# 最优化导论第四次作业题

**1.** 考虑如下形式的优化问题：

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \dfrac{f_0(x)}{c^T x + d} \\ \text{subject to} & f_i(x) \le 0, \quad i = 1, \dots, m, \\ & Ax = b, \end{array}$$

其中 $f_0, f_1, \dots, f_m$ 都是凸函数，目标函数的定义域为

$$\{ x \in \mathrm{dom}\, f_0 \mid c^T x + d > 0 \}.$$

证明该问题是一个拟凸优化问题。

**2.** 将下列问题写成线性规划（LP），并说明原问题与对应 LP 的最优解之间的关系。

(a) 最小化 $\| Ax - b \|_\infty$
(b) 最小化 $\| Ax - b \|_1$
(c) 在 $\| x \|_\infty \le 1$ 下最小化 $\| Ax - b \|_1$
(d) 在 $\| Ax - b \|_\infty \le 1$ 下最小化 $\| x \|_1$
(e) 最小化 $\| Ax - b \|_1 + \| x \|_\infty$

矩阵 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$，向量 $b \in \mathbb{R}^m$。

**3.** 写出如下问题的对偶问题：

$$\begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{s.t.} & f(x) \le 0, \end{array}$$

其中 $c \ne 0$。要求使用 $f$ 的共轭函数 $f^*$ 的形式表示对偶问题。

**4.** 求如下线性规划（LP）问题的对偶函数：

$$\begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{s.t.} & Gx \preccurlyeq h, \\ & Ax = b. \end{array}$$

给出对应的对偶问题，并将其中隐式的等式约束显式写出。

**5.** 推导下述优化问题的对偶问题：

$$\min\ -\sum_{i=1}^{m} \log\left(b_i - a_i^T x\right)$$

其定义域为

$$\{x \mid a_i^T x < b_i,\ i = 1, \ldots, m\}.$$

首先引入新变量 $y_i$，并添加等式约束

$$y_i = b_i - a_i^T x.$$

（该问题的解称为线性不等式 $a_i^T x \le b_i, i = 1, \ldots, m$ 的解析中心（analytic center）。

**6.** 考虑如下优化问题：

$$\begin{array}{ll} \min & e^{-x} \\ \text{s.t.} & \dfrac{x^2}{y} \le 0 \end{array}$$

其中变量为 $x$ 和 $y$，定义域为

$$\mathcal{D} = \{(x, y) \mid y > 0\}.$$

(a) 证明该问题是一个凸优化问题，并求其最优值。

(b) 写出该问题的拉格朗日对偶问题，并求其最优解 $\lambda^*$ 和对偶最优值 $d^*$。最优对偶间隙是多少？

(c) Slater 条件是否成立