第八讲：函数的保凸运算

凸函数的其他判断方法

杨 林

0 保凸运算

■ 确定函数凸性的实用方法：

1. 验证定义(也可以通过限制在一条线上)
2. 对于两次可微函数，证明$\nabla^2 f(x) \succeq 0$
3. 证明 f 是通过保持凸性的运算从简单的凸函数得到的：

- □ 非负加权求和
- □ 与仿射函数的复合
- □ 点态最大值与上确界
- □ 复合
- □ 最小化
- □ 透视

大 纲

1. 非负加权求和

2. 逐点最大值和逐点上确界

3. 最小化

4. 函数的复合

5. 透视函数

大 纲

1. 非负加权求和

2. 逐点最大值和逐点上确界

3. 最小化

4. 函数的复合

5. 透视函数

1 非负加权求和

- **和函数:** $f_1 + f_2$ 是凸函数若 f_1, f_2是凸函数(可推广到无穷求和以及积分）
- **非负倍数:** αf 是凸函数若 f 是凸函数, $\alpha \geq 0$
- 上镜图解释： $\mathbf{epi}\, wf = \begin{bmatrix} I & \\ & w \end{bmatrix} \mathbf{epi}\, f$
- **非负加权求和:** $f = w_1 f_1 + \cdots + w_m f_m$ （连续利用两个保凸运算）
- **可以看出：所有凸函数的集合是一个凸锥，因为凸函数的非负加权求和仍然是凸函数**
- 可以推广到无限项求和以及积分的情况：如果固定任意的$y \in \mathcal{A}$，函数$f(x,y)$是关于x的凸函数，如果有$w(y) \geq 0$对于任意的$y \in \mathcal{A}$都成立，则函数$g(x) = \int_{\mathcal{A}} w(y) f(x,y) dy$是关于$x$的凸函数

大 纲

1. 非负加权求和

2. 逐点最大值和逐点上确界

3. 最小化

4. 函数的复合

5. 透视函数

2 逐点最大值和逐点上确界

- **逐点最大值:** $f_1, \cdots, f_m$ 是凸函数,那么$\max\{f_1(x), \cdots, f_m(x)\}$ 是凸函数
- **证明（先考虑两个函数的情况）：**

$$
\begin{aligned}
& f(\theta x + (1-\theta)y) \\
&\quad = \max\{f_1(\theta x + (1-\theta)y), f_2(\theta x + (1-\theta)y)\} \\
&\quad \le \max\{\theta f_1(x) + (1-\theta) f_1(y), \theta f_2(x) + (1-\theta) f_2(y)\} \\
&\quad \le \theta \max\{f_1(x), f_2(x)\} + (1-\theta)\max\{f_1(y), f_2(y)\} \\
&\quad = \theta f(x) + (1-\theta) f(y)
\end{aligned}
$$

迭代应用两个函数的保凸性即可完成证明:

$$\max\{f_1(x), \cdots, f_m(x)\} = \max\{f_1(x), \max\{f_2(x), \cdots, f_m(x)\}\}$$

2 逐点最大值和逐点上确界

□ **例** 1:

1. 分段线性函数: $f(x)=\max_{i=1,\ldots,m} a_i^T x+b_i$是凸函数
2. $x\in\mathbb{R}^n$ 中 r 个最大分量的和:

$$f(x)=\ x_{[1]}+x_{[2]}+\cdots+x_{[r]}$$

是凸函数 ($x_{[1]}$ 是 x 的第 i 个最大分量)

■ **例** 1.2 **证明:**

$$f(x)=\max\{x_{i_1}+x_{i_2}+\ \cdots+x_{i_r}\,|\,1\le i_1<i_2<\ \cdots<i_r\le n\}$$

2 逐点最大值和逐点上确界

- **逐点上确界:** 对于每个 $y \in \mathcal{A}$, 如果 $f(x,y)$ 在 x 上是凸的, 那么

$$g(x) = \sup_{y \in \mathcal{A}} f(x,y)$$

是凸函数

- 上镜图解释：一系列函数的逐点上确界对应这些函数上镜图的交集 $\mathbf{epi}\ g = \bigcap_{y \in \mathcal{A}} \mathbf{epi}\ f(x,y)$

例 2:

1. 集合 C 的支撑函数: $S_C(x) = \sup_{y \in C} y^T x$ 是凸函数
2. 集合C中到最远点的距离: $f(x) = \sup_{y \in C} \|x - y\|$
3. 对称矩阵的最大特征值:对于 $X \in S^n$

$$\lambda_{\max}(X) = \sup_{\|y\|_2 = 1} y^T X y$$

大 纲

1. 非负加权求和
2. 逐点最大值和逐点上确界
3. 最小化
4. 函数的复合
5. 透视函数

3 最小化

- **最小化:** 如果 $f(x,y)$ 在 (x,y) 上是凸的, 且C是一个凸集, 那么

$$g(x) = \inf_{y \in C} f(x,y)$$

是凸函数

例 3:

1. 到集合的距离: $\mathbf{dist}(x,S) = \inf_{y \in S} \|x - y\|$ 是凸函数若 S 是凸集

3 最小化

- **证明:**

$$(x,t) \in \textbf{epi}\ g \Leftrightarrow \begin{cases} (1):\ t \geq f(x,y) \text{ 或 } (x,y,t) \in \textbf{epi}\ f \\ (2):\ y \in C \text{ 其中 } C \text{ 是凸集} \end{cases}$$

条件 (1) 和 (2) 分别导致两个集合

$$S_1 = \{(x,y,t) | y \in C\}$$

$$S_2 = \{(x,y,t) | (x,y,t) \in \textbf{epi}\ f\}$$

S_1 和 S_2 都是凸集

通过分析上述条件， $\textbf{epi}\ g$ 是两个凸集的交集在(x,t)平面的投影

因此， $\textbf{epi}\ g$ 是凸的

大 纲

1. 非负加权求和
2. 逐点最大值和逐点上确界
3. 最小化
4. 函数的复合
5. 透视函数

4 函数的复合

■ 标量函数的复合:

$g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 和 $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 的复合函数:

$$f(x) = h\big(g(x)\big)$$

是凸函数，若: (1) g 是凸函数, h 是凸函数, h 非递减; (2) g 是凹函数, h 是凸函数, h 非递增.

■ **分析:**(对于 $n = 1$, 可微函数g, h)

$$f''(x) = h''(g(x))\mathrm{g}'(\mathrm{x})^2 + h'(g(x))g''(x)$$

□ **例** 4:

1. $\exp g(x)$ 是凸函数若 g 是凸函数

■ 证明:$h(x) = \exp(x)$ 是凸函数且非递减

2. $1/g(x)$ 是凸函数若 g 是凹函数且为正

■ 证明:$h(x) = 1/x$ 是凸函数且非递增加

4 函数的复合

■ 向量函数的复合:

$g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ 和 $h: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ 的复合函数:

$$f(x) = h\big(g(x)\big) = h\big(g_1(x), \cdots, g_k(x)\big)$$

是凸函数，若: (1) g_i 是凸函数, h 是凸函数, h 在每一个参数上是非递减的; (2) g_i是凹函数, h 是凸函数, h 在每一个参数上是非递增的.

■ **分析:**(对于 $n = 1$, 可微函数g, h)

$$f''(x) = g'(x)^T \nabla^2 h(g(x)) g'(x) + \nabla h(g(x))^T g''(x)$$

4 函数的复合

■ **与仿射函数复合:** $f(Ax+b)$ 是凸函数若 f 是凸函数

□ **例** 5:

1. 线性不等式的对数障碍函数

$$f(x) = -\sum \log(b_i - a_i^T x), \mathbf{dom}\, f = \{x | a_i^T x < b_i, i = 1, \dots, m\}$$

■ 证明:因为 $g(x) = -\log x$ 在 $\mathbb{R}_{++}^n$ 上是凸函数,所以它与仿射函数的复合函数也是凸函数

2. 仿射函数的任意范数: $f(x) = \| Ax + b \|$

■ 证明:因为 $\mathbb{R}^n$ 上的范数是凸函数,所以它与仿射函数的复合函数也是凸函数

4 函数的复合

- **例** 6:

1. $\sum_{i=1}^{m} \log g_i(x)$ 是凹函数若 g_i 是凹函数且为正

- 证明:g_i 是凹函数且为正,$h(x) = -\log x$ 是凸函数且非递增,所以 $-\log g_i(x)$ 是凸函数.又因为凸函数求和保持凸性,所以 $\sum_{i=1}^{m} -\log g_i(x)$ 也是凸函数

2. $\log \sum_{i=1}^{m} \exp g_i(x)$ 是凸函数若 g_i 是凸函数

- 证明:若 g_i 是凸函数且 $h(x) = \log \sum_{i=1}^{m} \exp x_i$ 是凸函数且h在每一个参数上是非递减的,所以 $\log \sum_{i=1}^{m} \exp g_i(x)$ 是凸函数

大 纲

1. 非负加权求和
2. 逐点最大值和逐点上确界
3. 最小化
4. 函数的复合
5. 透视函数

5 透视函数

- **函数 $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 的透视函数 $g: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:**

$$g(x,t) = tf\left(\frac{x}{t}\right), \textbf{dom}\ g = \left\{(x,t) \middle| \frac{x}{t} \in \textbf{dom}\ f, t > 0\right\}$$

若 f 是凸函数, 则 g 也是凸函数

- **证明:首先进行条件等价性分析**

$$(x,t,s) \in \textbf{epi}\ g \iff g(x,t) \le s$$

$$\iff tf\left(\frac{x}{t}\right) \le s$$

$$\iff f\left(\frac{x}{t}\right) \le \frac{s}{t}$$

$$\iff (x/t, s/t) \in \textbf{epi}\ f$$

这意味着 **epi** f 是 **epi** g 的透视映射.因此, **epi** f 凸当且仅当 **epi** g 凸

5 透视函数

- **例** 7:

1. $f(x) = x^T x$ 是凸函数; 因此, 对于$t > 0$, $g(x,t) = x^T x/t$ 是凸函数
2. 负对数函数 $f(x) = -\log x$ 是凸函数;因此相对熵 $\mathrm{g}(x,t) = t\log t - t\log x$ 在 $\mathbb{R}_{++}^2$ 上是凸函数
3. 如果f是凸函数，那么

$$g(x) = (c^T x + d) f((Ax + b)/(c^T x + d))$$

在$\{x | c^T x + d > 0, (Ax + b)/(c^T x + d) \in \mathbf{dom}\, f\}$上是凸函数

- **例** 7.2 **证明:**

$$g(x,t) = -t\log\frac{x}{t} = tf\left(\frac{x}{t}\right)$$

5 透视函数

- **例** 7.3 **证明:**

$$(x,t) \in \textbf{epi}\ g \Leftrightarrow t \geq (c^T x + d) f((Ax+b)/(c^T x + d))$$

$$\Leftrightarrow \frac{t}{c^T x + d} \geq f((Ax+b)/(c^T x + d))$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{Ax+b}{c^T x + d}, \frac{t}{c^T x + d}\right) \in \textbf{epi}\ f$$

$(x,t) \to (Ax+b, t, c^T x + d) \to \left(\frac{Ax+b}{c^T x+d}, \frac{t}{c^T x+d}\right)$均为保凸映射，故$\textbf{epi}\ g$也是凸集

谢 谢 ！