

# 第十四讲：对偶最优性与 KKT条件

凸优化问题的最优解性质

杨 林

# 大 纲

1. 对偶最优条件

2. KKT条件的应用

# 大 纲

**1. 对偶最优条件**

**2. KKT条件的应用**

# 1 对偶最优条件

---

- **互补松弛性:** 假设强对偶性成立,  $x^*$  是原始最优解,  $(\lambda^*, \nu^*)$  是对偶最优解

$$\begin{aligned} f_0(x^*) = g(\lambda^*, \nu^*) &= \inf \left( f_0(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* f_i(x) + \sum_{i=1}^p \nu_i^* h_i(x) \right) \\ &\leq f_0(x^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* f_i(x^*) + \sum_{i=1}^p \nu_i^* h_i(x^*) \quad (\text{消去inf}) \\ &\leq f_0(x^*) \end{aligned}$$

- 互补松弛性:  $\lambda_i^* f_i(x^*) = 0$  对于  $i = 1, \dots, m$

$$\lambda_i^* > 0 \Rightarrow f_i(x^*) = 0, \quad f_i(x^*) < 0 \Rightarrow \lambda_i^* = 0$$

# 1 对偶最优条件

---

## ■ Karush-Kuhn-Tucker (KKT) 条件

以下四个条件称为KKT条件(也可以推广于 $f_i, h_i$ 不可微的情况)

1. 原问题可行性条件:  $f_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, m, h_i(x) = 0, i = 1, \dots, p$
2. 对偶问题可行性条件:  $\lambda \geq 0$
3. 互补松弛性条件:  $\lambda_i f_i(x) = 0, i = 1, \dots, m$
4. 一阶最优条件: 拉格朗日函数关于  $x$  的梯度为0:

$$\nabla f_0(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla f_i(x) + \sum_{i=1}^p v_i \nabla h_i(x) = 0$$

如果强对偶成立, 且  $x, \lambda, v$  是最优的, 那么它们必须满足 KKT 条件

# 1 对偶最优条件

---

## ■ 凸问题的(充分) KKT 条件（**没有强对偶假设**）：

若  $\tilde{x}, \tilde{\lambda}, \tilde{\mu}$  满足凸问题的 KKT 条件, 则它们是最优的:

1. 从互补松弛性和原问题可行性:  $f_0(\tilde{x}) = L(\tilde{x}, \tilde{\lambda}, \tilde{\mu})$
2. 从第 4 个条件(以及凸性):  $g(\tilde{\lambda}, \tilde{\mu}) = L(\tilde{x}, \tilde{\lambda}, \tilde{\mu})$

因此  $f_0(\tilde{x}) = g(\tilde{\lambda}, \tilde{\mu})$

■ 反过来, 如果满足slater条件,  $x$  是最优的当且仅当存在  $\lambda, \nu$  满足 KKT 条件 (slater条件意味着强对偶性, 并且对偶最优解被达到)

■ 本质上, KKT 条件推广了无约束问题的最优条件  
 $\nabla f_0(x) = 0$

# 大 纲

1. 对偶最优条件

2. KKT条件的应用

## 2 KKT条件的应用

---

### □ 例 1

$$\begin{array}{ll}\text{最小化} & -\sum_{i=1}^n \log(\alpha_i + x_i) \\ \text{约束条件} & x \geq 0, \mathbf{1}^T x = 1\end{array}$$

### ■ 解: 写出 KKT 条件

$$\begin{aligned}x^* \geq 0, \mathbf{1}^T x^* = 1, \lambda^* \geq 0, \lambda_i^* x_i^* = 0, i = 1, \dots, n \\ -1/(\alpha_i + x_i^*) - \lambda_i^* + \nu^* = 0, i = 1, \dots, n\end{aligned}$$

重写 KKT 条件:

$$\begin{aligned}x^* \geq 0, \mathbf{1}^T x^* = 1, \\ x_i^* (\nu^* - 1/(\alpha_i + x_i^*)) = 0, \quad i = 1, \dots, n \\ \nu^* \geq 1/(\alpha_i + x_i^*), \quad i = 1, \dots, n\end{aligned}$$



## 2 KKT条件的应用

### ■ 解(续):

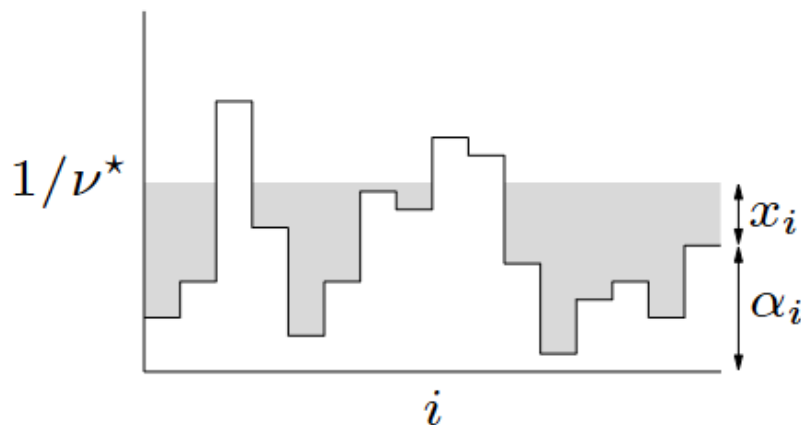
(1) 若  $\nu^* < 1/\alpha_i$ , 那么  $x_i^* > 0$ , 同时  $x_i^* = 1/\nu^* - \alpha_i$ ;

(2) 若  $\nu^* \geq 1/\alpha_i$ , 那么  $x_i^* = 0$

结果,  $x_i^* = \max\{0, 1/\nu^* - \alpha_i\}$

结合  $\mathbf{1}^T x^* = 1$  确定  $\nu$  的最优值, 即

$$\sum_{i=1}^n \max\{0, 1/\nu^* - \alpha_i\} = 1$$



## 2 KKT条件的应用

---

□ 例 2: 使用 KKT 条件找到下列集合中最接近  $(0, 0)$  的点.

$$M = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 + x_2 \geq 4, 2x_1 + x_2 \geq 5\}$$

■ 解: 将其转化为一个优化问题:

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & x_1^2 + x_2^2 \\ \text{约束条件} & -x_1 - x_2 + 4 \leq 0 \\ & -2x_1 - x_2 + 5 \leq 0 \end{array}$$

拉格朗日函数是

$$\begin{aligned} & L(x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2) \\ &= x_1^2 + x_2^2 + \lambda_1(-x_1 - x_2 + 4) + \lambda_2(-2x_1 - x_2 + 5), \\ & \lambda_1, \lambda_2 \geq 0 \end{aligned}$$

## 2 KKT条件的应用

---

■ 解(续): KKT 条件是:

I. 可行性

II. 互补松弛性

$$\lambda_1(-x_1 - x_2 + 4) = 0, \lambda_1 \geq 0$$

$$\lambda_2(-2x_1 - x_2 + 5) = 0, \lambda_2 \geq 0$$

III. 最优性

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 2x_1 - \lambda_1 - 2\lambda_2 = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 2x_2 - \lambda_1 - \lambda_2 = 0$$

## 2 KKT条件的应用

---

### ■ 解(续):

情况(1):  $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0$ . 从 III 得  $x_1 = 0, x_2 = 0$ , 不可行

情况(2):  $x_1 + x_2 = 4, \lambda_2 = 0$ . 结合 III 我们可以得到

$$2x_1 - \lambda_1 = 0, 2x_2 - \lambda_1 = 0, x_1 + x_2 = 4$$

这个给出  $x_1 = 2, x_2 = 2, \lambda_1 = 4 > 0$ . 一个 KKT 点  $(2, 2, 4, 0)$ !

情况(3):  $\lambda_1 = 0, 2x_1 + x_2 = 5$

$$2x_1 - 2\lambda_2 = 0, \quad 2x_2 - \lambda_2 = 0, \quad 2x_1 + x_2 = 5$$

我们有  $x_1 = 2, x_2 = 1, \lambda_2 = 2$  (不可行)

情况(4):  $x_1 + x_2 = 4, 2x_1 + x_2 = 5$

我们有  $x_1 = 1, x_2 = 3$  以及  $\lambda_1 + 2\lambda_2 = 2, \lambda_1 + \lambda_2 = 6$

这会得到  $\lambda_1 = 10, \lambda_2 = -4 < 0$  (不满足对偶可行性)

## 2 KKT条件的应用

---

□ 例 3: 下面是一个强对偶性成立的非凸优化问题. 如何找到最优解, 唯一吗?

$$\begin{array}{ll}\text{最小化}_x & -2(x_1 - 2)^2 - x_2^2 \\ \text{约束条件} & x_1^2 + x_2^2 \leq 25 \\ & x_1 \geq 0\end{array}$$

■ 解: 拉格朗日函数是

$$L(x_1, x_2, \mu_1, \mu_2) = -2(x_1 - 2)^2 - x_2^2 + \lambda_1(x_1^2 + x_2^2 - 25) - \lambda_2 x_1$$

$$\text{KKT 条件是: } \left\{ \begin{array}{l} -4(x_1 - 2) + 2\lambda_1 x_1 - \lambda_2 = 0 \\ -2x_2 + 2\lambda_1 x_2 = 0 \\ x_1^2 + x_2^2 \leq 25 \\ x_1 \geq 0 \\ \lambda_1, \lambda_2 \geq 0 \\ \lambda_1 = 0 \text{ 或 } x_1^2 + x_2^2 = 25 \\ \lambda_2 = 0 \text{ 或 } x_1 = 0 \end{array} \right.$$

## 2 KKT条件的应用

---

### ■ 解(续):

(1)  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ . 我们得到  $x_1 = 2$  和  $x_2 = 0$ , 满足原始约束. 因此,  $(2, 0)$  和  $(0, 0)$  是可能的解, 其值等于 0

(2)  $\lambda_1 = 0$  和  $\lambda_2 > 0$ . 我们得到  $x_1 = x_2 = 0$  和  $\lambda_2 = 8 > 0$ . 值是  $-8$

(3)  $\lambda_2 = 0$  和  $\lambda_1 > 0$ , 我们得到

$$\begin{cases} -4(x_1 - 2) + 2\lambda_1 x_1 = 0 \\ -2x_2 + 2\lambda_1 x_2 = 0 \\ x_1 \geq 0 \\ \lambda_1 > 0 \\ x_1^2 + x_2^2 = 25 \end{cases}$$

## 2 KKT条件的应用

---

### ■ 解(续):

如果  $x_2 = 0, x_1 = 5$ , 且  $\lambda_1 = 6/5 > 0$  和  $\lambda_2 = 0$ , 得到值为  $-18$ . 如果  $x_2 \neq 0, \lambda_1 = 1$ , 我们有  $x_1 = 4$  和  $x_2 = \pm 3$ , 且  $\lambda_2 = 0$ , 得到值为  $-17$ .

(4)  $\lambda_2 > 0$  且  $\lambda_1 > 0$ . 我们得到  $x_1 = 0$  和  $x_2 = \pm 5$ ,  $\lambda_1 = 1$  和  $\lambda_2 = 8$ , 得到一个值为  $-33$ , 这是最小值.

## 2 KKT条件的应用

---

□ 例 4: 已知下面是一个强对偶性成立的非凸优化问题。分析最优解（充分或必要）条件，以及如何寻找其最优解。可以存在多个最优解吗？

$$\begin{array}{ll} \text{最大化}_x & -3x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^3 + 2(x_1 + x_2 + x_3) \\ \text{约束条件} & x_1^2 + x_2^2 + x_3^3 = 1 \end{array}$$

■ 解: 其 KKT 条件可以写为

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 + x_3^3 = 1 \\ (-3 + \nu)x_1 + 1 = 0 \\ (1 + \nu)x_2 + 1 = 0 \\ (2 + \nu)x_3 + 1 = 0 \end{cases}$$

通过观察上述的 KKT 条件容易得到  $\nu \neq -2, \nu \neq -1$ , 以及  $\nu \neq 3$ . 我们因此可以消去  $x$ , 得到下面关于  $\nu$  的等式



## 2 KKT条件的应用

---

■ 解(续): 其 KKT 条件可以写为

$$\frac{1}{(-3 + v)^2} + \frac{1}{(1 + v)^2} + \frac{1}{(2 + v)^2} = 1$$

上述公式包含四个解. 分别是  $-3.15, 0.22, 1.89, 4.04$ . 对应的  $x$  的解为:

$$x = (0.16, 0.47, -0.87),$$

$$x = (0.36, -0.82, 0.45),$$

$$x = (0.90, -0.35, 0.26),$$

$$x = (-0.97, -0.20, 0.17)$$

将上述解代入  $f_0(x)$  可得四个值, 分别为  $1.17, 0.67, -0.56, -4.70$ . 比较大小即可得到其最优解

## 2 KKT条件的应用

---

### □ 例 5: 求解以下优化问题

$$\begin{aligned} & \text{最大化}_{x,y \in \mathbb{R}^2} \quad (x-1)^2 + (y-2)^2 \\ & \text{约束条件} \quad \quad \quad x \leq y \\ & \quad \quad \quad \quad \quad x + 2y \leq 2 \end{aligned}$$

■ 解: 目标函数表示点  $(x, y)$  到  $(1, 2)$  的欧氏距离平方. 需在可行域内找到最近点. 无约束最小值点  $(1, 2)$  不满足  $x + 2y \leq 2$  (因  $1 + 4 = 5 > 2$ ), 故最优解必在约束边界

在约束  $x + 2y = 2$  上使用拉格朗日乘数法:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = 2(x-1) + \nu = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 2(y-2) + 2\nu = 0 \\ \quad \quad \quad x + 2y = 2 \end{cases}$$

## 2 KKT条件的应用

---

■ 解(续):解得:  $v = \frac{6}{5}$ ,  $x = \frac{2}{5}$ ,  $y = \frac{4}{5}$ , 验证得  $x \leq y$  成立, 目标值为1.8

在约束  $x = y$  上, 极值点为  $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ , 但目标值  $\frac{17}{9} \approx 1.888$  大于  $\frac{9}{5} = 1.8$

目标值比较:

$$f\left(\frac{2}{5}, \frac{4}{5}\right) = \left(\frac{2}{5} - 1\right)^2 + \left(\frac{4}{5} - 2\right)^2 = \frac{9}{5}$$

$$f\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) = \frac{17}{9}$$

所以最优值为:  $\left(\frac{2}{5}, \frac{4}{5}\right)$

谢谢！