第四讲：凸集

定义凸优化问题的可行解集

杨 林

大 纲

1.仿射与凸集

2.凸锥(锥)

3.半空间

4.球、椭球

5. 多面体

大 纲

1.仿射与凸集

2.凸锥(锥)

3.半空间

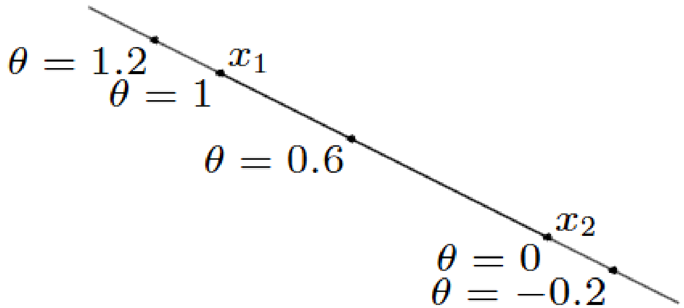
4.球、椭球

5. 多面体

1 仿射与凸集

- **定义1（直线）**：通过x_1，x_2的所有点：

$$x = \theta x_1 + (1-\theta)x_2, \theta \in \mathbb{R}$$



- **定义2（仿射集）**：包含集合中任意两点所确定的直线

- **示例**（查看下一页的分析）：线性方程组的解集 $\{x|Ax = b\}$（反之，每个仿射集合都可以表示为线性方程组的解集）

1 仿射与凸集

■ **仿射集的另一种解释:**

假设集合C是仿射集, 那么

$$C = V + x_0 = \{v + x_0 | v \in V\}$$

对于某个 $x_0 \in C$, 其中 V 是一个子空间

■ **分析:** 对于仿射集 C 和 $x_0 \in C$

$$V = C - x_0 = \{x - x_0 | x \in C\}$$

是一个子空间(对和以及标量乘法运算封闭)

1 仿射与凸集

■ **另一种解释的证明**:

假设 C 是仿射集且 $x_0 \in C$, 则存在:

（1） $0 \in C - x_0$ （我们需要这个条件吗？）

（2） 对标量乘法封闭

$$x_1 \in C - x_0 \Rightarrow x_1 + x_0 \in C$$

$$ax_1 + x_0 = a(x_1 + x_0) + (1-a)x_0 \in C \Rightarrow ax_1 \in C - x_0$$

(3) 对加法封闭

$$x_1 \in C - x_0, x_2 \in C - x_0 \Rightarrow 2x_1 \in C - x_0, 2x_2 \in C - x_0$$

$$x_1 + x_2 + x_0 = \frac{1}{2}(2x_1 + x_0) + \frac{1}{2}(2x_2 + x_0) \in C$$

1 仿射与凸集

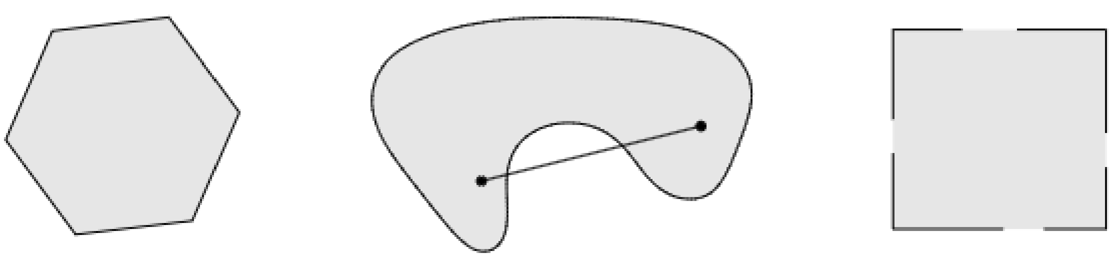
■ **定义3(线段)**: x_1, x_2之间的所有点:

$$x = \theta x_1 + (1-\theta)x_2, \theta \in [0,1]$$

■ **定义4(凸集)**: 包含集合中任意两点之间的线段.

$$x_1, x_2 \in C, \theta \in [0,1] \Rightarrow \theta x_1 + (1-\theta)x_2 \in \mathrm{C}$$

□ **例** 1: 一个凸的, 两个非凸的



大 纲

1.仿射与凸集

2.凸锥(锥)

3.半空间

4.球、椭球

5. 多面体

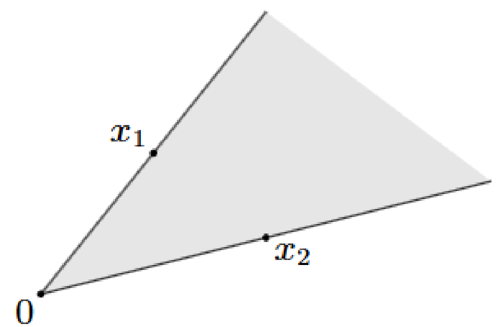
2 凸锥(锥)

- **定义5(x_1 , x_2的锥(非负)组合)**:任意形如

$$x = \theta_1 x_1 + \theta_2 x_2$$

的点. 其中$\theta_1, \theta_2 \geq 0$.

(凸集即为集合上的凸组合)



- **定义6(凸锥)**:包含集合中所有点的锥组合的集合

大 纲

1.仿射与凸集

2.凸锥(锥)

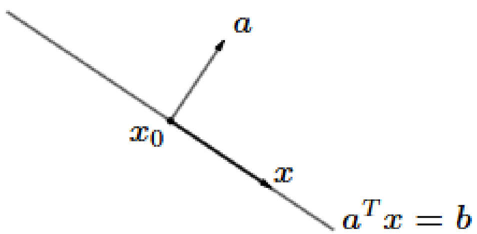
3.半空间

4.球、椭球

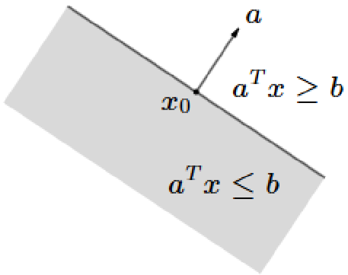
5. 多面体

3 半空间

- **定义7(超平面)**:形式为 $\{x \mid a^T x = b\}$ 的集合, $a \neq 0$



- **定义8(半空间)**:形式为 $\{x \mid a^T x \leq b\}$ 的集合, $a \neq 0$



- a 是一个常向量(确定了法线的方向)
- 超平面是仿射的且是凸的; 半空间是凸的

大 纲

1.仿射与凸集

2.凸锥(锥)

3.半空间

4.球、椭球

5. 多面体

4 球、椭球

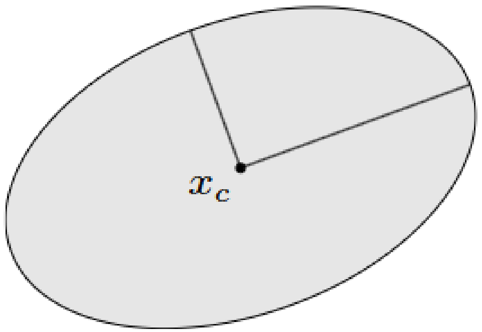
- **定义9((欧几里得)球)**:以x_c为中心,以r为半径.

$$B(x_c,r) = \{x \mid \| x - x_c \|_2 \le r\} = \{x_c + ru \mid \| u \|_2 \le 1\}$$

- **定义10(椭球)**:形如

$$\{x \mid \|(x - x_c)^T P(x - x_c)\|_2 \le 1\}$$

的集合. 其中 $P \in S_{++}^n$(即 P 是对称正定矩阵)



- 其他表示形式:$\{x_c + Au \mid \| u \| \le 1\}$, 其中 A 为方阵且非奇异

大 纲

1.仿射与凸集

2.凸锥(锥)

3.半空间

4.球、椭球

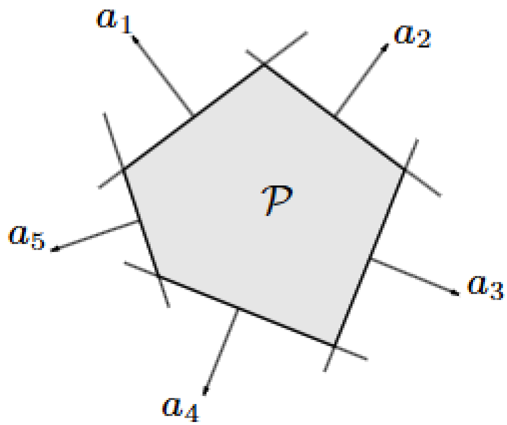
5. 多面体

5 多面体

■ **定义25(多面体)**:有限多线性不等式和等式的解集

$$Ax \preceq b, Cx = d$$

($A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $C \in \mathbb{R}^{p\times n}$, $\preceq$ 是分量不等式)



□ 多面体是有限个半空间和超平面的交集

5 多面体

■ **符号**:

1. S^n是$n \times n$ 阶对称矩阵的集合
2. $S_+^n = \{X \in S^n \mid X \succeq 0\}$: $n \times n$ 阶半正定矩阵

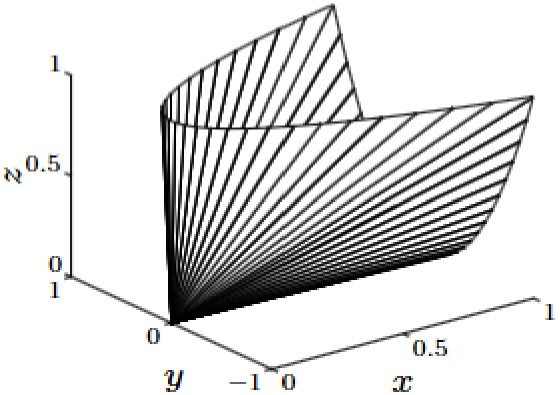
$$X \in S_+^n \Leftrightarrow z^T X z, \forall z$$

3. S_+^n是一个凸锥
4. $S_{++}^n = \{X \in S^n \mid X \succ 0\}$: $n \times n$ 阶正定矩阵

□ **注记**: 对于向量不等式来说，有时可以用符号 $\le$ 和 $\ge$ 代替符号 $\preceq$ 和 $\succeq$. 尽管这里的符号类似向量的符号，但是意义非常不一样. 特别的，矩阵 $X \succeq 0$ 并不意味着对于所有矩阵的元素下标 i, j 都有元素$x_{ij} \ge 0$

5 多面体

- **例** 2: $\begin{bmatrix} x & y \\ y & z \end{bmatrix} \in S_+^2$



- **证明:**

假设 $A \geq 0$ 且 $B \geq 0$, 对 $\forall \theta_1, \theta_2 \geq 0$

$$x^T(\theta_1 A + \theta_2 B)x = \theta_1 x^T A x + \theta_2 x^T B x \geq 0$$

即 $(\theta_1 A + \theta_2 B) \in S_+^2$.

谢 谢 ！