Load Balance

Oprea Călin
Grupa 234

1) Având mulțimea $\{20, 30, 60, 90\}$ => sol: $max(\{60,30\},\{90,20\}) - 110$

A) Folosind alg. de la seminar obț. sol: $max(\{60,20\},\{30,90\}) = 120$
Dar $110 * 1.1 = 121 > 120$ => Alg e cel puțin 1.1 aproximativ

B) Având $t_j \leq 10$, alocarea activităților se face evitând diferențele mari, cu dif max între cele 2 mașini ≤ 10. Așadar, la fiecare pas, selectăm cea mai mică încărcătură disponibilă.
Pentru a îndeplini cerința de alg 1.1 approx, ~~...~~ diferența dintre cele 2 load-uri să fie cel puțin $1.1 * 10 = 11$, dar pt cazul nostru $120 - 80 = 40 > 11$ nu este alg 1.1 aproximativ.

3) Având alg. $\frac{3}{2}$ approx, putem dem. că alg poate fi $\frac{3}{2} - \frac{1}{2m}$ aproximativ dacă găsim un alt lower bound

Având:
- k - mașina cea mai încărcată
- l - ultima încărcătură repartizată
- LMi - încărc. mașinii i după $l-1$ încărcături repartizate

$$LMk \leq \frac{m+1}{2m} \cdot \sum_{i=1}^{m} LM_i = \frac{m+1}{2m} \cdot \sum_{j=1}^{m} t_j \leq \text{noul lower bound} = nlb$$

$$ALG = LMk + t_l \leq t_l + nlb \leq max\{t_j \mid 1 \leq j \leq m\} + nlb \leq nlb + nlb = 2nlb \leq 2OPT$$

$$LMk \leq \frac{m+1}{2m} \sum_{i=1}^{m} LM_i = \frac{m+1}{2m} \sum_{j=1}^{l} t_j \leq \frac{m+1}{2m} \sum_{j=1}^{m} t_j - \frac{m+1}{2m} \cdot t_j \Leftrightarrow$$

$$ALG = LMk + t_l \leq \frac{m+1}{2m} \sum_{j=1}^{m} t_j - \frac{m+1}{2m} \cdot t_l + t_l \leq OPT - \frac{m+1}{2m} \cdot t_l + t_l \leq$$

$$\leq OPT - \frac{m+1}{2m} \cdot t_{max} + t_{max} \leq OPT + OPT - \frac{m+1}{2m} OPT = 2OPT - \frac{m+1}{2m} OPT =$$

$$= \frac{4m - m - 1}{2m} OPT = \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2m}\right) OPT$$ => Algoritmul poate fi $\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2m}\right)$ aproximativ

Travelling Salesman Problem

1. Pp. că problema nu este în NP-hard. Așadar, pt graful $G = (V, E)$

A) și $G' = (V', E')$ unde muchiile au cost 1 dc există în G sau 2 dc nu există. Obs. că pe G', alg TSP va returna costul total minim egal cu n doar dc. G - hamiltonian =>

Asadar, alg se reduce la găsirea unui ciclu hamiltonian pe G'
Dar cum alg de det a cicl. hamiltonian (graf hamiltonian) este în NP-hard, NP ≠ P ⇒ Contradicție

⇒ Problema rămâne în NP-hard

(B) Dem: $\{1,1,1\} \Rightarrow 1+1 \geq 1$
$\{1,1,2\} \Rightarrow 1+1 \geq 2$
$\{1,2,2\} \Rightarrow 1+2 \geq 2$
$\{2,2,2\} \Rightarrow 2+2 \geq 2$
⇒ ineg triunghiului e satisf.

(C) Fie $G(V,E)$ - graf complet, cu costul fiecărei muchie $= 1 \Rightarrow TSP = n$ unde n = nr de noduri. Primul nod din graf va avea în continuarea parcurgerilor G $n-1$ muchii (se trece prin fiecare nod odată)
Alg parcurge APM-ul rezultat de 2 ori ⇒ de $(n-1) \cdot 2$ ori/muchie
⇒ Nu poate fi $\frac{3}{2}$ aproximativ, având $2n-2 > \frac{3}{2}n$, $\forall n > 4$

Vertex Cover

a) Fact de aproximare = ? $(x_1 \vee x_3 \vee x_4) \wedge (x_2 \vee x_3 \vee x_7) \wedge (x_1 \vee x_5 \vee x_6) \wedge (x_2 \vee x_5 \vee x_7)$
Având în vedere că x_4 apare doar într-o mulțime, pt acesta vom parcurge până la final întreaga mulțime și vor fi n elem true
⇒ Alg parcurge ~~toate~~ ~~[illegible]~~ valorile ⇒ n-aproximativ

b) Folosind un alg 3-aproximativ, procesul va deveni mai eficient, selectând câte 3 valori în loc de una singură, în cel mai rău caz (când niciuna din cele 3 nu se află în alte mulțimi) evaluăm doar 3 elem per pas. ⇒ alg e 3 aprox

$C = \{C_1, \dots, C_m\}$, $X = \{x_1, \dots, x_n\}$
Cât timp $C \neq \emptyset$ ex:
Alege $C_j \in C$ random
$x_i \leftarrow$ true, pt $\forall x_i \in C_j$
Elimina din C toate pred ce-l conțin pe x_i, $\forall x_i \in C_j$
Return X

⇒ pt cazul dat: $C = (x_1 \vee x_3 \vee x_4) \wedge \cancel{(x_2 \vee x_3 \vee x_7)} \wedge \cancel{(x_1 \vee x_5 \vee x_6)} \wedge (x_2 \vee x_5 \vee x_7)$