FEUILLE D'EXERCICES DU CHAPITRE 2

Exercice 1. Soient V et W des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels et $f\colon \mathrm{V}^n \to \mathrm{W}$ une application n-linéaire. Soit $\lambda \in \mathrm{K}$ et $x, y \in \mathrm{V}$.

(1) Exprimer $f(\lambda x, \dots, \lambda x)$ en termes de $f(x, \dots, x)$.

(2) Pour $n = 2, 3$ développer respectivement $f(x+y, x+y)$ et $f(x+y, x+y, x+y)$.

(3) On suppose f symétrique. Que deviennent les formules précédentes ?

(4) On suppose f symétrique mais n quelconque. Donner une formule pour $f(x+y, \dots, x+y)$.

Démonstration. (1) Par linéarité en chaque variable on a

$$f(\lambda x, \dots, \lambda x) = \lambda^n f(x, \dots, x).$$

(2) On a

$$\begin{aligned} f(x+y, x+y) =& f(x,x) + f(x,y) + f(y,x) + f(y,y), \\ f(x+y, x+y, x+y) =& f(x,x,x) + f(x,x,y) + f(x,y,x) + f(x,y,y) \\ &+ f(y,x,x) + f(y,x,y) + f(y,y,x) + f(y,y,y). \end{aligned}$$

(3) Par symétrique on obtient

$$\begin{aligned} f(x+y, x+y) =& f(x,x) + 2f(x,y) + f(y,y), \\ f(x+y, x+y, x+y) =& f(x,x,x) + 3f(x,x,y) + 3f(y,y,x) + f(y,y,y). \end{aligned}$$

(4) Pour un sous-ensemble $\mathrm{I} \subseteq \{1, \dots, n\}$ et $i \in \{1, \dots, n\}$ on écrit $z_{\mathrm{I},i} = x$ si $i \in \mathrm{I}$ et $z_{\mathrm{I},i} = y$ sinon. En utilisant la multilinéarité on obtient

$$f(x+y, \dots, x+y) = \sum_{\mathrm{I} \subseteq \{1, \dots, n\}} f(z_{\mathrm{I},1}, \dots, z_{\mathrm{I},n}).$$

Si $|\mathrm{I}| = k$, alors par symétrie on a

$$f(z_{\mathrm{I},1}, \dots, z_{\mathrm{I},n}) = f(\underbrace{x, \dots, x}_{k \text{ fois}}, \underbrace{y, \dots, y}_{n-k \text{ fois}}).$$

Cette dernière expression ne dépend que de la cardinalité du sous-ensemble I, donc

$$f(x+y, \dots, x+y) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{\substack{\mathrm{I} \subseteq \{1, \dots, n\} \\ |\mathrm{I}| = k}} f(\underbrace{x, \dots, x}_{k \text{ fois}}, \underbrace{y, \dots, y}_{n-k \text{ fois}}) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f(\underbrace{x, \dots, x}_{k \text{ fois}}, \underbrace{y, \dots, y}_{n-k \text{ fois}}),$$

car il y a $\binom{n}{k}$ sous-ensembles de taille k dans un ensemble de taille n. □

Exercice 2. On considère l'application $\omega\colon \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ définie par

$$\omega(x, y) = x_1 y_2 - x_2 y_1 + x_3 y_4 - x_4 y_3$$

où $x = (x_1, \dots, x_4)$ et $y = (y_1, \dots, y_4)$.

(1) Montrer que ω est une application bilinéaire antisymétrique.

(2) En déduire que si $x, y \in \mathbb{R}^4$ sont liés alors $\omega(x, y) = 0$.

(3) La réciproque est-elle vraie ?

Démonstration. On remarque tout d'abord qu'on peut écrire

$$\omega(x,y) = \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{pmatrix}.$$

(1) Le déterminant est bilinéaire anti-symétrique et la combinaison de formes bilinéaires anti-symétrique est encore bilinéaire anti-symétrique.

(2) Quitte à échanger x et y on peut supposer $y = \lambda x$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors

$$\omega(x,y) = \omega(x, \lambda x) = \lambda \omega(x,x) = 0$$

car $\omega(x,x) = -\omega(x,x)$ par anti-symétrie.

(3) No. Par exemple $\omega(e_1, e_4) = 0$. □

Exercice 3. Soit $\mathrm{A} = (a_{i,j})_{i,j=1,\ldots,8}$ une matrice carrée de taille 8 à coefficients dans un corps K. Dans la formule de det(A) déterminer le signe correspondant aux termes suivants :

(1) $a_{1,8}a_{2,7}a_{3,1}a_{4,6}a_{5,3}a_{6,4}a_{7,2}a_{8,5}$;

(2) $a_{1,8}a_{2,1}a_{3,3}a_{4,6}a_{5,5}a_{6,7}a_{7,4}a_{8,2}$;

(3) $a_{1,3}a_{2,6}a_{3,4}a_{4,5}a_{5,1}a_{6,8}a_{7,7}a_{8,2}$;

(4) $a_{1,6}a_{2,5}a_{3,4}a_{4,1}a_{5,2}a_{6,3}a_{7,7}a_{8,8}$.

Démonstration. Il s'agit de calculer la décomposition en cycles et la signature des permutations suivantes :

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 7 & 1 & 6 & 3 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix} = (1853)(27)(46) \qquad \varepsilon(\sigma_1) = -1$$

$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 1 & 3 & 6 & 5 & 7 & 4 & 2 \end{pmatrix} = (182)(3)(467)(5) \qquad \varepsilon(\sigma_2) = 1$$

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 6 & 4 & 5 & 1 & 8 & 7 & 2 \end{pmatrix} = (1345)(268)(7) \qquad \varepsilon(\sigma_3) = -1$$

$$\sigma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 5 & 4 & 1 & 2 & 3 & 7 & 8 \end{pmatrix} = (1634)(25)(7)(8) \qquad \varepsilon(\sigma_4) = 1.$$

□

Exercice 4. On considère la permutation sur 8 élements suivante :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 7 & 2 & 1 & 3 & 4 & 8 & 5 \end{pmatrix}.$$

Soit $\mathrm{A} = (a_{ij}) \in \mathrm{M}_8(\mathbb{Q})$ avec $a_{ij} = 1$ si $j = \sigma(i)$ et $a_{ij} = 5$ sinon. Montrer que $\det(\mathrm{A}) - 1$ est un multiple de 25. (*Indication.* Utiliser la formule explicite de det(A) et remarquer que si $\tau \in \mathrm{S}_8 \smallsetminus \{\sigma\}$ alors σ et τ diffèrent en deux valeurs.)

Démonstration. Par la formule explicite du déterminant on a

$$\det \mathrm{A} = \sum_{\tau \in \mathrm{S}_8} \varepsilon(\tau) \prod_{i=1}^{8} a_{i\tau(i)} = \varepsilon(\sigma) + \sum_{\tau \in \mathrm{S}_8 \smallsetminus \{\sigma\}} \varepsilon(\tau) \prod_{i=1}^{8} a_{i\tau(i)}$$

car $a_{i\sigma(i)} = 1$ pour tout $i = 1, \ldots, 8$. Or $\sigma = (164)(27853)$ donc $\varepsilon(\sigma) = 1$. Pour conclure il suffit de voir que pour tout $\tau \in \mathrm{S}_8 \smallsetminus \{\sigma\}$ le produit $\prod_{i=1}^{8} a_{i\tau(i)}$ est divisible par 25. Par définition de A cela revient à montrer qu'il existe $i, j \in \{1, \ldots, 8\}$ distincts tels que $\tau(i) \neq \sigma(i)$ et $\tau(j) \neq \sigma(j)$. Supposons en effet qu'il existe $i \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $\sigma(j) = \tau(j)$ pour tout $j \neq i$. Comme σ et τ sont bijectives on a

$$\{\sigma(i)\} = \{1, \ldots, n\} \smallsetminus \{\sigma(j) : j \neq i\} = \{1, \ldots, n\} \smallsetminus \{\tau(j) : j \neq i\} = \{\tau(i)\}.$$

Donc $\sigma(i) = \tau(i)$ aussi et $\sigma = \tau$. □

Exercice 5. Soient K un corps et $n \geqslant 1$ un entier. Pour $a_0, \dots, a_n \in \mathrm{K}$ on considère le déterminant

$$\mathrm{V}(a_1, \dots, a_n) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_0 & a_1 & \cdots & a_n \\ a_0^2 & a_1^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_0^n & a_1^n & \cdots & a_n^n \end{pmatrix}.$$

Le but de l'exercice est de montrer la formule suivante :

$$(\heartsuit) \qquad \mathrm{V}(a_0, \dots, a_n) = \prod_{0 \leqslant i < j \leqslant n} (a_j - a_i).$$

(1) Montrer que $\mathrm{V}(a_0, \dots, a_n) = 0$ si $a_i = a_j$ pour certains $i \neq j$.

(2) Vérifier le résultat pour $n = 1, 2$.

(3) Montrer la formule

$$(\clubsuit) \qquad \mathrm{V}(a_0, \dots, a_n) = \mathrm{V}(a_1, \dots, a_n) \prod_{i=1}^{n} (a_i - a_0).$$

(4) Conclure par récurrence.

(5) Soit $\mathrm{K}[\mathrm{X}]_{\leqslant n}$ l'espace vectoriel des polynômes de degré $\leqslant n$. Si $a_0, \dots, a_n$ sont deux à deux distincts, montrer que l'application linéaire suivante est un isomorphisme :

$$\mathrm{K}[\mathrm{X}]_{\leqslant n} \longrightarrow \mathrm{K}^{n+1}, \qquad f \longmapsto (f(a_1), \dots, f(a_n)).$$

(6) Déduire que étant donné $b_0, \dots, b_n \in \mathrm{K}$ il existe un unique polynôme f de degré $\leqslant n$ tel que $f(a_i) = b_i$.

Démonstration. (1) Si $a_i = a_j$ pour $i \neq j$ alors $\mathrm{V}(a_0, \dots, a_n)$ est le déterminant d'une matrice dans deux colonnes coïncident et donc il s'annule.

(2) Pour $n = 1$ on a

$$\mathrm{V}(a_0, a_1) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a_0 & a_1 \end{pmatrix} = a_1 - a_0.$$

Pour $n = 2$, en faisant les opérations $\mathrm{L}_3 - a_0 \mathrm{L}_2 \to \mathrm{L}_3$ et $\mathrm{L}_2 - a_0 \mathrm{L}_1 \to \mathrm{L}_2$ et puis en développant par rapport à la première colonne on a

$$\begin{aligned} \mathrm{V}(a_0, a_1, a_2) &= \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a_1 - a_0 & a_2 - a_0 \\ 0 & a_1(a_1 - a_0) & a_2(a_2 - a_0) \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} a_1 - a_0 & a_2 - a_0 \\ a_1(a_1 - a_0) & a_2(a_2 - a_0) \end{pmatrix} \\ &= (a_1 - a_0)(a_2 - a_0) \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{pmatrix} \\ &= (a_1 - a_0)(a_2 - a_0)(a_2 - a_1). \end{aligned}$$

(3) On faisant les opérations $L_n - a_0 L_{n-1} \to L_n, \dots, L_2 - a_0 L_1 \to L_2$ et puis en développant par rapport à la première colonne on trouve :

$$\begin{aligned}
V(a_1,\dots,a_n) &= \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a_1 - a_0 & \cdots & a_n - a_0 \\ 0 & a_1(a_1-a_0) & \cdots & a_n(a_n-a_0) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_1^{n-1}(a_1-a_0) & \cdots & a_n^{n-1}(a_n-a_0) \end{pmatrix} \\
&= \det\begin{pmatrix} a_1 - a_0 & \cdots & a_n - a_0 \\ a_1(a_1-a_0) & \cdots & a_n(a_n-a_0) \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1}(a_1-a_0) & \cdots & a_n^{n-1}(a_n-a_0) \end{pmatrix} \\
&= \prod_{i=1}^{n}(a_i - a_0)\det\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & \cdots & a_n \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{pmatrix} \\
&= \prod_{i=1}^{n}(a_i - a_0) V(a_1,\dots,a_n)
\end{aligned}$$

(4) D'après la question (2) le résultat est vrai pour $n = 1, 2$. Pour $n \geqslant 3$ on suppose le résultat vrai pour $n-1$ valeurs. Alors

$$\begin{aligned}
V(a_0,\dots,a_n) &\overset{(??)}{=} V(a_1,\dots,a_n)\prod_{i=1}^{n}(a_i - a_0) \\
&\overset{\substack{\text{hyp.}\\ \text{réc.}}}{=} \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(a_j - a_i)\prod_{i=1}^{n}(a_i - a_0) = \prod_{0\leqslant i<j\leqslant n}(a_j - a_i).
\end{aligned}$$

(5) Pour un polynôme $f(X) = c_0 + c_1 X + \cdots + c_n X^n$ de degré $\leqslant$ on a

$$f(a_i) = c_0 + c_1 a_i + \cdots + c_n a_i^n.$$

Donc l'image de f est

$$\begin{pmatrix} f(a_0) \\ \vdots \\ f(a_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a_0 & \cdots & a_0^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & \cdots & a_n^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_0 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

En particulier le déterminant de la matrice ci-dessus est $V(a_0,\dots,a_n) \neq 0$. L'application linéaire $f \mapsto (f(a_0),\dots,f(a_n))$ est donc un isomorphisme.

(6) L'application à la question (5) est bijective et un tel f est l'unique preimage du vecteur $(b_0,\dots,b_n) \in K^{n+1}$. □

Exercice 6. Le but de cet exercice est de donner une preuve différente de (**??**).

(1) Montrer que $f(X) := V(X, a_1, \dots, a_n) \in K[X]$ est un polynôme de degré $\leqslant n$.

(2) Déterminer les racines de f.

(3) Calculer le coefficient dominant de f.

(4) Conclure.

Démonstration. (1) Ceci se fait en développant $\mathrm{V}(a_0, \dots, a_n)$ par rapport á la première colonne. On obtient

$$f(\mathrm{X}) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \det \mathrm{A}_i$$

où A_i est la matrice obtenue en retirant la première colonne et la i-ème ligne à la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_0 & a_1 & \cdots & a_n \\ a_0^2 & a_1^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_0^n & a_1^n & \cdots & a_n^n \end{pmatrix}.$$

En particulier $\det \mathrm{A}_i \in \mathrm{K}$ donc $\deg f \leqslant n$.

(2) On a $f(a_i) = \mathrm{V}(a_i, a_1, \dots, a_n) = 0$ pour $i = 1, \dots, n$ par la question (1) de l'exercice précédent. Si $a_1, \dots, a_n$ sont deux à deux distincts, alors $a_1, \dots, a_n$ sont toutes les racines de f car un polynôme de degré $\leqslant n$ a au plus n racines.

(3) Pour $i = n$ on a

$$\det \mathrm{A}_n = \det \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{pmatrix} = \mathrm{V}(a_1, \dots, a_n).$$

Le coefficient dominant de f est donc $(-1)^n \mathrm{V}(a_1, \dots, a_n)$.

(4) Si $a_1, \dots, a_n$ ne sont pas deux à deux distincts les deux membres de (**??**) sont nuls et donc égaux. Sinon, d'après les questions (2) et (3) on a

$$f(\mathrm{X}) = (-1)^n \mathrm{V}(a_1, \dots, a_n) \prod_{i=1}^{n} (\mathrm{X} - a_i) = \mathrm{V}(a_1, \dots, a_n) \prod_{i=1}^{n} (a_i - \mathrm{X}).$$

On conclut en prenant $\mathrm{X} = a_0$. □

Exercice 7. Pour un entier $n \geqslant 1$ soit

$$\mathrm{A}_n = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & -1 & 2 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 2 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{Q})$$

la matrice dont les coefficients diagonaux et ceux juste en-dessous valent -1, ceux juste au-dessus de la diagonale valent 2, et tous les autres sont nuls. On pose $\mathrm{D}_n = \det(\mathrm{A}_n)$.

(1) Calculer D_1 et D_2.

(2) Montrer que $\mathrm{D}_n = b\mathrm{D}_{n-1} + c\mathrm{D}_{n-2}$, pour $b, c \in \mathbb{Z}$ que l'on déterminera.

(3) Soit V l'espace vectoriel formé par les suites $u = (u_i)_{i \in \mathbb{N}}$ telles que $u_{i+2} = bu_{i+1} + cu_i$ pour tout $i \in \mathbb{N}$. Montrer que V est un espace vectoriel de dimension 2.

(4) Déterminer $\lambda, \mu \in \mathbb{Q}$ distincts tels que $u = (\lambda^i)_{i \in \mathbb{N}}$ et $v = (\mu^i)_{i \in \mathbb{N}}$ appartiennent à V.

(5) Montrer que u et v forment une base de V.

(6) Donner une formule pour D_n pour tout $n \geqslant 1$.

Démonstration. (1) On a $D_1 = -1$ et $D_2 = 3$.

(2) En développant par rapport à la première colonne on a

$$D_n = -D_{n-1} + \det \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & 0 & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 2 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & -1. \end{pmatrix}$$

En développant par rapport à la première ligne on trouve

$$D_n = -D_{n-1} + 2D_{n-2}.$$

(3) On considère l'application linéaire $\varphi\colon V \to \mathbb{Q}^2$, $u \mapsto (u_0, u_1)$. Il s'agit d'un isomorphisme. En effet si une suite u appartient au noyau de φ on montre par récurrence sur i que $u_i = 0$. Pour $i = 0, 1$ c'est vrai par hypothèse. Pour $i \geqslant 2$ on suppose le résultat vrai pour $j < i$. Alors

$$u_i = -u_{i-1} + 2u_{i-2} = 0 + 0 = 0.$$

Pour montrer que φ est surjective, pour $(\alpha, \beta) \in \mathbb{Q}^2$ on pose $u_0 := \alpha, u_1 := \beta$ et de manière récursive, pour $i \geqslant 2$,

$$u_i := -u_{i-1} + 2u_{i-2}.$$

Alors la suite $u = (u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ appartient à V par construction et $\varphi(u) = (\alpha, \beta)$.

(4) On suppose $\lambda \neq 0$. Alors $u = (\lambda^i)_{i\in\mathbb{N}}$ appartient à V si et seulement $\lambda^i = -\lambda^{i-1} + \lambda^{i-2}$, ou comme $\lambda \neq 0$,

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0.$$

C'est un polynôme de degré 2 dont les racines sont 1 et -2. On pose $\lambda = 1$ et $\mu = -2$.

(5) L'isomorphisme φ préserve l'indépendence linéaire. Donc il suffit de vérifier que $\varphi(u) = (1, 1)$ et $\varphi(v) = (1, -2)$ sont linéairement indépendants, ce qui est clair car ils ne sont pas colinéaires.

(6) On pose formellement $D_0 = 2$ de manière $D = (D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite dans V. On cherche $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$ tels que $D = \alpha u + \beta v$, ce qui revient au système linéaire

$$\begin{cases} \alpha + \beta & = & 2 \\ \alpha - 2\beta & = & -1. \end{cases}$$

On trouve $\alpha = \beta = 1$ et donc $D_n = 1 + (-2)^n$ pour tout $n \geqslant 0$. □

Exercice 8. Soient $a \in K^\times$ et

$$M_a = \begin{pmatrix} 0 & a & a & \cdots & a \\ a & 0 & a & \ddots & a \\ a & a & 0 & a & \vdots \\ \vdots & \ddots & a & 0 & a \\ a & \cdots & a & a & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculer le polynôme caractéristique de A et en déduire det(A).

Démonstration. En faisant les opérations $\mathrm{L}_i - \mathrm{L}_{i+1} \to \mathrm{L}_i$ pour $i = 1, \ldots, n-1$ on trouve

$$\mathrm{P}_{\mathrm{M}_a}(\mathrm{X}) := \det(\mathrm{M}_a - \mathrm{X}\,\mathrm{id}) = \begin{pmatrix} -\mathrm{X}-a & \mathrm{X}+a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\mathrm{X}-a & \mathrm{X}+a & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & -\mathrm{X}-a & \mathrm{X}+a & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & -\mathrm{X}-a & \mathrm{X}+a \\ a & \cdots & a & a & -\mathrm{X} \end{pmatrix}$$

$$= (\mathrm{X}+a)^{n-1} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & -1 & 1 \\ a & \cdots & a & a & -\mathrm{X} \end{pmatrix}$$

En faisant l'opération $\mathrm{C}_1 + \cdots + \mathrm{C}_n \to \mathrm{C}_n$ on trouve

$$\mathrm{P}_{\mathrm{M}_a}(\mathrm{X}) = (\mathrm{X}+a)^{n-1} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & -1 & 0 \\ a & \cdots & a & a & -\mathrm{X}+(n-1)a \end{pmatrix}$$

$$= (\mathrm{X}+a)^{n-1}(-\mathrm{X}+(n-1)a)(-1)^{n-1}$$

où la dernière égalité vient du développement par rapport à la dernière colonne. En particulier,

$$\det \mathrm{M}_a = (-1)^{n-1}(n-1)a^n. \qquad \square$$