Методы оптимизации
Семинар 1. Введение

Лобанов Александр Владимирович

Московский физико-технический институт
Факультет инноваций и высоких технологий

lobanov.av@mipt.ru

31 августа 2022 г.

Организационные вопросы

- Староста / Список группы: Б05-027

Организационные вопросы

- Староста / Список группы
- Семинары раз в неделю по четвергам (2-я пара)

Организационные вопросы

- Староста / Список группы
- Семинары раз в неделю по четвергам (2-я пара)
- Все презентации можно найти здесь

Организационные вопросы

- Староста / Список группы
- Семинары раз в неделю по четвергам (2-я пара)
- Все презентации можно найти здесь
- Итог курса - дифференцированный зачет

Как получить оценку?

Как получить оценку?

На сегодняшний день у всех «10».

Как получить оценку?

На сегодняшний день у всех «10».

Важный вопрос: Как сохранить эту оценку до конца семестра?

Как получить оценку?

На сегодняшний день у всех «10».

Важный вопрос: Как сохранить эту оценку до конца семестра?

- Выполнять домашние задания (за невыполненное дз -2 балла)

Как получить оценку?

На сегодняшний день у всех «10».

Важный вопрос: Как сохранить эту оценку до конца семестра?

- Выполнять домашние задания (за невыполненное дз -2 балла)
- Написать контрольные работы (за ненаписанную кр -3 балла)

Как получить оценку?

На сегодняшний день у всех «10».

Важный вопрос: Как сохранить эту оценку до конца семестра?

- Выполнять домашние задания (за невыполненное дз -2 балла)
- Написать контрольные работы (за ненаписанную кр -3 балла)
- Ходить на занятия (при посещении 12 занятий +1 балл)

Как получить оценку?

На сегодняшний день у всех «10».

Важный вопрос: Как сохранить эту оценку до конца семестра?

- Выполнять домашние задания (за невыполненное дз -2 балла)
- Написать контрольные работы (за ненаписанную кр -3 балла)
- Ходить на занятия (при посещении 12 занятий +1 балл)

Что делать, если итоговая оценка не устраивает?

Как получить оценку?

На сегодняшний день у всех «10».

Важный вопрос: Как сохранить эту оценку до конца семестра?

- Выполнять домашние задания (за невыполненное дз -2 балла)
- Написать контрольные работы (за ненаписанную кр -3 балла)
- Ходить на занятия (при посещении 12 занятий +1 балл)

Что делать, если итоговая оценка не устраивает?

- В конце семестра будет зачет (свою оценку можно поднять только на одну ступень)

Например, «Неуд» $\Rightarrow$ «Уд», «Уд» $\Rightarrow$ «Хор», «Хор» $\Rightarrow$ «Отл».

Основные этапы решения задач оптимизации

1. Определение целевой функции ($f_0(x)$)

Основные этапы решения задач оптимизации

1. Определение целевой функции ($f_0(x)$)
2. Определение допустимого множества решений (X)

Основные этапы решения задач оптимизации

1. Определение целевой функции $(f_0(x))$
2. Определение допустимого множества решений (X)
3. Постановка и анализ оптимизационной задачи

Основные этапы решения задач оптимизации

1. Определение целевой функции ($f_0(x)$)
2. Определение допустимого множества решений (X)
3. Постановка и анализ оптимизационной задачи
4. Выбор наилучшего алгоритма для решения поставленной задачи

Основные этапы решения задач оптимизации

1. Определение целевой функции ($f_0(x)$)
2. Определение допустимого множества решений (X)
3. Постановка и анализ оптимизационной задачи
4. Выбор наилучшего алгоритма для решения поставленной задачи
5. Реализация алгоритма и проверка его корректности

Математическая постановка задачи

Постановка задачи

$$\min_{x \in X} f_0(x)$$

$$s.t. f_i(x) \le b_i, \quad i = 1, ..., m.$$

- $x = (x_1, ..., x_n)$
- $f_0 : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$
- $f_i : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}, i = 1, ..., m$

Оптимальное решение $\mathbf{x}^*$ имеет миниальное значение f_0 среди всех векторов, удовлетворяющим условиям ограничениям.

Примеры оптимизационных задач

Пример 1

Примеры оптимизационных задач

Пример 1

Пример 2

Классификация

Задача наименьших квадратов

$$\min_{x \in \mathbf{R}^n} \|Ax - b\|_2^2,$$

где $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$ и $b \in \mathbf{R}^m$

Классификация

Задача наименьших квадратов

$$\min_{x \in \mathbf{R}^n} \|Ax - b\|_2^2,$$

где $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$ и $b \in \mathbf{R}^m$

- Аналитическое решение: $\mathbf{x}^* = (A^T A)^{-1} A^T b$
- Существуют эффективные алгоритмы

Классификация

Задача наименьших квадратов

$$\min_{x \in \mathbf{R}^n} \|Ax - b\|_2^2,$$

где $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$ и $b \in \mathbf{R}^m$

- Аналитическое решение: $\mathbf{x}^* = (A^T A)^{-1} A^T b$
- Существуют эффективные алгоритмы

Выпуклая оптимизация

$$\min_{x \in \mathbf{R}^n} f_0(x),$$

$$s.t. f_i(x) \leq b_i, \quad i = 1, ..., m.$$

Задача наименьших квадратов

$$\min_{x \in \mathbf{R}^n} \|Ax - b\|_2^2,$$

где $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$ и $b \in \mathbf{R}^m$

- Аналитическое решение: $\mathbf{x}^* = (A^T A)^{-1} A^T b$
- Существуют эффективные алгоритмы

Выпуклая оптимизация

$$\min_{x \in \mathbf{R}^n} f_0(x),$$

$$s.t. f_i(x) \leq b_i, \quad i = 1, ..., m.$$

- Нет аналитического решения
- Существуют эффективные алгоритмы

Задача о рационе

Имеется два вида продуктов (условно говоря, колбаса и хлеб), с помощью которых необходимо удовлетворить дневной рацион. Один килограмм хлеба содержит 100 грамм жиров, 300 грамм белков и 600 грамм углеводов, тогда как один килограмм колбасы содержит 500 грамм жиров, 300 грамм белков и 200 грамм углеводов. В рационе человека должно быть не менее 400 грамм жиров, 900 грамм белков и 800 грамм углеводов. Требуется удовлетворить рацион за минимальную цену, если известно, что килограмм хлеба стоит 30 рублей, а килограмм колбасы — 210 рублей.

Задача о рационе

$$\min_{x \in X} f_0(x)$$

$$s.t.$$

Задача о рационе

$$\min_{x \in X} f_0(x) = 210x_1 + 30x_2$$

$$s.t.$$

x_1— количество колбасы, x_2 — количество хлеба

Задача о рационе

$$\min_{x \in X} f_0(x) = 210x_1 + 30x_2$$

$$s.t. \quad 5x_1 + x_2 \geq 4,$$

x_1— количество колбасы, x_2 — количество хлеба

Задача о рационе

$$\min_{x \in X} f_0(x) = 210x_1 + 30x_2$$

$$\begin{aligned} s.t. \quad 5x_1 + x_2 &\geq 4, \\ x_1 + x_2 &\geq 3, \end{aligned}$$

x_1— количество колбасы, x_2 — количество хлеба

Задача о рационе

$$\min_{x \in X} f_0(x) = 210x_1 + 30x_2$$

$$\begin{aligned} s.t. \quad 5x_1 + x_2 &\geq 4, \\ x_1 + x_2 &\geq 3, \\ x_1 + 3x_2 &\geq 4, \end{aligned}$$

x_1— количество колбасы, x_2 — количество хлеба

Задача о рационе

$$\min_{x \in X} f_0(x) = 210x_1 + 30x_2$$

$$\begin{aligned} s.t. \quad 5x_1 + x_2 &\geq 4, \\ x_1 + x_2 &\geq 3, \\ x_1 + 3x_2 &\geq 4, \\ x_1 &\geq 0, \end{aligned}$$

x_1— количество колбасы, x_2 — количество хлеба

$$
\min_{x \in X} f_0(x) = 210x_1 + 30x_2
$$

$$
\begin{aligned}
s.t. \quad 5x_1 + x_2 &\geq 4, \\
x_1 + x_2 &\geq 3, \\
x_1 + 3x_2 &\geq 4, \\
x_1 &\geq 0, \\
x_2 &\geq 0.
\end{aligned}
$$

x_1— количество колбасы, x_2 — количество хлеба

Задача о рационе

$$\min_{x \in X} f_0(x) = 210x_1 + 30x_2$$

$$\begin{aligned} s.t. \quad 5x_1 + x_2 &\geq 4, \\ x_1 + x_2 &\geq 3, \\ x_1 + 3x_2 &\geq 4, \\ x_1 &\geq 0, \\ x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

x_1— количество колбасы, x_2 — количество хлеба,
$X = \{x \mid 5x_1 + x_2 \geq 4, x_1 + x_2 \geq 3, x_1 + 3x_2 \geq 4, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$.

$$
\begin{aligned}
\min_{x \in X} f_0(x) &= 210x_1 + 30x_2 \\
s.t. \quad 5x_1 + x_2 &\geq 4, \\
x_1 + x_2 &\geq 3, \\
x_1 + 3x_2 &\geq 4, \\
x_1 &\geq 0, \\
x_2 &\geq 0.
\end{aligned}
$$

x_1— количество колбасы, x_2 — количество хлеба,
$X = \{x \mid 5x_1 + x_2 \geq 4, x_1 + x_2 \geq 3, x_1 + 3x_2 \geq 4, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$.
$\mathbf{x}^* = (0, 4)$, то есть оптимальный рацион состоит из 4 кг хлеба и 0 кг колбасы.