最优化导论作业题

1. 设 $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x + y + z = 0\}$，证明 W 是$\mathbb{R}^3$的线性子空间。

答案： 证明:

- **非空性：** $(0,0,0) \in W$
- **加法封闭：** 设$(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \in W$，则$x_1 + y_1 + z_1 = 0$，$x_2 + y_2 + z_2 = 0$。

  $(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) + (z_1 + z_2) = (x_1 + y_1 + z_1) + (x_2 + y_2 + z_2) = 0 + 0 = 0$

  所以$(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) \in W$
- **数乘封闭：** 设$(x, y, z) \in W$，$\alpha \in \mathbb{R}$，则$\alpha x + \alpha y + \alpha z = \alpha(x + y + z) = \alpha \cdot 0 = 0$

  所以$(\alpha x, \alpha y, \alpha z) \in W$

2. 判断向量组$(1,2,1), (2,1,3), (3,3,4)$在$\mathbb{R}^3$中是否线性相关，并说明理由。

答案： 线性相关。设$\alpha_1(1,2,1) + \alpha_2(2,1,3) + \alpha_3(3,3,4) = (0,0,0)$

得到方程组:

- $\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0$
- $2\alpha_1 + \alpha_2 + 3\alpha_3 = 0$
- $\alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3 = 0$

解得$\alpha_1 = \alpha_2 = -\alpha_3$，取$\alpha_3 = 1$得到非零解$(1,1,-1)$，因此线性相关。

3. 证明：如果$\sigma: V \to V'$是线性映射，那么$\mathrm{Ker}(\sigma)$是V的子空间，$\mathrm{Im}(\sigma)$是V'的子空间。

答案：

$\mathrm{Ker}(\sigma) = x \in V : \sigma(x) = 0$**的证明：**

- $0 \in \mathrm{Ker}(\sigma)$，因为$\sigma(0) = 0$

- 若$x, y \in \mathrm{Ker}(\sigma)$，则$\sigma(x+y) = \sigma(x) + \sigma(y) = 0 + 0 = 0$，所以$x + y \in \mathrm{Ker}(\sigma)$
- 若$x \in \mathrm{Ker}(\sigma)$，$\alpha \in F$，则$\sigma(\alpha x) = \alpha\sigma(x) = \alpha \cdot 0 = 0$，所以$\alpha x \in \mathrm{Ker}(\sigma)$

$\mathrm{Im}(\sigma)$**的证明类似。**

4. 给定线性映射$T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$，$T(x, y, z) = (x + y, y + z)$，求$\mathrm{Ker}(T)$和$\mathrm{Im}(T)$。

答案：

- $\mathrm{Ker}(T) = \{(x, y, z): x + y = 0, y + z = 0\} = \{(t, -t, t): t \in \mathbb{R}\}$
- $\mathrm{Im}(T) = \mathrm{span}\{(1,0), (1,1), (0,1)\} = \mathrm{span}\{(1,0), (0,1)\} = \mathbb{R}^2$

5. 某工厂生产两种产品 A 和 B，产品 A 每件利润 30 元，产品 B 每件利润 50 元，最大化利润。生产约束条件:

- 生产 A 需要 2 小时加工时间，B 需要 4 小时，总加工时间不超过 100 小时
- 生产 A 需要 1 单位原料，B 需要 2 单位原料，总原料不超过 60 单位
- 产品 A 至少生产 5 件

请建立线性规划模型。

答案： 设x_1为产品 A 的产量，x_2为产品 B 的产量

最大化 $z = 30x_1 + 50x_2$

约束条件：

- $2x_1 + 4x_2 \leq 100$ （加工时间）
- $x_1 + 2x_2 \leq 60$ （原料）
- $x_1 \geq 5$ （最低产量）
- $x_1, x_2 \geq 0$ （非负性）

6. 某物流公司要在三个城市 A、B、C 之间分配运输任务，最小化运输成本。已知:

- 从 A 到 B 的运输成本为 5 元/单位，从 A 到 C 为 8 元/单位

- 从 B 到 A 为 6 元/单位，从 B 到 C 为 4 元/单位
- 从 C 到 A 为 7 元/单位，从 C 到 B 为 3 元/单位
- 城市 A 需求量 100 单位，B 需求量 150 单位，C 需求量 200 单位
- 城市 A 供应量 120 单位，B 供应量 180 单位，C 供应量 150 单位

建立运输问题的线性规划模型。

答案： 设x_{ij}为从城市i到城市j的运输量

最小化 $z = 5x_{12} + 8x_{13} + 6x_{21} + 4x_{23} + 7x_{31} + 3x_{32}$

约束条件：

供应约束：

- $x_{12} + x_{13} \leq 120$
- $x_{21} + x_{23} \leq 180$
- $x_{31} + x_{32} \leq 150$

需求约束：

- $x_{21} + x_{31} \geq 100$
- $x_{12} + x_{32} \geq 150$
- $x_{13} + x_{23} \geq 200$

非负性： $x_{ij} \geq 0, \forall i, j$

7. 两个平行的超平面 $\{x \in \mathbb{R}^n | a^T x = b_1\}$ 和 $\{x \in \mathbb{R}^n | a^T x = b_2\}$ 之间的距离是多少？

答案：

方法一：由于 a 是超平面的法向量

设 a 与超平面 $\{x \in \mathbb{R}^n | a^T x = b_1\}$，$\{x \in \mathbb{R}^n | a^T x = b_2\}$ 相垂直且 $x_1 \neq x_2$

则：$x_1 = \left(\frac{b_1}{|a|^2}\right) a$

$$x_2 = \left(\frac{b_2}{|a|^2}\right) a$$

由于 $a^T x_1 = a^T \cdot \frac{b_1}{|a|^2} a = \frac{|a|^2}{|a|^2} b_1 = b_1$

因此 $x_1 \in x \in \mathbb{R}^n | a^T x = b_1$，$x_1$ 是 a 的倍数

因此：$|x_1 - x_2|_2 = \left|\frac{b_1}{|a|^2} a - \frac{b_2}{|a|^2} a\right| = \left|\frac{b_1 - b_2}{|a|^2} a\right|_2 = \frac{|b_1 - b_2|}{|a|_2}$

方法二： 设 x_1 为超平面 $\{x \in \mathbb{R}^n | a^T x = b_1\}$ 上的一点

不妨设 x_1 在超平面 $x \in \mathbb{R}^n | a^T x = b_2$ 上的投影为 x_c

则：$a^T x_c = b_2$

并且 $x_1 - x_c$ 与该方向垂直

因此：$a(x_1 - x_c) = |a|_2 |x_1 - x_c|_2 \cos(\theta 或 \pi)$

$$= \pm |a|_2 |x_1 - x_c|_2$$

又因为：$a^T(x_1 - x_c) = a^T x_1 - a^T x_c = b_1 - b_2$

因此：$|x_1 - x_c|_2 = \frac{|b_1 - b_2|}{|a|_2}$

8. 假设 V 和 V' 是线性空间，记所有从 V 到 V' 的线性映射组成集合为 $\mathcal{L}(V, V')$。则 $\mathcal{L}(V, V')$ 也是一个线性空间。其中，对于 $\forall \sigma, \tau \in \mathcal{L}(V, V')$，运算满足以下定义：

$$(\sigma + \tau)(x) = \sigma(x) + \tau(x), \quad \forall x \in V$$

$$(\alpha\sigma)(x) = \alpha\sigma(x), \quad \forall x \in V, \forall \alpha \in F$$

解：

1. **运算的封闭性**

- 若 $\sigma, \tau \in \mathcal{L}(V, V')$，则对任意 $x, y \in V$ 和 $\beta \in F$ 有：

  $$(\sigma + \tau)(x + y) = \sigma(x + y) + \tau(x + y) = \sigma(x) + \sigma(y) + \tau(x) + \tau(y)$$
  $$= \big(\sigma(x) + \tau(x)\big) + \big(\sigma(y) + \tau(y)\big),$$
  $$(\sigma + \tau)(\beta x) = \sigma(\beta x) + \tau(\beta x) = \beta\sigma(x) + \beta\tau(x) = \beta\big(\sigma(x) + \tau(x)\big).$$

  因此 $\sigma + \tau$ 仍为线性映射。

- 对 $\alpha \in F$，检查 $\alpha\sigma$：

  $$(\alpha\sigma)(x + y) = \alpha\sigma(x + y) = \alpha\big(\sigma(x) + \sigma(y)\big) = \alpha\sigma(x) + \alpha\sigma(y),$$

$$(\alpha\sigma)(\beta x) = \alpha\sigma(\beta x) = \alpha\big(\beta\sigma(x)\big) = (\alpha\beta)\sigma(x) = \beta\big(\alpha\sigma(x)\big).$$

因此 $\alpha\sigma$ 也是线性映射。

综上，$\mathcal{L}(V,V')$ 在加法和数乘运算下封闭。

---

1. **验证线性空间公理**

- **加法交换律**

$$(\sigma+\tau)(x) = \sigma(x)+\tau(x) = \tau(x)+\sigma(x) = (\tau+\sigma)(x).$$

- **加法结合律**

$$\begin{aligned}\big((\sigma+\tau)+\rho\big)(x) &= (\sigma+\tau)(x)+\rho(x) = \big(\sigma(x)+\tau(x)\big)+\rho(x)\\ &= \sigma(x)+\big(\tau(x)+\rho(x)\big) = \big(\sigma+(\tau+\rho)\big)(x).\end{aligned}$$

- **零元存在性**

  定义零映射 $0: V \to V'$ 为 $0(x) = 0_{V'}$，则

$$(\sigma+0)(x) = \sigma(x)+0_{V'} = \sigma(x).$$

- **加法逆元存在性**

  对任意 σ，定义 $(-\sigma)(x) = -\sigma(x)$，则

$$\big(\sigma+(-\sigma)\big)(x) = \sigma(x)-\sigma(x) = 0_{V'}.$$

- **数乘结合律**

$$\big(\alpha(\beta\sigma)\big)(x) = \alpha\big((\beta\sigma)(x)\big) = \alpha\big(\beta\sigma(x)\big) = (\alpha\beta)\sigma(x).$$

- **数乘分配律（对映射加法）**

$$\alpha(\sigma+\tau)(x) = \alpha\big(\sigma(x)+\tau(x)\big) = \alpha\sigma(x)+\alpha\tau(x) = (\alpha\sigma+\alpha\tau)(x).$$

- **数乘分配律（对标量加法）**

$$\big((\alpha+\beta)\sigma\big)(x) = (\alpha+\beta)\sigma(x) = \alpha\sigma(x)+\beta\sigma(x) = (\alpha\sigma+\beta\sigma)(x).$$

- **单位元作用**

$$(1\sigma)(x) = 1\cdot\sigma(x) = \sigma(x).$$

$\mathcal{L}(V,V')$ 在给定的加法与数乘运算下，满足线性空间的所有公理，因此它是一个线性空间。

9. 如果 $S,T \subset V(F)$ 是子空间，证明：$S+T$ 是子空间，其中：$S+T := \{z | z = x + y, x \in S, y \in T\}$

解： 因为 S 和 T 都是子空间，所以它们都是非空的，且含有零向量 0。

1. **零向量**
   取 $x=0\in S, y=0\in T$，则 $0=x+y\in S+T$。因此 $S+T\neq\varnothing$。

2. **加法封闭性**
   任取 $z_1,z_2\in S+T$，则存在 $x_1,x_2\in S$ 与 $y_1,y_2\in T$ 使得
   $$z_1=x_1+y_1,\quad z_2=x_2+y_2.$$
   则
   $$z_1+z_2=(x_1+x_2)+(y_1+y_2).$$
   因为 S,T 各自对子加法封闭，$x_1+x_2\in S, y_1+y_2\in T$，从而 $z_1+z_2\in S+T$。

3. **数乘封闭性**
   任取 $z\in S+T$，则存在 $x\in S, y\in T$ 使得 $z=x+y$。对任意 $\alpha\in F$：
   $$\alpha z=\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y.$$
   因为 S,T 对数乘封闭，$\alpha x\in S,\alpha y\in T$，所以 $\alpha z\in S+T$。

$S+T$ 非空，并且对加法和数乘均封闭，因此它是 $V(F)$ 的子空间。

10. 设 V 是所有定义在 $[0,1]$ 上的连续函数构成的线性空间，$W_1=\{f\in V: f(0)=f(1)\}$，$W_2=\{f\in V: \int_0^1 f(x)dx=0\}$。

(1) 证明 W_1 和 W_2 都是 V 的线性子空间。

(2) 证明 $W_1\cap W_2$ 是 V 的线性子空间。

(3) 构造一个具体的函数 $f\in W_1\cap W_2$ 且 $f\neq 0$。

(4) 判断 $W_1+W_2=V$ 是否成立，并证明你的结论。

解：(1) 证明子空间性质：

对于 $W_1=f\in V: f(0)=f(1)$：

- 零元素：零函数满足 $0(0)=0(1)=0$，故 $0\in W_1$
- 加法封闭：若 $f,g\in W_1$，则 $(f+g)(0)=f(0)+g(0)=f(1)+g(1)=(f+g)(1)$
- 数乘封闭：若 $f\in W_1$，$\alpha\in\mathbb{R}$，则 $(\alpha f)(0)=\alpha f(0)=\alpha f(1)=(\alpha f)(1)$

对于 $W_2=f\in V: \int_0^1 f(x)dx=0$，类似可证。

(2) $W_1 \cap W_2$ 继承了两个子空间的所有性质，故也是子空间。

(3) 构造函数：$f(x) = \sin(2\pi x)$

- $f(0) = \sin(0) = 0 = \sin(2\pi) = f(1)$，故 $f \in W_1$
- $\int_0^1 \sin(2\pi x)dx = 0$，故 $f \in W_2$

(4) $W_1 + W_2 = V$ 成立。

证明：对任意 $h \in V$，构造：

- $g(x) = h(x) - \big(h(1) - h(0)\big)x - h(0)$
- $f(x) = \big(h(1) - h(0)\big)x + h(0)$

则 $g \in W_1$，f 是线性函数，且 $h = f + g$。

11. 设 V 是所有从 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}$ 的连续函数构成的线性空间。定义子集：

- $W_1 = \{f \in V: f(-x) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}\}$（偶函数）
- $W_2 = \{f \in V: f(-x) = -f(x), \forall x \in \mathbb{R}\}$（奇函数）

(1) 证明 W_1 和 W_2 都是 V 的线性子空间。(2) 证明 $W_1 \cap W_2 = 0$。

解答：(1) **证明 W_1 和 W_2 都是 V 的线性子空间**

- **W_1 是子空间：**
  取 $f, g \in W_1$，则对任意 $x \in \mathbb{R}$，有
  $$f(-x) = f(x), \quad g(-x) = g(x).$$
  对任意 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$，考虑线性组合
  $$h(x) = \alpha f(x) + \beta g(x).$$
  则
  $$h(-x) = \alpha f(-x) + \beta g(-x) = \alpha f(x) + \beta g(x) = h(x).$$
  因此 $h \in W_1$。同时 0 函数显然属于 W_1。故 W_1 是 V 的线性子空间。

- **W_2 是子空间：**
  取 $f, g \in W_2$，则对任意 $x \in \mathbb{R}$，有
  $$f(-x) = -f(x), \quad g(-x) = -g(x).$$
  对任意 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$，考虑线性组合

$$h(x) = \alpha f(x) + \beta g(x).$$

则

$$h(-x) = \alpha f(-x) + \beta g(-x) = -\alpha f(x) - \beta g(x) = -h(x).$$

因此 $h \in W_2$。同时 0 函数显然属于 W_2。故 W_2 是 V 的线性子空间。

(2) **证明** $W_1 \cap W_2 = \{0\}$

设 $f \in W_1 \cap W_2$，则对任意 $x \in \mathbb{R}$，有

$$f(-x) = f(x) \quad (因为\ f \in W_1),$$

$$f(-x) = -f(x) \quad (因为\ f \in W_2)。$$

由此得

$$f(x) = -f(x) \quad \Rightarrow \quad f(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

因此 f 只能是零函数。
故 $W_1 \cap W_2 = \{0\}$。

12. 考虑 $\mathbb{R}^2$ 中的序列 (x_n, y_n)，其中 $x_n = \frac{n}{n+1}$，$y_n = \frac{(-1)^n}{n}$。

(1) 证明该序列在欧几里得度量下收敛，并求其极限。

(2) 定义集合 $S = \{(x_n, y_n): n \in \mathbb{N}\} \cup (1,0)$。证明 $(1,0)$ 是 S 的聚点。

(3) 判断 S 是否为闭集，并证明你的结论。

解答：

(1) **证明序列收敛并求极限**

已知序列 (x_n, y_n)，其中

$$x_n = \frac{n}{n+1}, \quad y_n = \frac{(-1)^n}{n}.$$

- 对 x_n：

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1.$$

- 对 y_n：

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0.$$

因此，

$$\lim_{n\to\infty} (x_n, y_n) = (1,0).$$

由于 $\mathbb{R}^2$ 配备的是欧几里得度量，而 (x_n, y_n) 的每个分量都收敛，故整个序列收敛于 $(1,0)$。

(2) 证明 $(1,0)$ 是 S 的聚点

集合

$$S = \{(x_n, y_n) : n \in \mathbb{N}\} \cup \{(1,0)\}.$$

由于 $\lim_{n\to\infty}(x_n, y_n) = (1,0)$，所以对任意 $\varepsilon > 0$，存在 $N \in \mathbb{N}$，使得当 $n > N$ 时，

$$\| (x_n, y_n) - (1,0) \| < \varepsilon.$$

因此，在 $(1,0)$ 的任意邻域中，总能找到不同于 $(1,0)$ 的点 $(x_n, y_n) \in S$。
由此可知，$(1,0)$ 是 S 的聚点。

(3) 判断 S 是否为闭集

一个集合闭当且仅当它包含自身的所有极限点。由 (2) 可知，$(1,0)$ 是序列 $\{(x_n, y_n)\}$ 的极限点。集合 S 中已经包含 $(1,0)$，因此 S 包含了自身的极限点。

另一方面，S 中的其余点 (x_n, y_n) 只是孤立点，不是其他点的聚点。

综上，S 包含所有的极限点，故 S 是闭集。