最优化导论第二次作业题

1. 一个集合 C 被称为 **中点凸的**，如果当任意两个点 $a, b \in C$ 时，它们的平均值或中点 $(a+b)/2$ 也在 C 中。显然，一个凸集必然是中点凸的。可以证明，在一些温和条件下，中点凸性蕴含凸性。作为一个简单情形，请证明：如果 C 是闭集并且是中点凸的，那么 C 是凸的。

2. 集合 $C \subseteq \mathbf{R}^n$ 的支撑函数定义为

$$S_C(y) = \sup\{y^T x \mid x \in C\}.$$

（我们允许 $S_C(y)$ 取值为 $+\infty$。）假设 C 和 D 是 $\mathbf{R}^n$ 中的闭凸集。证明：当且仅当它们的支撑函数相等时，$C = D$。

3. 考虑集合

$$C = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid |x_1| + \sqrt{|x_2|} \leq 1\}.$$

判断集合 C 是否为凸集

4. 设 $\mathbb{R}^2$ 中的凸集 $S_1 = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$（单位闭圆盘）， $S_2 = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \geq 1\}$（右半闭半空间）。 求 $S = S_1 \cap S_2$，并证明 S 是凸集。

5. 设 a 和 b 是 $\mathbf{R}^n$ 中的两个不同点。证明所有距离 a 比距离 b 更近的点（欧几里得范数意义下），即

$$\{x \mid \|x-a\|_2 \leq \|x-b\|_2\},$$

构成一个半空间。将其显式地写成形如 $c^T x \leq d$ 的不等式。

6. 设 $C \subseteq \mathbf{R}^n$ 为以下二次不等式的解集：

$$C = \{x \in \mathbf{R}^n \mid x^T A x + b^T x + c \leq 0\},$$

其中 $A \in \mathbf{S}^n,\ b \in \mathbf{R}^n,\ c \in \mathbf{R}$。

证明：若 $A \succeq 0$，则 C 是凸集。

7. 证明：如果 S_1 和 S_2 是 $\mathbf{R}^{m \times n}$ 中的凸集，那么它们的部分和

$$S = \{(x, y_1 + y_2) \mid x \in \mathbf{R}^m,\ y_1, y_2 \in \mathbf{R}^n,\ (x, y_1) \in S_1,\ (x, y_2) \in S_2\}$$

也是凸集。

8. 设 $C, D \subset \mathbb{R}^n$ 为两个不相交的凸集。考虑集合

$$S = \{(a, b) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid a^\top x \leq b,\ \forall x \in C;\ a^\top y \geq b,\ \forall y \in D\}.$$

证明：集合 S 是一个凸集。

9. 设 K^* 为凸锥 K 的对偶锥。证明以下性质：

(a) K^* 确实是一个凸锥。

(b) 若 $K_1 \subseteq K_2$，则 $K_2^* \subseteq K_1^*$。

(c) K^* 是闭集。

(d) K^* 的内部由下式给出： $\operatorname{int} K^* = \{y \mid y^T x > 0 \ \ \forall x \in K \setminus \{0\}\}$.

(e) 如果 K 有非空内部，则 K^* 是尖的（pointed）。

(f) K^{**} 是 K 的闭包。（因此，如果 K 是闭集，则 $K^{**} = K$。）

10. 设 D 为 $\mathbb{R}^n$ 中非空闭集，并且是凸集，且 $y \notin D$。证明存在唯一的点 $\bar{x} \in D$，使得 $\|y - \bar{x}\| = \inf_{x \in D} \|y - x\|$。