Домашнее задание № 1

Матрично - векторное дифференцирование

deadline: 23:59 (Московское время), 22 сентября.

1. Найти $\nabla f(x)$ и $f''(x)$, если $f(x) = \frac{1}{2}\|Ax - b\|_2^2$, $x \in \mathbb{R}^n$.
2. Найти $\nabla f(x)$ и $f''(x)$, если $f(x) = \frac{1}{p}\|x\|_2^p$, $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, p — порядковый номер по списку группы (см. табл. успеваемости).
3. Найти $df(X)$ и $\nabla f(X)$, если $f(X) = \|AX - B\|_F$, $X \in \mathbb{R}^{k \times n}$.
4. Найти $df(X)$ и $\nabla f(X)$, если $f(X) = \mathrm{Tr}(AXBX^{-1})$, $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\det(X) \neq 0$.
5. Найти аналитическое выражение градиента, гессиана и сравнить с ответами, полученными любой системой автоматической дифференциации (autograd / jax / pytorch / tensorflow) для следующих функций:

$$1)\ \boxed{f(x) = \frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}Ax + b^{\mathrm{T}}x + c} \quad 2)\ \boxed{f(x) = \frac{1}{2}\|Ax - b\|_2^2} \quad 3)\ \boxed{f(x) = \ln(1 + \exp(ax)).}$$

Формат сдачи: Файл должен быть отправлен на почту lobanov.av@mipt.ru в формате $\boxed{.pdf}$, созданном через LaTeX или через вариант печати «Сохранить как PDF» из блокнота colab \ jupyter notebook.

Домашнее задание № 2

Выпуклые множества. Выпуклые функции

deadline: 23:59 (Московское время), 29 сентября.

1. Проверить на выпуклость множество $\left\{x \in \mathbb{R}^n \mid \alpha \leq a^T x \leq \beta\right\}$.
2. Доказать, что множество квадратных симметричных положительно определенных матриц выпукло.
3. Показать, что гиперболическое множество $\left\{x \in \mathbb{R}^n_+ \mid \prod\limits_{i=1}^n x_i \geq 1\right\}$ выпукло. *Подсказка:* если $a, b \geq 1$ и $0 \leq \theta \leq 1$, тогда $a^\theta b^{1-\theta} \leq \theta a + (1-\theta)b$.

4. Показать, что $f(x)$ является выпуклой функцией, используя критерии первого и второго порядка, если $f(x) = \sum_{i=1}^n x_i^4$.

5. Найти значения a, b, c, где $f(x, y, z) = x^2 + 2axy + by^2 + cz^2$ является выпуклой, строго выпуклой и сильно выпуклой.

6. Доказать, что добавление $\lambda\|x\|_2^2$ к любой выпуклой функции $g(x)$ обеспечивает сильную выпуклость результирующей функции $f(x) = g(x) + \lambda\|x\|_2^2$. Найдите константу сильной выпулости μ.

Формат сдачи: Файл должен быть отправлен на почту lobanov.av@mipt.ru в формате $\boxed{.pdf}$, созданном через LaTeX.

Домашнее задание № 3

Табличная реализация Симплекс-метода. Скорость сходимости. Методы 0-порядка глобальной оптимизации

deadline: 23:59 (Московское время), 17 ноября.

1. Решите задачу линейного программирования табличной реализацией Симплекс-метода и сделайте проверку (через любой solver):

$$\begin{aligned} &\max_x c^\top x \\ \text{s.t. } &Ax \le b \\ &x_i \ge 0, \end{aligned}$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 4 & 2 & 4 \\ 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 240 \\ 200 \\ 160 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

2. Решите ЗЛП табличной реализацией М-метода (Двухфазный Симплекс-метод) и сделайте проверку (через любой solver):

$$\begin{aligned} &\min x_1 + x_2 + x_3 - x_4 \\ \text{s.t. } &x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3 \\ &-x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 2 \\ &4x_2 + 9x_3 = 5 \\ &3x_3 + x_4 = 2 \\ &x_{1,2,3,4} \ge 0 \end{aligned}$$

3. Используя Ratio test, покажите, что последовательность $r_k = \left\{\frac{1}{k}\right\}_{k=1}^{\infty}$ не имеет линейную скорость сходимости.

4. Определите скорость сходимости следующей последовательности: $r_k = 0.707^k$.

5. Используя пять методов глобальной оптимизации 0-порядка решите задачу максимизации функции, представленной в Jupiter notebook семинара № 10.

$$\max_{x \in Q \subset \mathbb{R}} f(x),$$

где $Q = [-10; 10]$. При решении оптимизационной задачи следует использовать (как минимум) 2 алгоритма, не рассказанных на семинаре.

Замечание: В решении задания №5 должно присутствовать:

- краткое описание идей алгоритмов, которые были использованы;
- анализ своих результатов;
- вывод, содержащий информацию какой алгоритм лучше работает.

Формат сдачи: Файл должен быть отправлен на почту lobanov.av@mipt.ru в формате $\boxed{.pdf}$, созданном через LaTeX или через вариант печати «Сохранить как PDF» из блокнота colab \ jupyter notebook.

Домашнее задание № 4

Сходимость метода Ньютона. Квазиньютоновские методы

deadline: 17:59 (Московское время), 7 декабря.

1. Рассмотрите следующую функцию:

$$f(x, y) = \frac{x^4}{4} - x^2 + 2x + (y-1)^2$$

И точку старта $x_0 = (0, 2)^\top$. Как ведет себя метод Ньютона, запущенный с этой точки? Чем это можно объяснить? Как ведет себя градиентный спуск с фикисрованным шагом $\alpha = 0.01$ и метод наискорейшего спуска в таких же условиях?

2. Реализуйте на языке python: **метод Ньютона** для минимизации следующих функций:

- Квадратичная форма $f(x) = \dfrac{1}{2}x^\top Ax + b^\top x, \quad x \in \mathbb{R}^n, A \in \mathbb{S}_+^{n \times n}$. Попробуйте n = 2, 50, 228
- Функция Розенброка $f(x, y) = (1-x)^2 + 100(y - x^2)^2$.

Сравните реализованный Вами метод И метод **BFGS** из библиотеки *scipy*, а так же его модификацию **L-BFGS** в решении задачи минимизации описанных выше функций. Точку старта необходимо инициализировать одинаковую для всех методов в рамках одного запуска. Необходимо провести не менее 10 запусков для каждого метода на каждой функции до достижения того критерия остановки, который вы выберете (например, расстояние до точки оптимума - во всех задачах мы её знаем).

В качестве результата нужно заполнить таблички, которые представлены в материалах *Семинара 13*, заполнив в них усредненное по числу запусков количество итераций, необходимых для сходимости и времени работы.

Формат сдачи: Файл должен быть отправлен на почту lobanov.av@mipt.ru в формате $\boxed{.pdf}$, созданном через LaTeX или через вариант печати «Сохранить как PDF» из блокнота colab \ jupyter notebook.
