# 最优化方法导论第一次小测

**1.** 给定函数 $f(x) = \| Ax + b \|_2 + \lambda \| x \|_2$，其中 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$，$b \in \mathbb{R}^m$，$\lambda > 0$。问：$f(x)$ 是否为范数？

**解：** 范数需满足三条：

1. **正定性**：$f(x) \geq 0$，且 $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$
   - 当 $x = 0$ 时，$f(0) = \| b \|_2$
   - 若 $b \neq 0$，则 $f(0) > 0$，不满足正定性→**不是范数**
   - 若 $b = 0$，继续分析
2. **正齐次性**：

   $$f(\alpha x) = \| \alpha Ax + b \|_2 + \lambda|\alpha| \| x \|_2$$

   - 若 $b = 0$，则 $f(\alpha x) = |\alpha|(\| Ax \|_2 + \lambda \| x \|_2) = |\alpha| f(x)$，满足正齐次性
3. **三角不等式**：

$$f(x+y) = \| A(x+y) \|_2 + \lambda \| x+y \|_2 \leq \| Ax \|_2 + \| Ay \|_2 + \lambda(\| x \|_2 + \| y \|_2) = f(x) + f(y)$$

满足三角不等式

综上，若 $b \neq 0$，$f(x)$ 不是范数；

若 $b = 0$，$f(x)$ 是范数。

**2.** 设 $S$ 和 $T$ 均为线性子空间。证明：$S+T=S\cup T$ 当且仅当 $S\subseteq T$ 或 $T\subseteq S$。

**解:** 设 $S,T$ 为线性子空间。

**必要性：**
若 $S+T=S\cup T$。反设 $S\nsubseteq T$ 且 $T\nsubseteq S$。
则存在 $s_0\in S\backslash T$，$t_0\in T\backslash S$。考虑向量 $s_0+t_0\in S+T$。由假设 $S+T=S\cup T$，有 $s_0+t_0\in S\cup T$。

- 若 $s_0+t_0\in S$，则 $t_0=(s_0+t_0)-s_0\in S$，矛盾。
- 若 $s_0+t_0\in T$，则 $s_0=(s_0+t_0)-t_0\in T$，矛盾。
  故不可能同时有 $S\nsubseteq T$ 且 $T\nsubseteq S$。因此必有 $S\subseteq T$ 或 $T\subseteq S$。

**充分性：**
若 $S\subseteq T$，则

$$S+T=T=S\cup T。$$

若 $T\subseteq S$，则

$$S+T=S=S\cup T。$$

因此两种情况均成立。

综上，

$$S+T=S\cup T\Leftrightarrow S\subseteq T\text{ 或 }T\subseteq S。$$

**3.** 设 $C \subseteq \mathbb{R}^n$ 为非空集合。证明：$C$ 是凸集当且仅当 $C$ 与任意直线的交是凸的。

**解:**

**(⇒)**
若 $C$ 是凸集，取任意直线 $L \subseteq \mathbb{R}^n$。设 $x, y \in C \cap L$，则 $x, y \in C$ 且 $x, y \in L$。
因为 $C$ 凸，$\forall\theta \in [0,1]$，有

$$\theta x + (1-\theta)y \in C。$$

又因 $x, y \in L$，显然 $\theta x + (1-\theta)y \in L$。
于是 $\theta x + (1-\theta)y \in C \cap L$，说明 $C \cap L$ 是凸的。

**(⇐)**
若对任意直线 $L$，$C \cap L$ 是凸的。任取 $x, y \in C$，考虑经过 $x, y$ 的直线

$$L = \{tx + (1-t)y : t \in \mathbb{R}\}。$$

显然 $x, y \in C \cap L$。由假设，$C \cap L$ 是凸的，所以对任意 $\theta \in [0,1]$，

$$\theta x + (1-\theta)y \in C \cap L \subseteq C。$$

因此 $C$ 是凸集。

**4.** 设 $V = C^1(\mathbb{R})$ 为所有一阶连续可微函数 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 的集合。在 $V$ 上定义如下运算:

- **函数加法：** $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$，$\forall x \in \mathbb{R}$
- **数乘运算：** $(cf)(x) = cf(x)$，$\forall c \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}$

证明：$(V, +, \cdot)$ 构成实数域 $\mathbb{R}$ 上的线性空间。

**解：**

要证明 $(V, +, \cdot)$ 是实数域上的线性空间，只需验证以下条件。

1. **封闭性**
   - 若 $f, g \in V$，则 $f, g$ 连续可微。显然 $f+g$ 仍连续可微，所以 $f+g \in V$。
   - 若 $c \in \mathbb{R}, f \in V$，则 $cf$ 仍连续可微，所以 $cf \in V$。
2. **加法交换律**
   $(f+g)(x) = f(x) + g(x) = g(x) + f(x) = (g+f)(x)$，成立。
3. **加法结合律**
   $\big((f+g)+h\big)(x) = (f+g)(x) + h(x) = f(x) + g(x) + h(x) = f(x) + \big(g(x) + h(x)\big) = \big(f + (g+h)\big)(x)$，成立。
4. **零元存在**
   定义零函数 $0(x) \equiv 0$，显然 $0 \in V$，且 $(f+0)(x) = f(x)$，成立。
5. **加法逆元存在**
   对任意 $f \in V$，定义 $(-f)(x) = -f(x)$，则 $(-f) \in V$，且 $\big(f + (-f)\big)(x) = 0(x)$，成立。
6. **数乘结合律**
   $\big((cd)f\big)(x) = (cd)f(x) = c\big(df(x)\big) = \big(c(df)\big)(x)$，成立。
7. **数乘分配律（对向量）**
   $\big(c(f+g)\big)(x) = c\big(f(x) + g(x)\big) = cf(x) + cg(x) = (cf + cg)(x)$，成立。
8. **数乘分配律（对标量）**
   $\big((c+d)f\big)(x) = (c+d)f(x) = cf(x) + df(x) = (cf + df)(x)$，成立。
9. **数乘单位元**
   $(1 \cdot f)(x) = f(x)$，成立。

以上各条公理均成立，因此 $(V, +, \cdot)$ 是实数域 $\mathbb{R}$ 上的线性空间。

**5.** 扩展和限制集合。令 $S \subseteq \mathbf{R}^n$，用 $\|\cdot\|$ 表示 $\mathbf{R}^n$ 上的范数。

(a) 对于 $a \geq 0$，我们定义 $S_a$ 为 $\{x | \text{dist}(x, S) \leq a\}$，其中 $\text{dist}(x, S) = \inf_{y \in S} \| x - y \|$。证明如果 $S$ 是凸集，$S_a$ 是凸集。

(b) 对于 $a \geq 0$，我们定义 $S_{-a}$ 为 $\{x | \mathbf{B}(x, a) \subseteq S\}$，其中，$\mathbf{B}(x, a)$ 是以 $x$ 为中心，$a$ 为半径的球。证明如果 $S$ 是凸集，$S_{-a}$ 是凸集。

**解：** (a) $\forall\, x_1, x_2 \in S_a$，$\theta \in [0,1]$，下面证明 $\theta x_1 + (1-\theta) x_2 \in S_a$：

$$\text{dist}(\theta x_1 + (1-\theta)x_2, S) = \inf_{y \in S} \| \theta x_1 + (1-\theta)x_2 - y \|$$

$$= \inf_{y_1, y_2 \in S} \| \theta x_1 + (1-\theta)x_2 - \theta y_1 - (1-\theta) y_2 \|$$

$$\leq \inf_{y_1, y_2 \in S} (\theta \| x_1 - y_1 \| + (1-\theta) \| x_2 - y_2 \|)$$

$$= \theta \inf_{y_1 \in S} \| x_1 - y_1 \| + (1-\theta) \inf_{y_2 \in S} \| x_2 - y_2 \|$$

$$\leq \theta a + (1-\theta) a = a$$

因此： $\theta x_1 + (1-\theta) x_2 \in S_a$

所以 $S_a$ 为凸集。

(b)设任意 $x_1, x_2 \in S_{-a}$，则对$\forall\, u$ 且 $\| u \| \leq a$，有 $x_1 + u \in S$，$x_2 + u \in S$

对 $\forall\, \theta \in [0,1]$，$\| u \| \leq a$

$\theta x_1 + (1-\theta) x_2 + u = \theta(x_1 + u) + (1-\theta)(x_2 + u) \in S$ （因为 S 是凸集）

所以 $\theta x_1 + (1-\theta) x_2 \in S_{-a}$