第三讲：线性空间与集合导论

一种定义集合的新方法

杨 林

大 纲

1. 线性空间

2. 开集与闭集

大 纲

1. 线性空间

2. 开集与闭集

1 线性空间

定义具有闭合运算的集合...

- **定义1 (线性空间)**: 对于集合 V (例如$\mathbb{R}^n$) 以及域 F (例如$\mathbb{R}$),
  定义V 上的加法

$$\forall x, y \in V \Rightarrow x + y \in V,$$

以及标量乘法（数乘）

$$\forall x \in V, \forall \alpha \in F \Rightarrow \alpha x \in V,$$

此外, 满足 (在实数上可以忽略):

- $x + y = y + x$
- $1x = x$
- $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$
- $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$
- $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$

1 线性空间

□ 例 1:

1. 自然数集合
2. 实的 n 重有序数组集合是实数域上的线性空间
3. 全体 $m \times n$ 阶实矩阵左乘的集合$\mathbb{R}^{m\times n}$按通常的矩阵加法以及实数与矩阵的乘法构成实数域上的线性空间(复矩阵类似)
4. 区间 $[a,b]$ 上的连续实函数集合 $C[a,b]$, 按函数普通加法与数乘构成实数域上的线性空间

1 线性空间

- **定义2(线性子空间)**: 如果线性空间 $V(F)$的一个子集是线性空间, 那么它是 $V(F)$的线性子空间.

- **定理1**: $W \neq \emptyset$ 且 $W \subset V$. W 是 $V(F)$的子空间当且仅当

$$\forall x, y \in W \Rightarrow x + y \in W,$$

$$\forall x \in W, \forall \alpha \in F \Rightarrow \alpha x \in W.$$

或者等价地

$$\forall x, y \in W, \forall \alpha, \beta \in F \Rightarrow \alpha x + \beta y \in W$$

(仅证明它在加法和数乘下封闭)

- **定理2**: $S, T \subset V(F)$ 是子空间, 则 $S \cap T$ 是子空间, $S \cup T$ 通常不是子空间, $S + T$ 是子空间

$$S + T := \{z | z = x + y, x \in S, y \in T\}$$

(仅证明它在加法和数乘下封闭)

1 线性空间

- **定理3**: 由向量集$x_1, x_2, \dots, x_m$张成的子空间

$$\mathrm{Span}\{x_1, x_2, \dots, x_m\} = \left\{x \mid x = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i,\ \alpha_i \in F, i = 1, \dots, m\right\}$$

是包含 $x_1, x_2, \dots, x_m$ 的最小子空间.

- 线性空间中的元素形如:

$$x = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i\,, \alpha_i \in F, i = 1, \dots, m$$

- 线性空间在**线性组合**下是封闭的

- **定义3 (线性相关)**: 总是存在一组不全为 0 的元素 α_i 使得 $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i = 0$
- **定义4 (线性无关)**: $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i = 0$ 当且仅当 $\alpha_i = 0, \forall i$

1 线性空间

- **定义5(线性空间的维度)**: 在空间 V 中,存在线性无关的 $\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$, 且对于任何x_{m+1}, $\{x_1, x_2, \dots, x_{m+1}\}$ 是线性相关的, 我们称$\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$为一个极大线性无关组.
- 线性空间 V 的**维度** $\dim V = m$.
- 对于线性空间 V, 也称$\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$为 V 的一个**基**.
- **关于线性相关性和无关性的重要事实**: 向量 $y \in \mathrm{Span}\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ 在 $y = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i$ 的情况下具有唯一的系数, 当且仅当$x_1, x_2, \dots, x_m$是线性无关的.
- **定理4**: 对于线性空间W_1和W_2, 有

$$\dim(W_1 \cap W_2) \le min\{dim(W_1), dim(W_2)\}$$

$$\dim(W_1 + W_2) = dim(W_1) + dim(W_2) - \dim(W_1 \cap W_2)$$

1 线性空间

- **定义6（线性映射）**：如果 V 和 V'是定义在相同域 F 上的线性空间，如果$\sigma\colon V \to V'$满足.

$$\sigma(x+y)=\sigma(x)+\sigma(y), \forall x,y \in V$$

$$\sigma(\alpha x)=\alpha\sigma(x), \forall x \in V, \forall \alpha \in F$$

则称σ是从 V 到 V'的线性映射.

线性映射在$\sigma: V \to V$ 的情况下被称为线性变换

- **定理5**：假设 V 和 V'是线性空间，记所有从 V 到 V'的线性映射组成集合为 $\mathcal{L}(V,V')$. 则 $\mathcal{L}(V,V')$也是一个线性空间，对于 $\forall \sigma,\tau \in \mathcal{L}(V,V')$ 满足以下等式：

$$(\sigma+\tau)(x)=\sigma(x)+\tau(x), \quad \forall x \in V$$

$$(\alpha\sigma)(x)=\alpha\sigma(x), \quad \forall x \in V, \forall \alpha \in F$$

1 线性空间

■ **定义7**:线性映射$\sigma: V \to V'$的**核**与**像**分别是:

$$\operatorname{Ker}\sigma = \{x \in V : \sigma(x) = 0\}$$

$$\operatorname{Im}\sigma = \{y \in V' : y = \sigma(x), x \in V\}.$$

一个矩阵 $A \in F^{m\times n}$, 按矩阵与向量的乘法可以作为一个线性映射 $A: F^n \to F^m$. 其核空间常称为零空间 $\mathcal{N}(A)$; 其像空间常称为列空间 $\mathcal{R}(A)$, 它可以由矩阵 A 的全部列向量张成

■ **矩阵是不是线性空间?(通过线性空间理解矩阵)**

(1) 按一定顺序排列的一组数(如向量, 当然是一个线性空间)

(2) 一组(行/列)向量/一阶方程(秩)

矩阵的秩决定了这些向量可以张成的线性空间的维数, 解向量张成其余部分(垂直于行向量)

(3) 线性算子/映射(线性空间)

大 纲

1. 线性空间

2. 开集与闭集

2 开集与闭集

- **定义8**: 集合 $B(x,r) := \{y \in \mathbb{R}^n \colon \| y - x \| < r\}$ 被称为以 x 为中心、半径 $r > 0$ 的**开球**

- **定义9**: $S \subset R$ 被称为**开集**, 则要么 $S = \emptyset$, 要么对于任意 $x \in S$, 存在 $r > 0$ 使得 $B(x,r) \subset S$; $U \subset R$ 被称为**闭集**, 如果其补集 $U^C = \{x \in \mathbb{R}^n \colon x \notin U\}$是开集

- **定理6**: 一个非空集合是闭集当且仅当它包含所有极限点(对于极限运算封闭)

（注意只是针对收敛序列）

2 开集与闭集

■ **定理6的证明:**

“$\Leftarrow$” 设 U 是一个闭集. 假设存在一个点列 $\{x_1, x_2, \dots, x_i, \dots\} \subset U$收敛于极限点 x, 且 $x \notin U$. 也就是说, $x \in U^C$, 并且存在某个 $r > 0$ 使得开球 $B(x, r) \subset U^C$. 显然, $x_i \notin B(x, r)$, 这与点列$\{x_1, x_2, \dots, x_i, \dots\} \subset U$ 收敛于 x 的假设矛盾. 因此, 若 U 是闭集, 则 U 包含所有收敛序列的极限点.

“$\Rightarrow$” 设 U 是一个包含所有极限点的集合, 现在我们证明 U 是开集. 对于某个 $x \in U^C$ 我们假设不存在任何 $r > 0$ 使得开球 $B(x, r) \subset U^C$那么, 对于某个$r_1 > 0$, 我们可以找到一个点 $x_1 \in B(x, r_1) \cap U$. 对于$r_2 = r_1/2$, 我们可以找到某个$x_2 \in B(x, r_2) \cap U$. 这样, 我们构造了一个点序列 $\{x_1, x_2, \dots, x_i, \dots\} \subset U$, 而其极限 $x \in U^C$, 与我们的假设矛盾. 因此, U^C是开集, U是闭集.

2 开集与闭集

- **例** 2:

1. 整个数集是闭集
2. 设A和B是两个闭集. $S = A \cap B$ 且 $S \neq \emptyset$. S是闭集吗？为什么？任意多个闭集的交集呢？
3. 任意多个闭集的并集是闭集吗？为什么？
4. 任意多个开集的并集是开集吗？为什么？
5. 任意多个开集的交集是开集吗？为什么？

谢 谢 ！