第五讲：凸性与保凸运算

凸集的其他判断方法

杨 林

大 纲

1.保持凸性的运算

2.分离与支撑超平面

大 纲

1.保持凸性的运算

2.分离与支撑超平面

1 保持凸性的运算

■ **判断集合 C 凸性的实用方法:**

1. 应用定义

$$x_1, x_2 \in C, \theta \in [0,1] \Rightarrow \theta x_1 + (1-\theta)x_2 \in \mathrm{C}$$

2. 证明 C 是通过保持凸性的运算从简单凸集(超平面、半空间、范球等)得到的

- □ 交集（可推广到无穷多集合）
- □ 仿射函数
- □ 透视函数(Perspective function)
- □ 线性分式

1 保持凸性的运算

■ **交集**:

凸集(任意数量)的交集是凸集

□ **例** 1: 半正定锥 $K = \boldsymbol{S}_+^n = \{X \in \boldsymbol{S}^n \mid X \succeq 0\}$ 可以表示为

$$\bigcap_{z \neq 0} \{X \in \boldsymbol{S}^n \mid z^T X z \geq 0\}$$

对于任意 $z \neq 0$, $z^T X z$ 是关于X 的(不恒等于零的)线性函数, 因此, 集合

$$\{X \in \boldsymbol{S}^n \mid z^T X z \geq 0\}$$

实际上就是 $\boldsymbol{S}^n$ 的半空间. 由此可见, 半正定锥是无穷个闭半空间的交集, 因此是凸的

1 保持凸性的运算

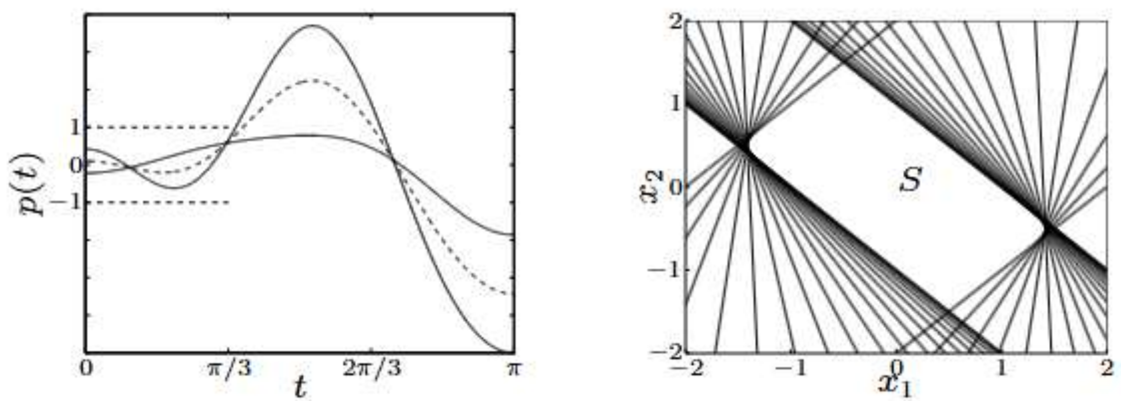
- **例** 2:

$$S=\{x\in\mathbb{R}^m \mid |p(t)|\le 1, |t|\le \pi/3\}$$

其中 $p(t)=\sum_{k=1}^{m} x_k \cos kt$. 集合 S 可以表示为无穷个**平板**的交集: $S=\bigcap_{|t|\le\pi/3} S_t$, 其中,

$$S_t=\{x \mid -1\le (\cos t,\cdots,\cos mt)^T x\le 1\}$$

因此, S 是凸的. 对于$m=2$, 它的定义和集合可见下图



1 保持凸性的运算

- **仿射函数**:一个由线性函数加上一个常数项构成的函数

假设$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$是仿射的(即 $f(x) = Ax + b, A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$), 则:

1. 仿射变换下凸集的像是凸集

$$S \subseteq \mathbb{R}^n\text{是凸的} \Rightarrow f(S) = \{f(x) \mid x \in S\}\text{是凸的}$$

2. 仿射变换下凸集的原像是凸集

$$C \subseteq \mathbb{R}^m\text{是凸的} \Rightarrow f^{-1}(C) = \{f^{-1}(x) \mid x \in C\}\text{是凸的}$$

1 保持凸性的运算

■ **部分一证明**:

设 $S \subseteq \mathbb{R}^n$ 是一个凸集，定义仿射函数 $f(x) = Ax + b$，其中 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$，$b \in \mathbb{R}^m$.要证明$f(S)$是凸集，需要证明对于任意两点$y_1, y_2 \in f(S)$ 和任意 $\theta \in [0,1]$，它们的凸组合 $\theta y_1 + (1-\theta)y_2$ 也属于 $f(S)$.

由于 $y_1, y_2 \in f(S)$，存在 $x_1, x_2 \in S$ 使得 $y_1 = Ax_1 + b$ 和 $y_2 = Ax_2 + b$.计算凸组合：

$$\begin{aligned}\theta y_1 + (1-\theta)y_2 &= \theta(Ax_1 + b) + (1-\theta)(Ax_2 + b)\\ &= A(\theta x_1 + (1-\theta)x_2) + b.\end{aligned}$$

因为 S 是凸集，所以 $\theta x_1 + (1-\theta)x_2 \in S$.

因此，$A(\theta x_1 + (1-\theta)x_2) + b \in f(S)$，即 $\theta y_1 + (1-\theta)y_2 \in f(S)$.

1 保持凸性的运算

□ 例 3:

1. 线性矩阵不等式的解集$\{x \mid x_1A_1 + x_2A_2 + \cdots + x_mA_m \preceq B\}$ (其中$A_i, B \in S^p$)
2. 双曲锥$\{x \mid x^TPx \le (c^Tx)^2, c^Tx \ge 0\}$（ 其中$P \in S_+^n$)

■ 例 3.1 **的证明**:

定义$f(x) := B - A(x) = B - (x_1A_1 + x_2A_2 + \cdots + x_mA_m)$, $f(x)$ 是仿射函数.

即证像集 $\{f(x) \mid x \in R,\ f(x) \succeq 0\}$ 是凸的

由仿射函数的性质知, 仿射变化下凸集的像是凸的

故线性矩阵不等式的解集是凸的

1 保持凸性的运算

- **例 3:**

1. 线性矩阵不等式的解集$\{x \mid x_1A_1 + x_2A_2 + \cdots + x_mA_m \preceq B\}$（其中$A_i, B \in S^p$）
2. 双曲锥$\{x \mid x^TPx \le (c^Tx)^2, c^Tx \ge 0\}$（ 其中$P \in S_+^n$）

- **例 3.2 的证明:**

上述集合是通过仿射函数 $f(x) = (P^{1/2}x,\ c^Tx)$ 从 $\{(z,t) \mid z^Tz \le t^2,\ \ t \ge 0\}$（凸锥）的逆像得到的

由仿射函数的性质知, 仿射变化下凸集的原像是凸的

故线性矩阵不等式的解集是凸的

1 保持凸性的运算

- **透视函数** $P: \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ ：

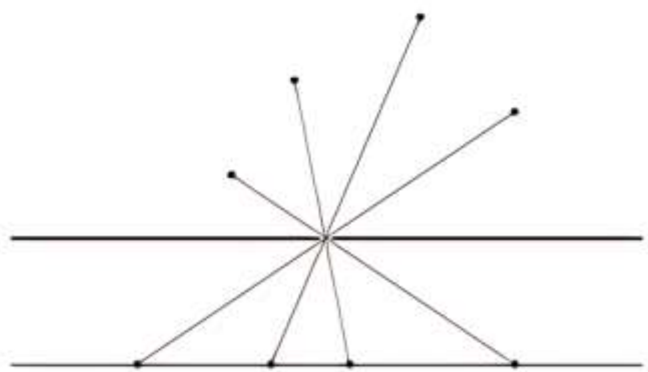
$$P(x,t) = \frac{x}{t}, \qquad \mathbf{dom}\, P = \{(x,t) \mid t > 0\}$$

$(x,t) = (x_1, \dots, x_n, t) \in \mathbb{R}^{n+1}$，透视变换下凸集的像和原像是凸的（“通过小孔观察一个凸的物体，可以得到凸的象”）

下面，我们用**小孔成像**来解释透视函数

1 保持凸性的运算

R. K. ($\mathbb{R}^3$ 中的) 小孔照相机由一个不透明的水平面 $x_3=0$ 和一个在原点的小孔组成，光线通过这个小孔在水平面 $x_3=-1$ 呈现处一个水平图像. 在相机上方 $x(x_3>0)$ 处的一个物体, 在相平面的点 $-(x_1/x_3, x_2/x_3, 1)$ 处形成一个图像. 忽略象点的最后一维分量 (因为它恒等于−1), x 处的点的象在平面上呈现于 $y=-(x_1/x_3, x_2/x_3)=-P(x)$ 处



加粗水平直线表示 $\mathbb{R}^3$ 中的平面 $x_3=0$, 除了在原点处有一个小孔外, 它是不透光的. 平面之上的物体或者光源出现在较细水平直线所示的象平面 $x_3=-1$ 上. 源于向其象位置的映射对应于透视函数

1 保持凸性的运算

■ **线性分式函数** $f:\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ：

$$f(x) = \frac{Ax+b}{c^T x + d}, \qquad \mathbf{dom}\, f = \{x \mid c^T x + d > 0\}$$

线性分数函数下凸集的像和逆像是凸的

这一结论可由仿射函数和透视函数复合得到

1 保持凸性的运算

- **例** 4: **条件概率**. 设 u 和 v 分别是在 $\{1,\cdots,n\}$ 和$\{1,\cdots,m\}$ 中取值的随机变量, 并且 p_{ij} 表示 $\mathbf{prob}(u=i,v=j)$. 那么条件概率 $f_{ij}=\mathbf{prob}(u=i\mid v=j)$ 由下式给出

$$f_{ij}=\frac{p_{ij}}{\sum_{k=1}^{n}p_{kj}}$$

因此, f 可以通过一个线性分式映射从 p 得到

可以知道, 如果 C 是一个关于 (u,v) 联合密度的凸集, 那么相应的 u 的条件密度(给定 v)的集合也是凸集

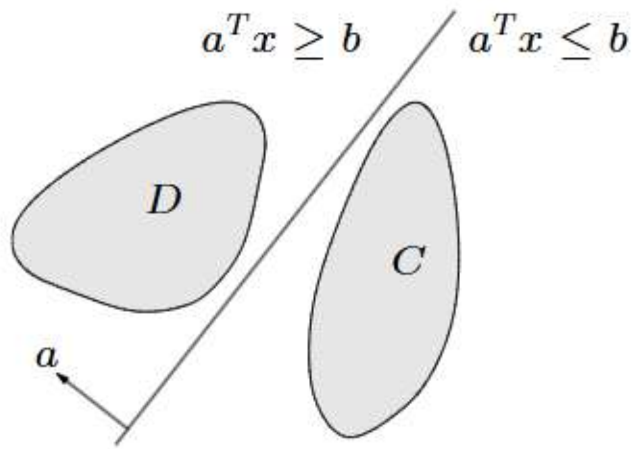
大 纲

1.保持凸性的运算

2.分离与支撑超平面

2 分离与支撑超平面

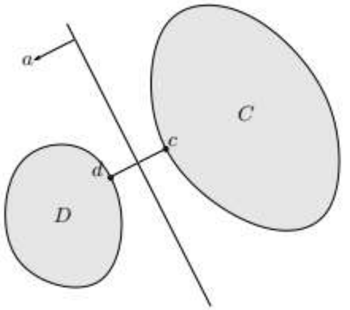
- **定理1（分离超平面定理）**：如果 C 和 D 是互不相交的凸集（交集为空），那么存在$a \neq 0, b$使得对于$x \in C, a^T x \leq b$; 对于$x \in D, a^T x \geq b$



超平面 $\{x \mid a^T x = b\}$ 将 C 和 D 分离

如何证明？（以具有正距离的两个凸集为例）

2 分离与支撑超平面



■ **证明:**

我们假设 C 和 D 的距离为正, 这里定义 (欧几里得) 距离为

$$\mathbf{dist}(C,D) = \inf\{\|u-v\|_2 \mid u \in C, v \in D\}$$

并且假设存在 $c \in C, d \in D$ 达到这个最小距离, 即

$$\mathbf{dist}(C,D) = \|c-d\|_2$$

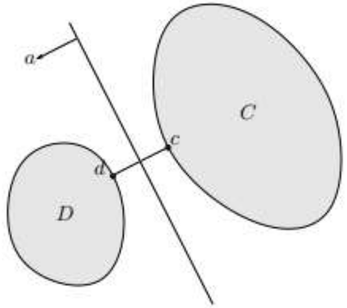
定义 $a = d - c,\ b = \frac{\|d\|_2^2 - \|c\|_2^2}{2}$. 我们希望证明 $f(x) = a^T x - b = (d-c)^T\big(x - (1/2)(d+c)\big)$ 在 C 中非正且在 D 中非负

反证: 假设存在点 $u \in D$, 并且 $f(u) < 0$, 那么

$$\begin{aligned} f(u) &= (d-c)^T\big(u - d + (1/2)(d-c)\big) \\ &= (d-c)^T(u-d) + (1/2)\|d-c\|_2 \end{aligned}$$

这意味着 $(d-c)^T(u-d) < 0$. 于是, 我们观察到

2 分离与支撑超平面



■ **证明:**

$$\frac{d}{dt}\left\|\boxed{d+t(u-d)}-c\right\|_2^2\bigg|_{t=0}$$

$$=\frac{d}{dt}\left[t^2(u-d)^T(u-d)+t(u-d)^T(d-c)\right.$$

$$\left.+t(d-c)^T(u-d)+(d-c)^T(d-c)\right]\bigg|_{t=0}$$

$$=2(d-c)^T(u-d)<0$$

因此, 对于足够小的 $t>0$ 以及 $t\le 1$, 我们有

$$\|d+t(u-d)-c\|_2\le\|d-c\|_2$$

即, 点 $d+(u-d)$ 比 d 更靠近 c, 矛盾.

故 $f(x)$ 在 D 中非负

同理可证: $f(x)$ 在 C 中非正

2 分离与支撑超平面

■ **另一个证明:**

同样假设存在 $c \in C, d \in D$ 达到这个最小(欧式)距离

$$\mathbf{dist}(C, D) = \|c - d\|_2$$

反证:若对 $\forall f(x)$ 在 D 中不恒为非负的,那么线段 cd 的垂直平分线必然与 D 交于不同于 d 的另外一点,记为 d'

在三角形 cdd' 中,从顶点 c 向线段 dd' 做垂线,记垂足为 h

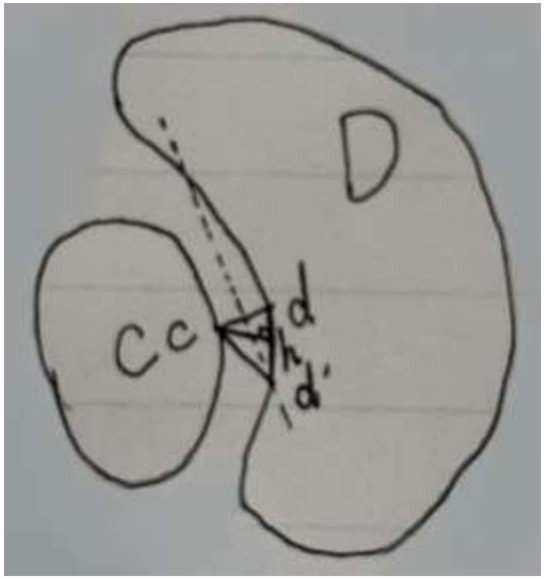
因为$\angle cd'd$小于60度, h位于线段dd'上

由于 $d \in D$, $d' \in D$, 所以 $dd' \subseteq D, h \in D$

由点到直线的距离关系知 $|cd| \geq |ch|$,即:

$$\|c - d\|_2 \geq \|c - h\|_2$$

与假设矛盾证毕

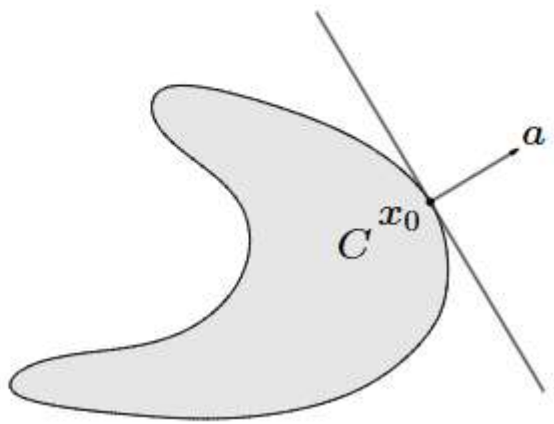


2 分离与支撑超平面

支撑超平面到集合 C 在边界点 x_0:

$$\{x \mid a^T x = a^T x_0\}$$

其中 $a \neq 0$，且对于所有$x \in C$均成立 $a^T x \leq a^T x_0$ 或者 $a^T x \geq a^T x_0$



- **定理2（支撑超平面定理）**:如果 C 是凸的，那么在 C 的每个边界点都存在一个支撑超平面（一个超平面将$\{x_0\}$和 $\mathbf{int}\ C$ 分离）

2 分离与支撑超平面

- **关于集合的定义:**
- 内点:对于集合 A, $x \in A$是 A 的内点当且仅当存在某个半径 r, 使得以 x 为中心, r 为半径的开球全部落在 A 内
- 内部:集合 A 的内部, 记作 $\mathbf{int}(A)$, 是指 A 中所有内点的集合, 即:$\mathbf{int}(A) = \{x \in A \mid \exists r > 0 \; s.t. B(x,r) \subseteq A\}$
- 边界点: 对于集合 A, x 是 A 的边界点当且仅当对于任意半径 r, 使得以 x 为中心, r 为半径的开球既包含A 中的点, 也包含A 外的点
- 极限点:对于集合 A, x 是 A 的极限点当且仅当以 x 为中心, 任意r 为半径的开球包含 A 中异于x的点
- 闭包:点集 A 的闭包, 记作 $\mathbf{cl}(A)$, 是指 A 中所有点加上所有 A 的极限点, 即:$\mathbf{cl}(A) = \{x \in X \mid \forall r > 0, B(x,r) \cap A \neq \emptyset\}$

2 分离与支撑超平面

◻ 例 5:

设 $K \subseteq \mathbb{R}^n, K \neq \emptyset$. 证明 K 是一个闭凸集当且仅当它是包含 K 的所有闭半空间的交集. (闭集合: 如果一个集合包含它所有的边界点, 那么这个集合叫做闭集. 另一种说法, 对极限运算是封闭的, 包含了所有的极限点)

2 分离与支撑超平面

■ **例 5 的证明**:

充分性证明：若 K 是包含 K 的所有闭半空间的交集. 由交集是保凸运算，K 凸. 又 K 是闭半空间交集, 故 K 闭凸集.

必要性证明：若 K 是一个闭凸集, 对于闭半空间 A，去证

$$K = \bigcap_{K\subseteq A, A \text{ 是闭半空间}} A \quad (\text{等式右边下记为} \cap A)$$

任取 $x \in K$，由 $K \subseteq A$ 知 $x \in \cap A$.

任取 $x \in \cap A$，若 $x \notin K$ 可知存在一个半空间 A_0 包含 K(单点集与集合的分离超平面定理), 但 $x \notin A_0$. 与 $x \in \cap A$ 即对任意 A_0 ($K \subseteq A_0$，A_0 是闭半空间), $x \in A_0$ 矛盾.

则 $\mathrm{K} = \cap A$.

综合两方面得证.

谢 谢 ！