史济怀《数学分析教程》下册习题整理

OrangeCat

Jan.27th 2026 - ???

1 多重积分

1.1 矩形区域上的积分

习题1 若f和g都在$[0,1]$上可积，证明$f(x)g(y)$在$[0,1]^2$上可积，并且

$$\iint_{[0,1]^2} f(x)g(y)\,dx\,dy = \left(\int_0^1 f(x)\,dx\right)\left(\int_0^1 g(y)\,dy\right).$$

解答：从基本定义出发，$f(x)g(y)$在$[0,1]^2$上可积$\Leftrightarrow \exists a \in \mathbb{R}$，

$$\lim_{\|\pi\|\to 0}\left|\sum_{i=1}^{k} f(x_i)g(y_i)\,\sigma_i - a\right| = 0.$$

σ_i为小块面积。我们将$[0,1]^2$切成n^2块，每块是

$$\left[\frac{i-1}{n},\frac{i}{n}\right]\times\left[\frac{j-1}{n},\frac{j}{n}\right] \qquad (1 \le i,j \le n,\ \text{边界不计}).$$

在第(i,j)块取点(x_i,y_j)，则有

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{n^2}f(x_i)g(y_j) = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f(x_i)\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}g(y_j)\right).$$

而由一元可积性，

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f(x_i) \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_0^1 f(x)\,dx, \qquad \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}g(y_j) \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_0^1 g(y)\,dy.$$

故

$$\iint_{[0,1]^2} f(x)g(y)\,dx\,dy = \left(\int_0^1 f(x)\,dx\right)\left(\int_0^1 g(y)\,dy\right).\ \square$$

习题2 计算积分

$$\iint_{[0,1]\times[0,1]} e^{x+y}\,dx\,dy.$$

解答：直接运用上一题结论，

$$\iint_{[0,1]^2} e^{x+y}\,dx\,dy = \left(\int_0^1 e^x\,dx\right)\left(\int_0^1 e^y\,dy\right) = (e-1)^2.\ \square$$

习题3 设$a>0$，$I=[-a,a]\times[-a,a]$，求证：

$$\iint_I \sin(x+y)\,dx\,dy = 0,$$

并试从几何上说明这一结果。

解答：

$$\iint_I \sin(x+y)\,dx\,dy = \iint_I (\sin x\cos y + \sin y\cos x)\,dx\,dy$$
$$= \left(\int_{-a}^{a}\sin x\,dx\right)\left(\int_{-a}^{a}\cos y\,dy\right) + \left(\int_{-a}^{a}\sin y\,dy\right)\left(\int_{-a}^{a}\cos x\,dx\right).$$

而$\sin t$是奇函数，故

$$\int_{-a}^{a}\sin x\,dx = \int_{-a}^{a}\sin y\,dy = 0.$$

因此积分值为0。 □

几何上：(x_0,y_0)处与$(-x_0,-y_0)$处函数值相反，区域关于原点中心对称且有界，故积分值为0。

习题4　证明定理10.1.8。

「定理10.1.8」设f在$I=[a,b]\times[c,d]$上有界，那么以下四个条件等价：

(1) f在I上可积；

(2) $\lim\limits_{\|\pi\|\to 0}\sum\limits_{i=1}^{k}\omega_i\,\sigma_i = 0$，其中$\omega_i = M_i - m_i\ (i=1,2,\dots,k)$，$M_i$和$m_i$分别为$f$在$\sigma_i$上的上、下确界；

(3) 对任意的$\varepsilon>0$，存在I的一个分割π，使得$\overline{S}(f,\pi)-\underline{S}(f,\pi)<\varepsilon$；

(4) $\underline{\int_I} f\,d\sigma = \overline{\int_I} f\,d\sigma.$

解答：由基本定义有$(2)\Leftrightarrow(3)\Leftrightarrow(4)$.

$$(1)\Leftrightarrow \exists a\in\mathbb{R},\ \lim_{\|\pi\|\to 0}\left|\left(\sum_{i=1}^{k} f(x_i,y_i)\cdot\sigma_i\right)-a\right| = 0.\qquad x_i,y_i\text{ 为 }\sigma_i\text{ 对应面积内任一点.}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{\|\pi\|\to 0}\sum_{i=1}^{k} f(x_i,y_i)\cdot\sigma_i = a.\qquad \text{我们证明这与(4)等价.}$$

$$(1')\Rightarrow(4):\ \underline{\int_I} f\,d\sigma = \min\lim_{\|\pi\|\to 0}\sum_{i=1}^{k} f(x_i,y_i)\cdot\sigma_i = a = \max\lim_{\|\pi\|\to 0}\sum_{i=1}^{k} f(x_i,y_i)\cdot\sigma_i = \overline{\int_I} f\,d\sigma.$$

$$(4)\Rightarrow(1'):\ \text{取}a:=\underline{\int_I} f\,d\sigma = \overline{\int_I} f\,d\sigma.\Rightarrow \underline{\int_I} f\,d\sigma \le \lim_{\|\pi\|\to 0}\sum_{i=1}^{k} f(x_i,y_i)\cdot\sigma_i = \overline{\int_I} f\,d\sigma.\Rightarrow \text{积分值为}a$$

故$(1)\Leftrightarrow(1')\Leftrightarrow(4)$. □

习题5　证明：闭矩形上的连续函数可积。

解答：由连续性，对任意给定$\varepsilon\in\mathbb{R}^+$，存在$\delta>0$使得当$x_1,x_2\in I$且$\|x_1-x_2\|<\delta$时，$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$.

将I切成若干小矩形$R_1,R_2,\dots,R_t$，使每个R_i的直径$<\delta$，则对任意$x_1,x_2\in R_i$有$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$，即每块的振幅$\omega_i<\varepsilon$。于是

$$\overline{S}(f,\pi)-\underline{S}(f,\pi) = \sum_{i=1}^{t}\omega_i\,\sigma_i < \varepsilon\sum_{i=1}^{t}\sigma_i = \varepsilon\,\mathrm{Area}(I).$$

故可令上、下和之差任意小，由定理10.1.8知f在I上可积。 □

1.2 Lebesgue定理

习题1 设点列$\{p_n\}$在$\mathbb{R}^2$中有极限，求证：点集$B=\{p_n\}$是零面积集。

解答：设点列$\{p_n\}$极限是p。对$\forall\varepsilon>0$，$\exists n\in\mathbb{Z}^+$，$\forall N>n$有

$$d(p_N,p)<\varepsilon$$

而$\{p_1,p_2,\dots,p_n\}$是有限点集，面积为0。

$$\Rightarrow\ B\subset\{p_1,p_2,\dots,p_n\}\cup B(p,\varepsilon),$$

其中$B(p,\varepsilon)$为以p为中心、半径ε的圆盘，于是

$$\mathrm{Area}(B)\le\pi\varepsilon^2.$$

而ε可任取，故B是零面积集。 □

习题2 设有界集$B\subset\mathbb{R}^2$且B'是零面积集，求证：$\overline{B}$也是零面积集。

解答：我们只用考察并证明$\overline{B}\setminus B'$也是零面积集即可。我们证明一个加强结论：这个集合只有有限个点。

若非如此，设$\overline{B}\setminus B'$是无限点集。由于B有界，$\overline{B}\setminus B'$也有界，设为$[-N,N]\times[-N,N]$。

将$[-N,N]\times[-N,N]$划分成4份：

$$[-N,0]\times[-N,0],\quad[-N,0]\times[0,N],\quad[0,N]\times[-N,0],\quad[0,N]\times[0,N].$$

由抽屉原理，$\overline{B}\setminus B'$在其中一个小区域里面积有无穷个点；再细分四份，仍有无穷个点。

$$\Rightarrow\ \forall\varepsilon>0,\ \exists(x_0,y_0)\in(-N,N)\times(-N,N)\text{ 使得 }[x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon]\times[y_0-\varepsilon,y_0+\varepsilon]\cap(\overline{B}\setminus B')\text{ 是无穷}.$$

$$\Rightarrow\ \text{由闭区间套定理，存在极限点在}\overline{B}\setminus B'\text{ 内，但这与}B'\text{ 的定义矛盾！}\ \square$$

习题3 证明：$[0,1]^2$中的全体有理点所成的集不是零面积集，但是零测集。

解答：先证它不是零面积集：若是，则我们取$\varepsilon=\frac{1}{2}$，存在有限个长方形$P_1,P_2,\dots,P_m$使得有理点集被$\bigcup_{i=1}^m P_i$包含。且

$$\mathrm{Area}\left(\bigcup_{i=1}^m P_i\right)\le\frac{1}{2}\ \Rightarrow\ \mathrm{Area}\left([0,1]^2\setminus\bigcup_{i=1}^m P_i\right)\ge\frac{1}{2}.$$

而

$$\left([0,1]^2\setminus\bigcup_{i=1}^m P_i\right)^\circ$$

是面积为正的开集。

任取$\left([0,1]^2\setminus\bigcup_{i=1}^m P_i\right)^\circ$，$\exists\varepsilon_0>0$，使得

$$B(p_0,\varepsilon_0)\subset[0,1]^2\setminus\bigcup_{i=1}^m P_i.$$

由有理点稠密性矛盾，故证毕。零测性由可数性显然。 □

习题4 设闭矩形$J\subset I$，且f在I上可积，求证：f在J上也可积。

解答：若f在I上可积，由定理10.1.8，我们将条件转写成叙述为(2)：

$$\lim_{\|\pi\|\to 0}\sum_{i=1}^{k}\omega_i\,\sigma_i=0,$$

其中$\omega_i=M_i-m_i$为第i块区域的上、下确界之差，σ_i是I的一个划分。

我们只需要在划分的时候“稍加留意”，把J的边界也作为划分痕迹：

$$\Rightarrow\quad\lim_{\|\pi\|\to 0}\sum_{i=1}^{k}\omega_i\,\sigma_i\geq\lim_{\|\pi\|\to 0}\sum_{j=1}^{t}\omega_{J(j)}\,\sigma_{J(j)},$$

$J(1),J(2),\ldots,J(t)$是J在划分中的对应块。故有

$$\lim_{\|\pi\|\to 0}\sum_{j=1}^{t}\omega_{J(j)}\,\sigma_{J(j)}=0.$$

由定理10.1.8，(2)⇒(1)有f在J上可积。 □

习题5　设在I上可积函数$f>0$，求证：$\displaystyle\int_I f\,d\sigma>0$。

解答：堪忧，这还要证？Trivial. □

习题6　研究定义在区域$[0,1]^2$上的函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\sin\dfrac{1}{xy}, & x\neq 0\text{ 且 }y\neq 0,\\[2ex] 0, & x=0\text{ 或 }y=0,\end{cases}$$

的可积性。

解答：原函数在定义域$[0,1]\times[0,1]$的不连续点集为

$$\{0\}\times[0,1]\ \cup\ [0,1]\times\{0\}.$$

这明显是零测集（甚至是零面积集），从而由Lebesgue定理，f在$[0,1]^2$上可积。 □

习题7　设I是一个有界的矩形，$B=\{p_1,p_2,\ldots,p_n,\ldots\}\subset I$，定义函数

$$f(p)=\begin{cases}0, & p\notin B,\\[1ex] \dfrac{1}{n}, & p=p_n\ (n\in\mathbb{N}^*).\end{cases}$$

研究函数f在I上的可积性。

解答：B至多可数从而零测。间断点是零测集，由Lebesgue定理知可积。 □

习题8　设函数f和g在I上可积，求证：fg在I上也可积；当g在I上不取零值且f/g在I上有界时，f/g在I上也可积。

解答：fg和f/g的间断点为f的间断点和g的间断点的并集的子集。

（f/g在g不取0时可以这样论证）仍然是零测集，由Lebesgue定理知可积。 □

习题9　设f在I上可积，证明：$|f|$在I上也可积，并且

$$\left|\int_I f\,d\sigma\right|\leq\int_I|f|\,d\sigma.$$

解答：$|f|$的间断点是f的间断点的子集，而其是零测，由Lebesgue定理知$|f|$也可积。而

$$\left|\int_I f\,d\sigma\right|=\left|\lim_{\|\pi\|\to 0}\sum_{i=1}^{k}f(x_i)\sigma_i\right|\leq\lim_{\|\pi\|\to 0}\sum_{i=1}^{k}|f(x_i)|\,\sigma_i=\int_I|f|\,d\sigma.\ \square$$

问题1　设$\int_I f\,d\sigma > 0$，求证：存在闭矩形$J \subset I$，使得$f > 0$在J上成立。

解答：我们采取反证法。若不存在这样的小矩形J：对$\forall x \in I$满足$f(x) > 0$，我们可知f在x处必不连续。

从而$\{x \mid f(x) > 0\}$是不连续点集的子集。取$P = \{x \mid f(x) > 0\}$.

由Lebesgue定理知P 是零测集.从而$\int_I f\,d\sigma = \int_{I/P} f\,d\sigma < 0$,矛盾。 □

问题2　对$(x, y) \in [0, 1]^2$，定义

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{m} + \dfrac{1}{q}, & x = \dfrac{n}{m},\ y = \dfrac{p}{q}, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

证明：f在$[0, 1]^2$上可积，这里$m, n, q, p \in \mathbb{N}^*$。

解答：我们考虑间断点集，发现它是$(\mathbb{Q} \cap [0, 1])^2$.

因为但凡函数值为0的点集都不是间断点：取ε足够小，以ε为半径的圆内的有理数分母会任意大。

而$(\mathbb{Q} \cap [0, 1])^2$可数，从而零测。由Lebesgue定理，原函数可积。 □

1.3　矩形区域上二重积分的计算

习题1　计算下列积分：

(1) $\displaystyle\iint_I \frac{x^2}{1+y^2}\,dx\,dy,\ I = [0, 1]^2;$

(2) $\displaystyle\iint_I x\cos(xy)\,dx\,dy,\ I = [0, \pi/2] \times [0, 1];$

(3) $\displaystyle\iint_I \sin(x+y)\,dx\,dy,\ I = [0, \pi]^2.$

解答：

(1) $\displaystyle\iint_I \frac{x^2}{1+y^2}\,dx\,dy = \left(\int_0^1 x^2\,dx\right)\left(\int_0^1 \frac{1}{1+y^2}\,dy\right) = \left(\frac{1}{3}x^3\Big|_0^1\right)\left(\arctan y\Big|_0^1\right) = \frac{1}{3}\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}.$ □

(2) $\displaystyle\iint_I x\cos(xy)\,dx\,dy = \int_0^1 x\cdot\left(\int_0^{\pi/2}\cos(xy)\,dy\right)dx.$

而$\displaystyle\int_0^{\pi/2}\cos(xy)\,dy = \frac{1}{x}\sin(xy)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{1}{x}\sin\frac{\pi x}{2} \Rightarrow \int_0^1 x\left(\int_0^{\pi/2}\cos(xy)\,dy\right)dx = \int_0^1 \sin\frac{\pi x}{2}\,dx =$ 1. □

(3) $\displaystyle\iint_I \sin(x+y)\,dx\,dy = \iint_I \sin x\cos y\,dx\,dy + \iint_I \sin y\cos x\,dx\,dy$

$= \left(\int_0^\pi \sin x\,dx\right)\left(\int_0^\pi \cos y\,dy\right) + \left(\int_0^\pi \cos x\,dx\right)\left(\int_0^\pi \sin y\,dy\right) = 0.$ □

习题2　设函数f在矩形$I = [a, b] \times [c, d]$上有连续的二阶偏导数，计算积分$\displaystyle\iint_I \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x,y)\,dx\,dy$。

解答：

$$\iint_I \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_c^d \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x,y)\,dy\right)dx$$

$$= \int_a^b \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\Big|_{y=c}^{y=d}\right)dx = \int_a^b \left(\frac{\partial f(x,d)}{\partial x} - \frac{\partial f(x,c)}{\partial x}\right)dx = f(b,d) + f(a,c) - f(a,d) - f(b,c).$$ □

习题3　计算积分$\displaystyle\int_I f\,d\sigma\ (I = [0, 1]^2)$：

(1) $f(x,y) = \begin{cases} 1, & y \le x^2, \\ 0, & y > x^2; \end{cases}$

(2) $f(x,y)=\begin{cases}x+y, & x^2\le y\le 2x^2,\\ 0, & y<x^2 \text{ 或 } y>2x^2.\end{cases}$

解答:

(1)

$$\int_I f\,d\sigma=\int_0^1\left(\int_0^{x^2}1\,dy\right)dx=\int_0^1 x^2\,dx=\frac{1}{3}x^3\Big|_0^1=\frac{1}{3}.\ \square$$

(2)

$$\int_I f\,d\sigma=\int_0^{\sqrt{2}/2}\left(\int_{x^2}^{2x^2}(x+y)\,dy\right)dx+\int_{\sqrt{2}/2}^1\left(\int_{x^2}^1(x+y)\,dy\right)dx$$

$$=\int_0^{\sqrt{2}/2}\left(x^3+\frac{3}{2}x^4\right)dx+\int_{\sqrt{2}/2}^1\left(\frac{1}{2}+x-x^3-\frac{1}{2}x^4\right)dx$$

$$=\left(\frac{1}{4}x^4+\frac{3}{10}x^5\right)\Big|_0^{\sqrt{2}/2}+\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{10}x^5\right)\Big|_{\sqrt{2}/2}^1=\left(\frac{1}{16}+\frac{3\sqrt{2}}{80}\right)+\left(\frac{37}{80}-\frac{19\sqrt{2}}{80}\right)=\frac{21}{40}-\frac{\sqrt{2}}{5}.\ \square$$

习题4　利用定理10.3.4中的Minkowski不等式，证明：对$a_k\ge 0$，$b_k\ge 0$ $(k=1,2,\cdots,n)$，$p\ge 1$，有不等式

$$\left(\sum_{k=1}^n(a_k+b_k)^p\right)^{1/p}\le\left(\sum_{k=1}^n a_k^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{k=1}^n b_k^p\right)^{1/p}.$$

「定理10.3.4」(Minkowski不等式)　设f在$[a,b]\times[c,d]$上非负、连续，$p\ge 1$，那么

$$\left(\int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right)^p dx\right)^{1/p}\le\int_c^d\left(\int_a^b f^p(x,y)\,dx\right)^{1/p}dy.$$

当$p>1$时，等式成立的充分必要条件是

$$f(x,y)=u(x)v(y).$$

解答：我们取

$$f_\varepsilon(x,y)\le\begin{cases}h(x), & 0\le y\le 1-\varepsilon,\\ g(x), & 1+\varepsilon\le y\le 2,\\ \dfrac{1}{2\varepsilon}(1+\varepsilon-y)h(x)+\dfrac{1}{2\varepsilon}(y-1+\varepsilon)g(x), & 1-\varepsilon\le y\le 1+\varepsilon.\end{cases}$$

则f_ε在$[a,b]\times[c,d]$上非负连续，$p>1$。由Minkowsky不等式有：

$$(\varepsilon\to 0)\qquad\left(\int_a^b(h(x)+g(x))^p\,dx\right)^{1/p}\le\left(\int_a^b h^p(x)\,dx\right)^{1/p}+\left(\int_a^b g^p(x)\,dx\right)^{1/p}.$$

我们再取$g(x)=a_i$ $(i-1\le x<i)$ $(1\le i\le k)$，$h(x)=b_i$。取积分上下限$a=0$，$b=k$，即有：

$$\left(\sum_{k=1}^n(a_k+b_k)^p\right)^{1/p}\le\left(\sum_{k=1}^n a_k^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{k=1}^n b_k^p\right)^{1/p}.\qquad\square$$

习题5　设f,g都在$[a,b]$上可积，利用二重积分不等式

$$\iint_{[a,b]^2}(f(x)g(y)-f(y)g(x))^2\,dx\,dy\ge 0,$$

证明Cauchy-Schwarz不等式:

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right)^2 \le \int_a^b f^2(x)\,dx \int_a^b g^2(x)\,dx.$$

解答: $\iint_{[a,b]^2} (f(x)g(y)-f(y)g(x))^2\,dx\,dy = \iint_{[a,b]^2} \left(f^2(x)g^2(y)+f^2(y)g^2(x)-2f(x)f(y)g(x)g(y)\right)dx\,dy$

$= 2\iint_{[a,b]^2} \left(f^2(x)g^2(y) - f(x)g(x)f(y)g(y)\right)dx\,dy \ge 0.$

$\Rightarrow \iint_{[a,b]^2} f^2(x)g^2(y)\,dx\,dy \ge \iint_{[a,b]^2} f(x)g(x)f(y)g(y)\,dx\,dy.$

$\Rightarrow \left(\int_a^b f^2(x)\,dx\right)\left(\int_a^b g^2(y)\,dy\right) \ge \left(\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right)^2.$ $\square$

问题1　设f是问题10.2的第2题中定义的函数。证明:

(1) $f(x,p/q)$对$x\in[0,1]$上不可积;

(2) $f(n/m,y)$对$y\in[0,1]$上不可积。

解答: (1) 我们证明$f(x,p/q)$在$x\in[0,1]$上处处不连续:

其实由于有理数集和无理数集都是稠密的，故而在任何一个极小的区间内，都存在有理点和无理点。

f值也在0和$>1/q$之间变动。故f在$[0,1]$上处处不连续，从而不可积(两问思路完全一致)。 $\square$

问题2　对$(x,y)\in[0,1]^2$，定义

$$g(x,y)=\begin{cases}1, & x=\dfrac{n}{m},\ y=\dfrac{p}{m},\\[2ex] 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

证明: $\int_0^1 dx\int_0^1 g(x,y)\,dy$和$\int_0^1 dy\int_0^1 g(x,y)\,dx$都存在，但$g$在$[0,1]^2$上不可积。

解答:

(1) 先证两种迭代积分都存在且都等于0。

固定$x\in[0,1]$，考察$y\mapsto g(x,y)$。

若x为无理数，则对任意y都有$g(x,y)=0$，故

$$\int_0^1 g(x,y)\,dy=0.$$

若x为有理数。将x写成既约分数$x=\dfrac{n}{m}$（$(n,m)=1$），则由定义，

$$g(x,y)=1 \iff y=\frac{p}{m}\ (p=0,1,\dots,m),$$

因此$g(x,y)=1$只发生在有限多个点上，其余处为0。于是$y\mapsto g(x,y)$只有有限多个不连续点，从而在$[0,1]$上Riemann可积，并且

$$\int_0^1 g(x,y)\,dy=0.$$

综上，对所有$x\in[0,1]$都有$\int_0^1 g(x,y)\,dy=0$，因此

$$\int_0^1\left(\int_0^1 g(x,y)\,dy\right)dx=0.$$

同理，交换x,y角色可得对所有y都有$\int_0^1 g(x,y)\,dx=0$，从而

$$\int_0^1\left(\int_0^1 g(x,y)\,dx\right)dy=0.$$

故两种迭代积分都存在且都等于0。

(2) 再证g在$[0,1]^2$上（Riemann意义）不可积。

任取$(x_0,y_0)\in[0,1]^2$。取任意$\varepsilon>0$，选取足够大的整数m使得$\frac{1}{m}<\varepsilon$。令$n=\lfloor mx_0\rfloor$，$p=\lfloor my_0\rfloor$，则点

$$\left(\frac{n}{m},\frac{p}{m}\right)\in[0,1]^2,\qquad \left|\frac{n}{m}-x_0\right|\le\frac{1}{m}<\varepsilon,\quad \left|\frac{p}{m}-y_0\right|\le\frac{1}{m}<\varepsilon,$$

且按定义有$g\left(\frac{n}{m},\frac{p}{m}\right)=1$。另一方面，在$(x_0,y_0)$的任意邻域内也显然存在$g=0$的点（例如取任意一个不是上述形式的点）。因此在$(x_0,y_0)$任意邻域内，$g$同时取到1与0，故$g$在$(x_0,y_0)$不连续。

由(x_0,y_0)任意性知，g在$[0,1]^2$上处处不连续，故其不连续点集为整个$[0,1]^2$（测度不为0），从而g在$[0,1]^2$上Riemann不可积。 □

1.4 有界函数上的二重积分

习题1 证明定理10.4.5。

「定理10.4.5」 设有界集$B\subset\mathbb{R}^2$，则B有面积当且仅当B的边界∂B是一零面积集。

解答：首先先证明一个引理:

[lemma] ∂B是闭集。

[prove] 我们反过来证明$\mathbb{R}^2/\partial B$是开集：任取$x_0\in\mathbb{R}^2/\partial B$。

若对$\forall\,\varepsilon>0$均存在$x_\varepsilon\in\partial B$使$d(x_0,x_\varepsilon)<\varepsilon$，则$x_0\in\overline{\partial B}=\partial B\Rightarrow$矛盾！

回到原题：∂B零面积$\Leftrightarrow\partial B$零测

$\Leftrightarrow$ 取

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\notin B,\\ 1, & x\in B.\end{cases}$$

间断点零测$\Leftrightarrow\int_B 1\,d\sigma$可积$\Leftrightarrow B$有面积。 □

习题2 证明:

$$1.96<\iint_{|x|+|y|\le 10}\frac{dx\,dy}{100+\cos^2 x+\cos^2 y}<2.$$

解答：在整个区域上，$\dfrac{1}{100+\cos^2 x+\cos^2 y}$的取值在$\left[\dfrac{1}{102},\dfrac{1}{100}\right]$内，且无法一直取到上极限。

而其面积为$\dfrac{1}{2}\times 20\times 20=200\Rightarrow$

$$\iint_{|x|+|y|\le 10}\frac{dx\,dy}{100+\cos^2 x+\cos^2 y}\in\left[\frac{200}{102},\frac{200}{100}\right)\subset(1.96,2).\qquad\square$$

习题3 证明：设$B\subset\mathbb{R}^2$是一有界集，那么B有面积的充要条件是：对$I\supset B$的矩形I的任何矩形网分割π，均有

$$\lim_{\|\pi\|\to 0}\sum_{I_i\cap B\ne\varnothing}\sigma(I_i)=\lim_{\|\pi\|\to 0}\sum_{I_i\subset B}\sigma(I_i).$$

解答：B有面积等价于$\int_B 1\,d\sigma$存在。我们取

$$f_B(x)=\begin{cases}1, & x\in B,\\ 0, & x\notin B.\end{cases}$$

则 $\lim\limits_{\|\pi\|\to 0}\sum\limits_{I_i\cap B\neq\varnothing}\sigma(I_i)$是$\int_I f_B\,d\sigma$的上和，$\lim\limits_{\|\pi\|\to 0}\sum\limits_{I_i\subset B}\sigma(I_i)$是$\int_I f_B\,d\sigma$下和。上下和相等$\Leftrightarrow$可积。 $\square$

1.5 有界集合上积分的计算

习题1 计算下列积分：

(1) $\displaystyle\iint_D \cos(x+y)\,dx\,dy$, D 由$x=0$, $y=x$, $y=\pi$ 围成;

(2) $\displaystyle\iint_D xy^2\,dx\,dy$, D 由$y^2=4x$ 和$x=1$ 围成;

(3) $\displaystyle\iint_D e^{x+y}\,dx\,dy$, $D=\{(x,y):|x|+|y|\le 1\}$;

(4) $\displaystyle\iint_D |xy|\,dx\,dy$, $D=\{(x,y):x^2+y^2\le a^2\}$;

(5) $\displaystyle\iint_D x\cos(xy)\,dx\,dy$, $D=\{(x,y):x^2+y^2\le a^2\}$;

(6) $\displaystyle\iint_D |\cos(x+y)|\,dx\,dy$, $D=[0,1]^2$;

(7) $\displaystyle\iint_D y^2\,dx\,dy$, D 由旋轮线$\begin{cases}x=a(t-\sin t),\\ y=a(1-\cos t),\end{cases}$ $(0\le t\le 2\pi)$ 与$y=0$ 围成;

(8) $\displaystyle\iint_D [x+y]\,dx\,dy$, $D=[0,2]^2$.

解答：

(1) $\displaystyle\iint_D \cos(x+y)\,dx\,dy=\int_0^\pi\Big(\int_0^y\cos(x+y)\,dx\Big)dy=\int_0^\pi \sin(x+y)\Big|_0^y\,dy=\int_0^\pi(\sin 2y-\sin y)\,dy=\int_0^\pi \sin 2y\,dy-\int_0^\pi \sin y\,dy=-2.$ $\square$

(2) $\displaystyle\iint_D xy^2\,dx\,dy=\int_0^1\Big(\int_{-2\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}}xy^2\,dy\Big)dx=\int_0^1\frac{16}{3}x^{5/2}\,dx=\frac{32}{21}.$ $\square$

(3) D可分为两部分：当$y\in[-1,0]$时，$x\in[-(1+y),1+y]$；当$y\in[0,1]$时，$x\in[y-1,1-y]$。

$$\iint_D e^{x+y}\,dx\,dy=\int_{-1}^0\Big(\int_{-(1+y)}^{1+y}e^{x+y}\,dx\Big)dy+\int_0^1\Big(\int_{y-1}^{1-y}e^{x+y}\,dx\Big)dy$$

$$=\int_{-1}^0\Big(e^{x+y}\Big|_{x=-(1+y)}^{x=1+y}\Big)dy+\int_0^1\Big(e^{x+y}\Big|_{x=y-1}^{x=1-y}\Big)dy=\int_{-1}^0(e^{1+2y}-e^{-1})\,dy+\int_0^1(e-e^{2y-1})\,dy$$

$$=\Big(\frac12 e^{1+2y}\Big|_{-1}^0-e^{-1}\Big)+\Big(e-\frac12 e^{2y-1}\Big|_0^1\Big)=\frac12 e-\frac12 e^{-1}-e^{-1}+\Big(e-\frac12 e+\frac12 e^{-1}\Big)=e-\frac1e.\ \square$$

(4) $\displaystyle\iint_D |xy|\,dx\,dy=4\int_0^a\Big(\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}}xy\,dy\Big)dx=4\int_0^a\Big(\frac12 x\cdot y^2\Big|_{y=0}^{y=\sqrt{a^2-x^2}}\Big)dx=4\int_0^a\frac12 x(a^2-x^2)\,dx$

$$=2a^2\int_0^a x\,dx-2\int_0^a x^3\,dx=a^4-\frac12 a^4=\frac12 a^4.\ \square$$

(5) 因为$x\cos(xy)+(-x)\cos((-x)y)=0$，且该区域关于$y$轴对称且有界，故积分值为0。 $\square$

(6)

$$\iint_D|\cos(x+y)|\,dx\,dy=\int_0^{\frac{\pi}{2}-1}\Big(\int_0^1\cos(x+y)\,dy\Big)dx+\int_{\frac{\pi}{2}-1}^1\Big(\int_0^{\frac{\pi}{2}-x}\cos(x+y)\,dy\Big)dx$$

$$-\int_{\frac{\pi}{2}-1}^{1}\Big(\int_{\frac{\pi}{2}-x}^{1}\cos(x+y)\,dy\Big)dx=3-\pi+\cos 2+2\cos 1.\ \square$$

(7) 取$P(x,y)=-\frac{1}{3}y^3$，$Q(x,y)=0$，则$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=y^2$。由Green公式，

$$\iint_D y^2\,dx\,dy=\oint_{\partial D}P\,dx=-\frac{1}{3}\oint_{\partial D}y^3\,dx.$$

沿x轴段$y=0$贡献为0，只需算旋轮线一拱。取$0\le t\le 2\pi$，$y=a(1-\cos t)$，$\frac{dx}{dt}=a(1-\cos t)$，得

$$\iint_D y^2\,dx\,dy=\frac{1}{3}\int_0^{2\pi}y^3\frac{dx}{dt}\,dt=\frac{1}{3}\int_0^{2\pi}a^4(1-\cos t)^4\,dt=\frac{1}{3}\cdot a^4\cdot\frac{35\pi}{4}=\frac{35\pi}{12}a^4.\ \square$$

(8) $\displaystyle\iint_{[0,2]^2}[x+y]\,dx\,dy=\frac{1}{2}\times 3\times 2\times 2=6.\ \square$

2 曲线积分

2.1 第一型曲线积分

习题1 计算下列曲线积分:

(1) $\displaystyle\int_\Gamma(x^2+y^2)^n\,ds$，$\Gamma$： $x=a\cos t$, $y=a\sin t$ $(0\le t\le 2\pi)$，其中$n\in\mathbb{N}$;

(2) $\displaystyle\int_\Gamma(x+y)\,ds$，$\Gamma$: 顶点为$(0,0),(1,0),(0,1)$的三角形的边界;

(3) $\displaystyle\int_\Gamma z\,ds$，$\Gamma$: 圆锥螺线$x=t\cos t$, $y=t\sin t$, $z=t$ $(0\le t\le 2\pi)$;

(4) $\displaystyle\int_\Gamma x^2\,ds$，$\Gamma$: 圆周$x^2+y^2+z^2=a^2$, $x+y+z=0$;

(5) $\displaystyle\int_\Gamma y^2\,ds$，$\Gamma$: 旋轮线的一拱，$x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ $(0\le t\le 2\pi)$。

解答:

(1) $\displaystyle\frac{ds}{dt}=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}=\sqrt{(-a\sin t)^2+(a\cos t)^2}=a$。

因此$\displaystyle\int_\Gamma(x^2+y^2)^n\,ds=\int_0^{2\pi}(x^2+y^2)^n\,a\,dt=\int_0^{2\pi}a^{2n}\cdot a\,dt=2\pi a^{2n+1}$ $(a>0)$。 $\square$

(2) 取ℓ_1,ℓ_2,ℓ_3为$(0,0)$到$(1,0)$、$(0,0)$到$(0,1)$以及$(1,0)$到$(0,1)$的线段，则

$$\int_\Gamma(x+y)\,ds=\int_{\ell_1}(x+y)\,ds+\int_{\ell_2}(x+y)\,ds+\int_{\ell_3}(x+y)\,ds=2\cdot\frac{1}{2}x^2\Big|_{x=0}^{x=1}+1\cdot\sqrt{2}=\sqrt{2}+1.\ \square$$

(3) $\displaystyle\frac{ds}{dt}=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}=\sqrt{t^2+2}$，故

$$\int_\Gamma z\,ds=\int_0^{2\pi}t\sqrt{t^2+2}\,dt.$$

而

$$\int t\sqrt{t^2+2}\,dt=\int\sqrt{t^2+2}\,d\Big(\frac{1}{2}t^2\Big)=\frac{1}{2}\int\sqrt{t^2+2}\,d(t^2+2)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}(t^2+2)^{3/2}+C=\frac{1}{3}(t^2+2)^{3/2}+C.$$

因此

$$\int_\Gamma z\,ds=\frac{1}{3}(t^2+2)^{3/2}\Big|_{t=0}^{t=2\pi}=\frac{1}{3}(4\pi^2+2)^{3/2}-\frac{2}{3}\sqrt{2}.\square$$

(4) 取参数

$$(x, y, z) = \left(-\frac{\sqrt{6}}{3}a\sin\theta,\ a\left(\frac{\sqrt{6}}{6}\sin\theta + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta\right),\ a\left(\frac{\sqrt{6}}{6}\sin\theta - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta\right)\right).$$

则

$$\frac{ds}{d\theta} = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\theta}\right)^2} = a,$$

从而

$$\int_\Gamma x^2\,ds = \int_0^{2\pi} \frac{2}{3}a^2\sin^2\theta \cdot a\,d\theta = \frac{2}{3}a^3\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\,d\theta = \frac{2}{3}\pi a^3.\Box$$

(5) $\dfrac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2} = 2a\sin\dfrac{t}{2}$，故

$$\int_\Gamma y^2\,ds = \int_0^{2\pi} a^2(1-\cos t)^2\cdot 2a\sin\frac{t}{2}\,dt = 8a^3\int_0^{2\pi}\sin^5\frac{t}{2}\,dt = 16a^3\int_0^{\pi}\sin^5 p\,dp \qquad \left(\frac{t}{2} = p\right).$$

再令$-\cos p = \xi$，则$d\xi = \sin p\,dp$，并且$\sin^4 p = (1-\xi^2)^2$，因此

$$16a^3\int_0^{\pi}\sin^5 p\,dp = 16a^3\int_{-1}^{1}(1-\xi^2)^2\,d\xi = 16a^3\left(\frac{1}{5}\xi^5 - \frac{2}{3}\xi^3 + \xi\right)\Big|_{-1}^{1} = \frac{256}{15}a^3.\ \Box$$

2.2 第二型曲线积分

习题1 计算下列第二型曲线积分:

(1) $\displaystyle\int_\Gamma \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2}$, Γ 表示逆时针方向的圆周$x^2+y^2=a^2$;

(2) $\displaystyle\int_\Gamma (x+y)\,dx + (x-y)\,dy$, Γ 表示逆时针方向的椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$;

(3) $\displaystyle\int_\Gamma (x^2-2xy)\,dx + (y^2-2xy)\,dy$, $\Gamma: x = y^2\ (-1\le y\le 1)$，沿$y$ 增加的方向;

(4) $\displaystyle\int_\Gamma x\,dy$, Γ：直线$2x+y=1$ 与两坐标轴组成的三角形，沿逆时针方向;

(5) $\displaystyle\int_\Gamma (x^2+y^2)\,dy$, Γ：由$x=1$，$x=3$，$y=1$，$y=4$ 构成的矩形，沿逆时针方向.

解答:

(1) 取参数方程$(x,y) = (a\cos\theta, a\sin\theta)$，$0\le\theta\le 2\pi$，则

$$dx = -a\sin\theta\,d\theta, \qquad dy = a\cos\theta\,d\theta.$$

从而

$$\frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2} = \frac{a\cos\theta\cdot a\cos\theta\,d\theta - a\sin\theta\cdot(-a\sin\theta\,d\theta)}{a^2} = d\theta.$$

故

$$\int_\Gamma \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2} = \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi.\ \Box$$

(2) 取参数方程$(x,y) = (a\cos\theta, b\sin\theta)$，$0\le\theta\le 2\pi$，则

$$dx = -a\sin\theta\,d\theta, \qquad dy = b\cos\theta\,d\theta.$$

代入得

$$\int_\Gamma (x+y)\,dx+(x-y)\,dy=\int_0^{2\pi}(a\cos\theta+b\sin\theta)(-a\sin\theta)\,d\theta+\int_0^{2\pi}(a\cos\theta-b\sin\theta)(b\cos\theta)\,d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\Big(-a^2\sin\theta\cos\theta-ab\sin^2\theta+ab\cos^2\theta-b^2\sin\theta\cos\theta\Big)\,d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\Big(ab(\cos^2\theta-\sin^2\theta)-(a^2+b^2)\sin\theta\cos\theta\Big)\,d\theta.$$

由于

$$\int_0^{2\pi}\cos 2\theta\,d\theta=0,\qquad \int_0^{2\pi}\sin\theta\cos\theta\,d\theta=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\sin 2\theta\,d\theta=0,$$

故积分值为0。 □

(3) 由$\Gamma: x=y^2$ 且沿y 增加方向，取参数$y=t$，$x=t^2$ $(-1\le t\le 1)$，则$dx=2t\,dt$，$dy=dt$。代入得

$$\int_\Gamma (x^2-2xy)\,dx+(y^2-2xy)\,dy=\int_{-1}^{1}\Big((t^4-2t^3)\cdot 2t+(t^2-2t^3)\Big)\,dt$$

$$=\int_{-1}^{1}\left(2t^5-4t^4-2t^3+t^2\right)dt=\left[\frac{1}{3}t^6-\frac{4}{5}t^5-\frac{1}{2}t^4+\frac{1}{3}t^3\right]_{-1}^{1}=-\frac{14}{15}.\ \square$$

(4) Γ 为三角形边界（逆时针）。在x 轴上$dy=0$，在y 轴上$x=0$，两段积分均为0；只需计算直线段$2x+y=1$ 上的积分。该段可写为$x=\dfrac{1-y}{2}$，且$y:0\to 1$，故

$$\int_\Gamma x\,dy=\int_0^1\frac{1-y}{2}\,dy=\frac{1}{2}\left[y-\frac{1}{2}y^2\right]_0^1=\frac{1}{4}.\ \square$$

(5) 上下两条边为水平线，$dy=0$，贡献为0；只需算两条竖边。

$$\int_\Gamma (x^2+y^2)\,dy=\int_1^4(3^2+y^2)\,dy+\int_4^1(1^2+y^2)\,dy$$

$$=\int_1^4(9+y^2)\,dy-\int_1^4(1+y^2)\,dy=\int_1^4 8\,dy=24.\ \square$$

习题2　设常数a,b,c满足$ac-b^2>0$，计算积分$\displaystyle\int_\Gamma\frac{x\,dy-y\,dx}{ax^2+2bxy+cy^2}$，其中$\Gamma$为逆时针方向的单位圆周。

解答：已知

$$\Gamma:\ x=\cos t,\quad y=\sin t,\quad t\in[0,2\pi].$$

则

$$dx=-\sin t\,dt,\qquad dy=\cos t\,dt.$$

分子化简为

$$x\,dy-y\,dx=\cos t(\cos t\,dt)-\sin t(-\sin t\,dt)=(\cos^2 t+\sin^2 t)\,dt=dt.$$

故原积分化为

$$\int_\Gamma\frac{x\,dy-y\,dx}{ax^2+2bxy+cy^2}=\int_0^{2\pi}\frac{dt}{a\cos^2 t+2b\sin t\cos t+c\sin^2 t}.$$

利用二倍角公式

$$\cos^2 t=\frac{1+\cos 2t}{2},\qquad \sin^2 t=\frac{1-\cos 2t}{2},\qquad \sin t\cos t=\frac{\sin 2t}{2},$$

得到分母

$$a\cos^2 t+2b\sin t\cos t+c\sin^2 t=m+A\cos 2t+B\sin 2t,$$

其中

$$m=\frac{a+c}{2},\qquad A=\frac{a-c}{2},\qquad B=b.$$

令

$$R=\sqrt{A^2+B^2}=\sqrt{\left(\frac{a-c}{2}\right)^2+b^2},$$

则存在δ使得

$$A\cos 2t+B\sin 2t=R\cos(2t-\delta),$$

从而分母可写为

$$m+R\cos(2t-\delta).$$

令换元$u=2t-\delta$，则$dt=\frac{du}{2}$。利用周期性（区间平移不改变积分值）可化为标准形式

$$\int_0^{2\pi}\frac{dt}{m+R\cos(2t-\delta)}=\int_0^{2\pi}\frac{du}{m+R\cos u}.$$

当$m>|R|$ 时有熟知结论

$$\int_0^{2\pi}\frac{du}{m+R\cos u}=\frac{2\pi}{\sqrt{m^2-R^2}}.$$

因此

$$\int_\Gamma\frac{x\,dy-y\,dx}{ax^2+2bxy+cy^2}=\frac{2\pi}{\sqrt{m^2-R^2}}.$$

并且

$$m^2-R^2=\left(\frac{a+c}{2}\right)^2-\left[\left(\frac{a-c}{2}\right)^2+b^2\right]=ac-b^2.$$

最终得到

$$\int_\Gamma\frac{x\,dy-y\,dx}{ax^2+2bxy+cy^2}=\frac{2\pi}{\sqrt{ac-b^2}}$$

3 曲面积分

4 场论的数学基础

5 函数列和函数项级数

6 反常积分

7 Fourier分析

8 含参变量积分