

## CORRECTION

## Première - Spécialité Mathématiques

Pour chacune des fonctions suivantes :

- Calculer la dérivée  $f'(x)$ .
- Déterminer les sens de variations de la fonction  $f$ .

1.  $f(x) = x^2 - 4x + 3$ .

2.  $f(x) = -2x^2 + 4x + 5$ .

3.  $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 3x + 2$ .

4.  $f(x) = -2x^3 + 3x^2 + 12x - 5$ .

5.  $f(x) = \frac{2x+1}{x-2}$  définie sur  $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ .

6.  $f(x) = 3x + \frac{48}{x}$ , définie sur  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

1.  $f(x) = x^2 - 4x + 3$ .

La dérivée d'une fonction polynôme s'obtient en dérivant terme par terme :

$$f'(x) = 2x - 4$$

Étudions le signe de  $f'(x)$  :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ 2x - 4 &= 0 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Le coefficient de  $x$  dans  $f'(x)$  est positif (2), donc  $f'(x)$  est négative avant 2 et positive après 2.

$x$	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$			

La fonction  $f$  est décroissante sur  $] -\infty; 2]$  et croissante sur  $[2; +\infty[$ .

2.  $f(x) = -2x^2 + 4x + 5$ .

$$f'(x) = -4x + 4$$

Étudions le signe de  $f'(x)$  :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ -4x + 4 &= 0 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

Le coefficient de  $x$  dans  $f'(x)$  est négatif (-4), donc  $f'(x)$  est positive avant 1 et négative après 1.

$x$	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$			

La fonction  $f$  est croissante sur  $] -\infty; 1]$  et décroissante sur  $[1; +\infty[$ .

3.  $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 3x + 2$ .

$$f'(x) = -3x^2 + 6x - 3 = -3(x^2 - 2x + 1) = -3(x - 1)^2$$

La dérivée  $f'(x) = -3(x - 1)^2$  est toujours négative ou nulle (elle s'annule en  $x = 1$ ).

$x$	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	-
$f(x)$			

La fonction  $f$  est strictement décroissante sur  $\mathbb{R}$ .

4.  $f(x) = -2x^3 + 3x^2 + 12x - 5$ .

$$f'(x) = -6x^2 + 6x + 12 = -6(x^2 - x - 2)$$

Réolvons  $f'(x) = 0 : x^2 - x - 2 = 0$


Calculons  $\Delta$  :

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(1)(-2) = 1 + 8 = 9$$

Les racines sont :

$$x_1 = \frac{1-3}{2} = -1 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{1+3}{2} = 2$$

Le coefficient de  $x^2$  dans  $f'(x)$  est négatif (-6), donc  $f'(x)$  est négative à l'extérieur des racines et positive entre les racines.

$x$	$-\infty$	$-1$	$2$	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$	$0$	$+$	$0$	$-$
$f(x)$					

La fonction  $f$  est décroissante sur  $] -\infty; -1]$ , croissante sur  $[-1; 2]$  et décroissante sur  $[2; +\infty[$ .

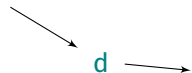
5.  $f(x) = \frac{2x+1}{x-2}$  définie sur  $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ .

Utilisons la formule de dérivation d'un quotient :  $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

Avec  $u = 2x + 1$  et  $v = x - 2$ , on a  $u' = 2$  et  $v' = 1$ .

$$f'(x) = \frac{2(x-2) - (2x+1)(1)}{(x-2)^2} = \frac{2x-4-2x-1}{(x-2)^2} = \frac{-5}{(x-2)^2}$$

Comme  $(x - 2)^2 > 0$  pour tout  $x \neq 2$ , on a  $f'(x) < 0$  sur tout le domaine de définition.

$x$	$-\infty$	$2$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$		$-$
$f(x)$			

La fonction  $f$  est strictement décroissante sur  $] - \infty; 2[$  et sur  $]2; +\infty[$ .

6.  $f(x) = 3x + \frac{48}{x}$ , définie sur  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

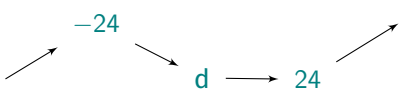
On peut écrire  $f(x) = 3x + 48x^{-1}$ , donc :

$$f'(x) = 3 + 48 \times (-1) \times x^{-2} = 3 - \frac{48}{x^2}$$

Étudions le signe de  $f'(x)$  :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ 3 - \frac{48}{x^2} &= 0 \\ 3 &= \frac{48}{x^2} \\ 3x^2 &= 48 \\ x^2 &= 16 \\ x &= \pm 4 \end{aligned}$$

Pour déterminer le signe de  $f'(x) = 3 - \frac{48}{x^2} = \frac{3x^2 - 48}{x^2}$ , étudions le signe du numérateur  $3x^2 - 48 = 3(x^2 - 16) = 3(x - 4)(x + 4)$ .

$x$	$-\infty$	$-4$	$0$	$4$	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	$0$	$-$	$-$	$0$	$+$
$f(x)$						

La fonction  $f$  est croissante sur  $] - \infty; -4]$ , décroissante sur  $[-4; 0[$  et sur  $]0; 4]$ , et croissante sur  $[4; +\infty[$ .

**Exercice 1** Donner les variations de  $f(x) = \frac{2x - 1}{x + 3}$  sur son domaine de définition.