第四讲：凸集

优化问题的可行解集

杨 林

大 纲

1. 仿射与凸集

2. 凸锥(锥)

3. 半空间

4. 球、椭球

5. 多面体

大 纲

1. 仿射与凸集

2. 凸锥(锥)

3. 半空间

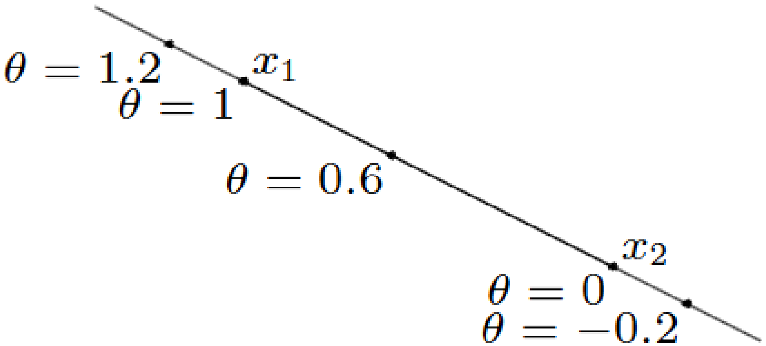
4. 球、椭球

5. 多面体

1 仿射与凸集

- **定义1（直线）**：通过x_1， x_2的所有点：

$$x = \theta x_1 + (1-\theta)x_2, \theta \in \mathbb{R}$$



- **定义2（仿射集）**：包含集合中任意两点所确定的直线

- **示例**（查看下一页的分析）：线性方程组的解集 $\{x|Ax = b\}$是仿射集.（反命题亦成立：每个仿射集合都可以表示为线性方程组的解集）

1 仿射与凸集

■ **仿射集的另一种解释:**

假设集合C是仿射集, 那么

$$C = V + x_0 = \{v + x_0 | v \in V\}$$

对于某个 $x_0 \in C$, 其中 V 是一个线性子空间

（仿射集都可以通过某个线性空间偏移构成）

■ **分析:** 对于仿射集 C 和 $x_0 \in C$

$$V = C - x_0 = \{x - x_0 | x \in C\}$$

是一个线性子空间(对和以及标量乘法运算封闭)

1 仿射与凸集

■ **证明**:

假设 C 是仿射集且 $x_0 \in C$, 则:

（1）对标量乘法封闭，假设$x_1 \in C - x_0$

$$ax_1 + x_0 = a(x_1 + x_0) + (1 - a)x_0 \in C\text{，所以}ax_1 \in C - x_0$$

$$\text{（}x_1 \in C - x_0 \Rightarrow x_1 + x_0 \in C\text{）}$$

（2） 对加法封闭

$x_1 \in C - x_0, x_2 \in C - x_0 \Rightarrow 2x_1 \in C - x_0, 2x_2 \in C - x_0$（由（1）得）

$$x_1 + x_2 + x_0 = \frac{1}{2}(2x_1 + x_0) + \frac{1}{2}(2x_2 + x_0) \in C$$

所以，$x_1 + x_2 \in C - x_0$

1 仿射与凸集

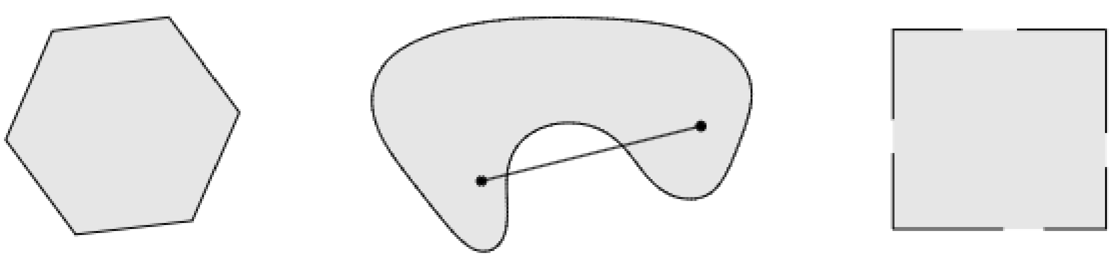
- **定义3(线段)**:x_1, x_2之间的所有点:

$$x = \theta x_1 + (1-\theta)x_2, \theta \in [0,1]$$

- **定义4(凸集)**:包含集合中任意两点之间的线段. 即

$$x_1, x_2 \in C, \theta \in [0,1] \Rightarrow \theta x_1 + (1-\theta)x_2 \in C$$

- **例** 1:一个凸的, 两个非凸的



1 仿射与凸集

- **例** 2: 证明闭区间 $[a,b]$ 是凸集

- **证明**:

取任意两点 $x,y \in [a,b]$, 且任意 $\theta \in [0,1]$, 考虑点 $z = \theta x + (1-\theta)y$

由于 x 和 y 都在 $[a,b]$ 中, 有 $a \le x \le b$ 和 $a \le y \le b$

因此, z 是 x 和 y 的凸组合且满足:

$$a \le \theta x + (1-\theta)y \le b$$

所以 $z \in [a,b]$, 因此 $[a,b]$ 是凸集

1 仿射与凸集

- **例** 3:证明二维空间中的圆盘 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\le r^2\}$ 是凸集

- **证明**:取任意两点 $P_1=(x_1,y_1)\in D$ 和 $P_2=(x_2,y_2)\in D$, 即满足 $x_1^2+y_1^2\le r^2$ 和 $x_2^2+y_2^2\le r^2$

对于任意 $\theta\in[0,1]$, 考虑点 $P=\theta P_1+(1-\theta)P_2=(\theta x_1+(1-\theta)x_2,\theta y_1+(1-\theta)y_2)$.

需要证明 $P\in D$, 即:

$$(\theta x_1+(1-\theta)x_2)^2+(\theta y_1+(1-\theta)y_2)^2\le r^2$$

展开左边:

$$=\theta^2x_1^2+2\theta(1-\theta)x_1x_2+(1-\theta)^2x_2^2+\theta^2y_1^2+2\theta(1-\theta)y_1y_2+(1-\theta)^2y_2^2$$

$$=\theta^2(x_1^2+y_1^2)+\left(1-\theta\right)^2(x_2^2+y_2^2)+2\theta(1-\theta)(x_1x_2+y_1y_2)$$

1 仿射与凸集

□ 证明(续):

由于 $x_1^2 + y_1^2 \le r^2$ 和 $x_2^2 + y_2^2 \le r^2$, 有:

$$\theta^2(x_1^2 + y_1^2) \le \theta^2 r^2, (1-\theta)^2(x_2^2 + y_2^2) \le (1-\theta)^2 r^2$$

另外, 由柯西不等式得:

$$x_1x_2 + y_1y_2 \le \sqrt{x_1^2 + y_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2} \le r^2$$

所以:

$$\theta(1-\theta)(x_1x_2 + y_1y_2) \le \theta(1-\theta)r^2$$

综上可得

$$\text{左边} \le \theta^2 r^2 + (1-\theta)^2 r^2 + 2\theta(1-\theta)r^2 = r^2$$

所以 $P \in D$, 因此 D 是凸集

2 凸锥(锥)

- **例** 4: 定义集合 S 的凸包 $\mathrm{conv}(S)$ 为所有可以通过 S 中点的凸组合得到的点的集合. 换句话说, $\mathrm{conv}(S)$ 包含所有形如 $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i s_i \ (s_i \in S, \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1)$ 的点 x. 证明集合 S 的凸包是所有包含 S 的凸集的交.

- **证明:**

设 C 是一个包含 S 的凸集. 因为 C 包含 S 中的所有点, 对于任意的 $s_1, s_2 \in S$, 它们的凸组合 $\lambda s_1 + (1-\lambda)s_2$ 也属于 C(因 C 是凸的). 因此, 我们得出结论:

$$\mathrm{conv}(S) \subseteq C \quad \text{（以点带面）}$$

设所有包含 S 的凸集的集合为 $\mathcal{C}$, 即

$$\mathcal{C} = \{C \mid S \subseteq C \text{ 且 } C \text{ 是凸的}\}$$

2 凸锥(锥)

- **证明(续):**

  那么所有这些 C 的交为

$$\bigcap_{C\in\mathcal{C}} C$$

  我们已经证明了任意包含 S 的凸集 C 都包含 $\mathrm{conv}(S)$, 因此

$$\mathrm{conv}(S) \subseteq \bigcap_{C\in\mathcal{C}} C$$

  易证$\mathrm{conv}(S) \in \mathcal{C}$，我们得出结论：$\mathrm{conv}(S)\ = \bigcap_{C\in\mathcal{C}} C$

大 纲

1.仿射与凸集

2.凸锥(锥)

3.半空间

4.球、椭球

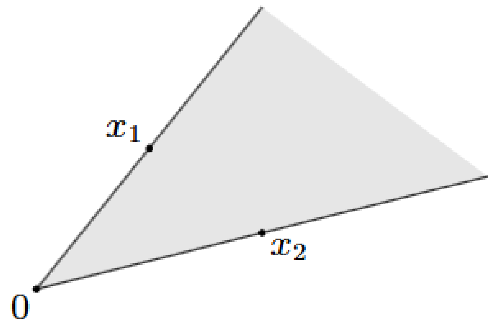
5. 多面体

2 凸锥(锥)

- **定义5(x_1 , x_2的锥(非负)组合)**:任意形如

$$x = \theta_1 x_1 + \theta_2 x_2$$

的点. 其中$\theta_1, \theta_2 \geq 0$.



- **定义6(凸锥)**:包含集合中所有点的锥组合的集合

(一定是凸的吗?)

2 凸锥(锥)

- **例** 5: 假设 $K \subseteq X$ 是一个锥体. 证明 K 是凸的, 当且仅当对所有 $x, y \in K$, 都有 $x + y \in K$

- **证明**:

必要性: 假设K是一个凸集. 根据凸集的定义, 对于任意 $x, y \in K$ 和任意 $\lambda \in [0,1]$, 都有:

$$\lambda x + (1 - \lambda) y \in K$$

取 $\lambda = 0.5$, 则我们得到:

$$0.5x + 0.5y \in K$$

这可以重写为:

$$0.5\,(x + y) \in K$$

由于 K 是锥体, 包含所有非负倍数的线性组合, 因此我们可以得到 $x + y \in K$

2 凸锥(锥)

□ 证明(续):

充分性: 假设对于所有 $x, y \in K$, 都有 $x + y \in K$.

设 $x, y \in K$ 且 $\lambda \in [0,1]$.

由于 K 是锥体, 若 $x \in K$ 且 $\lambda > 0$, 则 $\lambda x \in K$. 设 $\mu = 1 - \lambda$, 则 $\mu \in [0,1]$. 同样, 由于 K 是锥体, 则 $\mu y \in K$.

利用 $x + y \in K$ 的假设:

$$x + y \in K \Longrightarrow \lambda x + \mu y \in K$$

因此, 易得:

$$\lambda x + (1 - \lambda) y = \lambda x + \mu y \in K$$

2 凸锥

■ 符号:

1. S^n是$n \times n$ 阶对称矩阵的集合
2. $S_+^n = \{X \in S^n \mid X \succeq 0\}$: $n \times n$ 阶半正定矩阵

$$X \in S_+^n \Leftrightarrow z^T X z \geq 0, \forall z$$

   S_+^n是一个凸锥
3. $S_{++}^n = \{X \in S^n \mid X \succ 0\}$: $n \times n$ 阶正定矩阵

□ **例** 6: 证明 $\begin{bmatrix} x & y \\ y & z \end{bmatrix} \in S_+^2$是凸锥

□ **证明**:

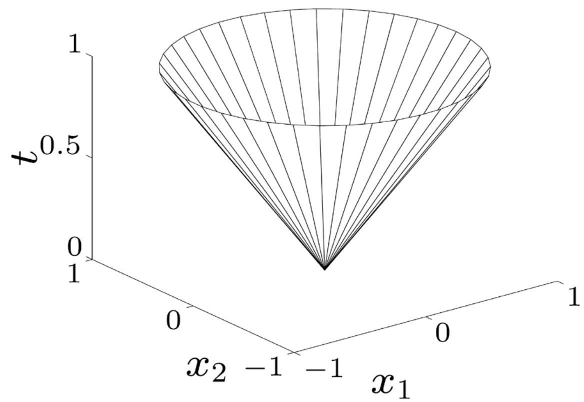
假设 $A \succeq 0$ 且 $B \succeq 0$, 对 $\forall \theta_1, \theta_2 \geq 0$

$$x^T(\theta_1 A + \theta_2 B)x = \theta_1 x^T A x + \theta_2 x^T B x \geq 0$$

即 $(\theta_1 A + \theta_2 B) \in S_+^2$.

2 凸锥

- **例** 7:关于范数$\| \quad \|$的集合$C = \{(x,t) \mid \|x\| \le t\} \subseteq \boldsymbol{R}^{n+1}$称为范数锥，它也是一个凸锥



例：$C = \{(x,t) \in \boldsymbol{R}^{2+1} \mid \|x\|_2 \le t\}$

- **证明**:

设$\theta_1 \ge 0$，$\theta_2 \ge 0$，$(x_1,t_1),(x_2,t_2)$属于C，则

$$\|\theta_1 x_1 + \theta_2 x_2\| \le \|\theta_1 x_1\| + \|\theta_2 x_2\| = \theta_1\|x_1\| + \theta_2\|x_2\|$$
$$\le \theta_1 t_1 + \theta_2 t_2$$

既$\theta_1(x_1,t_1)+\theta_2(x_2,t_2) = (\theta_1 x_1 + \theta_2 x_2, \theta_1 t_1 + \theta_2 t_2) \in C$，得证

大 纲

1.仿射与凸集

2.凸锥(锥)

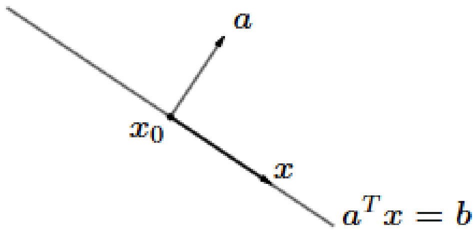
3.半空间

4.球、椭球

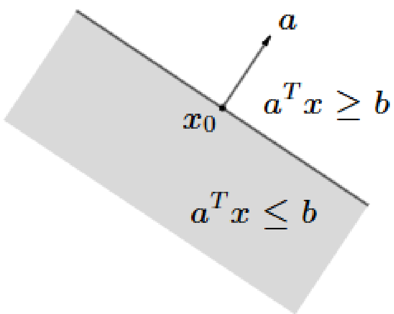
5. 多面体

3 半空间

- **定义7(超平面)**：形式为 $\{x \mid a^T x = b\}$ 的集合, $a \neq 0$



- **定义8(半空间)**：形式为 $\{x \mid a^T x \leq b\}$ 的集合, $a \neq 0$



- a是一个常向量(确定了法线的方向)
- 超平面是仿射的且是凸的；半空间是凸的

3 半空间

- **例** 8:证明闭半空间（根据闭集的定义）是凸集

- **证明**:

我们要证明集合 $S=\{x\in\mathbb{R}^n \mid a^Tx\le b\}$ 是凸集

假设 $x_1,x_2\in S$, 根据集合 S 的定义, 我们有:

$$a^Tx_1\le b \text{ 和 } a^Tx_2\le b$$

对于$x_1,x_2\in S$和任意参数$\theta\in[0,1]$，考虑点$z=\theta x_1+(1-\theta)x_2$，有:

$$\begin{aligned}a^Tz&=a^T(\theta x_1+(1-\theta)x_2)\\&=\theta(a^Tx_1)+(1-\theta)(a^Tx_2)\\&\le\theta b+(1-\theta)b=b\end{aligned}$$

故 $z\in S$

所以任意闭半空间 $S=\{x\in\mathbb{R}^n \mid a^Tx\le b\}$ 都是凸集

3 半空间

- **例** 9：设 $S_1 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_1^T x \le b_1\}$ 和 $S_2 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_2^T x \le b_2\}$是两个（闭）半空间，证明它们的交集 $C = S_1 \cap S_2$是凸集

- **证明**：

我们要证明交集 C 是凸集。根据凸集的定义，我们需要证明：对于任意两点 $x, y \in C$ 和任意参数 $\theta \in [0,1]$，它们的凸组合 $z = \theta x + (1-\theta)y \in C$

因为 $x, y \in C$，且 $C = S_1 \cap S_2$，这意味着对于 $i = 1,2$：

$$x, y \in S_i\text{，所以 } a_i^T x \le b_i \text{ 且 } a_i^T y \le b_i$$

现在考虑点 $z = \theta x + (1-\theta)y$：

$$a_i^T z = a_i^T(\theta x + (1-\theta)y) = \theta\left(a_i^T x\right) + (1-\theta)\left(a_i^T y\right)$$
$$\le \theta b_i + (1-\theta)b_i = b_i$$

3 半空间

□ 证明(续):

因此, $a_i^T z \leq b_i$, 满足 S_i 的条件（$i = 1,2$）

由于 z 同时满足 S_1 和 S_2 的条件, 所以 $z \in S_1 \cap S_2 = C$

即两个半空间的交集是凸集

大 纲

1.仿射与凸集

2.凸锥(锥)

3.半空间

4.球、椭球

5. 多面体

4 球、椭球

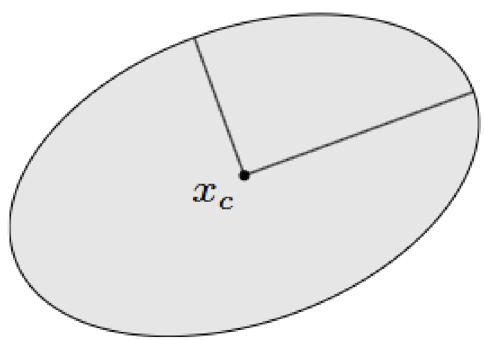
- **定义9((欧几里得)球)**:以x_c为中心,以r为半径.

$$B(x_c,r) = \{x \mid \| x - x_c \|_2 \leq r\} = \{x_c + ru \mid \| u \|_2 \leq 1\}$$

- **定义10(椭球)**:形如

$$\{x \mid \|(x - x_c)^T P(x - x_c)\|_2 \leq 1\}$$

的集合. 其中 $P \in S_{++}^n$(即 P 是对称正定矩阵, $P = P^T$ 且所有特征值大于零)



- 其他表示形式:$\{x_c + Au \mid \| u \| \leq 1\}$, 其中$A$为方阵且非奇异

4 球、椭球

- **例** 10: 设 $B=\{x\in\mathbb{R}^n|\|x\|_2\le r\}$ 是一个欧几里得球, 其中 r 是半径, $\|\cdot\|_2$ 表示欧几里得范数, 证明 B 是凸集

（可以推广到范数球）

- 证明:

取任意两点 $x,y\in B$ 和任意 $\theta\in[0,1]$. 令 $z=\theta x+(1-\theta)y$, 需要证明 $z\in B$, 即 $\|z\|_2\le r$

根据三角不等式和范数的齐次性, 有:

$$\|z\|=\|\theta x+(1-\theta)y\|\le\theta\|x\|+(1-\theta)\|y\|$$

由于 $x,y\in B$, 有 $\|x\|_2\le r$ 和 $\|y\|_2\le r$, 因此:

$$\theta\|x\|+(1-\theta)\|y\|\le\theta r+(1-\theta)r=r$$

所以 $\|z\|\le r$, 即 $z\in B$, 因此, 欧几里得球 B 是凸集

大 纲

1.仿射与凸集

2.凸锥(锥)

3.半空间

4.球、椭球

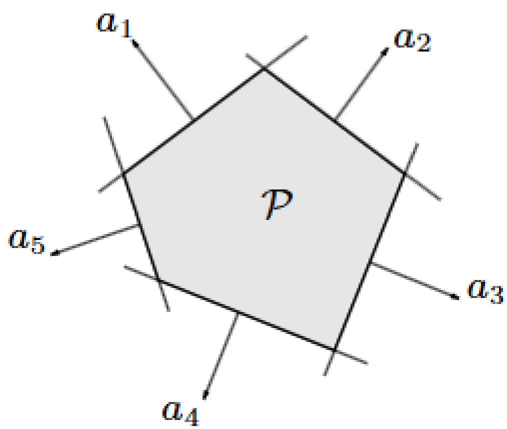
5. 多面体

5 多面体

■ **定义11 (多面体)**：有限多线性不等式和等式的解集

$$Ax \preceq b, Cx = d$$

($A \in \mathbb{R}^{m\times n}$，$C \in \mathbb{R}^{p\times n}$，$\preceq$ 是分量不等式)



□ 多面体是有限个半空间和超平面的交集

5 多面体

- **例** 11:证明多面体 $P = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax \preceq b\}$ 是凸集

- 证明:

对于任意两点 $x, y \in P$ 和任意标量 $\theta \in [0,1]$, 它们的凸组合 $z = \theta x + (1-\theta)y \in P$

因为 $x, y \in P$, 根据多面体 P 的定义, 它们满足所有 m 个线性不等式:

$$a_i^T x \le b_i \text{ 和 } a_i^T y \le b_i, \text{对于所有 } i = 1, \ldots, m$$

所以对于所有 $i = 1, \ldots, m$

$$a_i^T z = a_i^T(\theta x + (1-\theta)y) = \theta\left(a_i^T x\right) + (1-\theta)\left(a_i^T y\right)$$

$$\le \theta b_i + (1-\theta) b_i = b_i$$

故 $z \in P$. 因此, 多面体 P 是凸集

谢 谢 ！