

第十四讲：对偶最优性与 KKT条件

凸优化问题的最优解性质

杨 林

大 纲

1. 对偶最优条件
2. KKT条件的应用

大 纲

1. 对偶最优条件
2. KKT条件的应用

1 对偶最优条件

- **互补松弛性:** 假设强对偶性成立, x^* 是原始最优解, (λ^*, ν^*) 是对偶最优解

$$\begin{aligned} f_0(x^*) &= g(\lambda^*, \nu^*) = \inf \left(f_0(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* f_i(x) + \sum_{i=1}^p \nu_i^* h_i(x) \right) \\ &\leq f_0(x^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* f_i(x^*) + \sum_{i=1}^p \nu_i^* h_i(x^*) \quad (\text{消去 inf}) \\ &\leq f_0(x^*) \end{aligned}$$

- **互补松弛性:** $\lambda_i^* f_i(x^*) = 0$ 对于 $i = 1, \dots, m$

$$\lambda_i^* > 0 \Rightarrow f_i(x^*) = 0, \quad f_i(x^*) < 0 \Rightarrow \lambda_i^* = 0$$

1 对偶最优条件

■ Karush–Kuhn–Tucker (KKT) 条件

以下四个条件称为 KKT 条件 (也可以推广于 f_i, h_i 不可微的情况)

1. 原问题可行性条件: $f_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, m, h_i(x) = 0, i = 1, \dots, p$
2. 对偶问题可行性条件: $\lambda \geq 0$
3. 互补松弛性条件: $\lambda_i f_i(x) = 0, i = 1, \dots, m$
4. 一阶最优条件: 拉格朗日函数关于 x 的梯度为 0:

$$\nabla f_0(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla f_i(x) + \sum_{i=1}^p \nu_i \nabla h_i(x) = 0$$

如果强对偶成立, 且 x, λ, ν 是最优的, 那么它们必须满足 KKT 条件

1 对偶最优条件

■ 凸问题的(充分) KKT 条件 (没有强对偶假设) :

若 $\tilde{x}, \tilde{\lambda}, \tilde{\mu}$ 满足凸问题的 KKT 条件, 则它们是最优的:

1. 从互补松弛性和原问题可行性: $f_0(\tilde{x}) = L(\tilde{x}, \tilde{\lambda}, \tilde{\mu})$
2. 从第 4 个条件(以及凸性): $g(\tilde{\lambda}, \tilde{\mu}) = L(\tilde{x}, \tilde{\lambda}, \tilde{\mu})$

因此 $f_0(\tilde{x}) = g(\tilde{\lambda}, \tilde{\mu})$

■ 反过来, 如果满足slater条件, x 是最优的当且仅当存在 λ, ν 满足 KKT 条件 (slater条件意味着强对偶性, 并且对偶最优解被达到)

■ 本质上, KKT 条件推广了无约束问题的最优条件
 $\nabla f_0(x) = 0$

大 纲

1. 对偶最优条件
2. KKT条件的应用

2 KKT条件的应用

□ 例 1

最小化 $-\sum_{i=1}^n \log(\alpha_i + x_i)$
约束条件 $x \geq 0, \mathbf{1}^T x = 1$

■ 解: 写出 KKT 条件

$$x^* \geq 0, \mathbf{1}^T x^* = 1, \lambda^* \geq 0, \lambda_i^* x_i^* = 0, i = 1, \dots, n$$
$$-1/(\alpha_i + x_i^*) - \lambda_i^* + \nu^* = 0, i = 1, \dots, n$$

重写 KKT 条件:

$$x^* \geq 0, \mathbf{1}^T x^* = 1,$$
$$x_i^* (\nu^* - 1/(\alpha_i + x_i^*)) = 0, \quad i = 1, \dots, n$$
$$\nu^* \geq 1/(\alpha_i + x_i^*), \quad i = 1, \dots, n$$

2 KKT条件的应用

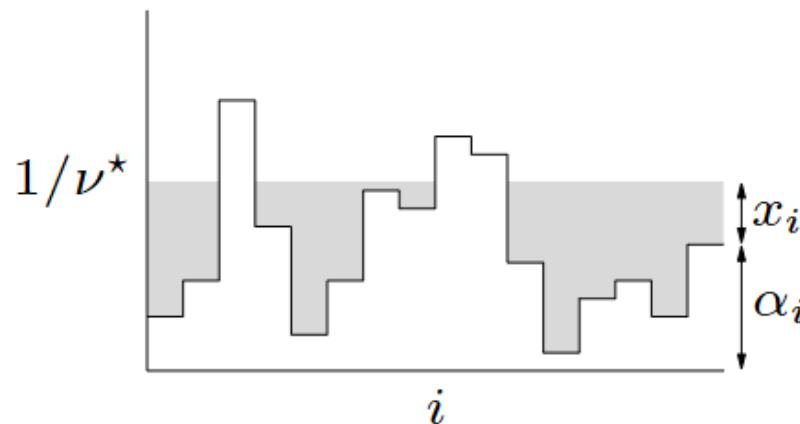
■ 解(续):

- (1) 若 $\nu^* < 1/\alpha_i$, 那么 $x_i^* > 0$, 同时 $x_i^* = 1/\nu^* - \alpha_i$;
- (2) 若 $\nu^* \geq 1/\alpha_i$, 那么 $x_i^* = 0$

结果, $x_i^* = \max\{0, 1/\nu^* - \alpha_i\}$

结合 $\mathbf{1}^T x^* = 1$ 确定 ν 的最优值, 即

$$\sum_{i=1}^n \max\{0, 1/\nu^* - \alpha_i\} = 1$$



2 KKT条件的应用

□ 例 2: 使用 KKT 条件找到下列集合中最接近 $(0, 0)$ 的点.

$$M = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 + x_2 \geq 4, 2x_1 + x_2 \geq 5\}$$

■ 解: 将其转化为一个优化问题:

最小化	$x_1^2 + x_2^2$
约束条件	$-x_1 - x_2 + 4 \leq 0$
	$-2x_1 - x_2 + 5 \leq 0$

拉格朗日函数是

$$\begin{aligned} L(x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2) \\ = x_1^2 + x_2^2 + \lambda_1(-x_1 - x_2 + 4) + \lambda_2(-2x_1 - x_2 + 5), \\ \lambda_1, \lambda_2 \geq 0 \end{aligned}$$

2 KKT条件的应用

■ 解(续): KKT 条件是:

I. 可行性

II. 互补松弛性

$$\lambda_1(-x_1 - x_2 + 4) = 0, \lambda_1 \geq 0$$

$$\lambda_2(-2x_1 - x_2 + 5) = 0, \lambda_2 \geq 0$$

III. 最优性

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 2x_1 - \lambda_1 - 2\lambda_2 = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 2x_2 - \lambda_1 - \lambda_2 = 0$$

2 KKT条件的应用

■ 解(续):

情况(1): $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0$. 从 III 得 $x_1 = 0, x_2 = 0$, 不可行

情况(2): $x_1 + x_2 = 4, \lambda_2 = 0$. 结合 III 我们可以得到

$$2x_1 - \lambda_1 = 0, 2x_2 - \lambda_1 = 0, x_1 + x_2 = 4$$

这个给出 $x_1 = 2, x_2 = 2, \lambda_1 = 4 > 0$. 一个 KKT 点 $(2, 2, 4, 0)!$

情况(3): $\lambda_1 = 0, 2x_1 + x_2 = 5$

$$2x_1 - 2\lambda_2 = 0, \quad 2x_2 - \lambda_2 = 0, \quad 2x_1 + x_2 = 5$$

我们有 $x_1 = 2, x_2 = 1, \lambda_2 = 2$ (不可行)

情况(4): $x_1 + x_2 = 4, 2x_1 + x_2 = 5$

我们有 $x_1 = 1, x_2 = 3$ 以及 $\lambda_1 + 2\lambda_2 = 2, \lambda_1 + \lambda_2 = 6$

这会得到 $\lambda_1 = 10, \lambda_2 = -4 < 0$ (不满足对偶可行性)

2 KKT条件的应用

□ 例 3: 下面是一个强对偶性成立的非凸优化问题. 如何找到最优解, 唯一吗?

$$\begin{array}{ll}\text{最小化}_x & -2(x_1 - 2)^2 - x_2^2 \\ \text{约束条件} & x_1^2 + x_2^2 \leq 25 \\ & x_1 \geq 0\end{array}$$

■ 解: 拉格朗日函数是

$$L(x_1, x_2, \mu_1, \mu_2) = -2(x_1 - 2)^2 - x_2^2 + \lambda_1(x_1^2 + x_2^2 - 25) - \lambda_2 x_1$$

$$\text{KKT 条件是: } \left\{ \begin{array}{l} -4(x_1 - 2) + 2\lambda_1 x_1 - \lambda_2 = 0 \\ -2x_2 + 2\lambda_1 x_2 = 0 \\ x_1^2 + x_2^2 \leq 25 \\ x_1 \geq 0 \\ \lambda_1, \lambda_2 \geq 0 \\ \lambda_1 = 0 \text{ 或 } x_1^2 + x_2^2 = 25 \\ \lambda_2 = 0 \text{ 或 } x_1 = 0 \end{array} \right.$$

2 KKT条件的应用

■ 解(续):

(1) $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. 我们得到 $x_1 = 2$ 和 $x_2 = 0$, 满足原始约束.
因此, $(2, 0)$ 和 $(0, 0)$ 是可能的解, 其值等于 0

(2) $\lambda_1 = 0$ 和 $\lambda_2 > 0$. 我们得到 $x_1 = x_2 = 0$ 和 $\lambda_2 = 8 > 0$. 值是 -8

(3) $\lambda_2 = 0$ 和 $\lambda_1 > 0$, 我们得到

$$\begin{cases} -4(x_1 - 2) + 2\lambda_1 x_1 = 0 \\ -2x_2 + 2\lambda_1 x_2 = 0 \\ x_1 \geq 0 \\ \lambda_1 > 0 \\ x_1^2 + x_2^2 = 25 \end{cases}$$

2 KKT条件的应用

■ 解(续):

如果 $x_2 = 0, x_1 = 5$, 且 $\lambda_1 = 6/5 > 0$ 和 $\lambda_2 = 0$, 得到值为 -18 . 如果 $x_2 \neq 0, \lambda_1 = 1$, 我们有 $x_1 = 4$ 和 $x_2 = \pm 3$, 且 $\lambda_2 = 0$, 得到值为 -17 .

(4) $\lambda_2 > 0$ 且 $\lambda_1 > 0$. 我们得到 $x_1 = 0$ 和 $x_2 = \pm 5$, $\lambda_1 = 1$ 和 $\lambda_2 = 8$, 得到一个值为 -33 , 这是最小值.

2 KKT条件的应用

□ 例 4: 已知下面是一个强对偶性成立的非凸优化问题。分析最优解（充分或必要）条件，以及如何寻找其最优解。可以存在多个最优解吗？

$$\begin{array}{ll}\text{最大化}_x & -3x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^3 + 2(x_1 + x_2 + x_3) \\ \text{约束条件} & x_1^2 + x_2^2 + x_3^3 = 1\end{array}$$

■ 解: 其 KKT 条件可以写为

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 + x_3^3 = 1 \\ (-3 + \nu)x_1 + 1 = 0 \\ (1 + \nu)x_2 + 1 = 0 \\ (2 + \nu)x_3 + 1 = 0 \end{cases}$$

通过观察上述的 KKT 条件容易得到 $\nu \neq -2, \nu \neq -1$, 以及 $\nu \neq 3$. 我们因此可以消去 x , 得到下面关于 ν 的等式

2 KKT条件的应用

■ 解(续): 其 KKT 条件可以写为

$$\frac{1}{(-3 + \nu)^2} + \frac{1}{(1 + \nu)^2} + \frac{1}{(2 + \nu)^2} = 1$$

上述公式包含四个解. 分别是 $-3.15, 0.22, 1.89, 4.04$. 对应的 x 的解为:

$$x = (0.16, 0.47, -0.87),$$

$$x = (0.36, -0.82, 0.45),$$

$$x = (0.90, -0.35, 0.26),$$

$$x = (-0.97, -0.20, 0.17)$$

将上述解代入 $f_0(x)$ 可得四个值, 分别为 $1.17, 0.67, -0.56, -4.70$. 比较大小即可得到其最优解

2 KKT条件的应用

□ 例 5: 求解以下优化问题

最大化 $_{x,y \in \mathbb{R}^2}$ $(x - 1)^2 + (y - 2)^2$

约束条件 $x \leq y$

$$x + 2y \leq 2$$

■ 解: 目标函数表示点 (x, y) 到 $(1, 2)$ 的欧氏距离平方. 需在可行域内找到最近点. 无约束最小值点 $(1, 2)$ 不满足 $x + 2y \leq 2$ (因 $1 + 4 = 5 > 2$) , 故最优解必在约束边界

在约束 $x + 2y = 2$ 上使用拉格朗日乘数法:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = 2(x - 1) + \nu = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 2(y - 2) + 2\nu = 0 \\ x + 2y = 2 \end{cases}$$

2 KKT条件的应用

■ 解(续):解得: $v = \frac{6}{5}$, $x = \frac{2}{5}$, $y = \frac{4}{5}$, 验证得 $x \leq y$ 成立, 目标值为1.8

在约束 $x = y$ 上, 极值点为 $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$, 但目标值 $\frac{17}{9} \approx 1.888$ 大于 $\frac{9}{5} = 1.8$

目标值比较:

$$f\left(\frac{2}{5}, \frac{4}{5}\right) = \left(\frac{2}{5} - 1\right)^2 + \left(\frac{4}{5} - 2\right)^2 = \frac{9}{5}$$

$$f\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) = \frac{17}{9}$$

所以最优值为: $\left(\frac{2}{5}, \frac{4}{5}\right)$

谢 谢 !