

第三讲：线性空间与集合 导论

一种定义集合的新方法

杨 林

大 纲

1. 线性空间

2. 开集与闭集

大 纲

1. 线性空间

2. 开集与闭集

1 线性空间

定义具有闭合运算的集合...

■ **定义1 (线性空间)**: 对于集合 V (例如 \mathbb{R}^n) 以及域 F (例如 \mathbb{R}), 定义 V 上的加法 (记作 $V(F)$)

$$\forall x, y \in V \Rightarrow x + y \in V,$$

以及标量乘法 (数乘)

$$\forall x \in V, \forall \alpha \in F \Rightarrow \alpha x \in V,$$

此外, 满足 (在实数集上可以忽略、本课程只作为了解):

- | | |
|--|---------|
| □ $x + y = y + x$ (加法交换律) | □ 加法结合律 |
| □ $1x = x$ (数乘单位元) | □ 零元存在 |
| □ $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$ (分配律) | □ 负元存在 |
| □ $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$ (分配律) | |
| □ $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$ (数乘结合律) | |

1 线性空间

□ 例 1:

1. 自然数集合
2. 整数集合
3. 实的 n 重有序数组集合是实数域上的线性空间

1 线性空间

□ 例 1:

1. 自然数集合
2. 整数集合
3. 实的 n 重有序数组集合是实数域上的线性空间

■ 证明:

验证对于任意 n 重有序数组 x, y 满足:

□ $x + y = y + x$ (加法交换律)

□ 加法结合律

□ $1x = x$ (数乘单位元)

□ 零元存在

□ $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$ (分配律)

□ 负元存在

□ $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$ (分配律)

□ $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$ (数乘结合律)

最后, 验证满足数乘和加法的封闭性

1 线性空间

□ 例 1:

1. 自然数集合
2. 整数集合
3. 实的 n 重有序数组集合是实数域上的线性空间
4. 全体 $m \times n$ 阶实矩阵的集合 $\mathbb{R}^{m \times n}$ 按通常的矩阵加法以及实数与矩阵的乘法构成实数域上的线性空间

1 线性空间

□ 例 2:

1. 区间 $[a, b]$ 上的连续实函数集合 $C[a, b]$, 按函数普通加法与数乘构成实数域上的线性空间

■ 证明:

- (1) 加法交换律: $(f + g)(x) = (g + f)(x)$, 所以 $f + g = g + f$.
- (2) 加法结合律: $(f + g) + h = f + (g + h)$.
- (3) 加法零元: $(f + \mathbf{0})(x) = f(x) + \mathbf{0}(x) = f(x) + \mathbf{0} = f(x)$, 所以 $f + \mathbf{0} = f$.
- (4) 加法逆元: 定义 $-f$ 为 $(-f)(x) = -f(x)$, 由于 f 连续, $-f$ 也连续, 即 $-f \in C[a, b]$. $(f + (-f))(x) = 0 = \mathbf{0}(x)$, 所以 $f + (-f) = \mathbf{0}$.
- (5) 数乘与标量的结合律: $(k(lf))(x) = (kl) \cdot f(x) = ((kl)f)(x)$, 所以 $k(lf) = (kl)f$.

1 线性空间

□ 例 2:

1. 区间 $[a, b]$ 上的连续实函数集合 $C[a, b]$, 按函数普通加法与数乘构成实数域上的线性空间

■ 证明:

(6) 数乘单位元: $(1 \cdot f)(x) = 1 \cdot f(x) = f(x)$, 所以 $1 \cdot f = f$.

(7) 数乘对函数加法的分配律: $(k(f + g))(x) = (kf)(x) + (kg)(x) = (kf + kg)(x)$, 所以 $k(f + g) = kf + kg$.

(8) 数乘对标量加法的分配律: $((k + l)f)(x) = (k + l) \cdot f(x) = (kf + lf)(x)$, 所以 $(k + l)f = kf + lf$.

最后, 显然满足加法和数乘的封闭性. 如果 f 和 g 是 $C[a, b]$ 上的连续函数, $f + g \in C[a, b], kf \in C[a, b]$

1 线性空间

■ **定义2 (线性子空间)**: 如果线性空间 $V(F)$ 的一个子集是线性空间, 那么它是 $V(F)$ 的线性子空间.

■ **定理1**: $W \neq \emptyset$ 且 $W \subset V$. W 是 $V(F)$ 的子空间当且仅当

$$\begin{aligned}\forall x, y \in W &\Rightarrow x + y \in W, \\ \forall x \in W, \forall \alpha \in F &\Rightarrow \alpha x \in W.\end{aligned}$$

或者等价地

$$\forall x, y \in W, \forall \alpha, \beta \in F \Rightarrow \alpha x + \beta y \in W$$

(仅再满足加法和数乘下的封闭性)

■ **定理2**: $S, T \subset V(F)$ 是子空间, 则 $S \cap T$ 是子空间, $S \cup T$ 通常不是子空间, $S + T$ 是子空间

$$S + T := \{z | z = x + y, x \in S, y \in T\}$$

(仅再满足加法和数乘下的封闭性)

1 线性空间

□ 线性空间在**线性组合**下是封闭的

□ 线性空间中的元素形如:

$$x = \sum_{i=1}^m \alpha_i x_i, \alpha_i \in F, i = 1, \dots, m$$

■ **定义3 (线性相关)**: 总是存在一组不全为 0 的元素 α_i 使得 $\sum_{i=1}^m \alpha_i x_i = 0$

■ **定义4 (线性无关)**: $\sum_{i=1}^m \alpha_i x_i = 0$ 当且仅当 $\alpha_i = 0, \forall i$

■ **定理3**: 由向量集 x_1, x_2, \dots, x_m 张成的子空间

$$\begin{aligned} & \text{Span}\{x_1, x_2, \dots, x_m\} \\ &= \left\{ x \mid x = \sum_{i=1}^m \alpha_i x_i, \alpha_i \in F, i = 1, \dots, m \right\} \end{aligned}$$

是包含 x_1, x_2, \dots, x_m 的最小子空间.

1 线性空间

- **定义5 (线性空间的维度)**: 在空间 V 中, 存在线性无关的 $\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$, 且对于任何 x_{m+1} , $\{x_1, x_2, \dots, x_{m+1}\}$ 是线性相关的, 我们称 $\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ 为一个极大线性无关组.
- 线性空间 V 的**维度** $\dim V = m$.
- 对于线性空间 V , 也称 $\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ 为 V 的一个**基**.
- **关于线性相关性和无关性的重要事实**: 向量 $y \in \text{Span}\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ 在 $y = \sum_{i=1}^m \alpha_i x_i$ 的情况下具有唯一的系数, 当且仅当 x_1, x_2, \dots, x_m 是线性无关的.
- **定理4**: 对于线性空间 W_1 和 W_2 , 有
$$\dim(W_1 \cap W_2) \leq \min\{\dim(W_1), \dim(W_2)\}$$
$$\dim(W_1 + W_2) = \dim(W_1) + \dim(W_2) - \dim(W_1 \cap W_2)$$

1 线性空间

■ **定义6(线性映射)**: 如果 V 和 V' 是定义在相同域 F 上的线性空间, 如果 $\sigma: V \rightarrow V'$ 满足.

$$\sigma(x + y) = \sigma(x) + \sigma(y), \forall x, y \in V$$

$$\sigma(\alpha x) = \alpha \sigma(x), \forall x \in V, \forall \alpha \in F$$

则称 σ 是从 V 到 V' 的**线性映射**.

线性映射在 $\sigma: V \rightarrow V$ 的情况下被称为**线性变换**

■ **定理5**: 假设 V 和 V' 是线性空间, 记所有从 V 到 V' 的线性映射组成集合为 $\mathcal{L}(V, V')$. 则 $\mathcal{L}(V, V')$ 也是一个线性空间. 其中, 对于 $\forall \sigma, \tau \in \mathcal{L}(V, V')$, 运算满足以下定义:

$$(\sigma + \tau)(x) = \sigma(x) + \tau(x), \quad \forall x \in V$$

$$(\alpha \sigma)(x) = \alpha \sigma(x), \quad \forall x \in V, \forall \alpha \in F$$

1 线性空间

■ 矩阵是不是线性空间? (通过线性空间理解矩阵)

- (1) 按一定顺序排列的一组数(如向量, 当然是一个线性空间)
- (2) 一组(行/列)向量/一阶方程(秩)

矩阵的秩决定了这些向量可以张成的线性空间的维数, 解向量张成其余部分(垂直于行向量)

- (3) 线性算子/映射(线性空间)

■ 定义7: 线性映射 $\sigma: V \rightarrow V'$ 的核与像分别是:

$$\text{Ker } \sigma = \{x \in V : \sigma(x) = 0\}$$

$$\text{Im } \sigma = \{y \in V' : y = \sigma(x), x \in V\}.$$

一个矩阵 $A \in F^{m \times n}$, 按矩阵与向量的乘法可以作为一个线性映射 $A: F^n \rightarrow F^m$. 其核空间常称为零空间 $\mathcal{N}(A)$; 其像空间常称为列空间 $\mathcal{R}(A)$, 它可以由矩阵 A 的全部列向量张成

大 纲

1. 线性空间

2. 开集与闭集

2 开集与闭集

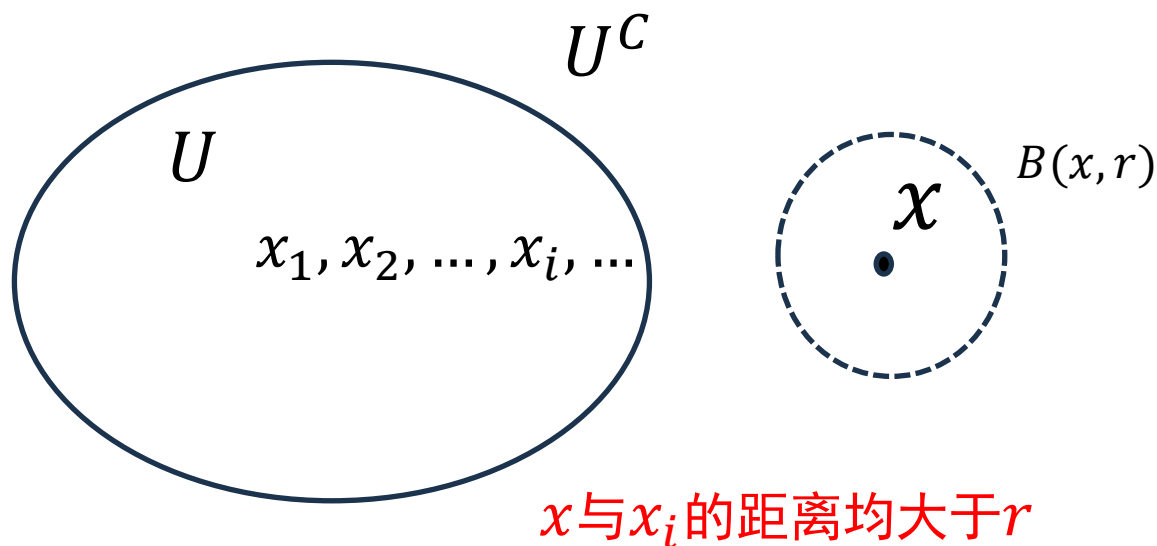
- **定义8**: 集合 $B(x, r) := \{y \in \mathbb{R}^n: \|y - x\| < r\}$ 被称为以 x 为中心、半径 $r > 0$ 的**开球**（有的叫邻域）
- **定义9**: $S \subset R$ 被称为**开集**, 则要么 $S = \emptyset$, 要么对于任意 $x \in S$, 存在 $r > 0$ 使得 $B(x, r) \subset S$; $U \subset R$ 被称为**闭集**, 如果其补集 $U^C = \{x \in \mathbb{R}^n: x \notin U\}$ 是开集
- **定理6**: 一个非空集合是闭集当且仅当它包含所有极限点
(对于极限运算封闭)

(注意只是针对收敛序列)

2 开集与闭集

■ 定理6的证明:

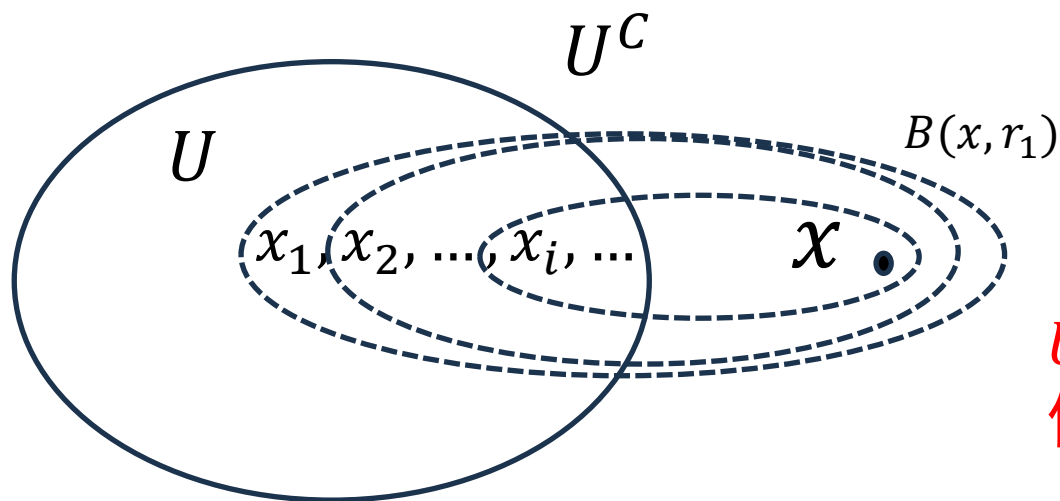
“ \Leftarrow ” 设 U 是一个闭集. (反证法) 假设存在一个点列 $\{x_1, x_2, \dots, x_i, \dots\} \subset U$ 收敛于极限点 x , 且 $x \notin U$. 也就是说, $x \in U^C$, 并且存在某个 $r > 0$ 使得开球 $B(x, r) \subset U^C$. 显然, $x_i \notin B(x, r)$, 这与点列 $\{x_1, x_2, \dots, x_i, \dots\} \subset U$ 收敛于 x 的假设矛盾. 因此, 若 U 是闭集, 则 U 包含所有收敛序列的极限点.



2 开集与闭集

■ 定理6的证明:

“ \Rightarrow ” 设 U 包含所有收敛序列的极限点, 现在我们证明 U^C 是开集. (反证法) 假设不是开集, 可以找到某个 $x \in U^C$, 不存在任何 $r > 0$ 使得开球 $B(x, r) \subset U^C$. 那么, 对于某个 $r_1 > 0$, 我们可以找到一个点 $x_1 \in B(x, r_1) \cap U$. 对于 $r_2 = r_1/2$, 我们可以找到某个 $x_2 \in B(x, r_2) \cap U$. 这样, 我们构造了一个收敛的点序列 $\{x_1, x_2, \dots, x_i, \dots\} \subset U$, 而其极限 $x \in U^C$, 与事实矛盾. 因此, U^C 是开集, U 是闭集.



U 中的序列收敛到 x ,
但 x 不属于 U

2 开集与闭集

□ 例 3:

1. 整个数集是闭集，也是开集
2. 如果 A 和 B 是两个闭集. $S = A \cap B$ 且 $S \neq \emptyset$. S 是闭集吗？为什么？任意多个闭集的交集呢？
3. 任意多个闭集的并集是闭集吗？为什么？

■ 2证明:

对于任意收敛点列 $\{x_1, x_2, \dots, x_i, \dots\}$ 属于集合 S ，那么 $\{x_1, x_2, \dots, x_i, \dots\}$ 既属于 A ，也属于 B 。因为 A 和 B 是两个闭集， $\{x_1, x_2, \dots, x_i, \dots\}$ 的收敛点也属于 $A \cap B$ ，根据定理6，集合 S 也是闭集。上述结论可以推广到任意多闭集相交的情况。

■ 考虑 $\left[1 + \frac{1}{n}, 2 - \frac{1}{n}\right], n = 1, 2, 3 \dots$

2 开集与闭集

□ 例 3:

4. 任意多个开集的并集是开集吗？为什么？
5. 任意多个开集的交集是开集吗？为什么？
6. 有没有既不是开集也不是闭集的例子？

■ 考虑 $\left[1 - \frac{1}{n}, 2 + \frac{1}{n}\right], n = 1, 2, 3 \dots$

■ 考虑 $D = \{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\}$, 任意一点 $\frac{1}{n}$ 都不能构造被包含的开球集；也不包含收敛点0

谢谢！