



הטכניון

מכון טכנולוגי
לישראל

למידה עמוקה

פעולות בסיסיות באלגברה לינארית

תוכן

NumPy 

- וקטורים
- פעולות בסיסיות על וקטורים
- מכפלה פנימית
- מטריצות
- פעולות בסיסיות על מטריצות
- מכפלת מטריצות

וקטור מאפיינים – feature vectors

וקטור מאפיינים הוא אוסף מספרים המייצגים אובייקט בעולם



Feature vector = [sepal length, sepal width, petal length, petal width]

וקטור

$$v = [5.1, 3.5, 1.4, 0.2]$$

$$u = [4.9, 3.0, 1.4, 0.2]$$

אובייקט מתמטי
אוסף סדור של מספרים

פעולות על וקטורים

$$v = [5.1, 3.5, 1.4, 0.2]$$

$$u = [4.9, 3.0, 1.4, 0.2]$$

$$v+u = [10.0, 6.5, 2.8, 0.4]$$

$$v-u = [0.2, 0.5, 0.0, 0.0]$$

$$v * 2 = [10.2, 7.0, 2.8, 0.4]$$

חיבור

חיסור

כפל בסקלר (מספר)

תרגיל 1 – פתרו את התרגילים הבאים

$$v = [1, 2, -1, 0]$$

$$u = [2, 1, 3, -1]$$

1. $2*v$

2. $v*2$

3. $u+v$

4. $u+3*v$

5. $u-3*v$

מכפלה פנימית dot product

$$v = [v_1, v_2, \dots, v_n]$$

$$u = [u_1, u_2, \dots, u_n]$$

$$v \cdot u = v_1 u_1 + v_2 u_2 + \dots + v_n u_n = \sum_{i=1}^n v_i u_i$$

תרגיל 2 - מכפלה פנימית

• חשבו את המכפלות הפנימיות הבאות:

1. $[5,5] \bullet [1,1]$
2. $[5,-5] \bullet [1,1]$
3. $[5,0] \bullet [1,1]$
4. $[3,0] \bullet [0,4]$
5. $[1,2,3,4,5] \bullet [5,4,3,2,1]$



רשימות אינן וקטורים

```
l1 = [5.1,3.5,1.4,0.2]  
l2 = [4.9,3.0,1.4,0.2]
```

```
l1+l2
```

```
[5.1, 3.5, 1.4, 0.2, 4.9, 3.0, 1.4, 0.2]
```

```
l1-l2
```

```
-----  
TypeError                                Traceback (most recent call last)  
<ipython-input-5-a1de8c818da3> in <module>()  
----> 1 l1-l2
```

```
TypeError: unsupported operand type(s) for -: 'list' and 'list'
```

SEARCH STACK OVERFLOW

```
2*l1
```

```
[5.1, 3.5, 1.4, 0.2, 5.1, 3.5, 1.4, 0.2]
```

$v1 = [5.1, 3.5, 1.4, 0.2]$

$v2 = [4.9, 3.0, 1.4, 0.2]$

$v1+v2 = [10.0, 6.5, 2.8, 0.8]$

$v1-v2 = [0.2, 0.5, 0.0, 0.0]$

$v1 * 2 = [10.2, 7.0, 2.8, 0.4]$

תרגיל 3 – פעולות על וקטורים בpython

ממשו את הפעולות הבאות:

- $\text{add}(u,v)$ – הפעולה מקבלת שני וקטורים u,v כרשימות ומחזירה רשימה המכילה את סכום הוקטורים $u+v$
- $\text{sub}(u,v)$ – הפעולה מקבלת שני וקטורים u,v כרשימות ומחזירה רשימה המכילה את הפרש הוקטורים $u-v$
- $\text{mul}(s,v)$ – הפעולה מקבלת סקלר s ווקטור v כרשימה ומחזירה רשימה המכילה את המכפלה $s*v$
- $\text{dot}(v,u)$ - הפעולה מקבלת שני וקטורים u,v כרשימות ומחזירה את ערך המכפלה $u \bullet v$
- בדקו את הפעולות שכתבתם באמצעות תרגילים 7.1,7.2



יישום וקטורים ב-numpy

```
import numpy as np
```

```
v1 = np.array(11)  
v2 = np.array(12)
```

```
v1+v2
```

```
array([10. ,  6.5,  2.8,  0.4])
```

```
v1-v2
```

```
array([0.2, 0.5, 0. , 0. ])
```

```
2*v1
```

```
array([10.2,  7. ,  2.8,  0.4])
```

$v1 = [5.1, 3.5, 1.4, 0.2]$

$v2 = [4.9, 3.0, 1.4, 0.2]$

$v1+v2 = [10.0, 6.5, 2.8, 0.8]$

$v1-v2 = [0.2, 0.5, 0.0, 0.0]$

$v1 * 2 = [10.2, 7.0, 2.8, 0.4]$

וקטורי שורה וקטורי עמודה

```
v1=np.array([5.1,3.5,1.4,0.2])  
print(v1)  
print(v1.shape)
```

```
[5.1 3.5 1.4 0.2]  
(4,)
```

```
r1=np.array([[5.1,3.5,1.4,0.2]])  
print(r1)  
print(r1.shape)
```

```
[[5.1 3.5 1.4 0.2]]  
(1, 4)
```

```
c1=np.array([[5.1],[4.9],[4.7]])  
print(c1)  
print(c1.shape)
```

```
[[5.1]  
 [4.9]  
 [4.7]]  
(3, 1)
```

$$r1 = [5.1 \quad 3.5 \quad 1.4 \quad 0.2]$$

$$c1 = \begin{bmatrix} 5.1 \\ 4.9 \\ 4.7 \end{bmatrix}$$

מטריצת מאפיינים – feature matrix

מטריצת מאפיינים הוא אוסף מספרים המייצגים מספר אובייקטים בעולם



SepalLengthCm	SepalWidthCm	PetalLengthCm	PetalWidthCm
5.1	3.5	1.4	0.2
4.9	3.0	1.4	0.2
4.7	3.2	1.3	0.2
4.6	3.1	1.5	0.2
5.0	3.6	1.4	0.2

מטריצה

$$A = \begin{bmatrix} 5.1 & 3.5 & 1.4 & 0.2 \\ 4.9 & 3.0 & 1.4 & 0.2 \\ 4.7 & 3.2 & 1.3 & 0.2 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 4.6 & 3.1 & 1.5 & 0.2 \\ 5.0 & 3.6 & 1.4 & 0.2 \\ 5.4 & 3.9 & 1.7 & 0.4 \end{bmatrix}$$

אובייקט מתמטי
אוסף דו-ממדי סדור של מספרים

ממדי מטריצה

$$A = \begin{bmatrix} 5.1 & 3.5 & 1.4 & 0.2 \\ 4.9 & 3.0 & 1.4 & 0.2 \\ 4.7 & 3.2 & 1.3 & 0.2 \end{bmatrix}$$

3

4

A is 3 X 4 matrix

סימון איברי ממטריצה

$$A = \begin{bmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{bmatrix}$$

אינדקס עמודה

אינדקס שורה

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,m} \end{bmatrix}$$

פעולות על מטריצות

$$A = \begin{bmatrix} 5.1 & 3.5 & 1.4 & 0.2 \\ 4.9 & 3.0 & 1.4 & 0.2 \\ 4.7 & 3.2 & 1.3 & 0.2 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 4.6 & 3.1 & 1.5 & 0.2 \\ 5.0 & 3.6 & 1.4 & 0.2 \\ 5.4 & 3.9 & 1.7 & 0.4 \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 9.7 & 6.6 & 2.9 & 0.4 \\ 9.9 & 6.6 & 2.8 & 0.4 \\ 10.1 & 7.1 & 3.0 & 0.6 \end{bmatrix}$$

$$A - B = \begin{bmatrix} .5 & .5 & -.1 & 0 \\ -.1 & -.6 & 0 & 0 \\ -.7 & -.7 & -.4 & -.2 \end{bmatrix}$$

$$2 * A = \begin{bmatrix} 10.2 & 7 & 2.8 & 0.4 \\ 9.8 & 6 & 2.8 & 0.4 \\ 9.4 & 6.4 & 2.6 & 0.4 \end{bmatrix}$$

חיבור

חיסור

כפל בסקלר (מספר)

...

תרגיל 4 – פעולות על מטריצות

פתרו את התרגילים הבאים:

1. $3*A$
2. $3*A+B$

$$A = \begin{bmatrix} 5.1 & 3.5 & 1.2 \\ 4.9 & 3.0 & 2.2 \\ 4.7 & 3.2 & 1.2 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 4.6 & 3.1 & 2.2 \\ 5.0 & 3.6 & 2.2 \\ 5.4 & 3.9 & 1.4 \end{bmatrix}$$

מטריצות ב-numpy - array

```
m1=np.array([[5.1, 3.5, 1.4, 0.2],[4.9, 3.0, 1.4, 0.2],[4.7, 3.2, 1.3, 0.2]])  
m1
```

```
array([[5.1, 3.5, 1.4, 0.2],  
       [4.9, 3. , 1.4, 0.2],  
       [4.7, 3.2, 1.3, 0.2]])
```

```
m1.shape
```

```
(3, 4)
```

פעולות על מטריצות

m1+m2

```
array([[ 9.7,  6.6,  2.9,  0.4],  
       [ 9.9,  6.6,  2.8,  0.4],  
       [10.1,  7.1,  3. ,  0.6]])
```

m1-m2

```
array([[ 0.5,  0.4, -0.1,  0. ],  
       [-0.1, -0.6,  0. ,  0. ],  
       [-0.7, -0.7, -0.4, -0.2]])
```

2*m1

```
array([[10.2,  7. ,  2.8,  0.4],  
       [ 9.8,  6. ,  2.8,  0.4],  
       [ 9.4,  6.4,  2.6,  0.4]])
```

כפל מטריצות

כפל מטריצה הוא אוסף מכפלות סקלריות בין שורה משמאל ועמודה מימין

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}$$

$$A * B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$$

ניתן להכפיל רק מטריצות עם ממדים המאפשרים זאת. כלומר A מממד k,n ו-B מממד m,k.

כפל מטריצות (1)

כפל מטריצה הוא אוסף מכפלות סקלריות בין שורה משמאל ועמודה מימין

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}$$

$$A * B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 * 7 + 4 * 10 & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$$

כפל מטריצות (2)

כפל מטריצה הוא אוסף מכפלות סקלריות בין שורה משמאל ועמודה מימין

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}$$

$$A * B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 * 7 + 4 * 10 & 1 * 8 + 4 * 11 & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$$

כפל מטריצות (3)

כפל מטריצה הוא אוסף מכפלות סקלריות בין שורה משמאל ועמודה מימין

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}$$

$$A * B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 * 7 + 4 * 10 & 1 * 8 + 4 * 11 & 1 * 9 + 4 * 12 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

כפל מטריצות (4)

כפל מטריצה הוא אוסף מכפלות סקלריות בין שורה משמאל ועמודה מימין

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}$$

$$A * B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 * 7 + 4 * 10 & 1 * 8 + 4 * 11 & 1 * 9 + 4 * 12 \\ 2 * 7 + 5 * 10 & & \\ & & \end{bmatrix}$$

כפל מטריצות (5)

כפל מטריצה הוא אוסף מכפלות סקלריות בין שורה משמאל ועמודה מימין

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}$$

$$A * B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 * 7 + 4 * 10 & 1 * 8 + 4 * 11 & 1 * 9 + 4 * 12 \\ 2 * 7 + 5 * 10 & 2 * 8 + 5 * 11 & 2 * 9 + 5 * 12 \\ 3 * 7 + 6 * 10 & 3 * 8 + 6 * 11 & 3 * 9 + 6 * 12 \end{bmatrix}$$

כפל מטריצות (6)

כפל מטריצה הוא אוסף מכפלות סקלריות בין שורה משמאל ועמודה מימין

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}$$

$$A * B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 * 7 + 4 * 10 & 1 * 8 + 4 * 11 & 1 * 9 + 4 * 12 \\ 2 * 7 + 5 * 10 & 2 * 8 + 5 * 11 & 2 * 9 + 5 * 12 \\ 3 * 7 + 6 * 10 & 3 * 8 + 6 * 11 & 3 * 9 + 6 * 12 \end{bmatrix}$$

כפל מטריצות (7)

כפל מטריצה הוא אוסף מכפלות סקלריות בין שורה משמאל ועמודה מימין

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}$$

$$A * B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 * 7 + 4 * 10 & 1 * 8 + 4 * 11 & 1 * 9 + 4 * 12 \\ 2 * 7 + 5 * 10 & 2 * 8 + 5 * 11 & 2 * 9 + 5 * 12 \\ 3 * 7 + 6 * 10 & 3 * 8 + 6 * 11 & 3 * 9 + 6 * 12 \end{bmatrix}$$

תרגיל 5 – כפל מטריצות

פתרו את התרגילים הבאים:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix}$$

תרגיל 5 – פתרון

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 5 - 1 \cdot 6 & 1 \cdot 7 - 1 \cdot 8 \\ 2 \cdot 5 + 3 \cdot 6 & 2 \cdot 7 + 3 \cdot 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 28 & 38 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 7 + 2 \cdot 8 + 3 \cdot 9 \\ 4 \cdot 7 + 5 \cdot 8 + 6 \cdot 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 \\ 122 \end{bmatrix}$$

כפל מטריצות – חישוב כללי

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,m} \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \cdots & a_{i,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,m} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,j} & \cdots & b_{1,k} \\ b_{2,1} & b_{2,j} & \cdots & b_{2,k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m,1} & b_{m,j} & \cdots & b_{m,k} \end{bmatrix}$$

$$C = A * B = \left[\begin{array}{c} c_{i,j} = \sum_{t=1}^m a_{i,t} * b_{t,j} \end{array} \right]$$

תרגיל 6 - מימוש כפל מטריצות

- ממשו פעולה $\text{mul}(A,B)$ המקבלת שתי מטריצות A, B כ-`numpy array`
- הפעולה בודקת אם ניתן להכפיל את המטריצות
- במידה וכן הפעולה מחשבת את התוצאה על ידי נוסחת הכפלת המטריצות ומחזירה את התשובה
- בדקו את הפעולה על גבי תרגילים 7.4 ועל ידי השוואה ל-`numpy.dot`



הטכניון
מכון טכנולוגי
לישראל

שאלות?