第七讲：凸函数

优化问题的约束和目标函数

杨 林

大 纲

1. 凸函数的定义

2. 一阶条件

3. 二阶条件

4. 单变量条件

大 纲

1. 凸函数的定义

2. 一阶条件

3. 二阶条件

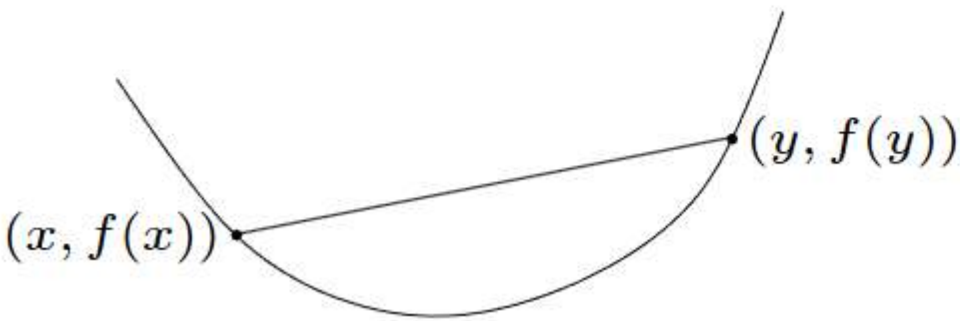
4. 单变量条件

1 凸函数的定义

■ **定义1(凸函数)：** 对于 $f：\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ，若 $\mathbf{dom}\ f$ 是一个凸集, 并且对于 $\forall x, y \in \mathbf{dom}\ f$, $0 \le \theta \le 1$ 有

$$f(\theta x + (1-\theta)y) \le \theta f(x) + (1-\theta)f(y)$$

则称 f 是**凸函数**.



- f 在是严格凸的,若 $\mathbf{dom}\ f$是凸集且

$$f(\theta x + (1-\theta)y) < \theta f(x) + (1-\theta)f(y)$$

  对于任意的 $x,\ y \in \mathbf{dom}\ f,\ x \ne y$ 且 $0 < \theta < 1$

- f 是凹函数,当且仅当$-f$ 是凸函数

1 凸函数的定义

仿射函数是凸函数和凹函数；所有范数都是凸的

■ $\mathbb{R}^n$ 中的例子：

仿射函数：$f(x) = a^T x + b$

范数：$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{p} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}, p \geq 1; \|x\|_\infty = \max_k |x_k|$ (满足三角不等式)

■ $\mathbb{R}^{m\times n}$ 中的例子：

仿射函数：$f(x) = \mathrm{tr}(A^T X) + b = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} A_{ij} X_{ij} + b$

注：X为矩阵，$\mathrm{tr}(X)$为迹函数

1 凸函数的定义

- 例 1：使用定义检查凸性

1. 范数(使用三角不等式和齐次性)

$$f(\theta x + (1-\theta)y) \le f(\theta x) + f((1-\theta)y) \le \theta f(x) + (1-\theta)f(y)$$

2. “最大值函数”：对任意 $0 \le \theta \le 1$，函数 $f(x)$ 满足

$$\begin{aligned} f(\theta x + (1-\theta y)) &= \max_i(\theta x_i + (1-\theta)y_i) \\ &\le \theta \max_i x_i + (1-\theta)\max_i y_i \\ &= \theta f(x) + (1-\theta)f(y) \end{aligned}$$

1 凸函数的定义

■ **定义2(扩展值延伸)**： f 的延伸函数 $\tilde{f}$ 满足

$$\tilde{f}(x) = f(x), x \in \mathbf{dom}\, f, \tilde{f}(x) = \infty, x \notin \mathbf{dom}\, f$$

经常用来简化表达；在$\mathbb{R} \cup \{\infty\}$上，也满足

$$0 \leq \theta \leq 1 \Rightarrow \tilde{f}(\theta \mathrm{x} + (1 - \theta \mathrm{y})) \leq \theta \tilde{f}(\mathrm{x}) + (1 - \theta)\tilde{f}(\mathrm{y})$$

■ **证明：**

显然当 $\theta = 0$ 或 1 时成立

显然若 x 或 y $\in \mathbf{dom}\, f$时成立

若 x 或 y $\notin \mathbf{dom}\, f$ 且 $\theta \neq 0, 1,$ 则右侧为 $+\infty,$ 因此不等式仍然成立

1 凸函数的定义

定义3：函数f ： $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 的α-下水平集

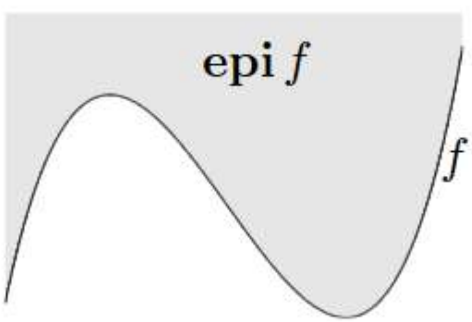
$$C_\alpha = \{x \in \textbf{dom}\ f \mid f(x) \le \alpha\}$$

凸函数的下水平集是凸集(逆命题不成立)

定义4：函数f ： $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 的上镜图

$$\textbf{epi}\ f = \{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x \in \textbf{dom}\ f, f(x) \le t\}$$

当且仅当 **epi** f是凸集时, f是凸函数(结合下图可直观理解，可结合定义证明)



1 凸函数的定义

□ 下水平集是凸集的证明：

如果 $x, y \in C_\alpha$, 则有 $f(x) \le \alpha, f(y) \le \alpha$

因此对于任意 $0 \le \theta \le 1$, 有

$$f(\theta x + (1-\theta)y) \le \theta f(x) + (1-\theta)f(y) \le \alpha$$

即 $\theta x + (1-\theta)y \in C_\alpha$ ，得证

1 凸函数的定义

□ **Jensen不等式**：

如果f是凸函数, 那么对于任意 $0 \le \theta \le 1$ 有

$$f(\theta x+(1-\theta)y) \le \theta f(x)+(1-\theta)f(y)$$

□ **拓展**：如果f是凸函数, 那么

$$f(\boldsymbol{E}z) \le \boldsymbol{E}f(z)$$

基本不等式是具有离散分布$p(x)=\theta, p(y)=1-\theta$ 的特殊情况.

大 纲

1. 凸函数的定义

2. 一阶条件

3. 二阶条件

4. 单变量条件

2 一阶条件

■ **可微函数：**

f 可微当且仅当 $\mathbf{dom}\ f$ 是开集且梯度

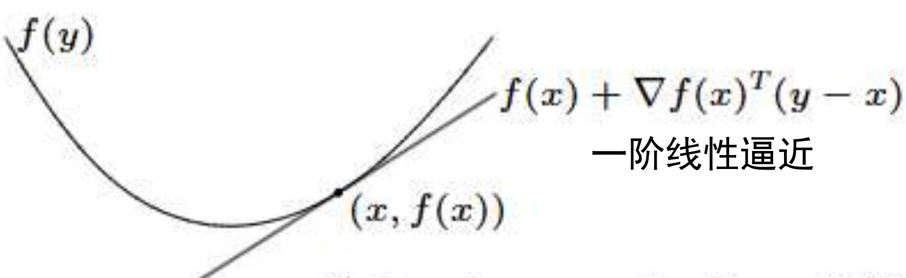
$$\nabla f(t) = \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}, \frac{\partial f(x)}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial f(x)}{\partial x_n}\right)$$

存在于每个$x \in \mathbf{dom}\ f$.

一阶条件：可微函数f（定义域为凸）是凸函数当且仅当

$f(y) \geq f(x) + \nabla f(x)^T(y-x)$,对所有$x, y \in \mathbf{dom}\ f$;

f是严格凸函数当且仅当 $f(y) > f(x) + \nabla f(x)^T(y-x)$



first-order approximation of f is global underestimator

2 一阶条件

■ **证明：**

$\Leftarrow$: 对所有$0 < t \leq 1$,若 $f(x + t(y - x)) \leq (1 - t)f(x) + tf(y)$,则存在

$$f(y) \geq \frac{1}{t} f\big(x + t(y - x)\big) - \frac{1 - t}{t} f(x)$$

$$= f(x) + \frac{f\big(x+t(y-x)\big)-f(x)}{t}$$

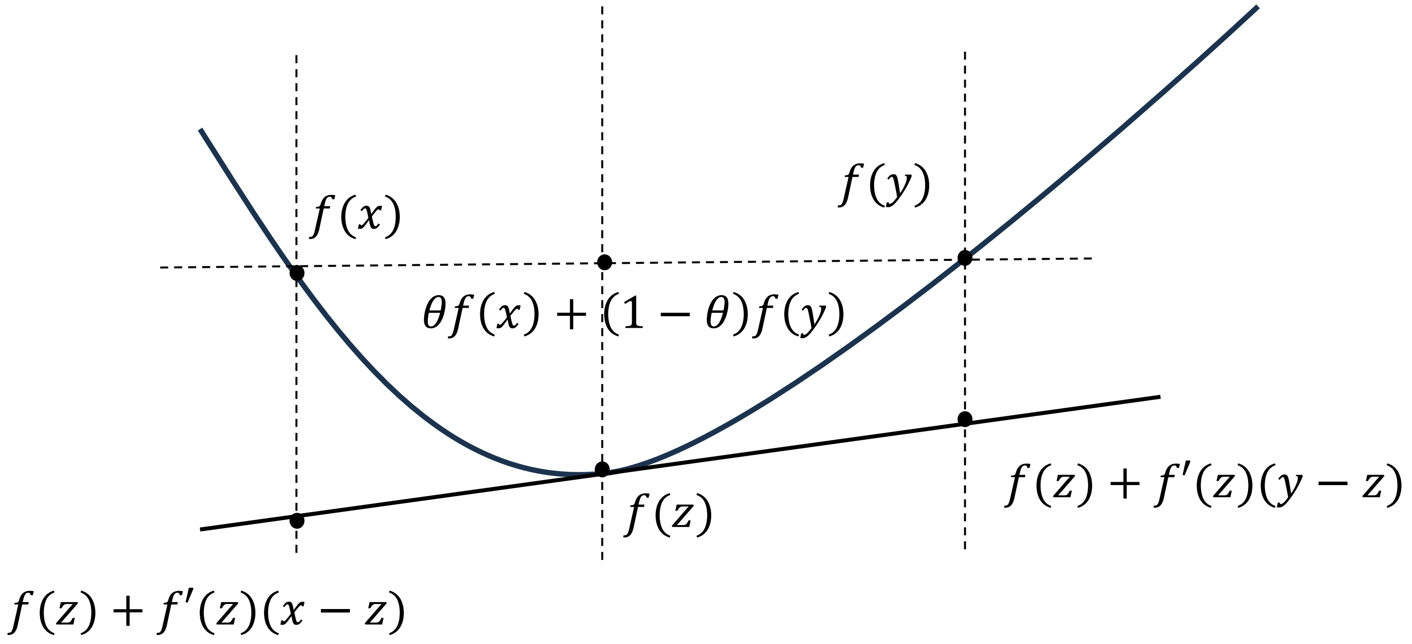
$$f(y) \geq \ f(x) + f'(x)(y - x) \quad （t \text{ 趋向} 0）$$

$\Rightarrow$: 设 $z = \theta x + (1 - \theta)y$. 那么有$f(x) \geq f(z) + f'(z)(x - z)$以及 $f(y) \geq f(z) + f'(z)(y - z)$. 因此

$$\begin{aligned}
&\theta f(x) + (1 - \theta)f(y) \\
&\geq \theta f(z) + \theta f'(z)(x - z) + (1 - \theta)f(z) + (1 - \theta)f'(z)(y - z) \\
&= f(z) + f'(z)[\theta x + (1 - \theta)y - z] \\
&= f(z)
\end{aligned}$$

2 一阶条件

$$z = \theta x + (1-\theta)y$$



2 一阶条件

□ 例 2**：**

设函数$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$是凸函数。试证明:利用凸函数的定义证明，对于三变量$x_1<x_2<x_3$，函数f满足如下公式(单调性质):

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\le\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$$

2 一阶条件

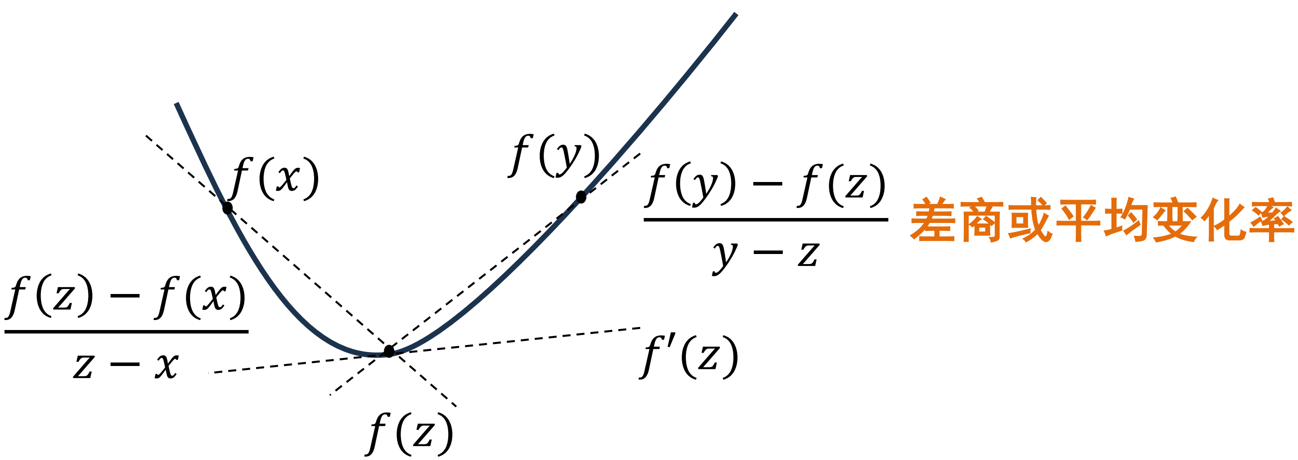
■ **例 2 的证明：**

$$f(x_3) \geq f(x_2) + f'(x_2)(x_3 - x_2)$$

$$f(x_1) \geq f(x_2) + f'(x_2)(x_1 - x_2)$$

$$\frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} \geq f'(x_2), \qquad \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq f'(x_2)$$

$$\frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} \geq f'(x_2) \geq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$



大 纲

1. 凸函数的定义

2. 一阶条件

3. 二阶条件

4. 单变量条件

3 二阶条件

■ 二阶条件：

f 是二次可微的若 $\mathbf{dom}\, f$ 是开集且Hassian $\nabla^2 f(x) \in S^n$

$$\nabla^2 f(x)_{ij} = \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j}, i,j = 1,\ldots,n$$

存在于每个$x \in \mathbf{dom}\, f$.

二阶条件：对于具有凸域的二次可微函数f

- f是凸函数当且仅当

$$\nabla^2 f(x) \succeq 0, \text{对于所有} x \in \mathbf{dom}\, f$$

- 如果$\nabla^2 f(x) \succ 0$，对于所有$x \in \mathbf{dom}\, f$, 那么f是严格凸的

3 二阶条件

■ **证明：**

$\Leftarrow$: 观察 $f(y) \geq f(x) + f'(x)(y-x)$, 即 $f'(x) \leq \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$

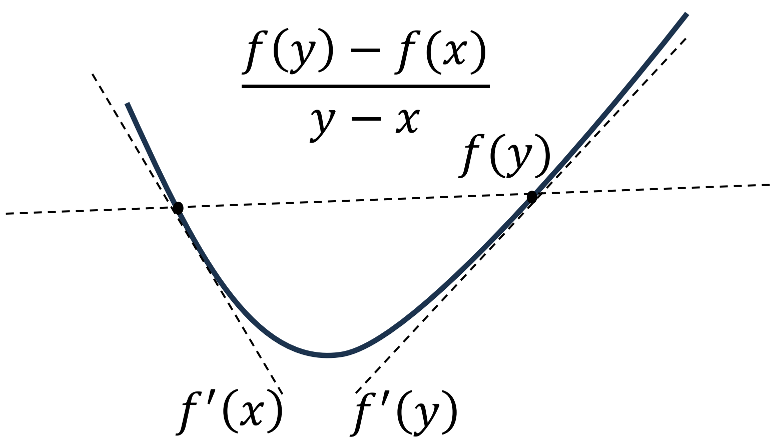
以及 $f(x) \geq f(y) + f'(y)(x-y)$,即$f'(y) \geq \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$

因此 $f'(y) \geq \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \geq f'(x)$

$\Rightarrow$: 存在$z \in [x,y]$,使得 $\frac{f(y)-f(x)}{y-x} = f'(z)$ (拉格朗日中值定理)

因此 $f'(x) \leq f'(z) = \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$

所以 $f(y) \geq f(x) + (y-x)f'(x)$



3 二阶条件

□ 例 3**：**

设函数$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$是凸函数, 其定义域为$\mathbb{R}$. 函数在$\mathbb{R}$上有上界. 证明该函数是常数.

■ 证明：

任取一点x. 如果$f'(x)\neq 0$, 不妨设$f'(x)>0$.

根据凸函数的性质, 我们有$f'(z)\geq f'(x)$ 对所有的$z\geq x$都成立. 假设$f'(x)=\delta>0$. 那么我们有

$$f(z)-f(x)\geq\delta(z-x)$$

因此当$z\to\infty$, $f(z)$趋向于正无穷。此时, $f(x)$不存在上界。因此$f'(x)>0$ 不成立。同样, $f'(x)<0$ 也不成立。因此, 只能有$f'(x)=0$。得证

- **思考：**如果$x\in\mathbb{R}^n$呢？

3 二阶条件

■ 例 4（判断一元函数凹凸）：

- **仿射函数：** $\mathbb{R}$ 上的 $f(x) = ax + b$, 对于任意$a, b \in \mathbb{R}$,

$$f''(x) = 0$$

- **指数函数：** $f(x) = e^{ax}$, 对于任意$a \in \mathbb{R}$

$$f''(x) = a^2 e^{ax}$$

- **幂函数1：** $\mathbb{R}_{++}$上的 $f(x) = x^{\alpha}$, 对于$\alpha \geq 1$或者$\alpha \leq 0$

$$f''(x) = \alpha(\alpha - 1)x^{\alpha} \quad [\alpha \text{ 与 } \alpha - 1 \text{ 同号}]$$

- **幂函数2：** $\mathbb{R}_{++}$上的 $f(x) = x^{\alpha}$, 对于$0 \leq \alpha \leq 1$

$$f''(x) = \alpha(\alpha - 1)x^{\alpha} \quad [\alpha \text{ 与 } \alpha - 1 \text{ 异号}]$$

- **负熵函数：** $\mathbb{R}_{++}$上的 $f(x) = -x \log x$

$$f''(x) = -\frac{1}{x}, x > 0$$

3 二阶条件

- **例 4（续，多元函数）：**
- **二次函数**: $f(x) = (1/2)x^T Px + q^T x + r$, ($P \in S^n$, 若$P \succeq 0$则是凸函数)

$$\nabla f(x) = Px + q, \qquad \nabla^2 f(x) = P$$

- **最小二乘函数**: $f(x) = \|Ax - b\|_2^2$, (对任意A都是凸函数)

$$\nabla f(x) = 2A^T(Ax - b), \nabla^2 f(x) = 2A^T A$$

R. K. 矩阵的转置点乘矩阵自身是一个半正定矩阵

- Quadratic-over-linear: $f(x, y) = x^2/y$, (当$y > 0$时为凸函数)

$$\nabla^2 f(x, y) = \frac{2}{y^3}\begin{bmatrix} y \\ -x \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y \\ -x \end{bmatrix}^T \succeq 0$$

- **一个非凸的例子**: $f(x) = 1/x^2$ （除非限制在 $\mathbb{R}_{++}$上）

预备知识：矩阵的导数*

$$\frac{\partial(\mathbf{a}^T\mathbf{x})}{\partial\mathbf{x}} = \frac{\partial(\mathbf{x}^T\mathbf{a})}{\partial\mathbf{x}} = \mathbf{a}$$

$$\frac{\partial(\mathbf{a}^T\mathbf{X}\mathbf{b})}{\partial\mathbf{X}} = \mathbf{a}\mathbf{b}^T = \mathbf{a}\otimes\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

$$\frac{\partial(\mathbf{a}^T\mathbf{X}^T\mathbf{b})}{\partial\mathbf{X}} = \mathbf{b}\mathbf{a}^T = \mathbf{b}\otimes\mathbf{a} \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

$$\frac{\partial(\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x})}{\partial\mathbf{x}} = (\mathbf{A}+\mathbf{A}^T)\mathbf{x}$$

$$\frac{\partial[(\mathbf{X}\mathbf{b}+\mathbf{c})^T\mathbf{A}(\mathbf{X}\mathbf{b}+\mathbf{c})]}{\partial\mathbf{X}} = (\mathbf{A}+\mathbf{A}^T)(\mathbf{X}\mathbf{b}+\mathbf{c})\mathbf{b}^T$$

$$\frac{\partial(\mathbf{a}^T\mathbf{X}^T\mathbf{X}\mathbf{b})}{\partial\mathbf{X}} = \mathbf{X}(\mathbf{a}\otimes\mathbf{b}+\mathbf{b}\otimes\mathbf{a})$$

注： $\otimes$：克罗内克积

3 二阶条件

□ 例 4（续）：

□ **Log-sum-exp**: $f(x) = \log \sum_{k=1}^{n} \exp(x_k)$是凸函数

$$\nabla^2 f(x) = \frac{1}{\mathbf{1}^T z}\mathbf{diag}(z) - \frac{1}{(\mathbf{1}^T z)^2} z z^T, (z_k = \exp(x_k))$$

要证明 $\nabla^2 f(x) \succeq 0$, 我们必须验证对于所有的 v, $v^T \nabla^2 f(x) v \geq 0$:

$$v^T \nabla^2 f(x) v = \frac{\left(\sum_k z_k v_k^2\right)\left(\sum_k z_k\right) - \left(\sum_k z_k v_k\right)^2}{\left(\sum_k z_k\right)^2} \geq 0$$

因为$\left(\sum_k z_k v_k^2\right)\left(\sum_k z_k\right) \geq \left(\sum_k z_k v_k\right)^2$（由柯西不等式得），$a_k = \sqrt{z_k} v_k$，$b_k = \sqrt{z_k}$

□ **几何平均数函数**: $f(x) = \left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{1/n}$在$\mathbb{R}_{++}^{n}$上是凹函数（证明过程与Log-sum-exp类似，参考Boyd教材）

注：$\mathbf{diag}(z)$：以z中元素为主对角线元素的对角阵

3 二阶条件

□ 例 4（**续，二元函数**）**：**

验证以下函数是否为凸函数(给出分析过程)

(1) $f(x,y) = x^2y^2 + \frac{x}{y}, x > 0, y > 0$

(2) $f(x,y) = \log(e^x + e^y) - \log x, x > 0$

(3) $f(x,y) = \exp\{x^2 + e^{-y}\}, x > 0, y > 0$

(4) $f(x,y) = xy\log xy, x > 0, y > 0$

(5) $f(x,y) = -\log(cx + dy), c, d \in \mathbb{R}$

3 二阶条件

■ **例 4 的证明：**

(1)$f(x,y)=x^2y^2+\frac{x}{y}$,$x>0,y>0$

计算Hessian 矩阵:

$$H=\begin{bmatrix} 2y^2 & 4xy-1/y^2 \\ 4xy-1/y^2 & 2x^2+2x/y^3 \end{bmatrix}$$

取点 (1,1), Hessian 行列式为 $\det(H)=(2)(4)-(4-1)^2=8-9=-1<0$,故矩阵不定

所以函数非凸

注： $\det(H)$：矩阵H的行列式

注：对于二次型$q(x)=x^T Hx$, 其系数矩阵H称为二次型或Hermite矩阵

注：对于Hermite（二次型）矩阵H， 下述提法等价：

（1）H正定 （2）H特征值全为正实数 （3） H的顺序主子式全大于0

3 二阶条件

- **例 4的证明：**

(2)$f(x,y)=\log(e^x+e^y)-\log x\,,x>0$

计算Hessian 矩阵:

$$H=\begin{bmatrix} e^xe^y/(e^x+e^y)^2+1/x^2 & -e^xe^y/(e^x+e^y)^2 \\ -e^xe^y/(e^x+e^y)^2 & e^xe^y/(e^x+e^y)^2 \end{bmatrix}$$

对任意向量 $v=(v_1,v_2)$, $v^THv=\frac{1}{x^2}v_1^2+\frac{e^xe^y}{(e^x+e^y)^2}(v_1-v_2)^2\geq 0$

所以函数是凸函数

3 二阶条件

■ **例 4的证明：**

(3)$f(x,y)=\exp\{x^2+e^{-y}\},x>0,y>0$

令 $g(x,y)=x^2+e^{-y}$,则 $f=e^g$.计算Hessian 矩阵:

$$H=e^g\begin{bmatrix}4x^2+2 & -2xe^y \\ -2xe^y & e^{-2y}+e^{-y}\end{bmatrix}$$

主对角线元素 $4x^2+2,e^{-2y}+e^{-y}>0$, 且$\det(H)>0$,故矩阵正定

所以函数是凸函数

3 二阶条件

■ **例 4的证明：**

$(4) f(x, y) = xy \log xy, x > 0, y > 0$

计算Hessian 矩阵:

$$H = \begin{bmatrix} y/x & \log(xy) + 2 \\ \log(xy) + 2 & x/y \end{bmatrix}$$

Hessian 行列式为 $\det(H) = 1 - (\log(xy) + 2)^2$

当 $xy = e^{-1}$ 时, $\det(H) = 1 - (1)^2 = 0$

当 $xy = e^1$ 时, $\det(H) = 1 - (1 + 2)^2 = -8$

所以函数非凸

3 二阶条件

■ **例 4的证明：**

(5)$f(x,y) = -\log(cx+dy), c, d \in \mathbb{R}$

函数 $\log(cx+dy)$ 在定义域 $cx+dy>0$ 上为凹函数(Hessian矩阵为半负定)

$$H = \begin{bmatrix} -\dfrac{c^2}{(cx+dy)^2} & -\dfrac{cd}{(cx+dy)^2} \\ -\dfrac{cd}{(cx+dy)^2} & -\dfrac{d^2}{(cx+dy)^2} \end{bmatrix}$$

其负数 $-\log(cx+dy)$ 为凸函数

大 纲

1. 凸函数的定义

2. 一阶条件

3. 二阶条件

4. 单变量条件

4 单变量条件

■ 凸性的单变量条件（将函数限制在一条直线上）

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 是凸函数当且仅当对于 $\mathbf{dom}\, f$ 中的任意 x 和 $\mathbb{R}^n$ 中的任意 v, 函数 $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$g(t) = f(x + tv), \mathbf{dom}\; g = \{t : x + tv \in \mathbf{dom} f\}$$

(关于 t) 是凸函数.

可以通过检查单变量函数的凸性来验证 f 的凸性.

■ **证明：**

$\Rightarrow$ ：取任意两点 x_1 和 x_2 , 它们必须位于一条直线上, 该直线的形式为 $x + tv$, $\cdots$

$\Leftarrow$ ：$x + tv$ 与 $\mathbf{dom}\, f$ 相交, 形成一个新的凸集。很明显, 新凸集中的点满足凸性条件

4 单变量条件

■ 证明:

$\Rightarrow$: 取任意两点 x_1 和 x_2，它们必须位于一条直线上，该直线的形式为 $x+tv$，将其表示为凸组合的形式（$v=x_2-x_1$），即$tx_2+(1-t)x_1$．对于x_1 和 x_2之间的任意一点有$z=tx_2+(1-t)x_1, 0\le t\le 1$．显然有$g(0)=f(x_1)$，$g(1)=f(x_2)$，$g(t)=f(z)$，显然有

$$f(z)\le(1-t)f(x_1)+tf(x_2)$$

$\Leftarrow$: 同理，任意取一条直线$x+tv$构造$g(t)$，其与$\mathbf{dom}\,f$ 相交的集合的任意两点可以表示为$x_1=x+t_1v$和 $x_2=x+t_2v$，以及任意x_1 和 x_2之间直线上的一点表示为$z=x+(\theta t_1+(1-\theta)t_2)v$，有 $f(z)\le\theta f(x_1)+(1-\theta)f(x_2)$，即 $\mathrm{g}(\theta t_1+(1-\theta)t_2)\le\theta g(t_1)+(1-\theta)g(t_2)$

4 单变量条件

□ **例** 5： $f: S^n \to \mathbb{R}$，其中 $f(X) = \log\det X$， $\mathbf{dom}\, f = S^n_{++}$

$$g(t) = \log\det(X + tV) = \log\det\left(X^{\frac{1}{2}}\left(I + t(X^{-\frac{1}{2}})^T V X^{-\frac{1}{2}}\right) X^{\frac{1}{2}}\right)$$

$$= \log\det X + \log\det(I + tX^{-\frac{1}{2}} V X^{-\frac{1}{2}})$$

$$= \log\det X + \textstyle\sum_{i=1}^n \log(1 + t\lambda_i)$$

其中 λ_i 是 $(X^{-\frac{1}{2}})^T V X^{-\frac{1}{2}}$ 的特征值. 因此, 下式成立

$$g'(t) = \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{1 + t\lambda_i}, g''(t) = -\sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i^2}{(1 + t\lambda_i)^2}$$

g 在 t 上是凹函数 (对于任意选择的 $X \succ 0$ 和 V) ; 因此 f 是凹函数.

谢 谢 ！