第三讲：线性空间与集合导论

一种定义集合的新方法

杨 林

大 纲

1. 线性空间

2. 开集与闭集

大 纲

1. 线性空间

2. 开集与闭集

1 线性空间

定义具有闭合运算的集合. . .

- **定义1 (线性空间)** : 对于集合 V (例如$\mathbb{R}^n$) 以及域 F (例如$\mathbb{R}$), 定义V 上的加法 (记作$V(F)$)

$$\forall x, y \in V \Rightarrow x + y \in V,$$

以及标量乘法 (数乘)

$$\forall x \in V, \forall \alpha \in F \Rightarrow \alpha x \in V,$$

此外, 满足 (在实数集上可以忽略、本课程只作为了解) :

- ☐ $x + y = y + x$ (加法交换律)
- ☐ $1x = x$ (数乘单位元)
- ☐ $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$ (分配律)
- ☐ $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$ (分配律)
- ☐ $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$ (数乘结合律)
- ☐ 加法结合律
- ☐ 零元存在
- ☐ 负元存在

1 线性空间

- **例** 1:

1. 自然数集合
2. 整数集合
3. 实的 n 重有序数组集合是实数域上的线性空间

1 线性空间

- **例 1:**

1. 自然数集合
2. 整数集合
3. 实的 n 重有序数组集合是实数域上的线性空间

- **证明:**

验证对于任意n 重有序数组x y 满足:

- $x+y=y+x$（加法交换律）
- $1x=x$ （数乘单位元）
- $\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$ （分配律）
- $(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$ （分配律）
- $\alpha(\beta x)=(\alpha\beta)x$ （数乘结合律）
- 加法结合律
- 零元存在
- 负元存在

最后，验证满足数乘和加法的封闭性

1 线性空间

☐ 例 1:

1. 自然数集合
2. 整数集合
3. 实的 n 重有序数组集合是实数域上的线性空间
4. 全体 $m \times n$ 阶实矩阵的集合$\mathbb{R}^{m\times n}$按通常的矩阵加法以及实数与矩阵的乘法构成实数域上的线性空间

1 线性空间

□ 例 2:

1. 区间 $[a,b]$ 上的连续实函数集合 $C[a,b]$, 按函数普通加法与数乘构成实数域上的线性空间

■ 证明:

（1）加法交换律：$(f+g)(x)=(g+f)(x)$，所以 $f+g=g+f$.

（2）加法结合律：$(f+g)+h=f+(g+h)$.

（3）加法零元：$(f+\mathbf{0})(x)=f(x)+\mathbf{0}(x)=f(x)+\mathbf{0}=f(x)$，所以 $f+\mathbf{0}=f$.

（4）加法逆元：定义 $-f$ 为 $(-f)(x)=-f(x)$，由于 f 连续，$-f$ 也连续，即 $-f\in C[a,b]$. $\big(f+(-f)\big)(x)=0=\mathbf{0}(x)$，所以 $f+(-f)=0$.

（5）数乘与标量的结合律：$\big(k(lf)\big)(x)=(kl)\cdot f(x)=\big((kl)f\big)(x)$，所以 $k(lf)=(kl)f$.

1 线性空间

□ 例 2:

1. 区间 $[a,b]$ 上的连续实函数集合 $C[a,b]$, 按函数普通加法与数乘构成实数域上的线性空间

■ **证明**:

（6）数乘单位元：$(1\cdot f)(x)=1\cdot f(x)=f(x)$，所以 $1\cdot f=f$.
（7）数乘对函数加法的分配律：$\big(k(f+g)\big)(x)=(kf)(x)+(kg)(x)$
$=(kf+kg)(x)$，所以 $k(f+g)=kf+kg$.
（8）数乘对标量加法的分配律：$\big((k+l)f\big)(x)=(k+l)\cdot f(x)=(kf$
$+lf)(x)$，所以 $(k+l)f=kf+lf$.

最后，显然满足加法和数乘的封闭性. 如果 f 和 g 是$C[a,b]$
上的连续函数，$f+g\in C[a,b], kf\in C[a,b]$

1 线性空间

- **定义2 (线性子空间)**：如果线性空间 $V(F)$的一个子集是线性空间，那么它是 $V(F)$的线性子空间.

- **定理1**：$W \neq \emptyset$ 且 $W \subset V$. W 是 $V(F)$的子空间当且仅当

$$\forall x, y \in W \Rightarrow x + y \in W,$$

$$\forall x \in W, \forall \alpha \in F \Rightarrow \alpha x \in W.$$

或者等价地

$$\forall x, y \in W, \forall \alpha, \beta \in F \Rightarrow \alpha x + \beta y \in W$$

(仅再满足加法和数乘下的封闭性)

- **定理2**：$S, T \subset V(F)$ 是子空间，则 $S \cap T$ 是子空间，$S \cup T$ 通常不是子空间，$S + T$ 是子空间

$$S + T := \{z | z = x + y, x \in S, y \in T\}$$

(仅再满足加法和数乘下的封闭性)

1 线性空间

- 线性空间在**线性组合**下是封闭的
- 线性空间中的元素形如:

$$x = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i \,, \alpha_i \in F, i = 1, \dots, m$$

- **定义3(线性相关)**: 总是存在一组不全为 0 的元素 α_i 使得 $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i = 0$
- **定义4(线性无关)**: $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i = 0$ 当且仅当 $\alpha_i = 0, \forall i$
- **定理3**: 由向量集$x_1, x_2, \dots, x_m$张成的子空间

$$\mathrm{Span}\{x_1, x_2, \dots, x_m\} = \left\{ x \mid x = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i,\ \alpha_i \in F, i = 1, \dots, m \right\}$$

是包含 $x_1, x_2, \dots, x_m$ 的最小子空间.

1 线性空间

- **定义5(线性空间的维度)**:在空间 V 中,存在线性无关的 $\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$, 且对于任何$x_{m+1}$, $\{x_1, x_2, \ldots, x_{m+1}\}$ 是线性相关的, 我们称$\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$为一个极大线性无关组.
- 线性空间 V 的**维度** $\dim V = m$.
- 对于线性空间 V, 也称$\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$为 V 的一个**基**.

- **关于线性相关性和无关性的重要事实**:向量 $y \in \mathrm{Span}\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ 在 $y = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i$ 的情况下具有唯一的系数, 当且仅当$x_1, x_2, \ldots, x_m$是线性无关的.

- **定理4**:对于线性空间W_1和W_2, 有

$$\dim(W_1 \cap W_2) \le \min\{\dim(W_1), \dim(W_2)\}$$

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim(W_1) + \dim(W_2) - \dim(W_1 \cap W_2)$$

1 线性空间

- **定义6(线性映射)**:如果 V 和 V'是定义在相同域 F 上的线性空间,如果σ: $V \to V'$满足.

$$\sigma(x+y)=\sigma(x)+\sigma(y), \forall x,y \in V$$

$$\sigma(\alpha x)=\alpha\sigma(x), \forall x \in V, \forall \alpha \in F$$

则称σ是从 V 到 V'的线性映射.

线性映射在σ : $V \to V$ 的情况下被称为线性变换

- **定理5**:假设 V 和 V'是线性空间, 记所有从 V 到 V'的线性映射组成集合为 $\mathcal{L}(V,V')$. 则 $\mathcal{L}(V,V')$也是一个线性空间. 其中, 对于 $\forall\sigma,\tau \in \mathcal{L}(V,V')$, 运算满足以下定义:

$$(\sigma+\tau)(x)=\sigma(x)+\tau(x), \qquad \forall x \in V$$

$$(\alpha\sigma)(x)=\alpha\sigma(x), \qquad \forall x \in V, \forall \alpha \in F$$

1 线性空间

- **矩阵是不是线性空间?(通过线性空间理解矩阵)**

(1) 按一定顺序排列的一组数(如向量,当然是一个线性空间)

(2) 一组(行/列)向量/一阶方程(秩)

矩阵的秩决定了这些向量可以张成的线性空间的维数,解向量张成其余部分(垂直于行向量)

(3) 线性算子/映射(线性空间)

- **定义7**:线性映射σ: $V \to V'$的**核**与**像**分别是:

$$\operatorname{Ker}\sigma = \{x \in V : \sigma(x) = 0\}$$

$$\operatorname{Im}\sigma = \{y \in V' : y = \sigma(x), x \in V\}.$$

一个矩阵 $A \in F^{m\times n}$, 按矩阵与向量的乘法可以作为一个线性映射 $A: F^n \to F^m$. 其核空间常称为零空间 $\mathcal{N}(A)$; 其像空间常称为列空间 $\mathcal{R}(A)$, 它可以由矩阵 A 的全部列向量张成

大 纲

1. 线性空间

2. 开集与闭集

2 开集与闭集

- **定义8**: 集合 $B(x,r) := \{y \in \mathbb{R}^n : \| y - x \| < r\}$ 被称为以 x 为中心、半径 $r > 0$ 的**开球**（有的叫邻域）
- **定义9**: $S \subset R$ 被称为**开集**, 则要么 $S = \emptyset$, 要么对于任意 $x \in S$, 存在 $r > 0$ 使得 $B(x,r) \subset S$; $U \subset R$ 被称为**闭集**, 如果其补集 $U^C = \{x \in \mathbb{R}^n : x \notin U\}$是开集
- **定义10**: 对于集合 A, $x \in A$是 A 的**内点**当且仅当存在某个半径 r, 使得以 x 为中心, r 为半径的开球全部落在 A 内
- **定义11**: 集合 A 的**内部**, 记作 $\mathbf{int}\ A$, 是指 A 中所有内点的集合, 即: $\mathbf{int}\, A = \{x \in A \mid \exists r > 0 \; s.t. B(x,r) \subseteq A\}$
- **定义12**: 对于集合 A, x 是 A 的**边界点**当且仅当对于任意半径 r, 使得以 x 为中心, r 为半径的开球既包含A 中的点, 也包含A 外的点

2 开集与闭集

- **定义13**:对于集合 A, x 是 A 的**极限点**当且仅当以 x 为中心,任意r 为半径的开球包含 A 中异于x的点

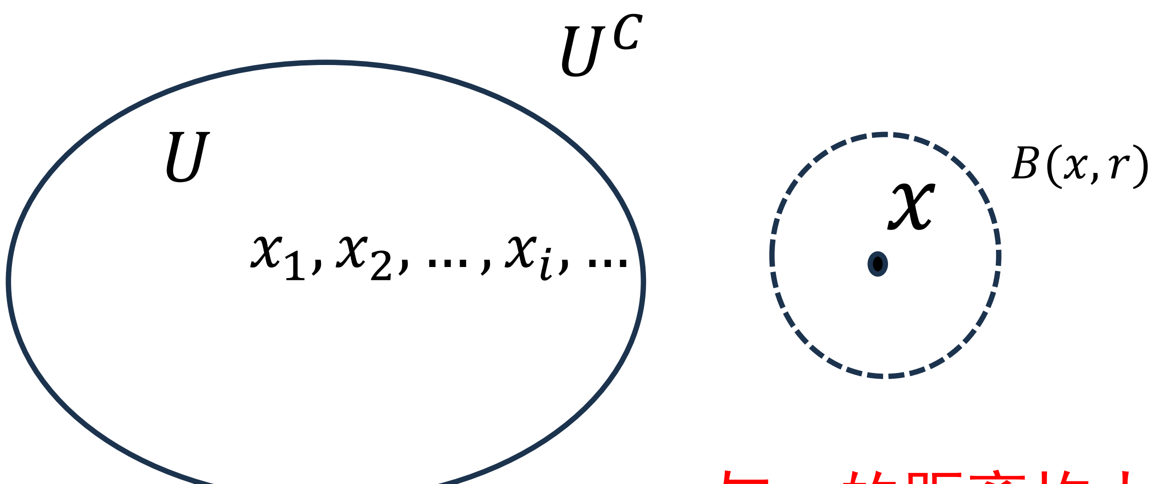
- **定理6**:一个非空集合是闭集当且仅当它包含所有极限点(对于极限运算封闭)
- 注意只是针对收敛序列

- **定义14**:点集 A 的**闭包**, 记作 $\mathbf{cl}(A)$, 是指 A 中所有点加上所有 A 的极限点,即:$\mathbf{cl}(A) = \{x \in X \mid \forall r > 0, B(x,r) \cap A \neq \emptyset\}$

2 开集与闭集

■ **定理6的证明:**

“$\Leftarrow$” 设U是一个闭集. （反证法）假设存在一个点列$\{x_1, x_2, \dots, x_i, \dots\} \subset U$收敛于极限点$x$, 且 $x \notin U$. 也就是说, $x \in U^C$, 那么存在某个 $r > 0$ 使得开球 $B(x, r) \subset U^C$. 显然, $x_i \notin B(x, r)$, 这与点列$\{x_1, x_2, \dots, x_i, \dots\} \subset U$ 收敛于 x 的假设矛盾. 因此, 若 U 是闭集, 则 U 包含所有收敛序列的极限点.

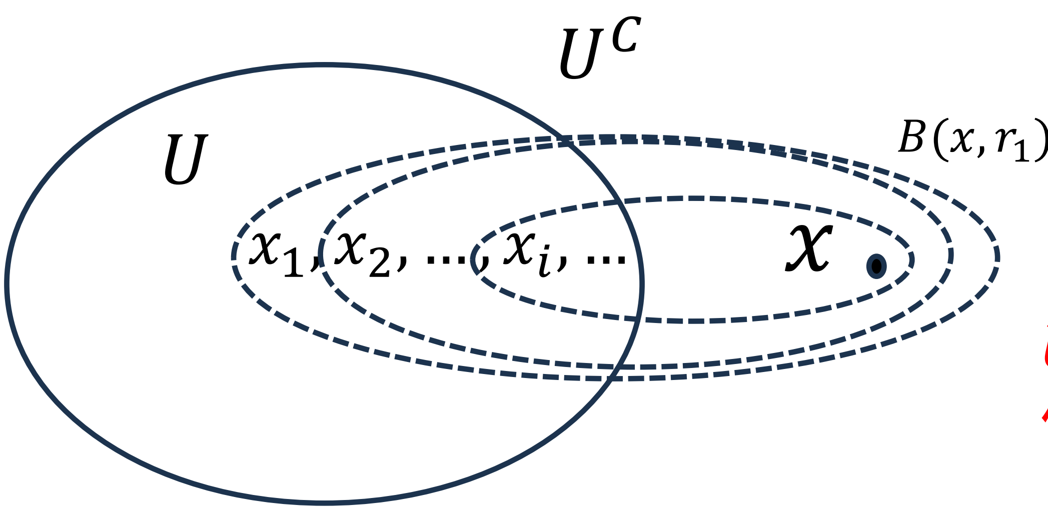


x与x_i的距离均大于r

2 开集与闭集

■ **定理6的证明：**

"⇒" 设 U 包含所有收敛序列的极限点，现在我们证明U^C是开集.（反证法）假设不是开集，可以找到某个 $x \in U^C$，不存在任何 $r > 0$ 使得开球 $B(x,r) \subset U^C$.那么，对于某个$r_1 > 0$，我们可以找到一个点 $x_1 \in B(x,r_1) \cap U$. 对于$r_2 = r_1/2$，我们可以找到某个$x_2 \in B(x,r_2) \cap U$. 这样，我们构造了一个收敛的点序列 $\{x_1, x_2, \dots, x_i, \dots\} \subset U$，而其极限 $x \in U^C$，与事实矛盾. 因此，U^C是开集，U是闭集.



U中的序列收敛到x，
但x不属于U

2 开集与闭集

◻ 例 3:

1. 整个实数集是闭集，也是开集
2. 如果A和B是两个闭集. $S = A \cap B$ 且 $S \neq \emptyset$. S是闭集吗？为什么？任意多个闭集的交集呢？
3. 任意多个闭集的并集是闭集吗？为什么？

2 开集与闭集

□ 例 3:

1. 整个实数集是闭集，也是开集
2. 如果A和B是两个闭集. $S = A \cap B$ 且 $S \neq \emptyset$. S是闭集吗？为什么？任意多个闭集的交集呢？
3. 任意多个闭集的并集是闭集吗？为什么？

■ **3. 2证明:**

对于任意收敛点列$\{x_1, x_2, \dots, x_i, \dots\}$属于集合$S$，那么$\{x_1, x_2, \dots, x_i, \dots\}$既属于$A$，也属于$B$. 因为$A$和$B$是两个闭集，$\{x_1, x_2, \dots, x_i, \dots\}$的收敛点也属于$A \cap B$，根据定理6，集合$S$也是闭集. 上述结论可以推广到任意多闭集相交的情况.

■ 考虑$\left[1+\frac{1}{n}, 2-\frac{1}{n}\right], n = 3,4,5 \dots$

2 开集与闭集

- **例** 3:

4. 任意多个开集的并集是开集吗？为什么？
5. 任意多个开集的交集是开集吗？为什么？
6. 有没有既不是开集也不是闭集的例子？

2 开集与闭集

- **例** 3:

4. 任意多个开集的并集是开集吗？为什么？
5. 任意多个开集的交集是开集吗？为什么？
6. 有没有既不是开集也不是闭集的例子？

■ 考虑$\left[1-\frac{1}{n},2+\frac{1}{n}\right],n=1,2,3\ldots$

■ 考虑$D=\{\frac{1}{n},n\in \boldsymbol{N}\}$，任意一点$\frac{1}{n}$都不能构造被包含的开球集；也不包含收敛点0

谢 谢 ！