

第八讲：函数的保凸运算

凸函数的其他判断方法

杨 林

0 保凸运算

■ 确定函数凸性的实用方法：

1. 验证定义(也可以通过限制在一条线上)
2. 对于两次可微函数，证明 $\nabla^2 f(x) \geq 0$
3. 证明 f 是通过保持凸性的运算从简单的凸函数得到的：
 - 非负加权求和
 - 与仿射函数的复合
 - 点态最大值与上确界
 - 复合
 - 最小化
 - 透视

大 纲

1. 非负加权求和
2. 逐点最大值和逐点上确界
3. 最小化
4. 函数的复合
5. 透视函数

大 纲

1. 非负加权求和
2. 逐点最大值和逐点上确界
3. 最小化
4. 函数的复合
5. 透视函数

1 非负加权求和

- **和函数:** $f_1 + f_2$ 是凸函数若 f_1, f_2 是凸函数(可推广到无穷求和以及积分)
- **非负倍数:** αf 是凸函数若 f 是凸函数, $\alpha \geq 0$
- 上镜图解释: $\text{epi } wf = \begin{bmatrix} I & \\ & w \end{bmatrix} \text{epi } f$
- **非负加权求和:** $f = w_1 f_1 + \cdots + w_m f_m$ (连续利用两个保凸运算)
- **可以看出: 所有凸函数的集合是一个凸锥, 因为凸函数的非负加权求和仍然是凸函数**
- 可以推广到无限项求和以及积分的情况: 如果固定任意的 $y \in \mathcal{A}$, 函数 $f(x, y)$ 是关于 x 的凸函数, 如果有 $w(y) \geq 0$ 对于任意的 $y \in \mathcal{A}$ 都成立, 则函数 $g(x) = \int_{\mathcal{A}} w(y) f(x, y) dy$ 是关于 x 的凸函数

大 纲

1. 非负加权求和
2. 逐点最大值和逐点上确界
3. 最小化
4. 函数的复合
5. 透视函数

2 逐点最大值和逐点上确界

■ **逐点最大值:** f_1, \dots, f_m 是凸函数, 那么 $\max\{f_1(x), \dots, f_m(x)\}$ 是凸函数

■ **证明（先考虑两个函数的情况）:**

$$\begin{aligned} & f(\theta x + (1 - \theta)y) \\ &= \max\{f_1(\theta x + (1 - \theta)y), f_2(\theta x + (1 - \theta)y)\} \\ &\leq \max\{\theta f_1(x) + (1 - \theta)f_1(y), \theta f_2(x) + (1 - \theta)f_2(y)\} \\ &\leq \theta \max\{f_1(x), f_2(x)\} + (1 - \theta) \max\{f_1(y), f_2(y)\} \\ &= \theta f(x) + (1 - \theta)f(y) \end{aligned}$$

迭代应用两个函数的保凸性即可完成证明:

$$\max\{f_1(x), \dots, f_m(x)\} = \max\{f_1(x), \max\{f_2(x), \dots, f_m(x)\}\}$$

2 逐点最大值和逐点上确界

□ 例 1:

1. 分段线性函数: $f(x) = \max_{i=1,\dots,m} a_i^T x + b_i$ 是凸函数

2. $x \in \mathbb{R}^n$ 中 r 个最大分量的和:

$$f(x) = x_{[1]} + x_{[2]} + \dots + x_{[r]}$$

是凸函数 ($x_{[i]}$ 是 x 的第 i 个最大分量)

■ 例 1.2 证明:

$$f(x) = \max\{x_{i_1} + x_{i_2} + \dots + x_{i_r} \mid 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq n\}$$

注: max的常用格式: $\max_{i=1,\dots,m}$, $\max\{ \mid \}$ 和 $\max\{\dots\}$, sup类似

2 逐点最大值和逐点上确界

- **逐点上确界**: 对于每个 $y \in \mathcal{A}$, 如果 $f(x, y)$ 在 x 上是凸的, 那么

$$g(x) = \sup_{y \in \mathcal{A}} f(x, y)$$

是凸函数

- 上镜图解释: 一系列函数的逐点上确界对应这些函数上镜图的交集 $\mathbf{epi} g = \bigcap_{y \in \mathcal{A}} \mathbf{epi} f(x, y)$

□ 例 2:

1. 集合 C 的支撑函数: $S_C(x) = \sup_{y \in C} y^T x$ 是凸函数
2. 集合 C 中到最远点的距离: $f(x) = \sup_{y \in C} \|x - y\|$
3. 对称矩阵的最大特征值: 对于 $X \in S^n$

$$\lambda_{\max}(X) = \sup_{\|y\|_2=1} y^T X y$$

大 纲

1. 非负加权求和
2. 逐点最大值和逐点上确界
3. 最小化
4. 函数的复合
5. 透视函数

3 最小化

- **最小化:** 如果 $f(x, y)$ 在 (x, y) 上是凸的, 且 C 是一个凸集, 那么

$$g(x) = \inf_{y \in C} f(x, y)$$

是凸函数

□ 例 3:

1. 到集合的距离: $\mathbf{dist}(x, S) = \inf_{y \in S} \|x - y\|$ 是凸函数若 S 是凸集

3 最小化

■ 证明: 针对 (x, y, t) , 研究其集合条件:

$$(x, t) \in \mathbf{epi} \, g \Leftrightarrow \begin{cases} (1) : t \geq f(x, y) \text{ 或 } (x, y, t) \in \mathbf{epi} \, f \\ (2) : y \in C \text{ 其中 } C \text{ 是凸集} \end{cases}$$

条件 (1) 和 (2) 分别导致两个集合

$$S_1 = \{(x, y, t) | y \in C\}$$

$$S_2 = \{(x, y, t) | (x, y, t) \in \mathbf{epi} \, f\}$$

S_1 和 S_2 都是凸集

通过分析上述条件, $\mathbf{epi} \, g$ 是两个凸集的交集在 (x, t) 平面的投影

因此, $\mathbf{epi} \, g$ 是凸的

大 纲

1. 非负加权求和
2. 逐点最大值和逐点上确界
3. 最小化
4. 函数的复合
5. 透视函数

4 函数的复合

■ 标量函数的复合:

$g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 和 $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 的复合函数:

$$f(x) = h(g(x)) \text{ 或 } h \circ g(x)$$

是凸函数, 若: (1) g 是凸函数, h 是凸函数, h 非递减; (2) g 是凹函数, h 是凸函数, h 非递增. (凸非减, 凹非增)

■ 分析: (对于 $n = 1$, 可微函数 g, h)

$$f''(x) = h''(g(x))g'(x)^2 + h'(g(x))g''(x)$$

□ 例 4:

1. $\exp g(x)$ 是凸函数若 g 是凸函数

■ 证明: $h(x) = \exp(x)$ 是凸函数且非递减

2. $1/g(x)$ 是凸函数若 g 是凹函数且为正

■ 证明: $h(x) = 1/x$ 是凸函数且非递增加

4 函数的复合

■ 向量函数的复合:

$g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ 和 $h: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ 的复合函数:

$$f(x) = h(g(x)) = h(g_1(x), \dots, g_k(x))$$

是凸函数, 若: (1) g_i 是凸函数, h 是凸函数, h 在每一个参数上是非递减的; (2) g_i 是凹函数, h 是凸函数, h 在每一个参数上是非递增的.

■ 分析:(对于 $n = 1$, 可微函数 g, h)

$$f''(x) = g'(x)^T \nabla^2 h(g(x)) g'(x) + \nabla h(g(x))^T g''(x)$$

4 函数的复合

■ **与仿射函数复合:** $f(Ax + b)$ 是凸函数若 f 是凸函数

□ 例 5:

1. 线性不等式的对数障碍函数

$$f(x) = -\sum \log(b_i - a_i^T x), \mathbf{dom} f = \{x | a_i^T x < b_i, i = 1, \dots, m\}$$

■ 证明:因为 $g(x) = -\log x$ 在 \mathbb{R}_{++}^n 上是凸函数,所以它与仿射函数的复合函数也是凸函数

2. 仿射函数的任意范数: $f(x) = \|Ax + b\|$

■ 证明:因为 \mathbb{R}^n 上的范数是凸函数,所以它与仿射函数的复合函数也是凸函数

4 函数的复合

□ 例 6:

1. $\sum_{i=1}^m \log g_i(x)$ 是凹函数若 g_i 是凹函数且为正

■ 证明: g_i 是凹函数且为正, $h(x) = -\log x$ 是凸函数且非递增, 所以 $-\log g_i(x)$ 是凸函数. 又因为凸函数求和保持凸性, 所以 $\sum_{i=1}^m -\log g_i(x)$ 也是凸函数

2. $\log \sum_{i=1}^m \exp g_i(x)$ 是凸函数若 g_i 是凸函数

■ 证明: 若 g_i 是凸函数且 $h(x) = \log \sum_{i=1}^m \exp x_i$ 是凸函数且 h 在每一个参数上是非递减的, 所以 $\log \sum_{i=1}^m \exp g_i(x)$ 是凸函数

大 纲

1. 非负加权求和
2. 逐点最大值和逐点上确界
3. 最小化
4. 函数的复合
5. 透视函数

5 透视函数

■ 函数 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 的透视函数 $g: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

$$g(x, t) = tf\left(\frac{x}{t}\right), \text{dom } g = \left\{(x, t) \mid \frac{x}{t} \in \text{dom } f, t > 0\right\}$$

若 f 是凸函数, 则 g 也是凸函数

■ 证明: 首先进行条件等价性分析

$$(x, t, s) \in \text{epi } g \Leftrightarrow g(x, t) \leq s$$

$$\Leftrightarrow tf\left(\frac{x}{t}\right) \leq s$$

$$\Leftrightarrow f\left(\frac{x}{t}\right) \leq \frac{s}{t}$$

$$\Leftrightarrow (x/t, s/t) \in \text{epi } f$$

这意味着 $\text{epi } f$ 是 $\text{epi } g$ 的透视映射. 因此, $\text{epi } f$ 凸当且仅当 $\text{epi } g$ 凸

5 透视函数

□ 例 7:

1. $f(x) = x^T x$ 是凸函数; 因此, 对于 $t > 0$, $g(x, t) = x^T x/t$ 是凸函数
2. 负对数函数 $f(x) = -\log x$ 是凸函数; 因此相对熵 $g(x, t) = t \log t - t \log x$ 在 \mathbb{R}_{++}^2 上是凸函数
3. 如果 f 是凸函数, 那么

$$g(x) = (c^T x + d)f((Ax + b)/(c^T x + d))$$

在 $\{x | c^T x + d > 0, (Ax + b)/(c^T x + d) \in \mathbf{dom} f\}$ 上是凸函数

■ 例 7.2 证明:

$$g(x, t) = -t \log \frac{x}{t} = tf\left(\frac{x}{t}\right)$$

5 透视函数

■ 例 7.3 证明:

$$\begin{aligned}(x, t) \in \mathbf{epi} \, g &\Leftrightarrow t \geq (c^T x + d) f((Ax + b)/(c^T x + d)) \\&\Leftrightarrow \frac{t}{c^T x + d} \geq f((Ax + b)/(c^T x + d)) \\&\Leftrightarrow \left(\frac{Ax + b}{c^T x + d}, \frac{t}{c^T x + d} \right) \in \mathbf{epi} \, f\end{aligned}$$

$(x, t) \rightarrow (Ax + b, t, c^T x + d) \rightarrow \left(\frac{Ax+b}{c^T x+d}, \frac{t}{c^T x+d} \right)$ 均为保凸映射,
故 $\mathbf{epi} \, g$ 也是凸集

谢谢！