

最优化导论第二次作业题

1. 一个集合 C 被称为 **中点凸的**, 如果当任意两个点 $a, b \in C$ 时, 它们的平均值或中点 $(a+b)/2$ 也在 C 中。显然, 一个凸集必然是中点凸的。可以证明, 在一些温和条件下, 中点凸性蕴含凸性。作为一个简单情形, 请证明: 如果 C 是闭集并且是中点凸的, 那么 C 是凸的。

2. 集合 $C \subseteq \mathbf{R}^n$ 的支撑函数定义为

$$S_C(y) = \sup\{y^T x \mid x \in C\}.$$

(我们允许 $S_C(y)$ 取值为 $+\infty$ 。) 假设 C 和 D 是 \mathbf{R}^n 中的闭凸集。证明: 当且仅当它们的支撑函数相等时, $C = D$ 。

3. 考虑集合

$$C = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \mid |x_1| + \sqrt{|x_2|} \leq 1\}.$$

判断集合 C 是否为凸集

4. 设 \mathbf{R}^2 中的凸集 $S_1 = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$ (单位闭圆盘), $S_2 = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \geq 1\}$ (右半闭半空间)。求 $S = S_1 \cap S_2$, 并证明 S 是凸集。

5. 设 a 和 b 是 \mathbf{R}^n 中的两个不同点。证明所有距离 a 比距离 b 更近的点 (欧几里得范数意义下), 即

$$\{x \mid \|x - a\|_2 \leq \|x - b\|_2\},$$

构成一个半空间。将其显式地写成形如 $c^T x \leq d$ 的不等式。

6. 设 $C \subseteq \mathbf{R}^n$ 为以下二次不等式的解集:

$$C = \{x \in \mathbf{R}^n \mid x^T A x + b^T x + c \leq 0\},$$

其中 $A \in \mathbf{S}^n$, $b \in \mathbf{R}^n$, $c \in \mathbf{R}$ 。

证明: 若 $A \succeq 0$, 则 C 是凸集。

7. 证明: 如果 S_1 和 S_2 是 $\mathbf{R}^{m \times n}$ 中的凸集, 那么它们的部分和

$$S = \{(x, y_1 + y_2) \mid x \in \mathbf{R}^m, y_1, y_2 \in \mathbf{R}^n, (x, y_1) \in S_1, (x, y_2) \in S_2\}$$

也是凸集。

8. 设 $C, D \subset \mathbf{R}^n$ 为两个不相交的凸集。考虑集合

$$S = \{(a, b) \in \mathbf{R}^{n+1} \mid a^T x \leq b, \forall x \in C; a^T y \geq b, \forall y \in D\}.$$

证明: 集合 S 是一个凸集。

9. 设 K^* 为凸锥 K 的对偶锥。证明以下性质:

(a) K^* 确实是一个凸锥。

(b) 若 $K_1 \subseteq K_2$, 则 $K_2^* \subseteq K_1^*$ 。

(c) K^* 是闭集。

(d) K^* 的内部由下式给出: $\text{int } K^* = \{y \mid y^T x > 0 \ \forall x \in K\}$.

(e) 如果 K 有非空内部, 则 K^* 是尖的 (pointed) 。

(f) K^{**} 是 K 的闭包。(因此, 如果 K 是闭集, 则 $K^{**} = K$ 。)

10. 设 D 为 \mathbb{R}^n 中非空闭集, 并且是凸集, 且 $y \notin D$ 。证明存在唯一的点 $\bar{x} \in D$, 使得 $\|y - \bar{x}\| = \inf_{x \in D} \|y - x\|$ 。