最优化导论第三次作业题

1. 设 $f(x)$ 为凸函数。证明： $f(x)$ 为凸函数的充要条件是对任意的 $x, y \in \mathbb{R}^n$，一元函数

$$\varphi(\alpha) = f(x + \alpha y)$$

是关于 α 的凸函数。

2. 设 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 为连续函数。 证明：f 是凸函数当且仅当对于任意的 $x, y \in \mathbb{R}^n$， 其在连线上取值的平均值不超过两端点函数值的平均值，即：

$$\int_0^1 f(x + \lambda(y - x))\, d\lambda \le \frac{f(x) + f(y)}{2}.$$

3. 设 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 为凸函数，且 $\mathbb{R}_+ \subseteq \mathrm{dom}\, f$。定义其“滑动平均”函数

$$F(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t)\, dt, \qquad \mathrm{dom}\, F = \mathbb{R}_{++}.$$

证明 F 为凸函数。（可假设 f 可微。）

4. 判断下列函数在给定定义域上是否为凸函数：

(a) $f(x) = e^x - 1$，定义域 $\mathbb{R}$.

(b) $f(x_1, x_2) = x_1 x_2$，定义域 $\mathbb{R}^2_{++}$.

(c) $f(x_1, x_2) = 1/(x_1 x_2)$，定义域 $\mathbb{R}^2_{++}$.

(d) $f(x_1, x_2) = x_1/x_2$，定义域 $\mathbb{R}^2_{++}$.

(e) $f(x_1, x_2) = x_1^2/x_2$，定义域 $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_{++}$.

(f) $f(x_1, x_2) = x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha}$，其中 $0 \le \alpha \le 1$，定义域 $\mathbb{R}^2_{++}$.

5. 证明以下函数在其定义域上是凸函数，可以使用复合规则：

(a) $f(x) = -\log\Big(-\log\Big(\sum_{i=1}^m e^{a_i^\top x + b_i}\Big)\Big), \quad \mathrm{dom} f = \Big\{x \mid \sum_{i=1}^m e^{a_i^\top x + b_i} < 1\Big\}.$

(b) $f(x, u, v) = -\sqrt{uv - x^\top x}, \quad \mathrm{dom} f = \{(x, u, v) \mid u > 0, v > 0, uv > x^\top x\}.$

(c) $f(x, u, v) = -\log(uv - x^\top x), \quad \mathrm{dom} f = \{(x, u, v) \mid u > 0, v > 0, uv > x^\top x\}.$

(d) $f(x, t) = -\big(t^p - \|x\|_p^p\big)^{1/p}, \quad p > 1, \quad \mathrm{dom} f = \{(x, t) \mid t \ge \|x\|_p\}.$

(e) $f(x, t) = -\log\big(t^p - \|x\|_p^p\big), \quad p > 1, \quad \mathrm{dom} f = \{(x, t) \mid t > \|x\|_p\}.$

注：常用结论：

- `log-sum-exp` 函数 $\log \sum_i e^{z_i}$ 是凸的；

- $-\log(y)$ 在 $\mathbb{R}_{++}$ 上凸且严格递减；
- $\sqrt{xy}$ 在 $\mathbb{R}_{++}^2$ 上凹；
- $\frac{x^\top x}{u}$ 在 $\{u>0\}$ 上对 (x,u) 凸；
- $\|x\|_p^p/u^{p-1}$ 在 $\{u>0\}$ 上对 (x,u) 凸；
- 若 h 凸且非增，而 g 凹，则 $h\circ g$ 凸。

6. 设 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 是定义在整个 $\mathbb{R}^n$ 上的凸函数。
若存在一个有限划分

$$\mathbb{R}^n = X_1\cup X_2\cup\cdots\cup X_L,$$

其中每个 X_i 的内部非空，且 $\operatorname{int} X_i\cap\operatorname{int} X_j=\emptyset$（当 $i\neq j$ 时）， 并且在每个子集 X_i 上，f 都是仿射函数：$f(x)=a_i^\top x+b_i, \quad x\in X_i$. 证明： $f(x)=\max_{i=1,\dots,L}(a_i^\top x+b_i)$.

7. 设 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 为凸函数，定义其透视函数（perspective function）为

$$g(x,t)=t\,f(x/t), \quad \text{定义域 } \operatorname{dom} g=\{(x,t)\mid x/t\in\operatorname{dom} f,\ t>0\}.$$

证明：

(a) $\operatorname{dom} g$ 是凸集；

(b) 对任意 $(x,t),(y,s)\in\operatorname{dom} g$，以及 $0\le\theta\le 1$，成立：

$$g(\theta x+(1-\theta)y,\ \theta t+(1-\theta)s)\le\theta g(x,t)+(1-\theta)g(y,s).$$