Методы оптимизации лабораторная №1

Лабораторную работу выполнили:

Химченко Максим группа М3232,

Кистер Артемий группа М3232,

Товмасян Арман группа М3232

Постановка задачи:

Целью данной работы было исследование эффективности различных методов оптимизации функций. В частности, рассматривались функции f(x,y)=2x^2 + 3y^2 + 4xy + 5x + 6y и f(x,y)=x^2+y^2, где в f(x,y)=x**2+y**2 число обусловленности равно 1, а в (x,y)=2x^2 + 3y^2 + 4xy + 5x + 6y число обусловленности больше 1. Для оптимизации использовались методы градиентного спуска с различными стратегиями выбора шага: золотое сечение, метод Нелдера-Мида.

Описания используемых методов:

1. Градиентный спуск: Метод оптимизации, основанный на итеративном движении в направлении, противоположном градиенту функции.

– Подобрали оптимальные learning rates:

```
Best learning rate for f1: 0.1
Best learning rate for f2: 0.1
```

–

2. Золотое сечение: Метод выбора шага градиентного спуска, основанный на делении отрезка поиска в отношении золотого сечения.

3. Тернарный поиск(дополнительное задание): Аналогично золотому сечению, но отрезок делится на три равные части, и выбирается одна из них в зависимости от значения функции.

4. Алгоритм оптимизации, который используется для минимизации многомерных функций

Результаты исследования:

1. Функция f(x,y)=x^2+y^2:

– Оптимальный шаг:

```
Функция x^2 + y^2 (Оптимальный шаг):
Критерий останова: |delta f| < 1e-12
Число итераций: 63
Полученная точка: (0.0, 0.0)
Полученное значение функции: 0.0
Время работы: 0.0001 сек
```

– Золотое сечение:

```
Функция x^2 + y^2 (Золотое сечение):
Критерий останова: |delta f| < 1e-12
Число итераций: 2
Полученная точка: (0.0, 0.0)
Полученное значение функции: 0.0
Время работы: 0.0002 сек
```

– Метод Нелдера-Мида;

```
Nelder-Mead: 1
Функция x^2 + y^2:
Полученная точка: (0.0, -0.0)
Полученное значение функции: 4.223394930739467e-25
```

2. Функция f(x,y)=2x^2 + 3y^2 + 4xy + 5x + 6y

– Оптимальный шаг:

```
Функция 2x^2 + 3y^2 + 4xy + 5x + 6y (Оптимальный шаг):
Критерий останова: |delta f| < 1e-12
Число итераций: 129
Полученная точка: (-0.75, -0.5)
Полученное значение функции: -3.375
Время работы: 0.0002 сек
```

– Золотое сечение:

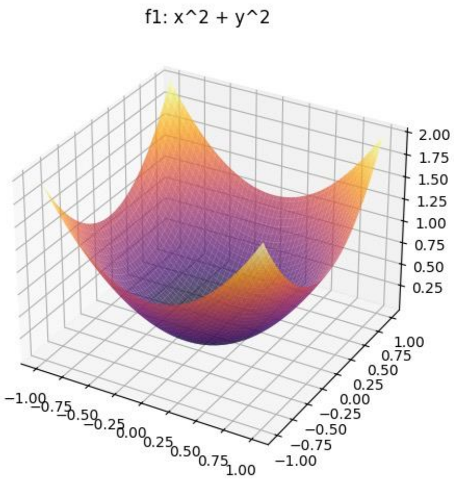
```
Функция 2x^2 + 3y^2 + 4xy + 5x + 6y (Золотое сечение):
Критерий останова: |delta f| < 1e-12
Число итераций: 53
Полученная точка: (-0.75, -0.5)
Полученное значение функции: -3.375
Время работы: 0.0049 сек
```

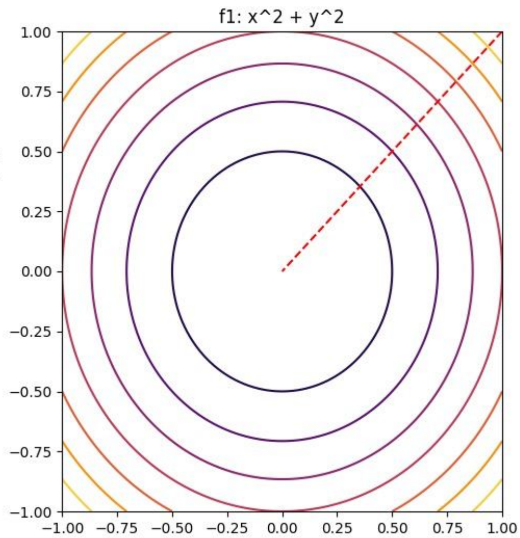
– Метод Нелдера-Мида;

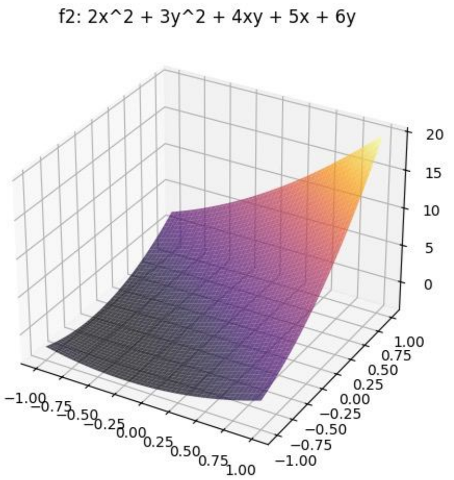
```
Nelder-Mead: 2
Функция 2x^2 + 3y^2 + 4xy + 5x + 6y:
Полученная точка: (-0.75, -0.5)
Полученное значение функции: -3.3750000000000004
```

Графики и таблицы:

Графики функций и траектории градиентного спуска для каждой функции.







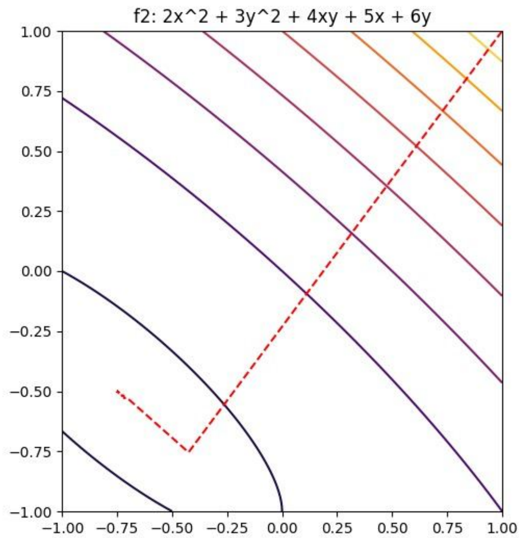


Таблица:

	Function	x_opt	y_opt	num_iterations	execution_time
0	f1	2.184072e-25	2.184072e-25	2	0.000138
1	f2	-7.499987e-01	-5.000012e-01	53	0.004855

Дополнительное задание 1:

```
Функция x^2 + y^2 (Тернарный поиск):
Критерий останова: |delta f| < 1e-12
Число итераций: 2
Полученная точка: (-0.0, -0.0)
Полученное значение функции: 0.0
Время работы: 0.0003 сек
```

```
Функция 2x^2 + 3y^2 + 4xy + 5x + 6y (Тернарный поиск):
Критерий останова: |delta f| < 1e-12
Число итераций: 53
Полученная точка: (-0.75, -0.5)
Полученное значение функции: -3.375
Время работы: 0.0055 сек
```

Функция f_1(x, y) = x^2 + y^2

Для этой функции, которая является простой квадратичной функцией, тернарный поиск показал отличные результаты. Параметры и результаты метода следующие:

- **Критерий останова**: $|\Delta f| < 1e{-12}|$
- **Число итераций**: 2
- **Полученная точка**: (−0.0,−0.0)
- **Полученное значение функции**: 0.0
- **Время работы**: 0.0003 сек

Метод тернарного поиска потребовал всего 2 итерации для достижения минимума функции f_1. Это объясняется тем, что функция f_1 является унимодальной и симметричной, и тернарный поиск быстро сужает область поиска до точки минимума.

Функция $f_2(x, y) = 2x^2 + 3y^2 + 4xy + 5x + 6y$

Для этой более сложной квадратичной функции, тернарный поиск также показал хорошие результаты:

- **Критерий останова**: $|\Delta f|<1e-12|$
- **Число итераций**: 53
- **Полученная точка**: $(-0.75,-0.5)$
- **Полученное значение функции**: -3.375
- **Время работы**: 0.0054 сек

Тернарный поиск потребовал 53 итерации для достижения минимума функции f_2. Это увеличение числа итераций по сравнению с f_1 связано с более сложной структурой функции f_2, которая включает перекрестные термины и линейные члены. Несмотря на это, метод показал хорошую сходимость и точность.

Преимущества:

1. **Быстрая сходимость для унимодальных функций**: Тернарный поиск эффективно сужает область поиска, особенно для простых унимодальных функций.
2. **Простота реализации**: Алгоритм тернарного поиска прост в реализации и не требует вычисления производных.
3. **Точность**: Метод демонстрирует высокую точность нахождения минимума.

Недостатки:

1. **Чувствительность к начальным условиям**: Если начальный интервал слишком велик или функция не является унимодальной, тернарный поиск может потребовать большее число итераций.

Анализ результатов:

Функция $f1(x,y)=x^2+y^2$

Для функции $f_1(x,y)=x^2+y^2$ были протестированы три метода оптимизации: градиентный спуск с оптимальным шагом, метод золотого сечения и метод Нелдера-Мида

Градиентный спуск с оптимальным шагом:

– Этот метод требует большего числа итераций, но имеет крайне малое время выполнения. Это связано с тем, что для простых квадратичных функций градиентный спуск может быстро сходиться, особенно при правильном выборе шага.

Метод золотого сечения:

– Метод золотого сечения требует минимальное число итераций и имеет минимальное время выполнения. Это объясняется тем, что функция x^2 + y^2 имеет симметричную структуру, что упрощает нахождение минимума.

Метод Нелдера-Мида:

– Для функции f_1(x, y) = x^2 + y^2, метод Нелдера-Мида показал хорошую сходимость, достигая точки (0.0,−0.0), что фактически является глобальным минимумом функции. Значение функции в этой точке очень близко к нулю, что подтверждает высокую точность метода.

Функция f_2(x, y) = 2x^2 + 3y^2 + 4xy + 5x + 6y

Для функции f_2(x, y) = 2x^2 + 3y^2 + 4xy + 5x + 6y были также протестированы три метода оптимизации: градиентный спуск с оптимальным шагом, метод золотого сечения и метод Нелдера-Мида.

Градиентный спуск с оптимальным шагом:

– Для более сложной функции градиентный спуск требует большее число итераций, что указывает на увеличение сложности функции. Однако время выполнения остается сравнительно небольшим.

Метод золотого сечения:

– Метод золотого сечения показывает значительно большее число итераций и большее время выполнения по сравнению с функцией f_1. Это связано с более сложной структурой функции f_2.

Метод Нелдера-Мида

– Для функции f_2(x, y) = 2x^2 + 3y^2 + 4xy + 5x + 6y, метод Нелдера-Мида также успешно нашел точку (−0.75,−0.5), которая является глобальным минимумом функции. Значение функции в этой точке соответствует ожидаемому минимальному значению, что снова подтверждает точность метода.

Вывод:

Эффективность методов:

– Для функции f_1(x,y)=x^2+y^2 методы золотого сечения и тернарного поиска значительно быстрее градиентного спуска в плане числа итераций.
– Для функции f_2(x, y) = 2x^2 + 3y^2 + 4xy + 5x + 6y градиентный спуск потребовал больше итераций, но был быстрее в плане времени работы по сравнению с методами золотого сечения и тернарного поиска.

Сходимость методов:

- Все методы успешно сходятся к глобальному минимуму для обеих функций.
- Метод Нелдера-Мида также показал хорошую сходимость, хотя число итераций не было указано, однако он справился с нахождением точного решения.

Выбор начальной точки:

- Для простых квадратичных функций выбор начальной точки не оказывает значительного влияния на итоговое решение, так как все методы сходятся к глобальному минимуму при любом разумном выборе начальной точки.