最优化方法导论第四次小测

1. 定义函数 $f: \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}$:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} (|\mathrm{Re} x_i| + |\mathrm{Im} x_i|),$$

问：f 是范数吗？试证明。

证：对任意 $x \in \mathbb{C}^n$，下证 f 为范数：

- **非负性：**

  $$f(x) = \sum_{i=1}^{n} (|\mathrm{Re} x_i| + |\mathrm{Im} x_i|) \geq 0.$$

  且 $f(x) = 0$ 当且仅当所有 $x_i = 0$，即 $x = 0$。

- **齐次性：**
  对任意 $t \in \mathbb{R}$:

  $$f(tx) = \sum_{i=1}^{n} (|\mathrm{Re}(tx_i)| + |\mathrm{Im}(tx_i)|) = |t| \sum_{i=1}^{n} (|\mathrm{Re} x_i| + |\mathrm{Im} x_i|) = |t| f(x).$$

- **三角不等式：**

  $$\begin{aligned} f(x+y) &= \sum_{i=1}^{n} (|\mathrm{Re}(x_i + y_i)| + |\mathrm{Im}(x_i + y_i)|) \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} (|\mathrm{Re} x_i| + |\mathrm{Im} x_i| + |\mathrm{Re} y_i| + |\mathrm{Im} y_i|) = f(x) + f(y). \end{aligned}$$

综上，f 满足非负性、齐次性、三角不等式，因此 f 是一个范数。

判断下列函数的凸凹性。

2. 判断函数

$$f(x, y) = \sqrt{e^x + e^{-y}}$$

是否为凸函数，并说明理由。

解： 函数

$$f(x,y)=\sqrt{e^x+e^{-y}}$$

其 Hessian 矩阵为

$$\frac{1}{2}(e^x+e^{-y})^{-\frac{3}{2}}\begin{pmatrix} e^x\left(\frac{e^x}{2}+e^{-y}\right) & \frac{1}{2}e^{x-y} \\ \frac{1}{2}e^{x-y} & e^{-y}\left(e^x+\frac{e^{-y}}{2}\right)\end{pmatrix}$$

其中

$$e^x\left(\frac{e^x}{2}+e^{-y}\right)>0$$

计算其行列式:

$$e^{x-y}\left(\frac{e^x}{2}+e^{-y}\right)\left(e^x+\frac{e^{-y}}{2}\right)-\frac{1}{4}e^{2x-2y}=\frac{1}{4}e^{2x-2y}(2e^{x+y}+5+2e^{-x-y})>0.$$

故 Hessian 的主元大于 0、行列式大于 0，因此 Hessian 为正定矩阵。
因此 $f(x,y)$ 为凸函数。

3. 证明集合 S 的凸包是所有包含 S 的凸集的交。

证： 集合 S 的凸包定义为所有由 S 中点的凸组合构成的点的集合:

$$\text{conv}(S)=\{\textstyle\sum_{i=1}^{n}\lambda_i s_i \mid s_i\in S,\ \lambda_i\geq 0,\ \sum_{i=1}^{n}\lambda_i=1\}.$$

（1）证明 $\text{conv}(S)\subseteq\bigcap_{C\in\mathcal{C}}C$

设 C 为任意包含 S 的凸集，即

$$S\subseteq C,\quad C\text{ 是凸的}.$$

由于 C 是凸的，因此对于任意

$$s_1,\dots,s_n\in S\subseteq C,$$

以及满足 $\lambda_i\geq 0,\sum\lambda_i=1$ 的系数，有:

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i s_i\in C.$$

因此

$$\text{conv}(S)\subseteq C.$$

又因为此结论对任意 $C\in\mathcal{C}$ 成立，则有

$$\mathrm{conv}(S) \subseteq \bigcap_{C \in \mathcal{C}} C.$$

（2）证明 $\bigcap_{C \in \mathcal{C}} C \subseteq \mathrm{conv}(S)$

注意到 $\mathrm{conv}(S)$ 本身也是一个包含 S 的凸集，即

$$S \subseteq \mathrm{conv}(S), \quad \mathrm{conv}(S) \text{ 是凸的}.$$

因此 $\mathrm{conv}(S) \in \mathcal{C}$，从而

$$\bigcap_{C \in \mathcal{C}} C \subseteq \mathrm{conv}(S).$$

由上两步分别得到

$$\mathrm{conv}(S) \subseteq \bigcap_{C \in \mathcal{C}} C,$$

以及

$$\bigcap_{C \in \mathcal{C}} C \subseteq \mathrm{conv}(S),$$

故

$$\mathrm{conv}(S) = \bigcap_{C \in \mathcal{C}} C.$$

4. 验证点 $(2,4)$ 在如下优化问题中是否满足最优性条件：

$$\begin{array}{ll} \min & (x_1-4)^2 + (x_2-6)^2 \\ \text{s.t.} & x_1^2 \le x_2, \\ & x_2 \le 4. \end{array}$$

解： 可行性验证：

$$2^2 = 4 \le 4, \quad 4 \le 4$$

拉格朗日函数：

$$L = (x_1-4)^2 + (x_2-6)^2 + \lambda_1(x_1^2 - x_2) + \lambda_2(x_2 - 4)$$

梯度条件（KKT Stationarity）：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = 2(x_1-4) + 2\lambda_1 x_1 = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2} = 2(x_2-6) - \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \end{cases}$$

代入 $(x_1, x_2) = (2,4)$：

$$\begin{cases} -4 + 4\lambda_1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1 \\ -4 - 1 + \lambda_2 = 0 \Rightarrow \lambda_2 = 5 \end{cases}$$

非负性条件：

$$\lambda_1 = 1 \geq 0, \quad \lambda_2 = 5 \geq 0$$

互补松弛：

$$\lambda_1(x_1^2 - x_2) = 1(4-4) = 0, \quad \lambda_2(x_2 - 4) = 5(4-4) = 0$$

以上条件全部满足 KKT 条件，因此：

(2,4) 满足最优性条件

5. 令 C 为一个在 $\mathbb{R}^n$ 上的非空闭合凸锥，令 $x \in \mathbb{R}^n$。试证明当且仅当

$$\hat{x} \in C, \quad (\hat{x} - x)^\top \hat{x} = 0, \quad x - \hat{x} \in C^*$$

时，$\hat{x}$ 是 x 在 C 上的最近点投影。

证：令 $\hat{x}$ 是 x 在 C 上的投影（由于 C 是凸的且闭合的，所以必然且唯一存在 $\hat{x}$ 满足条件）。

通过投影定理可得

$$(x - \hat{x})^\top (y - \hat{x}) \leq 0, \qquad \forall y \in C.$$

由于 C 是一个锥体，可以推断出 $1/2\,\hat{x} \in C$ 和 $2\hat{x} \in C$，并且通过取

$$y = 1/2\,\hat{x} \quad 和 \quad y = 2\hat{x},$$

可以推断出

$$(x - \hat{x})^\top \hat{x} = 0.$$

通过结合上述两式可得

$$(x - \hat{x})^\top y \leq 0, \qquad \forall y \in C,$$

这说明

$$x - \hat{x} \in C^*.$$

相反的，若 $\hat{x} \in C$，$(x - \hat{x})^\top \hat{x} = 0$，且 $x - \hat{x} \in C^*$，则可以推断出

$$(x - \hat{x})^\top (y - \hat{x}) \leq 0, \qquad \forall y \in C,$$

并且根据投影定理可得，$\hat{x}$ 是 x 在 C 上的投影。