

史济怀《数学分析教程》下册习题整理

OrangeCat

Jan.27th 2026 - ???

1 多重积分

1.1 矩形区域上的积分

习题1 若 f 和 g 都在 $[0, 1]$ 上可积，证明 $f(x)g(y)$ 在 $[0, 1]^2$ 上可积，并且

$$\iint_{[0,1]^2} f(x)g(y) dx dy = \left(\int_0^1 f(x) dx \right) \left(\int_0^1 g(y) dy \right).$$

解答：从基本定义出发， $f(x)g(y)$ 在 $[0, 1]^2$ 上可积 $\Leftrightarrow \exists a \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{\|\pi\| \rightarrow 0} \left| \sum_{i=1}^k f(x_i)g(y_i) \sigma_i - a \right| = 0.$$

σ_i 为小块面积。我们将 $[0, 1]^2$ 切成 n^2 块，每块是

$$\left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n} \right] \times \left[\frac{j-1}{n}, \frac{j}{n} \right] \quad (1 \leq i, j \leq n, \text{ 边界不计}).$$

在第 (i, j) 块取点 (x_i, y_j) ，则有

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{1}{n^2} f(x_i)g(y_j) = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i) \right) \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n g(y_j) \right).$$

而由一元可积性，

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f(x) dx, \quad \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n g(y_j) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^1 g(y) dy.$$

故

$$\iint_{[0,1]^2} f(x)g(y) dx dy = \left(\int_0^1 f(x) dx \right) \left(\int_0^1 g(y) dy \right). \square$$

习题2 计算积分

$$\iint_{[0,1] \times [0,1]} e^{x+y} dx dy.$$

解答：直接运用上一题结论，

$$\iint_{[0,1]^2} e^{x+y} dx dy = \left(\int_0^1 e^x dx \right) \left(\int_0^1 e^y dy \right) = (e-1)^2. \square$$

习题3 设 $a > 0$, $I = [-a, a] \times [-a, a]$, 求证：

$$\iint_I \sin(x+y) dx dy = 0,$$

并试从几何上说明这一结果。

解答:

$$\begin{aligned} \iint_I \sin(x+y) dx dy &= \iint_I (\sin x \cos y + \sin y \cos x) dx dy \\ &= \left(\int_{-a}^a \sin x dx \right) \left(\int_{-a}^a \cos y dy \right) + \left(\int_{-a}^a \sin y dy \right) \left(\int_{-a}^a \cos x dx \right). \end{aligned}$$

而 $\sin t$ 是奇函数, 故

$$\int_{-a}^a \sin x dx = \int_{-a}^a \sin y dy = 0.$$

因此积分值为0。□

几何上: (x_0, y_0) 处与 $(-x_0, -y_0)$ 处函数值相反, 区域关于原点中心对称且有界, 故积分值为0。

习题4 证明定理10.1.8。

「定理10.1.8」设 f 在 $I = [a, b] \times [c, d]$ 上有界, 那么以下四个条件等价:

- (1) f 在 I 上可积;
- (2) $\lim_{\|\pi\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^k \omega_i \sigma_i = 0$, 其中 $\omega_i = M_i - m_i$ ($i = 1, 2, \dots, k$), M_i 和 m_i 分别为 f 在 σ_i 上的上、下确界;
- (3) 对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 I 的一个分割 π , 使得 $\bar{S}(f, \pi) - \underline{S}(f, \pi) < \varepsilon$;
- (4) $\underline{\int}_I f d\sigma = \overline{\int}_I f d\sigma$.

解答: 由基本定义有 (2) \Leftrightarrow (3) \Leftrightarrow (4).

$$(1) \Leftrightarrow \exists a \in \mathbb{R}, \lim_{\|\pi\| \rightarrow 0} \left| \left(\sum_{i=1}^k f(x_i, y_i) \cdot \sigma_i \right) - a \right| = 0. \quad x_i, y_i \text{ 为 } \sigma_i \text{ 对应面积内任一点.}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{\|\pi\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^k f(x_i, y_i) \cdot \sigma_i = a. \quad \text{我们证明这与(4)等价.}$$

$$(1') \Rightarrow (4): \underline{\int}_I f d\sigma = \min \lim_{\|\pi\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^k f(x_i, y_i) \cdot \sigma_i = a = \max \lim_{\|\pi\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^k f(x_i, y_i) \cdot \sigma_i = \overline{\int}_I f d\sigma.$$

$$(4) \Rightarrow (1'): \text{取 } a := \overline{\int}_I f d\sigma = \underline{\int}_I f d\sigma. \Rightarrow \underline{\int}_I f d\sigma \leq \lim_{\|\pi\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^k f(x_i, y_i) \cdot \sigma_i = \overline{\int}_I f d\sigma. \Rightarrow \text{积分值为 } a$$

故 (1) \Leftrightarrow (1') \Leftrightarrow (4). □

习题5 证明: 闭矩形上的连续函数可积。

解答: 由连续性, 对任意给定 $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, 存在 $\delta > 0$ 使得当 $x_1, x_2 \in I$ 且 $\|x_1 - x_2\| < \delta$ 时, $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.

将 I 切成若干小矩形 R_1, R_2, \dots, R_t , 使每个 R_i 的直径 $< \delta$, 则对任意 $x_1, x_2 \in R_i$ 有 $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$, 即每块的振幅 $\omega_i < \varepsilon$ 。于是

$$\bar{S}(f, \pi) - \underline{S}(f, \pi) = \sum_{i=1}^t \omega_i \sigma_i < \varepsilon \sum_{i=1}^t \sigma_i = \varepsilon \text{Area}(I).$$

故可令上、下和之差任意小, 由定理10.1.8知 f 在 I 上可积。□

1.2 Lebesgue 定理

习题1 设点列 $\{p_n\}$ 在 \mathbb{R}^2 中有极限, 求证: 点集 $B = \{p_n\}$ 是零面积集。

解答: 设点列 $\{p_n\}$ 极限是 p 。对 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n \in \mathbb{Z}^+$, $\forall N > n$ 有

$$d(p_N, p) < \varepsilon$$

而 $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ 是有限点集，面积为0。

$$\Rightarrow B \subset \{p_1, p_2, \dots, p_n\} \cup B(p, \varepsilon),$$

其中 $B(p, \varepsilon)$ 为以 p 为中心、半径 ε 的圆盘，于是

$$\text{Area}(B) \leq \pi \varepsilon^2.$$

而 ε 可任取，故 B 是零面积集。□

习题2 设有界集 $B \subset \mathbb{R}^2$ 且 B' 是零面积集，求证： \overline{B} 也是零面积集。

解答：我们只用考察并证明 $\overline{B} \setminus B'$ 也是零面积集即可。我们证明一个加强结论：这个集合只有有限个点。

若非如此，设 $\overline{B} \setminus B'$ 是无限点集。由于 B 有界， $\overline{B} \setminus B'$ 也有界，设为 $[-N, N] \times [-N, N]$ 。

将 $[-N, N] \times [-N, N]$ 划分成4份：

$$[-N, 0] \times [-N, 0], \quad [-N, 0] \times [0, N], \quad [0, N] \times [-N, 0], \quad [0, N] \times [0, N].$$

由抽屉原理， $\overline{B} \setminus B'$ 在其中一个小区域里面积有无穷个点；再细分四份，仍有无穷个点。

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists (x_0, y_0) \in (-N, N) \times (-N, N) \text{ 使得 } [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \times [y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon] \cap (\overline{B} \setminus B') \text{ 是无穷.}$$

\Rightarrow 存在极限点在 $\overline{B} \setminus B'$ 内，但这与 B' 的定义矛盾！□

习题3 证明： $[0, 1]^2$ 中的全体有理点所成的集不是零面积集，但是零测集。

解答：先证它不是零面积集：若是，则我们取 $\varepsilon = \frac{1}{2}$ ，存在有限个长方形 P_1, P_2, \dots, P_m

使得有理点集被 $\bigcup_{i=1}^m P_i$ 包含。且

$$\text{Area}\left(\bigcup_{i=1}^m P_i\right) \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \text{Area}\left([0, 1]^2 \setminus \bigcup_{i=1}^m P_i\right) \geq \frac{1}{2}.$$

而

$$\left([0, 1]^2 \setminus \bigcup_{i=1}^m P_i\right)^\circ$$

是面积为正的开集。

任取 $([0, 1]^2 \setminus \bigcup_{i=1}^m P_i)^\circ$ ， $\exists \varepsilon_0 > 0$ ，使得

$$B(p_0, \varepsilon_0) \subset [0, 1]^2 \setminus \bigcup_{i=1}^m P_i.$$

由有理点稠密性矛盾，故证毕。零测性由可数性显然。□

习题4 设闭矩形 $J \subset I$ ，且 f 在 I 上可积，求证： f 在 J 上也可积。

解答：若 f 在 I 上可积，由定理10.1.8，我们将条件转写成叙述为(2)：

$$\lim_{\|\pi\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^k \omega_i \sigma_i = 0,$$

其中 $\omega_i = M_i - m_i$ 为第*i*块区域的上、下确界之差， σ_i 是 I 的一个划分。

我们只需要在划分的时候“稍加留意”，把 J 的边界也作为划分痕迹：

$$\Rightarrow \lim_{\|\pi\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^k \omega_i \sigma_i \geq \lim_{\|\pi\| \rightarrow 0} \sum_{j=1}^t \omega_{J(j)} \sigma_{J(j)},$$

$J(1), J(2), \dots, J(t)$ 是 J 在划分中的对应块。故有

$$\lim_{\|\pi\| \rightarrow 0} \sum_{j=1}^t \omega_{J(j)} \sigma_{J(j)} = 0.$$

由定理10.1.8, (2) \Rightarrow (1) 有 f 在 J 上可积。 \square

习题5 设在 I 上可积函数 $f > 0$, 求证: $\int_I f d\sigma > 0$.

解答: Trivial. \square

习题6 研究定义在区域 $[0, 1]^2$ 上的函数

$$f(x, y) = \begin{cases} \sin \frac{1}{xy}, & x \neq 0 \text{ 且 } y \neq 0, \\ 0, & x = 0 \text{ 或 } y = 0, \end{cases}$$

的可积性。

解答: 原函数在定义域 $[0, 1] \times [0, 1]$ 的不连续点集为

$$\{0\} \times [0, 1] \cup [0, 1] \times \{0\}.$$

这明显是零测集 (甚至是零面积集), 从而由 Lebesgue 定理, f 在 $[0, 1]^2$ 上可积 $\Theta \square$

习题7 设 I 是一个有界的矩形, $B = \{p_1, p_2, \dots, p_n, \dots\} \subset I$, 定义函数

$$f(p) = \begin{cases} 0, & p \notin B, \\ \frac{1}{n}, & p = p_n (n \in \mathbb{N}^*). \end{cases}$$

研究函数 f 在 I 上的可积性。

解答: B 至多可数从而零测。间断点是零测集, 由 Lebesgue 定理知可积。 \square

习题8 设函数 f 和 g 在 I 上可积, 求证: fg 在 I 上也可积; 当 g 在 I 上不取零值且 f/g 在 I 上有界时, f/g 在 I 上也可积。

解答: fg 和 f/g 的间断点为 f 的间断点 \cup g 的间断点的并集。

(f/g 在 g 不取 0 时可以这样论证) 由 Lebesgue 定理知可积。 \square

习题9 设 f 在 I 上可积, 证明: $|f|$ 在 I 上也可积, 并且

$$\left| \int_I f d\sigma \right| \leq \int_I |f| d\sigma.$$

解答: $|f|$ 的间断点是 f 的间断点的子集, 而其是零测, 由 Lebesgue 定理知 $|f|$ 也可积。而

$$\left| \int_I f d\sigma \right| = \left| \lim_{\|\pi\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^k f(x_i) \sigma_i \right| \leq \lim_{\|\pi\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^k |f(x_i)| \sigma_i = \int_I |f| d\sigma. \square$$

问题1 设 $\int_I f d\sigma > 0$, 求证: 存在闭矩形 $J \subset I$, 使得 $f > 0$ 在 J 上成立。

解答: 我们采取反证法。若不存在这样的小矩形 J : 对 $\forall x \in I$ 满足 $f(x) > 0$, 我们可知 f 在 x 处必不连续。

从而 $\{x \mid f(x) > 0\}$ 是不连续点集的子集。取 $P = \{x \mid f(x) > 0\}$.

由 Lebesgue 定理知 P 是零测集。从而 $\int_I f d\sigma = \int_{I/P} f d\sigma < 0$, 矛盾。 \square

问题2 对 $(x, y) \in [0, 1]^2$, 定义

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{m} + \frac{1}{q}, & x = \frac{n}{m}, y = \frac{p}{q}, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$$

证明: f 在 $[0, 1]^2$ 上可积, 这里 $m, n, q, p \in \mathbb{N}^*$ 。

解答: 我们考虑间断点集, 发现它是 $(\mathbb{Q} \cap [0, 1])^2$.

因为但凡函数值为0的点集都不是间断点: 取 ε 足够小, 以 ε 为半径的圆内的有理数分母会任意大。

而 $(\mathbb{Q} \cap [0, 1])^2$ 可数, 从而零测。由Lebesgue定理, 原函数可积。□

1.3 矩形区域上二重积分的计算