

第二讲：范数

一类重要的函数

杨 林

大 纲

1.定义

2.例题

大 纲

1.定义

2.例题

1 定义

■ **定义1（范数）**：一个满足以下条件的函数 $\|\cdot\|$ ：

1. $\|x\| \geq 0$, $\|x\| = 0$ 当且仅当 $x = 0$
2. $\|tx\| = |t| \|x\|$, $t \in R$, 齐次性
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ （三角不等式）

（范数-凸优化问题中的“正则化项”）

■ **符号**： $\|\cdot\|$ 表示一般（未指定）的范数； $\|\cdot\|_{\text{symb}}$ 表示特定的范数

■ **定义2（距离）**：向量 x 和 y 之间的距离定义为它们差的二阶范数，即：

$$\text{dist}(x, y) = \|x - y\|$$

1 定义

■ \mathbb{R}^n 上的一些常见范数：

1. 绝对值和范数，即 l_1 -范数：

$$\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|, x \in \mathbb{R}^n$$

2. l_2 -范数：

$$\|x\|_2 = (|x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots + |x_n|^2)^{\frac{1}{2}}, x \in \mathbb{R}^n$$

3. l_p -范数 ($p \geq 1$)：

$$\|x\|_p = (|x_1|^p + |x_2|^p + \cdots + |x_n|^p)^{\frac{1}{p}}, x \in \mathbb{R}^n$$

1 定义

■ \mathbb{R}^n 上的一些常见范数：

4. l_∞ -范数：

$$\|x\|_\infty = \lim_{p \rightarrow \infty} \|x\|_p = \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}, x \in \mathbb{R}^n$$

■ l_∞ -范数的证明：

$$\|x\|_p = (|x_1|^p + |x_2|^p + \dots + |x_n|^p)^{\frac{1}{p}} \geq |x_{\max}|$$

$$\|x\|_p \leq (n \cdot |x_{\max}|^p)^{\frac{1}{p}} = n^{\frac{1}{p}} \cdot |x_{\max}|$$

$$n^{\frac{1}{p}} \cdot |x_{\max}| \rightarrow |x_{\max}|, \quad p \rightarrow \infty$$

1 定义

5. 对于 $P \in S_{++}^n$, P -二次范数 (P -quadratic norm) 是:

$$\|x\|_P = (x^T P x)^{\frac{1}{2}} = \|P^{\frac{1}{2}} x\|_2, x \in \mathbb{R}^n$$

1 定义*

■ \mathbb{R}^n 范数的等价性:

1. 假设 $\|\cdot\|_a$ 和 $\|\cdot\|_b$ 是定义在 \mathbb{R}^n 上的范数, 存在正数 α 和 β , 对于所有 $x \in \mathbb{R}^n$:

$$\alpha\|x\|_a \leq \|x\|_b \leq \beta\|x\|_a$$

2. 如果 $\|\cdot\|$ 是 \mathbb{R}^n 上的任意范数, 那么存在一个二次范数 $\|x\|_P$, 使得 $\|x\|$

$$\|x\|_P \leq \|x\| \leq \sqrt{n}\|x\|_P$$

对所有 x 都成立.

1 定义*

■ 对等价性1的证明:

只需证明 $\alpha\|x\|_1 \leq \|x\|_b \leq \beta\|x\|_1$ 或者 $\alpha \leq \|x/\|x\|_1\|_b \leq \beta$

对命题做等价代换:

$\alpha \leq \|u\|_b \leq \beta$, 其中 $u = x/\|x\|_1$, 其范数满足 $\|u\|_1 = 1$

令:

$$\alpha = \max_{\|u\|_1=1} \|u\|_b$$

$$\beta = \min_{\|u\|_1=1} \|u\|_b$$

(极值定理: 函数 $f(x)$ 在有界闭集内连续, 那么其在该闭集内必有界, 结合后面的闭集合来理解)

对于给定的 b , α, β 即为所求

大 纲

1.定义

2.例题

2 例题

□ 例 1: 假设 $\|\cdot\|$ 是一个定义在 \mathbb{R}^m 上的范数, 定义 $\|x\|_A = \|Ax\|$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. 证明如果 $\text{rank}(A) = n$, 则 $\|\cdot\|_A$ 也是一个范数.

□ 例 2: 定义函数 $f: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sum_{i=1}^n (|\text{Re } x_i| + |\text{Im } x_i|)$, f 是范数吗? 试证明。

2 例题

■ 例1的证明:

- (1) $\|x\|_A = \|Ax\| \geq 0$ (非负性)
- (2) 因为 $\text{rank}(A) = n$, 所以 $\|x\|_A = \|Ax\| = 0$ 当且仅当 $x = 0$
- (3) $\|tx\|_A = \|tAx\| = |t| \cdot \|Ax\| = |t| \|x\|_A, t \in \mathbb{R}$ (齐次性)
- (4) $\|x + y\|_A = \|Ax + Ay\| \leq \|Ax\| + \|Ay\|$
 $= \|x\|_A + \|y\|_A$ ($x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^n$) 满足三角不等式

综上, $\|\cdot\|_A$ 是一个范数

2 例题

■ 例2的证明:

(1) $f(x) = \sum_{i=1}^n (|\operatorname{Re} x_i| + |\operatorname{Im} x_i|) \geq 0$ (非负性, 取等条件为 “当且仅当 $x = 0$ ”)

(2) 满足齐次性:

$$f(tx) = \sum_{i=1}^n (|\operatorname{Re} tx_i| + |\operatorname{Im} tx_i|)$$

$$f(tx) = |t| \sum_{i=1}^n (|\operatorname{Re} x_i| + |\operatorname{Im} x_i|) = |t|f(x)$$

(3) 满足三角不等式:

$$f(x + y) = \sum_{i=1}^n (|\operatorname{Re} (x_i + y_i)| + |\operatorname{Im} (x_i + y_i)|)$$

2 例题

■ 例2的证明（续）：

$$\begin{aligned} f(x + y) &\leq \sum_{i=1}^n (|\operatorname{Re} x_i| + |\operatorname{Im} x_i| + |\operatorname{Re} y_i| + |\operatorname{Im} y_i|) \\ &= f(x) + f(y) \end{aligned}$$

综上， f 是一个范数.

2 例题

□ 例 3: 设 $u, v \in V$ 证明 $\langle u, v \rangle = 0$ 当且仅当对所有 $a \in F$ 均有 $\|u\| \leq \|u + av\|$. (默认二阶范数)

2 例题

■ 例3的证明:

首先证当对所有 $a \in F$ 均有 $\|u\| \leq \|u + av\|$ 时, $\langle u, v \rangle = 0$
对两边平方然后使用内积定义展开:

$$\langle u, u \rangle \leq \langle u + av, u + av \rangle$$

$$\langle u, av \rangle + \langle av, u \rangle + |a|^2 \langle v, v \rangle \geq 0 \quad (\text{加法分配率})$$

由于对所有的 a 成立, 所以令:

$$a = -\frac{\langle u, v \rangle}{\|v\|^2}$$

则上述不等式就变成:

$$\frac{|\langle u, v \rangle|^2}{\|v\|^2} \leq 0$$

显然必须有 $\langle u, v \rangle = 0$

另一个方向的证明与上述证明过程相似

2 例题

□ 例 4: 设 $u, v \in \mathbb{R}^n$, 对于 2-范数 $\|\cdot\|$, 如果

$$\|u + v\| = \|u\| + \|v\|$$

证明对某个实数 λ , $u = 0$ 或 $v = \lambda u$

■ 例4的证明:

向量的 2-范数的定义为 $\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$

设 $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$, $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$

对 $\|u + v\| = \|u\| + \|v\|$ 两边平方, 可得

$$\begin{aligned}\|u + v\|^2 &= \sum_{i=1}^n (u_i + v_i)^2 \\ &= \sum_{i=1}^n (u_i^2 + v_i^2 + 2u_i v_i)\end{aligned}$$

2 例题

■ 例4的证明(续)：

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=1}^n u_i^2 + \sum_{i=1}^n v_i^2 + 2 \sum_{i=1}^n u_i v_i \\ &= \|u\|^2 + 2\|u\|\|v\| + \|v\|^2 \quad (\text{题给条件}) \end{aligned}$$

$$= \sum_{i=1}^n u_i^2 + \sum_{i=1}^n v_i^2 + 2 \sqrt{\sum_{i=1}^n u_i^2 \cdot \sum_{i=1}^n v_i^2}$$

即：

$$\left(\sum_{i=1}^n u_i v_i \right)^2 = \sum_{i=1}^n u_i^2 \cdot \sum_{i=1}^n v_i^2$$

(内积、范数)

2 例题

■ 例4的证明(续) :

由柯西不等式 ($|a \cdot b| \leq ||a|| \cdot ||b||$) 得

$$\left(\sum_{i=1}^n u_i v_i \right)^2 \leq \sum_{i=1}^n u_i^2 \cdot \sum_{i=1}^n v_i^2$$

当且仅当 $\frac{v_1}{u_1} = \frac{v_2}{u_2} = \dots = \frac{v_n}{u_n} = \lambda (\lambda \neq 0)$ (夹角为0或180, 余弦为1) 或 u_i, v_i 其中一方全为0时, 柯西不等式取等, 即对某个实数 $\lambda, u = 0$ 或 $v = \lambda u$

思考和讨论

1. 熟悉范数的定义
2. 熟悉常见范数，掌握范数的判别方法
3. 范数还有那些性质？

谢谢！