TMA 4110 10457 11.12.2020 OPPG 7

7a) En basis for $\mathbb{C}$ som reelt vektorrom sperrer ut $\mathbb{C}$ med lineærkombinasjoner av u og v (med reelle skalarer) og $B=(u, v)$ hvor u og v er lineært uavhengige.

$u = 3+3i$
$v = 2-i$

Vi har $\frac{1}{9}u + \frac{1}{3}v = 1$

og $\frac{2}{9}u - \frac{1}{3}v = i$. Dermed sperrer u og v ut $\mathbb{C}$.

u og v er lineært uavhengige i reelt vektorrom fordi:

$\frac{u}{v} \notin \mathbb{R}$ Dermed er B en basis for $\mathbb{C}$ som reelt vektorrom

b) Dersom vi tillater komplekse skalarer er ikke u og v lineært uavhengige.

$\frac{u}{v} = \frac{3+3i}{2-i} = \frac{6+9i-3}{5} = \underline{\underline{\frac{9i+3}{5}}}$

$v \cdot \left(\frac{9i+3}{5}\right) = u, \quad \left(\frac{9i+3}{5}\right) \in \mathbb{C}$

c) $z^5+4z=0 \rightarrow z^5=-4z \xrightarrow{z\neq 0} z^4=-4 \rightarrow z^4=4e^{\pi i} \rightarrow \underline{z_1=\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}}$

$z_0=0$

$z_1=\sqrt{2}\,e^{\frac{\pi}{4}i} = \underline{\underline{1+i}}$

$z_2=\sqrt{2}\,e^{(\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{4})i} = \underline{\underline{-1+i}}$

$z_3=\sqrt{2}\,e^{(\frac{\pi}{4}+\frac{4\pi}{4})i} = \underline{\underline{-1-i}}$

$z_4=\sqrt{2}\,e^{(\frac{\pi}{4}+\frac{6\pi}{4})i} = \underline{\underline{1-i}}$

Siden vi vet at

$1=\frac{1}{9}u+\frac{1}{3}v$ og $i=\frac{2}{9}u-\frac{1}{3}v$ kan vi skrive

løsningene som

$z_0 = \underline{\underline{(0,\ 0)_B}}$

$z_1 = \left(\frac{1}{9}+\frac{2}{9},\ 0\right)_B = \underline{\underline{\left(\frac{3}{9},\ 0\right)_B}}$

$z_2 = \left(-\frac{1}{9}+\frac{2}{9},\ -\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\right)_B = \underline{\underline{\left(\frac{1}{9},\ -\frac{2}{3}\right)_B}}$

$z_3 = \left(-\frac{1}{9}-\frac{2}{9},\ -\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right) = \underline{\underline{\left(-\frac{3}{9},\ 0\right)_B}}$

$z_4 = \left(\frac{1}{9}-\frac{2}{9},\ \frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)_B = \underline{\underline{\left(-\frac{1}{9},\ \frac{2}{3}\right)_B}}$