inverse.

\times	I	γ_1	γ_2	γ_3	\times	1	i	-1	$-i$	\times	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
I	I	γ_1	γ_2	γ_3	1	1	i	-1	$-i$	$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
γ_1	γ_1	γ_2	γ_3	I	i	i	-1	$-i$	1	$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$	$\bar{3}$
γ_2	γ_2	γ_3	I	γ_1	-1	-1	$-i$	1	i	$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
γ_3	γ_3	I	γ_1	γ_2	$-i$	$-i$	1	i	-1	$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

On remarque que ce sont tous des groupes cyclique d'ordre 4, avec $\Gamma_1 = \langle \gamma_1 \rangle$, $\Gamma_2 = \langle i \rangle$ et $\Gamma_3 = \langle \bar{2} \rangle$, ils sont donc tous isomorphes entre eux.

24)

a) Montrer que :

$$K_1 = \left\{ I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$$

est un sous-groupe de $GL(2, \mathbb{R})$ et que $K_2 = \{\bar{1}, \bar{3}, \bar{5}, \bar{7}\}$, sous-ensemble de $\frac{\mathbb{Z}}{(8)}$, est un groupe par rapport à la multiplication définie dans $\frac{\mathbb{Z}}{(8)}$.

b) Vérifier que ces deux groupes sont isomorphes. Ces groupes sont-ils isomorphes au groupe de Klein ?

- a) On sait la multiplication de matrice associative, et que I est le neutre pour cette opération. Vérifions la fermeture et l'inversibilité :

\times	I	A	B	C
I	I	A	B	C
A	A	I	C	B
B	B	C	I	A
C	C	B	A	I

On a bien K_1 est un sous-groupe de $GL(2, \mathbb{R})$. Faisons pareil pour K_2 , dont on sait la loi associative :

\times	$\bar{1}$	$\bar{3}$	$\bar{5}$	$\bar{7}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{3}$	$\bar{5}$	$\bar{7}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{1}$	$\bar{7}$	$\bar{5}$
$\bar{5}$	$\bar{5}$	$\bar{7}$	$\bar{1}$	$\bar{3}$
$\bar{7}$	$\bar{7}$	$\bar{5}$	$\bar{3}$	$\bar{1}$

On vérifie bien que K_2 est un groupe.

- b) Il n'existe à isomorphisme près que 2 groupes d'ordre 4, $\frac{\mathbb{Z}}{4\mathbb{Z}}$ et $\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$. Comme il n'existe pas d'élément d'ordre 4 dans K_1 ou K_2 , on en déduit qu'ils sont isomorphes entre eux et au groupe de Klein.

25)

- a) Montrer que le groupe symétrique S_3 , les groupes Γ_2 et Γ_3 de l'exercice 23 et le groupe K_2 de l'exercice 24 admettent chacun une représentation matricielle fidèle de degré 2 sur \mathbb{R} .
- b) En associant à tout nombre complexe non nul $a+ib$ la matrice $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, vérifier que le groupe multiplicatif \mathbb{C}^* admet aussi une représentation fidèle de degré 2 sur \mathbb{R} .

- a) On a démontré que $\Gamma_1 \simeq \Gamma_2 \simeq \Gamma_3$. Γ_1 étant un sous-groupe de $GL(2, \mathbb{R})$, Γ_2 et Γ_3 admettent un morphisme bijectif pour un sous-groupe $GL(2, \mathbb{R})$, qui est aussi un morphisme injectif dans $GL(2, \mathbb{R})$. En appliquant le même raisonnement pour K_2 et S_3 , on trouve que ces 4 groupes admettent une représentation matricielle de degré 2 sur \mathbb{R} .
- b) Posons l'application φ tel que :

$$\varphi : \mathbb{C}^* \rightarrow GL(2, \mathbb{R}),$$

$$a + ib \mapsto \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

Vérifions tout d'abord que toute image est bien dans $GL(2, \mathbb{R})$:

$$\forall a + ib \in \mathbb{C}, \det(\varphi(a + ib)) = a^2 + b^2 \neq 0.$$

Vérifions que c'est un morphisme :

$$\begin{aligned} \forall a + ib, c + id \in \mathbb{C}^*, \varphi((a + ib) + (c + id)) &= \varphi((a + c) + i(b + d)), \\ &= \begin{pmatrix} a + c & -(b + d) \\ b + d & a + c \end{pmatrix}, \\ &= \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix}, \\ &= \varphi(a + ib)\varphi(c + id). \end{aligned}$$

Enfin, vérifions son injectivité :

$$\begin{aligned}\text{Ker } (\varphi) &= \{a + ib \in C^*, \varphi(a + ib) = I_2\}, \\ &= \{a + ib \in C^*, a = 1 \wedge b = 0\}, \\ &= \{1\}.\end{aligned}$$

Ainsi, le groupe multiplicatif C^* admet une représentation matricielle de degré 2 sur \mathbb{R} .

26) Soit P le plan affine euclidien. Si f est une isométrie du plan P , on dit qu'un point A est fixe pour f si $f(A) = A$.

On désigne par $\mathcal{I}(2)$ l'ensemble des isométries du plan P .

Si Δ est une droite de P , on note s_Δ la symétrie du plan par rapport à Δ ; $s_\Delta : \begin{matrix} P & \rightarrow & P, \\ A & \mapsto & A'. \end{matrix}$, A' est tel

que Δ est la médiatrice de AA' .

a) Vérifier les propriétés suivantes :

- L'identité de P , notée id_P , appartient à $\mathcal{I}(2)$.
- quelle que soit la droite Δ , s_Δ appartient à $\mathcal{I}(2)$ et $s_\Delta \circ s_\Delta = id_P$.
- Si f_1 et f_2 sont dans $\mathcal{I}(2)$, alors $f_2 \circ f_1 \in \mathcal{I}(2)$; $f_2 \circ f_1$ sera appelé le produit de f_1 et f_2 dans $\mathcal{I}(2)$.

b) Soit $f \in \mathcal{I}(2)$; montrer que :

- si f a deux points fixes distincts A et B , alors tout point de la droite AB est fixe pour f ;
- Si f a trois points fixes, A , B , C non alignés, alors $f = id_P$.

c) Démontrer que toute isométrie $f \in \mathcal{I}(2)$ est le produit de 0, 1, 2, ou 3 symétries.

d) Prouver que $\mathcal{I}(2)$ est un sous-groupe du groupe symétrique S_P et que $\mathcal{I}(2)$ est non-abélien.

e) A tout vecteur v de l'espace vectoriel \mathbb{R}^2 on associe la translation de vecteur v du plan affine P , notée t_v . Montrer à l'aide de (c) que $t_v \in \mathcal{I}(2)$ et que $\mathcal{T}(P) = \{t_v; v \in \mathbb{R}^2\}$ est un sous-groupe abélien de $\mathcal{I}(2)$, isomorphe à $(\mathbb{R}^2, +)$.

f) Soit O un point du plan P , pour $\alpha \in \mathbb{R}$; on note $r_{O,\alpha}$ la rotation du plan P de centre O et d'angle α .

Montrer à l'aide de (c) que $r_{O,\alpha} \in \mathcal{I}(2)$. $\mathcal{R}(P, O)$ désignant l'ensemble de toutes les rotations $R_{O,\alpha}$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$, vérifier que $\mathcal{R}(P, O) = \{r_{O,\alpha}; 0 \leq \alpha < 2\pi\}$ et que $\mathcal{R}(P, O)$ est un sous-groupe abélien de $\mathcal{I}(2)$.

27) Notons \mathbb{C} le plan complexe, c'est-à-dire le plan affine euclidien \mathbb{R}^2 rapporté à un système d'axes ortho-normés Oxy et dont tout point $M(x, y)$ est considéré comme l'image du nombre complexe $z = x + iy$.

A toute famille de 4 nombres complexes (a, b, c, d) telle que $ad - bc \neq 0$, on associe l'application :

$$\begin{aligned}f : \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{C}, \\ z &\mapsto \frac{az + b}{cz + d}, \text{ où } z \in \mathbb{C}..\end{aligned}$$

On remarque que si $c \neq 0$, le point $-\frac{d}{c}$ n'a aucune image par f ; d'autre part le point $\frac{a}{c}$ n'est l'image d'aucun point de \mathbb{C} . Pour remédier à ces difficultés, on rajoute au plan complexe un point dit à l'infini et noté ∞ .

On pose $\tilde{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, pour $c \neq 0$, $f\left(-\frac{d}{c}\right) = \infty$ et $f(\infty) = \frac{a}{c}$.

Une application telle que f est appelée une homographie du plan complexe.

a) Montrer que toute homographie f est une permutation de $\tilde{\mathbb{C}}$.

b) Démontrer que l'ensemble \mathcal{H} des homographies du plan complexe est un sous-groupe du groupe symétrique $S_{\tilde{\mathbb{C}}}$.

c) En considérant le cas où $c = 0$, prouver que \mathcal{H} contient comme sous-groupes le groupe des similitudes et translations du plan complexe.

d) Vérifier que l'homographie $z \mapsto \frac{1}{z}$ est le produit (commutatif) de l'inversion de centre O et de puissance 1. et de la symétrie par rapport à l'axe Ox .

- e) Démontrer que toute homographie f du plan complexe conserve les angles et leurs orientation, ce que l'on exprime en disant que f est une transformation conforme du plan.
 f) Prouver que les homographies :

$$f_1 : z \mapsto z; \quad f_2 : z \mapsto -z; \quad f_3 : z \mapsto \frac{1}{z}; \quad f_4 : z \mapsto -\frac{1}{z}$$

forment un sous-groupe de \mathcal{H} isomorphe au groupe de Klein.

- g) Prouver que les homographies :

$$g_1 : z \mapsto z; \quad g_2 : z \mapsto \frac{1}{1-z}; \quad g_3 : z \mapsto \frac{z-1}{z},$$

$$g_4 : z \mapsto \frac{1}{z}; \quad g_5 : z \mapsto 1-z; \quad g_6 : z \mapsto \frac{z}{z-1}$$

forment un sous-groupe de \mathcal{H} isomorphe au groupe symétrique S_3 .

- a) Vérifions l'injectivité de f :

$$\begin{aligned} \forall x, y \in \tilde{\mathbb{C}}, \quad f(x) = f(y) &\Rightarrow \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{ay+b}{cy+d}, \\ &\Rightarrow (ax+b)(cy+d) = (ay+b)(cx+d), \\ &\Rightarrow acxy + adx + bcy + bd = acxy + ady + bcx + bd, \\ &\Rightarrow adx + bcy = ady + bcx, \\ &\Rightarrow ad(x-y) + bc(y-x) = 0, \\ &\Rightarrow (ad-bc)(x-y) = 0, \\ &\Rightarrow x = y, \text{ car on sait que } ad-bc \neq 0. \end{aligned}$$

Vérifions la surjectivité, $\forall w \in \mathbb{C}^*$, on vérifie que $f\left(\frac{wd-b}{-wc+a}\right) = w$. avec par définition quand c est nul $f\left(\frac{-d}{c}\right) = \infty$ et $f(\infty) = \frac{a}{c}$.

- b) L'ensemble \mathcal{H} est non vide, l'application identité $f(z) = z$ étant une homographie de paramètre $\{1, 0, 0, 1\}$. De plus, chaque homographie est inversible, et son inverse est aussi une homographie. Vérifions que cet ensemble est stable par composition, soit f une homographie de paramètres $\{a, b, c, d\}$ et g une homographie de paramètres $\{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$:

$$(f \circ g)(z) = \frac{(a\alpha + b\gamma)z + (a\beta + b\delta)}{(c\alpha + d\gamma) + c\beta + d\delta}.$$

Avec $(a\alpha + b\gamma)(c\beta + d\delta) - (a\beta + b\delta)(c\alpha + d\gamma) \neq 0$, donc \mathcal{H} est stable par composition.

La composition de fonctions étant associative, on conclut que \mathcal{H} est un sous-groupe de $\tilde{\mathbb{C}}$.

- c) Le groupe des similitudes de \mathbb{C} étant les application de la forme $az + b$ avec $a \in \mathbb{C}^*, b \in \mathbb{C}$, on constate que ce sont les homographie de paramètres $\{a, b, 0, 1\}$.

Les translations étant des similitudes où $a = 1$, on vérifie immédiatement qu'elles sont incluses dans le groupe des homographies.

- d) L'inversion de centre O est $z \mapsto \frac{1}{\bar{z}}$, et la symétrie par Ox $z \mapsto \bar{z}$. Le produit des deux est donc l'homographie $z \mapsto \frac{1}{z}$.

- e) Quand $c = 0$, les homographies sont des similitudes, qui préservent les angles et leurs orientations. Soit f une homographie de paramètres $\{a, b, c, d\}$, avec $c \neq 0$. On peut écrire

$$a + bz = \frac{a}{c}(cz + d) - \frac{ad - bc}{c},$$

ce qui permet de réécrire f comme :

$$f = \frac{a}{c} - \frac{ad - bc}{c^2} \frac{1}{z + \frac{d}{c}}.$$

On peut décomposer f comme une composition de :

- $t : z \mapsto z + \frac{d}{c}$, une translations,
- $i : z \mapsto \frac{1}{\bar{z}}$, une inversion de centre O et de puissance 1,
- $c : z \mapsto \bar{z}$, une symétrie selon l'axe Ox,
- $s : z \mapsto -\frac{ad - bc}{c^2}z + \frac{a}{c}$ une similitude,

telle que $f = s \circ c \circ i \circ t$.

Toutes ces applications préservent les angles, de plus i et c changent l'orientation. On en conclut que f est une transformation conforme du plan.

f) Soit $K = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$, posons la table de Cayley de cet ensemble muni de la composition :

\circ	f_1	f_2	f_3	f_4
f_1	f_1	f_2	f_3	f_4
f_2	f_2	f_1	f_4	f_3
f_3	f_3	f_4	f_1	f_2
f_4	f_4	f_3	f_2	f_1

Qui permet immédiatement de conclure que K est isomorphe au groupe de Klein.

g) Posons $H = \{g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, g_6\}$, et posons sa table de Cayley encore :

\circ	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6
g_1	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6
g_2	g_2	g_3	g_1	g_6	g_4	g_5
g_3	g_3	g_1	g_2	g_5	g_6	g_4
g_4	g_4	g_5	g_6	g_1	g_2	g_3
g_5	g_5	g_6	g_4	g_3	g_1	g_2
g_6	g_6	g_4	g_5	g_2	g_3	g_1

H est stable par composition et passage à l'inverse, c'est donc un sous-groupe de \mathcal{H} . En posant la bijection avec S_3 :

$$e \mapsto g_1, \sigma_1 \mapsto g_2, \sigma_2 \mapsto g_3, t_1 \mapsto g_4, t_2 \mapsto g_5, t_3 \mapsto g_6$$

on constate que les tables de Cayley sont identitiques, donc que H et S_3 sont isomorphes.

28)

- a) Démontrer le corollaire (1.49)
- b) Démontrer la proposition (1.53)

a) Démontrons par récurrence sur n .

— Initialisation :

Soit H_1, H_2 deux sous-groupes de G tel que $H_1 H_2$ est un sous-groupe de G , la propriété est vérifiée.

— Hérédité :

Supposons qu'il existe n tel que la propriété est vraie, c'est à dire que pour $\{H_i\}_{1 \leq i \leq n}$ une famille de sous-groupe de G tel que $H_i H_j = H_j H_i$ pour tout (i, j) tel que $1 \leq i < j \leq n$, $H_1 H_2 \dots H_n$ est un sous-groupe de G . Vérifions que la propriété est vraie pour $n + 1$.

Soit une $\{H_i\}_{1 \leq i \leq n+1}$ une famille de sous-groupe de G tel que $H_i H_j = H_j H_i$ pour tout (i, j) tel que $1 \leq i < j \leq n + 1$, on a :

$$\begin{aligned}
(H_1 H_2 \dots H_{n-1} H_n) H_{n+1} &= H_1 H_2 \dots H_{n-1} H_{n+1} H_n, \text{ par hypothèse,} \\
&= H_1 H_2 \dots H_{n+1} H_{n-1} H_n, \\
&\vdots \\
&= H_{n+1} (H_1 H_2 \dots H_{n-1} H_n).
\end{aligned}$$

De plus, par hypothèse de récurrence, $(H_1 H_2 \dots H_{n-1} H_n)$ est un sous-groupe de G .

Ainsi, $H_1 H_2 \dots H_n H_{n+1}$ est un sous-groupe de G .

— Conclusion :

Le corrolaire est démontré.

- b) Soit I un ensemble non vide et $\{H_i\}_{i \in I}$ une famille de sous-groupes d'un groupe abélien G . Montrons que le sous-groupe $G' = \sum_{i \in I} H_i$ est en somme directe si et seulement si tout $x \in G'$ s'écrit de façon unique :

$$x \in \sum_{i \in I} x_{i_k}.$$

Supposons que chaque $z \in G'$ s'écrive de façon unique. Soit $Z \in \bigcap_{i \in I} H_i$, pour tout $j \in J$, on peut écrire :

$$z = \underbrace{z}_{\in H_j} + \underbrace{0}_{\in \sum_{i \neq j} H_i} = \underbrace{0}_{\in H_j} + \underbrace{z}_{\in \sum_{i \neq j} H_i}$$

z s'écrivant de façon unique, on en conclut que $z = 0$, donc G' est en somme directe.

Supposons que G' soit en somme directe, c'est-à-dire que $\bigcap_{i \in I} H_i = \{0\}$. Soit $z \in G'$, supposons que z s'écrive de deux façons différentes :

$$z = \sum_{i \in I} x_i = \sum_{i \in I} x'_i, \text{ avec au moins un } i \text{ tel que } x_i \neq x'_i$$

pour tout $j \in I$, on peut écrire :

$$x_j - x'_j = \sum_{\substack{i \in I \\ i \neq j}} x'_i - \sum_{\substack{i \in I \\ i \neq j}} x_i = \sum_{\substack{i \in I \\ i \neq j}} x'_i - x_i.$$

On a $x_j - x'_j \in H_j$, et $\sum_{\substack{i \in I \\ i \neq j}} x'_i - x_i \in \sum_{\substack{i \in I \\ i \neq j}} H_i$, donc $x_j - x'_j \in H_j \cap \sum_{\substack{i \in I \\ i \neq j}} H_i = \{0\}$.

Donc, pour tout $j \in I$, z s'écrit de façon unique.

29) Soit E un ensemble non vide et G un groupe d'élément unité e . On désigne par G^E l'ensemble des applications f de E dans G . On considère la loi de composition définie dans G^E par :

$$\begin{aligned}
G^E \times G^E &\rightarrow G^E \\
(f, g) &\mapsto fg,
\end{aligned}$$

Où fg est telle que pour tout $x \in E$, $(fg)(x) = f(x)g(x)$.

Prouver que (G^E) est ainsi muni d'une structure de groupe.

Vérifier que G^E est un groupe abélien si et seulement si G est abélien.

La loi de composition est clairement une loi interne. Vérifions qu'elle est associative :

$$\begin{aligned}
\forall f, g, h \in G^E, (f(gh))(x) &= f(x)((gh)(x)), \\
&= f(x)(g(x)h(x)), \\
&= (f(x)g(x))h(x) \text{ car } f(x), g(x), h(x) \in G, \text{ un groupe,} \\
&= ((fg)(x))(h(x)), \\
&= ((fg)h)(x).
\end{aligned}$$

Vérifions l'existence d'un élément neutre. Soit e le neutre de G , et $i(x) \in G^E$, tel que $\forall x \in Z, i(x) = e$, pour tout x dans E on a $(fi)(x) = f(x)i(x) = f(x) = i(x)f(x) = (if)(x)$, i est donc un neutre.

Pour tout $f \in G^E$, on pose g tel que $\forall x \in E, g(x) = f(x)^{-1}$. On vérifie que $\forall x \in Z, (fg)(x) = f(x)g(x) = f(x)f(x)^{-1} = e = i(x)$, et pareil pour gf .

On en conclut que G^E est un groupe.

Supposons que G soit abélien, soit $f, g \in G^E$:

$$\begin{aligned}
\forall x \in E, (fg)(x) &= f(x)g(x), \\
&= g(x)f(x), \\
&= (gf)(x).
\end{aligned}$$

Supposons que G^E soit abélien. Pour tout $a, b \in G$, on pose $f, g \in G^E$ tel que $\forall x \in E, f(x) = a$ et $g(x) = b$. Ainsi on a :

$$\begin{aligned}
\forall a, b \in G, \forall x \in E, ab &= f(x)g(x), \\
&= (fg)(x), \\
&= (gf)(x), \\
&= g(x)f(x), \\
&= ba.
\end{aligned}$$

On conclut que G^E est un groupe abélien si et seulement si G est abélien.

30) \mathbb{R} désignant le groupe additif des réels, on pose :

$$J = \{x \in \mathbb{R}; 0 \leq x \leq 1\}.$$

L'addition de \mathbb{R} induit dans l'ensemble \mathbb{R}^J une structure de groupe additif abélien.

a) Vérifier les propriétés suivantes :

- l'ensemble des fonctions $f \in \mathbb{R}^J$, continues sur J , est un sous-groupe de $(\mathbb{R}^J, +)$, que l'on notera $\mathcal{C}(J)$;
- si, pour tout $a \in \mathbb{R}$, on note c_a la fonction constante de J dans \mathbb{R} telle que $c_a(x) = a$ pour tout $x \in J$, alors $\Gamma = \{c_a; a \in \mathbb{R}\}$ est un sous-groupe de $(\mathcal{C}(J), +)$.

b) On considère les applications F_i de $\mathcal{C}(J)$ dans \mathbb{R} telles que :

$$F_1 : f \mapsto f(1), \quad F_2 : f \mapsto |f(0)|, \quad F_3 : f \mapsto \int_0^1 f(x)dx$$

$$F_4 : f \mapsto \frac{\pi}{3} \int_0^1 f(x) \cos \frac{\pi x}{6} dx, \quad F_5 : f \mapsto \int_0^1 \cos \frac{\pi f(x)}{6} dx.$$

Déterminer les F_i qui sont des homomorphismes de groupes de $(\mathcal{C}(J), +)$ dans $(\mathbb{R}, +)$. Pour chacun des morphismes de groupes F_i , prouver que, quel que soit $a \in \mathbb{R}$, $F_i(c_a) = a$ et montrer qu'il existe un unique $m_i \in \mathbb{R}$ tel que $F_i(id_J - C_{m_i}) = 0$. En déduire que les $\text{Ker } F_i$ sont deux à deux distincts.

c) Démontrer que pour tout $F \in \text{Hom}(\mathcal{C}(J), \mathbb{R})$, tel que $F(c_a) = a$, quel que soit $a \in \mathbb{R}$, on a

$$\mathcal{C}(J) = \text{Ker } F \oplus \Gamma.$$

En conclure qu'il existe de nombreux sous-groupes de $\mathcal{C}(J)$ tels que $\mathcal{C}(J) = H \oplus \Gamma$.

- a) Les fonctions de \mathbb{R}^J continues sur J sont un sous-ensemble des fonctions de \mathbb{R}^J . De plus, la différence de deux fonctions continues est continue. Donc $\mathcal{C}(J)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}^J, +)$.
De la même façon, les fonctions constantes sont des fonctions continues, et $c_a - c_b = c_{a-b}$.
- b) F_1, F_3, F_4 sont des morphismes, en effet, $\forall f, g \in \mathcal{C}(J)$:

$$\begin{aligned} F_1(f+g) &= (f+g)(1) = f(1) + g(1) = F_1(f) + F_1(g), \\ F_3(f+g) &= \int_0^1 (f+g)(x)dx = \int_0^1 f(x)dx + \int_0^1 g(x)dx = F_3(f) + F_3(g), \\ F_4 &: \text{Par linéarité de l'intégrale comme } F_3. \end{aligned}$$

Cependant, $F_2(c_{-1} + c_1) = F_2(c_0) = 0$, mais $F_2(c_{-1}) + F_2(c_1) = 2$, ce n'est pas un morphisme.

Et $F_5(c_0) = 1 \neq 0$, donc ce n'est pas un morphisme non plus.

On vérifie trivialement (que j'ai la flemme de le taper) que pour ces morphismes, $\forall a \in \mathbb{R}, F_i(c_a) = a$.

Posons le calcul pour F_1 :

$$\begin{aligned} F_1(Id_J - c_m) &= 0 \Rightarrow F_1(Id_J) - F_1(c_m) = 0 \\ &\Rightarrow F_1(Id_J) = F_1(c_m), \\ &\Rightarrow Id_J(1) = m, \\ &\Rightarrow m = 1. \end{aligned}$$

Et on vérifie qu'on a bien $F_1(Id_J - c_1) = 0$ (Peut être qu'en bossant par équivalences successives on aurait pas à revérifier, mais j'suis traumatisée car j'en mettais trop), l'unique m_1 est donc 1. De la même façon,

on trouve $m_3 = 0.5$ et $m_4 = 1 + \frac{6\sqrt{3} - 12}{\pi}$.

Comme le c_m est unique pour chacun de ses morphismes, on en conclut que leurs noyaux sont distincts.

- c) Soit $f \in \mathcal{C}(J)$, on peut écrire

$$f = \underbrace{f - c_{F(f)}}_{\in \text{Ker } F} + \underbrace{c_{F(f)}}_{\in \Gamma}.$$

Vérifions ensuite que l'intersection de ces deux ensembles est triviale. Soit $c_a \in \Gamma$, $F(c_a) = a$, donc on a bien $\text{Ker } F \cap \Gamma = \{c_0\}$.

Soit la famille de morphismes $\{F_\alpha\}$ avec $\alpha \in [0; 1]$, tel que $F_\alpha = \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha f(x)dx$.

Par linéarité de l'intégrale, ce sont bien des morphismes. De plus, $\forall a \in \mathbb{R}, F_\alpha(c_a) = a$. De la même façon que précédemment, on vérifie que $F_\alpha(Id_J - c_{m_\alpha}) = 0$ admet une unique solution $m_\alpha = \alpha$. On a donc une famille infinie de morphismes aillant des noyaux distincts, ces noyaux permettant la décomposition de $\mathcal{C}(J)$ en somme directe de $\text{Ker } F_\alpha$ et Γ .

31) Soit deux groupes G_1 et G_2 .

- a) Prouver que les groupes $G_1 \times G_2$ et $G_2 \times G_1$ sont isomorphes.
- b) Γ_1 et Γ_2 étant aussi deux groupes, démontrer la propriété : $(\Gamma_1 \simeq G_1 \text{ et } \Gamma_2 \simeq G_2) \Rightarrow \Gamma_1 \times \Gamma_2 \simeq G_1 \times G_2$.
- c) Si H_1 et H_2 sont respectivement des sous-groupes de G_1 et G_2 , montrer que $H_1 \times H_2$ est un sous-groupe de $G_1 \times G_2$.

Déterminer tous les sous-groupes de $\frac{\mathbb{Z}}{(2)} \times \frac{\mathbb{Z}}{(2)}$; en déduire compte tenu des notations précédentes, qu'un sous-groupe de $G_1 \times G_2$ n'est pas nécessairement de la forme $H_1 \times H_2$.

- a) Vérifions que l'application suivante est un isomorphisme de groupe :

$$\begin{aligned} \varphi : G_1 \times G_2 &\rightarrow G_2 \times G_1, \\ (g_1, g_2) &\mapsto (g_2, g_1). \end{aligned}$$

φ est un morphisme, en effet :

$$\begin{aligned} \forall (g_1, g_2), (h_1, h_2) \in G_1 \times G_2, \quad \varphi((g_1, g_2)(h_1, h_2)) &= \varphi((g_1 h_1, g_2 h_2)), \\ &= (g_2 h_2, g_1 h_1), \\ &= (g_2, g_1)(h_2, h_1), \\ &= \varphi(g_1, g_1) \varphi(h_1, h_2). \end{aligned}$$

Vérifions qu'elle est injective :

$$\forall (g_1, g_2) \in G_1 \times G_2, \quad \varphi(g_1, g_2) = (e_2, e_1) \Leftrightarrow (g_2, g_1) = (e_2, e_1).$$

Elle est aussi trivialement surjective, car pour tout $(g_2, g_1) \in G_2 \times G_1$, on a $\varphi(g_1, g_2) = (g_2, g_1)$.

Ainsi, φ est un isomorphisme, donc pour tout groupe G_1 et G_2 , on a $G_1 \times G_2 \cong G_2 \times G_1$.

b) Soit φ_1 un isomorphisme de Γ_1 vers G_1 et φ_2 un isomorphisme de Γ_2 vers G_2 .

On vérifie de la même façon que a) que :

$$\begin{aligned} \varphi : \Gamma_1 \times \Gamma_2 &\rightarrow G_1 \times G_2, \\ (\gamma_1, \gamma_2) &\mapsto (\varphi_1(\gamma_1), \varphi_2(\gamma_2)). \end{aligned}$$

est un isomorphisme de groupe (flemme de taper, et franchement c'est la même chose que a)), donc on a $\Gamma_1 \times \Gamma_2 \cong G_1 \times G_2$.

c) On a $H_1 \times H_2 \subseteq G_1 \times G_2$, et

$$\begin{aligned} \forall (h_1, h_2), (k_1, k_2) \in H_1 \times H_2, \quad (h_1, h_2)(k_1, k_2)^{-1} &= (h_1, h_2)(k_1^{-1}, k_2^{-1}), \\ &= (h_1 k_1^{-1}, h_2 k_2^{-1}) \in G_1 \times G_2. \end{aligned}$$

Donc $H_1 \times H_2$ est un sous-groupe de $G_1 \times G_2$.

Les sous groupes de $\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$ sont :

$$\{(\bar{0}, \bar{0})\}, \{(\bar{0}, \bar{0}), (\bar{1}, \bar{1})\}, \{(\bar{0}, \bar{0}), (\bar{0}, \bar{1})\}, \{(\bar{0}, \bar{0}), (\bar{1}, \bar{0})\},$$

On constate que $\{(\bar{0}, \bar{0}), (\bar{1}, \bar{1})\}$ n'est pas produit de sous-groupes de $\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$, mais est un sous-groupe de $\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$.

32) Pour deux groupes G_1 et G_2 , démontrer les propriétés :

a) $G_1 \simeq G_2 \Rightarrow \text{Aut}(G_1) \simeq \text{Aut}(G_2)$

b) $G_1 \simeq G_2 \Rightarrow \text{Int}(G_1) \simeq \text{Int}(G_2)$.

33) Soit $\{G_i\}_{i \in I}$ une famille de groupes ; montrer que, pour tout groupe G , l'ensemble $\text{Hom}\left(G, \prod_{i \in I} G_i\right)$

est équipotent à l'ensemble $\prod_{i \in I} \text{Hom}(G, G_i)$.

CLASSES MODULO UN SOUS-GROUPE

1) TEST

TESTSOL
