第七讲：凸函数

优化问题的约束和目标函数

杨 林

大 纲

1. 凸函数基本性质

2. 典型例题

大 纲

1. 凸函数基本性质

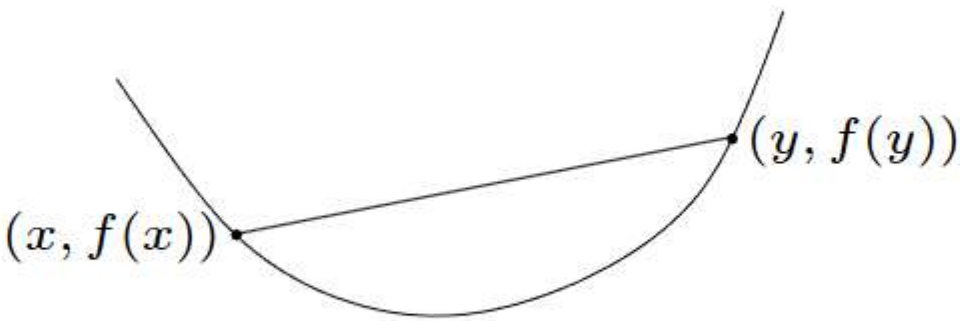
2. 典型例题

1 凸函数的基本性质

- **定义1（凸函数）：** 对于 $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$，若 $\mathbf{dom}\, f$ 是一个凸集，并且对于 $\forall x, y \in \mathbf{dom}\, f$，$0 \le \theta \le 1$ 有

$$f(\theta x + (1-\theta)y) \le \theta f(x) + (1-\theta)f(y)$$

则称 f 是**凸函数**.



- f 是凹函数,当且仅当 $-f$ 是凸函数
- f 在是严格凸的,若 $\mathbf{dom}\, f$是凸集且

$$f(\theta x + (1-\theta)y) < \theta f(x) + (1-\theta)f(y)$$

对于任意的 x, $y \in \mathbf{dom}\, f$, $x \ne y$ 且 $0 \le \theta \le 1$

1 凸函数的基本性质

■ **定义2(拓展函数)**： f 的扩展函数 $\tilde{f}$ 满足

$$\tilde{f}(x) = f(x), x \in \mathbf{dom}\, f, \tilde{f}(x) = \infty, x \notin \mathbf{dom}\, f$$

经常简化符号；也满足

$$0 \leq \theta \leq 1 \Rightarrow \tilde{f}(\theta \mathrm{x} + (1-\theta \mathrm{y})) \leq \theta \tilde{f}(\mathrm{x}) + (1-\theta)\tilde{f}(\mathrm{y})$$

作为 $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ 上的不等式.

■ **证明:**

显然当 $\theta = 0$ 或 1 时成立.

若 x 或 y $\notin \mathbf{dom}\, f$ 且 $\theta \neq 0, 1$, 则右侧为 $+\infty$, 因此不等式仍然成立.

1 凸函数的基本性质

Jensen不等式：

如果f是凸函数，那么对于$0 \le \theta \le 1$有

$$f(\theta x + (1-\theta)y) \le \theta f(x) + (1-\theta) f(y)$$

拓展：如果f是凸函数，那么

$$f(\boldsymbol{E}z) \le \boldsymbol{E} f(z)$$

基本不等式是具有离散分布$p(x) = \theta, p(y) = 1-\theta$ 的特殊情况

1 凸函数的基本性质

■ **证明：**

对于$\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_k=1,\theta_i\geq 0.$

$f(\theta_1 x_1+\theta_2 x_2+\cdots+\theta_k x_k)$

$$=f\left((1-\theta_k)\left(\frac{\theta_1}{1-\theta_k}x_1+\cdots+\frac{\theta_{k-1}}{1-\theta_k}x_{k-1}\right)+\theta_k x_k\right)$$

$$\leq f\left((1-\theta_k)\left(\frac{\theta_1}{1-\theta_k}x_1+\cdots+\frac{\theta_{k-1}}{1-\theta_k}x_{k-1}\right)\right)+\theta_k f(x_k)$$

$$=f\left((1-\theta_{k-1})\left(\frac{\theta_1}{1-\theta_{k-1}}x_1+\cdots+\frac{\theta_{k-2}}{1-\theta_{k-1}}x_{k-2}\right)+\theta_k x_{k-1}\right)+\theta_k f(x_k)$$

$$\leq f\left((1-\theta_{k-1})\left(\frac{\theta_1}{1-\theta_{k-1}}x_1+\cdots+\frac{\theta_{k-2}}{1-\theta_{k-1}}x_{k-2}\right)\right)+\theta_k x_{k-1}+\theta_k f(x_k)$$

$$=\cdots$$

1 凸函数的基本性质

■ **例题：使用定义检查凸性**

1. 范数(使用三角不等式和齐次性)

$$f(\theta x + (1-\theta)y) \le f(\theta x) + f((1-\theta)y) \le \theta f(x) + (1-\theta)f(y)$$

2. 最大值函数，对任意 $0 \le \theta \le 1$，函数 $f(x)$ 满足

$$\begin{aligned} f(\theta x + (1-\theta y)) &= \max_i(\theta x_i + (1-\theta)y_i) \\ &\le \theta \max_i x_i + (1-\theta)\max_i y_i \\ &= \theta f(x) + (1-\theta)f(y) \end{aligned}$$

大 纲

1. 凸函数基本性质

2. 典型例题

2 典型例题

仿射函数是凸函数和凹函数；所有范数都是凸的

■ $\mathbb{R}^n$ **中的例子：**

仿射函数：$f(x) = a^T x + b$

范数： $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{p} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}, p \geq 1; \|x\|_\infty = \max_k |x_k|$

■ $\mathbb{R}^n$ **和**$\mathbb{R}^{m\times n}$**中的例子：**

仿射函数：$f(x) = \operatorname{tr}(A^T X) + b = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} A_{ij} X_{ij} + b$

2 典型例题

■ 凸函数：

- □ 仿射函数： $\mathbb{R}$ 上的 $f(x) = ax + b$, 对于任意$a, b \in \mathbb{R}$
- □ 指数函数： $f(x) = e^{ax}$, 对于任意$a \in \mathbb{R}$
- □ 幂函数： $\mathbb{R}_{++}$上的 $f(x) = x^{\alpha}$, 对于$\alpha \geq 1$或者$\alpha \leq 0$
- □ 绝对值幂函数：$\mathbb{R}$上的 $f(x) = |x|^{p}$, 对于$p \geq 1$
- □ 负熵函数： $\mathbb{R}_{++}$上的 $f(x) = -x \log x$

■ 凹函数：

- □ 仿射函数： $\mathbb{R}$ 上的 $f(x) = ax + b$, 对于任意$a, b \in \mathbb{R}$
- □ 幂函数： $\mathbb{R}_{++}$上的 $f(x) = x^{\alpha}$, 对于$0 \leq \alpha \leq 1$
- □ 对数函数： $\mathbb{R}_{++}$上的 $f(x) = \log x$

2 典型例题

■ **判断凸性的其他方法：** 将函数限制在一条直线上

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 是凸函数当且仅当对于 $\mathbf{dom}\, f$ 中的任意 x 和 $\mathbb{R}^n$ 中的任意 v, 函数 $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$g(t) = f(x + tv), \mathbf{dom}\, g = \{t : x + tv \in \mathbf{dom} f\}$$

(关于 t) 是凸函数.

可以通过检查单变量函数的凸性来验证 f 的凸性.

■ **证明：**

$\Rightarrow$ ：取任意两点 x_1 和 x_2 , 它们必须位于一条直线上, 该直线的形式为 $x + tv$, $\cdots$ （x_1 和 x_2 的凸组合转化为 t_1 和 t_2 的）

$\Leftarrow$ ：$x + tv$ 与 $\mathbf{dom}\, f$ 相交, 形成一个新的凸集。很明显, 新凸集中的点满足凸性条件

2 典型例题

□ **例** 1： $f: S^n \to \mathbb{R}$，其中 $f(X) = \log\det X$，$\mathbf{dom}\, f = S^n_{++}$

$$g(t) = \log\det(X + tV) = \log\det\left(X^{\frac{1}{2}}\left(I + t(X^{-\frac{1}{2}})^T V X^{-\frac{1}{2}}\right) X^{\frac{1}{2}}\right)$$

$$= \log\det X + \log\det(I + tX^{-\frac{1}{2}} V X^{-\frac{1}{2}})$$

$$= \log\det X + \textstyle\sum_{i=1}^{n} \log(1 + t\lambda_i)$$

其中 λ_i 是 $(X^{-\frac{1}{2}})^T V X^{-\frac{1}{2}}$ 的特征值. 因此, 下式成立

$$g'(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{1 + t\lambda_i}, g''(t) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i^2}{(1 + t\lambda_i)^2}$$

g 在 t 上是凹函数 (对于任意选择的 $X \succ 0$ 和 V) ; 因此 f 是凹函数.

2 典型例题

■ **一阶条件：**

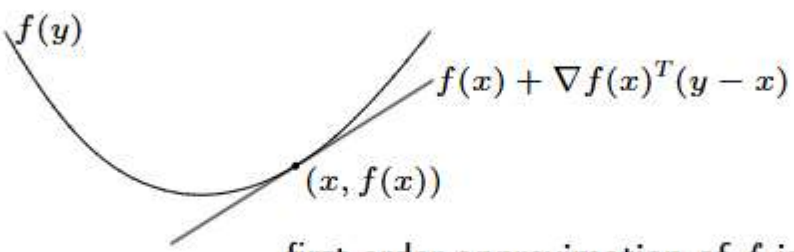
f 可微当且仅当 $\mathbf{dom}\, f$ 是开集且梯度

$$\nabla f(t) = \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}, \frac{\partial f(x)}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial f(x)}{\partial x_n}\right)$$

存在于每个$x \in \mathbf{dom}\, f$.

一阶条件：可微函数f具有凸域当且仅当

$$f(y) \geq f(x) + \nabla f(x)^T(y - x), \text{对所有} x, y \in \mathbf{dom}\, f$$



first-order approximation of f is global underestimator

2 凸函数具体实例

■ **证明:**

$\Leftarrow$: 对于所有$0 < t \le 1$,若 $f(x + t(y - x)) \le (1 - t)f(x) + tf(y)$,则存在

$$
\begin{aligned}
f(y) &\ge \frac{1}{t} f\big(x + t(y - x)\big) - \frac{1 - t}{t} f(x) \\
&= f(x) + \frac{f\big(x+t(y-x)\big)-f(x)}{t} \\
&= f(x) + f'(x)(y - x)
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow$: 设 $z = \theta x + (1 - \theta)y$. 那么有$f(x) \ge f(z) + f(z)(x - z)$以及 $f(y) \ge f(z) + f(z)(y - z)$. 因此

$$
\begin{aligned}
&\theta f(x) + (1 - \theta)f(y) \\
&\ge \theta f(z) + \theta f'(z)(x - z) + (1 - \theta)f(z) + (1 - \theta)f'(z)(y - z) \\
&= f(z) + f'(z)[\theta x + (1 - \theta)y - z] \\
&= f(z)
\end{aligned}
$$

2 凸函数具体实例

■ **二阶条件：**

f 是二次可微的若 $\mathbf{dom}\, f$ 是开集且Hassian$\nabla^2 f(x) \in S^n$

$$\nabla^2 f(x)_{ij} = \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j}, i,j = 1,\ldots,n$$

存在于每个$x \in \mathbf{dom}\, f$.

二阶条件：对于具有凸域的二次可微函数f

□ f是凸函数当且仅当

$$\nabla^2 f(x) \succeq 0, \text{对于所有} x \in \boldsymbol{dom}\, f$$

□ 如果$\nabla^2 f(x) \succ 0$,对于所有$x \in \boldsymbol{dom}\, f$, 那么$f$是严格凸的

2 凸函数具体实例

■ **证明：**

观察 $f(y) \geq f(x) + \nabla f(x)(y-x)$,即$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \geq \nabla f(x)$

$\Leftarrow$: 存在 $f'(x) \leq \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$ 以及 $f(x) \geq f(y) + f'(y)(x-y)$

因此 $f'(y) \geq \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \geq f'(x)$

$\Rightarrow$: 存在$z \in [x, y]$,使得 $\frac{f(y)-f(x)}{y-x} = f'(z)$

因此 $f'(x) \leq f'(z) = \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$

所以 $f(y) \geq f(x) + (y-x)f'(x)$

2 凸函数具体实例

□ 例 2：

设函数$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$是凸函数, 其定义域为$\mathbb{R}$. 函数在$\mathbb{R}$上有上界. 证明该函数是常数.

■ 证明：

任取一点x. 如果$f'(x)\neq 0$, 不妨设$f'(x)>0$.

根据凸函数的性质, 我们有$f'(z)\geq f'(x)$ 对所有的$z\geq x$都成立. 假设$f'(x)=\delta>0$. 那么我们有

$$f(z)-f(x)\geq \delta(z-x)$$

因此当$z\to\infty$, $f(z)$趋向于正无穷。此时, $f(x)$不存在上界。因此$f'(x)>0$ 不成立。同样, $f'(x)<0$ 也不成立。因此, 只能有$f'(x)=0$。得证

- **思考：**如果$x\in\mathbb{R}^n$呢？

2 凸函数具体实例

□ 例 3：

设函数$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$是凸函数。试证明：利用凸函数的定义证明，对于三变量$x_1<x_2<x_3$，函数f满足如下公式（单调性质）：

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\le\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$$

2 凸函数具体实例

■ **例 3 的证明：**

$$f(x_3) \geq f(x_2) + \nabla f(x_2)(x_3 - x_2)$$

$$f(x_1) \geq f(x_2) + \nabla f(x_2)(x_1 - x_2)$$

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \nabla f(x_2)$$

$$\frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} \geq \nabla f(x_2) \geq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

证毕.

2 凸函数具体实例

- **例** 4：
- 二次函数：$f(x) = (1/2)x^T Px + q^T x + r, (P \in S^n$, 若$P \succeq 0$则是凸函数)

$$\nabla f(x) = Px + q, \nabla^2 f(x) = P$$

- 最小二乘目标函数：$f(x) = \|Ax - b\|_2^2$, (对任意A都是凸函数)

$$\nabla f(x) = 2A^T(Ax - b), \nabla^2 f(x) = 2A^T A$$

R. K. 矩阵的转置点乘矩阵自身是一个半正定矩阵

- Quadratic-over-linear：$f(x, y) = x^2/y$, (当$y > 0$时为凸函数)

$$\nabla^2 f(x, y) = \frac{2}{y^3}\begin{bmatrix} y \\ -x \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y \\ -x \end{bmatrix}^T \succeq 0$$

- 一个非凸的例子：$f(x) = 1/x^2$ （除非限制在 $\mathbb{R}_{++}$上）

2 凸函数具体实例

- **例 4：**
- **Log-sum-exp**：$f(x) = \log \sum_{k=1}^{n} \exp(x_k)$是凸函数

$$\nabla^2 f(x) = \frac{1}{1^T z}\mathbf{diag}(z) - \frac{1}{(1^T z)^2} z^T z, (z_k = \exp(z_k))$$

要证明 $\nabla^2 f(x) \geq 0$, 我们必须验证对于所有的 v, $v^T \nabla^2 f(x) v \geq 0$:

$$v^T \nabla^2 f(x) v = \frac{\left(\sum_k z_k v_k^2\right)\left(\sum_k z_k\right) - \left(\sum_k z_k v_k\right)^2}{\left(\sum_k z_k\right)^2} \geq 0$$

因为$\left(\sum_k z_k v_k^2\right)\left(\sum_k z_k\right) \geq \left(\sum_k z_k v_k\right)^2$ (由柯西不等式得)

- **几何平均数函数**: $f(x) = \left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{1/n}$在$\mathbb{R}_{++}^n$上是凹函数(证明过程与Log-sum-exp类似)

2 凸函数具体实例

□ 例 5：

1. **函数f：$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 的α−下水平集**：

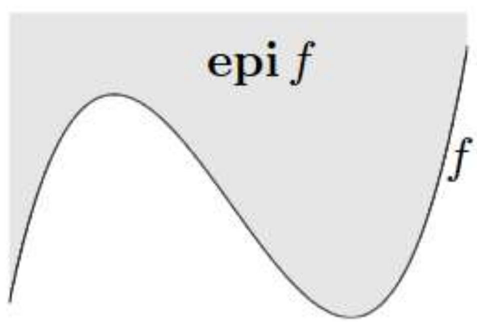
$$C_\alpha = \{x \in \mathbf{dom}\, f \mid f(x) \leq \alpha\}$$

凸函数的下级集是凸集(逆命题不成立)

2. **函数f：$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 的上镜图**：

$$\mathbf{epi}\, f = \{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x \in \mathbf{dom}\, f, f(x) \leq t\}$$

当且仅当 $\mathbf{epi}\, f$是凸集时, f是凸函数(结合下图可直观理解)



2 凸函数具体实例

□ 例 5.1 **的证明：**

如果 $x, y \in C_\alpha$，则有 $f(x) \leq \alpha, f(y) \leq \alpha$，因此对于任意 $0 \leq \theta \leq 1$, $f(\theta x + (1-\theta)y) \leq \theta f(x) + (1-\theta)f(y) \leq \alpha$，即 $\theta x + (1-\theta)y \in C_\alpha$

2 凸函数具体实例

□ **例** 6：

假设 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是凸函数, $a, b \in \mathbf{dom}\, f$, $a < b$. 证明对任意 $x \in [a, b]$, 下式成立

$$f(x) \leq \frac{b-x}{b-a} f(a) + \frac{a-x}{b-a} f(b)$$

■ **证明:**

令 $\lambda = \frac{b-x}{b-a}$, 有 $\lambda a + (1-\lambda) b = x$

由凸函数的定义得: $f(x) \leq \frac{b-x}{b-a} f(a) + \frac{a-x}{b-a} f(b)$

2 凸函数具体实例

□ 例 7：

验证以下函数是否为凸函数(给出分析过程)

(1) $f(x,y) = x^2y^2 + \frac{x}{y}, x > 0, y > 0$

(2) $f(x,y) = \log(e^x + e^y) - \log x, x > 0$

(4) $f(x,y) = xy\log xy, x > 0, y > 0$

2 凸函数具体实例

■ **例** 7. (1) **的证明：**

$(1) f(x,y) = x^2y^2 + \frac{x}{y}, x > 0, y > 0$

计算Hessian 矩阵:

$$H = \begin{bmatrix} 2y^2 & 4xy - 1/y^2 \\ 4xy - 1/y^2 & 2x^2 + 2x/y^3 \end{bmatrix}$$

取点 $(1,1)$, Hessian 行列式为 $\det(H) = (2)(2) - (4-1)^2 = 4 - 9 = -5 < 0$,故矩阵不定

所以函数非凸

2 凸函数具体实例

■ **例** 7. (2) **的证明：**

$(2) f(x, y) = \log(e^x + e^y) - \log x, x > 0$

计算Hessian 矩阵:

$$H = \begin{bmatrix} e^x e^y/(e^x + e^y)^2 + 1/x^2 & -e^x e^y/(e^x + e^y)^2 \\ -e^x e^y/(e^x + e^y)^2 & e^x e^y/(e^x + e^y)^2 \end{bmatrix}$$

对任意向量 $v = (v_1, v_2), v^T H v = \frac{1}{x^2} v_1^2 + \frac{e^x e^y}{(e^x + e^y)^2} (v_1 - v_2)^2 \geq 0$

所以函数是凸函数

2 凸函数具体实例

■ **例** 7. (3) **的证明：**

$(3) f(x,y) = \exp\{x^2 + e^{-y}\}, x > 0, y > 0$

令 $g(x,y) = x^2 + e^{-y}$,则 $f = e^g$.计算Hessian 矩阵:

$$H = e^g \begin{bmatrix} 4x^2 + 2 & -2xe^y \\ -2xe^y & e^{-2y} + e^{-y} \end{bmatrix}$$

主对角线元素 $4x^2 + 2, e^{-2y} + e^{-y} > 0$,且$\det(H) > 0$,故矩阵正定

所以函数是凸函数

2 凸函数具体实例

■ **例** 7. (4) **的证明：**

(4) $f(x, y) = xy \log xy$, $x > 0, y > 0$

计算Hessian 矩阵:

$$H = \begin{bmatrix} y/x & \log(xy) + 2 \\ \log(xy) + 2 & x/y \end{bmatrix}$$

Hessian 行列式为 $\det(H) = 1 - (\log(xy) + 2)^2$

当 $xy = e^{-1}$ 时, $\det(H) = 1 - (1)^2 = 0$

当 $xy = e^{1}$ 时, $\det(H) = 1 - (1 + 2)^2 = -8$

所以函数非凸

2 凸函数具体实例

■ **例** 7. (5) **的证明：**

(5) $f(x, y) = -\log(cx + dy), c, d \in \mathbb{R}$

函数 $\log(cx + dy)$ 在定义域 $cx + dy > 0$ 上为凹函数(Hessian 矩阵为半负定)

$$H = \begin{bmatrix} -\frac{d^2}{(cx+dy)^2} & -\frac{cd}{(cx+dy)^2} \\ -\frac{cd}{(cx+dy)^2} & -\frac{c^2}{(cx+dy)^2} \end{bmatrix}$$

其负数 $-\log(cx + dy)$ 为凸函数

谢 谢 ！