תרגיל 6

מבוא טורים וטורים חיובים

1. תהיינה a_n, b_n סדרות כך שהטור $\sum (a_n + b_n)$ מתכנס.

(א) הוכיחו כי הטורים $\sum a_n, \sum b_n$ שניהם מתכנסים או שניהם מתבדרים.

(ב) מצאו דוגמה ששניהם מתבדרים.

2. חשבו $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$.

הדרכה: פירוק לשברים חלקיים (תלמדו בעתיד) נותן

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{2}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right)$$

ומכאן ניתן להציג את הטור כטלסוקפי.

3. הוכיחו כי הטור $\sum \frac{(-1)^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}}{\sqrt{n}}$ אינו מתכנס.

הדרכה: היעזרו בקריטריון קושי, $s_{(k+1)^2-1} - s_{k^2}$.

4. קבעו האם הטורים הבאים מתכנסים:

(א) $\sum \frac{1}{\sqrt[n]{n!}}$.

(ב) $\sum \frac{(n+1)2^n}{n!}$.

(ג) $\sum \frac{2^n n!}{n^n}$.

(ד) $\sum_{n=1}^{\infty} a^{\ln(n)}$, $a > 0$.

5. תהיינה a_n, b_n סדרות חיוביות. הוכיחו (או הפריכו):

(א) אם הטורים $\sum a_n, \sum b_n$ מתכנסים אז גם $\sum a_n b_n$ מתכנס.

(ב) אם הטורים $\sum a_n^2, \sum b_n^2$ מתכנסים אז גם $\sum a_n b_n$ מתכנס.