# 第十讲：优化问题

## 凸优化问题及其性质

杨 林

# 大 纲

1. 优化问题及标准形式

2. 最优性条件

3. 优化问题的等价性

4. 拟凸优化

# 大 纲

1. 优化问题及标准形式

2. 最优性条件

3. 优化问题的等价性

4. 拟凸优化

# 1 优化问题及标准形式

- **定义优化问题**

| | |
|---|---|
| 最小化 | $f_0(x)$ |
| 约束条件 | $f_i(x) \leq 0,\ i = 1, 2, \dots, m$ |
| | $h_i(x) = 0,\ \ i = 1, 2, \dots, p$ |

- $x \in \mathbb{R}^n$ 是优化变量
- $f_0: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 是目标函数或代价函数
- $f_i: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ \ i = 1, 2, \dots, m$ 是不等式约束函数
- $h_i: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ \ i = 1, 2, \dots, p$ 是等式约束函数

# 1 优化问题及标准形式

- **定义1(隐式约束、显示约束)**:标准形式优化问题有一个隐式约束

$$x \in \mathcal{D} = \bigcap_{i=0}^{m} \mathbf{dom}\, f_0 \cup \bigcap_{i=0}^{p} \mathbf{dom}\, h_0$$

我们将 $\mathcal{D}$ 称为问题的域

约束条件 $f_i(x) \leq 0, h_i(x) = 0$ 是显式约束

如果问题没有显式约束 $(m = p = 0)$ 则称其为无约束问题

- **例** 1:

$$\text{最小化}\ \ f_0(x) = -\sum_{i=1}^{k} \log(b_i - a_i^T x)$$

上述问题是一个具有隐式约束条件 $a_i^T x \leq b_i$ 的无约束问题

# 1 优化问题及标准形式

- **定义2(可行解、最优点和局部最优点):** $x$ 是可行的(feasible), 如果 $x \in (\bigcap \mathbf{dom}\, f_i) \bigcap (\bigcap \mathbf{dom}\, h_i)$且它满足所有约束条件, 所有可行的$x$构成的集合称为可行集或约束集; 可行的 $x$ 是最优的(最优点、最优解), 如果 $f_0(x) = p^*$; 最优点可以不唯一，最优点集合定义为 $X_{\text{opt}}$； $x$是局部最优的, 如果存在 $R > 0$ 使得 $x$ 对于如下问题是最优的

| | |
|---|---|
| 最小化 | $f_0(x)$ |
| 约束条件 | $f_i(x) \le 0,\ i = 1, 2, \dots, m$ |
| | $h_i(x) = 0, i = 1, 2, \dots, p$ |
| | $\lVert z - x \rVert_2 \le R$ |

# 1 优化问题及标准形式

## ■ 最优值和最优解

$$p^* = \inf\{f_0(x) | f_i(x) \le 0, i = 1, \cdots, m, h_i(x) = 0, i = 1, \cdots, p\}$$

$p^* = \infty$ 如果问题不可行(没有 $x$ 满足约束条件)

$p^* = -\infty$ 如果问题无下界

□ **例** 2: (其中$n = 1, m = p = 0$)

1. $f_0(x) = 1/x$, $\mathbf{dom}\, f_0 = \mathbb{R}_{++}$: $p^* = 0$, 无最优点
2. $f_0(x) = -\log x$, $\mathbf{dom}\, f_0 = \mathbb{R}_{++}$: $p^* = -\infty$, 无下界
3. $f_0(x) = x \log x$, $\mathbf{dom}\, f_0 = \mathbb{R}_{++}$: $x = 1/e$ 是最优点, $p^* = -1/e$
4. $f_0(x) = x^3 - 3x$: 在 $x = 1$ 处局部最优, $p^* = -\infty$, 无下界

# 1 优化问题及标准形式

■ **定义3(凸优化问题的标准形式):**

$$
\begin{array}{ll}
\text{最小化} & f_0(x) \\
\text{约束条件} & f_i(x) \le 0,\ \ i = 1,2,\dots,m \\
 & a_i^T x = b_i, i = 1,2,\dots,p
\end{array}
$$

$f_0, f_1, \cdots, f_m$ 是凸函数;等式约束是仿射的

如果$f_0$ 是拟凸函数(并且 $f_1, \cdots, f_m$ 是凸函数),则问题是拟凸的,通常写作

$$
\begin{array}{ll}
\text{最小化} & f_0(x) \\
\text{约束条件} & f_i(x) \le 0,\ \ i = 1,2,\dots,m \\
 & Ax = b, i = 1,2,\dots,p
\end{array}
$$

■ 凸优化问题的可行集是凸集

# 1 优化问题及标准形式

■ 定义4（凹最大化问题）：

$$
\begin{array}{ll}
\text{最大化} & f_0(x) \\
\text{约束条件} & f_i(x) \leq 0,\ \ i = 1, 2, \ldots, m \\
 & a_i^T x = b_i, i = 1, 2, \ldots, p
\end{array}
$$

$f_0$是凹函数, $f_1, \cdots, f_m$ 是凸函数；等式约束是仿射的

■ 上述问题也是凸优化问题

# 1 优化问题及标准形式

■ **定义5(可行性问题):**

| | |
|---|---|
| 找到（Find） | $x$ |
| 约束条件 | $f_i(x) \leq 0,\ i = 1,2,\ldots,m$ |
| | $h_i(x) = 0, i = 1,2,\ldots,p$ |

可以被视为 $f_i(x) = 0$ 的一般问题的一个特例:

| | |
|---|---|
| 最小化 | $0$ |
| 约束条件 | $f_i(x) \leq 0,\ i = 1,2,\ldots,m$ |
| | $h_i(x) = 0, i = 1,2,\ldots,p$ |

$p^* = 0$ 如果可行解存在, 任何可行 $x$ 都是最优的

$p^* = \infty$ 如果可行解不存在

# 大 纲

1.标准形式的优化问题

2. 最优性条件

3. 等价性

4.拟凸优化

# 2 最优性条件

■ **定理1(局部与全局最优):**

一个凸优化问题的局部最优点也是(全局)最优的

■ **证明:**

假设 $x$ 是局部最优的而$y$ 是最优的,则$f_0(y) < f_0(x)$.

$x$ 局部最优意味着存在一个 $R > 0$,使得

$$z \text{ 可行}, \|z-x\|_2 \le R \Longrightarrow f_0(z) \ge f_0(x)$$

考虑 $z = \theta y + (1-\theta)x$ ,其中 $\theta = R/(2\|y-x\|_2)$

因为$\|y-x\|_2 > R$ (否则$f_0(y) \ge f_0(x)$), 所以 $0 < \theta < 1/2$

$z$ 是两个可行点的凸组合,因此也是可行的. 另外, $\|z-x\|_2 = R/2$,且有

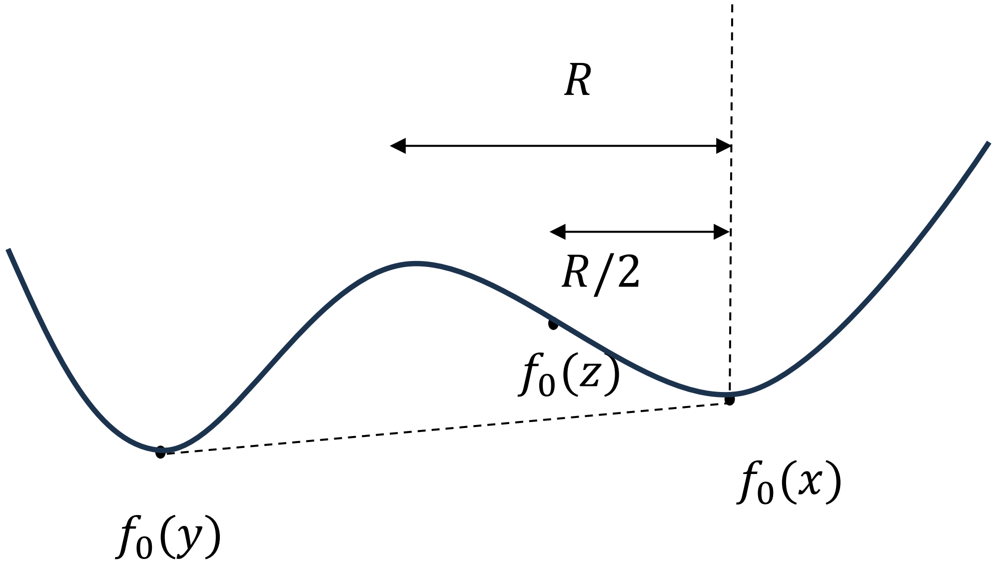
$$f_0(z) \le \theta f_0(x) + (1-\theta) f_0(y) < f_0(x)$$

这与我们假设 $x$ 是局部最优的相矛盾

# 2 最优性条件

■ **定理1(局部与全局最优):**

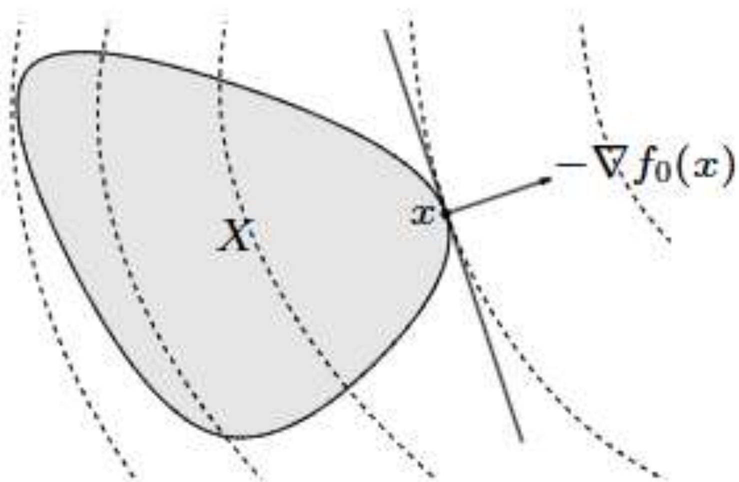
一个凸优化问题的局部最优点也是(全局)最优的



# 2 最优性条件

- **定理2（可微函数 $f$ 的最优准则）**：$x$ 是最优的当且仅当它是可行的并且对所有可行 $y \in X$ 有

$$\nabla f_0(x)^T(y-x) \geq 0$$



# 2 最优性条件

■ **定理2的证明:**

如果非零, $\nabla f_0(x)^T$ 定义了 $X$ 在 $x$ 处的一个支撑超平面

⇒: $f_0(y) \geq f(x) + (\nabla f_0(x))^T(y-x) \geq f(x)$

⇐: 若存在 $y$,使得$(\nabla f_0(x))^T(y-x) < 0$ ,则由 $(\nabla f_0(x))^T$ 和 $x$ 确定的超平面与集合 $X$ 的内部相交(过$x$的等高线也与其内部相交),与$x$是最优点矛盾

# 2 最优性条件

□ **例** 3: 证明 $x^* = (1,1/2,-1)$ 是优化问题

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & (1/2)x^T P x + q^T x + r \\ \text{约束条件} & -1 \le x_i \le 1, i = 1,2,3 \end{array}$$

的最优解, 其中

$$P = \begin{bmatrix} 13 & 12 & -2 \\ 12 & 17 & 6 \\ -2 & 6 & 12 \end{bmatrix}, q = \begin{bmatrix} -22.0 \\ -14.5 \\ 13.0 \end{bmatrix}, r = 1$$

■ **证明:** $\nabla f_0(x^*) = (-1,0,2)$ . 由定理2知:

$$\nabla f_0(x^*)^T(y - x^*) = -(y_1 - 1) + 2(y_3 + 1) \ge 0$$

这对于任意满足 $-1 \le y_i \le 1, i = 1,2,3$ 的 $y$ 都成立

# 2 最优性条件

- **定理3（无约束条件）**：$x$ 是最优解当且仅当

$$x \in \mathbf{dom}\ f_0, \nabla f_0(x) = 0$$

- **定理4（等式约束条件）**：对于具有等式约束条件的优化问题：

最小化 $f_0(x) = 0$　　　　约束条件 $Ax = b$

$x$ 是最优解当且仅当存在一个 $v$ 使得

$$x \in \mathbf{dom}\ f_0, \qquad Ax = b, \qquad \nabla f_0(x) + A^T v = 0$$

其中，$A^T = (\alpha_1, \alpha_2, \dots)$

# 2 最优性条件

■ **定理4的证明:**

$x$ 是最优当且仅当对所有满足 $Ay=b$ 的 $y$,有

$$\nabla f_0(x)^T(y-x)\geq 0$$

注意到 $y=x+v$,其中 $v\in\mathcal{N}(A)$(零空间)

因此,上述条件等价于$\nabla f_0(x)^T v\geq 0, \forall v\in\mathcal{N}(A)$

等价于$\nabla f_0(x)^T v=0, \forall v\in\mathcal{N}(A)$($v$与所有的$A$的行向量垂直)

换句话说,$\nabla f_0(x)^T\in\mathcal{R}(A^T)$, 或 $\exists \nu, \nabla f_0(x)+A^T\nu=0$

## 2 最优性条件

- **定理5(非负正交区域上的最小化)：**

最小化 $f_0(x)$ 约束条件 $x \geq 0$

$x$ 是最优解当且仅当

$$x \in \mathbf{dom} f_0, x \geq 0, \begin{cases} \nabla f_0(x)_i \geq 0, x_i = 0 \\ \nabla f_0(x)_i = 0, x_i > 0 \end{cases}$$

- **证明:（充分性证明略）**

最优性条件:$x \geq 0, \nabla f_0(x)^T(y-x) \geq 0$,对$\forall y \geq 0$成立

可以得出$\nabla f_0(x)^T \geq 0$,因为我们总能找到 $y-x$某一维趋向正无穷，使得$\nabla f_0(x)^T(y-x)$无下界

令 $y = 0$（取下界）,最优性条件转化为 $-\nabla f_0(x)^T x \geq 0$

考虑 $x \geq 0$ 和 $\nabla f_0(x)^T \geq 0$,我们得到 $\nabla f_0(x)^T x = 0$,或 $(\nabla f_0(x))_i x_i = 0$ ,对于 $\forall i$必须成立. 这完成了证明

# 大 纲

1.标准形式的优化问题

2. 最优性条件

3. 等价性

4.拟凸优化

# 3 等价性

## □ 例 4:

$$
\begin{array}{ll}
\text{最小化} & f_0(x) = x_1^2 + x_2^2 \\
\text{约束条件} & f_1(x) = x_1/(1+x_2^2) \le 0 \\
 & h_1(x) = (x_1 + x_2)^2 = 0
\end{array}
$$

$f_0$ 是凸函数;可行集 $\{(x_1, x_2) | x_1 = -x_2, x_1 \le 0\}$ 是凸集

不是凸问题(根据我们的定义):$f_1$不是凸函数, $h_1$不是仿射函数

等价于(但不相同于)凸优化问题:

$$
\begin{array}{ll}
\text{最小化} & x_1^2 + x_2^2 \\
\text{约束条件} & x_1 \le 0 \\
 & x_1 + x_2 = 0
\end{array}
$$

# 3 等价性

- 两个问题(非正式)等价，如果其中一个问题的解可以轻易地从另一个问题的解中得出，反之亦然
- 下面是一些常见的等价变换：

1. **变量变换**
2. **目标函数和约束函数变换**
3. **松弛变量**
4. **消除等式约束**
5. **引入等式约束**
6. **极小化某些变量**

# 3 等价性

**1. 变量变换:**

设 $\phi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 是一一映射,其像包含了问题的定义域 $\mathcal{D}$,即 $\phi(\mathbf{dom}\,\phi) \supseteq \mathcal{D}$.我们定义函数 $\tilde{f}_i$ 和 $\tilde{h}_i$ （令$x = \phi(z)$）为

$$\tilde{f}_i(z) = f_i\big(\phi(z)\big), i = 1, \cdots, m \quad \tilde{h}_i(z) = h_i\big(\phi(z)\big), i = 1, \cdots, p$$

那么标准形式问题等价于

$$\begin{array}{ll} \text{最小化}\,(\text{对}z) & \tilde{f}_0(z) \\ \text{约束条件} & \tilde{f}_i(z) \le 0,\ i = 1,\ \ldots, m \\ & \tilde{h}_i(z) = 0,\ i = 1, \cdots, p \end{array}$$

- 如果$x$解决了标准形式的问题，那么$z = \phi^{-1}(x)$也解决了上述问题；反之，$z$是上述问题的最优解，$x = \phi(z)$也解决了标准形式的问题

# 3 等价性

## 2. 目标函数和约束函数变换:

设 $\psi_0: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 单增; $\psi_1, \cdots, \psi_m: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 满足: 当且仅当 $u \leq 0$ 时 $\psi_i(u) \leq 0$; $\psi_{m+1}, \cdots, \psi_{m+p}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 满足: 当且仅当 $u = 0$ 时 $\psi_i(u) = 0$.我们定义函数 $\tilde{f}_i$ 和 $\tilde{h}_i$ 为复合函数（$\psi$为任意实现函数变换的算子）

$$\tilde{f}_i(z) = \psi_i\big(f_i(x)\big), i = 1, \cdots, m$$

$$\tilde{h}_i(z) = \psi_{m+i}\big(h_i(x)\big), i = 1, \cdots, p$$

那么标准形式问题等价于

| | |
|---|---|
| 最小化 | $\tilde{f}_0(x)$ |
| 约束条件 | $\tilde{f}_i(x) \leq 0, \ i = 1, \ \ldots, m$ |
| | $\tilde{h}_i(x) = 0, \ i = 1, \cdots, p$ |

## 3 等价性

**□ 例 5(最小函数和最小范数平方问题):**

考虑无约束的Euclid范数极小化问题

$$\text{最小化} \quad \|Ax - b\|_2$$

■ 证明：因为范数总是非负的,标准形式问题等价于

$$\text{最小化} \quad \|Ax - b\|_2^2 = (Ax - b)^T (Ax - b)$$

# 3 等价性

**3. 松弛变量:**

通过观察可以得到一个简单的变换,即 $f_i(x) \le 0$ 等价于存在一个 $s_i \ge 0$ 满足 $f_i(x) + s_i = 0$. $s_i$ 称为对应元不等式约束 $f_i(x) \le 0$ 的**松弛变量**

那么标准形式问题等价于

| | |
|---|---|
| 最小化 | $f_0(x)$ |
| 约束条件 | $s_i \ge 0, i = 1, \cdots, m$ |
| | $f_i(x) + s_i = 0,\ \ i = 1,\ \ \ldots, m$ |
| | $h_i(x) = 0,\ \ i = 1, \cdots, p$ |

- 什么时候是保凸变换？（LP）

# 3 等价性

**4. 消除等式约束（保凸变换）：**

如果我们可以用一些参数 $z \in \mathbb{R}^k$ 来显示的参数化等式约束

$$h_i(x) = 0, i = 1, \cdots, p$$

的解,那么我们可以从原问题中消除等式约束.设函数$\phi: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ 是这样的函数,存在一些$z \in \mathbb{R}^k$ 使得 $x = \phi(z)$, 那么标准形式问题等价于

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & \tilde{f}_0(z) = f_0\big(\phi(z)\big) \\ \text{约束条件} & \tilde{f}_i(z) = f_i\big(\phi(z)\big) \le 0,\ i = 1,\ \ldots, m \end{array}$$

如果 $z$ 是新问题的最优解, 那么 $x = \phi(z)$ 是原问题的最优解

- 与变量代换的区别：并未引入真实的变量，通过函数$\phi$的像构建约束

# 3 等价性

■ **消除等式约束的保凸性：**

$$
\begin{array}{ll}
\text{最小化} & f_0(x) \\
\text{约束条件} & f_i(x) \leq 0,\ \ i = 1, 2, \dots, m \\
& Ax = b, i = 1, 2, \dots, p
\end{array}
$$

等价于

$$
\begin{array}{ll}
\text{最小化（在}z\text{上）} & f_0(Fz + x_0) \\
\text{约束条件} & f_i(Fz + x_0) \leq 0,\ \ i = 1, 2, \dots, m
\end{array}
$$

其中 $F \in \mathbb{R}^{n \times k}$ 和 $x_0$ 满足

$$Ax = b \Leftrightarrow x = Fz + x_0 \text{ 对于一些 } z$$

(我们可以选择 $F$ 是满秩矩阵, 如此, 我们有 $k = n - \mathbf{rank}\, A$)

# 3 等价性

**5. 引入等式约束（保凸变换）：**

最小化 $f_0(A_0x+b_0)$

约束条件 $f_i(A_ix+b_i)\leq 0,\ i=1,2,\ldots,m$

$h_i(x)=0, i=1,\cdots,p$

等同于

最小化 $f_0(y_0)$

约束条件 $f_i(y_i)\leq 0,\ i=1,2,\ldots,m$

$y_i=A_ix+b_i, i=1,2,\ldots,m$

$h_i(x)=0, i=1,\cdots,p$

# 3 等价性

**6. 极小化某些变量（保凸变换）：**

$$\begin{array}{ll} \text{最小化(在 } x \text{ 上)} & f_0(x_1, x_2) \\ \text{约束条件} & f_i(x_1) \leq 0,\ i = 1, 2, \ldots, m \end{array}$$

等同于

$$\begin{array}{ll} \text{最小化(在 } x_1 \text{上)} & \tilde{f}_0(x_1) \\ \text{约束条件} & f_i(x_1) \leq 0,\ i = 1, 2, \ldots, m \end{array}$$

其中$\tilde{f}_0(x_1) = \inf_{x_2} f_0(x_1, x_2)$

# 3 等价性

**□ 例 6(在约束下优化二次函数的部分变量):**

考虑具有严格凸的二次目标问题,其中某些变量不受约束

$$
\begin{array}{ll}
\text{最小化} & x_1^T P_{11} x_1 + 2x_1^T P_{12} x_2 + x_2^T P_{22} x_2 \\
\text{约束条件} & f_i(x_1) \le 0, i = 1, \cdots, m
\end{array}
$$

■ 分析:这里我们可以解析地优化 $x_2$:

$$
\inf_{x_2}(x_1^T P_{11} x_1 + 2x_1^T P_{12} x_2 + x_2^T P_{22} x_2) = x_1^T (P_{11} - P_{12} P_{22}^{-1} P_{12}^T) x_1
$$

因此原问题等价于

$$
\begin{array}{ll}
\text{最小化} & x_1^T (P_{11} - P_{12} P_{22}^{-1} P_{12}^T) x_1 \\
\text{约束条件} & f_i(x_1) \le 0, i = 1, \cdots, m
\end{array}
$$

# 3 等价性

**7. 上境图问题形式（保凸变换）：**

标准形式的凸问题等价于

$$
\begin{array}{ll}
\text{最小化(在 } x, t \text{ 上)} & t \\
\text{约束条件} & f_0(x) - t \leq 0 \\
 & f_i(x) \leq 0,\ i = 1,\ \ldots, m \\
 & h_i(x) = 0,\ i = 1, \cdots, p
\end{array}
$$

# 大 纲

**1.标准形式的优化问题**

**2. 最优性条件**

**3. 等价性**

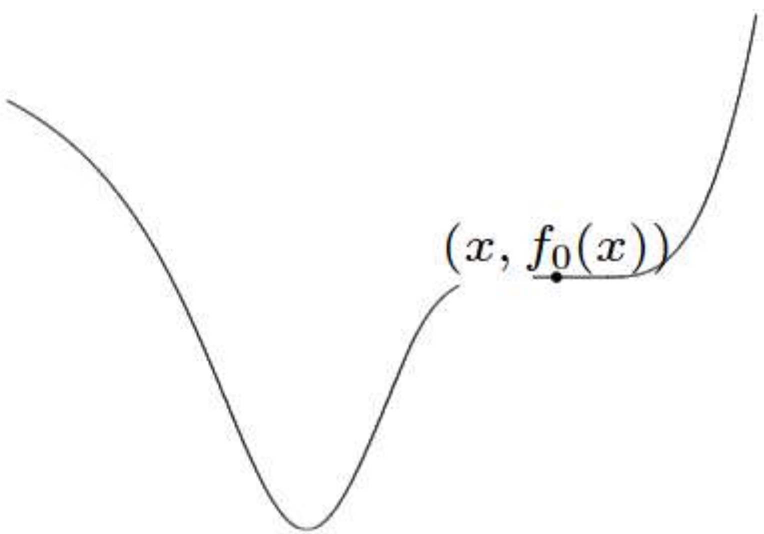
**4.拟凸优化**

# 4 拟凸优化

| | |
|---|---|
| 最小化 | $f_0(x)$ |
| 约束条件 | $f_i(x) \leq 0,\ i = 1, 2, \ldots, m$ |
| | $Ax = b$ |

其中 $f_0: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 是拟凸函数, $f_1, \cdots, f_m$ 是凸函数

可能存在局部最优点, 这些点并非 (全局) 最优



# 4 拟凸优化

■ **函数 $f_0$ 的下水平集的凸表示:**

如果 $f_0$ 是拟凸的,则存在一个函数族 $\phi_t$,使得:

对于固定的 $t$,$\phi(x)$ 在 $x$ 上是凸的

$f_0$ 的 $t$ –下水平集是 $\phi_t$ 的 0 –下水平集集,特别地

$$f_0(x) \le t \Leftrightarrow \phi_t(x) \le 0$$

■ **例** 7:

$$f_0(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

其中 $p$ 是凸函数, $q$ 是凹函数, 且在$\mathbf{dom}\, f$ 上 $p(x) \ge 0$, $q(x) > 0$ , $f$ 可以取$\phi(x) = p(x) - tq(x)$:

1. 当 $t \ge 0$ 时, $\phi_t$ 关于 $x$ 是凸的
2. $p(x)/q(x) \le t$ 当且仅当 $\phi_t \le 0$

# 4 拟凸优化

## ■ 通过凸可行性问题进行凸次优化:

$$\phi_t(x) \le 0, \qquad f_i(x) \le 0, i = 1, \cdots, m, \qquad Ax = b$$

1. 对于固定的 $t, x$ 中的凸可行性问题
2. 如果可行,我们可以得出 $t \ge p^*$;如果不可行,$t \le p^*$

---

*Bisection method for quasiconvex optimization*

**given** $l \le p^\star$, $u \ge p^\star$, tolerance $\epsilon > 0$.
**repeat**
  1. $t := (l + u)/2$.
  2. Solve the convex feasibility problem (1).
  3. **if** (1) is feasible, $u := t$;  **else** $l := t$.
**until** $u - l \le \epsilon$.

---

需要恰好 $\left[\log 2\left(\frac{u-l}{\epsilon}\right)\right]$ 次迭代(其中 $u, l$ 是初始值)

谢 谢 ！