Tarea 1

Jorge Alfredo Lopez
jorgelopez@uniandes.edu.co

Sergio Salazar
sd.salazar@uniandes.edu.co

August 22, 2022

Instrucciones

La tarea debe ser realizada en grupos de mínimo 3 y máximo de 4 personas.

1. La solución de cada uno de los problemas que se enuncian a continuación debe contener mínimo:

   -Formulación matemática rigurosa (conjuntos, parámetros, variables de decisión, función objetivo, restricciones).

   -Síntesis de resultados.

   -Conclusiones.

2. El reporte debe ser autocontenido, conciso y preciso, no debe exceder las 6 páginas.
3. Envíe por Bloque Neón su informe en formato PDF, en caso de ser necesario envíe todos los archivos de soporte comprimidos en un solo archivo *.zip.
4. Si el informe de la tarea y los archivos de soporte no se entregan en la fecha y hora asignadas, la nota de la tarea será 0.0.
5. La calificación del reporte se verá afectada en los siguientes casos: no demuestra una comprensión clara del problema que resuelve, el reporte no es claro o está en desorden, los archivos anexos no funcionan o el documento no es entregado según las reglas establecidas.
6. Las preguntas acerca del enunciado se responderán a través del foro de MS-Teams: OPTIMIZACIÓN.

Cualquier sospecha de fraude será manejada de acuerdo con el reglamento de la Universidad.

Ejercicio 1

Considere el siguiente programa lineal

$$
\begin{aligned}
\max \frac{10}{3}x_1 + \frac{4}{3}x_2 \\
\text{sujeto a} \\
-2x_1 + x_2 \leq 1 \\
-x_1 + x_2 \leq \frac{3}{2} \\
x_1 + x_2 \leq \frac{13}{2} \\
2x_1 + x_2 \leq 11 \\
0 \leq x_1 \leq 5 \\
0 \leq x_2 \leq \frac{7}{2}
\end{aligned}
$$

(a) Grafique el conjunto factible en el plano x_1x_2.

(b) Escriba el problema en forma estándar. Liste todas las soluciones básicas factibles, indicando en cada caso cuáles son las variables básicas y cuáles son las variables libres.

(c) ¿Existen soluciones básicas que no sean factibles?

(d) Obtenga la solución óptima geométricamente.

Ejercicio 2

Suponga que en su clase favorita del semestre (Optimización claramente) el profesor les plantea el siguiente problema de programación lineal.

$$
\begin{aligned}
\max 6x_1 + 5x_2 + 4x_3 \\
\text{sujeto a} \\
15x_1 + 25x_2 + 30x_3 \leq 90 \\
15x_1 + 5x_2 + 15x_3 \leq 60 \\
x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

Ahora bien, como resultado de una larga semana usted se queda dormido sin que el profesor lo note. Cuando despierta observa en el tablero la siguiente información.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
	0	0	17/4	3/20	1/4	X
a_2	0	1	3/4	1/20	−1/20	3/2
a_1	1	0	3/4	−1/60	−1/12	7/2

Casualmente, usted despierta de su siesta cuando el profesor esta repartiendo las hojas con el enunciado del quiz (algo más parecido a un parcial). El quiz contenía las siguientes preguntas, soluciónelo.

(a) Halle el valor de X.

(b) Dado el valor que encontró en el inciso anterior, ¿es posible concluir que este es el óptimo del problema LP? ¿Si, no? ¿Por qué? *Hint*: Revise la primera fila de la tabla anterior.

(c) Formule el problema dual asociado.

(d) Utilice la tabla para solucionar el problema dual. *Hint*: La tabla contiene **toda** la información necesaria.

Ejercicio 3

El médico le ha recomendado bajar de peso quemando por lo menos 2700 calorías semanales haciendo ejercicio. Usted considera tres opciones: caminar vigorosamente, trotar y nadar, con las cuales puede quemar 250, 500 y 600 calorías por hora respectivamente. Debido a viejas lesiones futbolísticas, usted no aguanta trotar más de 3 horas a la semana o nadar más de 3 horas a la semana. Dado que lo que más le gusta hacer es caminar, usted quiere que por lo menos la mitad del tiempo que gasta ejercitando sea caminando. Naturalmente dadas sus múltiples ocupaciones usted quiere lograr sus objetivos gastando la menor cantidad de tiempo en ejercicio.

(a) Plantee este problema como un problema de programación lineal. Transforme su planteamiento a la forma estándar.

(b) Considere la siguiente solución:

- Nadar 3 horas a la semana.
- Completar el resto de calorías que debe quemar caminando.

Muestre que esta solución es una SBF pero no una SBF óptima. *Hint*: ¿Cuáles son las variables básicas en esta SBF?

(c) A partir de la SBF conocida, aplique el método simplex para encontrar la solución óptima.

(d) Escriba el problema dual de su problema. Use dualidad y holgura complementaria para hallar una solución óptima del dual.

(e) Suponga que usted está considerando comprar una máquina elíptica para introducirla en su rutina de ejercicios. Para usar esta máquina, usted debe emplear un tiempo adicional del 10% del tiempo de utilización de la máquina para hacer estiramientos (los estiramientos no queman calorías). ¿Cuántas calorías por hora debería poder quemar por hora en la elíptica para que tenga sentido utilizarla? *Hint:* Utilice la solución óptima del dual.

Ejercicio 4

La familia Pérez planea ir de excursión. Hay 12 objetos que se deben llevar al viaje, los cuales tienen un peso asociado y deben ser cargados por alguno de los excursionistas. Dependiendo de las capacidades físicas de cada excursionista, el peso límite que pueden cargar varía. Para determinar quién llevará cada objeto, cada excursionista estableció un valor de preferencia sobre los objetos. Esta preferencia es un número entero entre 1 y 12, siendo 1 el objeto que menos quieren cargar y 12 el que preferirían cargar. ¿Qué objeto debe llevar cada excursionista?

El archivo **datosExcursionistas.xlsx** anexado junto a la tarea contiene los datos sobre peso, preferencia y capacidad.

(a) Formule el ejercicio como un problema de programación lineal. *Hint*: ¿Cuál es la naturaleza de las variables de decisión?

(b) Resuelva el problema y registre sus resultados en una tabla.

Ejercicio 5

Sea $f(\mathbf{w})$ una función escalar de un vector $\mathbf{w}$ de dimensión n. El gradiente de $f(\mathbf{w})$ con respecto a $\mathbf{w}$ está definido como:

$$\nabla_{\mathbf{w}} f(\mathbf{w}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(\mathbf{w})}{\partial w_1} & \frac{\partial f(\mathbf{w})}{\partial w_2} & \dots & \frac{\partial f(\mathbf{w})}{\partial w_n} \end{bmatrix}^T$$

(a) Sea

$$f(\mathbf{w}) = \frac{1}{2} w^T A w + b^T w + c$$

donde $\mathbf{A}$ es una matriz simétrica de $n \times n$, b es un vector de $n \times 1$ y c es un escalar. Muestre que:

$$\nabla_{\mathbf{w}} f(\mathbf{w}) = Aw + b$$

(b) Para la función definida en el literal anterior demuestre que la matriz Hessiana de $f(\mathbf{w})$ es $\mathbf{A}$.

$$H = \nabla^2_{\mathbf{w}} f(\mathbf{w}) = A$$