南京大学最优化导论第一次作业题

1. 设 $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x+y+z=0\}$，证明 W 是$\mathbb{R}^3$的线性子空间。

2. 判断向量组$\{(1,2,1),(2,1,3),(3,3,4)\}$在$\mathbb{R}^3$中是否线性相关，并说明理由。

3. 证明：如果$\sigma: V \to V'$是线性映射，那么$\mathrm{Ker}(\sigma)$是V的子空间，$\mathrm{Im}(\sigma)$是V'的子空间。

4. 给定线性映射$T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$，$T(x,y,z) = (x+y, y+z)$，求$\mathrm{Ker}(T)$和$\mathrm{Im}(T)$。

5. 某工厂生产两种产品 A 和 B，产品 A 每件利润 30 元，产品 B 每件利润 50 元，最大化利润。生产约束条件：

- 生产 A 需要 2 小时加工时间，B 需要 4 小时，总加工时间不超过 100 小时
- 生产 A 需要 1 单位原料，B 需要 2 单位原料，总原料不超过 60 单位
- 产品 A 至少生产 5 件

请建立线性规划模型。

6. 某物流公司要在三个城市 A、B、C 之间分配运输任务，最小化运输成本。已知：

- 从 A 到 B 的运输成本为 5 元/单位，从 A 到 C 为 8 元/单位
- 从 B 到 A 为 6 元/单位，从 B 到 C 为 4 元/单位
- 从 C 到 A 为 7 元/单位，从 C 到 B 为 3 元/单位
- 城市 A 需求量 100 单位，B 需求量 150 单位，C 需求量 200 单位
- 城市 A 供应量 120 单位，B 供应量 180 单位，C 供应量 150 单位

建立运输问题的线性规划模型。

7. 两个平行的超平面 $\{x \in \mathbb{R}^n | a^T x = b_1\}$ 和 $\{x \in \mathbb{R}^n | a^T x = b_2\}$ 之间的距离是多少？

8. 证明： 假设 V 和 V' 是线性空间，记所有从 V 到 V' 的线性映射组成集合为 $\mathcal{L}(V,V')$。则 $\mathcal{L}(V,V')$ 也是一个线性空间。其中，对于 $\forall \sigma,\tau \in \mathcal{L}(V,V')$，运算满足以下定义：

$$(\sigma+\tau)(x) = \sigma(x) + \tau(x), \quad \forall x \in V$$

$$(\alpha\sigma)(x) = \alpha\sigma(x), \quad \forall x \in V, \forall \alpha \in F$$

9. 设 $f: X \to Y$ 是从度量空间 X 到度量空间 Y 的连续函数。证明：如果 $A \subseteq X$ 是闭集，则 $f(A)$ 在 Y 中也是闭集。

10. 如果 $S,T \subset V(F)$ 是子空间，证明：$S+T$ 是子空间，其中：$S+T:=\{z|z=x+y, x\in S, y\in T\}$

11. 设 V 是所有定义在 $[0,1]$ 上的连续函数构成的线性空间，$W_1=\{f\in V: f(0)=f(1)\}$，$W_2=\{f\in V: \int_0^1 f(x)dx=0\}$。

(1) 证明 W_1 和 W_2 都是 V 的线性子空间。

(2) 证明 $W_1\cap W_2$ 是 V 的线性子空间。

(3) 构造一个具体的函数 $f\in W_1\cap W_2$ 且 $f\neq 0$。

(4) 判断 $W_1+W_2=V$ 是否成立，并证明你的结论。

12. 设 V 是所有从 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}$ 的连续函数构成的线性空间。定义子集：

- $W_1=\{f\in V: f(-x)=f(x), \forall x\in\mathbb{R}\}$（偶函数）
- $W_2=\{f\in V: f(-x)=-f(x), \forall x\in\mathbb{R}\}$（奇函数）

(1) 证明 W_1 和 W_2 都是 V 的线性子空间。(2) 证明 $W_1\cap W_2=0$。

13. 考虑 $\mathbb{R}^2$ 中的序列 (x_n,y_n)，其中 $x_n=\frac{n}{n+1}$，$y_n=\frac{(-1)^n}{n}$。

(1) 证明该序列在欧几里得度量下收敛，并求其极限。

(2) 定义集合 $S=\{(x_n,y_n): n\in\mathbb{N}\}\cup(1,0)$。证明 $(1,0)$ 是 S 的收敛点。

(3) 判断 S 是否为闭集，并证明你的结论。