第十二讲:二次规划、几何规划问题

典型优化问题

杨 林

大 纲

1. 二次规划

2. 几何规划

大 纲

1. 二次规划

2. 几何规划

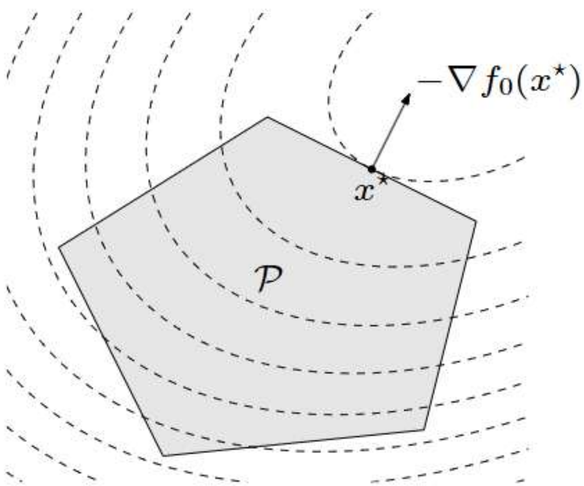
1 二次规划

■ 二次规划(QP)

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & (1/2)x^T p x + q^T x + r \\ \text{约束条件} & Gx \preceq h, \quad\quad Ax = b \end{array}$$

$p \in S_+^n$, 因此目标函数是凸二次函数

在多面体上最小化一个二次函数



1 二次规划

□ 例 1:最小二乘

$$\text{最小化} \qquad \|Ax - b\|_2^2$$

- 具有解析解
- 可以添加线性约束,例如,$l \geq x \geq u$

1 二次规划

□ 例 2 （线性规划问题中的随机成本）

$$
\begin{array}{ll}
\text{最小化} & \mathbf{E}c^T x + \gamma \mathbf{var}(c^T x) = \bar{c}^T x + \gamma x^T \Sigma x \\
\text{约束条件} & Gx \preceq h \\
 & Ax = b
\end{array}
$$

1. c 是具有均值 $\bar{c}$ 和协方差 Σ 的随机向量
2. 因此, $c^T x$ 是具有均值 $\bar{c}^T x$ 和方差 $x^T \Sigma x$ 的随机变量
3. $\gamma > 0$ 是风险规避参数: 控制了预期成本与方差(风险)之间的权衡

大 纲

1.二次规划

2. 几何规划

2 几何规划

- 单项式函数或单项式 $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\mathbf{dom}\, f = \mathbb{R}^n_{++}$,

$$f(x) = c x_1^{a_1} x_2^{a_2} \cdots x_n^{a_n}, c > 0, a_i \in \mathbb{R}$$

- 正项式函数

$$f(x) = \sum_{k=1}^{K} c_k x_1^{a_{1k}} x_2^{a_{2k}} \cdots x_n^{a_{nk}}$$

其中 $c_k > 0$

2 几何规划

■ 几何规划

具有下列形式的优化问题称为几何规划(GP):

$$
\begin{array}{ll}
\text{最小化} & f_0(x) \\
\text{约束条件} & f_i(x) \leq 1, i=1,\cdots,m \\
 & h_i(x)=1, i=1,\cdots,p
\end{array}
$$

其中 $f_0,\cdots,f_m$为正项式, $h_1,\cdots,h_p$ 为单项式, 隐式约束$x \succ 0$

□ 几何规划的拓展:

如果 f 是一个正项式,而 h 为单项式,那么 $f(x) \leq h(x)$ 表示为 $f(x)/h(x) \leq 1$,而等式约束 $h_1(x)=h_2(x)$ 可以表示为 $h_1(x)/h_2(x)=1$

2 几何规划

- **例** 3: 考虑下面的问题:

$$\begin{aligned} \text{最小化} \quad & x/y \\ \text{约束条件} \quad & 2 \le x < 3 \\ & x^2 + 3y/z \le \sqrt{y} \\ & x/y = z^2 \end{aligned}$$

可以转化为标准形式:

$$\begin{aligned} \text{最小化} \quad & xy^{-1} \\ \text{约束条件} \quad & 2x^{-1} \le 1, (1/3)x \le 1 \\ & x^2y^{-1/2} + 3y^{1/2}z^{-1} \le 1 \\ & xy^{-1}z^{-2} = 1 \end{aligned}$$

2 几何规划

凸形式的几何规划

定义 $y_i = \log x_i$, 因此 $x_i = e^{y_i}$

如果 $f(x) = cx_1^{a_1}x_2^{a_2}\cdots x_n^{a_n}$,那么

$$\begin{aligned} f(x) &= f(e^{y_1}, e^{y_2}, \cdots, e^{y_n}) \\ &= c(e^{y_1})^{a_1}\cdot \cdots \cdot (e^{y_n})^{a_{n0}} \\ &= e^{a^T y+b} \end{aligned}$$

其中,$b = \log c$,类似地

正项式 $f(x) = \sum_{k=1}^{K} c_k x_1^{a_{1k}} x_2^{a_{2k}} \cdots x_n^{a_{nk}}$ 可以转化为相似形式:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{K} e^{a_k^T y+b_k}$$

2 几何规划

几何规划可以用新的变量 y 来表示:

$$
\begin{array}{ll}
\text{最小化} & \sum_{k=1}^{K_0} e^{a_{0k}^T y+b_{0k}} \\
\text{约束条件} & \sum_{k=1}^{K_i} e^{a_{ik}^T y+b_{ik}} \leq 1, i=1,\cdots,m \\
 & e^{g_i^T y+h_i}=1, i=1,\cdots,p
\end{array}
$$

采用对数函数对目标函数和约束条件进行转换:

$$
\begin{array}{ll}
\text{最小化} & \tilde{f}_0(y)=\log(\sum_{k=1}^{K_0} e^{a_{0k}^T y+b_{0k}}) \\
\text{约束条件} & \tilde{f}_i(y)=\log(\sum_{k=1}^{K_i} e^{a_{ik}^T y+b_{ik}}) \leq 0, i=1,\cdots,m \\
 & \tilde{h}_i(y)=g_i^T y+h_i=0, i=1,\cdots,p
\end{array}
$$

2 几何规划

- **例** 4: 解释如何将一般的GP重构为一个等价的GP，使其(目标和约束中的)每一个正项式含有至多两个单项式项

  提示:将(单项式的)和表示为单项式两两相加的和

2 几何规划

■ 例 4 的证明:

对于项数 $t > 2$ 的正项式不等式

$$f(x) = \sum_{i=1}^{t} g_i(x) \leq 1,$$

其中 g_i 是单项式。引入新的变量 $s_1, \ldots, s_{t-2}$，并将多项式不等式表示为一组多项式不等式

$$g_1(x) + g_2(x) \leq s_1$$

$$g_3(x) + s_1 \leq s_2$$

$$\vdots$$

$$g_t(x) + s_{t-2} \leq 1$$

2 几何规划

■ **例** 4 **的证明(续):**

通过除以右侧，这些变为每个都有两项的多项式不等式

显然，s_i 是 $\sum_{j=1}^{i+1} g_j(x)$ 的上界，因此最后的不等式 $g_t(x) + s_{t-2} \leq 1$ 意味着原始的多项式不等式成立

反过来，我们总是可以取 $s_i = \sum_{j=1}^{i+1} g_j(x)$，所以如果原始多项式不等式成立，那么存在 $s_1, \ldots, s_{t-2}$ 使上面的两项多项式不等式成立

对于目标函数，替换为 s_{t-1}；对于约束函数则用上述约束序列替代

谢 谢 ！