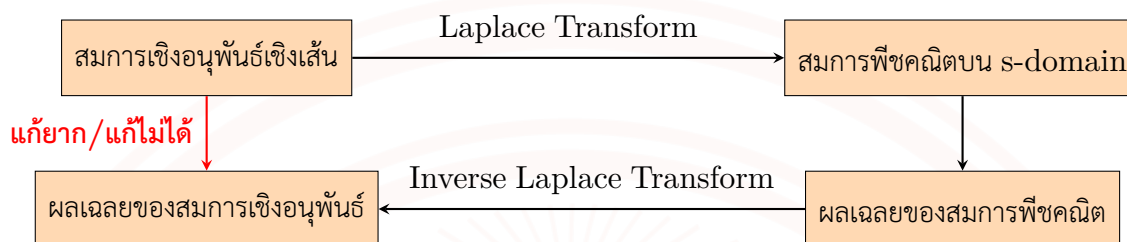


# 1 Introduction

การแปลงลาปลาซ (Laplace Transform) เป็นเครื่องมือทางคณิตศาสตร์ที่ใช้ในการวิเคราะห์ระบบเชิงเส้นและการแก้สมการเชิงอนุพันธ์ (Differential Equation) โดยการแปลงฟังก์ชันตัวแปรจริง (ส่วนมากเป็นฟังก์ชันเวลา)  $f(t)$  ให้เป็นฟังก์ชันตัวแปรเชิงซ้อน  $s$



บทนิยามการแปลงลาปลาซ

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T e^{-st} f(t) dt$$

จะเห็นได้ว่าการแปลงลาปลาซนิยามโดยใช้การอินทิกรัลไม่ตรงแบบ (Improper Integral)

## 2 Improper Integral

อินทิกรัลไม่ตรงแบบ (Improper Integral) เป็นอินทิกรัลที่ทำบนช่วงที่ไม่มีขอบเขต หรือกับฟังก์ชันที่ไม่มีขอบเขต เมื่อ  $f(x)$  เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง  $[a, b]$

1. อินทิกรัลที่ไม่จำกัดขอบเขต (Infinite Interval)

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx \quad \text{หรือ} \quad \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx \quad \text{หรือ} \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$$

a. ลู่เข้า (Converge) เมื่อลิมิตหาค่าได้และค่าจำกัด      b. ลู่ออก (Diverge) เมื่อไม่เข้าข้อ a.

**Q** จงหาว่าอินทิกรัลต่อไปนี้ลู่เข้าหรือลู่ออก ถ้าลู่เข้าจงหาค่าของอินทิกรัล

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-x} dx &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-x} dx & \int_0^{\infty} x^2 e^{-x} dx & & \int_{-\infty}^0 \frac{e^x}{3 - 2e^x} dx \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} [-e^{-x}]_0^b \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} (-e^{-b} + 1) \\ &= 1 \end{aligned}$$

$\therefore$  อินทิกรัลลู่เข้าและมีค่าเท่ากับ 1

## 2. อินทิกรัลที่มีฟังก์ชันที่ไม่ต่อเนื่อง (Discontinuous Integrand)

$$\int_a^b f(x) dx \quad \text{โดย} \quad f(x) \rightarrow \infty \text{ ที่ } x = c$$

a. ลู่เข้า (Converge) เมื่อลิมิตหาค่าได้และค่าจำกัด    b. ลู่ออก (Diverge) เมื่อไม่เข้าข้อ a.

**Q** จงหาว่าอินทิกรัลต่อไปนี้ลู่เข้าหรือลู่ออก ถ้าลู่เข้าจงหาค่าของอินทิกรัล

$$\begin{aligned} & \int_1^2 \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} dx & \int_0^1 x \ln(x) dx & \int_0^3 \frac{1}{x^2+2x-3} dx \\ &= \lim_{b \rightarrow 1^+} \int_b^2 \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} dx \\ &= \lim_{b \rightarrow 1^+} \left[ \sqrt{x^2-1} \right]_b^2 \\ &= \sqrt{2^2-1} - \lim_{b \rightarrow 1^+} \sqrt{b^2-1} \\ &= \sqrt{3} - 0 \\ &= \sqrt{3} \end{aligned}$$

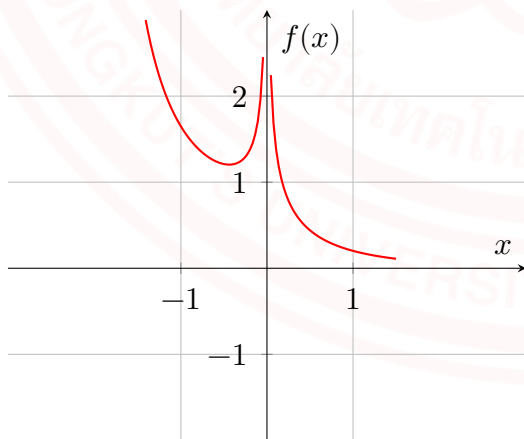
$\therefore$  อินทิกรัลลู่เข้าและมีค่าเท่ากับ  $\sqrt{3}$

## 3. พิเศษ: แบบผสม (Mixed Type)

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^a f(x) dx + \int_a^b f(x) dx + \int_b^{\infty} f(x) dx$$

โดยจะแบ่งช่วงอินทิกรัลออกเป็นช่วง ๆ ให้แต่ละช่วงมีจุดไม่ต่อเนื่องเพียงจุดเดียว

**Q** จงหาว่าอินทิกรัลต่อไปนี้ลู่เข้าหรือลู่ออก ถ้าลู่เข้าจงหาค่าของอินทิกรัล



$$\int_{-1}^{\infty} \frac{e^{-\frac{x}{2}}}{\sqrt{|x|}(x+2)} dx$$

### 3 การแปลงลาปลาซ

จากความรู้เกี่ยวกับอินทิกรัลไม่ตรงแบบ เราสามารถใช้การแปลงลาปลาซในการวิเคราะห์ระบบเชิงเส้นได้ โดยการแปลงฟังก์ชัน  $f(t)$  ให้เป็น  $F(s)$  ซึ่งจะช่วยให้เราสามารถแก้สมการเชิงอนุพันธ์ได้ง่ายขึ้น

ตัวช่วย: Integration by Parts

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du$$

ทบทวน: บทนิยามการแปลงลาปลาซ

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T e^{-st} f(t) \, dt$$

**Q** จงหาผลการแปลงลาปลาซของฟังก์ชันต่อไปนี้โดยใช้บทนิยามการแปลงลาปลาซ

$$\begin{aligned} f(t) &= 1 & f(t) &= e^{-at} & f(t) &= t^2 \\ \mathcal{L}\{f(t)\} &= \int_0^\infty e^{-st} \cdot 1 \, dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T e^{-st} \, dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \left[ -\frac{1}{s} e^{-st} \right]_0^T \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \left( -\frac{1}{s} e^{-sT} + \frac{1}{s} \right) \\ &= \frac{1}{s} \quad (\text{เมื่อ } s > 0) \end{aligned}$$

$$f(t) = \sin(t)e^{-t}$$

### 3.1 สมบัติของการแปลงลาปลาซ

#### 1. สมบัติเชิงเส้น (Linearity)

$$\mathcal{L}\{af(t) + bg(t)\} = a\mathcal{L}\{f(t)\} + b\mathcal{L}\{g(t)\}$$

โดยที่  $a$  และ  $b$  เป็นค่าคงที่

#### 2. การสเกล (Scaling)

$$\mathcal{L}\{f(at)\} = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$$

โดยที่  $a > 0$  และ  $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$

#### 3. การเลื่อนเวลา (Time Shifting)

$$\mathcal{L}\{f(t-a)u(t-a)\} = e^{-as}F(s)$$

โดยที่  $u(t-a)$  เป็นฟังก์ชันขั้นบันได (Unit Step Function) และ  $a \geq 0$

#### 4. การเลื่อนความถี่ (Frequency Shifting)

$$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s-a)$$

โดยที่  $a$  เป็นค่าคงที่

#### 5. การอนุพันธ์ (Differentiation)

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0)$$

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n F(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$$

#### 6. การอนุพันธ์ในโดเมนความถี่ (Differentiation in Frequency Domain)

$$\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s)$$

#### 7. การอินทิกรัล (Integration)

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau) d\tau\right\} = \frac{F(s)}{s}$$

#### 8. การอินทิกรัลในโดเมนความถี่ (Integration in Frequency Domain)

$$\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty F(u) du$$

**หมายเหตุ:** สมบัติของการแปลงลาปลาซเพิ่มเติมอยู่ในเอกสารประกอบการเรียนการสอน

Q จงหาผลการแปลงลาปลาซของฟังก์ชันต่อไปนี้โดยใช้สมบัติของการแปลงลาปลาซ

$$f(t) = 4 - 3t + 2e^{-2t}$$

$$f(t) = t^2 e^{3t}$$

$$f(t) = t \cos(2t)$$

$$f(t) = (t - 3)^2 u(t - 3)$$

$$f(t) = \frac{4t + 3}{t^2 - 5t + 6}$$

$$f(t) = \frac{d^2}{dt^2}(t^2 \sin(t))$$

$$f(t) = \int_0^t \sin t \cos t \, dt$$

$$y(t) = \begin{cases} y'' - 2y' + 5y = 0 \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 1 \end{cases}$$

## 4 การแปลงลาปลาซผกผัน

การแปลงลาปลาซผกผัน (Inverse Laplace Transform) เป็นกระบวนการที่ใช้ในการแปลงฟังก์ชัน  $F(s)$  กลับไปเป็นฟังก์ชัน  $f(t)$  โดยใช้สูตรการแปลงลาปลาซผกผัน

**Q** จงหาผลการแปลงลาปลาซผกผันของผลการแปลงลาปลาซต่อไปนี้

$$F(s) = \frac{1}{s(s^2 + 4)}$$

$$F(s) = \frac{6s - 5}{s^2 + 7}$$

$$F(s) = \frac{s - 1}{s^2 - 2s + 5}$$

$$F(s) = \frac{-2s}{(s^2 + 4)^2}$$

## 5 การแปลงฟูเรียร์

การแปลงฟูเรียร์ (Fourier Transform) เป็นเครื่องมือทางคณิตศาสตร์ที่ใช้ในการวิเคราะห์สัญญาณและระบบ โดยการแปลงฟังก์ชัน  $f(t)$  ให้เป็นฟังก์ชัน  $F(\omega)$  ซึ่งเป็นฟังก์ชันของความถี่  $\omega$

### บทนิยามการแปลงฟูเรียร์

บทนิยามการแปลงฟูเรียร์นั้นมีหลายแบบ โดยที่นิยมใช้ในการวิเคราะห์สัญญาณได้นิยามไว้ดังนี้

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt$$

### บทนิยามการแปลงฟูเรียร์ผกผัน

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega t} d\omega$$

โดยที่  $i$  เป็นหน่วยจินตภาพ (Imaginary Unit) และ  $\omega$  เป็นความถี่เชิงมุม (Angular Frequency,  $2\pi f$ )

**Q** จงหาผลการแปลงฟูเรียร์ของฟังก์ชันต่อไปนี้ โดยใช้บทนิยามการแปลงฟูเรียร์

$$f(t) = e^{-at}$$

$$f(t) = \begin{cases} \cos(3t) & \text{เมื่อ } t \geq 0 \\ 0 & \text{เมื่อ } t < 0 \end{cases}$$

### คุณสมบัติ

### การแปลงฟูเรียร์

#### เชิงเส้น (Linearity)

$$F(af(t) + bg(t)) = aF(f(t)) + bF(g(t))$$

#### การเลื่อนเวลา (Time Shifting)

$$F(f(t - a)) = e^{-i\omega a} F(f(t))$$

#### การสเกล (Scaling)

$$F(f(at)) = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

#### อนุพันธ์ (Differentiation)

$$F(f^{(n)}(t)) = (i\omega)^n F(f(t))$$

Q จงหาผลการแปลงฟูเรียร์ผกผันของผลการแปลงฟูเรียร์ต่อไปนี้

$$F(\omega) = 20 \frac{\sin(5\omega)}{5\omega}$$

$$F(\omega) = \frac{e^{i\omega}}{1+i\omega}$$





## 6 Formulas

Derivatives	Integrals
$\frac{d}{dx}(a) = 0$	$\int a \, dx = ax + C$
$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$	$\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1$
$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$	$\int e^x \, dx = e^x + C$
$\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \ln(a)$	$\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln(a)} + C$
$\frac{d}{dx}(\ln x ) = \frac{1}{x}$	$\int \frac{1}{x} \, dx = \ln x  + C$
$\frac{d}{dx}(\log_a x ) = \frac{1}{x \ln(a)}$	$\int x^{-1} \, dx = \ln x  + C$
$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$	$\int \sin x \, dx = -\cos x + C$
$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$	$\int \cos x \, dx = \sin x + C$
$\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$	$\int \tan x \, dx = -\ln \cos x  + C$
$\frac{d}{dx}(\cot x) = -\csc^2 x$	$\int \cot x \, dx = \ln \sin x  + C$
$\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$	$\int \sec x \, dx = \ln \sec x + \tan x  + C$
$\frac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x \cot x$	$\int \csc x \, dx = \ln \csc x - \cot x  + C$
$\frac{d}{dx}(\sinh x) = \cosh x$	$\int \sinh x \, dx = \cosh x + C$
$\frac{d}{dx}(\cosh x) = \sinh x$	$\int \cosh x \, dx = \sinh x + C$
$\frac{d}{dx}(f \pm g) = \frac{df}{dx} \pm \frac{dg}{dx}$	$\int (f \pm g) \, dx = \int f \, dx \pm \int g \, dx$
$\frac{d}{dx}(fg) = f \frac{dg}{dx} + g \frac{df}{dx}$	$\int f g' \, dx = fg - \int f' g \, dx$
$\frac{d}{dx}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g \frac{df}{dx} - f \frac{dg}{dx}}{g^2}$	$\int \frac{f'(x)}{f(x)} \, dx = \ln f(x)  + C$
$\frac{d}{dx}(f(g(x))) = f'(g(x))g'(x)$	$\int f'(g(x))g'(x) \, dx = f(g(x)) + C$

Laplace Transform Formulas		$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt$
$\mathcal{L}\{k\} = \frac{k}{s}, \quad k \text{ constant}$		$\mathcal{L}\{\sin at\} = \frac{a}{s^2 + a^2}$
$\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}, \quad n = 1, 2, \dots$		$\mathcal{L}\{\cos at\} = \frac{s}{s^2 + a^2}$
$\mathcal{L}\{t^a\} = \frac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}, \quad a > -1$		$\mathcal{L}\{\sinh at\} = \frac{a}{s^2 - a^2}$
$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s - a}$		$\mathcal{L}\{\cosh at\} = \frac{s}{s^2 - a^2}$
$\mathcal{L}\{t \sin at\} = \frac{2as}{(s^2 + a^2)^2}$		$\mathcal{L}\{t \cos at\} = \frac{s^2 - a^2}{(s^2 + a^2)^2}$
$\mathcal{L}\left\{\frac{\sin at}{t}\right\} = \tan^{-1}\left(\frac{a}{s}\right)$		$\mathcal{L}\{a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)\} = a_1 \mathcal{L}\{f_1(t)\} + a_2 \mathcal{L}\{f_2(t)\}$
$\mathcal{L}\{e^{at} f(t)\} = F(s - a)$		$\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s)$
$\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty F(u) du$		$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$
$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(u) du\right\} = \frac{F(s)}{s}$		$\mathcal{L}\{f(t) * g(t)\} = F(s)G(s)$ where $(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t - \tau) d\tau$
$\mathcal{L}\{u(t - a)\} = \frac{e^{-as}}{s}$		$\mathcal{L}\{f(t)u(t - a)\} = e^{-as} \mathcal{L}\{f(t + a)\}$ where $u(t - a)$ is the unit step function
		$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{1 - e^{-Ts}} \int_0^T e^{-st} f(t) dt \quad \text{if } f(t + T) = f(t)$