第四讲：凸集

优化问题的可行解集

杨 林

大 纲

1. 仿射与凸集

2. 凸锥(锥)

3. 半空间

4. 球、椭球

5. 多面体

大 纲

1. 仿射与凸集

2. 凸锥(锥)

3. 半空间

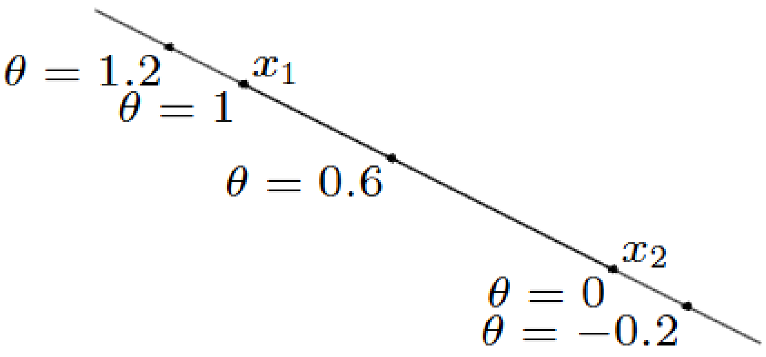
4. 球、椭球

5. 多面体

1 仿射与凸集

- **定义1（直线）**：通过x_1，x_2的所有点：

$$x = \theta x_1 + (1-\theta) x_2, \theta \in \mathbb{R} \text{（仿射组合）}$$



- **定义2（仿射集）**：包含集合中任意两点所确定的直线

1 仿射与凸集

- **示例**:线性方程组的解集 $\{x|Ax = b\}$是仿射集.（反命题亦成立：每个仿射集合都可以表示为线性方程组的解集）

- 证明：考虑线性方程组的解集 $C = \{x|Ax = b, A \in \mathbb{R}^{m\times n}, b \in \mathbb{R}^m\}$. 设 $x_1, x_2 \in C$，即 $Ax_1 = b$ ， $Ax_2 = b$，则对于任意的θ，我们有

$$A(\theta x_1 + (1-\theta)x_2) = \theta Ax_1 + (1-\theta)Ax_2$$
$$= \theta b + (1-\theta)b = b$$

说明任意的仿射组合 $\theta x_1 + (1-\theta)x_2$ 也属于集合 C ，因此是仿射集.

1 仿射与凸集

- **仿射集的另一种解释:**

假设集合C是仿射集, 那么

$$C = V + x_0 = \{v + x_0 | v \in V\}$$

对于某个 $x_0 \in C$, 其中 V 是一个线性子空间

- 仿射集都可以通过某个线性空间偏移构成

- **分析:** 对于仿射集 C 和 $x_0 \in C$

$$V = C - x_0 = \{x - x_0 | x \in C\}$$

是一个线性子空间(对和以及标量乘法运算封闭)

1 仿射与凸集

■ **证明**:

假设 C 是仿射集且 $x_0 \in C$, 则:

（1）对标量乘法封闭，假设$x_1 \in C - x_0$

$$ax_1 + x_0 = a(x_1 + x_0) + (1 - a)x_0 \in C\text{，所以}ax_1 \in C - x_0$$

$$（x_1 \in C - x_0 \Rightarrow x_1 + x_0 \in C）$$

（2） 对加法封闭

$x_1 \in C - x_0, x_2 \in C - x_0 \Rightarrow 2x_1 \in C - x_0, 2x_2 \in C - x_0$（由（1）得）

$$x_1 + x_2 + x_0 = \frac{1}{2}(2x_1 + x_0) + \frac{1}{2}(2x_2 + x_0) \in C$$

所以，$x_1 + x_2 \in C - x_0$

1 仿射与凸集

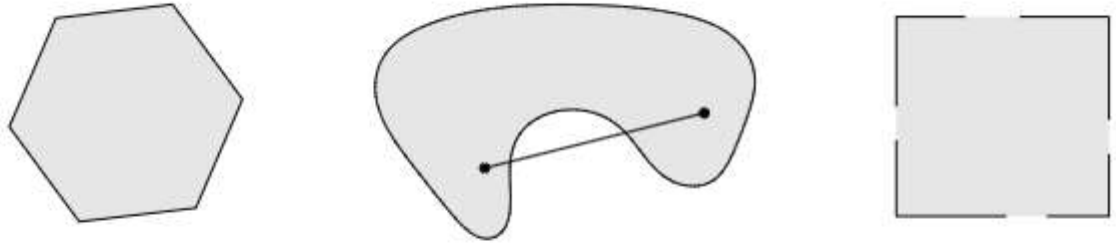
■ **定义3（线段）**：x_1，x_2之间的所有点：

$$x = \theta x_1 + (1-\theta)x_2, \theta \in [0,1] \text{ (凸组合)}$$

■ **定义4（凸集）**：包含集合中任意两点之间的线段. 即

$$x_1, x_2 \in C, \theta \in [0,1] \Rightarrow \theta x_1 + (1-\theta)x_2 \in C$$

□ **例** 1：一个凸的，两个非凸的



1 仿射与凸集

- **例** 2：证明闭区间 $[a,b]$ 是凸集

- **证明**：

取任意两点 $x, y \in [a,b]$，且任意 $\theta \in [0,1]$，考虑点 $z = \theta x + (1-\theta)y$

由于 x 和 y 都在 $[a,b]$ 中，有 $a \le x \le b$ 和 $a \le y \le b$

因此，z 是 x 和 y 的凸组合且满足：

$$a \le \theta x + (1-\theta)y \le b$$

所以 $z \in [a,b]$，因此 $[a,b]$ 是凸集

1 仿射与凸集

- **例** 3: 证明二维空间中的圆盘 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\leq r^2\}$ 是凸集

- **证明**: 取任意两点 $P_1=(x_1,y_1)\in D$ 和 $P_2=(x_2,y_2)\in D$, 即满足 $x_1^2+y_1^2\leq r^2$ 和 $x_2^2+y_2^2\leq r^2$

  对于任意 $\theta\in[0,1]$, 考虑点 $P=\theta P_1+(1-\theta)P_2=(\theta x_1+(1-\theta)x_2,\theta y_1+(1-\theta)y_2)$.

  需要证明 $P\in D$, 即:

$$(\theta x_1+(1-\theta)x_2)^2+(\theta y_1+(1-\theta)y_2)^2\leq r^2$$

  展开左边:

$$=\theta^2x_1^2+2\theta(1-\theta)x_1x_2+(1-\theta)^2x_2^2+\theta^2y_1^2+2\theta(1-\theta)y_1y_2+(1-\theta)^2y_2^2$$
$$=\theta^2(x_1^2+y_1^2)+\left(1-\theta\right)^2(x_2^2+y_2^2)+2\theta(1-\theta)(x_1x_2+y_1y_2)$$

1 仿射与凸集

□ 证明(续):

由于 $x_1^2 + y_1^2 \le r^2$ 和 $x_2^2 + y_2^2 \le r^2$, 有:

$$\theta^2(x_1^2 + y_1^2) \le \theta^2 r^2, (1-\theta)^2(x_2^2 + y_2^2) \le (1-\theta)^2 r^2$$

另外, 由柯西不等式得:

$$x_1 x_2 + y_1 y_2 \le \sqrt{x_1^2 + y_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2} \le r^2$$

所以:

$$\theta(1-\theta)(x_1 x_2 + y_1 y_2) \le \theta(1-\theta) r^2$$

综上可得

$$\text{左边} \le \theta^2 r^2 + (1-\theta)^2 r^2 + 2\theta(1-\theta) r^2 = r^2$$

所以 $P \in D$, 因此 D 是凸集

1 仿射与凸集

- **例** 4:定义集合 S 的凸包 $\mathrm{conv}(S)$ 为所有可以通过 S 中点的凸组合得到的点的集合. 换句话说, $\mathrm{conv}(S)$ 包含所有形如 $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i s_i \ (s_i \in S, \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1)$ 的点 x. 证明集合 S 的凸包是所有包含 S 的凸集的交.

- **证明**:

设 C 是一个包含 S 的凸集. 因为 C 包含 S 中的所有点, 对于任意的 $s_1, s_2 \in S$, 它们的凸组合 $\lambda s_1 + (1-\lambda)s_2$ 也属于 C(因 C 是凸的). 因此, 我们得出结论:

$$\mathrm{conv}(S) \subseteq C$$ （以点带面）

设所有包含 S 的凸集的集合为 $\mathcal{C}$, 即

$$\mathcal{C} = \{C \mid S \subseteq C \text{ 且 } C \text{ 是凸的}\}$$

1 仿射与凸集

证明(续):

那么所有这些 C 的交为

$$\bigcap_{C\in\mathcal{C}} C$$

我们已经证明了任意包含 S 的凸集 C 都包含 $\operatorname{conv}(S)$, 因此

$$\operatorname{conv}(S) \subseteq \bigcap_{C\in\mathcal{C}} C$$

易证$\operatorname{conv}(S) \in \mathcal{C}$，我们得出结论：$\operatorname{conv}(S) = \bigcap_{C\in\mathcal{C}} C$

大 纲

1.仿射与凸集

2.凸锥(锥)

3.半空间

4.球、椭球

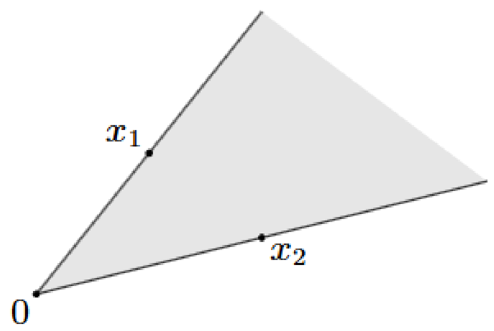
5. 多面体

2 凸锥(锥)

- **定义5(x_1 , x_2的锥(非负)组合)**:任意形如

$$x = \theta_1 x_1 + \theta_2 x_2$$

的点. 其中$\theta_1, \theta_2 \geq 0$.



- **定义6(凸锥)**:包含集合中所有点的锥组合的集合
- 思考:一定是凸的吗?

2 凸锥(锥)

- **例** 5: 假设 $K \subseteq X$ 是一个锥体. 证明 K 是凸的, 当且仅当对所有 $x, y \in K$, 都有 $x + y \in K$

- **证明**:

必要性: 假设K是一个凸集. 根据凸集的定义, 对于任意 $x, y \in K$ 和任意 $\lambda \in [0,1]$, 都有:

$$\lambda x + (1-\lambda)y \in K$$

取 $\lambda = 0.5$, 则我们得到:

$$0.5x + 0.5y \in K$$

这可以重写为:

$$0.5\,(x + y) \in K$$

由于 K 是锥体, 包含所有非负倍数的线性组合, 因此我们可以得到 $x + y \in K$

2 凸锥(锥)

□ 证明(续):

充分性: 假设对于所有 $x, y \in K$, 都有 $x + y \in K$.

设 $x, y \in K$ 且 $\lambda \in [0,1]$.

由于 K 是锥体, 若 $x \in K$ 且 $\lambda > 0$, 则 $\lambda x \in K$. 设 $\mu = 1 - \lambda$, 则 $\mu \in [0,1]$. 同样, 由于 K 是锥体, 则 $\mu y \in K$.

利用 $x + y \in K$ 的假设:

$$x + y \in K \Longrightarrow \lambda x + \mu y \in K$$

因此, 易得:

$$\lambda x + (1 - \lambda) y = \lambda x + \mu y \in K$$

2 凸锥

■ **定义7**:

1. S^n是$n \times n$ 阶对称矩阵的集合
2. $S_+^n = \{X \in S^n \mid X \succeq 0\}$: $n \times n$ 阶半正定矩阵

$$X \in S_+^n \Leftrightarrow z^T X z \geq 0, \forall z$$

   S_+^n是一个凸锥
3. $S_{++}^n = \{X \in S^n \mid X \succ 0\}$: $n \times n$ 阶正定矩阵

□ **例** 6:证明 $\begin{bmatrix} x & y \\ y & z \end{bmatrix} \in S_+^2$是凸锥

□ **证明**:

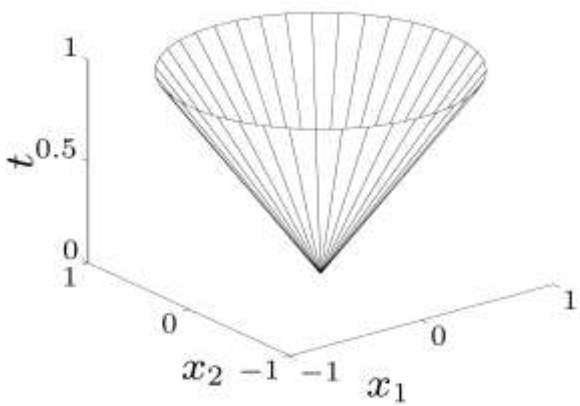
假设 $A \succeq 0$ 且 $B \succeq 0$, 对 $\forall \theta_1, \theta_2 \geq 0$

$$x^T(\theta_1 A + \theta_2 B)x = \theta_1 x^T A x + \theta_2 x^T B x \geq 0$$

即 $(\theta_1 A + \theta_2 B) \in S_+^2$.

2 凸锥

- **例** 7:关于范数$\| \quad \|$的集合$C = \{(x,t) | \|x\| \le t\} \subseteq \boldsymbol{R}^{n+1}$称为范数锥，它也是一个凸锥



例：$C = \{(x,t) \in \boldsymbol{R}^{2+1} | \|x\|_2 \le t\}$

- **证明**:

设$\theta_1 \ge 0$， $\theta_2 \ge 0$，$(x_1, t_1), (x_2, t_2)$属于C，则

$$\|\theta_1 x_1 + \theta_2 x_2\| \le \|\theta_1 x_1\| + \|\theta_2 x_2\| = \theta_1\|x_1\| + \theta_2\|x_2\|$$
$$\le \theta_1 t_1 + \theta_2 t_2$$

既$\theta_1(x_1, t_1) + \theta_2(x_2, t_2) = (\theta_1 x_1 + \theta_2 x_2, \theta_1 t_1 + \theta_2 t_2) \in C$，得证

大 纲

1.仿射与凸集

2.凸锥(锥)

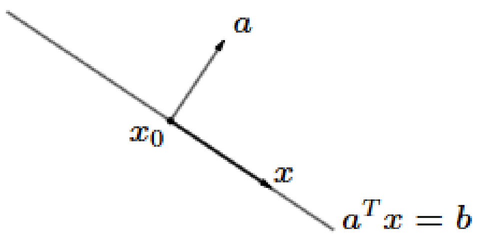
3.半空间

4.球、椭球

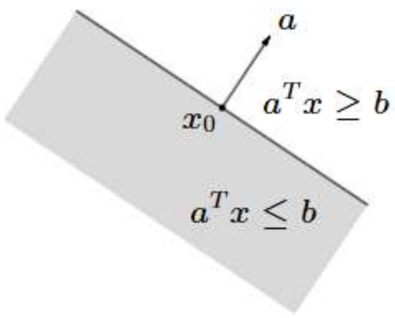
5. 多面体

3 半空间

- **定义8（超平面）**：形式为 $\{x \mid a^T x = b\}$ 的集合，$a \neq 0$



- **定义9（半空间）**：形式为 $\{x \mid a^T x \leq b\}$ 的集合，$a \neq 0$



- □ a是一个常向量（确定了法线的方向）
- □ 超平面是仿射的且是凸的；半空间是凸的

3 半空间

- **例** 8: 证明闭半空间（根据闭集的定义）是凸集

- **证明**:

我们要证明集合 $S=\{x\in\mathbb{R}^n \mid a^Tx\le b\}$ 是凸集

假设 $x_1, x_2\in S$, 根据集合 S 的定义, 我们有:

$$a^Tx_1\le b \text{ 和 } a^Tx_2\le b$$

对于$x_1, x_2\in S$和任意参数$\theta\in[0,1]$，考虑点$z=\theta x_1+(1-\theta)x_2$，有:

$$\begin{aligned} a^Tz &= a^T(\theta x_1+(1-\theta)x_2) \\ &= \theta(a^Tx_1)+(1-\theta)(a^Tx_2) \\ &\le \theta b+(1-\theta)b=b \end{aligned}$$

故 $z\in S$

所以任意闭半空间 $S=\{x\in\mathbb{R}^n \mid a^Tx\le b\}$ 都是凸集

3 半空间

- **例** 9：设 $S_1=\{x\in\mathbb{R}^n \mid a_1^T x\le b_1\}$ 和 $S_2=\{x\in\mathbb{R}^n \mid a_2^T x \le b_2\}$是两个（闭）半空间，证明它们的交集 $C=S_1\cap S_2$是凸集

- **证明**：

我们要证明交集 C 是凸集. 根据凸集的定义，我们需要证明：对于任意两点 $x,y\in C$ 和任意参数 $\theta\in[0,1]$，它们的凸组合 $z=\theta x+(1-\theta)y\in C$

因为 $x,y\in C$，且 $C=S_1\cap S_2$，这意味着对于 $i=1,2$：

$x,y\in S_i$，所以 $a_i^T x\le b_i$ 且 $a_i^T y\le b_i$

现在考虑点 $z=\theta x+(1-\theta)y$：

$$a_i^T z=a_i^T(\theta x+(1-\theta)y)=\theta\left(a_i^T x\right)+(1-\theta)\left(a_i^T y\right)$$
$$\le \theta b_i+(1-\theta)b_i=b_i$$

3 半空间

□ 证明(续):

因此, $a_i^T z \le b_i$, 满足 S_{i} 的条件（$i = 1,2$）

由于 z 同时满足 S_1 和 S_2 的条件, 所以 $z \in S_1 \cap S_2 = C$

即两个半空间的交集是凸集

大 纲

1.仿射与凸集

2.凸锥(锥)

3.半空间

4.球、椭球

5. 多面体

4 球、椭球

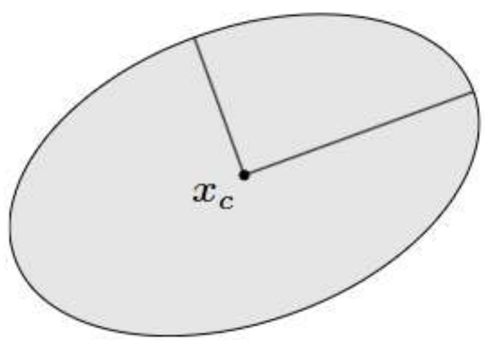
- **定义10（(欧几里得)球）**：以x_c为中心，以r为半径.

$$B(x_c,r) = \{x \mid \| x - x_c \|_2 \le r\} = \{x_c + ru \mid \| u \|_2 \le 1\}$$

- **定义10（椭球）**：形如

$$\{x \mid \|(x - x_c)^T P(x - x_c)\|_2 \le 1\}$$

的集合. 其中 $P \in S_{++}^n$（即 P 是对称正定矩阵，$P = P^T$ 且所有特征值大于零）



- 其他表示形式：$\{x_c + Au \mid \| u \| \le 1\}$，其中$A$为方阵且非奇异

4 球、椭球

- **例** 10：设 $B=\{x\in\mathbb{R}^n \mid \|x\|_2\le r\}$ 是一个欧几里得球，其中 r 是半径，$\|\cdot\|_2$ 表示欧几里得范数，证明 B 是凸集
- 可以推广到范数球

- 证明（任意范数）：

取任意两点 $x,y\in B$ 和任意 $\theta\in[0,1]$. 令 $z=\theta x+(1-\theta)y$，需要证明 $z\in B$，即 $\|z\|_2\le r$

根据三角不等式和范数的齐次性，有：

$$\|z\| = \|\theta x+(1-\theta)y\| \le \theta\|x\|+(1-\theta)\|y\|$$

由于 $x,y\in B$，有 $\|x\|_2\le r$ 和 $\|y\|_2\le r$，因此：

$$\theta\|x\|+(1-\theta)\|y\| \le \theta r+(1-\theta)r=r$$

所以 $\|z\|\le r$，即 $z\in B$，因此，欧几里得球 B 是凸集

大 纲

1.仿射与凸集

2.凸锥(锥)

3.半空间

4.球、椭球

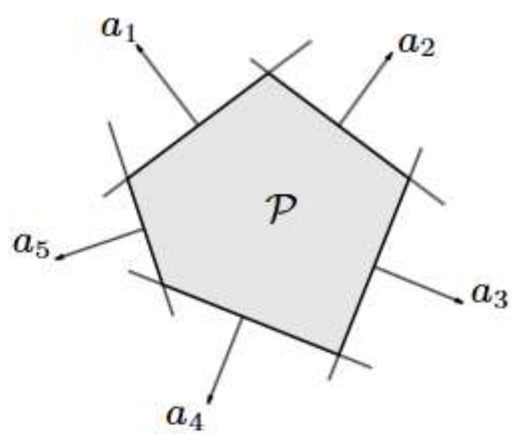
5. 多面体

5 多面体

■ **定义12(多面体)**：有限多线性不等式和等式的解集

$$Ax \preceq b, Cx = d$$

$(A \in \mathbb{R}^{m\times n}$，$C \in \mathbb{R}^{p\times n}$，$\preceq$ 是分量不等式)



□ 多面体是有限个半空间和超平面的交集

5 多面体

- **例** 11:证明多面体 $P = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax \leq b\}$ 是凸集

- 证明:

对于任意两点 $x, y \in P$ 和任意标量 $\theta \in [0,1]$, 它们的凸组合 $z = \theta x + (1-\theta)y \in P$

因为 $x, y \in P$, 根据多面体 P 的定义, 它们满足所有 m 个线性不等式:

$$a_i^T x \leq b_i \text{ 和 } a_i^T y \leq b_i, \text{对于所有 } i = 1, \dots, m$$

所以对于所有 $i = 1, \dots, m$

$$a_i^T z = a_i^T(\theta x + (1-\theta)y) = \theta\left(a_i^T x\right) + (1-\theta)\left(a_i^T y\right)$$
$$\leq \theta b_i + (1-\theta) b_i = b_i$$

故 $z \in P$. 因此, 多面体 P 是凸集

谢 谢 ！