最优化导论第五次作业题

1. 考虑问题：

$$\begin{array}{ll} \min & f_0(x) \\ \text{s.t.} & f_i(x) \le 0, \quad i = 1, \dots, m, \end{array}$$

其中函数 $f_i: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 是可微且凸的。

在精确罚函数方法中，我们求解如下辅助问题：

$$\min \quad \phi(x) = f_0(x) + \alpha \max_{i=1,\dots,m} \max\{0, f_i(x)\},$$

其中参数 $\alpha > 0$。

项 $\alpha \max\{\cdot\}$ 用来惩罚 x 不可行性偏差。

如果 α 足够大，则该方法称为 精确罚函数方法（exact penalty method），因为辅助问题 (5.111) 的解也同时是原问题 (5.110) 的解。

(a) 证明 $\phi(x)$ 是凸函数。

(b) 辅助问题可写为如下形式：

$$\begin{array}{ll} \min & f_0(x) + \alpha y \\ \text{s.t.} & f_i(x) \le y, \quad i = 1, \dots, m \\ & 0 \le y, \end{array}$$

其中变量为 $x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}$。

求该问题的拉格朗日对偶问题，并用原问题 (5.110) 的对偶函数 $g(\lambda)$ 表示之。

2. 推导下列问题的对偶问题：

$$\min_x \sum_{i=1}^{N} \| A_i x + b_i \|_2 + \frac{1}{2} \| x - x_0 \|_2^2.$$

已知问题数据为 $A_i \in \mathbb{R}^{m_i \times n}$、$b_i \in \mathbb{R}^{m_i}$、$x_0 \in \mathbb{R}^n$。
首先引入新变量 $y_i \in \mathbb{R}^{m_i}$，并加入等式约束

$$y_i = A_i x + b_i.$$

3. 验证点：

$$(x_1, x_2) = \left(\frac{4}{5}, \frac{8}{5}\right)$$

是以下优化问题的局部/全局最优解：

$$\min\ x_1^2 + x_2^2$$

满足：

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 &\le 5, \\ x_1 + 2x_2 &= 4, \\ x_1, x_2 &\ge 0. \end{aligned}$$

4. 利用 KKT 条件，求集合

$$M = \{x \in \mathbb{R}^2\colon\ x_1 + x_2 \ge 4,\ 2x_1 + x_2 \ge 5\}$$

中距离原点 (0,0) 最近的点，并判断解是否唯一。

5. 设 $n \ge 2$，考虑优化问题：

$$\min x_1$$

满足：

$$\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \frac{1}{n}\right)^2 \le \frac{1}{n(n-1)}, \qquad \sum_{i=1}^{n} x_i = 1.$$

证明：

$$\left(0, \frac{1}{n-1}, \dots, \frac{1}{n-1}\right)$$

是该问题的最优解。

6. 设 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 为凸函数，且 $\mathbb{R}_+ \subseteq \mathrm{dom} f$。定义其“滑动平均”函数

$$F(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\, dt, \qquad \mathrm{dom} F = \mathbb{R}_{++}.$$

证明 F 为凸函数。（f 可微。）