最优化导论期中试题答案

1. 判断题（请判断下列命题的正确性，在括号内打“✔”或“✘”）

（1）下列函数 $\|\cdot\|: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 若满足以下三个条件，则称其为范数：

1. $\| x \| \geq 0$，且 $\| x \| = 0$ 当且仅当 $x = 0$；
2. $\| tx \| = t \| x \|$，其中 $t \in \mathbb{R}$）；
3. $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$。

（）

答：（✘）。

解析： 第 2 条齐次性应为 $\| tx \| = |t| \; \| x \|$，即应包含绝对值符号，否则当 $t < 0$ 时不成立。

（2）对偶锥一定是凸锥。

（）

答案：（✔）。

解析： 对任意锥 $K \subseteq \mathbb{R}^n$，其对偶锥

$$K^* = \{ y \mid y^\top x \geq 0, \forall x \in K \} = \bigcap_{x \in K} \{ y \mid y^\top x \geq 0 \}$$

是一族闭半空间的交集，故为凸集；且若 $y \in K^*$、$\alpha \geq 0$，则$\alpha y \in K^*$（因为 $(\alpha y)^\top x = \alpha\, y^\top x \geq 0$）。因此 K^* 是凸锥。

（3）任意多个闭集的并集仍是闭集。

（）

答案：（✘）

解析：

- 有限个闭集的并集是闭集；

- 但任意多个（即无限多个）闭集的并集不一定是闭集。

例如，在实数集 $\mathbb{R}$ 中，设

$$F_n = \left[\frac{1}{n}, 1\right], \quad n = 1,2,3, \dots$$

每个 F_n 都是闭集。
但

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = (0,1]$$

不是闭集（因为不包含极限点 0）。
因此该命题错误。

（4）设 $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon\ x\, y = 0\}$，并采用 $\mathbb{R}^2$ 上的通常加法与数乘，则V 是实数域上的线性空间。

（）

答案：（✗）。

解析：

（举反例说明加法不封闭）：取 $u = (1,0) \in V$ 与 $v = (0,1) \in V$。
但 $u + v = (1,1)$，有 $1 \cdot 1 \neq 0$，故 $u + v \notin V$。
违反线性空间所需的“对加法封闭”，因此 V 不是线性空间。

（5）满足“对锥组合运算封闭（包含集合中所有点的锥组合）”条件的集合一定是凸集合。

（）

答案：（✓）。

解析：

任取 $x, y \in C$ 与 $\theta \in [0,1]$。由于 $\theta \geq 0,\ 1 - \theta \geq 0$，$\theta x + (1 - \theta) y$是 x, y 的锥组合，由“对锥组合封闭”知其仍在 C 中。对任意两点与任意 $\theta \in [0,1]$ 都成立，故 C 凸。

（6）若 $S, T \subset V(F)$ 均为子空间，则它们的并 $S \cup T$ 也是子空间。

（）

答案：（✗）。

（7）用复合函数准则判断一个函数是不是凸的，其前提是该函数必须在其定义域上可微。

（）

答案：（✗）。

解析：
复合函数准则判断函数是否凸时，并不要求函数必须可微。它只要求外层函数与内层函数满足特定的凸性或单调性条件，例如：

- 若 g 是凸函数且非减，f 是凸函数，则 $g \circ f$ 是凸函数；
- 若 g 是凸函数且非增，f 是凹函数，则 $g \circ f$ 是凸函数。

这些条件依赖函数的凸性定义（不等式定义），而非可微性。可微性只在使用 Hessian 判定法 时才是必要前提。

（8）无限个凸集的交集不一定是凸集。

（）

答案：（✗）。

解析：
设 $\{C_i\}_{i\in I}$ 为一族凸集，令

$$C = \bigcap_{i\in I} C_i。$$

对任意 $x, y \in C$ 和 $\theta \in [0,1]$，由于每个 C_i 都是凸的，有

$$\theta x + (1-\theta)y \in C_i, \quad \forall i \in I。$$

因此

$$\theta x + (1-\theta)y \in \bigcap_{i\in I} C_i = C。$$

由此 C 也是凸集。所以无限多个凸集的交集仍为凸集。

（9）所有范数都是凸函数。

( )

答案：（✓）。

解析：
设 $\|\cdot\|$ 为任意范数。根据范数的性质：

1. **三角不等式：** $\| x+y \| \leq \| x \| + \| y \|$;
2. **齐次性：** $\| \alpha x \| = |\alpha| \| x \|$。

对任意 x, y 和 $\theta \in [0,1]$，有

$$\| \theta x + (1-\theta) y \| \leq \| \theta x \| + \| (1-\theta) y \| = \theta \| x \| + (1-\theta) \| y \|,$$

即满足凸函数的定义

$$f(\theta x + (1-\theta) y) \leq \theta f(x) + (1-\theta) f(y)。$$

因此所有范数都是凸函数。

（10）集合的并集一定不是凸集。

( )

答案：（✗）。

解析：
"并集一定不是凸集"这一说法过于绝对。确实，两个不同的凸集的并集一般不是凸的，但在某些情况下，并集仍然可以是凸集。

（11）凸函数的上镜图一定是凸集，反之，上镜图是凸集的函数则不一定是凸函数。

( )

答案：（✗）。

解析：
上镜图定义为

$$\mathrm{epi} f = \{(x, t) \mid f(x) \leq t\}.$$

性质如下：

- 若 f 是凸函数，则 $\mathrm{epi} f$ 一定是凸集；
- 反之亦然：若 $\mathrm{epi} f$ 是凸集，则 f 必为凸函数。

因此，这两者是充要关系，而非单向关系。

（12）凸函数一定是连续函数。

( )

答案：（ ✗ ）。

解析： 反例：

$$f(x)=\begin{cases}1, & x=0 \text{ 或 } x=1,\\ 0, & 0<x<1.\end{cases}$$

（13）非负加权求和对于拟凸函数和凸函数都是保凸运算。

( )

答案：（ ✗ ）。

（14）$K=\mathbb{R}_+^n$、$K=S_+^n$ 都是自对偶锥。”

( )

答案：（ ✓ ）

解析：

- $\mathbb{R}_+^n$ 是自对偶锥；
- S_+^n（对称正定锥）也是自对偶锥；

（15）在定义域 $\{(x,y)\mid x>0,\ y>0\}$ 上，函数

$$f(x,y)=x^2y^2+\frac{x}{y}$$

是凸函数。

（）

答案：（✗）。

解析（Hessian 判定）：

$$\nabla^2 f(x,y)=\begin{bmatrix}2y^2 & 4xy-\dfrac{1}{y^2}\\ 4xy-\dfrac{1}{y^2} & 2x^2+\dfrac{2x}{y^3}\end{bmatrix}.$$

在点 (1,1) 处，

$$\nabla^2 f(1,1)=\begin{bmatrix}2 & 4-1\\ 4-1 & 2+2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 3 & 4\end{bmatrix},\quad \det=2\cdot 4-3^2=8-9=-1<0,$$

Hessian 矩阵不半正定，故 f 非凸。

2. 设 $C\subseteq\mathbb{R}^n$，对任意实数 $\lambda\geq 0$，定义 $\lambda C=\{\lambda x: x\in C\}$, 对任意集合 $A,B\subseteq\mathbb{R}^n$，定义 $A+B=\{a+b: a\in A,\, b\in B\}$。证明：集合 C 是凸集，当且仅当对于所有非负实数 $\alpha,\beta\geq 0$，有$(\alpha+\beta)C=\alpha C+\beta C$.

证明：必要性: 假设 C 是凸集。
由凸集定义，任意 $x_1,x_2\in C$，以及任意 $0\leq\theta\leq 1$，都有：

$$\theta x_1+(1-\theta)x_2\in C.$$

（1）"⊆" 方向：

任取 $x\in(\alpha+\beta)C$，则存在 $z\in C$，使得：$x=(\alpha+\beta)z=\alpha z+\beta z$.

因为 $z\in C$，显然 $\alpha z\in\alpha C$，$\beta z\in\beta C$，因此 $x=\alpha z+\beta z\in\alpha C+\beta C$。

于是：$(\alpha+\beta)C\subseteq\alpha C+\beta C$.

（2）"⊇" 方向：

任取 $x\in\alpha C+\beta C$，则存在 $x_1,x_2\in C$，使得：$x=\alpha x_1+\beta x_2$.

因为 C 是凸集，若令 $\theta=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$，则：$\theta x_1+(1-\theta)x_2\in C$.

于是：

$$x=(\alpha+\beta)[\theta x_1+(1-\theta)x_2]\in(\alpha+\beta)C.$$

因此：$\alpha C+\beta C\subseteq(\alpha+\beta)C.$

综上两式：$(\alpha+\beta)C=\alpha C+\beta C.$

充分性：假设对任意 $\alpha,\beta\geq 0$，有：$(\alpha+\beta)C=\alpha C+\beta C$。取 $\alpha+\beta=1$，即 $\beta=1-\alpha$，可得：

$$C=\alpha C+(1-\alpha)C.$$

任取 $x_1,x_2\in C$，则存在 $z\in C$ 使得：$z=\alpha x_1+(1-\alpha)x_2$。 这恰好是凸集的定义。因此 C 是凸集。

3. 两个平行的超平面 $\{x\in\mathbb{R}^n|a^Tx=b_1\}$ 和 $\{x\in\mathbb{R}^n|a^Tx=b_2\}$ 之间的距离是多少？

答案：

方法一：由于 a 是超平面的法向量

设 a 与超平面 $\{x\in\mathbb{R}^n|a^Tx=b_1\}$，$\{x\in\mathbb{R}^n|a^Tx=b_2\}$ 相垂直且 $x_1\neq x_2$

则： $x_1=\left(\frac{b_1}{|a|^2}\right)a$

$$x_2=\left(\frac{b_2}{|a|^2}\right)a$$

由于 $a^Tx_1=a^T\cdot\frac{b_1}{|a|^2}a=\frac{|a|^2}{|a|^2}b_1=b_1$

因此 $x_1\in x\in\mathbb{R}^n|a^Tx=b_1$，$x_1$ 是 a 的倍数

因此： $|x_1-x_2|_2=\left|\frac{b_1}{|a|^2}a-\frac{b_2}{|a|^2}a\right|=\left|\frac{b_1-b_2}{|a|^2}a\right|_2=\frac{|b_1-b_2|}{|a|_2}$

方法二：设 x_1 为超平面 $\{x\in\mathbb{R}^n|a^Tx=b_1\}$ 上的一点

不妨设 x_1 在超平面 $x\in\mathbb{R}^n|a^Tx=b_2$ 上的投影为 x_c

则：$a^Tx_c=b_2$

并且 x_1-x_c 与该方向垂直

因此：$a(x_1-x_c)=|a|_2|x_1-x_c|_2\cos(\theta\text{或}\pi)$

$$=\pm|a|_2|x_1-x_c|_2$$

又因为：$a^T(x_1-x_c)=a^Tx_1-a^Tx_c=b_1-b_2$

因此：$|x_1-x_c|_2=\frac{|b_1-b_2|}{|a|_2}$

4. 设 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$为非负且凸的函数， $g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 为正且凹的函数。证明：定义在 $\operatorname{dom} f\cap\operatorname{dom} g$ 上的函数$h(x)=\frac{f(x)^2}{g(x)}$是凸函数。（提示：可以直接用当 $v>0$ 时，函数 $\frac{u^2}{v}$ 在 (u,v) 上是凸的。）

证明：令 x,y 属于 f 和 g 的定义域，取 $\theta\in[0,1]$，定义：$z=\theta x+(1-\theta)y$.

由 f 的凸性，有：

$$f(z)\le\theta f(x)+(1-\theta)f(y).$$

又因 $f(x)$、$\theta f(x)+(1-\theta)f(y)$ 均为非负数，平方函数在 $\mathbb{R}_+$ 上单调递增，因此：

$$f(z)^2\le(\theta f(x)+(1-\theta)f(y))^2.$$

由 g 的凹性，有：

$$g(z)\ge\theta g(x)+(1-\theta)g(y).$$

将两式相除，得到：

$$\frac{f(z)^2}{g(z)}\le\frac{(\theta f(x)+(1-\theta)f(y))^2}{\theta g(x)+(1-\theta)g(y)}.$$

已知当 $v>0$ 时，函数 $\frac{u^2}{v}$ 在 (u,v) 上是凸的。
因此可得：

$$\frac{(\theta f(x)+(1-\theta)f(y))^2}{\theta g(x)+(1-\theta)g(y)}\le\theta\frac{f(x)^2}{g(x)}+(1-\theta)\frac{f(y)^2}{g(y)}.$$

由以上两步不等式链得：

$$\frac{f(z)^2}{g(z)} \le \theta \frac{f(x)^2}{g(x)} + (1-\theta)\frac{f(y)^2}{g(y)},$$

即 $h(x) = f(x)^2/g(x)$ 满足凸性定义。

5. 设 a 和 b 是 $\mathbf{R}^n$ 中的两个不同点。证明所有距离 a 比距离 b 更近的点（欧几里得范数意义下），即

$$\{x \mid \| x-a \|_2 \le \| x-b \|_2\},$$

构成一个半空间。将其显式地写成形如 $c^T x \le d$ 的不等式。

证：从条件出发：

$$\| x-a \|_2 \le \| x-b \|_2 \quad \Leftrightarrow \quad \| x-a \|_2^2 \le \| x-b \|_2^2.$$

展开两边平方：

$$(x-a)^\top (x-a) \le (x-b)^\top (x-b).$$

即

$$x^\top x - 2a^\top x + a^\top a \quad \le \quad x^\top x - 2b^\top x + b^\top b.$$

整理为：

$$2(b-a)^\top x \quad \le \quad b^\top b - a^\top a.$$

记

$$c = 2(b-a), \qquad d = b^\top b - a^\top a,$$

则集合可写成

$$\{x \mid c^\top x \le d\}.$$

因此所有距离 a 比距离 b 更近的点构成一个半空间。

6. 设 $C \subseteq \mathbf{R}^n$ 为以下二次不等式的解集：

$$C = \{x \in \mathbf{R}^n \mid x^T A x + b^T x + c \le 0\},$$

其中 $A \in \mathbf{S}^n$，$b \in \mathbf{R}^n$，$c \in \mathbf{R}$。证明：若 $A \succcurlyeq 0$，则 C 是凸集。

证：定义二次函数：

$$q(x) = x^\top A x + b^\top x + c.$$

取任意 $x_1, x_2 \in C$ 与 $\theta \in [0,1]$，记 $z = \theta x_1 + (1-\theta)x_2$。利用对称性可得恒等式

$$z^\top A z = \theta x_1^\top A x_1 + (1-\theta)x_2^\top A x_2 - \theta(1-\theta)(x_1 - x_2)^\top A(x_1 - x_2).$$

同时 $b^\top z = \theta b^\top x_1 + (1-\theta)b^\top x_2$。于是

$$q(z) = \theta q(x_1) + (1-\theta)q(x_2) - \theta(1-\theta)(x_1 - x_2)^\top A(x_1 - x_2).$$

当 $A \succcurlyeq 0$ 时，$(x_1 - x_2)^\top A(x_1 - x_2) \geq 0$，故上式右端

$$q(z) \ \leq \ \theta q(x_1) + (1-\theta)q(x_2) \ \leq \ 0,$$

因为 $x_1, x_2 \in C \Rightarrow q(x_1) \leq 0, q(x_2) \leq 0$。
从而 $z \in C$，即 C 凸。

7. 设 K^* 为凸锥 K 的对偶锥。证明以下性质：

(a) K^* 确实是一个凸锥。

(b) 若 $K_1 \subseteq K_2$，则 $K_2^* \subseteq K_1^*$。

(c) 如果 K 有非空内部，则 K^* 是尖的。

证：（a）K^* 是凸锥：
由定义：

$$K^* = \{y \mid y^\top x \geq 0, \ \forall x \in K\}.$$

若 $y_1, y_2 \in K^*$，$\theta_1, \theta_2 \geq 0$，则

$$(\theta_1 y_1 + \theta_2 y_2)^\top x = \theta_1 y_1^\top x + \theta_2 y_2^\top x \geq 0, \quad \forall x \in K.$$

故 $\theta_1 y_1 + \theta_2 y_2 \in K^*$。因此 K^* 为凸锥。

(b) 若 $K_1 \subset K_2$，取 $y \in K_2^*$，则 $\forall x \in K_2, y^\top x \geq 0$。

由于 $K_1 \subset K_2$，$\forall x \in K_1$，亦有 $y^\top x \geq 0$。

故 $y \in K_1^*$。因此 $K_2^* \subset K_1^*$。

(c) 若 K 有非空内部，反证法：若 K^* 不是尖锥，则存在 $y \neq 0$ 使 $y, -y \in K^*$。
则 $\forall x \in K$，有

$$y^\top x \geq 0, \quad (-y)^\top x \geq 0 \Longrightarrow y^\top x = 0.$$

特别地，对 $x \in \mathrm{int}K$ 也成立。由内点性质，存在方向使 $y^\top x > 0$，矛盾。故 K^* 是尖锥。

8. 设 f 是凸函数，且系数满足：

$$\lambda_1 > 0, \quad \lambda_i \leq 0 \text{（对于 } i = 2, \dots, n\text{）}, \qquad \lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1\text{。}$$

令 $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathrm{dom}\, f$，并且$\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n \in \mathrm{dom}\, f$。 证明以下不等式恒成立：

$$f(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n) \geq \lambda_1 f(x_1) + \cdots + \lambda_n f(x_n)\text{。}$$

（提示：可利用 Jensen’s inequality：若 f 为凸函数，且 $\lambda_i \geq 0, \sum_i \lambda_i = 1$，则 f $(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i)$。）

证明：

令

$$z = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n\text{。}$$

由于 $\lambda_1 > 0$，$\lambda_i \leq 0$（当 $i \geq 2$），且 $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$，
我们可以将 x_1 表示为：

$$x_1 = \theta_0 z + \theta_2 x_2 + \cdots + \theta_n x_n,$$

其中

$$\theta_i = -\frac{\lambda_i}{\lambda_1}, \quad i = 2, \dots, n, \quad \text{以及} \quad \theta_0 = \frac{1}{\lambda_1}\text{。}$$

因为 $\lambda_1 > 0 \Rightarrow \theta_0 > 0$，且 $\lambda_i \leq 0 \Rightarrow \theta_i \geq 0$。
简单代数运算可得：

$$\theta_0 + \theta_2 + \cdots + \theta_n = 1\text{。}$$

因此 x_1 是点 $z, x_2, \dots, x_n$ 的一个凸组合。

由 f 的凸性和上式得：

$$f(x_1) \le \theta_0 f(z) + \theta_2 f(x_2) + \cdots + \theta_n f(x_n)。$$

将上式改写为：

$$f(z) \ge \frac{1}{\theta_0} f(x_1) - \frac{\theta_2}{\theta_0} f(x_2) - \cdots - \frac{\theta_n}{\theta_0} f(x_n)。$$

代入 $\theta_0 = 1/\lambda_1$、$\theta_i = -\lambda_i/\lambda_1$ 得：

$$f(z) \ge \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \cdots + \lambda_n f(x_n)。$$