史济怀《数学分析教程》下册习题整理

OrangeCat

Jan.27th 2026 - ???

1 多重积分

1.1 矩形区域上的积分

习题1 若f和g都在$[0,1]$上可积，证明$f(x)g(y)$在$[0,1]^2$上可积，并且

$$\iint_{[0,1]^2} f(x)g(y)\,dx\,dy = \left(\int_0^1 f(x)\,dx\right)\left(\int_0^1 g(y)\,dy\right).$$

解答：从基本定义出发，$f(x)g(y)$在$[0,1]^2$上可积$\Leftrightarrow \exists a \in \mathbb{R}$，

$$\lim_{\|\pi\|\to 0}\left|\sum_{i=1}^{k} f(x_i)g(y_i)\,\sigma_i - a\right| = 0.$$

σ_i为小块面积。我们将$[0,1]^2$切成n^2块，每块是

$$\left[\frac{i-1}{n},\frac{i}{n}\right]\times\left[\frac{j-1}{n},\frac{j}{n}\right] \qquad (1 \le i,j \le n\text{，边界不计}).$$

在第(i,j)块取点(x_i,y_j)，则有

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{n^2}f(x_i)g(y_j) = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f(x_i)\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}g(y_j)\right).$$

而由一元可积性，

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f(x_i) \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_0^1 f(x)\,dx, \qquad \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}g(y_j) \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_0^1 g(y)\,dy.$$

故

$$\iint_{[0,1]^2} f(x)g(y)\,dx\,dy = \left(\int_0^1 f(x)\,dx\right)\left(\int_0^1 g(y)\,dy\right).\ \square$$

习题2 计算积分

$$\iint_{[0,1]\times[0,1]} e^{x+y}\,dx\,dy.$$

解答：直接运用上一题结论，

$$\iint_{[0,1]^2} e^{x+y}\,dx\,dy = \left(\int_0^1 e^x\,dx\right)\left(\int_0^1 e^y\,dy\right) = (e-1)^2.\ \square$$

习题3 设$a>0$，$I=[-a,a]\times[-a,a]$，求证：

$$\iint_I \sin(x+y)\,dx\,dy = 0,$$

并试从几何上说明这一结果。

解答：

$$\iint_I \sin(x+y)\,dx\,dy = \iint_I (\sin x\cos y + \sin y\cos x)\,dx\,dy$$
$$= \left(\int_{-a}^{a} \sin x\,dx\right)\left(\int_{-a}^{a} \cos y\,dy\right) + \left(\int_{-a}^{a} \sin y\,dy\right)\left(\int_{-a}^{a} \cos x\,dx\right).$$

而$\sin t$是奇函数，故

$$\int_{-a}^{a} \sin x\,dx = \int_{-a}^{a} \sin y\,dy = 0.$$

因此积分值为0。 □

几何上：(x_0, y_0)处与$(-x_0, -y_0)$处函数值相反，区域关于原点中心对称且有界，故积分值为0。

习题4　证明定理10.1.8。

「定理10.1.8」设f在$I=[a,b]\times[c,d]$上有界，那么以下四个条件等价：

(1) f在I上可积；

(2) $\lim\limits_{\|\pi\|\to 0}\sum\limits_{i=1}^{k}\omega_i\,\sigma_i = 0$，其中$\omega_i = M_i - m_i\ (i=1,2,\dots,k)$，$M_i$和$m_i$分别为$f$在$\sigma_i$上的上、下确界；

(3) 对任意的$\varepsilon>0$，存在I的一个分割π，使得$\overline{S}(f,\pi)-\underline{S}(f,\pi)<\varepsilon$；

(4) $\underline{\int_I} f\,d\sigma = \overline{\int_I} f\,d\sigma.$

解答：由基本定义有(2) $\Leftrightarrow$ (3) $\Leftrightarrow$ (4).

$$(1) \Leftrightarrow \exists a\in\mathbb{R},\ \lim_{\|\pi\|\to 0}\left|\left(\sum_{i=1}^{k} f(x_i,y_i)\cdot\sigma_i\right)-a\right| = 0. \qquad x_i, y_i \text{ 为 } \sigma_i \text{ 对应面积内任一点.}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{\|\pi\|\to 0}\sum_{i=1}^{k} f(x_i,y_i)\cdot\sigma_i = a. \qquad \text{我们证明这与(4)等价.}$$

$$(1')\Rightarrow(4):\ \underline{\int_I} f\,d\sigma = \min\lim_{\|\pi\|\to 0}\sum_{i=1}^{k} f(x_i,y_i)\cdot\sigma_i = a = \max\lim_{\|\pi\|\to 0}\sum_{i=1}^{k} f(x_i,y_i)\cdot\sigma_i = \overline{\int_I} f\,d\sigma.$$

$$(4)\Rightarrow(1'):\ \text{取}a := \underline{\int_I} f\,d\sigma = \overline{\int_I} f\,d\sigma.\Rightarrow\ \underline{\int_I} f\,d\sigma \le \lim_{\|\pi\|\to 0}\sum_{i=1}^{k} f(x_i,y_i)\cdot\sigma_i = \overline{\int_I} f\,d\sigma.\Rightarrow\ \text{积分值为}a$$

故(1) $\Leftrightarrow$ (1′) $\Leftrightarrow$ (4). □

习题5　证明：闭矩形上的连续函数可积。

解答：由连续性，对任意给定$\varepsilon\in\mathbb{R}^+$，存在$\delta>0$使得当$x_1,x_2\in I$且$\|x_1-x_2\|<\delta$时，$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$.
将I切成若干小矩形$R_1,R_2,\dots,R_t$，使每个R_i的直径$<\delta$，则对任意$x_1,x_2\in R_i$有$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$，即每块的振幅$\omega_i<\varepsilon$。于是

$$\overline{S}(f,\pi)-\underline{S}(f,\pi) = \sum_{i=1}^{t}\omega_i\,\sigma_i < \varepsilon\sum_{i=1}^{t}\sigma_i = \varepsilon\,\mathrm{Area}(I).$$

故可令上、下和之差任意小，由定理10.1.8知f在I上可积。 □

1.2　Lebesgue定理

习题1　设点列$\{p_n\}$在$\mathbb{R}^2$中有极限，求证：点集$B=\{p_n\}$是零面积集。

解答：设点列$\{p_n\}$极限是p。对$\forall\,\varepsilon>0$，$\exists\,n\in\mathbb{Z}^+$，$\forall\,N>n$有

$$d(p_N, p) < \varepsilon$$

而$\{p_1,p_2,\ldots,p_n\}$是有限点集，面积为0。

$$\Rightarrow\ B\subset\{p_1,p_2,\ldots,p_n\}\cup B(p,\varepsilon),$$

其中$B(p,\varepsilon)$为以p为中心、半径ε的圆盘，于是

$$\mathrm{Area}(B)\le\pi\varepsilon^2.$$

而ε可任取，故B是零面积集。$\square$

习题2　设有界集$B\subset\mathbb{R}^2$且B'是零面积集，求证：$\overline{B}$也是零面积集。

解答：我们只用考察并证明$\overline{B}\setminus B'$也是零面积集即可。我们证明一个加强结论：这个集合只有有限个点。

若非如此，设$\overline{B}\setminus B'$是无限点集。由于B有界，$\overline{B}\setminus B'$也有界，设为$[-N,N]\times[-N,N]$。

将$[-N,N]\times[-N,N]$划分成4份：

$$[-N,0]\times[-N,0],\quad [-N,0]\times[0,N],\quad [0,N]\times[-N,0],\quad [0,N]\times[0,N].$$

由抽屉原理，$\overline{B}\setminus B'$在其中一个小区域里面积有无穷个点；再细分四份，仍有无穷个点。

$$\Rightarrow\ \forall\,\varepsilon>0,\ \exists\,(x_0,y_0)\in(-N,N)\times(-N,N)\ \text{使得}\ [x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon]\times[y_0-\varepsilon,y_0+\varepsilon]\cap(\overline{B}\setminus B')\ \text{是无穷}.$$

$$\Rightarrow\ \text{存在极限点在}\overline{B}\setminus B'\ \text{内，但这与}B'\ \text{的定义矛盾！}\square$$

习题3　证明：$[0,1]^2$中的全体有理点所成的集不是零面积集，但是零测集。

解答：先证它不是零面积集：若是，则我们取$\varepsilon=\frac{1}{2}$，存在有限个长方形$P_1,P_2,\ldots,P_m$

使得有理点集被$\bigcup_{i=1}^m P_i$包含。且

$$\mathrm{Area}\left(\bigcup_{i=1}^m P_i\right)\le\frac{1}{2}\ \Rightarrow\ \mathrm{Area}\left([0,1]^2\setminus\bigcup_{i=1}^m P_i\right)\ge\frac{1}{2}.$$

而

$$\left([0,1]^2\setminus\bigcup_{i=1}^m P_i\right)^\circ$$

是面积为正的开集。

任取$\left([0,1]^2\setminus\bigcup_{i=1}^m P_i\right)^\circ$，$\exists\,\varepsilon_0>0$，使得

$$B(p_0,\varepsilon_0)\subset[0,1]^2\setminus\bigcup_{i=1}^m P_i.$$

由有理点稠密性矛盾，故证毕。零测性由可数性显然。$\square$

习题4　设闭矩形$J\subset I$，且f在I上可积，求证：f在J上也可积。

解答：若f在I上可积，由定理10.1.8，我们将条件转写成叙述为(2)：

$$\lim_{\|\pi\|\to0}\sum_{i=1}^k\omega_i\,\sigma_i=0,$$

其中$\omega_i=M_i-m_i$为第i块区域的上、下确界之差，σ_i是I的一个划分。

我们只需要在划分的时候“稍加留意”，把J的边界也作为划分痕迹：

$$\Rightarrow\ \lim_{\|\pi\|\to0}\sum_{i=1}^k\omega_i\,\sigma_i\ge\lim_{\|\pi\|\to0}\sum_{j=1}^t\omega_{J(j)}\,\sigma_{J(j)},$$

$J(1), J(2), \ldots, J(t)$是J在划分中的对应块。故有

$$\lim_{\|\pi\|\to 0} \sum_{j=1}^{t} \omega_{J(j)}\, \sigma_{J(j)} = 0.$$

由定理10.1.8，(2)⇒(1)有f在J上可积。 □

习题5　设在I上可积函数$f > 0$，求证：$\displaystyle\int_I f\, d\sigma > 0$。

解答：Trivial. □

习题6　研究定义在区域$[0,1]^2$上的函数

$$f(x,y) = \begin{cases} \sin\dfrac{1}{xy}, & x \neq 0 \text{ 且 } y \neq 0, \\ 0, & x = 0 \text{ 或 } y = 0, \end{cases}$$

的可积性。

解答：原函数在定义域$[0,1]\times[0,1]$的不连续点集为

$$\{0\}\times[0,1] \ \cup\ [0,1]\times\{0\}.$$

这明显是零测集（甚至是零面积集），从而由Lebesgue定理，f在$[0,1]^2$上可积Θ □

习题7　设I是一个有界的矩形，$B = \{p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots\} \subset I$，定义函数

$$f(p) = \begin{cases} 0, & p \notin B, \\ \dfrac{1}{n}, & p = p_n\ (n \in \mathbb{N}^*). \end{cases}$$

研究函数f在I上的可积性。

解答：B至多可数从而零测。间断点是零测集，由Lebesgue定理知可积。 □

习题8　设函数f和g在I上可积，求证：fg在I上也可积；当g在I上不取零值且f/g在I上有界时，f/g在I上也可积。

解答：fg和f/g的间断点为f的间断点$\cup$ g的间断点的并集。

（f/g在g不取0时可以这样论证）由Lebesgue定理知可积。 □

习题9　设f在I上可积，证明：$|f|$在I上也可积，并且

$$\left|\int_I f\, d\sigma\right| \leq \int_I |f|\, d\sigma.$$

解答：$|f|$的间断点是f的间断点的子集，而其是零测，由Lebesgue定理知$|f|$也可积。而

$$\left|\int_I f\, d\sigma\right| = \left|\lim_{\|\pi\|\to 0} \sum_{i=1}^{k} f(x_i)\sigma_i\right| \leq \lim_{\|\pi\|\to 0} \sum_{i=1}^{k} |f(x_i)|\, \sigma_i = \int_I |f|\, d\sigma. \ \square$$

问题1　设$\displaystyle\int_I f\, d\sigma > 0$，求证：存在闭矩形$J \subset I$，使得$f > 0$在$J$上成立。

解答：我们采取反证法。若不存在这样的小矩形J：对$\forall x \in I$满足$f(x) > 0$，我们可知f在x处必不连续。

从而$\{x \mid f(x) > 0\}$是不连续点集的子集。取$P = \{x \mid f(x) > 0\}$.

由Lebesgue定理知P 是零测集.从而$\int_I f\, d\sigma = \int_{I/P} f\, d\sigma < 0$,矛盾。 □

问题2　对$(x,y) \in [0,1]^2$，定义

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{m} + \dfrac{1}{q}, & x = \dfrac{n}{m},\ y = \dfrac{p}{q}, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

证明：f在$[0,1]^2$上可积，这里$m,n,q,p\in\mathbb{N}^*$。

解答：我们考虑间断点集，发现它是$(\mathbb{Q}\cap[0,1])^2$.

因为但凡函数值为0的点集都不是间断点：取ε足够小，以ε为半径的圆内的有理数分母会任意大。

而$(\mathbb{Q}\cap[0,1])^2$可数，从而零测。由Lebesgue定理，原函数可积。 □

1.3 矩形区域上二重积分的计算