最优化导论第一次作业题

1. 设 $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x+y+z=0\}$，证明W是$\mathbb{R}^3$的线性子空间。

2. 判断向量组$\{(1,2,1),(2,1,3),(3,3,4)\}$在$\mathbb{R}^3$中是否线性相关，并说明理由。

3. 证明：如果$\sigma: V \to V'$是线性映射，那么$\mathrm{Ker}(\sigma)$是V的子空间，$\mathrm{Im}(\sigma)$是V'的子空间。

4. 给定线性映射$T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$，$T(x,y,z) = (x+y, y+z)$，求$\mathrm{Ker}(T)$和$\mathrm{Im}(T)$。

5. 某工厂生产两种产品A和B，产品A每件利润30元，产品B每件利润50元，最大化利润。生产约束条件：

- 生产A需要2小时加工时间，B需要4小时，总加工时间不超过100小时
- 生产A需要1单位原料，B需要2单位原料，总原料不超过60单位
- 产品A至少生产5件

请建立线性规划模型。

6. 某物流公司要在三个城市A、B、C之间分配运输任务，最小化运输成本。已知：

- 从A到B的运输成本为5元/单位，从A到C为8元/单位
- 从B到A为6元/单位，从B到C为4元/单位
- 从C到A为7元/单位，从C到B为3元/单位
- 城市A需求量100单位，B需求量150单位，C需求量200单位
- 城市A供应量120单位，B供应量180单位，C供应量150单位

建立运输问题的线性规划模型。

7. 两个平行的超平面 $\{x \in \mathbb{R}^n | a^T x = b_1\}$ 和 $\{x \in \mathbb{R}^n | a^T x = b_2\}$ 之间的距离是多少?

8. 假设 V 和 V' 是线性空间，记所有从 V 到 V' 的线性映射组成集合为 $\mathcal{L}(V,V')$。则 $\mathcal{L}(V,V')$ 也是一个线性空间。其中，对于 $\forall \sigma, \tau \in \mathcal{L}(V,V')$，运算满足以下定义：

$(\sigma+\tau)(x) = \sigma(x) + \tau(x), \quad \forall x \in V$

$(\alpha\sigma)(x) = \alpha\sigma(x), \quad \forall x \in V, \forall \alpha \in F$

9. 如果 $S, T \subset V(F)$ 是子空间，证明：$S+T$ 是子空间，其中：$S+T := \{z | z = x+y, x \in S, y \in T\}$

10. 设 V 是所有定义在 $[0,1]$ 上的连续函数构成的线性空间，$W_1 = \{f \in V : f(0) = f(1)\}$，$W_2 = \{f \in V : \int_0^1 f(x)dx = 0\}$。

(1) 证明 W_1 和 W_2 都是 V 的线性子空间。

(2) 证明 $W_1 \cap W_2$ 是 V 的线性子空间。

(3) 构造一个具体的函数 $f \in W_1 \cap W_2$ 且 $f \neq 0$。

(4) 判断 $W_1 + W_2 = V$ 是否成立，并证明你的结论。

11. 设 V 是所有从 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}$ 的连续函数构成的线性空间。定义子集：

- $W_1 = \{f \in V : f(-x) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}\}$（偶函数）
- $W_2 = \{f \in V : f(-x) = -f(x), \forall x \in \mathbb{R}\}$（奇函数）

(1) 证明 W_1 和 W_2 都是 V 的线性子空间。(2) 证明 $W_1 \cap W_2 = 0$。

12. 考虑 $\mathbb{R}^2$ 中的序列 (x_n, y_n)，其中 $x_n = \frac{n}{n+1}$，$y_n = \frac{(-1)^n}{n}$。

(1) 证明该序列在欧几里得度量下收敛，并求其极限。

(2) 定义集合 $S = \{(x_n, y_n) : n \in \mathbb{N}\} \cup (1, 0)$。证明 $(1, 0)$ 是 S 的聚点。

(3) 判断 S 是否为闭集，并证明你的结论。