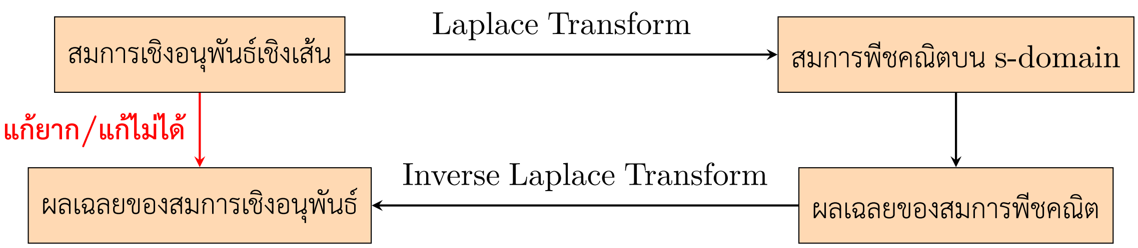
Introduction

การแปลงลาปลาซ (Laplace Transform) เป็นเครื่องมือทางคณิตศาสตร์ที่ใช้ในการวิเคราะห์ระบบเชิงเส้นและการแก้สมการเชิงอนุพันธ์ (Differential Equation) โดยการแปลงฟังก์ชันตัวแปรจริง (ส่วนมากเป็นฟังก์ชันเวลา) $f(t)$ ให้เป็นฟังก์ชันตัวแปรเชิงซ้อน s



บทนิยามการแปลงลาปลาซ

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt = \lim_{T\to\infty} \int_0^T e^{-st} f(t)\, dt$$

จะเห็นได้ว่าการแปลงลาปลาซนิยามโดยใช้การอินทิกรัลไม่ตรงแบบ (Improper Integral)

Improper Integral

อินทิกรัลไม่ตรงแบบ (Improper Integral) เป็นอินทิกรัลที่ทำบนช่วงที่ไม่มีขอบเขต หรือกับฟังก์ชันที่ไม่มีขอบเขต เมื่อ $f(x)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[a, b]$

1. อินทิกรัลที่ไม่จำกัดขอบเขต (Infinite Interval)

$$\lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\, dx \quad \text{หรือ} \quad \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)\, dx \quad \text{หรือ} \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx$$

   a. ลู่เข้า (Converge) เมื่อลิมิตหาค่าได้และค่าจำกัด

   b. ลู่ออก (Diverge) เมื่อไม่เข้าข้อ a.

Q จงหาว่าอินทิกรัลต่อไปนี้ลู่เข้าหรือลู่ออก ถ้าลู่เข้าจงหาค่าของอินทิกรัล

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-x}\, dx &= \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-x}\, dx \\ &= \lim_{b\to\infty} \left[-e^{-x}\right]_0^b \\ &= \lim_{b\to\infty} \left(-e^{-b}+1\right) \\ &= 1\end{aligned}$$

$\therefore$ อินทิกรัลลู่เข้าและมีค่าเท่ากับ 1

$$\int_0^\infty x^2 e^{-x}\, dx$$

2. อินทิกรัลที่มีฟังก์ชันที่ไม่ต่อเนื่อง (Discontinuous Integrand)

$$\int_a^b f(x)\,dx \quad \text{โดย} \quad f(x) \to \infty \text{ ที่ } x = c$$

a. ลู่เข้า (Converge) เมื่อลิมิตหาค่าได้และค่าจำกัด

b. ลู่ออก (Diverge) เมื่อไม่เข้าข้อ a.

Q จงหาว่าอินทิกรัลต่อไปนี้ลู่เข้าหรือลู่ออก ถ้าลู่เข้าจงหาค่าของอินทิกรัล

$$\int_1^2 \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\,dx$$

$$= \lim_{b\to 1^+} \int_b^2 \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\,dx$$

$$= \lim_{b\to 1^+} \left[\sqrt{x^2-1}\right]_b^2$$

$$= \sqrt{2^2-1} - \lim_{b\to 1^+} \sqrt{b^2-1}$$

$$= \sqrt{3} - 0$$

$$= \sqrt{3}$$

∴ อินทิกรัลลู่เข้าและมีค่าเท่ากับ $\sqrt{3}$

$$\int_0^1 x\ln(x)\,dx$$

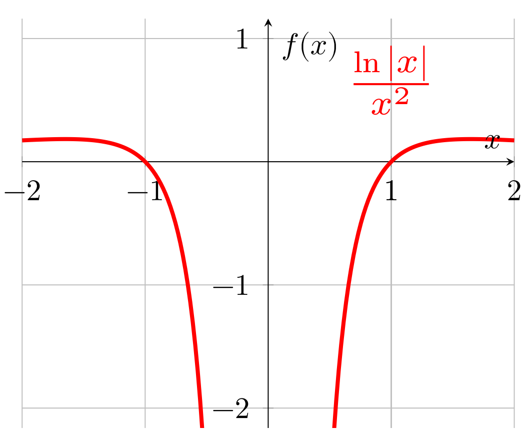
$$\int_0^3 \frac{1}{x^2+2x-3}\,dx$$

3. **พิเศษ:** แบบผสม (Mixed Type)

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx + \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^{\infty} f(x)\,dx$$

โดยจะแบ่งช่วงอินทิกรัลออกเป็นช่วง ๆ ให้แต่ละช่วงมีจุดไม่ต่อเนื่องเพียงจุดเดียว

Q จงหาว่าอินทิกรัลต่อไปนี้ลู่เข้าหรือลู่ออก ถ้าลู่เข้าจงหาค่าของอินทิกรัล



$$\int_{-1}^{\infty} \frac{\ln|x|}{x^2}\,dx$$

การแปลงลาปลาซ

จากความรู้เกี่ยวกับอินทิกรัลไม่ตรงแบบ เราสามารถใช้การแปลงลาปลาซในการวิเคราะห์ระบบเชิงเส้นได้ โดยการแปลงฟังก์ชัน $f(t)$ ให้เป็น $F(s)$ ซึ่งจะช่วยให้เราสามารถแก้สมการเชิงอนุพันธ์ได้ง่ายขึ้น

ตัวช่วย: Integration by Parts

$$\int u\, dv = uv - \int v\, du$$

ทบทวน: บทนิยามการแปลงลาปลาซ

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \lim_{T\to\infty} \int_0^T e^{-st} f(t)\, dt$$

Q จงหาผลการแปลงลาปลาซของฟังก์ชันต่อไปนี้โดยใช้บทนิยามการแปลงลาปลาซ

$f(t) = 1$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{f(t)\} &= \int_0^\infty e^{-st} \cdot 1\, dt \\
&= \lim_{T\to\infty} \int_0^T e^{-st}\, dt \\
&= \lim_{T\to\infty} \left[-\frac{1}{s} e^{-st}\right]_0^T \\
&= \lim_{T\to\infty} \left(-\frac{1}{s} e^{-sT} + \frac{1}{s}\right) \\
&= \frac{1}{s} \quad (\text{เมื่อ } s > 0)
\end{aligned}$$

$f(t) = e^{-at}$

$f(t) = t^2$

$f(t) = \sin(t) e^{-t}$

สมบัติของการแปลงลาปลาซ

1. **สมบัติเชิงเส้น (Linearity)**

$$\mathcal{L}\{af(t)+bg(t)\} = a\mathcal{L}\{f(t)\} + b\mathcal{L}\{g(t)\}$$

   โดยที่ a และ b เป็นค่าคงที่

2. **การสเกล (Scaling)**

$$\mathcal{L}\{f(at)\} = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$$

   โดยที่ $a > 0$ และ $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$

3. **การเลื่อนเวลา (Time Shifting)**

$$\mathcal{L}\{f(t-a)u(t-a)\} = e^{-as}F(s)$$

   โดยที่ $u(t-a)$ เป็นฟังก์ชันขั้นบันได (Unit Step Function) และ $a \geq 0$

4. **การเลื่อนความถี่ (Frequency Shifting)**

$$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s-a)$$

   โดยที่ a เป็นค่าคงที่

5. **การอนุพันธ์ (Differentiation in Time Domain)**

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0)$$

$$\mathcal{L}\left\{f^{(n)}(t)\right\} = s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0)$$

6. **การอนุพันธ์ในโดเมนความถี่ (Differentiation in Frequency Domain)**

$$\mathcal{L}\{t^nf(t)\} = (-1)^n\frac{d^n}{ds^n}F(s)$$

7. **การอินทิกรัล (Integration in Time Domain)**

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)\,d\tau\right\} = \frac{F(s)}{s}$$

8. **การอินทิกรัลในโดเมนความถี่ (Integration in Frequency Domain)**

$$\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty F(u)\,du$$

หมายเหตุ: สมบัติของการแปลงลาปลาซเพิ่มเติมอยู่ในเอกสารประกอบการเรียนการสอนหน้า 10

Q จงหาผลการแปลงลาปลาซของฟังก์ชันต่อไปนี้โดยใช้สมบัติของการแปลงลาปลาซ

$$\begin{aligned} f(t) &= 4 - 3t + 2e^{-2t} \\ \mathcal{L}\left\{f(t)\right\} &= 4\mathcal{L}\left\{1\right\} - 3\mathcal{L}\left\{t\right\} + 2\mathcal{L}\left\{e^{-2t}\right\} \\ &= 4 \cdot \frac{1}{s} - 3 \cdot \frac{1}{s^2} + 2 \cdot \frac{1}{s+2} \\ &= \frac{4}{s} - \frac{3}{s^2} + \frac{2}{s+2} \end{aligned}$$

$$f(t) = t^2 e^{3t}$$

$$f(t) = t\cos(2t)$$

$$f(t) = (t-3)^2 u(t-3)$$

$$f(t) = cos^2(t)$$

$$f(t) = \frac{d^2}{dt^2}(t^2 \sin(t))$$

$$f(t) = \int_0^t \sin t \cos t \; dt$$

$$y(t) = \begin{cases} y'' - 2y' + 5y = 0 \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 1 \end{cases}$$

การแปลงลาปลาซผกผัน

การแปลงลาปลาซผกผัน (Inverse Laplace Transform) เป็นกระบวนการที่ใช้ในการแปลงฟังก์ชัน $F(s)$ กลับไปเป็นฟังก์ชัน $f(t)$ โดยใช้สูตรการแปลงลาปลาซผกผัน

Q จงหาผลการแปลงลาปลาซผกผันของผลการแปลงลาปลาซต่อไปนี้

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{s-1}{s^2 - 2s + 5} \\ f(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{F(s)\right\} \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s-1}{(s-1)^2 + 4}\right\} \\ &= e^t \cos(2t) \end{aligned}$$

$$F(s) = \frac{6s - 5}{s^2 + 7}$$

$$F(s) = \frac{1}{s(s^2 + 4)}$$

$$F(s) = -\frac{2s}{(s^2 + 4)^2}$$

การแปลงฟูเรียร์

การแปลงฟูเรียร์ (Fourier Transform) เป็นเครื่องมือทางคณิตศาสตร์ที่ใช้ในการวิเคราะห์สัญญาณและระบบ โดยการแปลงฟังก์ชัน $f(t)$ ให้เป็นฟังก์ชัน $F(\omega)$ ซึ่งเป็นฟังก์ชันของความถี่ ω

บทนิยามการแปลงฟูเรียร์

บทนิยามการแปลงฟูเรียร์นั้นมีหลายแบบ โดยที่นิยมใช้ในการวิเคราะห์สัญญาณได้นิยามไว้ดังนี้

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\, dt$$

บทนิยามการแปลงฟูเรียร์ผกผัน

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega t}\, d\omega$$

โดยที่ i เป็นหน่วยจินตภาพ (Imaginary Unit) และ ω เป็นความถี่เชิงมุม (Angular Frequency, 2πf)

Q จงหาผลการแปลงฟูเรียร์ของฟังก์ชันต่อไปนี้ โดยใช้บทนิยามการแปลงฟูเรียร์

$f(t) = e^{-at}$

$f(t) = e^{a|t|}$

คุณสมบัติ	การแปลงฟูเรียร์
เชิงเส้น (Linearity)	$F(af(t)+bg(t)) = aF(f(t))+bF(g(t))$
การเลื่อนเวลา (Time Shifting)	$F(f(t-a)) = e^{-i\omega a}F(f(t))$
การสเกล (Scaling)	$F(f(at)) = \frac{1}{\lvert a\rvert}F(\frac{\omega}{a})$
อนุพันธ์ (Differentiation)	$F(f^{(n)}(t)) = (i\omega)^n F(f(t))$

Q จงหาผลการแปลงฟูเรียร์ผกผันของผลการแปลงฟูเรียร์ต่อไปนี้

$$F(\omega) = \frac{1}{\omega^2+1}$$

Formulas

Derivatives	Integrals
$\frac{d}{dx}(a) = 0$	$\int a\,dx = ax + C$
$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$	$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1$
$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$	$\int e^x\,dx = e^x + C$
$\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \ln(a)$	$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln(a)} + C$
$\frac{d}{dx}(\ln \lvert x \rvert) = \frac{1}{x}$	$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln \lvert x \rvert + C$
$\frac{d}{dx}(\log_a \lvert x \rvert) = \frac{1}{x \ln(a)}$	$\int x^{-1}\,dx = \ln \lvert x \rvert + C$
$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$	$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$
$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$	$\int \cos x\,dx = \sin x + C$
$\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$	$\int \tan x\,dx = -\ln \lvert \cos x \rvert + C$
$\frac{d}{dx}(\cot x) = -\csc^2 x$	$\int \cot x\,dx = \ln \lvert \sin x \rvert + C$
$\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$	$\int \sec x\,dx = \ln \lvert \sec x + \tan x \rvert + C$
$\frac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x \cot x$	$\int \csc x\,dx = \ln \lvert \csc x - \cot x \rvert + C$
$\frac{d}{dx}(\sinh x) = \cosh x$	$\int \sinh x\,dx = \cosh x + C$
$\frac{d}{dx}(\cosh x) = \sinh x$	$\int \cosh x\,dx = \sinh x + C$
$\frac{d}{dx}(f \pm g) = \frac{df}{dx} \pm \frac{dg}{dx}$	$\int (f \pm g)\,dx = \int f\,dx \pm \int g\,dx$
$\frac{d}{dx}(fg) = f\frac{dg}{dx} + g\frac{df}{dx}$	$\int fg'\,dx = fg - \int f'g\,dx$
$\frac{d}{dx}(\frac{f}{g}) = \frac{g\frac{df}{dx} - f\frac{dg}{dx}}{g^2}$	$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln \lvert f(x) \rvert + C$
$\frac{d}{dx}(f(g(x))) = f'(g(x))g'(x)$	$\int f'(g(x))g'(x)\,dx = f(g(x)) + C$

Laplace Transform Formulas	$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt$
$\mathcal{L}\{k\} = \frac{k}{s}, \quad k$ constant	$\mathcal{L}\{\sin at\} = \frac{a}{s^2+a^2}$
$\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}, \quad n = 1, 2, ...$	$\mathcal{L}\{\cos at\} = \frac{s}{s^2+a^2}$
$\mathcal{L}\{t^a\} = \frac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}, \quad a > -1$	$\mathcal{L}\{\sinh at\} = \frac{a}{s^2-a^2}$
$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a}$	$\mathcal{L}\{\cosh at\} = \frac{s}{s^2-a^2}$
$\mathcal{L}\{t \sin at\} = \frac{2as}{(s^2+a^2)^2}$	$\mathcal{L}\{t \cos at\} = \frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$
$\mathcal{L}\left\{\frac{\sin at}{t}\right\} = \tan^{-1}\left(\frac{a}{s}\right)$	$\mathcal{L}\{a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)\} = a_1 \mathcal{L}\{f_1(t)\} + a_2 \mathcal{L}\{f_2(t)\}$
$\mathcal{L}\{e^{at} f(t)\} = F(s-a)$	$\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s)$
$\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty F(u)\, du$	$\mathcal{L}\left\{f^{(n)}(t)\right\} = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)$
$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(u)\, du\right\} = \frac{F(s)}{s}$	$\mathcal{L}\{f(t) * g(t)\} = F(s)G(s)$ where $(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau) g(t-\tau)\, d\tau$
$\mathcal{L}\{u(t-a)\} = \frac{e^{-as}}{s}$	$\mathcal{L}\{f(t)u(t-a)\} = e^{-as} \mathcal{L}\{f(t+a)\}$ where $u(t-a)$ is the unit step function
	$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{1-e^{-Ts}} \int_0^T e^{-st} f(t)\, dt \quad$ if $f(t+T) = f(t)$