南京大学最优化导论期中试题

姓名： **学号：**

1. 判断题（请判断下列命题的正确性，在括号内打“✔”或“✗”）(30 分)

( ) （1）下列函数 $\|\cdot\|: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 若满足以下三个条件，则称其为范数：

1. $\| x \| \geq 0$，且 $\| x \| = 0$ 当且仅当 $x = 0$；
2. $\| tx \| = t \| x \|$，其中 $t \in \mathbb{R}$）；
3. $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$。

( ) （2）对偶锥一定是凸锥。

( ) （3）任意多个闭集的并集仍是闭集。

( ) （4）设 $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon\ x\,y = 0\}$，并采用 $\mathbb{R}^2$ 上的通常加法与数乘，则V 是实数域上的线性空间。

( ) （5）满足“对锥组合运算封闭（包含集合中所有点的锥组合）”条件的集合一定是凸集合。

( ) （6）若 $S, T \subset V(F)$ 均为子空间，则它们的并 $S \cup T$ 也是子空间。

( ) （7）用复合函数准则判断一个函数是不是凸的，其前提是该函数必须在其定义域上可微。

( ) （8）无限个凸集的交集不一定是凸集。

( ) （9）所有范数都是凸函数。

( ) （10）集合的并集一定不是凸集。

( ) （11）凸函数的上镜图一定是凸集，反之，上镜图是凸集的函数则不一定是凸函数。

( ) （12）凸函数一定是连续函数。

( ) （13）非负加权求和对于拟凸函数和凸函数都是保凸运算。

( ) （14）$K = \mathbb{R}^n_+$、$K = S^n_+$ 都是自对偶锥。”

( ) （15）在定义域 $\{(x, y) \mid x > 0,\ y > 0\}$ 上，函数

$$f(x,y)=x^2y^2+\frac{x}{y}$$

是凸函数。

2. 设 $C\subseteq\mathbb{R}^n$，对任意实数 $\lambda\geq 0$，定义 $\lambda C=\{\lambda x: x\in C\}$, 对任意集合 $A,B\subseteq\mathbb{R}^n$，定义 $A+B=\{a+b: a\in A,\, b\in B\}$。证明：集合 C 是凸集，当且仅当对于所有非负实数 $\alpha,\beta\geq 0$，有$(\alpha+\beta)C=\alpha C+\beta C$.（12 分）

3. 两个平行的超平面 $\{x \in \mathbb{R}^n | a^T x = b_1\}$ 和 $\{x \in \mathbb{R}^n | a^T x = b_2\}$ 之间的距离是多少？（8 分）

4. 设 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$为非负且凸的函数， $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 为正且凹的函数。证明：定义在 $\mathrm{dom}\, f \cap \mathrm{dom}\, g$ 上的函数$h(x) = \frac{f(x)^2}{g(x)}$是凸函数。（提示：可以直接用当 $v > 0$ 时，函数 $\frac{u^2}{v}$ 在 (u, v) 上是凸的。）（10 分）

5. 设 a 和 b 是 $\mathbf{R}^n$ 中的两个不同点。证明所有距离 a 比距离 b 更近的点（欧几里得范数意义下），即

$$\{x \mid \| x - a \|_2 \leq \| x - b \|_2\},$$

构成一个半空间。将其显式地写成形如 $c^T x \leq d$ 的不等式。（8 分）

6. 设 $C \subseteq \mathbf{R}^n$ 为以下二次不等式的解集：

$$C = \{x \in \mathbf{R}^n \mid x^T A x + b^T x + c \leq 0\},$$

其中 $A \in \mathbf{S}^n$，$b \in \mathbf{R}^n$，$c \in \mathbf{R}$。证明：若 $A \succcurlyeq 0$，则 C 是凸集。（10 分）

7. 设 K^* 为凸锥 K 的对偶锥。证明以下性质：（12 分）

(a) K^* 确实是一个凸锥。

(b) 若 $K_1 \subseteq K_2$，则 $K_2^* \subseteq K_1^*$。

(c) 如果 K 有非空内部，则 K^* 是尖的。

8. 设 f 是凸函数，且系数满足：

$$\lambda_1 > 0, \quad \lambda_i \leq 0 \text{（对于 } i = 2, \ldots, n\text{），} \quad \lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1\text{。}$$

令 $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathrm{dom}\, f$，并且$\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n \in \mathrm{dom}\, f$。 证明以下不等式恒成立：

$$f(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n) \geq \lambda_1 f(x_1) + \cdots + \lambda_n f(x_n)\text{。}$$

（提示：可利用 Jensen’s inequality：若 f 为凸函数，且 $\lambda_i \geq 0, \sum_i \lambda_i = 1$，则 $f(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, x_i) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, f(x_i)$。）（10 分）