# 最优化方法导论第三次小测

**1.** 验证以下函数是否为凸函数（给出分析过程）：

(1) $f(x,y) = x^2y^2 + \frac{x}{y}, \quad x > 0, y > 0.$

(2) $f(x,y) = \log(e^x + e^y) - \log x, \quad x > 0.$

(3) $f(x,y) = \exp\{x^2 + e^{-y}\}, \quad x > 0, y > 0.$

**解：** (1) $f(x,y) = x^2y^2 + \frac{x}{y}$

计算 Hessian 矩阵：

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2y^2 & 4xy - \frac{1}{y^2} \\ 4xy - \frac{1}{y^2} & 2x^2 + \frac{2x}{y^3} \end{bmatrix}.$$

在点 (1,1) 处，

$$H(1,1) = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad \det H(1,1) = 2 \cdot 4 - 3^2 = 8 - 9 = -1 < 0.$$

Hessian 不定，因此 $f$ 不是凸函数。

(2) $f(x,y) = \log(e^x + e^y) - \log x$

对 $f$ 求 Hessian：

$$H = \begin{bmatrix} \frac{e^x e^y}{(e^x + e^y)^2} + \frac{1}{x^2} & -\frac{e^x e^y}{(e^x + e^y)^2} \\ -\frac{e^x e^y}{(e^x + e^y)^2} & \frac{e^x e^y}{(e^x + e^y)^2} \end{bmatrix}.$$

对任意向量 $v = (v_1, v_2)^T$，

$$v^T H v \quad = \frac{1}{x^2} v_1^2 + \frac{e^x e^y}{(e^x + e^y)^2} (v_1 - v_2)^2 \ \geq 0.$$

故 $H$ 半正定，$f$ 为凸函数。

(3) $f(x,y) = \exp(x^2 + e^{-y})$

令

$$g(x,y) = x^2 + e^{-y},$$

计算 Hessian：

$$H = e^{g}\begin{bmatrix}4x^2+2 & -2xe^{-y}\\ -2xe^{-y} & e^{-2y}+e^{-y}\end{bmatrix}.$$

注意：

$$4x^2+2>0,\quad e^{-2y}+e^{-y}>0,$$

并且

$$\det H = e^{2g}[(4x^2+2)(e^{-2y}+e^{-y})-(2xe^{-y})^2]>0.$$

主对角元大于 0、行列式大于 0，Hessian 正定，$f$ 严格凸。

**2.** 判断以下规划模型是否为凸规划（需说明理由)

(1)

$$\begin{aligned}\min f(X) \quad & = x_1^2+x_2^2+8\\ \text{s.t.} \quad & x_1^2-x_2\ge 0,\\ & -x_1-x_2^2+2=0,\\ & x_1,\ x_2\ge 0.\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}\min f(X) \quad & = 2x_1^2+x_2^2+x_3^2-x_1x_2\\ \text{s.t.} \quad & x_1^2+x_2^2\le 4,\\ & 5x_1^2+x_3=10,\\ & x_1,\ x_2,\ x_3\ge 0.\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}\max f(X) \quad & = x_1+x_2\\ \text{s.t.} \quad & x_1^2+x_2^2\le 1,\\ & x_1\ge 0,\ x_2\ge 0.\end{aligned}$$

解：(1)

$$\begin{cases}\min f(X)=x_1^2+x_2^2+8,\\ g_1(X)=x_1^2-x_2\ge 0,\\ g_2(X)=-x_1-x_2^2+2=0,\\ x_1,x_2\ge 0.\end{cases}$$

$f(X), g_1(X), g_2(X)$ 的 Hessian 行列式：

$$H_f=\begin{bmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\,\partial x_2}\\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2\,\partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 0\\0 & 2\end{bmatrix},\qquad \left|H_f\right|=4>0;$$

知 $f(X)$ 为严格凸函数，$g_1(X)$ 为凸函数，$g_2(X)$ 为凹函数，
所以不是一个凸规划问题。

(2)

$$\begin{cases}\min f(X)=2x_1^2+x_2^2+x_3^2-x_1x_2,\\ g_1(X)=x_1^2+x_2^2\le 4 \;\Leftrightarrow\; g_1(X)=-(x_1^2+x_2^2)+4\ge 0,\\ g_2(X)=5x_1^2+x_3=10,\\ x_1,x_2,x_3\ge 0.\end{cases}$$

$f(X),g_1(X),g_2(X)$ 的 Hessian 行列式：

$$H_f=\begin{bmatrix}4 & -1 & 0\\-1 & 2 & 0\\0 & 0 & 2\end{bmatrix},\qquad \left|H_f\right|>0;$$

为凹函数；

$$H_{g_2}=\begin{bmatrix}10 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix},\qquad \left|H_{g_2}\right|=0,$$

是凸函数，但不是线性仿射变换。因此该模型不是凸规划问题。

(3)原问题

$$\max f(X)=x_1+x_2$$

等价于

$$\min\big(-f(X)\big)=-x_1-x_2$$

Hessian：

$$H_{-f}(X)=\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}\succcurlyeq 0,$$

说明 $-f(X)$ 为凸函数，$g_1(X),g_2(X),g_3(X)$ 为凹函数，
因此本模型 是一个凸规划问题。

**3.** 求解以下优化问题：

$$\begin{aligned} \min_{x,y\in\mathbb{R}^2} \quad & (x-1)^2+(y-2)^2 \\ \text{s.t.} \quad & x \le y \\ & x+2y \le 2 \end{aligned}$$

**解：** 该问题为凸优化问题，目标函数为严格凸函数，约束为仿射不等式，因此满足凸性条件，并且该问题满足 Slater 条件（例如点 $(-1,0)$ 为严格可行点）。因此 KKT 条件为充要条件。

构造 Lagrangian

$$\mathcal{L}(x,y,\mu)=(x-1)^2+(y-2)^2+\mu_1(x-y)+\mu_2(x+2y-2),$$

其中 $\mu_1,\mu_2 \ge 0$。

KKT 条件

$$\begin{cases} 2(x-1)+\mu_1+\mu_2=0, \\ 2(y-2)-\mu_1+2\mu_2=0, \\ x\le y, \qquad x+2y\le 2, \\ \mu_1\ge 0, \qquad \mu_2\ge 0, \\ \mu_1(x-y)=0, \\ \mu_2(x+2y-2)=0. \end{cases}$$

**情况 1：** $\mu_1=\mu_2=0$

第一行 KKT：

$$2(x-1)=0 \Longrightarrow x=1, \qquad 2(y-2)=0 \Longrightarrow y=2.$$

但：

$$x+2y=1+4=5>2,$$

违反约束，不可行。

**情况 2：** $\mu_1=0,\ \mu_2>0$

互补条件：

$$x+2y=2.$$

第一行 KKT：

$$2(x-1)+\mu_2=0 \quad \Rightarrow \quad \mu_2=2(1-x)$$

第二行:

$$2(y-2)+2\mu_2=0.$$

令:

$$x=2-2y,\qquad \mu_2=4y-2.$$

代入第二式:

$$2(y-2)+2(4y-2)=0$$

简化:

$$2y-4+8y-4=0$$

于是:

$$x=2-2y=2-\frac{8}{5}=\frac{2}{5}$$

并且:

$$\mu_1=0,\qquad \mu_2=4y-2=\frac{6}{5}>0.$$

满足 KKT 条件。

由于该问题是凸优化问题，满足 KKT 条件的点即为最优解，因此最优解为:

$$x^\star=\frac{2}{5},\qquad y^\star=\frac{4}{5}.$$

最优值为:

$$f(x^\star,y^\star)=\left(\frac{2}{5}-1\right)^2+\left(\frac{4}{5}-2\right)^2=\left(-\frac{3}{5}\right)^2+\left(-\frac{6}{5}\right)^2=\frac{9}{25}+\frac{36}{25}=\frac{45}{25}=\frac{9}{5}.$$

**4.** 将下列优化问题改写为线性规划（LP），假设 $d>\| c \|_1$:

$$\begin{array}{ll}\min\limits_{x} & \dfrac{\| Ax-b \|_1}{c^T x+d} \\ \text{s.t.} & \| x \|_\infty \le 1.\end{array}$$

解：令

$$y=\frac{x}{c^T x+d},\qquad t=\frac{1}{c^T x+d},$$

则:

（1）$\| Ay - bt \|_1 = \frac{\|Ax-b\|_1}{c^Tx+d}$

（2）$\| y \|_\infty \le t$

（3）$c^Ty + dt = 1$

因此原问题等价于:

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{y,t} & \| Ay - bt \|_1 \\ \text{s.t.} & \| y \|_\infty \le t, \\ & c^Ty + dt = 1. \end{array}$$

令 $s \ge 0$ 满足:

$$-s \le Ay - bt \le s,$$

则目标函数等价于最小化 $1^Ts$。

又 $\| y \|_\infty \le t$ 可写成:

$$-t\mathbf{1} \le y \le t\mathbf{1}.$$

最终得到 LP:

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{y,t,s} & 1^Ts \\ \text{s.t.} & -t\mathbf{1} \le y \le t\mathbf{1}, \\ & -s \le Ay - bt \le s, \\ & c^Ty + dt = 1. \end{array}$$