第十一讲：线性规划问题

一类特殊但是普遍的凸优化问题

杨 林

大 纲

1. 线性规划及标准形式

2. 线性规划问题的解

3. 广义线性规划问题

大 纲

1. 线性规划及标准形式

2. 线性规划问题的解

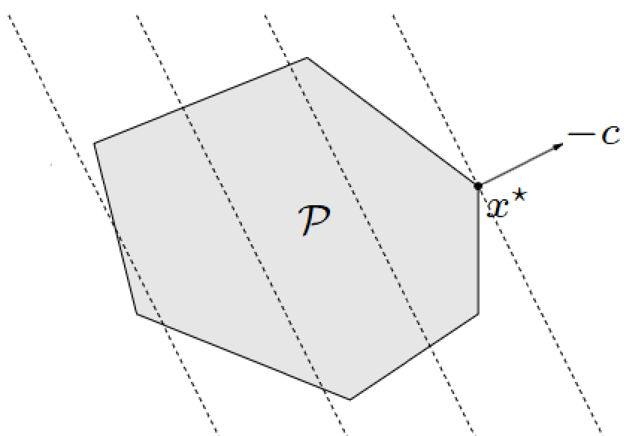
3. 广义线性规划问题

1 线性规划及标准形式

■ 线性规划(Linear Programming)

$$
\begin{array}{ll}
\text{最小化} & c^T x + d \\
\text{约束条件} & Gx \preceq h \\
 & Ax = b
\end{array}
$$

1. 具有仿射目标函数和约束函数的凸问题
2. 可行集是一个多面体



1 线性规划及标准形式

■ **LP 的标准形式:**

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & c^T x \\ \text{约束条件} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

■ **无等式约束的标准 LP：**

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & c^T x \\ \text{约束条件} & Ax \preceq b \end{array}$$

1 线性规划及标准形式

□ 例 1:将以下 LP 转换为标准形式:

$$
\begin{array}{ll}
\text{最小化} & c^T x + d \\
\text{约束条件} & Gx \preceq h \\
 & Ax = b
\end{array}
$$

Step 1.引入松弛变量:

$$
\begin{array}{ll}
\text{最小化} & c^T x + d \\
\text{约束条件} & Gx + s = h \\
 & Ax = b \\
 & s \succeq 0
\end{array}
$$

1 线性规划及标准形式

Step 2. 令 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^{+} - \boldsymbol{x}^{-}$：

$$
\begin{array}{ll}
\text{最小化} & c^T x^{+} - c^T x^{-} + d \\
\text{约束条件} & Gx + s = h \\
 & Ax^{+} - Ax^{-} = b \\
 & x^{+} \geq 0, x^{-} \geq 0, s \geq 0
\end{array}
$$

1 线性规划及标准形式

□ **例** 2（**饮食问题**）选择 n 种食物 $x_1,\cdots,x_n$ 的数量

1. 食物 j 的一单位成本为 c_j ,包含营养素 i 的数量为 a_{ij}
2. 健康饮食要求营养素 i 至少为 b_i

以找到最便宜的健康饮食

最小化	$c^T x$
约束条件	$Ax \geq b$
	$x \geq 0$

1 线性规划及标准形式

□ 例 3**（分段线性最小化问题）**

$$\max_{i=1,\cdots,m}(a_i^T x + b_i)$$

相当于一个线性规划问题（上镜图形式）

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & t \\ \text{约束条件} & a_i^T x + b_i \le t,\ i = 1,\cdots,m \end{array}$$

1 线性规划及标准形式

□ 例 4: 用线性规划来描述下列问题：

给定 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}, b \in \mathbb{R}^m$

$$\min \sum_{i=1}^{m} \max\{0, a_i^T x + b_i\}$$

其中变量 $x \in \mathbb{R}^n$

1 线性规划及标准形式

$$\min \quad \sum_{i=1}^{m} \max\{0, a_i^T x + b_i\}$$

- 首先定义新的辅助变量 $t_i \geq 0$ 表示 $\max\{0, a_i^T x + b_i\}$，即：

$$t_i = \max\{0, a_i^T x + b_i\}$$

这个定义可以分解为两个约束：

$$t_i \geq a_i^T x + b_i, i = 1, \ldots, m$$

$$t_i \geq 0, i = 1, \ldots, m$$

目标函数变为：$\min \sum_{i=1}^{m} t_i$

因此，这个问题可以转化为以下线性规划形式：

$$\begin{aligned} \text{最小化} \quad & \sum_{i=1}^{m} t_i \\ \text{约束条件} \quad & t_i \geq a_i^T x + b_i, i = 1, \ldots, m \\ & t_i \geq 0, i = 1, \ldots, m \end{aligned}$$

1 线性规划及标准形式

□ 例 5 （多面体的切比雪夫中心）

$\mathcal{P}=\{x \mid a_i^T x \leq b_i, i=1,\cdots,m\}$ 的切比雪夫中心是最大内接球 $\mathcal{B}=\{x_C+u \mid \|u\|_2 \leq r\}$ 的半径和中心

1. 对于所有 $x \in \mathcal{B}$, $a_i^T x \leq b_i$ 当且仅当

$$\sup\{a_i^T(x_C+u) \mid \|u\|_2 \leq r\}=a_i^T x_C+r\|a_i\|_2 \leq b_i$$

2. 因此,x_C 和 r 可以通过求解如下 LP 来确定

$$\begin{array}{ll} \text{最大化} & r \\ \text{约束条件} & a_i^T x_C+r\|a_i\|_2 \leq b_i, i=1,\cdots,m \end{array}$$

1 线性规划及标准形式

□ 例 6:用线性规划来解决下列问题：

给定两个多面体

$$\mathcal{P}_1 = \{x \mid Ax \preceq b\}, \qquad \mathcal{P}_2 = \{x \mid Cx \preceq d\}$$

试证明 $\mathcal{P}_1 \subseteq \mathcal{P}_2$ 或者找到一个在 $\mathcal{P}_1$ 但不在 $\mathcal{P}_2$ 中的点.（矩阵 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ 和 $C \in \mathbb{R}^{p\times n}$,向量 $c \in \mathbb{R}^m$ 和 $d \in \mathbb{R}^p$ 是给定的）

1 线性规划及标准形式

- **证明**:为了判断 $\mathcal{P}_1$ 是否包含在 $\mathcal{P}_2$ 中，可以构建如下的线性规划问题：

$$
\begin{array}{ll}
\text{最大化} & z \\
\text{约束条件} & Ax \leq b \\
 & Cx \leq d + z \cdot 1_p \\
 & z \in \mathbb{R}
\end{array}
$$

其中：$x \in \mathbb{R}^n$ 是决策变量，代表多面体中的点；$z \in \mathbb{R}$ 是辅助变量，用于衡量 $Cx \leq d$ 的“松弛”程度，1_p 是 p 维的全 1 向量

在该问题中，我们通过最大化目标函数 z，来检测是否存在一个点 $x \in \mathcal{P}_1$ 使得 $Cx \succ d$. 根据约束条件可知，当最终求得的最优值 $z^\star$ 满足 $z^\star > 0$ 时，$\mathcal{P}_1$ 不是 $\mathcal{P}_2$ 的子集, x是一个在 $\mathcal{P}_1$ 但不在 $\mathcal{P}_2$ 中的点；当 $z^\star \leq 0$ 时， $\mathcal{P}_1 \subseteq \mathcal{P}_2$

2 线性规划问题的解

□ **例** 7: 具有区间系数的鲁棒线性规划

考虑该问题,其中变量 $x \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & c^T x \\ \text{约束条件} & Ax \ \preceq \ b, \forall A \in \mathcal{A} \end{array}$$

其中$\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^{m \times n}$是集合

$\mathcal{A} = \{A \in \mathbb{R}^{m \times n} \,|\bar{A}_{ij} - V_{ij} \leq A_{ij} \leq \bar{A}_{ij} + V_{ij}, i = 1,\ldots,m, j$
$= 1,\ldots,n\}$

(矩阵 $\overline{A}$ 和 V 已给出.)

将这个问题表示为一个线性规划问题

2 线性规划问题的解

□ 证明:

这个问题等价于

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & c^T x \\ \text{约束条件} & \bar{A}x + V|x| \preceq b \end{array}$$

其中 $|x| = (|x_1|\ ,|x_2|,\ldots,|x_n|)$. 这个问题也可以转换成一个 LP 问题

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & c^T x \\ \text{约束条件} & \bar{A}x + Vy \preceq b \\ & -y \preceq x \preceq y \end{array}$$

其中向量 $x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^n$

大 纲

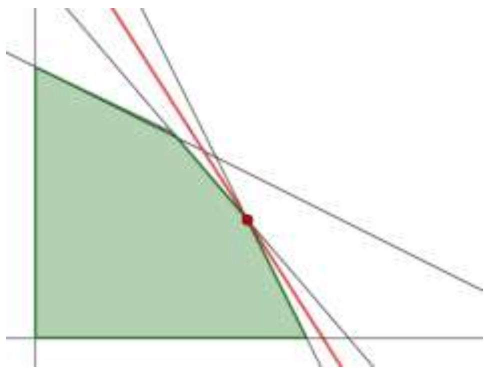
1. 线性规划及标准形式

2. 线性规划问题的解

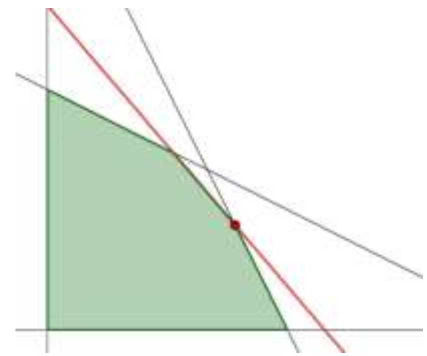
3. 广义线性规划问题

2 线性规划问题的解

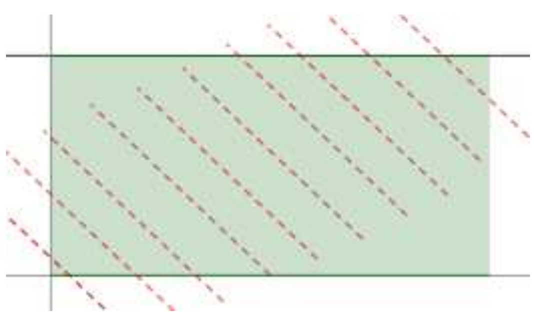
■ 线性规划问题的求解可能会出现四种结局，分别是有唯一的最优解、无穷多最优解、无界解以及无解或无可行解



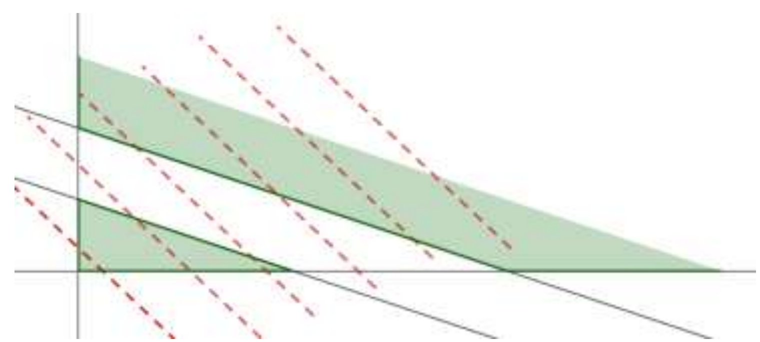
有唯一最优解



无穷多最优解



无界解



无解或无可行解

2 线性规划问题的解

■ 图解法

□ **例** 7**:**考虑优化问题最小化

$$
\begin{array}{ll}
\text{最小化} & f_0(x_1, x_2) \\
\text{约束条件} & 2x_1 + x_2 \leq 1 \\
 & x_1 + 3x_2 \leq 1 \\
 & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0
\end{array}
$$

绘制可行域的草图.对于以下每个目标函数,给出最优解集和最优值:

(a) $f_0(x_1, x_2) = -x_1 - x_2$

(b) $f_0(x_1, x_2) = x_1 + x_2$

(c) $f_0(x_1, x_2) = x_1$

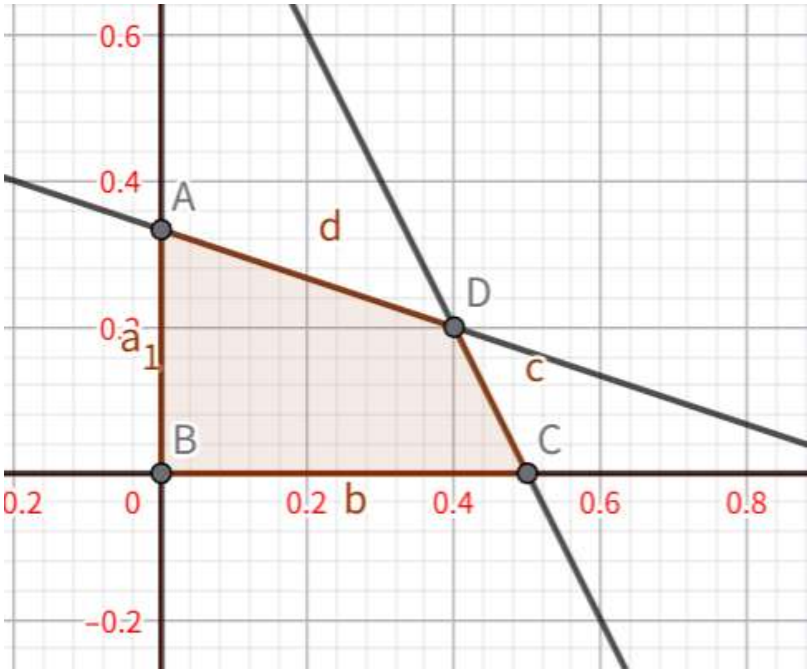
(d) $f_0(x_1, x_2) = \max\{-x_1, -x_2\}$

2 线性规划问题的解

■ **图解法**:先通过约束条件求出可行解范围

x_2

$x_1 + 3x_2 = 1$



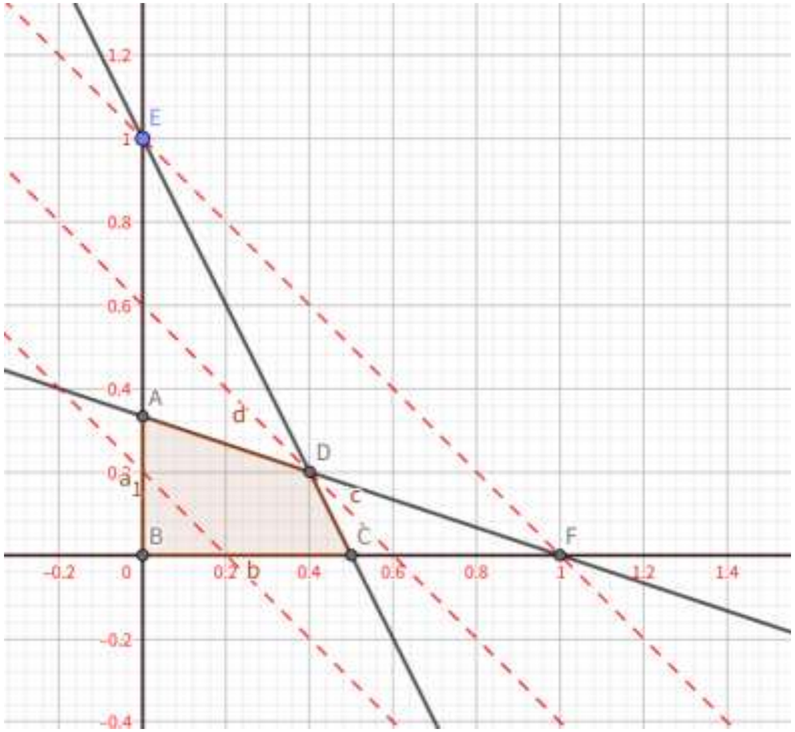
x_1

$2x_1 + x_2 = 1$

2 线性规划问题的解

- **证明(图解法)：**

基于(a)的目标函数画出等高线，得到在 $(0.4, 0.2)$ 处取得最优值 0.6 （$x_2 = -x_1 + b$）



2 线性规划问题的解

- **证明(图解法):**

同理可解得:(b) 在可行解集上目标函数的最优值为0(c) $X_{\text{opt}} = \{(0, x_2) | x_2 \geq 1\}$. (d) $x^\star = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$

2 线性规划问题的解

□ 例 8（方阵LP问题的解析解）

考虑 LP

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & c^T x \\ \text{约束条件} & Ax \preceq b \end{array}$$

其中 A 是方阵且非奇异的.证明最优值由

$$p^* = \begin{cases} c^T A^{-1} b & A^{-T} c \preceq 0 \\ -\infty & \text{其他情况} \end{cases}$$

给出

2 线性规划问题的解

□ **证明:**

做变量变换 $y = Ax$. 原问题等价于

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & c^T A^{-1} y \\ \text{约束条件} & y \preceq b \end{array}$$

若 $A^{-T} c \preceq 0$, 那么在 $y = b$ 处取得最优解 $p^\star = c^T A^{-1} b$.

否则, LP问题最优解是无下界的

大 纲

1. 线性规划及标准形式

2. 线性规划问题的解

3. 广义线性规划问题

3 （广义）线性规划问题

■ （广义）线性分数规划

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & f_0(x) \\ \text{约束条件} & Gx \preceq h, \qquad Ax = b \end{array}$$

线性分数规划

$$f_0(x) = \frac{c^T x + d}{e^T x + f}, \qquad \mathbf{dom}\, f_0(x) = \{x | e^T x + f > 0\}$$

一个拟凸优化问题；也可以通过二分法求解；等价于线性规划（变量 y, z）

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & c^T y + dz \\ \text{约束条件} & Gy \preceq hz \\ & Ay = bz \\ & e^T y + fz = 1 \\ & z \geq 0 \end{array}$$

3（广义）线性规划问题

- **例** 12:**布尔线性规划的松弛:**

在布尔线性规划中,变量 x 被约束其分量等于零或一:

$$
\begin{array}{ll}
\text{最小化} & c^T x \\
\text{约束条件} & Ax \preceq b \\
 & x_i \in \{0,1\}, i = 1, \cdots, n
\end{array}
$$

上述问题可以与以下问题相关联:

$$
\begin{array}{ll}
\text{最小化} & c^T x \\
\text{约束条件} & Ax \preceq b \\
 & 0 \leq x_i \leq 1, i = 1, \cdots, n
\end{array}
$$

松弛问题的最优解也是布尔线性规划的最优解

3 （广义）线性规划问题

□ **例** 13:**一个更一般的定理:**

试证明在一个集合上最小化一个线性函数等价于在其凸包上最小化该函数, 即:

$$\inf_{x \in \mathbf{conv}\, X} c^T x = \inf_{x \in X} c^T x$$

其中 $X \subset \mathbb{R}^m$ 和 c $\in \mathbb{R}^m$.此外,当且仅当等式右侧的下确界可以达到时,等式左侧的下确界才能达到

3 （广义）线性规划问题

□ **证明:**

$X \subset \mathbf{conv}\, X$ 可得 $\inf_{x \in \mathbf{conv}\, X} c^T x \le \inf_{x \in X} c^T x$

任何 $\bar{x} \in \mathbf{conv}\, X$ 都可以写成 $\bar{x} = \sum_{i=1}^m \alpha_i x_i$，其中 $x_1, \cdots, x_m \in X, \alpha_1, \cdots, \alpha_m \ge 0$ 且 $\sum_{i=1}^m \alpha_i = 1$. 因为 $c^T x_i \ge \inf_{x \in X} c^T x$

$$c^T \bar{x} = \sum_{i=1}^m \alpha_i c^T x_i \ge \left(\sum_{i=1}^m \alpha_i \right) \inf_{x \in X} c^T x = \inf_{x \in X} c^T x$$

对不等式左边在 $\bar{x} \in \mathbf{conv}\, X$ 上取下确界

$$\inf_{\bar{x} \in \mathbf{conv}\, X} c^T \bar{x} \ge \inf_{x \in X} c^T x$$

总的来说

$$\inf_{x \in \mathbf{conv}\, X} c^T x = \inf_{x \in X} c^T x$$

3 （广义）线性规划问题

□ 证明(续)：

由于 $X \subset \mathbf{conv}\, X$ 且 $\inf_{x \in \mathbf{conv}\, X} c^T x = \inf_{x \in X} c^T x$, 在 X 中相对于 $c^T x$ 的最优点可以在 $\mathbf{conv}\, X$ 中找到.

另一方面, 假设函数 $c^T x$ 在 $\mathbf{conv}\, X$ 中达到最小值, 即 $\bar{x}$. 对于 $x_1, \cdots, x_m$ 以及 $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1, \alpha_1, \cdots, \alpha_m \geq 0$, 我们有

$$\inf_{x \in X} c^T x = \left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i\right) \inf_{x \in X} c^T x \leq \sum_{i=1}^{m} \alpha_i\, c^T x_i = c^T \bar{x} = \inf_{x \in \mathbf{conv}\, X} c^T x$$

不等式左边等于右边

因此, 对于所有 i 和 $\alpha_i > 0$ ， $c^T x_i = \inf_{x \in \mathbf{conv}\, X} c^T x$ 必须成立

因此， $c^T x$ 的最小值可以在 X 中找到

谢 谢 ！