第二讲：范数

杨 林

大 纲

1.范数

2.例题

大 纲

1.范数

2.例题

1 数学优化的要素

- **定义1（范数）**：一个满足以下条件的函数 $\|\cdot\|$：

  1. $\|x\| \geq 0, \|x\| = 0$当且仅当$x = 0$
  2. $\| tx \| = |t| \| x \|$， $t \in R$, 齐次性
  3. $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$（三角不等式）

- **符号**：$\|\cdot\|$表示一般（未指定）的范数；$\|\cdot\|_{\text{symb}}$表示特定的范数

- **定义2（距离）**：向量 x 和 y 之间的距离定义为它们差的二阶范数，即：

$$\text{dist}(x, y) = \|x - y\|$$

1 数学优化的要素

■ $\mathbb{R}^n$上的一些常见范数：

1. 绝对值和范数，即l_1-范数：

$$\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|, x \in \mathbb{R}^n$$

2. l_2-范数：

$$\|x\|_2 = (|x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots + |x_n|^2)^{\frac{1}{2}}, x \in \mathbb{R}^n$$

3. l_p-范数$(p \geq 1)$：

$$\|x\|_p = (|x_1|^p + |x_2|^p + \cdots + |x_n|^p)^{\frac{1}{p}}, x \in \mathbb{R}^n$$

1 数学优化的要素

■ $\mathbb{R}^n$上的一些常见范数：

4. l_∞-范数：

$$\|x\|_\infty = \lim_{p\to\infty}\|x\|_p = \max\{|x_1|,\ldots,|x_n|\}, x \in \mathbb{R}^n$$

5. 对于 $P \in S_{++}^n$，P-二次范数（P-quadratic norm）是：

$$\|x\|_P = (x^T P x)^{\frac{1}{2}} = \left\|P^{\frac{1}{2}} x\right\|_2, x \in \mathbb{R}^n$$

1 数学优化的要素

- l_∞-范数的证明：

$$\|x\|_p = (|x_1|^p + |x_2|^p + \cdots + |x_n|^p)^{\frac{1}{p}} \geq |x_{\max}|$$

$$\|x\|_p \leq (n \cdot |x_{\max}|^p)^{\frac{1}{p}} = n^{\frac{1}{p}} \cdot |x_{\max}|$$

$$n^{\frac{1}{p}} \cdot |x_{\max}| \to |x_{\max}|, \qquad p \to \infty$$

1 数学优化的要素

■ $\mathbb{R}^n$范数的等价性：

1. 假设 $\|\cdot\|_a$和 $\|\cdot\|_b$是定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的范数，存在正数 α 和 β，对于所有 $x \in \mathbb{R}^n$ ：

$$\alpha\|x\|_a \leq \|x\|_b \leq \beta\|x\|_a$$

2. 如果 $\|\cdot\|$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的任意范数，那么存在一个二次范数 $\|x\|_P$ ，使得$\|x\|$

$$\|x\|_P \leq \|x\| \leq \sqrt{n}\|x\|_P$$

对所有x都成立.

1 数学优化的要素

■ **对等价性1的证明：**

只需证明$\alpha\|x\|_1 \le \|x\|_b \le \ \beta\|x\|_1$或者$\alpha \le \|u\|_b \le \beta$，其中$u = x/\|x\|_1$的范数为$\|u\|_1 = 1$

令:

$$\alpha = \max_{\|u\|_1=1} \|u\|_b$$

$$\beta = \min_{\|u\|_1=1} \|u\|_b$$

对于给定的b，α, β即为所求

大 纲

1.范数

2.例题

2 例题

- **例** 1: 假设 $\|\cdot\|$是一个定义在 $\mathbb{R}^m$ 上的范数，定义 $\| x \|_A = \| Ax \|$， $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. 证明如果 $\operatorname{rank}(A) = n$, 则 $\|\cdot\|_A$也是一个范数.

- **例** 2: 定义函数 $f: \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}, f(x) = \sum_{i=1}^{n}(|\operatorname{Re} x_i| + |\operatorname{Im} x_i|)$， f 是范数吗？试证明。

2 例题

■ **例1的证明：**

（1） $\| x \|_A = \| Ax \| \geqslant 0$（非负性）

（2） 因为 $\mathrm{rank}(A) = n$，所以$\| x \|_A = \| Ax \| = 0$ 当且仅当 $x = 0$

（3） $\| tx \|_A = \| tAx \| = |t| \cdot \| Ax \| = |t| \, \| x \|_A, t \in \mathbb{R}$（齐次性）

（4） $\| x + y \|_A = \| Ax + Ay \| \leq \| Ax \| + \| Ay \| = \| x \|_A + \| y \|_A \ (x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^n)$ 满足三角不等式

综上，$\| \cdot \|_A$ 是一个范数

2 例题

■ **例2的证明：**

（1） $f(x) = \sum_{i=1}^{n}(|\mathrm{Re}\, x_i| + |\mathrm{Im}\, x_i|) \geqslant 0$（非负性，取等条件为“当且仅当$x = 0$”）

（2） 满足齐次性：

$$f(tx) = \sum_{i=1}^{n}(|\mathrm{Re}\, tx_i| + |\mathrm{Im}\, tx_i|)$$

$$f(tx) = |t|\sum_{i=1}^{n}(|\mathrm{Re}\, x_i| + |\mathrm{Im}\, x_i|) = |t|f(x)$$

（3） 满足三角不等式：

$$f(x+y) = \sum_{i=1}^{n}(|\mathrm{Re}\,(x_i+y_i)| + |\mathrm{Im}\,(x_i+y_i)|)$$

2 例题

■ 例2的证明（续）：

$$f(x+y) \leq \sum_{i=1}^{n} (|\mathrm{Re}\, x_i| + |\mathrm{Im}\, x_i| + |\mathrm{Re}\, y_i| + |\mathrm{Im}\, y_i|)$$

$$= f(x) + f(y)$$

综上，f是一个范数.

2 例题

□ **例** 3: 设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的有界闭集，令 $C(\Omega)$ 表示 Ω 上一切复值连续函数的几何。定义

$$(x+y)(t)=x(t)+y(t),(\alpha x)(t)=\alpha x(t)$$

其中 $t\in\Omega$, α 是常数. 对于任意 $x\in C(\Omega)$, 证明

$$\|x\|=\max_{t\in\Omega}|x(t)|$$

是一个范数.

□ **例** 4: 设 $u,v\in V$ 证明 $\langle u,v\rangle=0$ 当且仅当对所有 $a\in F$ 均有 $\| u \| \leq \| u+av \|$.

2 例题

■ **例4的证明：**

首先证明当对所有 $a \in F$ 均有 $\| u \| \leq \| u + av \|$ 时，$\langle u, v\rangle = 0$ 想到对两边平方然后使用内积定义展开：

$$\langle u, u\rangle \leq \langle u + av, u + av\rangle$$

$$\langle u, av\rangle + \langle av, u\rangle + |a|^2\langle v, v\rangle \geq 0$$

由于对所有的 a 成立，所以令：

$$a = -\frac{\langle u, v\rangle}{\|v\|^2}$$

则上述不等式就变成：

$$\frac{|\langle u, v\rangle|^2}{\|v\|^2} \leq 0$$

显然必须有 $\langle u, v\rangle = 0$

另一个方向的证明与上述证明过程相似

2 例题

■ **为什么这么构造 $\boldsymbol{a}$：**

$$\langle u, av\rangle + \langle av, u\rangle + |a|^2\langle v, v\rangle \geq 0$$

我们想消去不等式中的 a 和 $\langle v, v\rangle = \|v\|^2$, 所以令:

$$a = k\langle u, v\rangle$$

则上述不等式就变成:

$$2k|\langle u, v\rangle|^2 + k^2|\langle u, v\rangle|^2\|v\|^2 \geq 0$$

我们想消去不等式中的 k, 所以有

$$2k + k^2\|v\|^2 = 0$$

解得: $k = 0$(舍弃)或者$k = -\frac{\|v\|^2}{2}$

2 例题

□ 例 5：设 $u, v \in \mathbb{R}^n$， 对于 2 −范数 $\|\cdot\|$， 如果

$$\|u+v\| = \|u\| + \|v\|$$

证明对某个实数 λ，$u = 0$ 或 $v = \lambda u$

■ **例5的证明：**

向量的 2 −范数的定义为 $\| x \|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$

设 $u = (u_1, u_2, \cdots, u_n), v = (v_1, v_2, \cdots, v_n)$

对 $\|u+v\| = \|u\| + \|v\|$ 两边平方，可得

$$\|u+v\|^2 = \sum_{i=1}^{n}(u_i + v_i)^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(u_i^2 + v_i^2 + 2u_i v_i\right)$$

2 例题

■ **例5的证明(续)：**

$$= \sum_{i=1}^{n} u_i^2 + \sum_{i=1}^{n} v_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n} u_i v_i$$

$$= \|u\|^2 + 2\|u\|\|v\| + \|v\|^2 \quad (\text{题给条件})$$

$$= \sum_{i=1}^{n} u_i^2 + \sum_{i=1}^{n} v_i^2 + 2\sqrt{\sum_{i=1}^{n} u_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} v_i^2}$$

即：

$$\left(\sum_{i=1}^{n} u_i v_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} u_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} v_i^2$$

2 例题

- **例5的证明（续）：**

由柯西不等式得

$$\left(\sum_{i=1}^{n} u_i v_i\right)^2 \leq \sum_{i=1}^{n} u_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} v_i^2$$

当且仅当 $\frac{v_1}{u_1} = \frac{v_2}{u_2} = \cdots = \frac{v_n}{u_n} = \lambda(\lambda \neq 0)$ 或 u_i, v_i 其中一方全为0时，柯西不等式取等，即对某个实数 λ，$u = 0$ 或 $v = \lambda u$

谢 谢 ！