

第五讲：凸性与保凸运算

凸集的其他判断方法

杨 林

大 纲

1.保持凸性的运算

2.分离与支撑超平面

大 纲

1.保持凸性的运算

2.分离与支撑超平面

1 保持凸性的运算

■ 判断集合 C 凸性的实用方法:

1. 应用定义

$$x_1, x_2 \in C, \theta \in [0, 1] \Rightarrow \theta x_1 + (1 - \theta)x_2 \in C$$

2. 证明 C 是通过保持凸性的运算从简单凸集(超平面、半空间、范球等)得到的

- 交集 (可推广到无穷多集合)
- 仿射函数
- 透视函数 (Perspective function)
- 线性分式

1 保持凸性的运算

■ 交集:

凸集(任意数量)的交集是凸集

□ 例 1: 半正定锥 $K = \mathcal{S}_+^n = \{X \in \mathcal{S}^n \mid X \succeq 0\}$ 可以表示为

$$\bigcap_{z \neq 0} \{X \in \mathcal{S}^n \mid z^T X z \geq 0\}$$

对于任意 $z \neq 0$, $z^T X z$ 是关于 X 的(不恒等于零的)线性函数, 因此, 集合

$$\{X \in \mathcal{S}^n \mid z^T X z \geq 0\}$$

实际上就是 \mathcal{S}^n 的半空间. 由此可见, 半正定锥是无穷个闭半空间的交集, 因此是凸的

1 保持凸性的运算

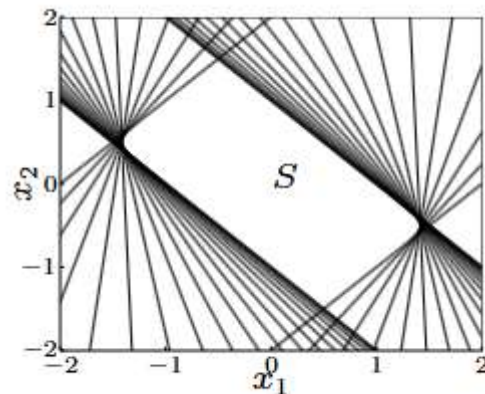
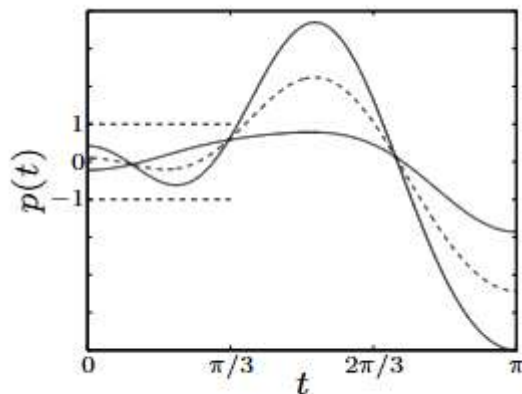
□ 例 2:

$$S = \{x \in \mathbb{R}^m \mid |p(t)| \leq 1, |t| \leq \pi/3\}$$

其中 $p(t) = \sum_{k=1}^m x_k \cos kt$. 集合 S 可以表示为无穷个平板的交集: $S = \bigcap_{|t| \leq \pi/3} S_t$, 其中,

$$S_t = \{x \mid -1 \leq (\cos t, \dots, \cos mt)^T x \leq 1\}$$

因此, S 是凸的. 对于 $m = 2$, 它的定义和集合可见下图



1 保持凸性的运算

■ **仿射函数**: 一个由线性函数加上一个常数项构成的函数

假设 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ 是仿射的 (即 $f(x) = Ax + b, A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m$), 则:

1. 仿射变换下凸集的像是凸集

$S \subseteq \mathbb{R}^n$ 是凸的 $\Rightarrow f(S) = \{f(x) \mid x \in S\}$ 是凸的

2. 仿射变换下凸集的原像是凸集

$C \subseteq \mathbb{R}^m$ 是凸的 $\Rightarrow f^{-1}(C) = \{f^{-1}(x) \mid x \in C\}$ 是凸的

1 保持凸性的运算

■ 部分一证明:

设 $S \subseteq \mathbb{R}^n$ 是一个凸集, 定义仿射函数 $f(x) = Ax + b$, 其中 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$. 要证明 $f(S)$ 是凸集, 需要证明对于任意两点 $y_1, y_2 \in f(S)$ 和任意 $\theta \in [0, 1]$, 它们的凸组合 $\theta y_1 + (1 - \theta)y_2$ 也属于 $f(S)$.

由于 $y_1, y_2 \in f(S)$, 存在 $x_1, x_2 \in S$ 使得 $y_1 = Ax_1 + b$ 和 $y_2 = Ax_2 + b$. 计算凸组合:

$$\begin{aligned}\theta y_1 + (1 - \theta)y_2 &= \theta(Ax_1 + b) + (1 - \theta)(Ax_2 + b) \\ &= A(\theta x_1 + (1 - \theta)x_2) + b.\end{aligned}$$

因为 S 是凸集, 所以 $\theta x_1 + (1 - \theta)x_2 \in S$.

因此, $A(\theta x_1 + (1 - \theta)x_2) + b \in f(S)$, 即 $\theta y_1 + (1 - \theta)y_2 \in f(S)$.

1 保持凸性的运算

□ 例 3:

1. 线性矩阵不等式的解集 $\{x \mid x_1 A_1 + x_2 A_2 + \cdots + x_m A_m \leq B\}$
(其中 $A_i, B \in S^p$)
2. 双曲锥 $\{x \mid x^T P x \leq (c^T x)^2, c^T x \geq 0\}$ (其中 $P \in S_+^n$)

■ 例 3.1 的证明:

定义 $f(x) := B - A(x) = B - (x_1 A_1 + x_2 A_2 + \cdots + x_m A_m)$,
 $f(x)$ 是仿射函数.

即证像集 $\{f(x) \mid x \in R, f(x) \geq 0\}$ 是凸的

由仿射函数的性质知, 仿射变化下凸集的像是凸的
故线性矩阵不等式的解集是凸的

1 保持凸性的运算

□ 例 3:

1. 线性矩阵不等式的解集 $\{x \mid x_1 A_1 + x_2 A_2 + \cdots + x_m A_m \leq B\}$
(其中 $A_i, B \in S^p$)
2. 双曲锥 $\{x \mid x^T P x \leq (c^T x)^2, c^T x \geq 0\}$ (其中 $P \in S_+^n$)

■ 例 3.2 的证明:

上述集合是通过仿射函数 $f(x) = (P^{1/2}x, c^T x)$ 从 $\{(z, t) \mid z^T z \leq t^2, t \geq 0\}$ (凸锥) 的逆像得到的

由仿射函数的性质知, 仿射变化下凸集的原像是凸的
故线性矩阵不等式的解集是凸的

1 保持凸性的运算

■ 透视函数 $P: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$:

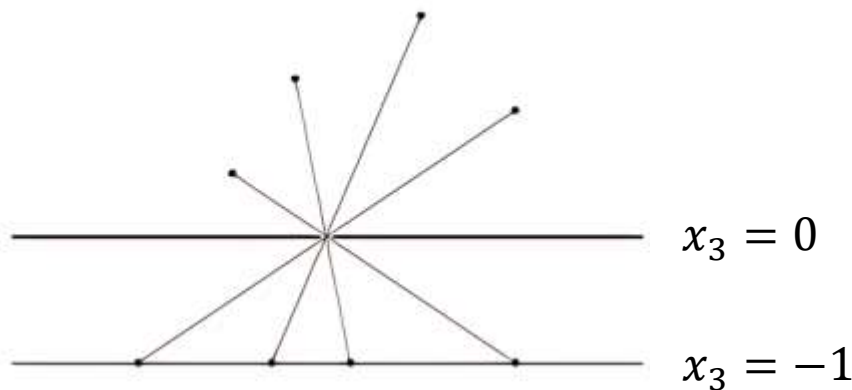
$$P(x, t) = \frac{x}{t}, \quad \text{dom } P = \{(x, t) \mid t > 0\}$$

$(x, t) = (x_1, \dots, x_n, t) \in \mathbb{R}^{n+1}$, 透视变换下凸集的像和原像是凸的(“通过小孔观察一个凸的物体, 可以得到凸的象”)

下面, 我们用小孔成像来解释透视函数

1 保持凸性的运算

R. K. (\mathbb{R}^3 中的) 小孔照相机由一个不透明的水平面 $x_3 = 0$ 和一个在原点的小孔组成, 光线通过这个小孔在水平面 $x_3 = -1$ 呈现处一个水平图像. 在相机上方 $x(x_3 > 0)$ 处的一个物体, 在相平面的点 $-(x_1/x_3, x_2/x_3, 1)$ 处形成一个图像. 忽略象点的最后一维分量 (因为它恒等于-1), x 处的点的象在平面上呈现于 $y = -(x_1/x_3, x_2/x_3) = -P(x)$ 处



加粗水平直线表示 \mathbb{R}^3 中的平面 $x_3 = 0$, 除了在原点处有一个小孔外, 它是不透光的. 平面之上的物体或者光源出现在较细水平直线所示的象平面 $x_3 = -1$ 上. 源于向其象位置的映射对应于透视函数

1 保持凸性的运算

■ **线性分式函数** $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$:

$$f(x) = \frac{Ax + b}{c^T x + d}, \quad \mathbf{dom} f = \{x \mid c^T x + d > 0\}$$

线性分数函数下凸集的像和逆像是凸的

这一结论可由仿射函数和透视函数复合得到

1 保持凸性的运算

□ 例 4: 条件概率. 设 u 和 v 分别是在 $\{1, \dots, n\}$ 和 $\{1, \dots, m\}$ 中取值的随机变量, 并且 p_{ij} 表示 $\mathbf{prob}(u = i, v = j)$. 那么条件概率 $f_{ij} = \mathbf{prob}(u = i \mid v = j)$ 由下式给出

$$f_{ij} = \frac{p_{ij}}{\sum_{k=1}^n p_{kj}}$$

因此, f 可以通过一个线性分式映射从 p 得到

可以知道, 如果 C 是一个关于 (u, v) 联合密度的凸集, 那么相应的 u 的条件密度 (给定 v) 的集合也是凸集

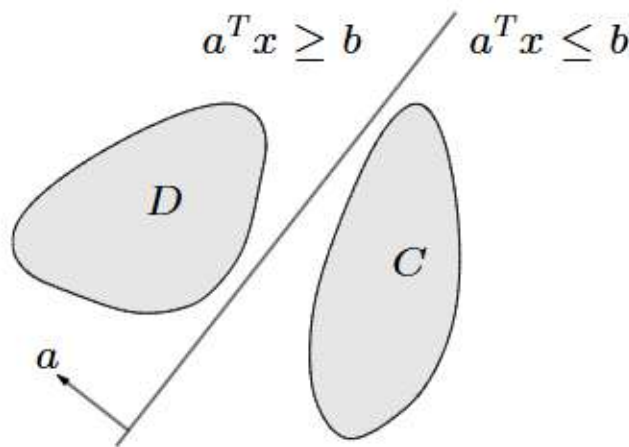
大 纲

1.保持凸性的运算

2.分离与支撑超平面

2 分离与支撑超平面

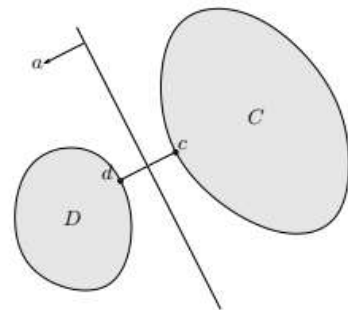
- **定理1 (分离超平面定理):** 如果 C 和 D 是互不相交的凸集 (交集为空), 那么存在 $a \neq 0, b$ 使得对于 $x \in C, a^T x \leq b$; 对于 $x \in D, a^T x \geq b$



超平面 $\{x \mid a^T x = b\}$ 将 C 和 D 分离

如何证明? (以具有正距离的两个凸集为例)

2 分离与支撑超平面



■ 证明:

我们假设 C 和 D 的距离为正, 这里定义 (欧几里得) 距离为

$$\mathbf{dist}(C, D) = \inf\{\|u - v\|_2 \mid u \in C, v \in D\}$$

并且假设存在 $c \in C, d \in D$ 达到这个最小距离, 即

$$\mathbf{dist}(C, D) = \|c - d\|_2$$

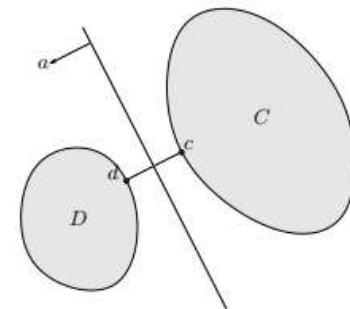
定义 $a = d - c$, $b = \frac{\|d\|_2^2 - \|c\|_2^2}{2}$. 我们希望证明 $f(x) = a^T x - b = (d - c)^T(x - (1/2)(d + c))$ 在 C 中非正且在 D 中非负

反证: 假设存在点 $u \in D$, 并且 $f(u) < 0$, 那么

$$\begin{aligned} f(u) &= (d - c)^T(u - d + (1/2)(d - c)) \\ &= (d - c)^T(u - d) + (1/2)\|d - c\|_2^2 \end{aligned}$$

这意味着 $(d - c)^T(u - d) < 0$. 于是, 我们观察到

2 分离与支撑超平面



■ 证明:

$$\begin{aligned} & \left. \frac{d}{dt} \|d + t(u - d) - c\|_2^2 \right|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt} [t^2(u - d)^T(u - d) + t(u - d)^T(d - c) \\ & \quad + t(d - c)^T(u - d) + (d - c)^T(d - c)] \Big|_{t=0} \\ &= 2(d - c)^T(u - d) < 0 \end{aligned}$$

因此, 对于足够小的 $t > 0$ 以及 $t \leq 1$, 我们有

$$\|d + t(u - d) - c\|_2 \leq \|d - c\|_2$$

即, 点 $d + (u - d)$ 比 d 更靠近 c , 矛盾.

故 $f(x)$ 在 D 中非负

同理可证: $f(x)$ 在 C 中非正

2 分离与支撑超平面

■ 另一个证明:

同样假设存在 $c \in C, d \in D$ 达到这个最小(欧式)距离

$$\text{dist}(C, D) = \|c - d\|_2$$

反证: 若对 $\forall f(x)$ 在 D 中不恒为非负的, 那么线段 cd 的垂直平分线必然与 D 交于不同于 d 的另外一点, 记为 d'

在三角形 cdd' 中, 从顶点 c 向线段 dd' 做垂线, 记垂足为 h

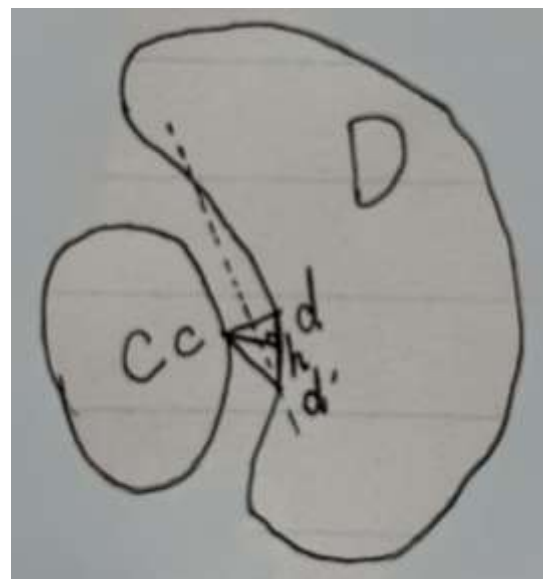
因为 $\angle cd'd$ 小于 60° , h 位于线段 dd' 上

由于 $d \in D, d' \in D$, 所以 $dd' \subseteq D, h \in D$

由点到直线的距离关系知 $|cd| \geq |ch|$, 即:

$$\|c - d\|_2 \geq \|c - h\|_2$$

与假设矛盾证毕

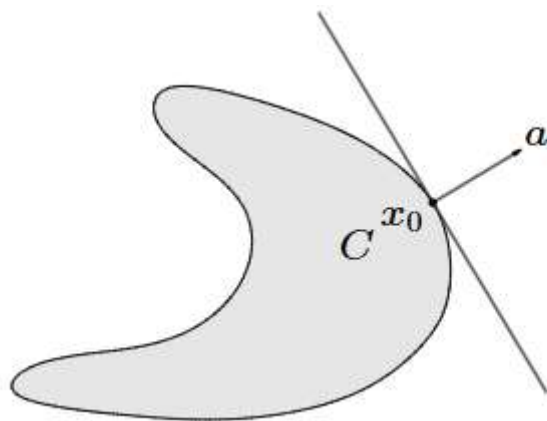


2 分离与支撑超平面

支撑超平面到集合 C 在边界点 x_0 :

$$\{x \mid a^T x = a^T x_0\}$$

其中 $a \neq 0$, 且对于所有 $x \in C$ 均成立 $a^T x \leq a^T x_0$ 或者 $a^T x \geq a^T x_0$



- **定理2(支撑超平面定理):** 如果 C 是凸的, 那么在 C 的每个边界点都存在一个支撑超平面 (一个超平面将 $\{x_0\}$ 和 $\text{int } C$ 分离)

2 分离与支撑超平面

□ 例 5:

设 $K \subseteq \mathbb{R}^n, K \neq \emptyset$. 证明 K 是一个闭凸集当且仅当它是包含 K 的所有闭半空间的交集. (闭集合: 如果一个集合包含它所有的边界点, 那么这个集合叫做闭集. 另一种说法, 对极限运算是封闭的, 包含了所有的极限点)

2 分离与支撑超平面

■ 例 5 的证明:

充分性证明: 若 K 是包含 K 的所有闭半空间的交集. 由交集是保凸运算, K 凸. 又 K 是闭半空间交集, 故 K 闭凸集

必要性证明: 若 K 是一个闭凸集, 对于闭半空间 A , 去证

$$K = \bigcap_{K \subseteq A, A \text{ 是闭半空间}} A \quad (\text{等式右边下记为 } \cap A)$$

任取 $x \in K$, 由 $K \subseteq A$ 知 $x \in \cap A$

任取 $x \in \cap A$, 若 $x \notin K$ 可知存在一个半空间 A_0 包含 K (单点集与集合的分离超平面定理), 但 $x \notin A_0$. 与 $x \in \cap A$ 即对任意 A_0 ($K \subseteq A_0$, A_0 是闭半空间), $x \in A_0$ 矛盾

则 $K = \cap A$

综合两方面得证

谢谢！