第六讲：广义不等式

向量之间的比较关系

杨 林

大 纲

1.广义不等式

2.对偶锥与广义不等式

大 纲

1.广义不等式

2.对偶锥与广义不等式

1 广义不等式

■ **定义1(正常锥)**:凸锥 $K \subseteq \mathbb{R}^n$ 是一个**正常锥**如果:

1. K是闭集(包含其边界)

2. K是实心集(具有非空内部)

3. K是尖的(不包含直线)

□ **例** 1:

1. 非负正交锥 $K = \mathbb{R}_+^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_i \geq 0, \ i = 1, \ldots, n\}$

2. 半正定锥 $K = S_+^n$

3. $[0,1]$ 上的非负多项式:

$K = \{x \in \mathbb{R}^n | x_1 + x_2 t + x_3 t^2 + \cdots + x_n t^{n-1} \geq 0, t \in [0,1]\}$

1 广义不等式

■ **定义2(广义不等式):广义不等式**由一个正常锥 K 定义:

$$x \preceq_K y \Leftrightarrow y - x \in K, \qquad x \prec_K y \Leftrightarrow y - x \in \mathbf{int}\, K$$

□ **例** 2:

1. 分量不等式($K = \mathbb{R}_+^n$)

$$x \preceq_{\mathbb{R}_+^n} y \Leftrightarrow x_i \leq y_i, i = 1, \dots, n$$

2. 矩阵不等式$K = S_+^n$

$$X \preceq_{S_+^n} Y \Leftrightarrow Y - X \text{ 半正定}$$

这两种类型非常常见, 因此我们省略了$\preceq_K$中的下标

1 广义不等式

■ **广义不等式的性质**：

1. 对于加法是保序的：如果 $x \preceq_K y$ 并且 $u \preceq_K v$，那么 $x + u \preceq_K y + v$
2. 具有**传递性**：如果 $x \preceq_K y$并且 $y \preceq_K z$，那么$x \preceq_K z$
3. 对于**非负数乘是保序的**：如果 $x \preceq_K y$ 并且 $\alpha \geq 0$，那么 $\alpha x \preceq_K \alpha y$
4. **是自反的**：$x \preceq_K x$
5. 是**反对称的**：如果 $x \preceq_K y$ 并且 $y \preceq_K x$，那么 $x = y$
6. 对于**极限运算是保序的**：如果对于 $i = 1, 2, \ldots$ 均有 $x_i \preceq_K y_i$，当 $i \to \infty$ 时，有 $x_i \to x$ 和$y_i \to y$，$x \preceq_K y$

1 广义不等式

■ **定义3(最小元与极小元):**

$\preceq_K$一般不是线性排序:我们可以有 $x \npreceq_K y$ 和 $y \npreceq_K x$.

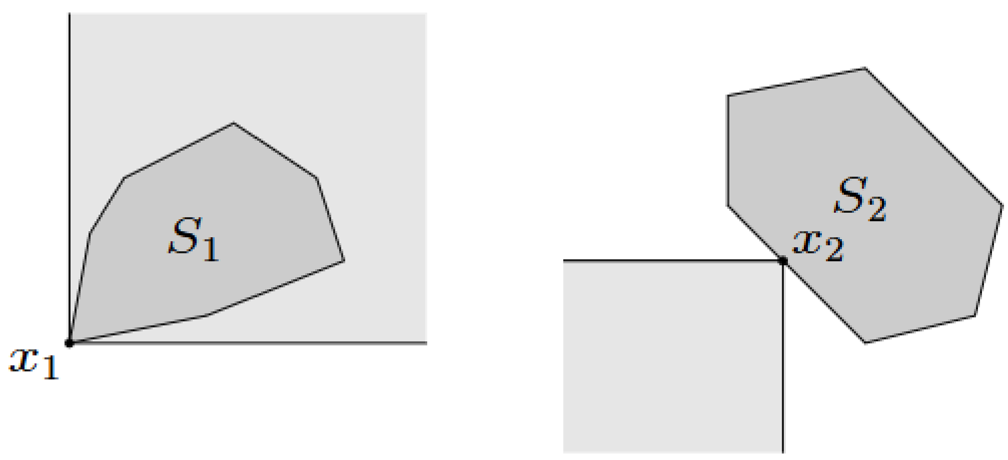
$x \in S$ 是 S 相对于 $\preceq$ 的最小元如果

$$y \in S \Rightarrow x \preceq_K y$$

$x \in S$ 是 S 相对于 $\preceq$ 的极小元如果

$$y \in S, x \preceq_K y \Rightarrow x = y$$

■ **示例:**



大 纲

1.广义不等式

2.对偶锥与广义不等式

2 对偶锥与广义不等式

■ **定义4（锥K的对偶锥）**：

$$K^* = \{y \mid y^T x \geq 0, \forall x \in K\}$$

■ 对偶锥总是凸的，即使K不是一个凸锥

□ **例** 3：

1. $K = \mathbb{R}_+^n, \quad K^* = \mathbb{R}_+^n$
2. $K = S_+^n, \quad K^* = S_+^n$
3. $K = \{(x,t) \mid \|x\|_2 \leq t\}, \quad K^* = \{(x,t) \mid \|x\|_2 \leq t\}$
4. $K = \{(x,t) \mid \|x\|_1 \leq t\}, \quad K^* = \{(x,t) \mid \|x\|_\infty \leq t\}$

前三个例子是自对偶锥.

正锥的对偶锥是正的, 因此定义广义不等式:

$$y \succeq_{K^*} 0 \Leftrightarrow y^T x \geq 0, \forall x \succeq_K 0$$

2 对偶锥与广义不等式

- **例** 3.3 3.4 **的证明**:

如果 $(y,z) \in K^*$, 那么对于 $\forall (x,t) \in K$, 都有 $y^T x + zt \geq 0.$

也就是说，对 $\forall (x,t) \in K$ 或是 $\|x\|_2 \leq t$ 有$y^T \frac{x}{t} + z \geq 0$

定义$u = x/t$，则有$y^T u + z \geq 0, \forall u: \|u\|_2 \leq 1$

定义下界：$-\|y\|_2 + z \geq 0$ 或是 $\|y\|_2 \leq z$

- 对于任意范数：

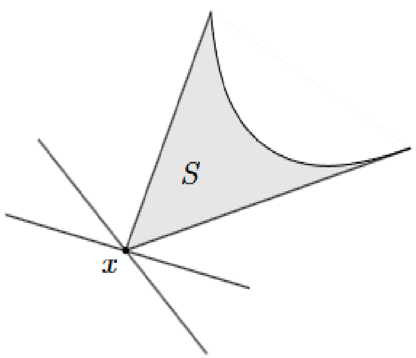
定义$\|y\|_* = \sup\{y^T u \mid \|u\| \leq 1\}$，则 $K^* = \{(y,z) \mid \|u\|_* \leq z\}$

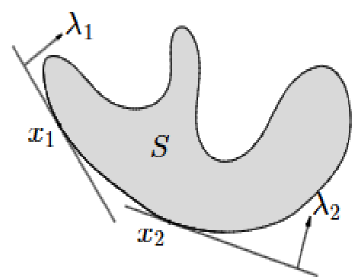
2 对偶锥与广义不等式

■ **通过对偶不等式求最小元和极小元**：

□ **关于 $\preceq_K$ 的最小元**：元素 $x \in S$ 是集合 S 最小元当且仅当对于所有 $\lambda \succ_{K^*} 0$ ，x 是在 S 上极小化 $\lambda^T z$ 的唯一最优解

$$K^* = \{y \mid y^T x \geq 0, \forall x \in K\}$$





2 对偶锥与广义不等式

■ 通过对偶不等式求最小元和极小元：

- □ **关于 $\preceq_{\boldsymbol{K}}$ 的极小元**：元素 $x \in S$ 是集合 S 极小元当且仅当对于所有 $\lambda \succ_{K^*} 0$，x 在 S 上极小化 $\lambda^T z$. 当集合 S 为凸集时，对于任意极小元 x，存在非零 $\lambda \succeq_{K^*} 0$，使得 x 在 S 上极小化 $\lambda^T z$.

2 对偶锥与广义不等式

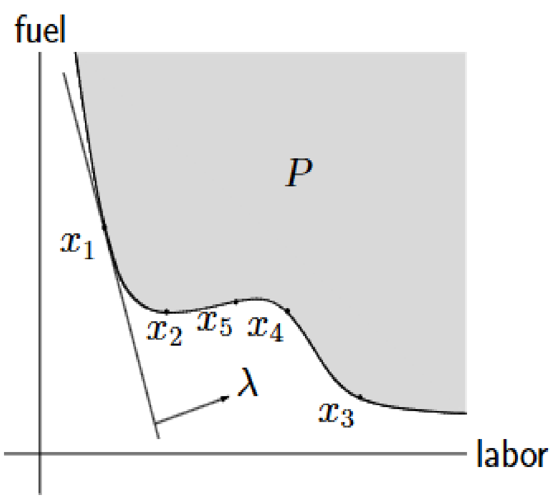
■ **最佳产品设计:**

□ 不同的生产方法使用不同数量的资源$x \in \mathbb{R}^n$

□ 生产集合 P:所有可能的生产方法的资源向量 x

□ 有效(帕累托最优)的方法对应于相对于 $\mathbb{R}^n_+$ 最小的资源向量 x

■ **示例 $(\boldsymbol{n=2})$**: x_1, x_2, x_3是有效的, x_4, x_5无效



谢 谢 ！