第十三讲：对偶最优性与KKT条件

凸优化问题的最优解性质

杨 林

大 纲

1. 对偶最优条件

2. KKT条件的应用

大 纲

1. 对偶最优条件

2. KKT条件的应用

1 对偶最优条件

- **互补松弛性：** 假设强对偶性成立，x^* 是原始最优解，$(\lambda^*,\ \nu^*)$ 是对偶最优解

$$f_0(x^*) = g(\lambda^*, \nu^*) = \inf\left(f_0(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* f_i(x) + \sum_{i=1}^{p} \nu_i^* h_i(x) \right)$$

$$\leq f_0(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* f_i(x^*) + \sum_{i=1}^{p} \nu_i^* h_i(x^*) \quad (\text{消去inf})$$

$$\leq f_0(x^*)$$

以下两个情况成立

1. x^* 最小化 $L(x,\ \lambda^*,\ \nu^*)$

2. $\lambda_i^* f_i(x^*) = 0$ 对于 $i = 1, \ \cdots, \ m$(称为互补松弛性):

$$\lambda_i^* > 0 \Longrightarrow f_i(x^*) = 0, \qquad f_i(x^*) < 0 \Longrightarrow \lambda_i^* = 0$$

1 对偶最优条件

■ Karush-Kuhn-Tucker(KKT)条件：

以下四个条件称为KKT条件(f_i, h_i可微)

1. 原问题约束： $f_i(x) \leq 0, i = 1, \cdots, m, h_i(x) = 0, i = 1, \cdots, p$
2. 对偶问题约束: $\lambda \geq 0$
3. 互补松弛性: $\lambda_i f_i(x) = 0, \quad i = 1, \cdots, m$
4. 拉格朗日函数关于 x 的梯度为0:

$$\nabla f_0(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla f_i(x) + \sum_{i=1}^{p} \nu_i \nabla h_i(x) = 0$$

如果强对偶成立且 x, λ, ν 是最优的, 那么它们必须满足 KKT 条件

1 对偶最优条件

- **凸问题的（充分）KKT 条件：**

若 $\tilde{x}, \tilde{\lambda}, \tilde{\mu}$ 满足凸问题的 KKT 条件, 则它们是最优的:

1. 从互补松弛性和原问题可行性： $f_0(\tilde{x}) = L(\tilde{x}, \tilde{\lambda}, \tilde{\mu})$
2. 从第 4 个条件(以及凸性) : $g(\tilde{\lambda}, \tilde{\mu}) = L(\tilde{x}, \tilde{\lambda}, \tilde{\mu})$

因此 $f_0(\tilde{x}) = g(\tilde{\lambda}, \tilde{\mu})$

- 反过来，如果满足slater条件，x 是最优的当且仅当存在 λ, ν 满足 KKT 条件（slater条件意味着强对偶性, 并且对偶最优解被达到）
- 本质上,**KKT** 条件推广了无约束问题的最优条件 $\nabla f_0(x) = 0$

大 纲

1. 对偶最优条件

2. KKT条件的应用

2 KKT条件的应用

- **例** 7:(使用 KKT 条件求解 QP) :

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & (1/2)x^T P x + q^T x + r \\ \text{约束条件} & Ax = b \end{array}$$

- **解:** 写出 KKT 条件

$$Ax^* = b, \qquad Px^* + q + A^T \nu^* = 0$$

2 KKT条件的应用

- **例** 7:(使用 KKT 条件求解 QP) :

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & -\sum_{i=1}^{n}\log(\alpha_i + x_i) \\ \text{约束条件} & x \succeq 0,\ \mathbf{1}^T x = 1 \end{array}$$

- **解:** 写出 KKT 条件

$$x^* \succeq 0, \mathbf{1}^T x^* = 1, \lambda^* \succeq 0, \lambda_i^* x_i^* = 0, i = 1, \cdots, n$$

$$-1/(\alpha_i + x_i^*) - \lambda_i^* + \nu^* = 0, i = 1, \cdots, n$$

重写 KKT 条件:

$$x^* \succeq 0, \mathbf{1}^T x^* = 1, x_i^*(\nu^* - 1/(\alpha_i + x_i^*)) = 0, i = 1, \cdots, n$$

$$\nu^* \geq 1/(\alpha_i + x_i^*), i = 1, \cdots, n$$

2 KKT条件的应用

■ **解(续):**

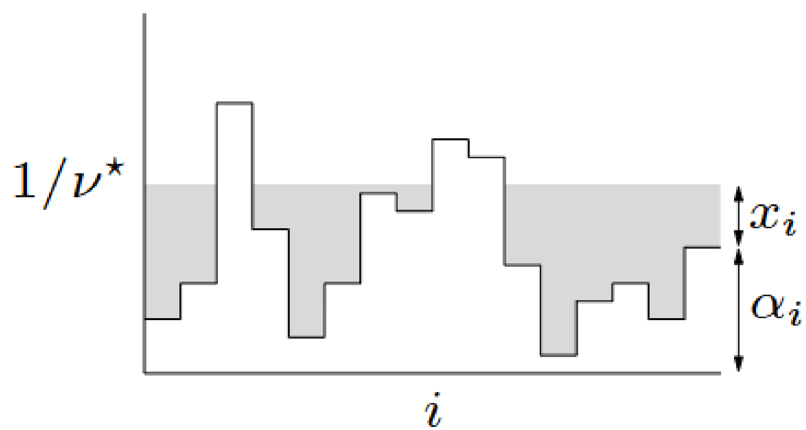
(1) 若 $\nu^* < 1/\alpha_i$，那么 $x_i^* > 0$，同时 $x_i^* = 1/\nu^* - \alpha_i$；

(2) 若 $\nu^* \geq 1/\alpha_i$，那么 $x_i^* \leq 0$, $i.e. x_i^* = 0$

结果，$x_i^* = \max\{0, 1/\nu^* - \alpha_i\}$

确定了 ν 与 $\mathbf{1}^T x^* = 1$ 结合的最优值，即

$$\sum_{i=1}^{n} \max\{0, 1/\nu^* - \alpha_i\} = 1$$



2 KKT条件的应用

□ **例** 8:使用 KKT 条件找到下列集合中最接近 (0, 0) 的点.

$$M=\{x\in\mathbb{R}^2:\ x_1+x_2\geq 4, 2x_1+x_2\geq 5\}$$

■ **解:** 将其转化为一个优化问题:

最小化	$x_1^2+x_2^2$
约束条件	$-x_1-x_2+4\leq 0$
	$-2x_1-x_2+5\leq 0$

拉格朗日函数是

$$L(x_1,x_2,u_1,u_2)$$
$$=x_1^2+x_2^2+u_1(-x_1-x_2+4)+u_2(-2x_1-x_2+5),u_1,u_2\geq 0$$

2 KKT条件的应用

- **解(续):** KKT 条件是:

I. 可行性

II. 互补松弛性

$$u_1(-x_1 - x_2 + 4) = 0, u_1 \geq 0$$

$$u_2(-2x_1 - x_2 + 5) = 0, u_2 \geq 0$$

III. 最优性

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 2x_1 - u_1 - 2u_2 = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 2x_2 - u_1 - u_2 = 0$$

2 KKT条件的应用

■ **解(续):**

情况(1): $u_1 = 0, \ u_2 = 0$. 从 III 得 $x_1 = 0, \ \ x_2 = 0$, 不可行

情况(2): $x_1 + x_2 = 4, \ \ u_2 = 0$. 结合 III 我们可以得到

$$2x_1 - u_1 = 0, 2x_2 - u_1 = 0, x_1 + x_2 = 4$$

这个给出 $x_1 = 2, x_2 = 2, u_1 = 4 > 0$. 一个 KKT 点 $(2, 2, 4, 0)$!

情况(3): $u_1 = 0, 2x_1 + x_2 = 5$

$$2x_1 - 2u_2 = 0, 2x_2 - u_2 = 0, 2x_1 + x_2 = 5$$

我们有 $x_1 = 2, x_2 = 1, u_2 = 2$ (不可行)

情况(4): $x_1 + x_2 = 4, 2x_1 + x_2 = 5$

我们有 $x_1 = 1, x_2 = 3$ 以及 $u_1 + 2u_2 = 2, u_1 + u_2 = 6$

这会得到 $u_1 = 10, u_2 = -4 < 0$ (不满足对偶可行性)

2 KKT条件的应用

- **例 9:下面是一个强对偶性成立的非凸优化问题. 如何找到最优解, 唯一吗?**

$$
\begin{aligned}
\text{最大化}_x \quad & -2(x_1-2)^2 - x_2^2 \\
\text{约束条件} \quad & x_1^2 + x_2^2 \le 25 \\
& x_1 \ge 0
\end{aligned}
$$

- **解:** 拉格朗日函数是

$$L(x_1, x_2, \mu_1, \mu_2) = -2(x_1-2)^2 - x_2^2 + \mu_1(x_1^2 + x_2^2 - 25) - \mu_2 x_1$$

$$
KKT\ \text{条件是:}
\begin{cases}
-4(x_1-2) + 2\mu_1 x_1 - \mu_2 = 0 \\
-2x_2 + 2\mu_1 x_2 = 0 \\
x_1^2 + x_2^2 \le 25 \\
x_1 \ge 0 \\
\mu_1, \mu_2 \ge 0 \\
\mu_1 = 0 \text{ 或 } x_1^2 + x_2^2 = 25 \\
\mu_2 = 0 \text{ 或 } x_1 = 0
\end{cases}
$$

2 KKT条件的应用

■ **解(续):**

(1) $\mu_1 = \mu_2 = 0$. 我们得到 $x_1 = 2$ 和 $x_2 = 0$, 满足原始约束. 因此, (2, 0) 和 (0, 0) 是可能的解, 其值等于 0

(2) $\mu_1 = 0$ 和 $\mu_2 > 0$. 我们得到 $x_1 = x_2 = 0$ 和 $\mu_2 = 8 > 0$. 值是 -8

(3) $\mu_2 = 0$ 和 $\mu_1 > 0$, 我们得到

$$\begin{cases} -4(x_1 - 2) + 2\mu_1 x_1 = 0 \\ -2x_2 + 2\mu_1 x_2 = 0 \\ x_1 \geq 0 \\ \mu_1 > 0 \\ x_1^2 + x_2^2 = 25 \end{cases}$$

2 KKT条件的应用

- **解(续):**

如果 $x_2 = 0, x_1 = 5$, 且 $\mu_1 = 6/5 > 0$ 和 $\mu = 0$, 得到值为 -18. 如果 $x_2 \neq 0, \mu_1 = 1$, 我们有 $x_1 = 4$ 和 $x_2 = \pm 3$, 且 $\mu_2 = 0$, 得到值为 -17.

(4) $\mu_2 > 0$ 且 $\mu_1 > 0$. 我们得到 $x_1 = 0$ 和 $x_2 = \pm 5$, $\mu_1 = 1$ 和 $\mu_2 = 8$, 得到一个值为 -33, 这是最小值.

谢 谢 ！