

何书元《应用时间序列分析》习题整理

OrangeCat

Jan.25th 2026 - ???

1 时间序列

1.1 时间序列的分解

习题1 证明课本例1.2 方法3中 a, b, c 的最小二乘估计是

$$(\hat{a}, \hat{b}, \hat{c})^T = (YY^T)^{-1}YX.$$

「方法3」二次曲线趋势：我们还可以用二次曲线来拟合数据的趋势项，这时认为 (x_t, t) 满足二元线性回归模型：

$$x_t = a + bt + ct^2 + \varepsilon_t, \quad t = 1, 2, \dots.$$

定义

$$X = (x_1, x_2, \dots, x_{24})^T, \quad Y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & \dots & 24 \\ 1 & 2^2 & \dots & 24^2 \end{bmatrix}.$$

$(a, b, c)^T$ 的最小二乘估计由公式

$$(\hat{a}, \hat{b}, \hat{c})^T = (YY^T)^{-1}YX$$

决定。

解答：只用证明最小二乘估计满足矩阵乘法

$$(YY^T)(\hat{a}, \hat{b}, \hat{c})^T = YX$$

即可。展开即为

$$\begin{cases} \sum_{n=1}^m 1 \cdot a + \sum_{n=1}^m n \cdot b + \sum_{n=1}^m n^2 \cdot c = \sum_{n=1}^m x_n \dots \textcircled{1} \\ \sum_{n=1}^m n \cdot a + \sum_{n=1}^m n^2 \cdot b + \sum_{n=1}^m n^3 \cdot c = \sum_{n=1}^m nx_n \dots \textcircled{2} \\ \sum_{n=1}^m n^2 \cdot a + \sum_{n=1}^m n^3 \cdot b + \sum_{n=1}^m n^4 \cdot c = \sum_{n=1}^m n^2 x_n \dots \textcircled{3} \end{cases}$$

我们考察原数据关系 $x_n = a + bn + cn^2 + \varepsilon_n$ ($1 \leq n \leq m$)。

目标是令 $\sum_{n=1}^m \varepsilon_n^2$ 尽量小 $\Rightarrow f(a, b, c; x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{n=1}^m (x_n - a - bn - cn^2)^2$ 尽量小, 这要求 $\frac{\partial f}{\partial a} = \frac{\partial f}{\partial b} = \frac{\partial f}{\partial c} = 0$.

$$\frac{\partial f}{\partial a} = 2 \sum_{n=1}^m 1 \cdot a - \sum_{n=1}^m 2(x_n - bn - cn^2) = 0 \Leftrightarrow \textcircled{1}$$

$$\frac{\partial f}{\partial b} = 2 \sum_{n=1}^m n^2 \cdot b - \sum_{n=1}^m 2n(x_n - cn^2 - a) = 0 \Leftrightarrow \textcircled{2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial c} = 2 \sum_{n=1}^m n^4 \cdot c - \sum_{n=1}^m 2n^2(x_n - a - bn) = 0. \Leftrightarrow \textcircled{3}$$

证毕。□

习题2、3为课本数据处理，解答过于繁琐复杂，此处从略。

习题4 对随机变量 ξ 证明下面的结论：

- (1) 如果 $E|\xi| = 0$, 则 $P(\xi = 0) = 1$;
- (2) 如果 $\text{Var}(\xi) = 0$, 则 $P(\xi = m) = 1$, 这里 $m = E\xi$;
- (3) 如果 $E|\xi| < \infty$, 则 $P(|\xi| < \infty) = 1$;
- (4) 切比雪夫不等式：对任何正常数 α, ε ,

$$P(|\xi| \geq \varepsilon) \leq E|\xi|^\alpha / \varepsilon^\alpha.$$

解答：(1) 若不然：设 $P(\varepsilon = 0) = p_0 < 1 \Rightarrow P(\varepsilon \neq 0) = 1 - p_0 > 0$.

取 α 足够小，使得 $P(|\varepsilon| < \alpha) \leq \frac{1}{2}(1 + p_0)$ (这样的 α 显然是存在的).

从而 $P(|\varepsilon| > \alpha) \geq \frac{1}{2}(1 - p_0) \Rightarrow E(|\varepsilon|) \geq \frac{1}{2}\alpha(1 - p_0) > 0$. 矛盾！证毕。□

(2) 若不然：设 $P(\varepsilon = E(\varepsilon)) = p_0 < 1$. 同上一问。我们取 $\alpha > 0$ 使得

$$P(\varepsilon \in (E(\varepsilon) - \alpha, E(\varepsilon) + \alpha)) \leq \frac{1}{2}(1 + p_0).$$

则有

$$\text{Var}(\varepsilon) = E((X - E(X))^2) > P(|\varepsilon - E(\varepsilon)| > \alpha) \cdot \alpha^2 = \frac{1}{2}(1 - p_0) \cdot \alpha^2 > 0. \text{ 矛盾! } \square$$

(4) 若不然： $P(|\xi| \geq \varepsilon) > E|\xi|^\alpha / \varepsilon^\alpha$.

$$E|\xi|^\alpha \geq \varepsilon^\alpha \cdot P(|\xi| \geq \varepsilon) > \varepsilon^\alpha \cdot \left(\frac{E|\xi|^\alpha}{\varepsilon^\alpha} \right) = E|\xi|^\alpha. \text{ 矛盾! } \square$$

1.2 平稳序列

习题2.1 设时间序列 $\{X_t\} = \{X_t : t \in \mathbb{Z}\}$ 满足：

- (1) 对任何 $t \in \mathbb{Z}$, $EX_t^2 < \infty$;
- (2) 对任何 $t \in \mathbb{Z}$, $EX_t = \mu$;
- (3) 对任何 $t, s \in \mathbb{Z}$, $E(X_t X_s) = b_{t-s}$.

证明 $\{X_t\}$ 是平稳时间序列，并求它的自协方差函数。

解答：平稳序列的要求是： $\forall t \in \mathbb{N}$ 有 $EX_t^2 < \infty$, $EX_t = \mu$. 且 $\forall t, s \in \mathbb{N}$, $E[(x_t - \mu)(x_s - \mu)] = \gamma_{t-s}$

在 $EX_t = \mu$ 时, $E[x_t x_s] = b_{t-s} \Leftrightarrow E[(x_t - \mu)(x_s - \mu)] = b_{t-s} - \mu^2$ 而且有自协方差函数 $\gamma(h) = b_h - \mu^2$. □

习题2.2 设 X 和 Y 是方差有限的随机变量. 证明若 $EX = 0$, 则 $E(XY) = \text{cov}(X, Y)$.

解答：

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X, Y) &= E((X - E(X))(Y - E(Y))) \\ &= E(X(Y - E(Y))) = E(XY) - E(X)E(Y) = E(XY). \square \end{aligned}$$

习题2.3 如果平稳序列 $\{X_t\}$ 的 n 阶自协方差矩阵退化，则对任何 $m > n$ ，一定存在常数 a_0, \dots, a_{n-1} ，使得

$$X_m = a_0 + \sum_{j=1}^{n-1} a_j X_{m-j}, \quad a.s..$$

解答：自协方差矩阵是半正定矩阵.

故自协方差矩阵退化 $\Leftrightarrow \exists \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ 使得 $\alpha^T \Gamma_n \alpha = 0$. $\Leftrightarrow \text{Var}(\sum_{i=1}^n \alpha_i (X_i - \mu)) = 0$.

$\Leftrightarrow P(\sum_{i=1}^n \alpha_i (X_i - \mu) = 0) = 1, \forall t \in \mathbb{N}. \Leftrightarrow X_m = a_0 + \sum_{j=1}^{n-1} a_j X_{m-j}, a.s. \quad \square$

习题2.4 平稳序列 $\{X_t\}$ 有 n 阶自协方差矩阵 Γ_n . 求 X_n, X_{n-1}, \dots, X_1 的协方差矩阵.

解答: 由于平稳序列定义以及自协方差函数是偶函数, 可知 $\Gamma_{\text{reverse}} = \Gamma_n$. \square

1.3 线性平稳序列和线性滤波

习题3.1 如果输入序列 $\{X_t\}$ 是由(3.4)定义的线性平稳序列, 则从保时线性滤波器 H 输出的序列 $\{Y_t\}$ 也是线性平稳序列。

「定义3.4」如果实数列 $\{a_j\}$ 满足

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} |a_j| < \infty,$$

就称 $\{a_j\}$ 是绝对可和的。对于绝对可和的实数列 $\{a_j\}$, 定义零均值白噪声 $\{\varepsilon_t\}$ 的无穷滑动和如下

$$X_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j \varepsilon_{t-j}, \quad t \in \mathbb{Z}. \quad (3.4)$$

解答: 输入序列 $\{X_t\}$ 是方差有限白噪声 $\{\varepsilon_t\}$ 的动态滑动和

$$X_t = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} a_j \varepsilon_{t-j}, \quad (t \in \mathbb{Z}).$$

保时线性滤波器

$$Y_t = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} h_j X_{t-j},$$

要求系数绝对可和

$$\sum_{j=-\infty}^{+\infty} |h_j| = c < +\infty,$$

则线性滤波器是稳定的。我们验证 $\{Y_t\}$ 也是平稳序列:

(1)

$$E[Y_t] = E\left[\sum_{j=-\infty}^{+\infty} h_j X_{t-j}\right] = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} h_j E[X_{t-j}] = 0.$$

(2)

$$E[Y_t^2] = E\left[\left(\sum_{j=-\infty}^{+\infty} h_j X_{t-j}\right)^2\right] = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} h_i h_j E[X_{t-i} X_{t-j}].$$

又 $E[X_n] = 0$ 对 $\forall n \in \mathbb{Z}$ 成立, 故

$$E[Y_t^2] = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} h_i h_j \gamma_X(i-j) \leq \left|\sum_{i=-\infty}^{+\infty} |h_i|\right|^2 c < +\infty.$$

(3) 对 $\forall t_1, t_2$, 有 $E[Y_{t_1}] = E[Y_{t_2}] = 0$, 且

$$\begin{aligned} E[(Y_{t_1} - E[Y_{t_1}])(Y_{t_2} - E[Y_{t_2}])] &= E[Y_{t_1} Y_{t_2}] \\ &= \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} h_i h_j E[X_{t_1-i} X_{t_2-j}] \\ &= \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} h_i h_j \gamma_X((t_1 - i) - (t_2 - j)), \end{aligned}$$

只依赖于 $t_1 - t_2$ ，对 t_1, t_2 平移性质不变。故 $\{Y_t\}$ 平稳，且显然仍为线性序列。证毕。□

习题3.2 设 $\{X_t\}$ 是由(3.1)定义的有限滑动和。若多项式

$$a(z) = \sum_{j=0}^q a_j z^j \neq 0 \quad \text{对一切 } |z| = 1 \text{ 成立,}$$

则存在实数 b_0, b_1, \dots, b_q 和零均值白噪声 $\{\eta_t\}$ 使得

$$X_t = b_0 \eta_t + b_1 \eta_{t-1} + \dots + b_q \eta_{t-q}, \quad t \in \mathbb{Z},$$

并且当 $|z| \leq 1$ 时，多项式

$$b(z) = \sum_{j=0}^q b_j z^j \neq 0.$$

「定义3.1」设 $\{\varepsilon_t\} = \{\varepsilon_t : t \in \mathbb{Z}\}$ 是 $WN(0, \sigma^2)$ ，对于非负整数 q 和常数 a_0, a_1, \dots, a_q ，我们称

$$X_t = a_0 \varepsilon_t + a_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + a_q \varepsilon_{t-q}, \quad t \in \mathbb{Z} \quad (3.1)$$

是白噪声 $\{\varepsilon_t\}$ 的(有限)运动平均，简称为MA (Moving Average)。

解答：设 $\{\varepsilon_t\} \sim WN(0, \sigma^2)$ 且

$$X_t = a(B)\varepsilon_t = \sum_{j=0}^q a_j \varepsilon_{t-j}, \quad a(z) = \sum_{j=0}^q a_j z^j.$$

由条件 $a(z) \neq 0$ 对 $|z| = 1$ 成立，故 $a(z)$ 在单位圆上无零点。将 $a(z)$ 因式分解为

$$a(z) = a_0 \prod_{k=1}^q (1 - \alpha_k z), \quad |\alpha_k| \neq 1.$$

对所有满足 $|\alpha_k| > 1$ 的零点，作“反演” $\beta_k = \overline{\alpha_k}^{-1}$ ；对 $|\alpha_k| < 1$ 则取 $\beta_k = \alpha_k$ 。定义

$$b(z) := a_0 \prod_{k=1}^q (1 - \beta_k z).$$

则对任意 $|z| \leq 1$ ，有 $|\beta_k z| < 1$ ，从而 $1 - \beta_k z \neq 0$ ，故

$$b(z) \neq 0, \quad (|z| \leq 1).$$

再定义

$$c(z) := \frac{a(z)}{b(z)} = \prod_{|\alpha_k| > 1} \frac{1 - \alpha_k z}{1 - \overline{\alpha_k}^{-1} z}, \quad \eta_t := c(B)\varepsilon_t.$$

于是

$$X_t = a(B)\varepsilon_t = b(B)c(B)\varepsilon_t = b(B)\eta_t = \sum_{j=0}^q b_j \eta_{t-j}.$$

并且对 $|z| = 1$ 可验证 $|c(z)| = 1$ （全通滤波器），故 η_t 的谱密度仍为常数，从而 $\{\eta_t\}$ 仍为零均值白噪声。证毕。□

习题3.3 设 $\{X_t\}$ 和 $\{Y_t\}$ 是相互独立的平稳序列，并且有相同的均值和自协方差函数 γ_X 。定义加密序列

$$Z_t = \begin{cases} X_n, & t = 2n + 1, \\ Y_n, & t = 2n, \end{cases}$$

问 $\{Z_t\}$ 是否平稳序列？证明你的结果。

解答： $\{Z_t\}$ 是平稳序列。分别验证其三性质即可：

(1)

$$E[Z_t] = E[X] = E[Y].$$

(2)

$$E[Z_t^2] = E[X_t^2] \text{ 或 } E[Y_t^2],$$

此二者（由于 X_t, Y_t 均平稳）均有限。

(3) 记 $\gamma_Z(t)$ 为 $\{Z_t\}$ 的自协方差函数。由 X 与 Y 相互独立得交叉项协方差为0，从而

$$\gamma_Z(t) = \begin{cases} E[X_i Y_j] - E[X_i]E[Y_j] = 0, & t \text{ 为奇数,} \\ E[X_i X_j] - E[X_i]E[X_j] = \gamma_X(\frac{t}{2}), \text{ 或 } E[Y_i Y_j] - E[Y_i]E[Y_j] = \gamma_X(\frac{t}{2}), & t \text{ 为偶数.} \end{cases}$$

故 $\gamma_Z(t)$ 仅与滞后 t 有关，从而 $\{Z_t\}$ 平稳。□

习题3.4 设 $\{\varepsilon_t\}$ 是 $WN(0, \sigma^2)$ ， $X_0 = 0$ 。对 $X_t = X_{t-1} + \varepsilon_t$ ， $t \in \mathbb{N}_+$ ，计算 X_t, X_s 的相关系数 $\rho(t, s)$ 。

解答：

$$\rho(t, s) = \frac{\text{Cov}(X_t, X_s)}{\sqrt{\text{Var}(X_t)\text{Var}(X_s)}}.$$

而

$$\text{Cov}(X_t, X_s) = \text{Cov}\left(\sum_{i=1}^t \varepsilon_i, \sum_{j=1}^s \varepsilon_j\right) = \sum_{i=1}^t \sum_{j=1}^s \text{Cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = \min(t, s)\sigma^2,$$

并且

$$\text{Var}(X_t) = \sum_{i=1}^t \text{Var}(\varepsilon_i) = t\sigma^2, \quad \text{Var}(X_s) = s\sigma^2.$$

因此

$$\rho(t, s) = \frac{\min(t, s)\sigma^2}{\sqrt{t\sigma^2 \cdot s\sigma^2}} = \frac{\min(t, s)}{\sqrt{ts}} = \sqrt{\frac{\min(t, s)}{\max(t, s)}}. \quad \square$$