第十四讲：对偶最优性与KKT条件

凸优化问题的最优解性质

杨 林

大 纲

1. 对偶最优条件

2. KKT条件的应用

大 纲

1. 对偶最优条件

2. KKT条件的应用

1 对偶最优条件

- **互补松弛性：** 假设强对偶性成立，x^* 是原始最优解，(λ^*, ν^*) 是对偶最优解

$$
\begin{aligned}
f_0(x^*) = g(\lambda^*, \nu^*) &= \inf\left(f_0(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* f_i(x) + \sum_{i=1}^{p} \nu_i^* h_i(x) \right) \\
&\le f_0(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* f_i(x^*) + \sum_{i=1}^{p} \nu_i^* h_i(x^*) \quad (\text{消去inf}) \\
&\le f_0(x^*)
\end{aligned}
$$

- 互补松弛性: $\lambda_i^* f_i(x^*) = 0$ 对于 $i = 1, \cdots, m$

$$
\lambda_i^* > 0 \Longrightarrow f_i(x^*) = 0, \qquad f_i(x^*) < 0 \Longrightarrow \lambda_i^* = 0
$$

1 对偶最优条件

Karush-Kuhn-Tucker(KKT)条件

以下四个条件称为KKT条件(也可以推广于f_i, h_i不可微的情况)

1. 原问题可行性条件：$f_i(x) \le 0, i = 1, \cdots, m, h_i(x) = 0, i = 1, \cdots, p$
2. 对偶问题可行性条件: $\lambda \succeq 0$
3. 互补松弛性条件: $\lambda_i f_i(x) = 0, \quad i = 1, \cdots, m$
4. 一阶最优条件：拉格朗日函数关于 x 的梯度为0:

$$\nabla f_0(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla f_i(x) + \sum_{i=1}^{p} \nu_i \nabla h_i(x) = 0$$

如果强对偶成立，且 x, λ, ν 是最优的, 那么它们必须满足 KKT 条件

1 对偶最优条件

- **凸问题的(充分）KKT 条件（没有强对偶假设）：**

若 $\tilde{x}, \tilde{\lambda}, \tilde{\mu}$ 满足凸问题的 KKT 条件, 则它们是最优的:

1. 从互补松弛性和原问题可行性: $f_0(\tilde{x}) = L(\tilde{x}, \tilde{\lambda}, \tilde{\mu})$
2. 从第 4 个条件(以及凸性) : $g(\tilde{\lambda}, \tilde{\mu}) = L(\tilde{x}, \tilde{\lambda}, \tilde{\mu})$

因此 $f_0(\tilde{x}) = g(\tilde{\lambda}, \tilde{\mu})$

- 反过来，如果满足slater条件，x 是最优的当且仅当存在 λ, ν 满足 KKT 条件（slater条件意味着强对偶性, 并且对偶最优解被达到）
- 本质上, KKT 条件推广了无约束问题的最优条件 $\nabla f_0(x) = 0$

大 纲

1. 对偶最优条件

2. KKT条件的应用

2 KKT条件的应用

- **例** 1

最小化 $\quad -\sum_{i=1}^{n}\log(\alpha_i + x_i)$

约束条件 $\quad x \succeq 0,\ \mathbf{1}^T x = 1$

- **解:** 写出 KKT 条件

$$x^* \succeq 0, \mathbf{1}^T x^* = 1, \lambda^* \succeq 0, \lambda_i^* x_i^* = 0, i = 1, \cdots, n$$

$$-1/(\alpha_i + x_i^*) - \lambda_i^* + \nu^* = 0, i = 1, \cdots, n$$

重写 KKT 条件:

$$x^* \succeq 0, \mathbf{1}^T x^* = 1,$$

$$x_i^*(\nu^* - 1/(\alpha_i + x_i^*)) = 0, \qquad i = 1, \cdots, n$$

$$\nu^* \geq 1/(\alpha_i + x_i^*), \qquad i = 1, \cdots, n$$

2 KKT条件的应用

■ **解(续):**

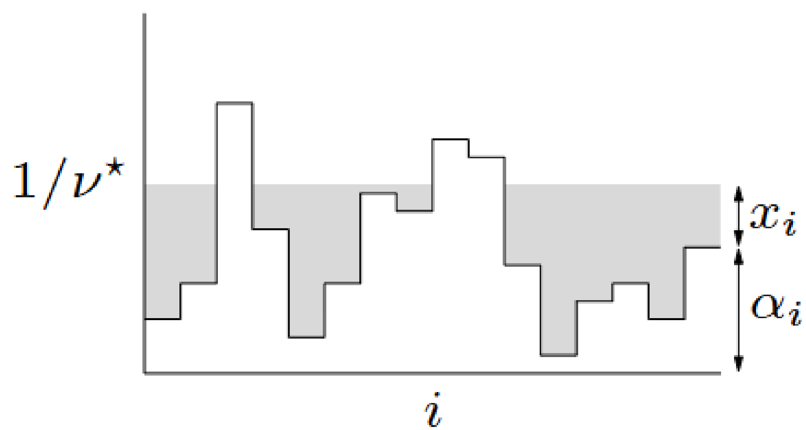
(1) 若 $\nu^* < 1/\alpha_i$，那么 $x_i^* > 0$，同时 $x_i^* = 1/\nu^* - \alpha_i$；

(2) 若 $\nu^* \geq 1/\alpha_i$，那么 $x_i^* \leq 0$, $\text{i.e.}, x_i^* = 0$

结果，$x_i^* = \max\{0, 1/\nu^* - \alpha_i\}$

结合$\mathbf{1}^T x^* = 1$确定 ν的最优值，即

$$\sum_{i=1}^{n} \max\{0, 1/\nu^* - \alpha_i\} = 1$$



2 KKT条件的应用

- **例** 2:使用 KKT 条件找到下列集合中最接近 (0, 0) 的点.

$$M=\{x\in\mathbb{R}^2:\ x_1+x_2\geq 4, 2x_1+x_2\geq 5\}$$

- **解:** 将其转化为一个优化问题:

最小化 $\quad x_1^2+x_2^2$

约束条件 $\quad -x_1-x_2+4\leq 0$

$\qquad\qquad -2x_1-x_2+5\leq 0$

拉格朗日函数是

$$L(x_1,x_2,\lambda_1,\lambda_2)$$
$$=x_1^2+x_2^2+\lambda_1(-x_1-x_2+4)+\lambda_2(-2x_1-x_2+5),$$
$$\lambda_1,\lambda_2\ \geq 0$$

2 KKT条件的应用

■ **解(续):** KKT 条件是:

I. 可行性

II. 互补松弛性

$$\lambda_1(-x_1 - x_2 + 4) = 0, \lambda_1 \geq 0$$

$$\lambda_2(-2x_1 - x_2 + 5) = 0, \lambda_2 \geq 0$$

III. 最优性

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 2x_1 - \lambda_1 - 2\lambda_2 = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 2x_2 - \lambda_1 - \lambda_2 = 0$$

2 KKT条件的应用

■ **解(续):**

情况(1): $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 0$. 从 III 得 $x_1 = 0,\ \ x_2 = 0,$ 不可行

情况(2): $x_1 + x_2 = 4,\ \ \lambda_2 = 0$. 结合 III 我们可以得到

$$2x_1 - \lambda_1 = 0, 2x_2 - \lambda_1 = 0, x_1 + x_2 = 4$$

这个给出 $x_1 = 2, x_2 = 2, \lambda_1 = 4 > 0$. 一个 KKT 点 $(2, 2, 4, 0)$!

情况(3): $\lambda_1 = 0, 2x_1 + x_2 = 5$

$$2x_1 - 2\lambda_2 = 0, \qquad 2x_2 - \lambda_2 = 0, \qquad 2x_1 + x_2 = 5$$

我们有 $x_1 = 2, x_2 = 1, \lambda_2 = 2$ (不可行)

情况(4): $x_1 + x_2 = 4,\ \ 2x_1 + x_2 = 5$

我们有 $x_1 = 1, x_2 = 3$ 以及 $\lambda_1 + 2\lambda_2 = 2, \lambda_1 + \lambda_2 = 6$

这会得到 $\lambda_1 = 10, \lambda_2 = -4 < 0$ (不满足对偶可行性)

2 KKT条件的应用

- **例** 3: **下面是一个强对偶性成立的非凸优化问题. 如何找到最优解, 唯一吗?**

$$\begin{array}{ll} \text{最小化}_x & -2(x_1-2)^2 - x_2^2 \\ \text{约束条件} & x_1^2 + x_2^2 \le 25 \\ & x_1 \ge 0 \end{array}$$

- **解**: 拉格朗日函数是

$$L(x_1, x_2, \mu_1, \mu_2) = -2(x_1-2)^2 - x_2^2 + \lambda_1(x_1^2 + x_2^2 - 25) - \lambda_2 x_1$$

$$\text{KKT 条件是:} \begin{cases} -4(x_1-2) + 2\lambda_1 x_1 - \lambda_2 = 0 \\ -2x_2 + 2\lambda_1 x_2 = 0 \\ x_1^2 + x_2^2 \le 25 \\ x_1 \ge 0 \\ \lambda_1, \lambda_2 \ge 0 \\ \lambda_1 = 0 \text{ 或 } x_1^2 + x_2^2 = 25 \\ \lambda_2 = 0 \text{ 或 } x_1 = 0 \end{cases}$$

2 KKT条件的应用

■ **解(续):**

(1) $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. 我们得到 $x_1 = 2$ 和 $x_2 = 0$, 满足原始约束. 因此, $(2,\ 0)$ 和 $(0,\ 0)$ 是可能的解, 其值等于 0

(2) $\lambda_1 = 0$ 和 $\lambda_2 > 0$. 我们得到 $x_1 = x_2 = 0$ 和 $\lambda_2 = 8 > 0$. 值是 -8

(3) $\lambda_2 = 0$ 和 $\lambda_1 > 0$, 我们得到

$$\begin{cases} -4(x_1 - 2) + 2\lambda_1 x_1 = 0 \\ -2x_2 + 2\lambda_1 x_2 = 0 \\ x_1 \geq 0 \\ \lambda_1 > 0 \\ x_1^2 + x_2^2 = 25 \end{cases}$$

2 KKT条件的应用

- **解(续):**

如果 $x_2 = 0, x_1 = 5$, 且 $\lambda_1 = 6/5 > 0$ 和$\lambda_2 = 0$, 得到值为 -18. 如果 $x_2 \neq 0, \lambda_1 = 1$, 我们有 $x_1 = 4$ 和 $x_2 = \pm 3$, 且 $\lambda_2 = 0$, 得到值为 -17.

(4) $\lambda_2 > 0$ 且 $\lambda_1 > 0$. 我们得到 $x_1 = 0$ 和 $x_2 = \pm 5$, $\lambda_1 = 1$ 和 $\lambda_2 = 8$, 得到一个值为 -33, 这是最小值.

2 KKT条件的应用

- **例** 4: **已知下面是一个强对偶性成立的非凸优化问题。分析最优解（充分或必要）条件，以及如何寻找其最优解。可以存在多个最优解吗?**

$$
\begin{array}{ll}
\text{最大化}_x & -3x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^3 + 2(x_1 + x_2 + x_3) \\
\text{约束条件} & x_1^2 + x_2^2 + x_3^3 = 1
\end{array}
$$

- **解:** 其 KKT 条件可以写为

$$
\begin{cases}
x_1^2 + x_2^2 + x_3^3 = 1 \\
(-3 + \nu)x_1 + 1 = 0 \\
(1 + \nu)x_2 + 1 = 0 \\
(2 + \nu)x_3 + 1 = 0
\end{cases}
$$

通过观察上述的 KKT 条件容易得到 $\nu \neq -2, \nu \neq -1$,以及 $\nu \neq 3$. 我们因此可以消去 x，得到下面关于 ν 的等式

2 KKT条件的应用

■ **解(续):** 其 KKT 条件可以写为

$$\frac{1}{(-3+\nu)^2}+\frac{1}{(1+\nu)^2}+\frac{1}{(2+\nu)^2}=1$$

上述公式包含四个解. 分别是 $-3.15, 0.22, 1.89, 4.04$. 对应的 x 的解为:

$$x=(0.16, 0.47, -0.87),$$
$$x=(0.36, -0.82, 0.45),$$
$$x=(0.90, -0.35, 0.26),$$
$$x=(-0.97, -0.20, 0.17)$$

将上述解代入 $f_0(x)$ 可得四个值, 分别为 $1.17, 0.67, -0.56, -4.70$. 比较大小即可得到其最优解

2 KKT条件的应用

□ 例 5: 求解以下优化问题

$$
\begin{aligned}
&\text{最大化}_{x,y\in\mathbb{R}^2} && (x-1)^2+(y-2)^2 \\
&\text{约束条件} && x \le y \\
& && x+2y \le 2
\end{aligned}
$$

■ **解:** 目标函数表示点 (x,y) 到 $(1,2)$ 的欧氏距离平方. 需在可行域内找到最近点. 无约束最小值点 $(1,2)$ 不满足 $x+2y\le 2$（因 $1+4=5>2$）, 故最优解必在约束边界

在约束 $x + 2y = 2$ 上使用拉格朗日乘数法:

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial L}{\partial x} = 2(x-1)+\nu = 0 \\
\dfrac{\partial L}{\partial y} = 2(y-2)+2\nu = 0 \\
x+2y = 2
\end{cases}
$$

2 KKT条件的应用

- **解(续):**解得：$\nu=\frac{6}{5}$， $x=\frac{2}{5}$,$y=\frac{4}{5}$, 验证得 $x\le y$ 成立,目标值为1.8

在约束 $x=y$ 上，极值点为 $(\frac{2}{3},\frac{2}{3})$，但目标值$\frac{17}{9}\approx 1.888$ 大于$\frac{9}{5}=1.8$

目标值比较：

$$f\left(\frac{2}{5},\frac{4}{5}\right)=\left(\frac{2}{5}-1\right)^2+\left(\frac{4}{5}-2\right)^2=\frac{9}{5}$$

$$f(\frac{2}{3},\frac{2}{3})=\frac{17}{9}$$

所以最优值为: $\left(\frac{2}{5},\frac{4}{5}\right)$

谢 谢 ！