第二讲：范数

一类重要的函数

杨 林

大 纲

1.定义

2.例题

大 纲

1.定义

2.例题

1 定义

- **定义1（范数）**：一个满足以下条件的函数 $\|\cdot\|$：

  1. $\|x\| \geq 0, \|x\| = 0$当且仅当$x = 0$
  2. $\| tx \| = |t| \| x \|$，$t \in R$, 齐次性
  3. $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$（三角不等式）

- **符号**：$\|\cdot\|$表示一般（未指定）的范数；$\|\cdot\|_{\text{symb}}$表示特定的范数

- **定义2（距离）**：向量 x 和 y 之间的距离定义为它们差的二阶范数，即：

$$\text{dist}(x, y) = \|x - y\|$$

1 定义

- $\mathbb{R}^n$上的一些常见范数：

1. 绝对值和范数，即l_1-范数：

$$\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|, x \in \mathbb{R}^n$$

2. l_2-范数：

$$\|x\|_2 = (|x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots + |x_n|^2)^{\frac{1}{2}}, x \in \mathbb{R}^n$$

3. l_p-范数（$p \geq 1$）：

$$\|x\|_p = (|x_1|^p + |x_2|^p + \cdots + |x_n|^p)^{\frac{1}{p}}, x \in \mathbb{R}^n$$

1 定义

■ $\mathbb{R}^n$上的一些常见范数：

4. l_∞-范数：

$$\|x\|_\infty = \lim_{p\to\infty} \|x\|_p = \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}, x \in \mathbb{R}^n$$

■ l_∞-范数的证明：

$$\|x\|_p = (|x_1|^p + |x_2|^p + \cdots + |x_n|^p)^{\frac{1}{p}} \geq |x_{\max}|$$

$$\|x\|_p \leq (n \cdot |x_{\max}|^p)^{\frac{1}{p}} = n^{\frac{1}{p}} \cdot |x_{\max}|$$

$$n^{\frac{1}{p}} \cdot |x_{\max}| \to |x_{\max}|, \qquad p \to \infty$$

1 定义

5. 对于 $P \in S_{++}^{n}$，P-二次范数（P-quadratic norm）是：

$$\|x\|_P = (x^T P x)^{\frac{1}{2}} = \left\|P^{\frac{1}{2}} x\right\|_2, x \in \mathbb{R}^n$$

1 定义

■ $\mathbb{R}^n$范数的等价性：

1. 假设 $\|\cdot\|_a$和 $\|\cdot\|_b$是定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的范数，存在正数 α 和 β，对于所有 $x \in \mathbb{R}^n$ ：

$$\alpha\|x\|_a \leq \|x\|_b \leq \beta\|x\|_a$$

2. 如果 $\|\cdot\|$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的任意范数，那么存在一个二次范数 $\|x\|_P$ ，使得$\|x\|$

$$\|x\|_P \leq \|x\| \leq \sqrt{n}\|x\|_P$$

对所有x都成立.

1 定义

■ 对等价性1的证明：

只需证明$\alpha\|x\|_1 \le \|x\|_b \le \beta\|x\|_1$或者$\alpha \le \|x/\|x\|_1\|_b \le \beta$

对命题做等价代换：

$\alpha \le \|u\|_b \le \beta$，其中$u = x/\|x\|_1$，其范数满足$\|u\|_1 = 1$

令：

$$\alpha = \max_{\|u\|_1=1} \|u\|_b$$

$$\beta = \min_{\|u\|_1=1} \|u\|_b$$

（极值定理：函数 $f(x)$在有界闭集内连续，那么其在该闭集内必有界，结合后面的闭集合来理解）

对于给定的b，α, β即为所求

大 纲

1.定义

2.例题

2 例题

- **例** 1：假设 $\|\cdot\|$是一个定义在 $\mathbb{R}^m$ 上的范数，定义 $\| x \|_A = \| Ax \|$，$A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. 证明如果 $\mathrm{rank}(A) = n$, 则 $\|\cdot\|_A$也是一个范数.

- **例** 2：定义函数 $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}, f(x) = \sum_{i=1}^{n}(|\mathrm{Re}\, x_i| + |\mathrm{Im}\, x_i|)$，$f$ 是范数吗？试证明。

2 例题

■ **例1的证明：**

（1） $\| x \|_A = \| Ax \| \geqslant 0$（非负性）

（2） 因为 $\operatorname{rank}(A) = n$，所以$\| x \|_A = \| Ax \| = 0$当且仅当 $x = 0$

（3） $\| tx \|_A = \| tAx \| = |t| \cdot \| Ax \| = |t| \| x \|_A, t \in \mathbb{R}$（齐次性）

（4） $\| x + y \|_A = \| Ax + Ay \| \leq \| Ax \| + \| Ay \| = \| x \|_A + \| y \|_A \ (x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^n)$ 满足三角不等式

综上，$\| \cdot \|_A$ 是一个范数

2 例题

■ **例2的证明：**

（1） $f(x) = \sum_{i=1}^{n}(|\mathrm{Re}\,x_i| + |\mathrm{Im}\,x_i|) \geqslant 0$（非负性，取等条件为“当且仅当$x = 0$”）

（2）满足齐次性：

$$f(tx) = \sum_{i=1}^{n}(|\mathrm{Re}\,tx_i| + |\mathrm{Im}\,tx_i|)$$

$$f(tx) = |t|\sum_{i=1}^{n}(|\mathrm{Re}\,x_i| + |\mathrm{Im}\,x_i|) = |t|f(x)$$

（3）满足三角不等式：

$$f(x+y) = \sum_{i=1}^{n}(|\mathrm{Re}\,(x_i+y_i)| + |\mathrm{Im}\,(x_i+y_i)|)$$

2 例题

■ 例2的证明（续）：

$$f(x+y) \le \sum_{i=1}^{n}(|\mathrm{Re}\,x_i| + \ |\mathrm{Im}\,x_i| + |\mathrm{Re}\,y_i| + \ |\mathrm{Im}\,y_i|)$$
$$= f(x) + f(y)$$

综上，f是一个范数.

2 例题

- **例** 3：设 $u, v \in V$ 证明 $\langle u, v\rangle = 0$ 当且仅当对所有 $a \in F$ 均有 $\| u \| \le \| u + av \|$. （默认二阶范数）

2 例题

■ **例3的证明：**

首先证当对所有 $a \in F$ 均有 $\| u \| \leq \| u + av \|$ 时, $\langle u, v\rangle = 0$

对两边平方然后使用内积定义展开:

$$\langle u,u\rangle \leq \langle u + av, u + av\rangle$$

$$\langle u, av\rangle + \langle av, u\rangle + |a|^2\langle v, v\rangle \geq 0$$（加法分配率）

由于对所有的 a 成立, 所以令:

$$a = -\frac{\langle u, v\rangle}{\|v\|^2}$$

则上述不等式就变成:

$$\frac{|\langle u, v\rangle|^2}{\|v\|^2} \leq 0$$

显然必须有 $\langle u, v\rangle = 0$

另一个方向的证明与上述证明过程相似

2 例题

- **为什么这么构造 $\boldsymbol{a}$：**

$$\langle u, av\rangle + \langle av, u\rangle + |a|^2\langle v, v\rangle \geq 0$$

我们想消去不等式中的 a 和 $\langle v, v\rangle = \|v\|^2$, 所以令:

$$a = k\langle u, v\rangle$$

则上述不等式就变成:

$$2k|\langle u, v\rangle|^2 + k^2|\langle u, v\rangle|^2\|v\|^2 \geq 0$$

我们想消去不等式中的 k, 所以有

$$2k + k^2\|v\|^2 = 0$$

解得: $k = 0$(舍弃)或者$k = -\frac{\|v\|^2}{2}$

2 例题

□ **例** 4:设 $u, v \in \mathbb{R}^n$，对于 2 −范数 $\|\cdot\|$，如果

$$\|u+v\| = \|u\| + \|v\|$$

证明对某个实数 λ , $u = 0$ 或 $v = \lambda u$

■ **例4的证明:**

向量的 2 −范数的定义为 $\| x \|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$

设 $u = (u_1, u_2, \cdots, u_n), v = (v_1, v_2, \cdots, v_n)$

对 $\|u+v\| = \|u\| + \|v\|$ 两边平方, 可得

$$\|u+v\|^2 = \sum_{i=1}^{n} (u_i + v_i)^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(u_i^2 + v_i^2 + 2u_i v_i\right)$$

2 例题

- **例4的证明(续)：**

$$= \sum_{i=1}^{n} u_i^2 + \sum_{i=1}^{n} v_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n} u_i v_i$$

$$= \|u\|^2 + 2\|u\|\|v\| + \|v\|^2 \quad \text{(题给条件)}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} u_i^2 + \sum_{i=1}^{n} v_i^2 + 2\sqrt{\sum_{i=1}^{n} u_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} v_i^2}$$

即:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} u_i v_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} u_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} v_i^2$$

（内积、范数）

2 例题

■ **例4的证明（续）：**

由柯西不等式（$|a\cdot b|\le||a||\cdot||b||$）得

$$\left(\sum_{i=1}^{n}u_iv_i\right)^2\le\sum_{i=1}^{n}u_i^2\cdot\sum_{i=1}^{n}v_i^2$$

当且仅当 $\frac{v_1}{u_1}=\frac{v_2}{u_2}=\cdots=\frac{v_n}{u_n}=\lambda(\lambda\ne 0)$（夹角为0或180，余弦为1）或 u_i,v_i 其中一方全为0时, 柯西不等式取等, 即对某个实数 λ , $u=0$ 或 $v=\lambda u$

思考和讨论

1. 熟悉范数的定义

2. 熟悉常见范数，掌握范数的判别方法

3. 范数还有那些性质？

谢 谢 ！