最优化方法导论第一次小测

姓名： **学号：**

1. 给定函数$f(x) = \| Ax + b \|_2 + \lambda \| x \|_2$,其中 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$， $b \in \mathbb{R}^m$， $\lambda > 0$。问：$f(x)$是否为范数？

2. 设 S 和 T 均为线性子空间。证明：$S+T=S\cup T$ 当且仅当 $S\subseteq T$ 或 $T\subseteq S$。

3. 设 $C \subseteq \mathbb{R}^n$ 为非空集合。证明：C 是凸集当且仅当 C 与任意直线的交是凸的。

4. 设 $V = C^1(\mathbb{R})$ 为所有一阶连续可微函数 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 的集合。在 V 上定义如下运算：

- **函数加法：** $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$，$\forall x \in \mathbb{R}$
- **数乘运算：** $(cf)(x) = cf(x)$，$\forall c \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}$

证明：V构成实数域 $\mathbb{R}$ 上的线性空间。

5. 扩展和限制集合。令$S \subseteq \boldsymbol{R}^n$，用$\| \quad \|$表示$\boldsymbol{R}^n$上的范数。

（a）对于$a \geq 0$，我们定义S_a为$\{x|\mathrm{dist}(x,S) \leq a\}$，其中$\mathrm{dist}(x,S) = \inf_{y \in S}\|x-y\|$。证明如果$S$是凸集，$S_a$是凸集。

（b）对于$a \geq 0$，我们定义S_{-a}为$\{x|\mathrm{B}(x,a) \subseteq S\}$，其中，$\mathrm{B}(x,a)$是以$x$为中心，$a$为半径的球。证明如果$S$是凸集，$S_{-a}$是凸集。