

南京大学最优化导论第四次小测

姓名：

学号：

1. 定义函数 $f: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{R}$:

$$f(x) = \sum_{i=1}^n (|\operatorname{Re} x_i| + |\operatorname{Im} x_i|),$$

问： f 是范数吗？试证明。

2. 判断函数

$$f(x, y) = \sqrt{e^x + e^{-y}}$$

是否为凸函数，并说明理由。

3. 证明集合 S 的凸包是所有包含 S 的凸集的交。

4. 验证点 $(2,4)$ 在如下优化问题中是否满足最优性条件：

$$\begin{array}{ll} \min & (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 6)^2 \\ \text{s.t.} & x_1^2 \leq x_2, \\ & x_2 \leq 4. \end{array}$$

5. 令 C 为一个在 \mathbb{R}^n 上的非空闭合凸锥, 令 $x \in \mathbb{R}^n$ 。试证明当且仅当

$$\hat{x} \in C, \quad (\hat{x} - x)^\top \hat{x} = 0, \quad x - \hat{x} \in C^*$$

时, \hat{x} 是 x 在 C 上的最近点投影。