最优化方法导论第二次小测

1. 求下列各个锥的对偶锥 K^* 。

(a) $K = \{0\}$，在$\mathbb{R}^2$空间

(b) $K = \mathbb{R}^2$

(c) $K = \{(x_1, x_2) \mid |x_1| \leq x_2\}$

(d) $K = \{(x_1, x_2) \mid x_1 + x_2 = 0\}$

解： (a) $K = \{0\}$

$$\begin{aligned} K^* &= \{y \mid y^T x \geq 0,\ \forall x \in K\} \\ &= \{y \mid y^T 0 \geq 0\} \\ &= \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

因此：$K^* = \mathbb{R}^2.$

(b) $K = \mathbb{R}^2$

我们需要找出所有 $y \in \mathbb{R}^2$，使得

$$y^T x \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^2.$$

但若 $y \neq 0$，取 $x = -y$，则

$$y^T x = -\|y\|_2^2 < 0,$$

不满足条件。因此唯一可能的选择是 $y = 0$。于是：$K^* = \{0\}.$

(c) $K = \{(x_1, x_2) \mid |x_1| \leq x_2\}$

下证该锥是自对偶的，即$K^* = K.$。我们分别证明 $K^* \subseteq K$ 与 $K \subseteq K^*$。

（1）证明 $K^* \subseteq K$:

取任意 $y = (y_1, y_2) \in K^*$。按定义，对所有 $x \in K$ 有

$$y_1 x_1 + y_2 x_2 \geq 0.$$

令 x 取两条边界射线上的点（皆属于 K）：

- 取 $x = (t, t)$（即 $x_1 = x_2 = t > 0$），则

$$y^\top x = t(y_1 + y_2) \geq 0 \ \Rightarrow\ y_1 + y_2 \geq 0.$$

- 取 $x = (-t, t)$（即 $x_1 = -t,\ x_2 = t > 0$），则

$$y^\top x = t(-y_1 + y_2) \geq 0 \ \Rightarrow\ y_2 - y_1 \geq 0.$$

两式合并得

$$y_2 \geq |y_1|.$$

故 $y \in K$，从而 $K^* \subseteq K$。

（2）证明 $K \subseteq K^*$：

取任意 $y = (y_1, y_2) \in K$，即 $y_2 \geq |y_1|$。对任意 $x = (x_1, x_2) \in K$（即 $x_2 \geq |x_1|$），有

$$\begin{aligned} y^\top x = y_1 x_1 + y_2 x_2 \ &\geq \ -|y_1||x_1| + y_2 x_2 \\ &\geq \ -|y_1|\, x_2 + y_2 x_2 \quad (\text{因 } x_2 \geq |x_1| \geq 0) \\ &= \ (y_2 - |y_1|)\, x_2 \ \geq \ 0 \quad (\text{因 } y_2 \geq |y_1|,\ x_2 \geq 0). \end{aligned}$$

于是对所有 $x \in K$ 都有 $y^\top x \geq 0$，即 $y \in K^*$。故 $K \subseteq K^*$。

由上两步得 $K^* = K$。证毕。

(d) $K = \{(x_1, x_2) \mid x_1 + x_2 = 0\}$

这里 K 是一条过原点的直线。 其正交方向为 $(1,1)$，即所有与该直线垂直的向量形成对偶锥。 因此：

$$K^* = \{(x_1, x_2) \mid x_1 - x_2 = 0\}。$$

2. 设函数 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$，定义其上镜图（epigraph）为：

$$\operatorname{epi} f = \{(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x \in \operatorname{dom} f,\ f(x) \leq t\}.$$

证明：函数 f 为凸函数，当且仅当其上镜图 epi f 为凸集。

证：

(⇒) 若 f 为凸函数。
任取 $(x_1, t_1), (x_2, t_2) \in \operatorname{epi} f$，即：

$$t_1 \geq f(x_1), \quad t_2 \geq f(x_2).$$

对任意 $\theta \in [0,1]$，考虑点：

$$(x_\theta, t_\theta) = \big(\theta x_1 + (1-\theta) x_2,\ \theta t_1 + (1-\theta) t_2\big)。$$

由 f 的凸性：

$$f(x_\theta) \leq \theta f(x_1) + (1-\theta) f(x_2) \leq \theta t_1 + (1-\theta) t_2 = t_\theta。$$

因此 $(x_\theta, t_\theta) \in \operatorname{epi} f$，说明 $\operatorname{epi} f$ 对凸组合封闭，故为凸集。

(⇐) 若 $\operatorname{epi} f$ 为凸集。
任取 $x_1, x_2 \in \operatorname{dom} f$，令

$$t_1 = f(x_1), \quad t_2 = f(x_2)。$$

则 $(x_1, t_1), (x_2, t_2) \in \operatorname{epi} f$。
由凸性假设，

$$(x_\theta, t_\theta) = \big(\theta x_1 + (1-\theta)x_2,\ \theta t_1 + (1-\theta)t_2\big) \in \operatorname{epi} f。$$

即有：

$$f(\theta x_1 + (1-\theta)x_2) \le t_\theta = \theta f(x_1) + (1-\theta)f(x_2),$$

这正是凸函数的定义。故 f 为凸函数。

3. 判断集合是否为凸集，并说明理由：

$$S = \{(x_1, x_2) \mid x_2 \ge |x_1|\}$$

解：

根据定义，若对任意 $x^{(1)}, x^{(2)} \in S$ 和任意 $\theta \in [0,1]$， 其凸组合 $\theta x^{(1)} + (1-\theta)x^{(2)} \in S$，则 S 为凸集。

设

$$x^{(1)} = (x_1^{(1)}, x_2^{(1)}), \quad x^{(2)} = (x_1^{(2)}, x_2^{(2)}),$$

且满足

$$x_2^{(1)} \ge |x_1^{(1)}|, \quad x_2^{(2)} \ge |x_1^{(2)}|.$$

对任意 $\theta \in [0,1]$，考虑

$$x = \theta x^{(1)} + (1-\theta)x^{(2)} = (\theta x_1^{(1)} + (1-\theta)x_1^{(2)},\ \theta x_2^{(1)} + (1-\theta)x_2^{(2)}).$$

由绝对值的凸性（即 $|\theta a + (1-\theta)b| \le \theta|a| + (1-\theta)|b|$）可得：

$$|\,\theta x_1^{(1)} + (1-\theta)x_1^{(2)}\,| \le \theta|x_1^{(1)}| + (1-\theta)|x_1^{(2)}|.$$

又因为

$$x_2^{(1)} \ge |x_1^{(1)}|, \quad x_2^{(2)} \ge |x_1^{(2)}|,$$

所以

$$\theta x_2^{(1)} + (1-\theta)x_2^{(2)} \ge \theta|x_1^{(1)}| + (1-\theta)|x_1^{(2)}| \ge |\,\theta x_1^{(1)} + (1-\theta)x_1^{(2)}\,|.$$

因此：

$$x_2 = \theta x_2^{(1)} + (1-\theta)x_2^{(2)} \ge |x_1|,$$

即 $x \in S$。因此该集合是凸集。

4. 设 f 是一个凸函数，定义函数 g 为

$$g(x) = \inf_{\alpha > 0} \frac{f(\alpha x)}{\alpha}.$$

(a) 证明 g 是齐次的，即对所有 $t \ge 0$，都有

$$g(tx) = tg(x)。$$

(b) 证明 g 是 f 的最大齐次下界函数： 若 h 是齐次的且满足 $h(x) \leq f(x)$ 对所有 x 都成立，则有 $h(x) \leq g(x)$ 对所有 x 成立。

(c) 证明 g 是凸函数。

解：(a)
当 $t > 0$ 时，

$$g(tx) = \inf_{\alpha>0} \frac{f(\alpha tx)}{\alpha} = t \inf_{\alpha>0} \frac{f(\alpha tx)}{t\alpha} = tg(x)。$$

当 $t = 0$ 时，$g(tx) = g(0) = 0$。
因此，g 是齐次的。

(b) 若 h 是一个齐次的下界函数，则

$$h(x) = \frac{h(\alpha x)}{\alpha} \leq \frac{f(\alpha x)}{\alpha}, \quad \forall \alpha > 0。$$

对 α 取下确界，得到 $h(x) \leq g(x)$。
因此，g 是 f 的最大齐次下界函数。

(c) 取任意 $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ 与 $\theta \in [0,1]$，设 $x_\theta = \theta x_1 + (1-\theta)x_2$。 由定义：

$$g(x_i) = \inf_{\alpha>0} \frac{f(\alpha x_i)}{\alpha}, \quad i = 1,2。$$

取任意 $\epsilon > 0$，根据下确界定义，可找到 $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ 使得：

$$\frac{f(\alpha_i x_i)}{\alpha_i} \leq g(x_i) + \epsilon, \quad i = 1,2。$$

定义：

$$\bar{\alpha} = \theta\alpha_1 + (1-\theta)\alpha_2 > 0。$$

由 f 的凸性：

$$\begin{aligned} f(\bar{\alpha} x_\theta) &= f\Big(\theta \frac{\bar{\alpha}}{\alpha_1}(\alpha_1 x_1) + (1-\theta)\frac{\bar{\alpha}}{\alpha_2}(\alpha_2 x_2)\Big) \\ &\leq \theta \frac{\bar{\alpha}}{\alpha_1} f(\alpha_1 x_1) + (1-\theta)\frac{\bar{\alpha}}{\alpha_2} f(\alpha_2 x_2)。 \end{aligned}$$

两边同除以 $\bar{\alpha}$，得：

$$\frac{f(\bar{\alpha} x_\theta)}{\bar{\alpha}} \leq \theta \frac{f(\alpha_1 x_1)}{\alpha_1} + (1-\theta)\frac{f(\alpha_2 x_2)}{\alpha_2} \leq \theta(g(x_1)+\epsilon) + (1-\theta)(g(x_2)+\epsilon)。$$

因为

$$g(x_\theta) = \inf_{\alpha>0} \frac{f(\alpha x_\theta)}{\alpha} \leq \frac{f(\bar{\alpha} x_\theta)}{\bar{\alpha}},$$

于是有：

$$g(x_\theta) \leq \theta g(x_1) + (1-\theta) g(x_2) + \epsilon。$$

由于 $\epsilon > 0$ 任意，令 $\epsilon \to 0$，得到：

$$g(\theta x_1 + (1-\theta)x_2) \le \theta g(x_1) + (1-\theta)g(x_2)。$$

因此 g 为凸函数。