

# 史济怀《数学分析教程》下册习题整理

OrangeCat

Jan.27th 2026 - ???

## 1 多重积分

### 1.1 矩形区域上的积分

习题1 若 $f$ 和 $g$ 都在 $[0, 1]$ 上可积，证明 $f(x)g(y)$ 在 $[0, 1]^2$ 上可积，并且

$$\iint_{[0,1]^2} f(x)g(y) dx dy = \left( \int_0^1 f(x) dx \right) \left( \int_0^1 g(y) dy \right).$$

解答：从基本定义出发， $f(x)g(y)$ 在 $[0, 1]^2$ 上可积 $\Leftrightarrow \exists a \in \mathbb{R}$ ,

$$\lim_{\|\pi\| \rightarrow 0} \left| \sum_{i=1}^k f(x_i)g(y_i) \sigma_i - a \right| = 0.$$

$\sigma_i$ 为小块面积。我们将 $[0, 1]^2$ 切成 $n^2$ 块，每块是

$$\left[ \frac{i-1}{n}, \frac{i}{n} \right] \times \left[ \frac{j-1}{n}, \frac{j}{n} \right] \quad (1 \leq i, j \leq n, \text{ 边界不计}).$$

在第 $(i, j)$ 块取点 $(x_i, y_j)$ ，则有

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{1}{n^2} f(x_i)g(y_j) = \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i) \right) \left( \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n g(y_j) \right).$$

而由一元可积性，

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f(x) dx, \quad \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n g(y_j) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^1 g(y) dy.$$

故

$$\iint_{[0,1]^2} f(x)g(y) dx dy = \left( \int_0^1 f(x) dx \right) \left( \int_0^1 g(y) dy \right). \square$$

习题2 计算积分

$$\iint_{[0,1] \times [0,1]} e^{x+y} dx dy.$$

解答：直接运用上一题结论，

$$\iint_{[0,1]^2} e^{x+y} dx dy = \left( \int_0^1 e^x dx \right) \left( \int_0^1 e^y dy \right) = (e-1)^2. \square$$

习题3 设 $a > 0$ ,  $I = [-a, a] \times [-a, a]$ , 求证：

$$\iint_I \sin(x+y) dx dy = 0,$$

并试从几何上说明这一结果。

解答:

$$\begin{aligned} \iint_I \sin(x+y) dx dy &= \iint_I (\sin x \cos y + \sin y \cos x) dx dy \\ &= \left( \int_{-a}^a \sin x dx \right) \left( \int_{-a}^a \cos y dy \right) + \left( \int_{-a}^a \sin y dy \right) \left( \int_{-a}^a \cos x dx \right). \end{aligned}$$

而  $\sin t$  是奇函数, 故

$$\int_{-a}^a \sin x dx = \int_{-a}^a \sin y dy = 0.$$

因此积分值为0。□

几何上:  $(x_0, y_0)$  处与  $(-x_0, -y_0)$  处函数值相反, 区域关于原点中心对称且有界, 故积分值为0。

#### 习题4 证明定理10.1.8。

「定理10.1.8」设  $f$  在  $I = [a, b] \times [c, d]$  上有界, 那么以下四个条件等价:

- (1)  $f$  在  $I$  上可积;
- (2)  $\lim_{\|\pi\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^k \omega_i \sigma_i = 0$ , 其中  $\omega_i = M_i - m_i$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ),  $M_i$  和  $m_i$  分别为  $f$  在  $\sigma_i$  上的上、下确界;
- (3) 对任意的  $\varepsilon > 0$ , 存在  $I$  的一个分割  $\pi$ , 使得  $\bar{S}(f, \pi) - \underline{S}(f, \pi) < \varepsilon$ ;
- (4)  $\underline{\int}_I f d\sigma = \overline{\int}_I f d\sigma$ .

解答: 由基本定义有 (2)  $\Leftrightarrow$  (3)  $\Leftrightarrow$  (4).

$$(1) \Leftrightarrow \exists a \in \mathbb{R}, \lim_{\|\pi\| \rightarrow 0} \left| \left( \sum_{i=1}^k f(x_i, y_i) \cdot \sigma_i \right) - a \right| = 0. \quad x_i, y_i \text{ 为 } \sigma_i \text{ 对应面积内任一点.}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{\|\pi\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^k f(x_i, y_i) \cdot \sigma_i = a. \quad \text{我们证明这与(4)等价.}$$

$$(1') \Rightarrow (4): \underline{\int}_I f d\sigma = \min \lim_{\|\pi\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^k f(x_i, y_i) \cdot \sigma_i = a = \max \lim_{\|\pi\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^k f(x_i, y_i) \cdot \sigma_i = \overline{\int}_I f d\sigma.$$

$$(4) \Rightarrow (1'): \text{取 } a := \underline{\int}_I f d\sigma = \overline{\int}_I f d\sigma. \Rightarrow \underline{\int}_I f d\sigma \leq \lim_{\|\pi\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^k f(x_i, y_i) \cdot \sigma_i = \overline{\int}_I f d\sigma. \Rightarrow \text{积分值为 } a$$

故 (1)  $\Leftrightarrow$  (1')  $\Leftrightarrow$  (4). □

#### 习题5 证明: 闭矩形上的连续函数可积。

解答: 由连续性, 对任意给定  $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ , 存在  $\delta > 0$  使得当  $x_1, x_2 \in I$  且  $\|x_1 - x_2\| < \delta$  时,  $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$ .

将  $I$  切成若干小矩形  $R_1, R_2, \dots, R_t$ , 使每个  $R_i$  的直径  $< \delta$ , 则对任意  $x_1, x_2 \in R_i$  有  $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$ , 即每块的振幅  $\omega_i < \varepsilon$ 。于是

$$\bar{S}(f, \pi) - \underline{S}(f, \pi) = \sum_{i=1}^t \omega_i \sigma_i < \varepsilon \sum_{i=1}^t \sigma_i = \varepsilon \text{Area}(I).$$

故可令上、下和之差任意小, 由定理10.1.8知  $f$  在  $I$  上可积。□

## 1.2 Lebesgue 定理

#### 习题1 设点列 $\{p_n\}$ 在 $\mathbb{R}^2$ 中有极限, 求证: 点集 $B = \{p_n\}$ 是零面积集。

解答: 设点列  $\{p_n\}$  极限是  $p$ 。对  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists n \in \mathbb{Z}^+$ ,  $\forall N > n$  有

$$d(p_N, p) < \varepsilon$$

而 $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ 是有限点集，面积为0。

$$\Rightarrow B \subset \{p_1, p_2, \dots, p_n\} \cup B(p, \varepsilon),$$

其中 $B(p, \varepsilon)$ 为以 $p$ 为中心、半径 $\varepsilon$ 的圆盘，于是

$$\text{Area}(B) \leq \pi \varepsilon^2.$$

而 $\varepsilon$ 可任取，故 $B$ 是零面积集。□

**习题2** 设有界集 $B \subset \mathbb{R}^2$ 且 $B'$ 是零面积集，求证： $\overline{B}$ 也是零面积集。

解答：我们只用考察并证明 $\overline{B} \setminus B'$ 也是零面积集即可。我们证明一个加强结论：这个集合只有有限个点。

若非如此，设 $\overline{B} \setminus B'$ 是无限点集。由于 $B$ 有界， $\overline{B} \setminus B'$ 也有界，设为 $[-N, N] \times [-N, N]$ 。

将 $[-N, N] \times [-N, N]$ 划分成4份：

$$[-N, 0] \times [-N, 0], \quad [-N, 0] \times [0, N], \quad [0, N] \times [-N, 0], \quad [0, N] \times [0, N].$$

由抽屉原理， $\overline{B} \setminus B'$ 在其中一个小区域里面积有无穷个点；再细分四份，仍有无穷个点。

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists (x_0, y_0) \in (-N, N) \times (-N, N) \text{ 使得 } [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \times [y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon] \cap (\overline{B} \setminus B') \text{ 是无穷.}$$

$\Rightarrow$  存在极限点在 $\overline{B} \setminus B'$  内，但这与 $B'$  的定义矛盾！□

**习题3** 证明： $[0, 1]^2$ 中的全体有理点所成的集不是零面积集，但是零测集。

解答：先证它不是零面积集：若是，则我们取 $\varepsilon = \frac{1}{2}$ ，存在有限个长方形 $P_1, P_2, \dots, P_m$

使得有理点集被 $\bigcup_{i=1}^m P_i$ 包含。且

$$\text{Area}\left(\bigcup_{i=1}^m P_i\right) \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \text{Area}\left([0, 1]^2 \setminus \bigcup_{i=1}^m P_i\right) \geq \frac{1}{2}.$$

而

$$\left([0, 1]^2 \setminus \bigcup_{i=1}^m P_i\right)^\circ$$

是面积为正的开集。

任取 $([0, 1]^2 \setminus \bigcup_{i=1}^m P_i)^\circ$ ， $\exists \varepsilon_0 > 0$ ，使得

$$B(p_0, \varepsilon_0) \subset [0, 1]^2 \setminus \bigcup_{i=1}^m P_i.$$

由有理点稠密性矛盾，故证毕。零测性由可数性显然。□

**习题4** 设闭矩形 $J \subset I$ ，且 $f$ 在 $I$ 上可积，求证： $f$ 在 $J$ 上也可积。

解答：若 $f$ 在 $I$ 上可积，由定理10.1.8，我们将条件转写成叙述为(2)：

$$\lim_{\|\pi\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^k \omega_i \sigma_i = 0,$$

其中 $\omega_i = M_i - m_i$ 为第*i*块区域的上、下确界之差， $\sigma_i$ 是 $I$ 的一个划分。

我们只需要在划分的时候“稍加留意”，把 $J$ 的边界也作为划分痕迹：

$$\Rightarrow \lim_{\|\pi\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^k \omega_i \sigma_i \geq \lim_{\|\pi\| \rightarrow 0} \sum_{j=1}^t \omega_{J(j)} \sigma_{J(j)},$$

$J(1), J(2), \dots, J(t)$  是  $J$  在划分中的对应块。故有

$$\lim_{\|\pi\| \rightarrow 0} \sum_{j=1}^t \omega_{J(j)} \sigma_{J(j)} = 0.$$

由定理10.1.8, (2)  $\Rightarrow$  (1) 有  $f$  在  $J$  上可积。  $\square$

习题5 设在  $I$  上可积函数  $f > 0$ , 求证:  $\int_I f d\sigma > 0$ .

解答: 堪忧, 这还要证? Trivial.  $\square$

习题6 研究定义在区域  $[0, 1]^2$  上的函数

$$f(x, y) = \begin{cases} \sin \frac{1}{xy}, & x \neq 0 \text{ 且 } y \neq 0, \\ 0, & x = 0 \text{ 或 } y = 0, \end{cases}$$

的可积性。

解答: 原函数在定义域  $[0, 1] \times [0, 1]$  的不连续点集为

$$\{0\} \times [0, 1] \cup [0, 1] \times \{0\}.$$

这明显是零测集 (甚至是零面积集), 从而由 Lebesgue 定理,  $f$  在  $[0, 1]^2$  上可积。  $\square$

习题7 设  $I$  是一个有界的矩形,  $B = \{p_1, p_2, \dots, p_n, \dots\} \subset I$ , 定义函数

$$f(p) = \begin{cases} 0, & p \notin B, \\ \frac{1}{n}, & p = p_n (n \in \mathbb{N}^*). \end{cases}$$

研究函数  $f$  在  $I$  上的可积性。

解答:  $B$  至多可数从而零测。间断点是零测集, 由 Lebesgue 定理知可积。  $\square$

习题8 设函数  $f$  和  $g$  在  $I$  上可积, 求证:  $fg$  在  $I$  上也可积; 当  $g$  在  $I$  上不取零值且  $f/g$  在  $I$  上有界时,  $f/g$  在  $I$  上也可积。

解答:  $fg$  和  $f/g$  的间断点为  $f$  的间断点  $\cup$   $g$  的间断点的并集。

( $f/g$  在  $g$  不取 0 时可以这样论证) 由 Lebesgue 定理知可积。  $\square$

习题9 设  $f$  在  $I$  上可积, 证明:  $|f|$  在  $I$  上也可积, 并且

$$\left| \int_I f d\sigma \right| \leq \int_I |f| d\sigma.$$

解答:  $|f|$  的间断点是  $f$  的间断点的子集, 而其是零测, 由 Lebesgue 定理知  $|f|$  也可积。而

$$\left| \int_I f d\sigma \right| = \left| \lim_{\|\pi\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^k f(x_i) \sigma_i \right| \leq \lim_{\|\pi\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^k |f(x_i)| \sigma_i = \int_I |f| d\sigma. \square$$

问题1 设  $\int_I f d\sigma > 0$ , 求证: 存在闭矩形  $J \subset I$ , 使得  $f > 0$  在  $J$  上成立。

解答: 我们采取反证法。若不存在这样的小矩形  $J$ : 对  $\forall x \in I$  满足  $f(x) > 0$ , 我们可知  $f$  在  $x$  处必不连续。

从而  $\{x \mid f(x) > 0\}$  是不连续点集的子集。取  $P = \{x \mid f(x) > 0\}$ .

由 Lebesgue 定理知  $P$  是零测集。从而  $\int_I f d\sigma = \int_{I/P} f d\sigma < 0$ , 矛盾。  $\square$

问题2 对  $(x, y) \in [0, 1]^2$ , 定义

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{m} + \frac{1}{q}, & x = \frac{n}{m}, y = \frac{p}{q}, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$$

证明:  $f$  在  $[0, 1]^2$  上可积, 这里  $m, n, q, p \in \mathbb{N}^*$ 。

解答: 我们考虑间断点集, 发现它是  $(\mathbb{Q} \cap [0, 1])^2$ .

因为但凡函数值为 0 的点集都不是间断点: 取  $\varepsilon$  足够小, 以  $\varepsilon$  为半径的圆内的有理数分母会任意大。

而  $(\mathbb{Q} \cap [0, 1])^2$  可数, 从而零测。由 Lebesgue 定理, 原函数可积。□

### 1.3 矩形区域上二重积分的计算

习题1 计算下列积分:

$$(1) \iint_I \frac{x^2}{1+y^2} dx dy, I = [0, 1]^2;$$

$$(2) \iint_I x \cos(xy) dx dy, I = [0, \pi/2] \times [0, 1];$$

$$(3) \iint_I \sin(x+y) dx dy, I = [0, \pi]^2.$$

解答:

$$(1) \iint_I \frac{x^2}{1+y^2} dx dy = \left( \int_0^1 x^2 dx \right) \left( \int_0^1 \frac{1}{1+y^2} dy \right) = \left( \frac{1}{3} x^3 \Big|_0^1 \right) \left( \arctan y \Big|_0^1 \right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}. \square$$

$$(2) \iint_I x \cos(xy) dx dy = \int_0^1 x \cdot \left( \int_0^{\pi/2} \cos(xy) dy \right) dx.$$

$$\text{而 } \int_0^{\pi/2} \cos(xy) dy = \frac{1}{x} \sin(xy) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{1}{x} \sin \frac{\pi x}{2} \Rightarrow \int_0^1 x \left( \int_0^{\pi/2} \cos(xy) dy \right) dx = \int_0^1 \sin \frac{\pi x}{2} dx = 1. \square$$

$$(3) \iint_I \sin(x+y) dx dy = \iint_I \sin x \cos y dx dy + \iint_I \sin y \cos x dx dy$$

$$= (\int_0^\pi \sin x dx) (\int_0^\pi \cos y dy) + (\int_0^\pi \cos x dx) (\int_0^\pi \sin y dy) = 0. \square$$

习题2 设函数  $f$  在矩形  $I = [a, b] \times [c, d]$  上有连续的二阶偏导数, 计算积分  $\iint_I \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x, y) dx dy$ .

解答:

$$\begin{aligned} \iint_I \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x, y) dx dy &= \int_a^b \left( \int_c^d \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x, y) dy \right) dx \\ &= \int_a^b \left( \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \Big|_{y=c}^{y=d} \right) dx = \int_a^b \left( \frac{\partial f(x, d)}{\partial x} - \frac{\partial f(x, c)}{\partial x} \right) dx = f(b, d) + f(a, c) - f(a, d) - f(b, c). \square \end{aligned}$$

习题3 计算积分  $\iint_I f d\sigma$  ( $I = [0, 1]^2$ ):

$$(1) f(x, y) = \begin{cases} 1, & y \leq x^2, \\ 0, & y > x^2; \end{cases}$$

$$(2) f(x, y) = \begin{cases} x+y, & x^2 \leq y \leq 2x^2, \\ 0, & y < x^2 \text{ 或 } y > 2x^2. \end{cases}$$

解答:

(1)

$$\int_I f d\sigma = \int_0^1 \left( \int_0^{x^2} 1 dy \right) dx = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3} x^3 \Big|_0^1 = \frac{1}{3}. \square$$

(2)

$$\int_I f d\sigma = \int_0^{\sqrt{2}/2} \left( \int_{x^2}^{2x^2} (x+y) dy \right) dx + \int_{\sqrt{2}/2}^1 \left( \int_{x^2}^1 (x+y) dy \right) dx$$

$$= \int_0^{\sqrt{2}/2} \left( x^3 + \frac{3}{2} x^4 \right) dx + \int_{\sqrt{2}/2}^1 \left( \frac{1}{2} + x - x^3 - \frac{1}{2} x^4 \right) dx$$

$$= \left( \frac{1}{4} x^4 + \frac{3}{10} x^5 \right) \Big|_0^{\sqrt{2}/2} + \left( \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{4} x^4 - \frac{1}{10} x^5 \right) \Big|_{\sqrt{2}/2}^1 = \left( \frac{1}{16} + \frac{3\sqrt{2}}{80} \right) + \left( \frac{37}{80} - \frac{19\sqrt{2}}{80} \right) = \frac{21}{40} - \frac{\sqrt{2}}{5}. \square$$