Universitatea Tehnică din Cluj-Napoca
Facultatea de automatică și calculatoare
Automatică și informatică aplicată

Teoria sistemelor

Proiect

Sistem mecanic de rotație cu două grade de libertate

Student **:** ***Opriș Ana-Maria***

Coordonator:
Vlad Mihai Mihaly

2020-2021

Cuprins

Sistem mecanic de rotație cu două grade de libertate

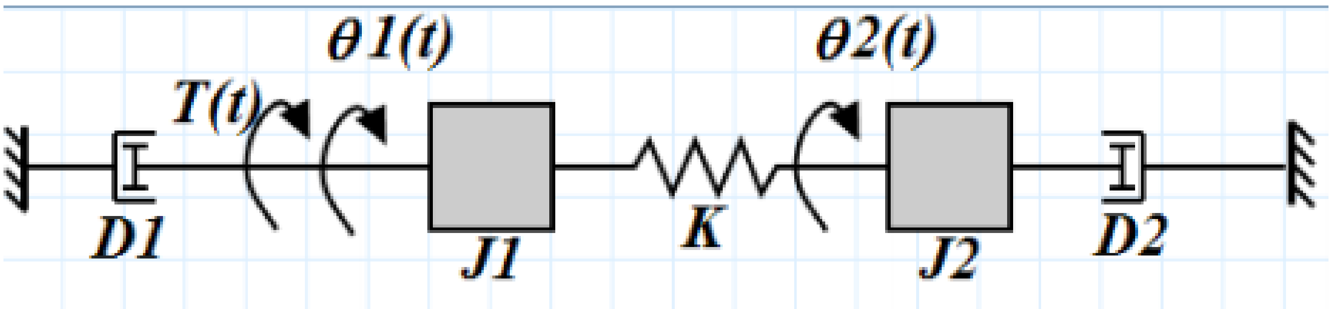


Fig.1

- Subiectul principal al acestui proiect este un sistem mecanic de rotație cu două grade de libertate.
- Structura sistemului este prezentata mai sus in figura 1.
- Acest sistem are două grade de libertate, deoarece fiecare corp poate fi rotit în timp ce celălalt este blocat.

Notațiile și unitățile de măsură folosite pentru mărimile din acest sistem mecanic de rotație:

Denumire	**Simbol**	**Unitate de masura**
Cuplu de rotație	T(t)	N x m
Poziții unghiulare	θ_1(t), θ_2(t)	rad
Viteza unghiulară	ω(t)	rad/s
Coeficient de frecare vâscoasă	D_1,D2	N x m x s/rad
Coeficient de torsiune	K	N x m/rad

Momente de inerție	J_1,J_2	kg x m^2

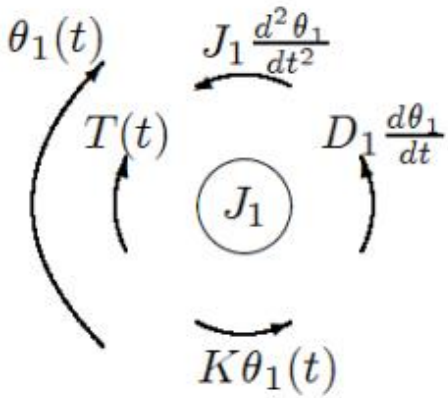
Pentru sistemul mecanic de rotație cu două grade de libertate prezentat mai sus
intrarea sistemului este T(t) iar pentru ieșirea am ales $y=y_2=\theta_2(t)$.

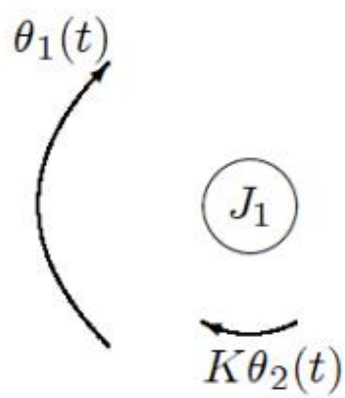
Valorile numerice alese :

$J_1 = 20\ kg * m^2$ $J_2 = 1\ kg * m^2$
$D_1 = 20$ N*m*s/rad $D_2 = 10$ N*m*s/rad
K = 30 N*m/rad
T=10 N*m

Modelul matematic al sistemului

Fig.2





Cuplurile care acționează asupra corpului cu inerția J_1 dacă J_2 este blocat

Cuplurile de pe J_1 dacă J_1 este blocat ¸si J_2 se rotește

Fig.3

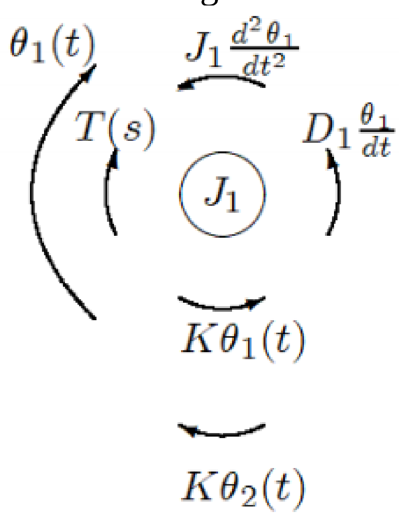
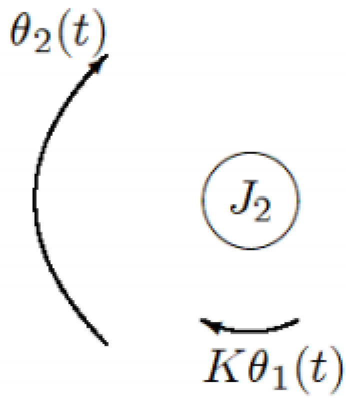


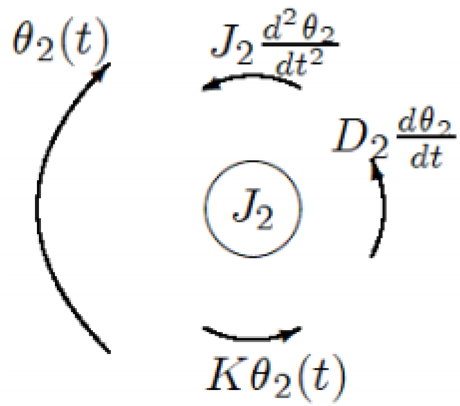
Fig.3

Diagrama corpului liber pentru J_1, corespunzătoare sistemului de rotație din Figura 1

Fig.4



Cuplurile de pe J_2 dacă J_2 este blocat ¸si J_1 se rotește



Cuplurile care acționează asupra corpului inerțial J_2 dacă J_1 este blocat și J_2 se rotește

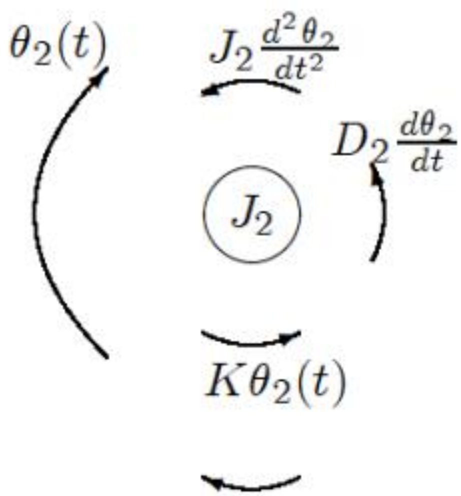


Diagrama corpului liber pentru J_2, corespunzătoare sistemului de rotație din Fig. 1

Se obțin următoarele ecuații de mișcare pentru sistem :

$$J_1 \frac{d^2\theta_1}{dt^2} + D_1 \frac{d\theta_1}{dt} + K\theta_1(t) - K\theta_2(t) = T(t) \qquad (1)$$

$$J_2 \frac{d^2\theta_2}{dt^2} + D_2 \frac{d\theta_2}{dt} + K\theta_2(t) - K\theta_1(t) = 0 \qquad (2)$$

Variabilele de stare alese:

$$x_1(t) = \theta_1(t)$$
$$x_2(t) = \dot{\theta}_1(t) = \omega_1(t)$$
$$x_3(t) = \theta_2(t)$$
$$x_4(t) = \dot{\theta}_2(t) = \omega_2(t)$$

Din (1) rezultă

$$\dot{x_2} = -\frac{K}{J_1}x_1 - \frac{D_1}{J1}x_2 + \frac{K}{J1}x_3 + \frac{1}{J_1}T(t)$$

Din (2) rezultă

$$\dot{x}_4 = \frac{K}{J_2}x_1 - \frac{K}{J_2}x_3 - \frac{D_2}{J_2}x_4$$

$$\dot{x_1} = x_2$$
$$\dot{x_2} = -\frac{K}{J_1}x_1 - \frac{D_1}{J1}x_2 + \frac{K}{J1}x_3 + \frac{1}{J_1}T(t)$$
$$\dot{x}_3 = x_4$$
$$\dot{x}_4 = \frac{K}{J_2}x_1 - \frac{K}{J_2}x_3 - \frac{D_2}{J_2}x_4$$

$y_1(t) = \theta_1(t)$ $\qquad\qquad$ $y_2(t) = \theta_2(t)$

Modelul matematic u/x/y

Reprezentare matriceală simbolică:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{K}{J_1} & -\frac{D_1}{J_1} & \frac{K}{J_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{K}{J_2} & 0 & -\frac{K}{J_2} & -\frac{D_2}{J_2} \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{J_1} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} T(t)$$

$$y(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} x(t) + (0)T(t)$$

Reprezentare matriceală numerică:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1.5 & -1 & 1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 30 & 0 & -30 & -10 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0.5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} T(t)$$

$$y(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} x(t) + (0)T(t)$$

Modelul intrare-ieșire

Din relația (2) => $K\theta_1 - K\theta_2 = J_2 \frac{d^2\theta_2}{dt^2} + D_2 \frac{d\theta_2}{dt}$ (3)

Vom scoate $\frac{d\theta_2}{dt}$ și $\frac{d^2\theta_2}{dt^2}$ derivând de două ori relația (2)

(2) : $J_2 \frac{d^2\theta_2}{dt^2} + D_2 \frac{d\theta_2}{dt}$ +Kθ_2(t) - Kθ_1(t) = 0

=> $K\theta_1$(t) = $J_2 \frac{d^2\theta_2}{dt^2} + D_2 \frac{d\theta_2}{dt}$ +Kθ_2(t) / ()'

=> $K \frac{d\theta_1}{dt} = J_2 \frac{d^3\theta_2}{dt^3} + D_2 \frac{d^2\theta_2}{dt^2} + K \frac{d\theta_2}{dt}$ / ()'

=> $K \frac{d^2\,\theta_1}{dt^2} = J_2 \frac{d^4\theta_2}{dt^4} + D_2 \frac{d^3\theta_2}{dt^3} + K \frac{d^2\theta_2}{d^2t}$

$$=> \dot{\theta}_1 = \frac{J_2}{K}\frac{d^3\theta_2}{dt^3} + \frac{D_2}{K}\frac{d^2\theta_2}{dt^2} + \frac{d\theta_2}{dt}$$

$$=> \ddot{\theta}_1 = \frac{J_2}{K}\frac{d^4\theta_2}{dt^4} + \frac{D_2}{K}\frac{d^3\theta_2}{dt^3} + \frac{d^2\theta_2}{dt^2}$$

Înlocuim $\dot{\theta}_1$, $\ddot{\theta}_1$ și relația (3) în (1)

Relația (1) : $J_1 \frac{d^2\theta_1}{dt^2} + D_1 \frac{d\theta_1}{dt} + K\theta_1$(t) - $K\theta_2$(t) = T(t)

=> T(t) = $J_1 \left(\frac{J_2}{K}\frac{d^4\theta_2}{dt^4} + \frac{D_2}{K}\frac{d^3\theta_2}{dt^3} + \frac{d^2\theta_2}{dt^2}\right) + D_1 \left(\frac{J_2}{K}\frac{d^3\theta_2}{dt^3} + \frac{D_2}{K}\frac{d^2\theta_2}{dt^2} + \frac{d\theta_2}{dt}\right) + J_2 \frac{d^2\theta_2}{dt^2} + D_2 \frac{d\theta_2}{dt}$

=> $T(t) = \frac{J_1 J_2}{K}\frac{d^4\theta_2}{dt^4} + \frac{J_1 D_2}{K}\frac{d^3\theta_2}{dt^3} + J_1 \frac{d^2\theta_2}{dt^2} + \frac{D_1 J_2}{K}\frac{d^3\theta_2}{dt^3} + \frac{D_1 D_2}{K}\frac{d^2\theta_2}{dt^2} + D_1 \frac{d\theta_2}{dt} + J_2 \frac{d^2\theta_2}{dt^2} + D_2 \frac{d\theta_2}{dt}$

=> $\frac{J_1 J_2}{K}\frac{d^4\theta_2}{dt^4} + \frac{1}{K}(J_1 D_2 + D_1 J_2)\frac{d^3\theta_2}{dt^3} + \left(J_1 + J_2 + \frac{D_1 D_2}{K}\right)\frac{d^2\theta_2}{dt^2} + (D_1 + D_2)\frac{d\theta_2}{dt} = T(t)$

Funcția de transfer

Intrarea sistemului este T(t)
Ieșirea este θ_2

$$H(s) = \frac{\mathcal{L}\{\, y(t)\ \}(s)}{\mathcal{L}\{\, u(t)\ \}(s)}\bigg|_{\ CI\equiv 0}$$

Aplicăm transformata Laplace pe modelul intrare-ieșire

$$U(t) = \frac{J_1J_2}{K}\frac{d^4\theta_2}{dt^4} + \frac{1}{K}\left(J_1D_2 + D_1J_2\right)\frac{d^3\theta_2}{dt^3} + \left(J_1 + J_2 + \frac{D_1D_2}{K}\right)\frac{d^2\theta_2}{dt^2} + (D_1 + D_2)\frac{d\theta_2}{dt}\ /\mathcal{L}$$

$$U(s) = \frac{J_1J_2}{K}s^4Y(s) + \frac{1}{K}(J_1D_2 + D_1J_2)s^3Y(s) + \left(J_1 + J_2 + \frac{D_1D_2}{K}\right)s^2Y(s) + (D_1 + D_2)sY(s)$$

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{\frac{J_1J_2}{K}s^4 + \left(\frac{J_1D_2}{K} + \frac{D_1J_2}{K}\right)s^3 + \left(J_1 + J_2 + \frac{D_1D_2}{K}\right)s^2 + (D_1 + D_2)s}$$

=> $$H(s) = \frac{\frac{K}{J_1J_2}}{s^4 + \frac{K}{J_1J_2}\frac{1}{K}(J_1D_2 + D_1J_2)s^3 + \frac{K}{J_1J_2}\frac{J_1K + J_2K + D_1D_2}{K}s^2 + \frac{K}{J_1J_2}(D_1 + D_2)s}$$

=> $$H(s) = \frac{\frac{K}{J_1J_2}}{s^4 + \frac{J_1D_2 + J_2D_1}{J_1J_2}s^3 + \frac{J_1K + J_2K + D_1D_2}{J_1J_2}s^2 + \frac{D_1K + D_2K}{J_1J_2}s}$$

Verificare rezultat prin intermediul relației dintre spațiul stărilor și funcția de transfer:

$$H(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{K}{J_1} & -\frac{D_1}{J_1} & \frac{K}{J_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{K}{J_2} & 0 & -\frac{K}{J_2} & -\frac{D_2}{J_2} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{J_1} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad D=0$$

$$H(s) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s & -1 & 0 & 0 \\ \frac{K}{J_1} & s+\frac{D_1}{J_1} & -\frac{K}{J_1} & 0 \\ 0 & 0 & s & -1 \\ -\frac{K}{J_2} & 0 & \frac{K}{J_2} & s+\frac{D_2}{J_2} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{J_1} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 0$$

$$(sI-A)^{-1} = \frac{(sI-A)^*}{\det(sI-A)}$$

$$\det(sI-A) = s(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} s+\frac{D_1}{J_1} & -\frac{K}{J_1} & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 0 & \frac{K}{J_2} & s+\frac{D_2}{J_2} \end{vmatrix} - (-1)^{1+2}(-1) \begin{vmatrix} \frac{K}{J_1} & -\frac{K}{J_1} & 0 \\ 0 & s & -1 \\ -\frac{K}{J_2} & \frac{K}{J_2} & s+\frac{D_2}{J_2} \end{vmatrix} + 0 + 0 =$$

$$det(sI-A) = s\left[s\left(s+\frac{D_1}{J_2}\right)\left(s+\frac{D_2}{J_2}\right)+\frac{K}{J_2}\left(s+\frac{D_1}{J_1}\right)\right] - \left[s\frac{K}{J_1}\left(s+\frac{D_2}{J_2}\right)-\frac{K}{J_2}\frac{K}{J_1}\right] + 0 + 0 + \frac{K}{J_2}\left(-\frac{K}{J_1}\right)$$

$$det(sI-A)=$$
$$= s\left(s^3+\frac{D_2}{J_2}s^2+\frac{D_1}{J_1}s^2+\frac{D_1D_2}{J_1J_2}s+\frac{K}{J_2}s+\frac{KD_1}{J_1J_2}\right)+\frac{K}{J_1}s^2 + \frac{KD_2}{J_1J_2}s+\frac{KK}{J_1J_2}-\frac{KK}{J_1J_2}$$

$$det(sI-A)=$$
$$= s^4+\frac{D_2}{J_2}s^3+\frac{D_1}{J_1}s^3+\frac{D_1D_2}{J_1J_2}s^2+\frac{K}{J_2}s^2+\frac{KD_1}{J_1J_2}s+\frac{K}{J_1}s^2 + \frac{KD_2}{J_1J_2}s$$

$$det(sI-A)=$$
$$= s^4+\left(\frac{D_1J_2+D_2J_1}{J_1J_2}\right)s^3+(\frac{D_1D_2+KJ_1+KJ_2}{J_1J_2})s^2 + (\frac{KD_1+KD_2}{J_1J_2})s$$

$$H(s)=C(sI-A)^{-1}B+D \;\; => H(s)=\frac{C(sI-A)^{*}B}{\det(sI-A)}+D$$

$$(sI-A)^{*}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}^{t}$$

$$\boldsymbol{H(s)} = \frac{\mathbf{1}}{s^4+\left(\frac{D_1J_2+D_2J_1}{J_1J_2}\right)s^3+(\frac{D_1D_2+KJ_1+KJ_2}{J_1J_2})s^2+(\frac{KD_1+KD_2}{J_1J_2})s}(\mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{1} \quad \mathbf{0})\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & a_{41} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & a_{42} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{43} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \frac{\mathbf{1}}{J_1} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} + \mathbf{0}$$

În matricea $(sI-A)^*$ nu trebuie calculat fiecare element pentru că după înmulțirea cu C și B va rezulta $\frac{1}{J_1}a_{23}$

$$=> H(s) = \frac{\frac{1}{J_1}a_{23}}{s^4 + \left(\frac{D_1J_2 + D_2J_1}{J_1J_2}\right)s^3 + (\frac{D_1D_2 + KJ_1 + KJ_2}{J_1J_2})s^2 + (\frac{KD_1 + KD_2}{J_1J_2})s}$$

$$a_{23} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} s & 0 & -\frac{K}{J_2} \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & s+\frac{D_2}{J_2} \end{vmatrix} = -\left(-\frac{K}{J_2}\right) = \frac{K}{J_2}$$

$$=> H(s) = \frac{\frac{K}{J_1J_2}}{s^4 + \left(\frac{D_1J_2 + D_2J_1}{J_1J_2}\right)s^3 + (\frac{D_1D_2 + KJ_1 + KJ_2}{J_1J_2})s^2 + (\frac{KD_1 + KD_2}{J_1J_2})s}$$

Verificare în Matlab:

```
        0 0 0 1;
        K/J2 0 -K/J2 -D2/J2]
    B=[0 1/J1 0 0]'
    C=[ 0 0 1 0]
    D=0
    [num,den] =ss2tf(A,B,C,D)
    H=tf( K/J1/J2,[1 (D1*J2+D2*J1)/J1/J2 (D1*D2+K*J1+K*J2)/J1/J2 (K*D1+K*D2)/J1/J2])

    Hss=tf(num,den)
```

mand Window

v to MATLAB? See resources for Getting Started.

```
H =

               1.5
  ------------------------------
  s^4 + 11 s^3 + 41.5 s^2 + 45 s

Continuous-time transfer function.


Hss =

                     1.5
  ------------------------------------------
  s^4 + 11 s^3 + 41.5 s^2 + 45 s - 4.388e-14

Continuous-time transfer function.
```

Singularitățile sistemului

$$H(s) = \frac{\frac{K}{J_1 J_2}}{s^4 + \left(\frac{D_1 J_2 + D_2 J_1}{J_1 J_2}\right) s^3 + \left(\frac{D_1 D_2 + K J_1 + K J_2}{J_1 J_2}\right) s^2 + \left(\frac{K D_1 + K D_2}{J_1 J_2}\right) s}$$

Nu avem zerouri.

Polii sistemului: $s\left(s^3 + \left(\frac{D_1 J_2 + D_2 J_1}{J_1 J_2}\right) s^2 + \left(\frac{D_1 D_2 + K J_1 + K J_2}{J_1 J_2}\right) s + \left(\frac{K D_1 + K D_2}{J_1 J_2}\right)\right) = 0$

$\widehat{s_1} = 0$

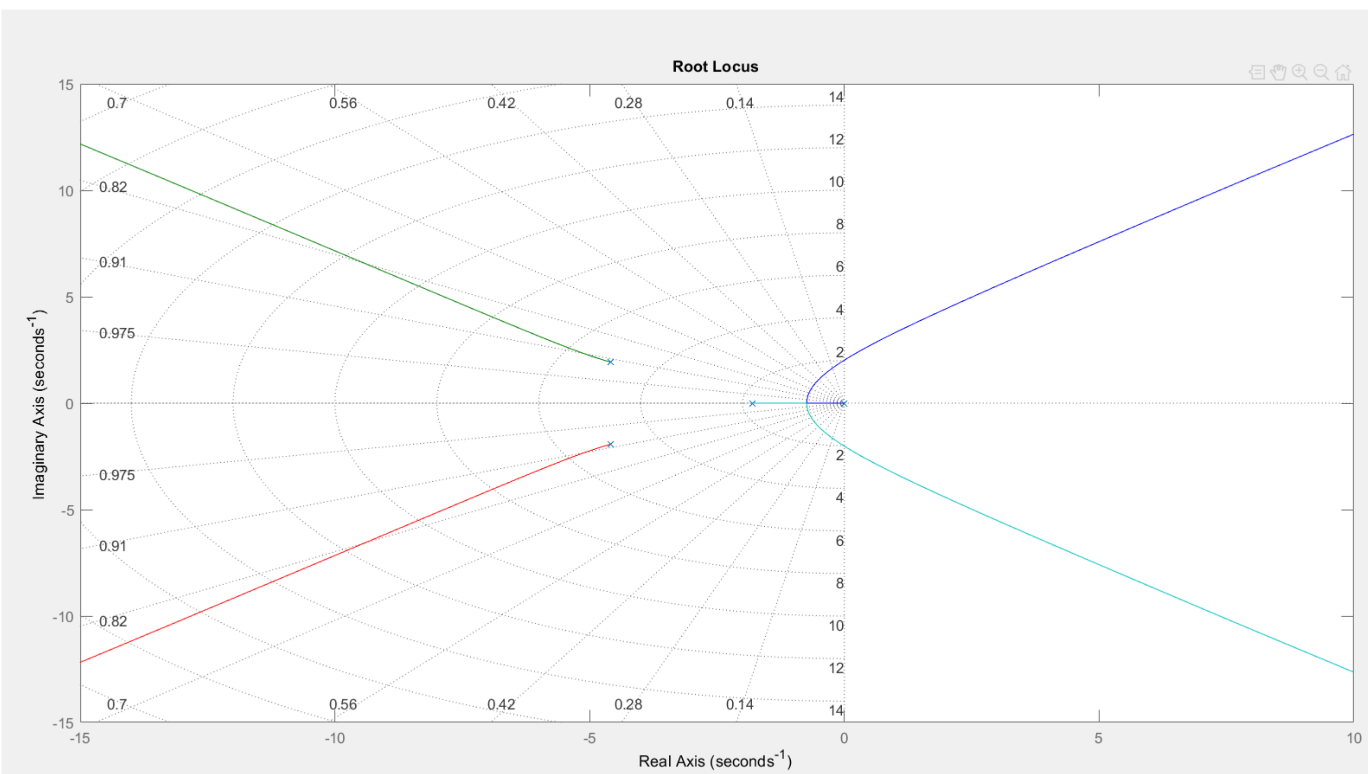
$\widehat{s_2} =$ -4.5953 +1.9375i

$\widehat{s_3} =$-4.5953 - 1.9375i

$\widehat{s_4} =$-1.8093

Singularitățile în planul complex :

Polii sunt reprezentati de x-uri si sunt numerotați în această ordine, de la dreapta spre stânga,sus apoi jos: $\widehat{s_1}\widehat{s_4}\widehat{s_2}\widehat{s_3}$



Realizările de stare

Forma canonică de control(FCC)

Simbolic:

$$A_{FCC} = \begin{pmatrix} -\frac{D_1J_2 + D_2J_1}{J_1J_2} & -\frac{D_1D_2 + KJ_1 + KJ_2}{J_1J_2} & -\frac{KD_1 + KD_2}{J_1J_2} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B_{FCC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad C_{FCC} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{K}{J_1J_2} \end{pmatrix} \qquad D = 0$$

Numeric:

$$A_{FCC} = \begin{pmatrix} -11 & -41.5 & -45 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B_{FCC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad C_{FCC} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1.5 \end{pmatrix} \qquad D = 0$$

Forma canonică de observare

Simbolic:

$$A_{FCO} = A_{FCC}^{t} = \begin{pmatrix} -\dfrac{D_1 J_2 + D_2 J_1}{J_1 J_2} & 1 & 0 & 0 \\ -\dfrac{D_1 D_2 + K J_1 + K J_2}{J_1 J_2} & 0 & 1 & 0 \\ -\dfrac{K D_1 + K D_2}{J_1 J_2} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

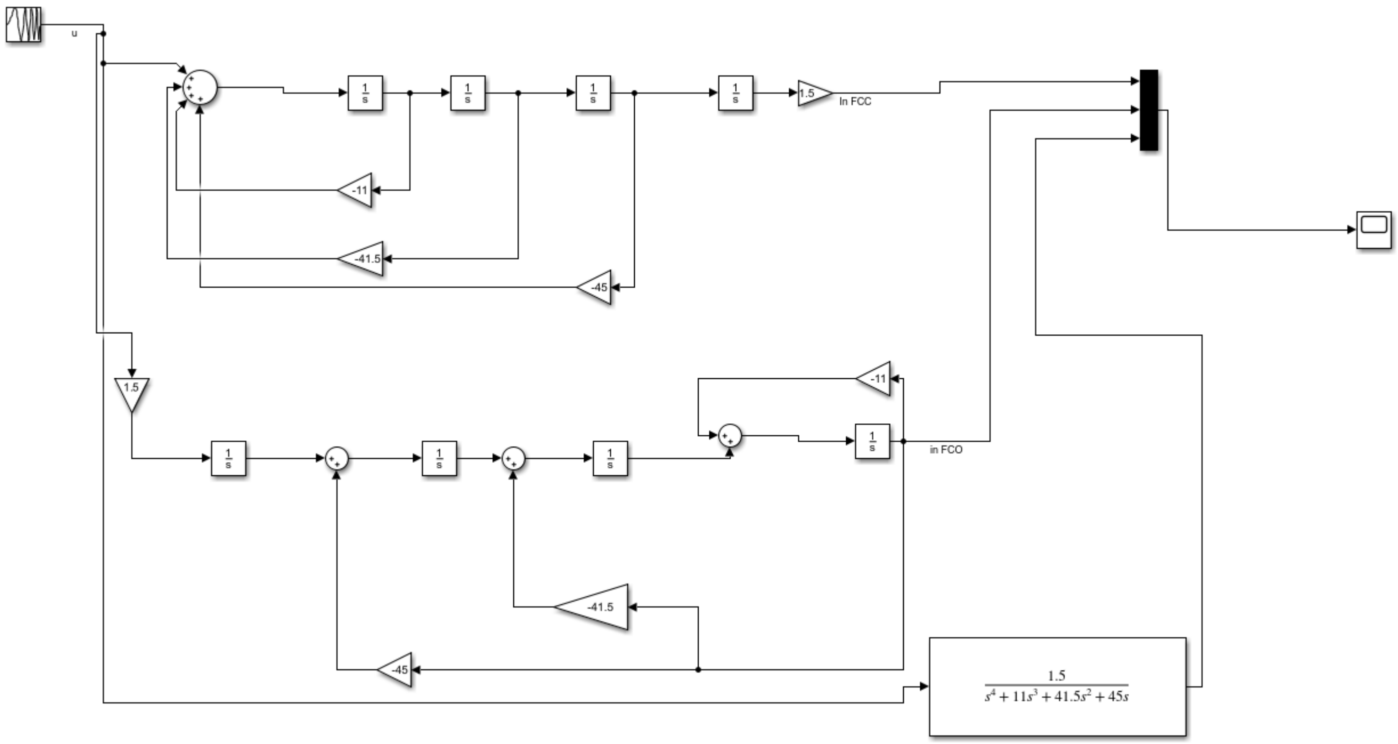
$$B_{FCO} = C_{FCC}^{t} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dfrac{K}{J_1 J_2} \end{pmatrix} \qquad C_{FCO} = B_{FCC}^{t} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad D = 0$$

Numeric:

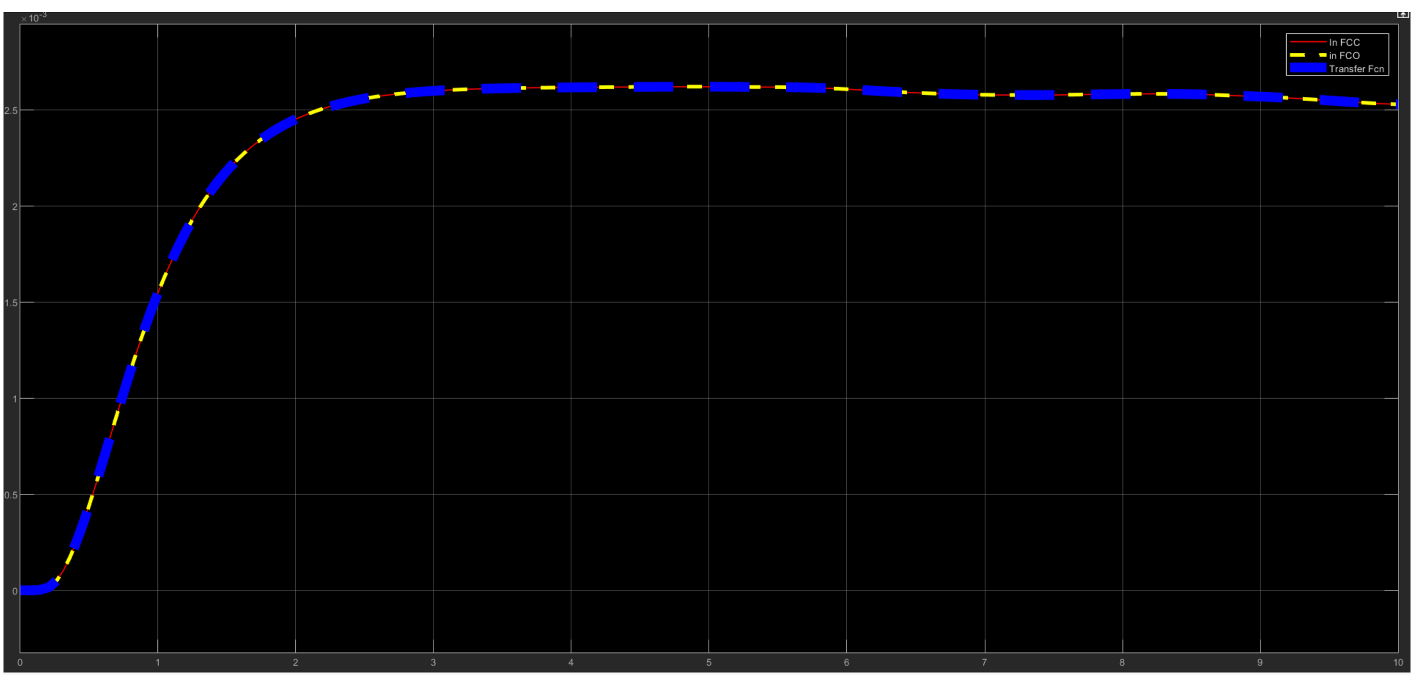
$$A_{FCO} = A_{FCC}^{t} = \begin{pmatrix} -11 & 1 & 0 & 0 \\ -41.5 & 0 & 1 & 0 \\ -45 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B_{FCO} = C_{FCC}^{t} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1.5 \end{pmatrix} \qquad C_{FCO} = B_{FCC}^{t} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad D = 0$$

Schema Simulink



Grafic:



Funcția de transfer în formă minimală

$$\boldsymbol{H(s)} = \frac{\frac{K}{J_1 J_2}}{s^4 + \frac{J_1 D_{2+J_2 D_1}}{J_1 J_2} s^3 + \frac{J_1 K + J_2 K + D_1 D_2}{J_1 J_2} s^2 + \frac{D_1 K + D_2 K}{J_1 J_2} s}$$

$$H(s) = \frac{1.5}{s^4 + 11s^3 + 41.5s^2 + 45s}$$

n=4 -> 8 parametrii Markov $\gamma_0 \ldots \gamma_7$

Parametrii Markov i-am calculat cu ajutorul comenzii deconv(num,den) in MATLAB

```
gamma =

         0         0         0         0    1.5000  -16.5000  119.2500 -694.5000
```

Cu ajutorul acestor parametrii completam matricea Hankel

$$\mathrm{H} = \begin{pmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \gamma_4 \\ \gamma_2 & \gamma_3 & \gamma_4 & \gamma_5 \\ \gamma_3 & \gamma_4 & \gamma_5 & \gamma_6 \\ \gamma_4 & \gamma_5 & \gamma_6 & \gamma_7 \end{pmatrix}$$

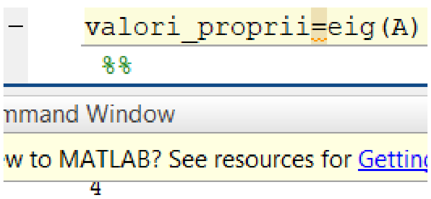
$$\mathrm{H} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1.5 \\ 0 & 0 & 1.5 & -16.5 \\ 0 & 1.5 & -16.5 & 119.25 \\ 1.5 & -16.5 & 119.25 & -694.5 \end{pmatrix}$$

```
Hk =

         0         0         0    1.5000
         0         0    1.5000  -16.5000
         0    1.5000  -16.5000  119.2500
    1.5000  -16.5000  119.2500 -694.5000


rang =

     4
```

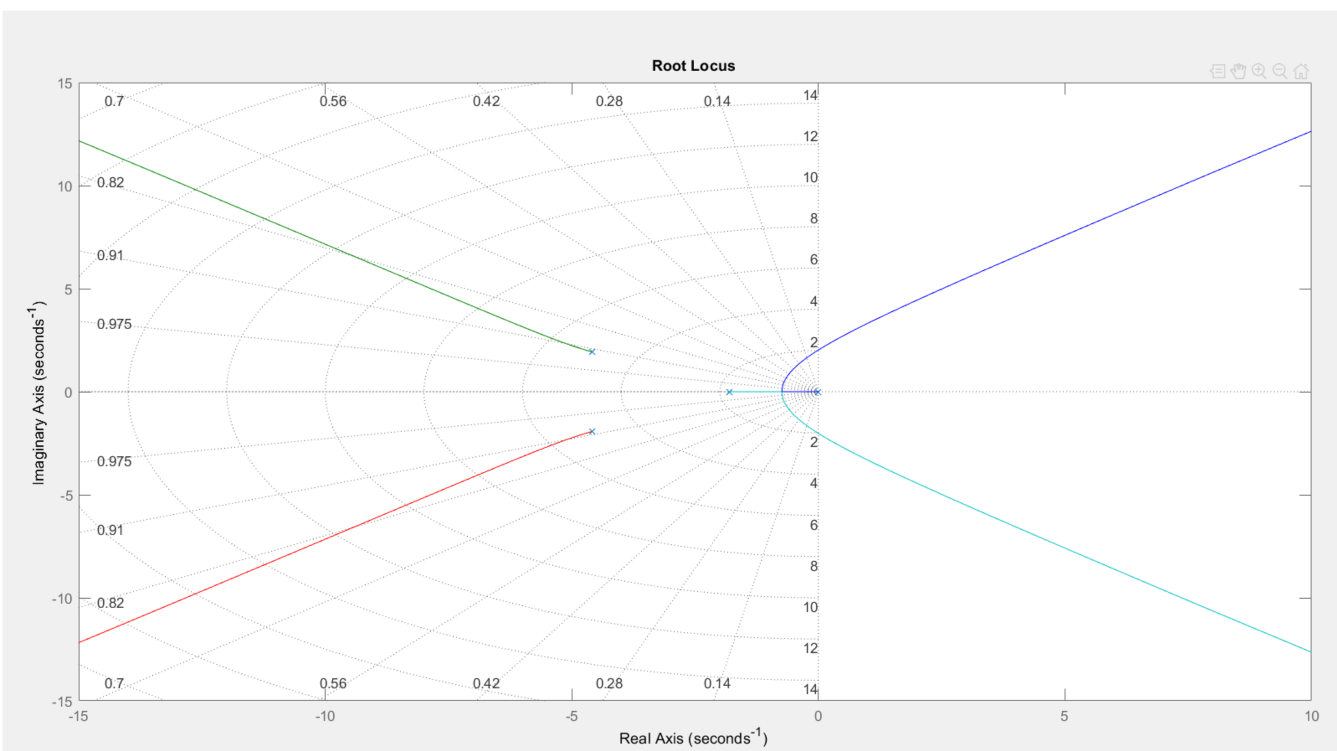
Cu ajutorul functiei rank(Hk) în MATLAB obtinem că rangul matricei H este 4 deci egal cu n=> Funcția de transfer H(s) este deja în formă minimală .

Stabilitatea internă și stabilitatea extrenă

$$H(s) = \frac{1.5}{s^4 + 11s^3 + 41.5s^2 + 45s}$$




```
valori_proprii =

  -4.5953 + 1.9375i
  -4.5953 - 1.9375i
   0.0000 + 0.0000i
  -1.8093 + 0.0000i
```



- știm deja că sistemul este în formă minimală deci polii sistemului coincid cu valorile proprii.
- se poate observa de asemenea ca nu există schimbare de semn intre cei 4 poli cu exceptia celui din origine.

În concluzie , deoarece valorile proprii ale matricii A au partea reală ≤ 0 iar acele valori care au partea reală nulă sunt valori proprii simple(adică sunt rădăcini simple ale polinomului caracteristic cu ordinul de multiplicitate=1) sistemul este **intern stabil.**

OBS. Stabilitatea internă implică stabilitatea externă deci nu mai trebuie verificată și cea externă.(recipoc nu e valabil).Stabilitatea externă se poate observa și in tabelul R.H de la pg 34.

Funcția Lyapunov

Pentru a găsi funcția Lyapunov potrivită sistemului nostru ne vom folosi de MATLAB .Vom porni cu matricea Q definită de matricea unitate.

```
Q= eye(length(A))
P =lyap(A',Q)
valori_proprii_P=eig(P)
%%
```

Command Window

New to MATLAB? See resources for Getting Started.

```
     0     0     0     1


P =

   1.0e+15 *

    2.0016    2.0016    1.0008    0.1001
    2.0016    2.0016    1.0008    0.1001
    1.0008    1.0008    0.5004    0.0500
    0.1001    0.1001    0.0500    0.0050


valori_proprii_P =

   1.0e+15 *

    0.0000
    0.0000
    0.0000
    4.5086
```

Observvăm că încercarea noastră pentru Q ca fiind matricea unitate de ordin 4 nu a fost o alegere potrivită deoarece matricea P nu are toate valorile proprii pozitive(are 3 dintre ele nule).
Funcția-candidat Lyapunov este funcția de energie rezultată cu ajutorul matricei P găsite:

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} \\ p_{12} & p_{22} & p_{23} & p_{24} \\ p_{13} & p_{23} & p_{33} & p_{34} \\ p_{14} & p_{24} & p_{34} & p_{44} \end{pmatrix}$$

$funcția\ energie$:

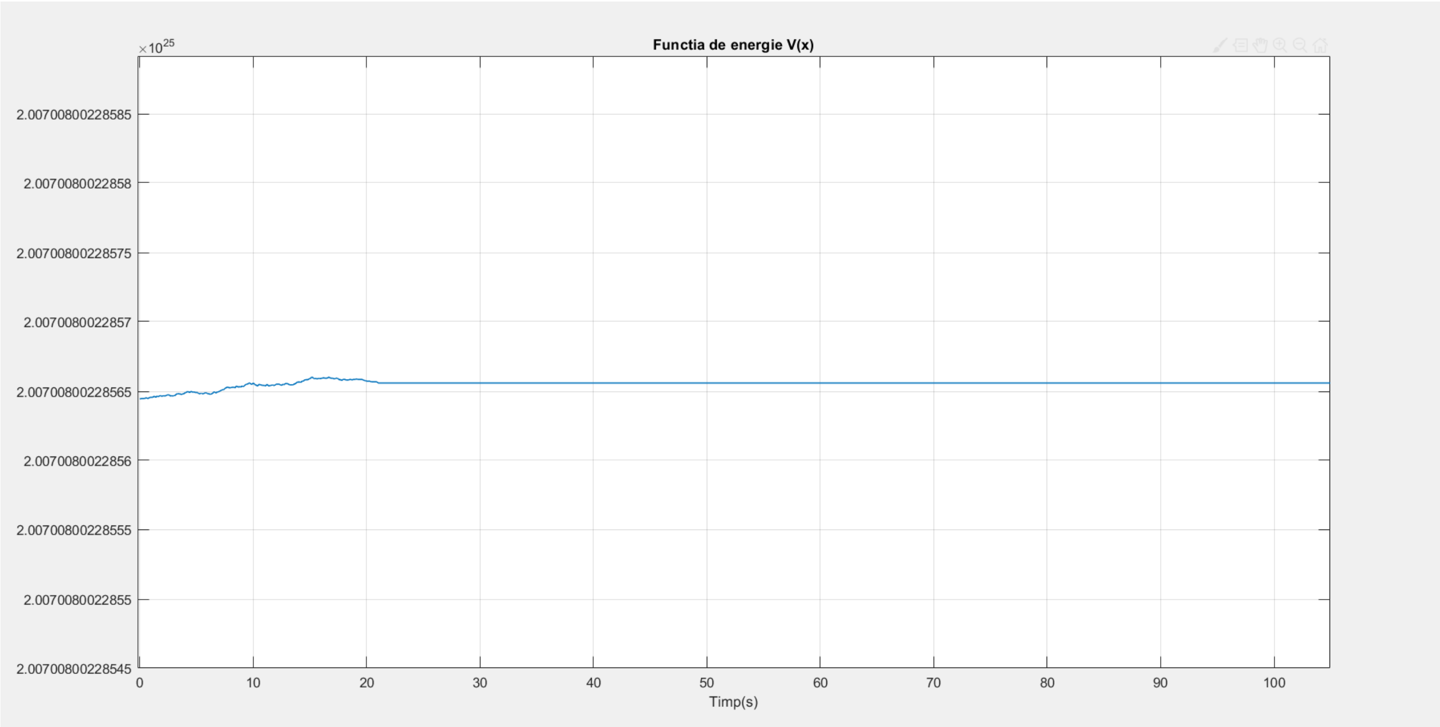
$$V(x) = e^{15} * (X_1 \quad X_2 \quad X_3 \quad X_4) \begin{pmatrix} 2.0016 & 2.0016 & 1.0008 & 0.1001 \\ 2.0016 & 2.0016 & 1.0008 & 0.1001 \\ 1.0008 & 1.0008 & 0.5004 & 0.0500 \\ 0.1001 & 0.1001 & 0.0500 & 0.0050 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{pmatrix}$$

=>

$$V(x) = e^{15} * (x3 * \left(\frac{1251 * x1}{1250} + \frac{1251 * x2}{1250} + \frac{1251 * x3}{2500} + \frac{x4}{20}\right) + x1 * \left(\frac{1251 * x1}{625} + \frac{1251 * x2}{625} + \frac{1251 * x3}{1250} + \frac{1001 * x4}{10000}\right) + x2 * \left(\frac{1251 * x1}{625} + \frac{1251 * x2}{625} + \frac{1251 * x3}{1250} + \frac{1001 * x4}{10000}\right) + x4 * \left(\frac{1001 * x1}{10000} + \frac{1001 * x2}{10000} + \frac{x3}{20} + \frac{x4}{200}\right))$$

Ecuația este lungă și dificil de calculat așa că am atașat răspunsul obținut cu ajutorul Matlab.

Simulare în timp a funcției de energie alese :



Se poate observa faptul ca graficul nu ajunge în jurul valorii 0 precum în cazul sistemelor obișnuite.

Expresia analitică

$$H(s) = \frac{1.5}{s^4 + 11s^3 + 41.5s^2 + 45s}$$
$$= \frac{1.5}{s\ (s + 1.8)\ (s^2\ +\ 9.1s\ +\ 24.8)}$$

Intrare de tip impuls(f. pondere):

$u(t) = \delta(t)$

$$h(t) =\ \mathcal{L}^{-1}\{\frac{1.5}{s^4 + 11s^3 + 41.5s^2 + 45s} * 1\}$$

h(t)= 0.039*exp(-4.6*t)*(cos(1.9*t) + 0.63*sin(1.9*t)) - 0.072*exp(-1.8*t) + 0.033

Intrare de tip treaptă(indicial)

$u(t) = 1(t)$

$$y_i(t) =\ \mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s} * \frac{1.5}{s^4 + 11s^3 + 41.5s^2 + 45s}\}$$

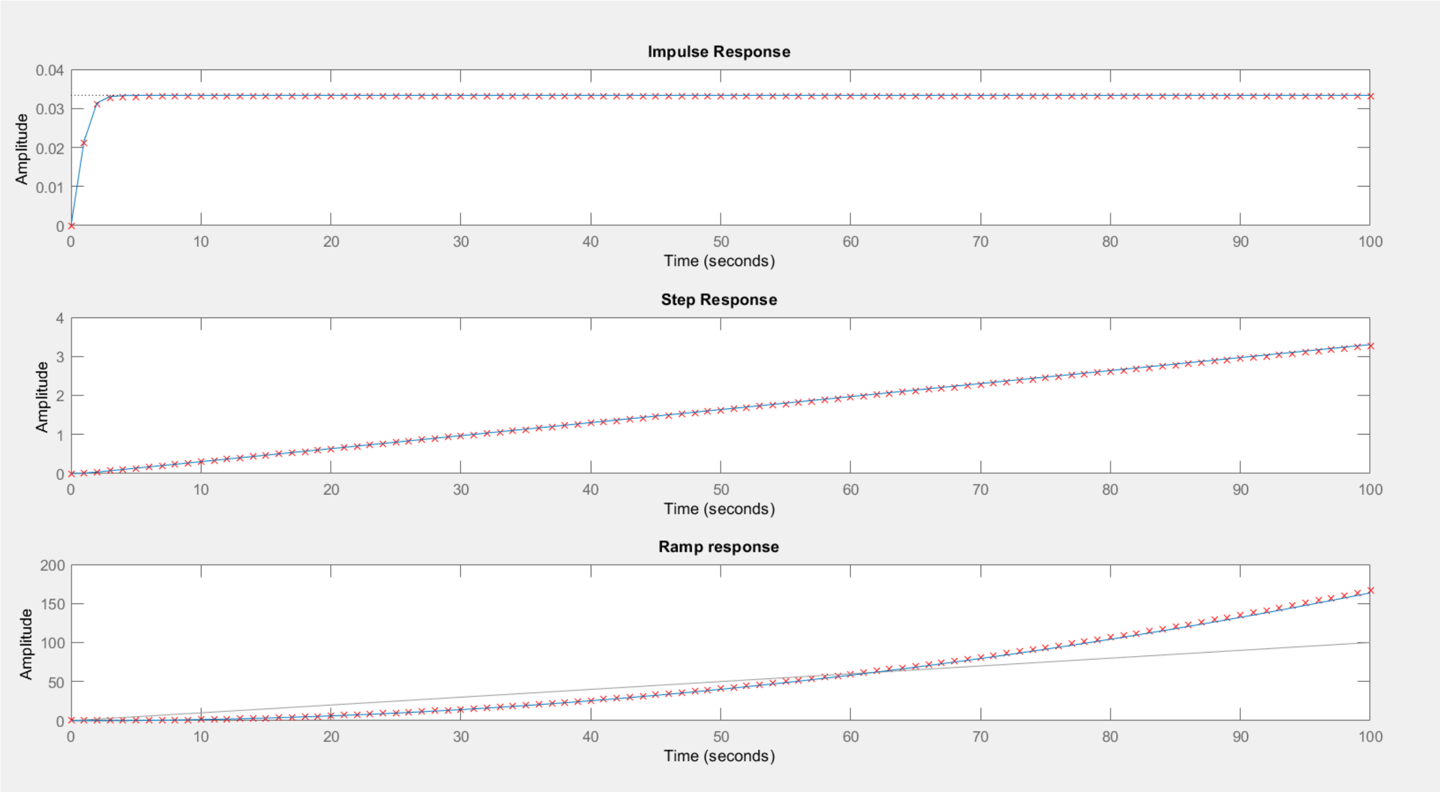
$$y_i(t) = 0.033 * t\ +\ 0.039 * \exp(-1.8 * t) -\ 9.1e - 3 * \exp(-4.6 * t) * (\cos(1.9 * t) +\ 0.17 * \sin(1.9 * t)) -\ 0.031$$

Intrare de tip rampă

$u(t) = t$

$$y_r(t) =\ \mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s^2} * \frac{1.5}{s^4 + 11s^3 + 41.5s^2 + 45s}\}$$

$$y_r(t) = 0.022 * exp(-1.8 * t) - 0.031 * t + 1.8e - 3 * exp(-4.6 * t) * (cos(1.9 * t) - 0.24 * sin(1.9 * t)) + 0.017 * t\text{^}2 + 0.02$$



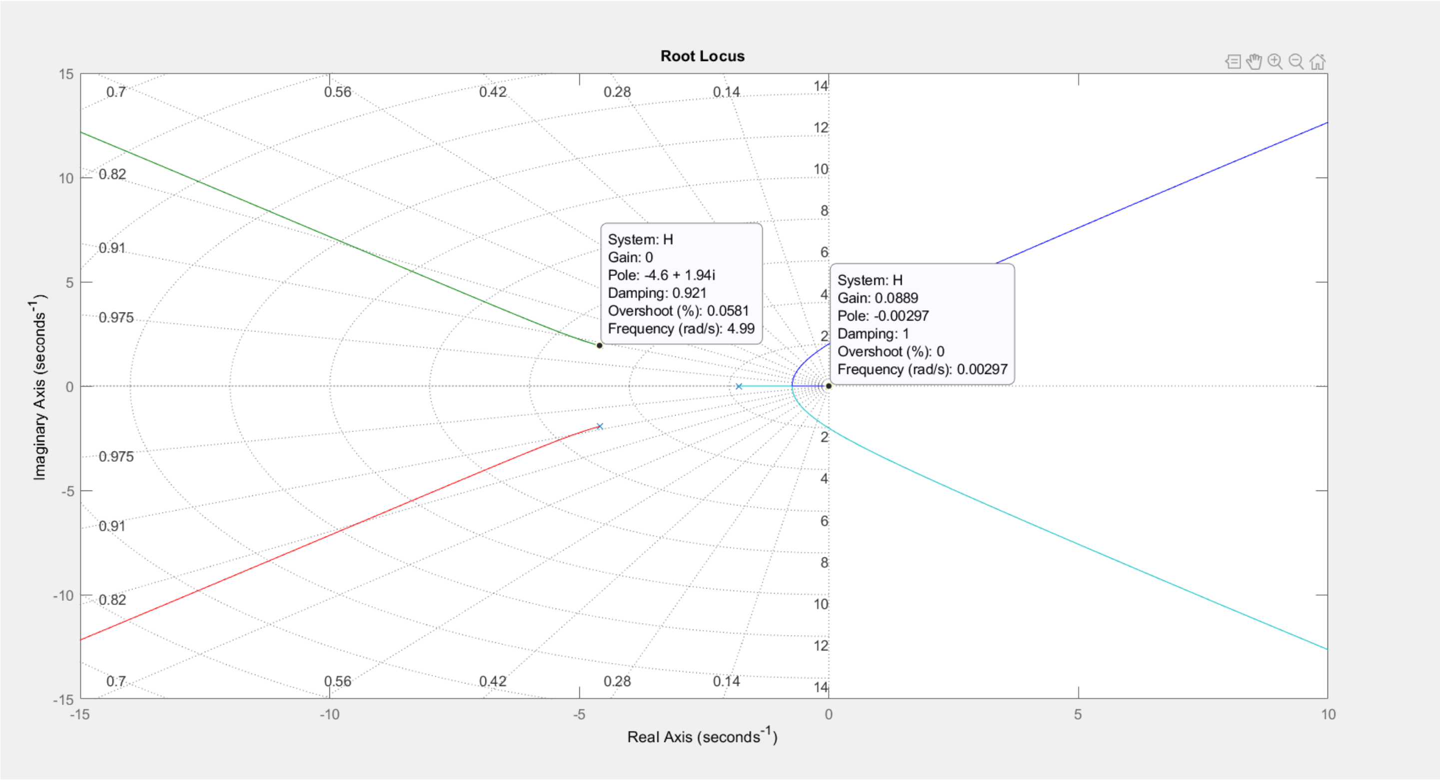
-din grafice putem deduce că inversele Laplace au fost calculate corect deoarece se suprapun cu răspunsul la intrarile date

- deoarece sistemul nu este un sistem de ordin I ,la semnalul de tip treaptă panta de pornire pleacă tangentă față de axa timpului.

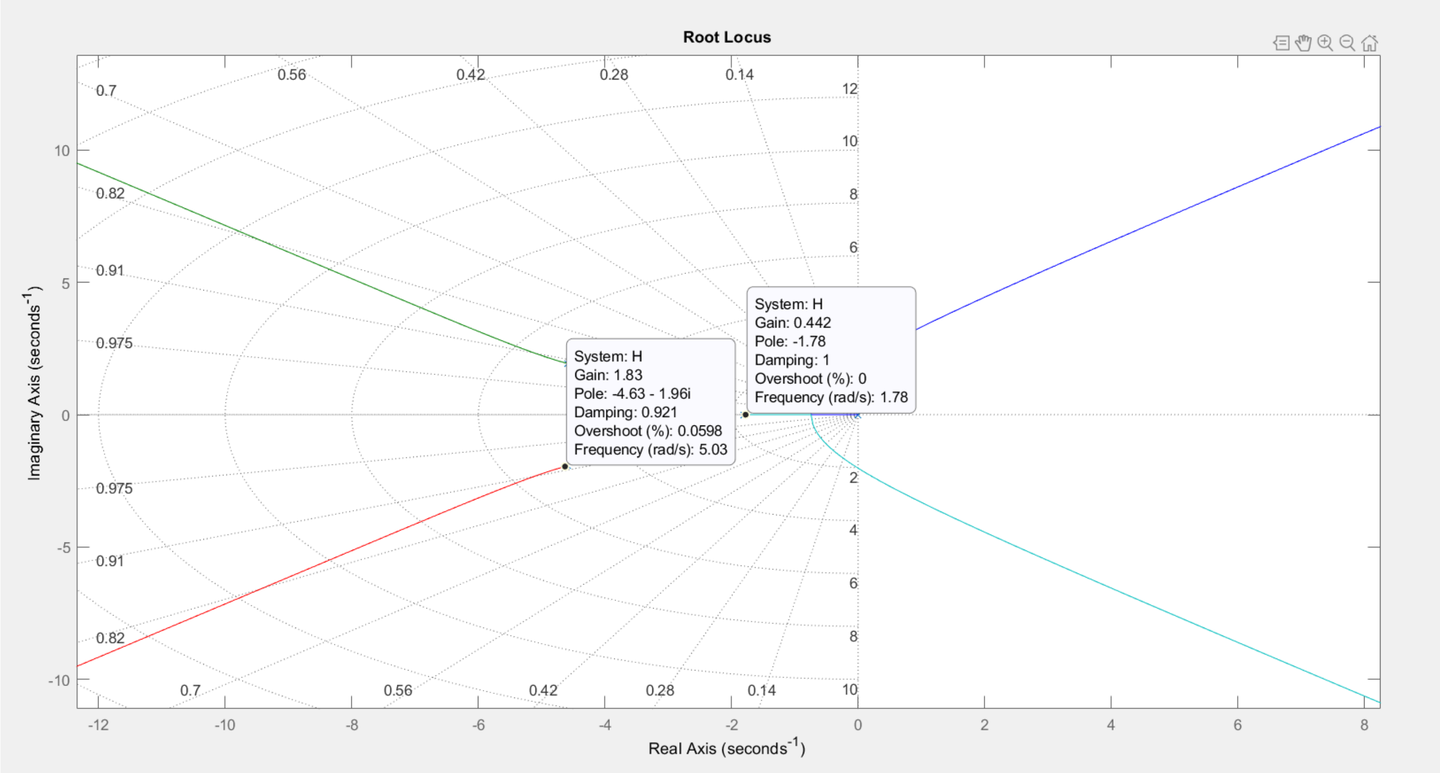
Performanțele sistemului

Factorul de amortizare=ξ->Damping pe grafic
Pulsația naturală a oscilațiilor=$\omega_n = Frequency -> grafic$

Pentru $\widehat{s_1}(dreapta)$ și $\widehat{s_2}(stânga)$:



Pentru $\widehat{s_4}(dreapta)$ și $\widehat{s_3}(stânga)$:



$$H(s) = \frac{1.5}{s^4+11s^3+41.5s^2+45s} = \frac{1.5}{s\,(s+1.809)\,(s\text{^}2 + 9.191s + 24.87)}$$

$\widehat{s_1} = 0$
$\widehat{s_2} =$ -4.5953 +1.9375i

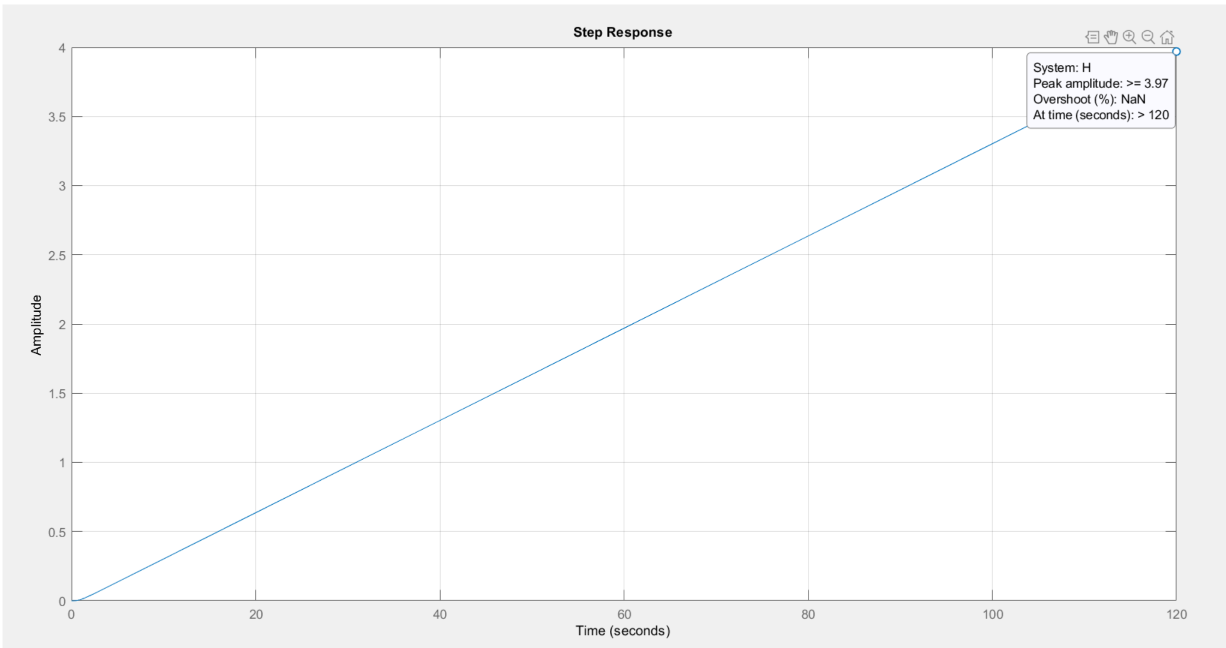
$\widehat{s_3} =$-4.5953 - 1.9375i

$\widehat{s_4} =$-1.8093
Constanta de timp este infulențată doar de polii reali

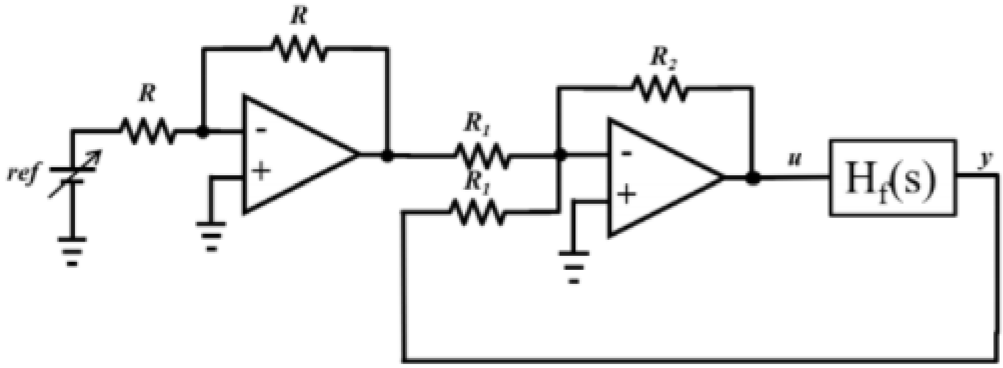
$$T_4 = \frac{1}{|\widehat{s_4}|} = \frac{1}{|-1.8093|} = 0.55$$

Deoarece avem integrator,(pol în origine) la intrarea de tip treaptă vom obține la ieșire o rampă care crește la infinit.

- sistemul e la limita de stabilitate adica timpul de răspuns-> infinit
- nu se poate pune problema de erori în acest caz

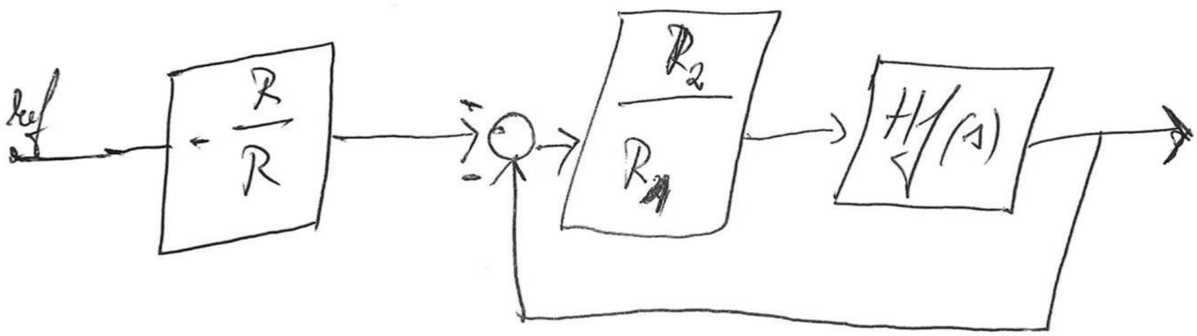


Exercițiul 10



Structura unui sistem de reglare cu regulator proporţional

a)



$$U(s) = -\frac{R_2}{R_1} Ref'(s) - \frac{R_2}{R_1} Y(s) = \frac{R_2}{R_1}(-Ref'(s) - Y(s))$$

$$H_d(s) = \frac{R_2}{R_1} H_f$$

$$H_r(s) = 1$$

$$H_{des}(s) = \frac{R_2}{R_1} H_f$$

$$H_f = \frac{1.5}{s^4 + 11s^3 + 41.5s^2 + 45s}$$

$$H_o(s) = \frac{H_d}{1+H_{des}} = \frac{\frac{R_2}{R_1}H_f}{1+\frac{R_2}{R_1}H_f} = \frac{H_f}{\frac{R_1}{R_2}+H_f}$$

$$= \frac{\frac{1.5}{s^4+11s^3+41.5s^2+45s}}{\frac{R_1}{R_2}+\frac{1.5}{s^4+11s^3+41.5s^2+45s}}$$

$$= \frac{1.5}{\frac{R_1}{R_2}(s^4+11s^3+41.5s^2+45s)+1.5}$$

b)

pentru $\frac{R_1}{R_2} \in (0,\infty)$

$\frac{R_1}{R_2}=k$

$$H(s) = \frac{\frac{R_2}{R_1}H_f}{1+\frac{R_2}{R_1}H_f} = \frac{kH_f}{1+kH_f}$$

$$H_{des}(s) = H_f = \frac{1.5}{s^4+11s^3+41.5s^2+45s}$$

Poli:

$\widehat{s_1} = 0$

$\widehat{s_2} =$ -4.5953 +1.9375i

$\widehat{s_3}$ =-4.5953 - 1.9375i

$\widehat{s_4}$ =-1.8093

n=4

=>4 asimptote

m=0

k'>0

- centrul de greutate(al asimpt.)
  σ=2.7
  Unghiurile asimptotelor față de axa R_+
  $\varphi_{a1} = \frac{\pi}{4}$
  $\varphi_{a2} = \frac{3\pi}{4}$
  $\varphi_{a3} = \frac{5\pi}{4}$
  $\varphi_{a4} = \frac{7\pi}{4}$
  $\varphi_{a5} = \frac{9\pi}{4}$
  $\varphi_{a6} = \frac{11\pi}{4}$
- unghiurile de plecare din poli

$\varphi_{s1} = \pi$
φ_{s2}=-2,18(rad)~ **125 grade**(l=1)

$\varphi_{s3} = 2\pi - \varphi_{s2} = 360 - 125 =$**235 grade**
$\varphi_{s4} =0$

- puncte de ciocnire

$1+kH'_{des}(s) = 0$

$\frac{d}{ds} H'_{des}(s) = 0 \Leftrightarrow 4s^3 + 3 * 11s^2 + 2 * 41.5s + 45 = 0$

Radacini :

- Nu apartin L.R.:

-3.7 + 1.0406i
-3.7 - 1.0406i

- Apartin L.R.:

$-0.721 \Rightarrow k_{des} = -\frac{1}{\text{evalfr}(H, -0.75)} \Rightarrow k_{des1} = 9.79$

(calculate cu ajutorul Matlab)

- Intersectia cu Oy

$$s^4 + 11s^3 + 41.5s^2 + 45s + 1.5k = 0$$

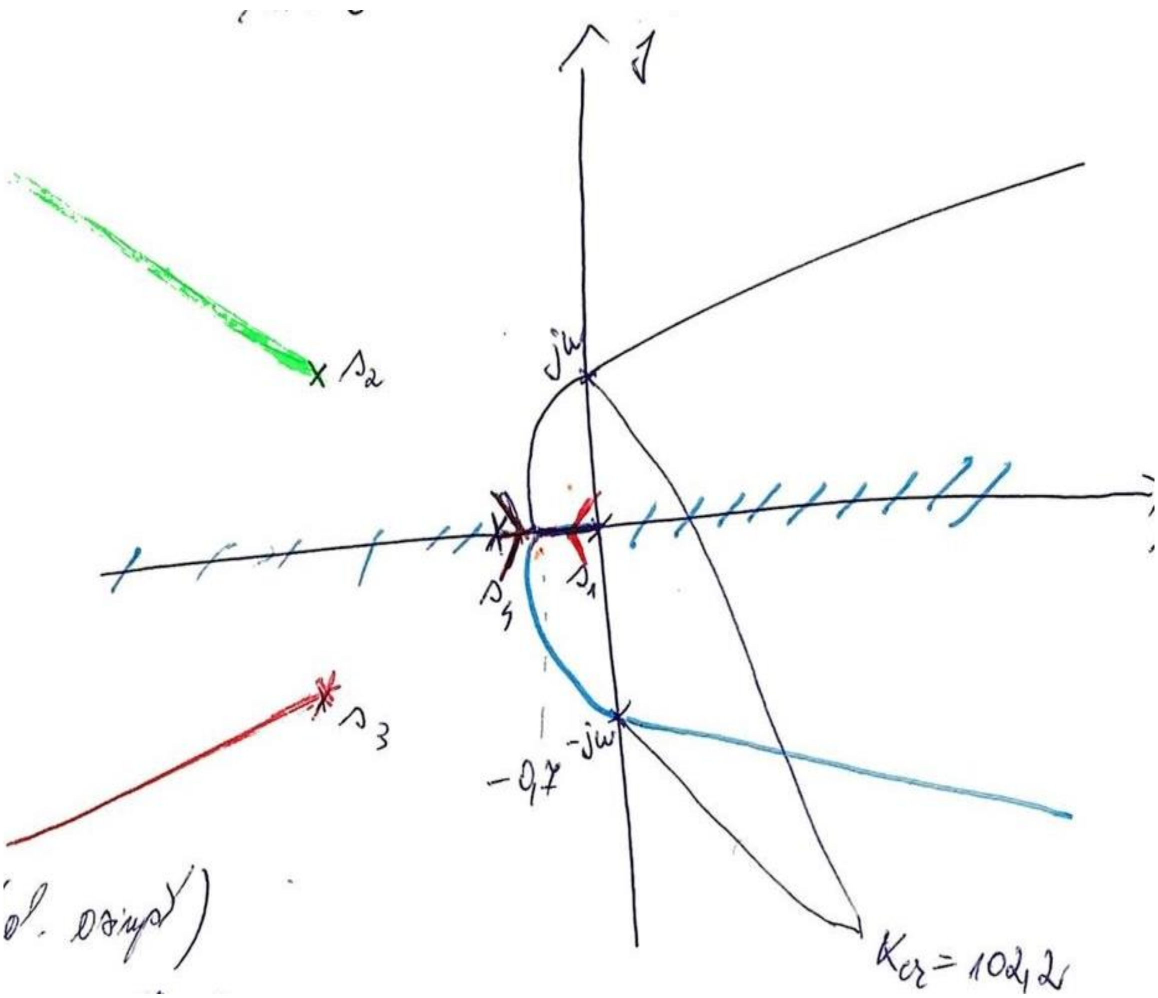
Tabelul R.H

s^4	1	41.5	1.5k
s^3	11	45.5	0
s^2	37.4	-1.5k	
s^1	-45+0.44k		
s^0	$\frac{-0.66k^2 + 67.5k}{-45 + 0.44k}$		

$$k_{cr1} = 102.2$$

$H_o(s)$ stabil extern pentru k>102.2

Trasare L.R



Interpretare:

- *pentru* $k \in (0, 9.79)$*-regim aperiodic amortizat*

  \- *modurile* $e^{\widehat{s_{o1}t}}, e^{\widehat{s_{o2}t}}, e^{\widehat{s_{o3}t}}, e^{\widehat{s_{o4}t}}$
- *pentru* $k = 9.79$*-regim aperiodic critic amortizat*

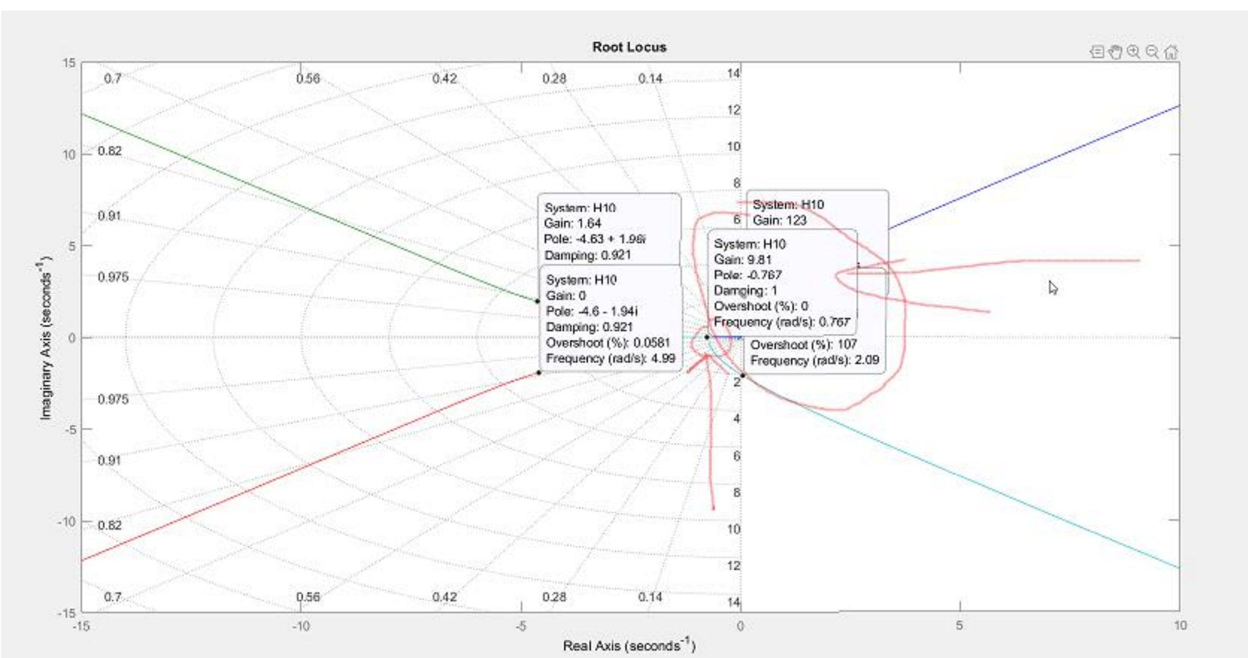
  \- *modurile* $e^{-0.75t}, t\ e^{-0.75t}, e^{\widehat{s_{o2}t}}, e^{\widehat{s_{o3}t}}$
- *pentru* $k \in (\,9.79{,}102{,}2)$*-regim oscilant amortizat*

  \- *modurile* $e^{Re(\widehat{s_{o1,04}t}} sin\ (Im\ (s_{o1,04})t), , e^{\widehat{s_{o2}t}}, e^{\widehat{s_{o3}t}}$
- *pentru* $k = 102.2$*-regim oscilant întreținut*

  \- *modurile* $sin\ (Im\ (s_{o1,04})t), e^{\widehat{s_{o2}t}}, e^{\widehat{s_{o3}t}}$
- *pentru* $k \in (\,102{,}2, \infty)$*-regim oscilant neamortizat*

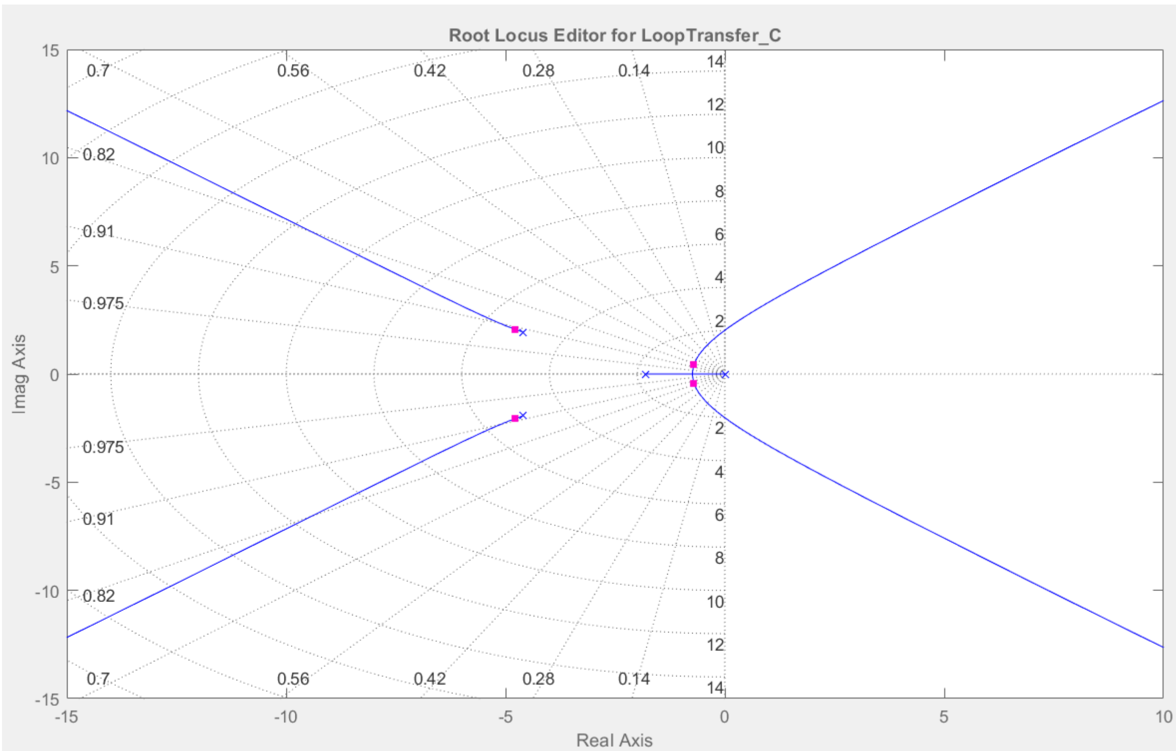
  \- *modurile* $e^{Re(\widehat{s_{o1,04}t}} sin\ (Im\ (s_{o1,04})t), e^{\widehat{s_{o2}t}}, e^{\widehat{s_{o3}t}}$

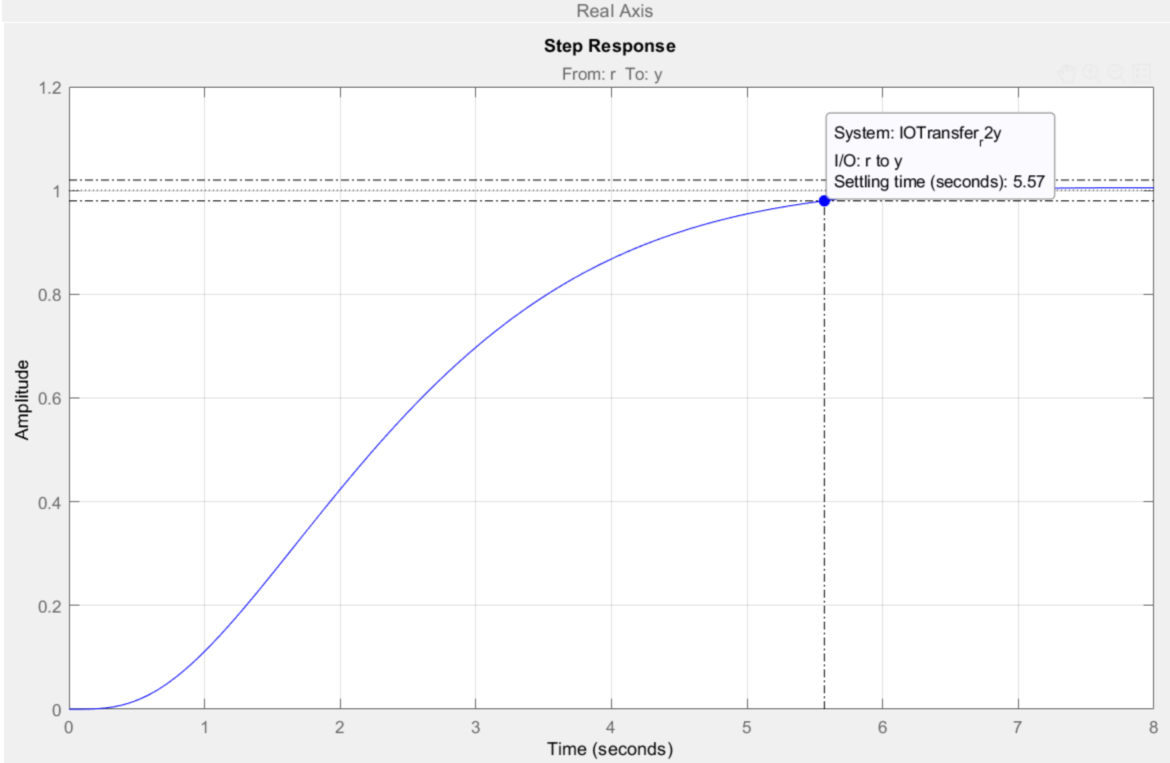
*c) C1)Sistemul are suprareglaj minim pentru k=*9.79



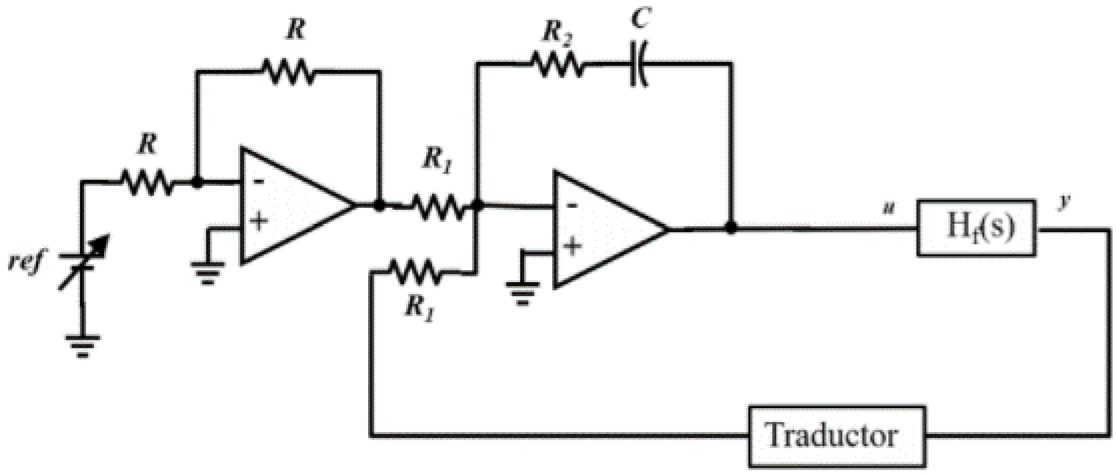
C2

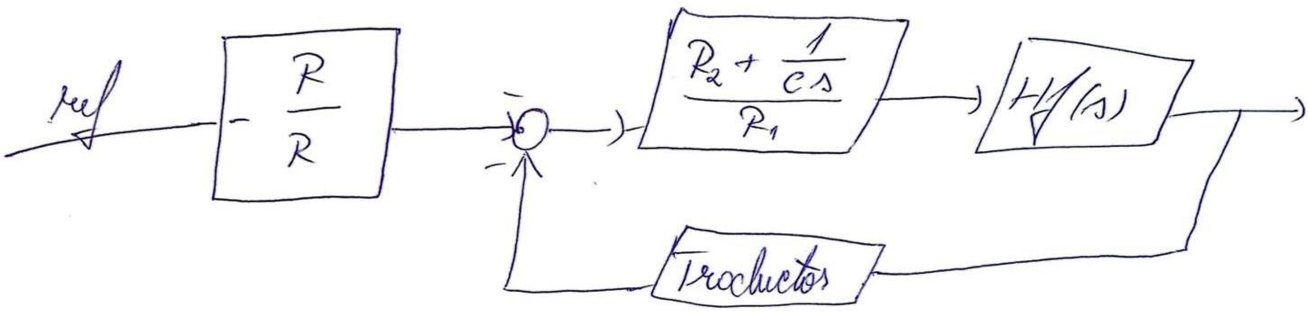
Cel mai mic timp de urcare ~pentru $k \in (9.79, 102{,}2)$





11B.





$$U(s) = -\frac{R_2}{R_1}Ref'(s) - \frac{R_2}{R_1}Y(s) = \frac{R_2+\frac{1}{Cs}}{R_1}(-Ref'(s) - Y(s))$$

$$H_d(s) = \frac{R_2+\frac{1}{Cs}}{R_1}H_f = \frac{R_2}{R_1}(1+\frac{1}{R_2Cs})H_f$$

$$H_r(s) = H_T = \frac{1}{Ts+1}$$

$$H_f = \frac{1.5}{s^4+11s^3+41.5s^2+45s}$$

a)

$$H_R(s) = \frac{R_2 + \frac{1}{Cs}}{R_1} = \frac{R_2}{R_1}(1 + \frac{1}{R_2Cs})$$

b)

$$H_{des}(s) = H_R H_f H_T$$
$$= \frac{R_2}{R_1}(1 + \frac{1}{R_2Cs})\ \frac{1.5}{s^4 + 11s^3 + 41.5s^2 + 45s}\frac{1}{Ts+1}$$

$$H_o(s) = \frac{H_d(s)}{1 + H_{des}(s)} =$$
$$= \frac{\frac{R_2}{R_1}\left(1 + \frac{1}{R_2Cs}\right)\frac{1.5}{s^4 + 11s^3 + 41.5s^2 + 45s}}{1 + \frac{R_2}{R_1}\left(1 + \frac{1}{R_2Cs}\right)\frac{1.5}{s^4 + 11s^3 + 41.5s^2 + 45s}\frac{1}{Ts+1}} =$$
$$= \frac{1}{\frac{R_1}{R_2}\left(\frac{R_2Cs}{R_2Cs+1}\right)\frac{s^4 + 11s^3 + 41.5s^2 + 45s}{1.5} + \frac{1}{Ts+1}}$$

c)

$$H_{des}(s) = H_R H_f H_T$$
$$= \frac{R_2}{R_1}\left(1 + \frac{1}{R_2Cs}\right)\frac{1.5}{s^4 + 11s^3 + 41.5s^2 + 45s}\frac{1}{Ts+1} =$$
$$= \frac{R_2}{R_1}\left(\frac{T_is+1}{T_is}\right)\frac{1.5}{s^4+11s^3+41.5s^2+45s}\frac{1}{Ts+1}$$

Num$=1.5R_2T_is+1.5R_2$

Den$=R_2T_iTs^6 + 11R_2T_iTs^5 + 41.5R_2T_iTs^4 + 45R_2T_iTs^3 + R_2T_is^5 + 11R_2T_is^4 + 41.5R_2T_is^3 + 45R_2T_is^2$

$\alpha(s)+T_i\beta(s)$

α(s)$= 1.5R_2$

β(s) $= R_2Ts^6 + (11T+1)R_2s^5 + (41.5T+11)R_2s^4 + (45T+41.5)R_2s^3 + 45R_2s^2 + 1.5R_2s$

Aleg R_2=1

T=1

α(s)= 1.5

β(s)$= s^6 + 12s^5 + 52.5s^4 + 86.5s^3 + 45s^2 + 1.5s$

$$H_o(s) = \frac{\mathrm{H_R(s)H_f(s)}}{1 + \frac{1}{\mathrm{T_i}}\frac{\alpha(\mathrm{s})}{\beta(\mathrm{s})}}$$

$$\frac{1}{\mathrm{T_i}} = k$$

$$\frac{\alpha(\mathrm{s})}{\beta(\mathrm{s})} = \frac{1.5}{s^6 + 12s^5 + 52.5s^4 + 86.5s^3 + 45s^2 + 1.5s}$$

Poli:

$\widehat{s_1}$ =0

$\widehat{s_2} = -0.0357$

$\widehat{s_3}$ =-0.8949

$\widehat{s_4}$ =-1.8899

$\widehat{s_5}$ =-4.5897 + 1.9371i

$\widehat{s_6}$ =-4.5897 - 1.9371i

n=6

=>6 asimptote

m=0

k'>0

- centrul de greutate(al asimpt.)
  σ=1.18
  Unghiurile asimptotelor față de axa R_+
  $\varphi_{a1} = \frac{\pi}{6}$
  $\varphi_{a2} = \frac{3\pi}{6}$
  $\varphi_{a3} = \frac{5\pi}{6}$
  $\varphi_{a4} = \frac{7\pi}{6}$
  $\varphi_{a5} = \frac{9\pi}{6}$
  $\varphi_{a6} = \frac{11\pi}{6}$
- unghiurile de plecare din poli

$\varphi_{s1} = \pi$
$\varphi_{s2} = 0$
$\varphi_{s3} = \pi$
$\varphi_{s4} = 0$
$\varphi_{s5} = 0{,}316$(rad)~ **18 grade**
$\varphi_{s6} = 2\pi - \varphi_{s5} = 360 - 18 =$ **342 grade**

- puncte de ciocnire

$1+kH'_{des}(s) = 0$

$\frac{d}{ds}H'_{des}(s) = 0 \Leftrightarrow 6s^5 + 12 * 5s^4 + 4 * 52.5s^3 + 3 * 86.5s^2 + 90s + 1.5$

Radacini :

- Nu apartin L.R.:

-3.9765 + 1.4406i
-3.9765 - 1.4406i
-0.5321 + 0.0000i

- Apartin L.R.:

-0.0175 => $k_{des1=}-\frac{1}{\text{evalfr}(\text{H},-0.0175)}$ => $k_{des1=}$0.0866

-1.4973 => $k_{des2=} - \frac{1}{\text{evalfr}(\text{H},-1.4973\,)}$ => $k_{des2} = 4.59$

(calculate cu ajutorul Matlab)

- Intersectia cu Oy

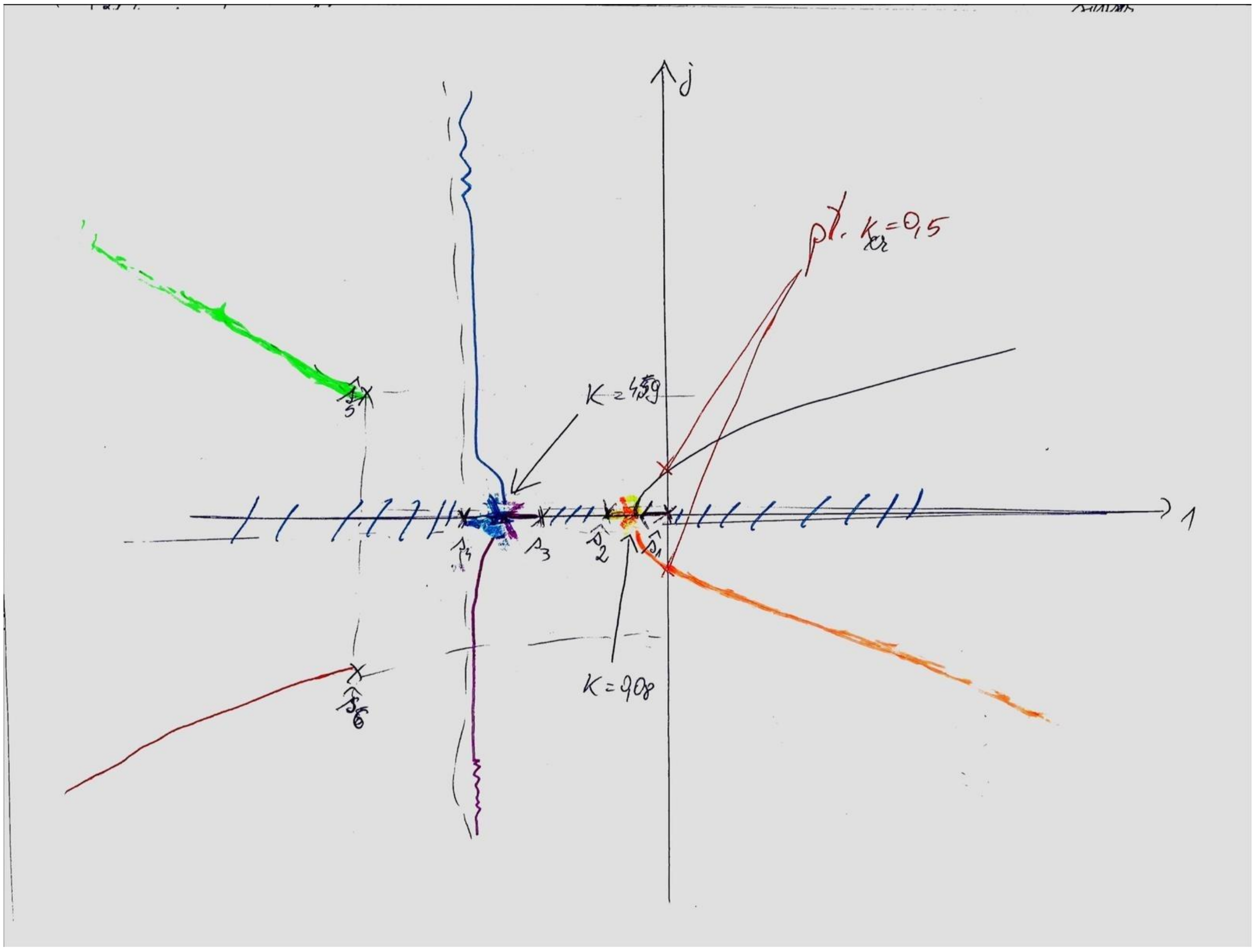
$$s^6 + 12s^5 + 52.5s^4 + 86.5s^3 + 45s^2 + 1.5s + 1.5k = 0$$

Tabelul R.H

s^6	1	52.5	45	1.5k
s^5	12	86.5	1.5	0
s^4	45.2	44.8	-1.5k	
s^3	74.6	1.5-0.3k		
s^2	43.8+0.18k	-1.5k		
s^1	$\frac{-9k^2+16505k+10950}{10(3\mathrm{k}+730)}$			
s^0	$-\frac{9k(3k+730)^2}{10(-9k^2+16505\mathrm{k}+10950)}$			

$k_{cr1=0.5}$

Trasare L.R



Interpretare:

$$\frac{1}{T_i} = k$$

- *pentru* $k \in (0,0.08)$-*regim aperiodic amortizat*

  - *modurile* $e^{\widehat{s_{o1}}t}, e^{\widehat{s_{o2}}t}, e^{\widehat{s_{o3}}t}, e^{\widehat{s_{o4}}t}, e^{\widehat{s_{o5}}t}, e^{\widehat{s_{o6}}t}$

- *pentru* $k = 0.08$*-regim aperiodic critic amortizat*

  - modurile $e^{-0.017t}, t\ e^{-0.017t}, e^{\widehat{s_{o3}t}}, e^{\widehat{s_{o4}t}}, e^{\widehat{s_{o5}t}}, e^{\widehat{s_{o6}t}}$
- *pentru* $k \in\ (\,0.08{,}0.5)$*-regim oscilant amortizat*

- modurile $e^{Re(\widehat{s_{o1,02}t}}sin\ (Im\ (s_{o1,02})t), e^{\widehat{s_{o3}t}}, e^{\widehat{s_{o4}t}}, e^{\widehat{s_{o5}t}}, e^{\widehat{s_{o6}t}}$
- *pentru* $k = 0.5$*-regim oscilant întreținut*

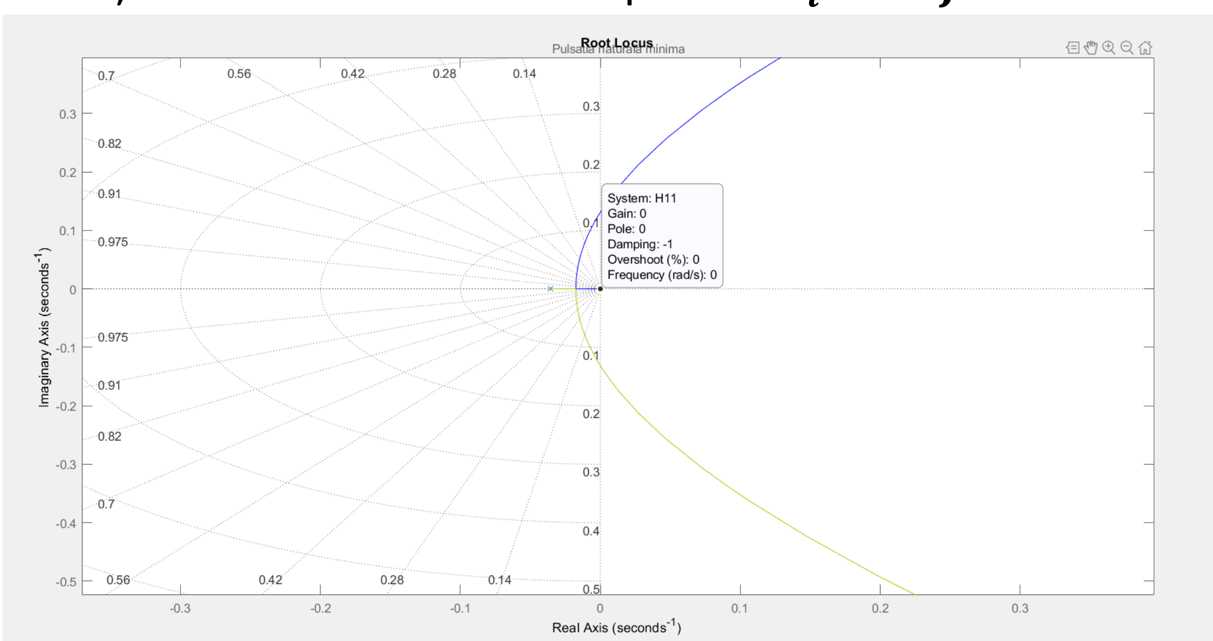
  - modurile $sin\ (Im\ (s_{o1,02})t), e^{\widehat{s_{o3}t}}, e^{\widehat{s_{o4}t}}, e^{\widehat{s_{o5}t}}, e^{\widehat{s_{o6}t}}$
- *pentru* $k \in\ (\,0.5{,}4.59)$*-regim aperiodic amortizat*

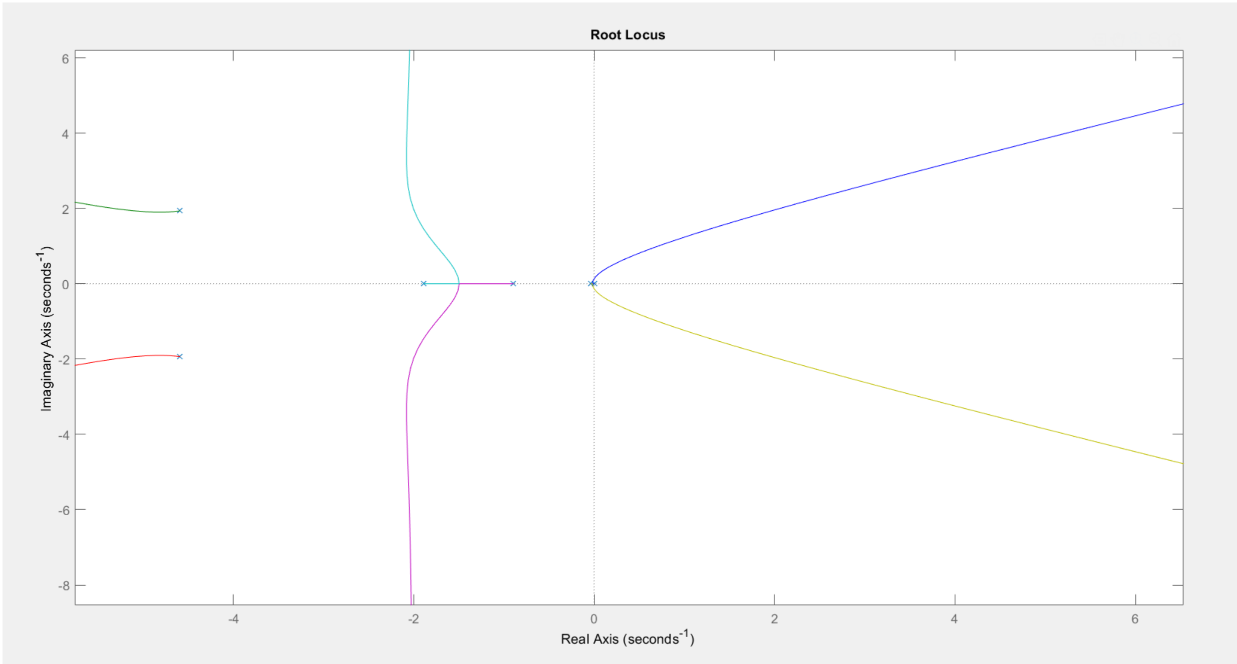
  - modurile $e^{\widehat{s_{o1}t}}, e^{\widehat{s_{o2}t}}, e^{\widehat{s_{o3}t}}, e^{\widehat{s_{o4}t}}, e^{\widehat{s_{o5}t}}, e^{\widehat{s_{o6}t}}$
- *pentru* $k = 4.59$*-regim aperiodic critic amortizat*

  - modurile $e^{-1.49t}, t\ e^{-1.49t}, e^{\widehat{s_{o1}t}}, e^{\widehat{s_{o2}t}}, e^{\widehat{s_{o5}t}}, e^{\widehat{s_{o6}t}}$
- *pentru* $k \in\ (\,4.59, \infty)$*-regim oscilant neamortizat*

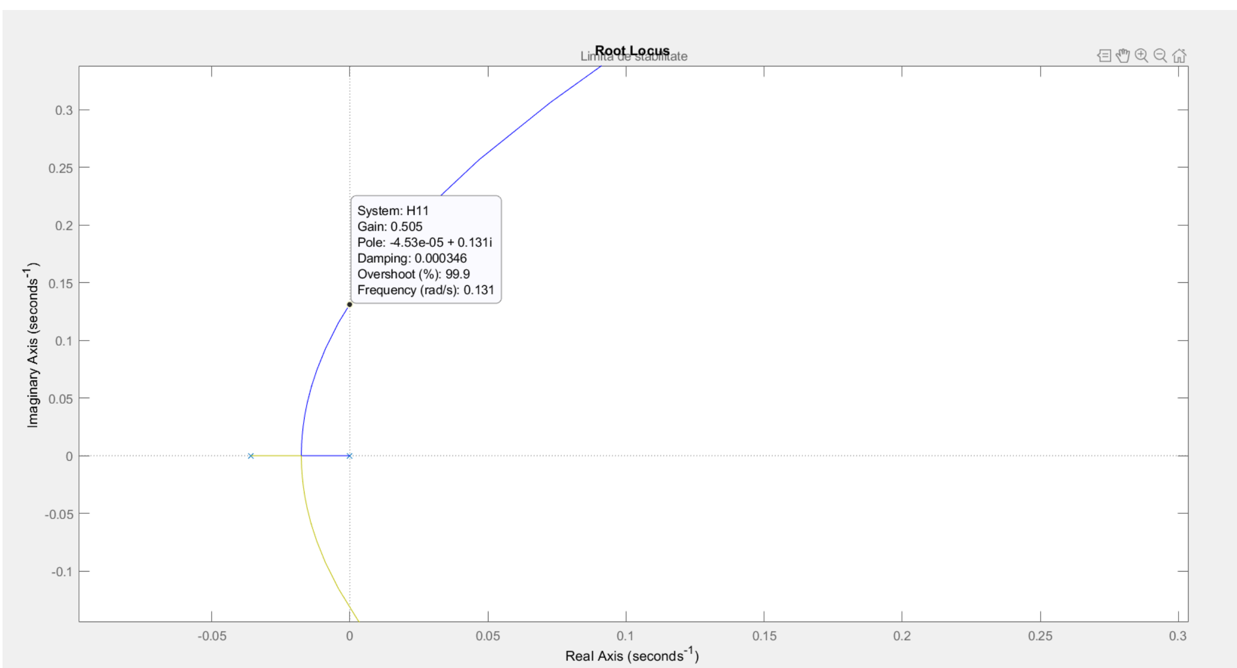
  - modurile $e^{Re(\widehat{s_{o1,04}t}}sin\ (Im\ (s_{o1,02})t)e^{\widehat{s_{o4}t}}, e^{\widehat{s_{o5}t}}, e^{\widehat{s_{o6}t}}$

Pulsația naturală minimă k≅0 pentru $\boldsymbol{T_i \cong inf}$





La limita de stabilitate pentru k≅**0.5 deci** $\boldsymbol{T_i \cong 2}$



Bibliografie

Suport teoretic pentru laborator Teoria Sistemelor-Vlad Mihai Mihaly

Modern Control Engineering-Katsuhiko Ogata

Advanced control Engineering