第六讲：广义不等式

向量之间的比较关系

杨 林

大 纲

1.广义不等式

2.对偶锥与广义不等式的对偶

大 纲

1.广义不等式

2.对偶锥与广义不等式的对偶

1 广义不等式

■ **定义1 (正常锥)**：凸锥 $K \subseteq \mathbb{R}^n$ 是一个**正常锥**如果：

1. K是闭集（包含其边界和极限点）

2. K是实的（具有非空内部）

3. K是尖的（不包含直线）

□ **例** 1：

1. 非负正交锥 $K = \mathbb{R}_+^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_i \geq 0,\ i = 1,\ldots,n\}$

2. 半正定锥 $K = S_+^n$

3. $[0,1]$ 上的非负多项式：

$$K = \{x \in \mathbb{R}^n | x_1 + x_2 t + x_3 t^2 + \cdots + x_n t^{n-1} \geq 0, t \in [0,1]\}$$

1 广义不等式

□ **例** 1:

1. 非负正交锥 $K=\mathbb{R}_+^n=\{x\in\mathbb{R}^n \mid x_i\geq 0,\ i=1,\dots,n\}$

■ 1.1证明:

（1）由 K 的定义知 K 是n个闭半平面的交集，因而是一个闭集，同时是凸的

（2）可在 K中找到一个内点$(1,1,\ldots,1)$，因而具有非空内部

（3）对任意K中不同两点x_1， x_2（不全为0）确定的直线，$\theta x_1+(1-\theta)x_2$. 假设$x_{1,1}\neq x_{2,1}$，且$x_{1,1}<x_{2,1}$，θ取正无穷时 $\theta x_{1,1}+(1-\theta)x_{2,1}=\theta\left(x_{1,1}-x_{2,1}\right)+x_{2,1}$为负，因此可以得到$\theta x_1+(1-\theta)x_2$存在不在$K$中的点，因此$K$ 是尖的

故 K 是一个正常锥

1 广义不等式

■ **定义2(广义不等式)**:**广义不等式**由一个正常锥 K 定义:

$$x \preceq_K y \Leftrightarrow y - x \in K, \qquad x \prec_K y \Leftrightarrow y - x \in \mathbf{int}\, K$$

□ **例** 2:

1. 分量不等式$(K = \mathbb{R}_+^n)$

$$x \preceq_{\mathbb{R}_+^n} y \Leftrightarrow x_i \le y_i, i = 1, \ldots, n$$

2. 矩阵不等式$K = S_+^n$

$$X \preceq_{S_+^n} Y \Leftrightarrow Y - X \text{ 半正定}$$

这两种类型非常常见, 因此我们省略了$\preceq_K$中的下标

1 广义不等式

■ **广义不等式的性质：**

1. 对于加法是**保序的**：如果 $x \preceq_K y$ 并且 $u \preceq_K v$，那么 $x + u \preceq_K y + v$
2. 具有**传递性**：如果 $x \preceq_K y$并且 $y \preceq_K z$，那么$x \preceq_K z$
3. 对于**非负数乘是保序的**：如果 $x \preceq_K y$ 并且 $\alpha \geq 0$，那么 $\alpha x \preceq_K \alpha y$
4. **是自反的**：$x \preceq_K x$
5. 是**反对称的**：如果 $x \preceq_K y$ 并且 $y \preceq_K x$，那么 $x = y$
6. 对于**极限运算是保序的**：如果对于 $i = 1, 2, \ldots$ 均有 $x_i \preceq_K y_i$，当 $i \to \infty$ 时，有 $x_i \to x$ 和$y_i \to y$，$x \preceq_K y$

1 广义不等式

■ **证明:**

1. 如果 $x \preceq_K y$ 并且 $u \preceq_K v$, 那么$y - x \in K$, $v - u \in K$, 从而$y + v - (x + u) \in K$, 即$x + u \preceq_K y + v$
2. 如果 $x \preceq_K y$并且$y \preceq_K z$, 那么$y - x \in K$, $z - y \in K$, 从而$z - x \in K$, 即$x \preceq_K z$
3. 如果 $x \preceq_K y$ 并且 $\alpha \geq 0$, 那么$y - x \in K$, 从而$\alpha y - \alpha x \in K$, 即$\alpha x \preceq_K \alpha y$
4. 因为$x - x = 0 \in K$, 所以$x \preceq_K x$
5. 如果 $x \preceq_K y$ 并且$y \preceq_K x$, 那么$y - x \in K$且$x - y \in K$, 只有$x = y$（否则包含直线）
6. 如果对于 $i = 1, 2, \ldots$ 均有 $x_i \preceq_K y_i$, 当 $i \to \infty$ 时, 有$x_i \to x$ 和$y_i \to y$, 因为$y_i - x_i \in K$, 有$y - x \in K$, 即$x \preceq_K y$

1 广义不等式

■ **定义3(最小元与极小元):**

$\preceq_K$一般不是线性排序:我们可以有 $x \npreceq_K y$ 和 $y \npreceq_K x$.

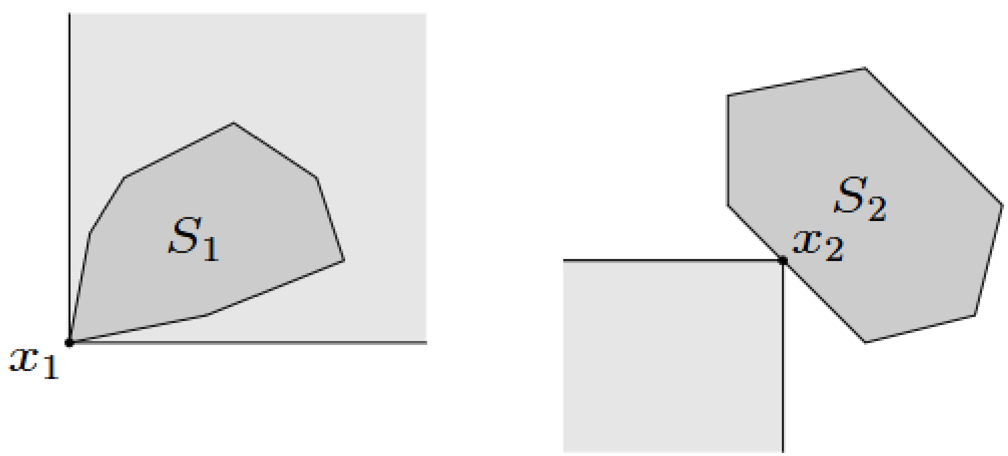
$x \in S$ 是 S 相对于 $\preceq$ 的最小元如果

$$y \in S \Rightarrow x \preceq_K y$$

$x \in S$ 是 S 相对于 $\preceq$ 的极小元如果

$$y \in S, y \preceq_K x \Rightarrow x = y$$

■ **示例（重要，阴影区域分别是正常锥**$K + x_1$ **和**$-K + x_2$）:



大 纲

1.广义不等式

2.对偶锥与广义不等式的对偶

2 对偶锥与广义不等式的对偶

- **定义4（锥K的对偶锥）**：

$$K^* = \{y \mid y^T x \geq 0, \forall x \in K\}$$

- 对偶锥总是凸的，即使K不是一个凸锥

正常锥的对偶锥是正常锥，因此定义广义不等式：

$$y \succeq_{K^*} 0 \Leftrightarrow y^T x \geq 0, \forall x \succeq_K 0$$

□ **例** 3：

1. $K = \mathbb{R}_+^n$，$K^* = \mathbb{R}_+^n$
2. $K = S_+^n$，$K^* = S_+^n$
3. $K = \{(x,t) \mid \|x\|_2 \leq t\}$，$K^* = \{(x,t) \mid \|x\|_2 \leq t\}$
4. $K = \{(x,t) \mid \|x\|_1 \leq t\}$，$K^* = \{(x,t) \mid \|x\|_\infty \leq t\}$

前三个例子是自对偶锥

2 对偶锥与广义不等式的对偶

■ **例** 3.3 3.4 **的证明**:

如果 $(y, z) \in K^*$, 那么对于 $\forall(x, t) \in K$, 都有 $y^T x + zt \geq 0.$

也就是说，对 $\forall(x, t) \in K$ 或是 $\|x\|_2 \leq t$ 有$y^T \frac{x}{t} + z \geq 0$

定义$u = x/t$，则有$y^T u + z \geq 0, \forall u: \|u\|_2 \leq 1$

等价于“下界≥ 0 ”：$-\|y\|_2 + z \geq 0$ 或是 $\|y\|_2 \leq z$

■ 对于任意范数：

定义对偶范数，$\|y\|_* = \sup\{y^T u \mid \|u\| \leq 1\}$，则 $K^* = \{(y, z) \mid \|y\|_* \leq z\}$

2 对偶锥与广义不等式的对偶

■ **例** 3.3 3.4 **的证明（续）**：

对于任意范数定义对偶范数，$\|y\|_* = \sup\{y^T u \mid \|u\| \le 1\}$，则 $K^* = \{(y,z) \mid \|y\|_* \le z\}$. 对偶范数的证明如下：

（1）对任意 y，由于 $u = 0$ 满足 $\| u \| \le 1$，且 $y^{\mathrm{T}}0 = 0$，因此 $\|y\|_* \ge 0$；对于$y \neq 0$，令$u = y/\|y\| \le 1$， $y^T u > 0$. 因此满足非负正定性

（2）设 α 为任意标量，$\|\alpha y\|_* = \sup\{\alpha y^T u \mid \|u\| \le 1\} = |\alpha| \|y\|_*$，因此满足齐次性

（3）对于任意的y，z，

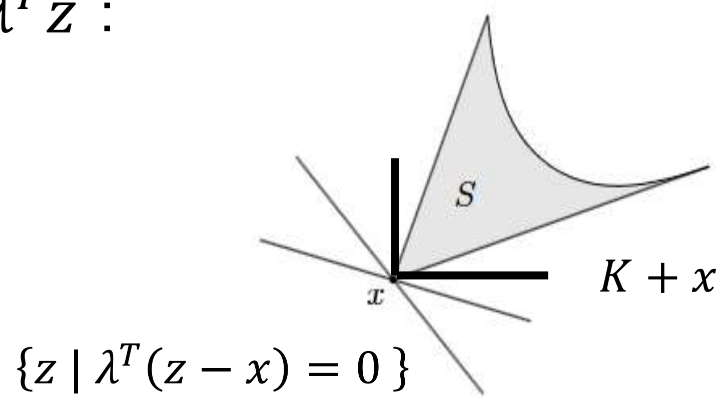
$\|y+z\|_* = \sup\{(y+z)^T u \mid \|u\| \le 1\} = \sup\{y^T u + z^T u \mid \|u\| \le 1\} \le \|y\|_* + \|z\|_*$，因而满足三角不等式

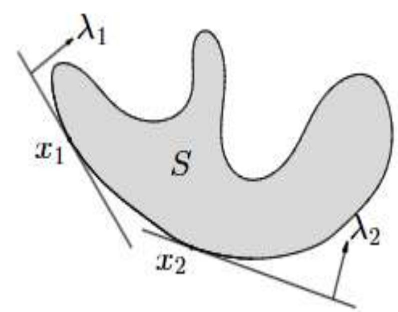
2 对偶锥与广义不等式的对偶

- **通过对偶不等式求最小元和极小元**：
- **关于 $\preceq_K$ 的****最小元**：元素 $x \in S$ 是集合 S 最小元当且仅当对于所有 $\lambda \succ_{K^*} 0$ ，x 是在 S 上极小化 $\lambda^T z$ 的唯一最优解

$$K^* = \{y \mid y^T x \geq 0, \forall x \in K\}$$

- **最小化$\lambda^T z$**：

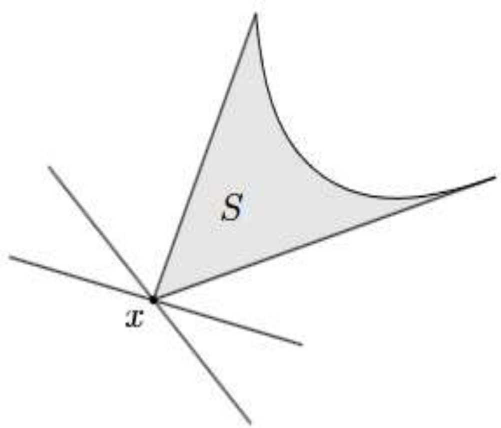




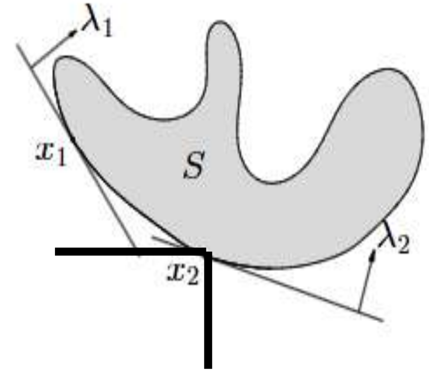
1. $K + x$的所有支撑超平面的法向量λ^T位于K^*，如果$x \in S$ 是最小元，这些超平面也是S的支撑超平面，超平面可以表示为 $\{z \mid \lambda^T(z - x) = 0\}$
2. 如果λ^T位于K^*， x 在 S 上极小化 $\lambda^T z$，即沿负法线$-\lambda^T$方向平移超平面 $\lambda^T z = b$ 直至其成为S的支撑超平面，此时，$\lambda^T z = \lambda^T x$，$x$即为最优解

2 对偶锥与广义不等式的对偶

- **通过对偶不等式求最小元和极小元**:
- **关于 $\preceq_K$ 的极小元**:当对于某个 $\lambda \succ_{K^*} 0$,x 在 S 上极小化 $\lambda^T z$,元素 $x \in S$ 是集合 S 极小元(分离$-K+x$和S,逆命题不一定成立). 当集合 S 为凸集时,对于任意极小元 x,存在非零 $\lambda \succ_{K^*} 0$, 使得 x 在 S 上极小化 $\lambda^T z$.

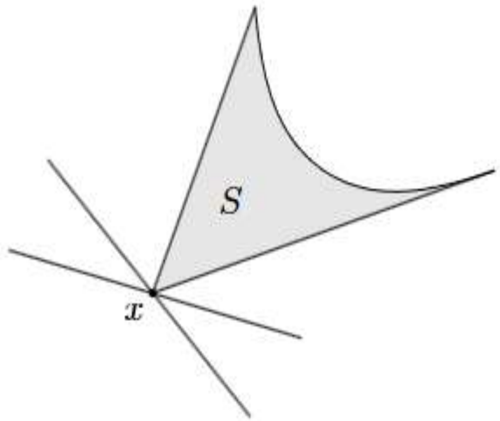


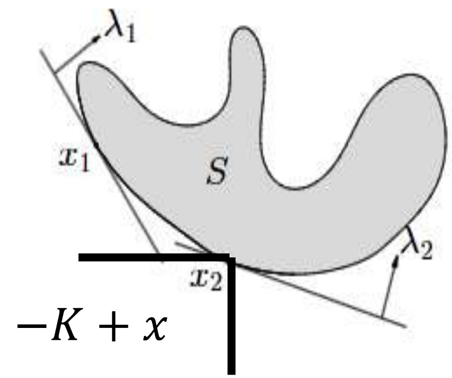
超平面:$\{z \mid \lambda^T(z-x)=0\}$



超平面:$\{z \mid \lambda^T(z-x_2)=0\}$

2 对偶锥与广义不等式的对偶





超平面：$\{z \mid \lambda^T(z-x_2)=0\}$

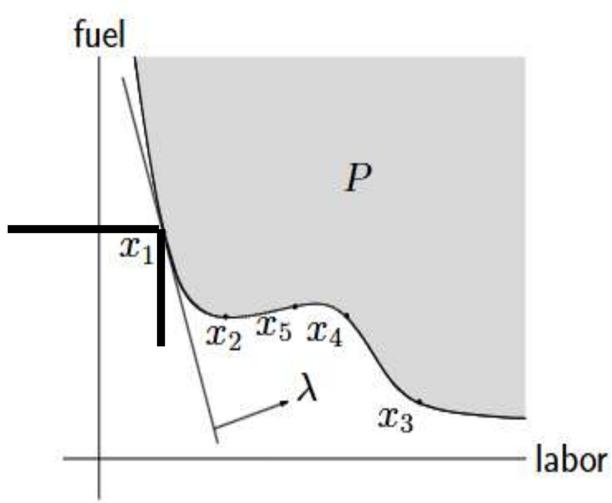
1. 对于极小元的情况，极小化$\lambda^T z$ 同样也是在超平面$\lambda^T z=b$为支撑超平面时取得，另外，如果$\lambda \succ_{K^*} 0$， $\lambda^T z=b$也是$-K+x_2$的支撑超平面， x_2 为极小元（如上图）

2. 逆命题不成立，因为如果S非凸，可能不存在同时为S和$-K+x_2$支撑超平面的超平面（即分离超平面），也就是说极小元不一定极小化$\lambda^T z$；但如果S是凸集，总是对于某个$\lambda \succ_{K^*} 0$，（1）中的情况成立

2 对偶锥与广义不等式的对偶*

- **例4：最佳产品设计：**
  - 不同的生产方法使用不同数量的资源$x \in \mathbb{R}^n$
  - 生产集合P:所有可能的生产方法的资源向量 x
  - 有效(**帕累托最优**)的方法对应于相对于 $\mathbb{R}^n_+$ 极小的资源向量 x（对应于不同的价格向量λ）

- **示例** $(\boldsymbol{n}=\mathbf{2})$：$x_1, x_2, x_3$是有效的，$x_4, x_5$无效



谢 谢 ！