8a) $H_0: \mu = 5$ $\quad$ X_i er normalfordelt for $i \in [1, n]$

$H_1: \mu < 5$ $\quad$ med μ ukjent og $\sigma^2 = 1$

Vi forkaster H_0 dersom $x \le 5 - \frac{z_\alpha}{\sqrt{n}}$, der $x = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n) = \bar{x}$

Sannsynligheten for å gjøre en type I-feil er da:

$$P(\text{Forkast } H_0 \mid H_0 \text{ er riktig}) = P\left(\bar{x} \le 5 - \frac{z_\alpha}{\sqrt{n}} \,\middle|\, \mu = 5\right)$$

$$\bar{x} \sim N\left(\frac{n\mu}{n}, \sqrt{\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} \sigma^2}\right) = N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$ gitt ved at lineærkombinasjon av normalfordelte stokastiske og uavhengige variabler er normalfordelt med $\mu = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu_i$, $\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sigma_i^2$

$$P\left(\frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \le \frac{5 - \frac{z_\alpha}{\sqrt{n}} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \,\middle|\, \mu = 5\right) = P\left(Z \le \frac{-z_\alpha/\sqrt{n}}{\sigma/\sqrt{n}} \,\middle|\, \mu = 5\right)$$

$$= P\left(Z \le \frac{-z_\alpha}{\sigma}\right) = P(Z \le -z_\alpha) = \underline{\underline{1 - \alpha}} = \underline{\underline{0.90}}$$

~~Sannsynlighet~~ Teststyrken når $n = 10$ og $\mu = 4.5$ er $P(\text{Forkast } H_0 \mid H_1) = P\left(\bar{x} \le 5 - \frac{z_\alpha}{\sqrt{n}} \,\middle|\, \mu = 4.5\right)$

$$= P\left(\frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < \frac{5 - \frac{z_\alpha}{\sqrt{n}} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \,\middle|\, \mu = 4.5\right) = P\left(Z < \frac{0.5 - \frac{z_\alpha}{\sqrt{n}}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)$$

$$= P\left(Z < \frac{0.5 - \frac{z_\alpha}{\sqrt{10}}}{\frac{1}{\sqrt{10}}}\right) = P(Z < \sqrt{10} \cdot 0.5 - z_\alpha) = \underline{\underline{0.998}}$$

TMA4245 10961

b) Forkast H_0 dersom $\bar{x} \leq 5 - \frac{2.9}{\sqrt{n}}$ eller $\bar{y} \leq 5 - \frac{2.9}{\sqrt{n}}$

Sannsynligheten for Type I feil i et av utvalgene er ~~0.90~~ 0.10

Sannsynligheten for type I-feil i minst et av utvalgene er da $1-(1-0.10)^2$

$= 1 - 0.90^2 =$ ~~0.99~~ $\underline{0.19}$

Denne sannsynligheten er større enn i a fordi kun et av utvalgene må "oppfylle kravet" til Type I-feil. Det eneste tilfellet hvor det ikke forekommer Type I-feil er hvis begge utvalgene ikke har type I-feil, altså med sannsynlighet 0.90^2 (pga produktregelen, utvalgene er uavhengige)

Vi ønsker $\left(1 - P(\bar{x} \leq k \mid \mu = 5)\right)^2 = 0.90$,

altså $P(\bar{x} \leq k \mid \mu = 5) = 0.05131$ ettersom den andre løsningen av andregradslikningen ikke har $0 \leq P \leq 1$.

$P(\bar{x} \leq k \mid \mu = 5) = 0.05131 \rightarrow P\left(\frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq \frac{k - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \,\middle|\, \mu = 5\right) = 0.05131$

$\rightarrow P\left(Z \leq \frac{k-5}{1/\sqrt{n}} \,\middle|\, \mu = 5\right) = \Phi\left(\frac{k-5}{1/\sqrt{n}}\right) = 0.05131$,

$\frac{k-5}{1/\sqrt{n}} = Z_{0.05131} \approx 1.632 \rightarrow k = \frac{Z_{0.05131}}{\sqrt{n}} + 5$

For $n = 10$: $\underline{\underline{k = 5.516}}$