

# 南京大学最优化导论第二次小测

姓名：

学号：

1. 求下列各个锥的对偶锥  $K^*$ 。

(a)  $K = \{0\}$ , 在  $\mathbb{R}^2$  空间

(b)  $K = \mathbb{R}^2$

(c)  $K = \{(x_1, x_2) \mid |x_1| \leq x_2\}$

(d)  $K = \{(x_1, x_2) \mid x_1 + x_2 = 0\}$

2. 设函数  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , 定义其上镜图 (epigraph) 为:

$$\text{epi} f = \{(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x \in \text{dom} f, f(x) \leq t\}.$$

证明: 函数  $f$  为凸函数, 当且仅当其上镜图  $\text{epi} f$  为凸集。

3. 判断集合是否为凸集，并说明理由：

$$S = \{(x_1, x_2) \mid x_2 \geq |x_1|\}$$

4. 设  $f$  是一个凸函数，定义函数  $g$  为

$$g(x) = \inf_{\alpha > 0} \frac{f(\alpha x)}{\alpha}.$$

(a) 证明  $g$  是齐次的，即对所有  $t \geq 0$ ，都有

$$g(tx) = tg(x).$$

(b) 证明  $g$  是  $f$  的最大齐次下界函数：若  $h$  是齐次的且满足  $h(x) \leq f(x)$  对所有  $x$  都成立，则有  $h(x) \leq g(x)$  对所有  $x$  成立。

(c) 证明  $g$  是凸函数。