最优化导论第四次作业题

1. 考虑如下形式的优化问题:

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \dfrac{f_0(x)}{c^T x + d} \\ \text{subject to} & f_i(x) \le 0, \quad i = 1, \dots, m, \\ & Ax = b, \end{array}$$

其中 $f_0, f_1, \dots, f_m$ 都是凸函数，目标函数的定义域为

$$\{ x \in \operatorname{dom} f_0 \mid c^T x + d > 0 \}.$$

证明该问题是一个拟凸优化问题。

解:

目标函数的定义域是凸集，因为 f_0 是凸函数。

接下来考虑目标函数的 α-次水平集:

$$\frac{f_0(x)}{c^T x + d} \le \alpha.$$

该不等式等价于:

$$c^T x + d > 0, \qquad f_0(x) \le \alpha(c^T x + d).$$

其中右侧不等式是:

- 左边 $f_0(x)$ 是凸函数;
- 右边 $\alpha(c^T x + d)$ 是仿射函数;
- 因此 $f_0(x) \le \alpha(c^T x + d)$ 是一个凸集合（凸函数不超过仿射函数的集合是凸的）。

又因为 $c^T x + d > 0$ 也是凸集合（仿射函数的线性不等式），

所以 α-次水平集是两个凸集合的交集，因此仍是凸集。

由此目标函数的所有次水平集都是凸的，故该优化问题是拟凸优化问题。

2. 将下列问题写成线性规划（LP），并说明原问题与对应 LP 的最优解之间的关系。

(a) 最小化 $\| Ax-b \|_\infty$
(b) 最小化 $\| Ax-b \|_1$
(c) 在 $\| x \|_\infty \leq 1$ 下最小化 $\| Ax-b \|_1$
(d) 在 $\| Ax-b \|_\infty \leq 1$ 下最小化 $\| x \|_1$
(e) 最小化 $\| Ax-b \|_1 + \| x \|_\infty$

矩阵 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$，向量 $b \in \mathbb{R}^m$。

解：(a)

等价 LP：

$$\begin{array}{rl} \text{minimize} & t \\ \text{subject to} & Ax-b \preccurlyeq t\mathbf{1}, \\ & Ax-b \succcurlyeq -t\mathbf{1}. \end{array}$$

约束表示：

$$-t \leq a_k^T x - b_k \leq t,$$

因此

$$t = \| Ax-b \|_\infty.$$

所以优化 (x,t) 等价于原问题。

(b)

等价 LP：

$$\begin{array}{rl} \text{minimize} & \mathbf{1}^T s \\ \text{subject to} & Ax-b \preccurlyeq s, \\ & Ax-b \succcurlyeq -s. \end{array}$$

约束表示：

$$s_k \geq |a_k^T x - b_k|.$$

目标函数可分，因此最优时：

$$s_k = |a_k^T x - b_k|,$$

得到

$$\| Ax-b \|_1.$$

(c)

等价 LP：

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \mathbf{1}^T y \\ \text{subject to} & -y \preccurlyeq Ax - b \preccurlyeq y, \\ & -1 \preccurlyeq x \preccurlyeq 1. \end{array}$$

变量 $x \in \mathbb{R}^n$，$y \in \mathbb{R}^m$。

(d)

等价 LP：

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \mathbf{1}^T y \\ \text{subject to} & -y \preccurlyeq x \preccurlyeq y, \\ & -1 \preccurlyeq Ax - b \preccurlyeq 1. \end{array}$$

另一种写法：将 $x = x^+ - x^-$，其中 $x^+, x^- \geq 0$，得到：

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \mathbf{1}^T x^+ + \mathbf{1}^T x^- \\ \text{subject to} & -1 \preccurlyeq Ax^+ - Ax^- - b \preccurlyeq 1, \\ & x^+ \succcurlyeq 0,\ x^- \succcurlyeq 0. \end{array}$$

(e)

等价 LP：

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \mathbf{1}^T y + t \\ \text{subject to} & -y \preccurlyeq Ax - b \preccurlyeq y, \\ & -t\mathbf{1} \preccurlyeq x \preccurlyeq t\mathbf{1}. \end{array}$$

变量为 x, y, t。

3. 写出如下问题的对偶问题：

$$\begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{s.t.} & f(x) \leq 0, \end{array}$$

其中 $c \neq 0$。要求使用 f 的共轭函数 f^* 的形式表示对偶问题。

解： 当 $\lambda = 0$ 时，

$$g(\lambda) = \inf_x c^T x = -\infty.$$

当 $\lambda > 0$ 时，

$$\begin{aligned} g(\lambda) &= \inf_x \big(c^T x + \lambda f(x)\big) \\ &= \lambda \inf_x \big((c/\lambda)^T x + f(x)\big) \\ &= -\lambda f_1^*(-c/\lambda), \end{aligned}$$

其中 f_1^* 是 f 的共轭函数。

换言之，对于所有 $\lambda \geq 0$，
$-g$ 是共轭函数 f_1^* 的透视函数，在 $-c/\lambda$ 处的取值。

因此，对偶问题可以写成：

$$\begin{array}{ll} \min & -\lambda f_1^*(-c/\lambda) \\ \text{s.t.} & \lambda \geq 0. \end{array}$$

该对偶问题是凸的，因为 f_1^* 是凸函数，而其透视函数也保持凸性，因此目标函数为凸函数，同时约束 $\lambda \geq 0$ 为凸集，故整个对偶优化问题是凸的。

4. 求如下线性规划（LP）问题的对偶函数：

$$\begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{s.t.} & Gx \preccurlyeq h, \\ & Ax = b. \end{array}$$

给出对应的对偶问题，并将其中隐式的等式约束显式写出。

解： 拉格朗日函数为

$$\begin{aligned} L(x,\lambda,\nu) &= c^T x + \lambda^T (Gx - h) + \nu^T (Ax - b) \\ &= (c^T + \lambda^T G + \nu^T A)x - h^T \lambda - \nu^T b, \end{aligned}$$

这是一个关于 x 的仿射函数。因此，对偶函数为

$$g(\lambda,\nu) = \inf_x L(x,\lambda,\nu) = \begin{cases} -\lambda^T h - \nu^T b, & c + G^T \lambda + A^T \nu = 0 \\ -\infty, & \text{否则} \end{cases}$$

对偶问题为

$$\begin{array}{ll} \max\limits_{\lambda,\nu} & g(\lambda,\nu) \\ \text{s.t.} & \lambda \succcurlyeq 0. \end{array}$$

将隐式约束条件显式写出后，对偶问题可表示为

$$\begin{array}{ll} \max\limits_{\lambda,\nu} & -\lambda^T h - \nu^T b \\ \text{s.t.} & c + G^T \lambda + A^T \nu = 0, \\ & \lambda \succcurlyeq 0. \end{array}$$

5. 推导下述优化问题的对偶问题：

$$\min \ -\sum_{i=1}^{m} \log\left(b_i - a_i^T x\right)$$

其定义域为

$$\{x \mid a_i^T x < b_i,\ i = 1, \dots, m\}.$$

首先引入新变量 y_i，并添加等式约束

$$y_i = b_i - a_i^T x.$$

（该问题的解称为线性不等式 $a_i^T x \le b_i, i = 1, \dots, m$ 的解析中心（analytic center）。

解： 推导该问题的对偶：

$$\begin{array}{ll} \min & -\sum_{i=1}^{m} \log y_i \\ \text{s.t.} & y = b - Ax, \end{array}$$

其中 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$，其第 i 行为 a_i^T。

拉格朗日函数为

$$L(x, y, \nu) = -\sum_{i=1}^{m} \log y_i + \nu^T (y - b + Ax).$$

对应的对偶函数为：

$$g(\nu) = \inf_{x,y} \left(-\sum_{i=1}^{m} \log y_i + \nu^T (y - b + Ax) \right).$$

项 $\nu^T A x$ 关于 x 是无界的，除非：

$$A^T \nu = 0.$$

关于 y 的部分也是无界的，除非：

$$\nu > 0,$$

并且在最优点取值：

$$y_i = \frac{1}{\nu_i}.$$

因此可推得对偶函数为:

$$
g(\nu)=\begin{cases}\sum_{i=1}^{m}\log \nu_i+m-b^T\nu, & A^T\nu=0,\ \nu>0\\ -\infty, & \text{否则}\end{cases}
$$

最终对偶问题为：

$$
\begin{array}{ll}\max\limits_{\nu} & \sum_{i=1}^{m}\log \nu_i-b^T\nu+m\\ \text{s.t.} & A^T\nu=0,\ \nu>0.\end{array}
$$

6. 考虑如下优化问题：

$$
\begin{array}{ll}\min & e^{-x}\\ \text{s.t.} & \dfrac{x^2}{y}\leq 0\end{array}
$$

其中变量为 x 和 y，定义域为

$$
\mathcal{D}=\{(x,y)\mid y>0\}.
$$

(a) 证明该问题是一个凸优化问题，并求其最优值。

(b) 写出该问题的拉格朗日对偶问题，并求其最优解 λ^* 和对偶最优值 d^*。最优对偶间隙是多少？

(c) Slater 条件是否成立

(a)最优值为：

$$
p^*=1.
$$

(b)

拉格朗日函数为：

$$
L(x,y,\lambda)=e^{-x}+\lambda x^2/y.
$$

对偶函数为

$$
g(\lambda)=\inf_{x,y>0}(e^{-x}+\lambda x^2/y)=\begin{cases}0, & \lambda\geq 0\\ -\infty, & \lambda<0\end{cases}
$$

因此对偶问题为：

$$
\begin{array}{ll}\max & 0\\ \text{s.t.} & \lambda\geq 0\end{array}
$$

故对偶最优值：

$$d^* = 0.$$

且原最优值:

$$p^* = 1.$$

因此最优对偶间隙为:

$$p^* - d^* = 1.$$

(c) Slater 条件不成立。