

Домашнее задание № 1

Матрично - векторное дифференцирование

deadline: 23:59 (Московское время), 22 сентября.

1. Найти $\nabla f(x)$ и $f''(x)$, если $f(x) = \frac{1}{2}\|Ax - b\|_2^2$, $x \in \mathbb{R}^n$.
2. Найти $\nabla f(x)$ и $f''(x)$, если $f(x) = \frac{1}{p}\|x\|_2^p$, $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, p — порядковый номер по списку группы (см. табл. успеваемости).
3. Найти $df(X)$ и $\nabla f(X)$, если $f(X) = \|AX - B\|_F$, $X \in \mathbb{R}^{k \times n}$.
4. Найти $df(X)$ и $\nabla f(X)$, если $f(X) = \text{Tr}(AXBX^{-1})$, $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\det(X) \neq 0$.
5. Найти аналитическое выражение градиента, гессиана и сравнить с ответами, полученными любой системой автоматической дифференциации (autograd / jax / pytorch / tensorflow) для следующих функций:

1) $f(x) = \frac{1}{2}x^T Ax + b^T x + c$ 2) $f(x) = \frac{1}{2}\|Ax - b\|_2^2$ 3) $f(x) = \ln(1 + \exp(ax))$.

Формат сдачи: Файл должен быть отправлен на почту lobanov.av@mipt.ru в формате `.pdf`, созданном через LaTeX или через вариант печати «Сохранить как PDF» из блокнота colab \ jupyter notebook.

Домашнее задание № 2

Выпуклые множества. Выпуклые функции

deadline: 23:59 (Московское время), 29 сентября.

1. Проверить на выпуклость множество $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \alpha \leq a^T x \leq \beta\}$.
2. Доказать, что множество квадратных симметричных положительно определенных матриц выпукло.
3. Показать, что гиперболическое множество $\left\{x \in \mathbb{R}_+^n \mid \prod_{i=1}^n x_i \geq 1\right\}$ выпукло. *Подсказка:* если $a, b \geq 1$ и $0 \leq \theta \leq 1$, тогда $a^\theta b^{1-\theta} \leq \theta a + (1 - \theta)b$.

4. Показать, что $f(x)$ является выпуклой функцией, используя критерии первого и второго порядка, если $f(x) = \sum_{i=1}^n x_i^4$.
5. Найти значения a, b, c , где $f(x, y, z) = x^2 + 2axy + by^2 + cz^2$ является выпуклой, строго выпуклой и сильно выпуклой.
6. Доказать, что добавление $\lambda\|x\|_2^2$ к любой выпуклой функции $g(x)$ обеспечивает сильную выпуклость результирующей функции $f(x) = g(x) + \lambda\|x\|_2^2$. Найдите константу сильной выпуклости μ .

Формат сдачи: Файл должен быть отправлен на почту lobanov.av@mipt.ru в формате `.pdf`, созданном через LaTeX.

Домашнее задание № 3

**Табличная реализация Симплекс-метода. Скорость сходимости.
Методы 0-порядка глобальной оптимизации**

deadline: 23:59 (Московское время), 17 ноября.

1. Решите задачу линейного программирования табличной реализацией Симплекс-метода и сделайте проверку (через любой solver):

$$\begin{aligned} & \max_x c^\top x \\ & \text{s.t. } Ax \leq b \\ & \quad x_i \geq 0, \end{aligned}$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 4 & 2 & 4 \\ 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 240 \\ 200 \\ 160 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

2. Решите ЗЛП табличной реализацией М-метода (Двухфазный Симплекс-метод) и сделайте проверку (через любой solver):

$$\begin{aligned} & \min x_1 + x_2 + x_3 - x_4 \\ & \text{s.t. } x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3 \\ & \quad -x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 2 \\ & \quad 4x_2 + 9x_3 = 5 \\ & \quad 3x_3 + x_4 = 2 \\ & \quad x_{1,2,3,4} \geq 0 \end{aligned}$$

3. Используя Ratio test, покажите, что последовательность $r_k = \left\{\frac{1}{k}\right\}_{k=1}^\infty$ не имеет линейную скорость сходимости.

4. Определите скорость сходимости следующей последовательности: $r_k = 0.707^k$.
5. Используя пять методов глобальной оптимизации 0-порядка решите задачу максимизации функции, представленной в Jupiter notebook семинара № 10.

$$\max_{x \in \mathbb{R}} f(x)$$

При решении оптимизационной задачи следует использовать (как минимум) 2 алгоритма, не рассказанных на семинаре.

Замечание: В решении задания №5 должно присутствовать:

- краткое описание идей алгоритмов, которые были использованы;
- анализ своих результатов;
- вывод, содержащий информацию какой алгоритм лучше работает.

Формат сдачи: Файл должен быть отправлен на почту lobanov.av@mipt.ru в формате `.pdf`, созданном через LaTeX или через вариант печати «Сохранить как PDF» из блокнота colab \ jupyter notebook.
