CORRECTION

Pour chacune des fonctions suivantes :

- Calculer la dérivée $f'(x)$.
- Déterminer les sens de variations de la fonction f.

1. $f(x) = x^2 - 4x + 3$.
2. $f(x) = -2x^2 + 4x + 5$.
3. $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 3x + 2$.
4. $f(x) = -2x^3 + 3x^2 + 12x - 5$.
5. $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-2}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.
6. $f(x) = 3x + \dfrac{48}{x}$, définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

1. $f(x) = x^2 - 4x + 3$.

La dérivée d'une fonction polynôme s'obtient en dérivant terme par terme :

$$f'(x) = 2x - 4$$

Étudions le signe de $f'(x)$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ 2x - 4 &= 0 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Le coefficient de x dans $f'(x)$ est positif (2), donc $f'(x)$ est négative avant 2 et positive après 2.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	-1	↗	

La fonction f est décroissante sur $]-\infty; 2]$ et croissante sur $[2; +\infty[$.

2. $f(x) = -2x^2 + 4x + 5$.

$$f'(x) = -4x + 4$$

Étudions le signe de $f'(x)$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ -4x + 4 &= 0 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

Le coefficient de x dans $f'(x)$ est négatif (-4), donc $f'(x)$ est positive avant 1 et négative après 1.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	7	↘	

La fonction f est croissante sur $]-\infty; 1]$ et décroissante sur $[1; +\infty[$.

3. $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 3x + 2$.

$$f'(x) = -3x^2 + 6x - 3 = -3(x^2 - 2x + 1) = -3(x-1)^2$$

La dérivée $f'(x) = -3(x-1)^2$ est toujours négative ou nulle (elle s'annule en $x = 1$).

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	
$f(x)$		↘	1	↘	

La fonction f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

4. $f(x) = -2x^3 + 3x^2 + 12x - 5$.

$$f'(x) = -6x^2 + 6x + 12 = -6(x^2 - x - 2)$$

Résolvons $f'(x) = 0$: $x^2 - x - 2 = 0$

Calculons Δ :

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(1)(-2) = 1 + 8 = 9$$

Les racines sont :

$$x_1 = \frac{1-3}{2} = -1 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{1+3}{2} = 2$$

Le coefficient de x^2 dans $f'(x)$ est négatif (-6), donc $f'(x)$ est négative à l'extérieur des racines et positive entre les racines.

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		↘	-12	↗	15	↘	

La fonction f est décroissante sur $]-\infty; -1]$, croissante sur $[-1; 2]$ et décroissante sur $[2; +\infty[$.

5. $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-2}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

Utilisons la formule de dérivation d'un quotient : $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

Avec $u = 2x + 1$ et $v = x - 2$, on a $u' = 2$ et $v' = 1$.

$$f'(x) = \frac{2(x-2) - (2x+1)(1)}{(x-2)^2} = \frac{2x - 4 - 2x - 1}{(x-2)^2} = \frac{-5}{(x-2)^2}$$

Comme $(x-2)^2 > 0$ pour tout $x \neq 2$, on a $f'(x) < 0$ sur tout le domaine de définition.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	||	$-$	
$f(x)$		$\searrow$	d	$\searrow$	

La fonction f est strictement décroissante sur $]-\infty; 2[$ et sur $]2; +\infty[$.

6. $f(x) = 3x + \dfrac{48}{x}$, définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

On peut écrire $f(x) = 3x + 48x^{-1}$, donc :

$$f'(x) = 3 + 48 \times (-1) \times x^{-2} = 3 - \frac{48}{x^2}$$

Étudions le signe de $f'(x)$:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 0 \\
3 - \frac{48}{x^2} &= 0 \\
3 &= \frac{48}{x^2} \\
3x^2 &= 48 \\
x^2 &= 16 \\
x &= \pm 4
\end{aligned}$$

Pour déterminer le signe de $f'(x) = 3 - \dfrac{48}{x^2} = \dfrac{3x^2 - 48}{x^2}$, étudions le signe du numérateur $3x^2 - 48 = 3(x^2 - 16) = 3(x-4)(x+4)$.

x	$-\infty$		-4		0		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	-24	$\searrow$	d	$\rightarrow$	24	$\nearrow$	

La fonction f est croissante sur $]-\infty; -4]$, décroissante sur $[-4; 0[$ et sur $]0; 4]$, et croissante sur $[4; +\infty[$.

Exercice 1 Donner les variations de $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+3}$ sur son domaine de définition.