TMA 4110 11.12.2020 10457 OPPG 8.

8a) Vi tar utgangspunkt i polynomet

$\boxed{\lambda^2+2\lambda+1} = (\lambda+1)^2$ med løsning $\lambda=-1$

Dette kan enten skrives $(\lambda^2+2\lambda+\frac{3}{4})+\frac{1}{4} = (-\lambda-\frac{1}{2})(-\lambda-\frac{3}{2})+\frac{1}{4}$

eller $(\lambda^2+2\lambda+1) = (-\lambda-1)^2$

Som er henholdsvis

det $\left(\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}-\lambda & -\frac{1}{4}\\ 1 & -\frac{3}{2}\end{bmatrix}\right)$

og det $\left(\begin{bmatrix}-1-\lambda & 0\\ 0 & -1-\lambda\end{bmatrix}\right)$

Altså har vi to matriser:

$\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & -\frac{1}{4}\\ 1 & -\frac{3}{2}\end{bmatrix}$

begge disse har egenverdien -1 med algebraisk multiplisitet 2.

b) Vi tar utgangspunkt i matrisen

$A=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 1 & 3\end{bmatrix}$ Som kan radreduseres til $B=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 0 & 0\end{bmatrix}$.

Allerede nå har vi to matriser $A \sim B$, med col $A=\left\{\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right\} \neq$ col $B=\left\{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right\}$.

c) $\begin{bmatrix}-2 & 3\\ -1 & 1\end{bmatrix}$ Dette kommer fra: $A^2+A+I_2=0 \Rightarrow A+I_2+A^{-1}=0$

$\rightarrow A+A^{-1}=-I_2$

$A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$

$A+A^{-1}=\begin{bmatrix}a+\frac{d}{ad-bc} & b-\frac{b}{ad-bc}\\ c-\frac{c}{ad-bc} & d-\frac{a}{ad-bc}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$ Da må $ad-bc=1$ slik at $b-\frac{b}{1}=0$ og $b-\frac{b}{1}=0$

$A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix}d & -b\\ -c & a\end{bmatrix}$

To likninger:

$a+d=1$

$ad-bc=1$

som gir $d^2-d+(bc+1)$. Jeg velger $bc=-3$ slik at $d^2-d+(bc+1)=d^2-d-2=(d-2)(d+1)$

$b=-3$

$c=+1$

Sette $d=-1$

$a+d=1 \rightarrow a=2$.

Inverter så alle for å få riktig $\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$

Fra pensum:

$a=-2$

$b=3$

$c=-1$

$d=1$

(for eksempel)