מתמטיקה בדידה

אורן דנון

שאלה 1

מה מספר האפשרויות לפזר 15 כדורים זהים לתוך 5 תאים כך שבתא ה-i לא יהיו יותר מ- $2i$ כדורים, לכל $i \in [5]$.

פתרון:

נמדל את השאלה בצורה הבאה: כמה פתרונות טבעיים יש למשוואה הבאה:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 15 \\ 0 \leq x_1 \leq 2 \\ 0 \leq x_2 \leq 4 \\ 0 \leq x_3 \leq 6 \\ 0 \leq x_4 \leq 8 \\ 0 \leq x_5 \leq 10 \end{aligned}$$

נשתמש בשיטת המשלים, לשם כך נגדיר S - מספר הפתרונות למשוואה $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 15$ נגדיר D בתור הפתרון לשאלה המקורית, ונגדיר כ-B את מספר הפתרונות ה-"רעים" כלומר מתקיים: $|D| = |S| - |B|$. על מנת לחשב את הגודל הקבוצה B נצטרך לחלק למקרים ע"פ התאים שהם ההגבלות לא מתקימות, לכן נגדיר את $\mathcal{A}_i$ בתור המאורע: "בתא ה-i הייתה חריגה מההגבלות".

$$B = \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 \cup \mathcal{A}_3 \cup \mathcal{A}_4 \cup \mathcal{A}_4$$

נשים לב שיש חיתוך בין הקבוצות ולכן נשתמש בעקרון ההכלה וההדחה:

$$|S| = \binom{5+15-1}{15} = \binom{19}{15}$$
$$|\mathcal{A}_1| = \binom{5+12-1}{12} = \binom{16}{12}$$
$$|\mathcal{A}_2| = \binom{5+10-1}{10} = \binom{14}{10}$$
$$|\mathcal{A}_3| = \binom{5+8-1}{8} = \binom{12}{8}$$
$$|\mathcal{A}_4| = \binom{5+6-1}{6} = \binom{10}{6}$$
$$|\mathcal{A}_5| = \binom{5+4-1}{4} = \binom{8}{4}$$
$$|\mathcal{A}_2 \cap \mathcal{A}_5| = 0$$
$$|\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2 \cap \mathcal{A}_3| = 1$$

$$|\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2| = \binom{5+(15-5-3)-1}{7} = \binom{11}{7}$$
$$|\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_3| = \binom{5+(15-7-3)-1}{5} = \binom{9}{5}$$
$$|\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_4| = \binom{5+(15-9-3)-1}{3} = \binom{7}{3}$$
$$|\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_5| = \binom{5+(15-11-3)-1}{3} = \binom{5}{1}$$
$$|\mathcal{A}_2 \cap \mathcal{A}_3| = \binom{5+(15-5-7)-1}{3} = \binom{7}{3}$$
$$|\mathcal{A}_2 \cap \mathcal{A}_4| = \binom{5+(15-5-9)-1}{3} = \binom{5}{1}$$
$$\forall_{i \in \{3,4,5\}, j \in \{4,5\},\ i \neq j} |\mathcal{A}_i \cap \mathcal{A}_j| = 0$$
$$|\mathcal{A}_i \cap \mathcal{A}_j \cap \mathcal{A}_k| = 0$$

$$|D| = \binom{19}{15} - \left[\sum_{i=1}^{5} |\mathcal{A}_i| - \sum_{i \neq j} |\mathcal{A}_i \cap \mathcal{A}_j| + \sum_{i \neq j \neq k} |\mathcal{A}_i \cap \mathcal{A}_j \cap \mathcal{A}_k| \right]$$

נראה דרך נוספת להגיע לפתרון הנ"ל בעזרת פונקציות יוצרות; על מנת למצוא את מספר הפתרונות יש לחשב את המקדם של x^{15} בפולינום:

$$\underbrace{\overbrace{(x^0+x^1+x^2)}^{x^{t_1}}}_{\frac{x^3-1}{x-1}}\underbrace{\overbrace{(x^0+...+x^4)}^{x^{t_2}}}_{\frac{x^5-1}{x-1}}\cdots\underbrace{\overbrace{(x^0+...+x^{10})}^{x^{t_5}}}_{\frac{x^{11}-1}{x-1}}$$

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{5}\left(\sum_{i=0}^{2k}\left(x^i\right)\right)=\prod_{k=1}^{5}\left(\frac{1-x^{2k+1}}{1-x}\right)&=\frac{\left(1-x^3\right)\left(1-x^5\right)\left(1-x^7\right)\left(1-x^9\right)\left(1-x^{11}\right)}{\left(1-x\right)^5}\\&=\left(1-x^3\right)\left(1-x^5\right)\left(1-x^7\right)\left(1-x^9\right)\left(1-x^{11}\right)\cdot\frac{1}{\left(1-x\right)^5}\\&=\left(1-x^3\right)\left(1-x^5\right)\left(1-x^7\right)\left(1-x^9\right)\left(1-x^{11}\right)\sum_{k=0}^{\infty}\binom{5+k-1}{k}x^k\\&=\left(1-x^3-x^5-x^7+x^8-x^9+x^{10}-x^{11}+2x^{12}+2x^{14}-x^{15}+...\right)\sum_{k=0}^{\infty}\binom{4+k}{k}x^k\end{aligned}$$

כאשר בשלב האחרון פתחנו את הכפל עד ל-x^{15} ולכל חזקה כזאת נחפש את המשלים בסכום הימני, סה"כ נקבל:

$$\begin{aligned}&\binom{4+15}{15}-\binom{4+12}{12}-\binom{4+10}{10}-\binom{4+8}{8}+\binom{4+7}{7}-\binom{4+6}{6}+\binom{4+5}{5}-\binom{4+4}{4}\\&+2\cdot\binom{4+3}{3}+2\cdot\binom{4+1}{1}-\binom{4+0}{0}=\boxed{815}\end{aligned}$$

יש העתקה חח"ע ועל בין מספר הפתרונות לבעיה המקורית לבין המקדם של x^{15} בפולינום לעיל.

__שאלה 2:__

הוכיחו קומבינטורית את הזהות הבאה:

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n+k-1}{n-1}=\binom{2n}{n}$$

נשים לב ששני האגפים מתארים את מספר הפתרונות לאי שוויון הבאה בקבוצת המספרים הטבעיים:

$$x_1+x_2+...+x_n\leq n$$

- **אגף שמאל:** קבע $x:=x_1+x_2+...+x_n\leq n$ אזי $x=0\vee x=1\vee...\vee x=n$, לפיכך נפתור כל אי שוויון בנפרד ונסכום את התוצאות.
- **אגף ימין:** נוסיף משתנה עזר שיסמן את השארית להשלמה ל-n ונפתור את אי השוויון הבא: $x_1+x_2+...+x_n+x_{n+1}=n$ שכן אנו יודעים שמספר הפתרונות למשוואה הנ"ל במספרים הטבעיים היינו $\binom{(n+1)+n-1}{(n+1)-1}=\binom{2n}{n}$

__תרגיל:__

הוכיחו שבכל סדרה של $xyz+1$ מספרים ממשיים קיימת תת סדרה עולה באורך $x+1$ או יורדת באורך $y+1$ או קבועה באורך $z+1$

הוכחה:

תהי $a_1, a_2, ..., A_{xyz+1}$ לכל $1 \leq i \leq xyz+1$ נגדיר u_i תת הסדרה הארוכה העולה הארוכה ביותר המתחילה ב-a_i. באופן דומה נגדיר d_i עבור סדרה יורדת, c_i-עבור סדרה קבועה. מההנחה בשלילה נובע שלכל $1 \leq i \leq xyz+1$ מתקיים:

$$1 \leq u_i \leq x \qquad 1 \leq d_i \leq y \qquad 1 \leq c_i \leq z$$

לכן מספר השלשות השונות (u_i, d_i, c_i) הוא xyz ע"פ עקרון הכפל, אומנם לפי עקרון שובך היונים נובע כי קיימים $1 \leq i \leq j \leq xyz+1$ כך ש-$(u_i, d_i, c_i) = (u_j, d_j, c_j)$, לפיכך מתקיימים:

- $u_i = u_j \implies a_i \geq a_j$
- $d_i = d_j \implies a_i \leq a_j$
- $c_i = c_j \implies a_i \neq a_j$

כיוון ששלושת הטענות לעיל לא יכולות להתקיים בעת ובעונה אחת קיבלנו סתירה.

הראו שהחסם הדוק

נבנה סדרה באורך xyz כך שמתקיים:

- תת הסדרה העולה הארוכה ביותר באורך x
- תת הסדרה היורדת הארוכה ביותר באורך y
- תת הסדרה הקבועה הארוכה ביותר באורת z

$$\overbrace{\underbrace{(y-1)\,x+1 ... (y-1)\,x+1}_{z} ... \underbrace{(yx) ... (yx)}_{z}}^{x} ... \overbrace{\underbrace{(x+1) ... (x+1)}_{z} ... \underbrace{(2x) ... (2x)}_{z}}^{x} \overbrace{\underbrace{1...1}_{z}\underbrace{2...2}_{z}\underbrace{x...x}_{z}}^{x}$$

נשים לב שיש y סדרות באורך x ונוכל לבחור מכל אחת איבר אחד על מנת ליצור סדרה יורדת ולכן אורך הסדרה היורדת הארוכה ביותר היא y

שאלה 3:

לתחרות בקומבינטוריקה נרשמו 22 סטודנטים מתוכם 8 עתודאים. בכמה דרכים ניתן לחלק את הסטודנטים לזוגות כך שלא יהיה זוג בו שני עתודאים (אין משמעות לסדר בין הזוגות או בתוך הזוג)?

פתרון:

נסדר את העתודאים בשורה (בסדר כלשהו -לפי ת.ז. למשל) כעת מתוך ה-14 סטודנטים שנשארו נבחר 8 סטודנטים שיהיו בני הזוג של העתודאים - $\binom{14}{8}$. ונסדר את 8 הסטודנטים אל מול העתודאים - $8!$ אפשרויות. כעת נותר לחלק את 6 האחרים לזוגות ללא חשיבות לסדר בין הזוגות וללא חשיבות לסדר בתוך זוג - $\frac{6!}{2^3 \cdot 3!}$ - נשים לב שאין חשיבות לסדר בין הזוגות ויש $3!$ אפשרויות לסדר את הזוגות, ועבור כל זוג יש $2!$ לסדר בתוך הזוג.

הכללה של תת-הבעיה

יהי $n \in \mathbb{N}$ מספר המשתתפים בתחרות ויהי $k \in \mathbb{N}$ כך ש-$k|n$, מה מספר הדרכים לחלק את n המשתתפים ל-k-יות (כלומר קבוצות בגודל k). נקבע $p = \frac{n}{k}$, ובאותו אופן שפתרנו את הבעיה ממקודם נוכל לרשום:

$$\frac{n!}{(k!)^p \cdot p!}$$

דרך נוספת לפתור את הבעיה היא לבחוור מתוך n המשתתפים k-יה ראשונה ואז מתוך $n-k$ המשתתפים הנותרים k-יה שניה וכך הלאה. אבל בגלל שכעת סידרנו את הקבוצות נותר לחלק במספר הקבוצות

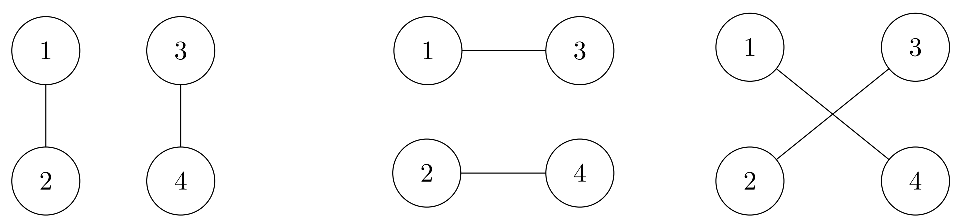
$$\frac{\text{nCr}\,(n,k) \cdot \text{nCr}\,(n-k,k) \cdots \text{nCr}\,(k,k)}{p!} = \frac{1}{p!}\prod_{i=0}^{p-1}\binom{n-ki}{k}$$

<u>הערה:</u>

סטודנט אמור לחשוב תחילה שמספר הדרכים לסדר את n משתתפים לזוגות היינו $\binom{n}{2}$ וככל במקרה הכללי $\binom{n}{k}$, כיוון שזה בעצם מספר תתי הקבוצות באורך , וכל קבוצה כזאת היא k-יה, ולכן זאת התשובה. אומנם תשובה זאת אינה נכונה, אומנם זהו אכן מספר ה-k-יות שאפשר ליצור, אבל בבעיה הנוכחית אנו נשאלים מה מספר החלוקות ל-k-יות, דהיינו, בכל חלוקה יש k-יות כך שמשתתף לא מופיע ב-k-יה פעמיים, וכל המשתתפים נמצאים בחלוקה הזאת. לשם פשטות עבור המקרה ש-$k = 2$ הבעייה שקולה למציאת מספר הזיווגים בגרף עם n קודקודים. נראה דוגמה עבור $n = 4,\ \ k = 2$, כאשר $\mathcal{R}$ היא קבוצת הפתרון האמיתי (שים לב שכל איבר בקבוצה היינו קבוצה). הפתרון השגוי של הסטודנט היינה הקבוצה $\mathcal{F}$

$$\mathcal{R} = \left\{ \overbrace{\{\{1,2\}\,\{3,4\}\}}, \overbrace{\{\{1,3\}\,\{2,4\}\}}, \overbrace{\{\{1,4\}\,\{2,3\}\}} \right\}$$

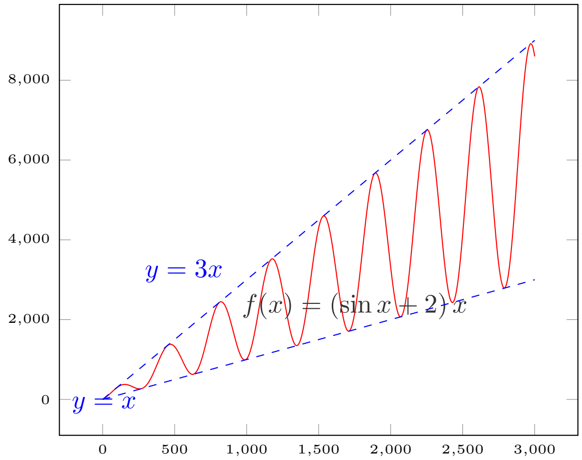
$$\mathcal{F} = \{\{1,2\}\,,\{1,3\}\,,\{1,4\}\,,\{2,3\}\,,\{2,4\}\,,\{3,4\}\}$$



עבור $k \in \mathbb{N}$ אנו נצטרך לדבר על - hypergraph, נמנע מדיון זה כעת.

1 אסימפטוטיקה

ברצוננו להעיר מספר נק' הנוגעות בנושא, נשים לב שישנה הגדרה באמצעות גבולות לבדוק האם שני פונקציות הם θ אחת של השנייה, וישנה הגדרה באמצעות כמטים. נשים לב שלא תמיד הגבול קיים, לדוגמה: נתבונן בדוגמה הבאה:



ונשים לב כי הגבול:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(\sin x + 2)\,x + 1}{x} = \lim_{x\to\infty} \sin x + 2 + \frac{1}{x}$$

מכיוון ש- $\lim_{x\to\infty} \sin x$ אינו מוגדר הגבול $\lim_{x\to\infty} \frac{(\sin x+2)x+1}{x}$ אינו מוגדר, אומנם נוכל להראות בנפרד $f = O(x)$ וגם $f = \Omega(x)$

2 להויות קומבינטוריות

הוכח את הזהות הבאה

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{k} = 2^{2n}$$

1. בדרך קומבינטורית
2. בדרך אלגברית

פתרון:

1. נראה כי שניהם סופרים את מספר המילים הבינאריות באורך $2n$
אגף ימין: לכל תו יש 2 אופציות או אפס או אחד, ע"פ עקרון הכפל הטענה נובעת.
אגף ימין נשים לב שבאגף זה נוסף עוד תו פיקטיבי(מדומה), כלומר הוא קובע משהו, אנו יודעים כי יש לנו בסה"כ שני אופציות ואם נבחר מ-$2n$ המקומות את התווים בהם אחדים אז יקבעו גם האפסים, אומנם הסכימה היינה עד n כלומר אנחנו לכל היותר בוחרים n מקומות עבור האחדים מתוך $2n+1$ מקומות. כלומר נוכל להסיק שהתא המיוחד (נניח שהוא השמאלי ביותר) אחראי איכשהו לאחדות ב-n התאים שלא בחרנו. אז אם התא השמאלי ביותר נבחר אנו נעשה משלים על הבחירה של האחדות ואפסים, אחרת נשאיר אותם כמו שהם. סה"כ ספרנו את כל האופציות למילים בינראיות באורך $2n$.
בהינתן מילה באגף שמאל נבדוק האם התא המיוחד מסומן אם כן נעשה משלים ונזרוק את התו המיוחד ונקבל מילה באגף ימין, זוהי בעצם פונקציה חח"ע. בהינתן מילה באגף ימין נבדוק האם סכום האחדות במילה גדולה מ-n אם כן נוסיף נסמן נעשה משלים לכל תו במילה ונסמן את התו המיוחד(כלומר נייעם לתוכו אחד), אחרת נשאיר את המילה כמו שהיא ונשים בתא המיוחד אפס, זוהי בעצם פונקציה חח"ע. ע"פ טענה בתורת הקבוצות, הקבוצות שוות. $\square$

2.

$$
\begin{aligned}
2^{2n} &= (1+1)^{2n} \\
&= \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} 1^k 1^{2n-k} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} && \text{(By the Binomial Theorem)} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{k} + \sum_{k=n+1}^{2n} \binom{2n}{k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{k} + \sum_{k=n+1}^{2n} \binom{2n}{2n-k} && \text{(Binomial Symmetry)} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{k} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{k} + \sum_{k=1}^{n} \binom{2n}{k-1} \\
&= \binom{2n}{0} + \sum_{k=1}^{n} \binom{2n}{k} + \sum_{k=1}^{n} \binom{2n}{k-1} \\
&= \binom{2n}{0} + \sum_{k=1}^{n} \binom{2n+1}{k} && \text{(By pascal's identities)} \\
&= \binom{2n+1}{0} + \sum_{k=1}^{n} \binom{2n+1}{k} && \binom{2n}{0} = \binom{2n+1}{0} = 1 \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{k}
\end{aligned}
$$

<u>*תרגיל*</u>

הוכח שהביטוי הבא הוא מספר שלם:

$$\frac{(k!)!}{(k!)^{(k-1)!}}.$$

<u>*פתרון*</u>

$k!$ זה מספר הסידורים של k אנשים בשורה, לכן $(k!)!$ זה מספר הסידורים של הסידורים בשורה. (אפשר לחשוב שלוקחים את כל שרושמים כל סידור בשורה ואז מסדרים את השורות ושואלים בכמה דרכים ניתן לסדר את השורות הללו? יש $k!$ סידורים אז יש $k!$ שורות ואנחנו רוצים לדעת כמו פרמוטציות של השורות קיימות זה בדיוק $(k!)!$). עכשיו אנחנו אומרים שלא אכפת לנו מהסדר של האנשים ב-$(k-1)!$ מהשורות הראשונות ולכן בעצם אנחנו צריכים לחלק ב-$(k!)^{(k-1)!}$ אבל זה בדיוק כמו להגיד שאכפת לנו רק מהסדר ב-$k!-(k-1)!+1$ מהשורות אז זה כמו לרשום $\binom{k!}{k!-(k-1)!+1}$ שזה כמובן מספר שלם, למרות שהיה מספיק להסביר רק מה סופרים. $\square$

1. (א) להלן זהות קומבינטורית המתקיימת לכל $n \geq 0$

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k \binom{n}{k} = 3^n$$

הוכח את נכונות הזהות באמצעות אינדוקציה.

בסיס: עבור $n=0$ הטענה אכן מתקיימת שכן $1 = \sum_{k=0}^{0} 2^k \binom{0}{k} = 2^0 \binom{0}{0} = 3^0 = 1$

צעד: נניח שהטענה נכונה עבור $n-1$ ונוכיח עבור n

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} 2^k \binom{n}{k} &= \sum_{k=1}^{n-1} 2^k \binom{n}{k} + 2^0\binom{n}{0} + 2^n\binom{n}{n} = \sum_{k=1}^{n-1} 2^k \binom{n}{k} + 1 + 2^n \\ &\overset{\text{Pascal's rule}}{=} \sum_{k=1}^{n-1} 2^k \left(\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}\right) + 1 + 2^n \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} 2^k \binom{n-1}{k} + \sum_{k=1}^{n-1} 2^k \binom{n-1}{k-1} + 1 + 2^n = \sum_{k=0}^{n-1} 2^k \binom{n-1}{k} + \sum_{k=1}^{n} 2^k \binom{n-1}{k-1} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} 2^k \binom{n-1}{k} + \underbrace{\sum_{t=0}^{n-1} 2^{t+1} \binom{n-1}{t}}_{2\cdot\sum_{t=0}^{n-1} 2^t \binom{n-1}{t}} = 3^{n-1} + 2\cdot 3^{n-1} = 3^n\end{aligned}$$

$\square$

(ב) תן הוכחה קומבינטורית של הזהות.

נראה ששני האגפים מהווים שני דרכים שונות לספור את הקבוצה של כל המילים מעל הא"ב $\{0,1,2\}$.

- **אגף ימין:** המילה באורך n ולכל תו במילה יש שלוש אופציות, ע"פ עקרון הכפל ישנם 3^n מילים.
- **אגף שמאל:** נבחר את k המקומות שיהיו מורכבים אך ורק מהתווים 0 או 1, ושאר התווים יקבעו אוטומטית לתו 2, נעבור על כל האופציות ל-k כנ"ל ונקבל את כל המילים הטיראניות.

$\square$

2. (א) מהו את המקדם של x^2y^5 בביטוי: $(x+y)^7$? ע"פ נוסחאת הבינום נקבל $\binom{7}{2} = 21$.

(ב) מהו המקדם של x^3y^4 בביטוי: $(2x+3y+5)^{10}$? ע"פ נוסחאת המולטינום המקדם מתקיים:

$$(2x+3y+5)^{10} = \sum_{t_1+t_2+t_3=10} \binom{10}{t_1,\ t_2,\ t_3} (2x)^{t_1} (3y)^{t_2} \cdot 5^{t_3} \implies \binom{10}{3,\ 4,\ 3} 2^3 3^4 \cdot 5^3 \, [x^3y^4]$$

3. נוכיח את הזהות הבאה בצורה קומבינטורית

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

נראה כי שני האגפים סופרים את מספר הדרכים לבחור n אנשים מתוך קבוצה של $2n$ אנשים.

- **אגף ימין:** הבחירה היא ללא חזרות וללא חשיבות לסדר, הטענה נובעת.
- **אגף שמאל:** נחלק את הקבוצה של $2n$ האנשים לשני קבוצות שוות (אפשרי שכן יש קבוצה בגודל $2n$). תחילה נבחר מהקבוצה הראשונה k אנשים ולאחר מכן נבחר מהקבוצה השניה $n-k$ אנשים, דהיינו בחרנו סה"כ n אנשים מתוך $2n$ וקיבלנו שמספר הדרכים לכך היא: $\binom{n}{k}\binom{n}{n-k}$ אומנם אנו צריכים לעשות כך עבור כל $k \in [n]$, בנוסף ניזכר בזהות $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ ונקבל שוויון בין האגפים. נשים לב שאנחנו לא צריכים לחלק ב-2 שכן הגודל של הקבוצה הראשונה משתנה ולכן סדר הבחירה של הקבוצות משתנה.

4. (א) נבחר את שלושת המקומות עבור האות A לשם כך יש $\binom{9}{3}$ אופציות, לאחר מכן נשארו 6 מקומות, ולכל מקום יש 4 אותיות. לכן סה"כ יש $\binom{9}{3}\cdot 4^6$ מילים. נשים לב שקודם כל צריך לבחור את המקומות עבור המקומות בהם תופיע האות A ולאחר מכן לסדר את שאר האותיות ולכן הסדר אכן חשוב ולא ביצענו ספירה כפולה.

(ב) **טעות:** אם לא יופיעו יותר משני אותיות שונות אז או שמופיעות שתי אותיות שונות או שמופיע אות אחת בכל המילה אם כל המילה מורכבת מאות אחת יש 5 מילים כאלו (מילה לכל אות) אחרת נבחר את מספר שני האותיות השונות מתוך קבוצת האותיות לשם כך ישנם $\binom{5}{2}$ אופציות, ולאחר מכן לכל תו במילה יהיו 2 אופציות ולכן ע"פ עקרון הכפל נקבל $5+\binom{5}{2}\cdot 2^9$.

למה טעות? כי בעצם בביטוי הראשון אנחנו סופרים כבר את המילים בעלי אות אחת, ובנוסף אנחנו סופרים כל אות כזאת כמה פעמים

איך נתקן? נבדוק כמה פעמים ספרנו את כל המילים בעלי אות אחת בביטוי $\binom{5}{2}\cdot 2^9$, נשים לב שעבור כל זוג ספרנו עבורו פעם אחת את המילה עם האות היחידה (עבור כל אות). ונזכיר כי הזוגות שנמצאים ב-$\binom{5}{2}$ הם:

$$\begin{aligned}
&\{A,B\}\,\{A,C\}\,\{A,D\}\,\{A,E\}\\
&\{B,C\},\{B,D\},\{B,E\}\\
&\{C,D\},\{C,E\}\\
&\{D,E\}
\end{aligned}$$

נבחר אות לשם כך יש לנו 5 אופציות ולאחר מכן נשים לב שספרנו אותה ב-3 זוגות נוספים, כי יש 4 אופציות לעוד אות בזוג אבל פעם אחת אנחנו באמת צריכים לספור, ולכן סה"כ צריך להוריד $5\cdot 3$ ונקבל את התוצאה הסופית: $\boxed{\binom{5}{2}\cdot 2^9-5\cdot 3}$

(ג) לאות הראשונה יש 5 אופציות לשנייה 4 לשלישית 4 ... לכן סה"כ יש $5\cdot 4^8$

(ד) נבחר את האות הראשונה והיא תקבע את האות האחרונה, לאחר מכן נקבע את האות השניה ואז האות השנייה מהסוף תיקבע וכך הלאה, האות האמצעית כלומר האות החמישית לא מגבילה אף תו האחר. לפיכך ישנם 5^5

(ה) הבעיה שקולה למספר הפתרונות למשוואה $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=9$ כך ש- $0\le x_i\le 2$, (שזה שקול לשאול אילו אותיות נבחר וכמה פעמים כל אות תופיע), ולאחר מכן לסדר את האותיות בהתאם. תחילה נפתור את הבעיה הראשונה:

i.
- דרך ראשונה נשים לב שאפשר לקחת מכל אות שני מופעים ולבסוף לבחור לאיזה אות להוריד מופע,כיוון שיש חמש אותיות ישנם חמש אופציות.
- נשתמש בשיטת המשלים כלומר נחשב את סה"כ האפשרויות פחות האפשרויות שאנחנו לא רוצים לספור. סה"כ האפשרויות זה $\binom{5+9-1}{9}$ האפשרויות ה"רעות" זה הפתרונות בהם $x_i>2$ אומנם נשים לב שיכול להיות שני אינדקסים שונים שמקיימים את התנאי, לפיכך נשתמש בעקרון ההכלה וההדחה. יהי $\mathcal{A}_i$ המאורע כי $x_i>2$ לפיכך $|\mathcal{A}_i|=\binom{5+6-1}{6}$ לכל $i\in\{1,2,3,4,5\}$.

$$|\mathcal{A}_i\cap\mathcal{A}_j|=\binom{5+3-1}{3}\ \forall 1\le i\le j\le 5$$
$$|\mathcal{A}_i\cap\mathcal{A}_j\cap\mathcal{A}_k|=\binom{5+0-1}{0}=1\ \forall 1\le i\le j\le k$$
$$\implies \binom{5+9-1}{9}-5\cdot\binom{5+6-1}{6}+\binom{5}{2}\binom{5+3-1}{3}-\binom{5}{3}\cdot 1=\boxed{5}$$

- דרך נוספת לפתור את המשוואה הנ"ל עם האילוצים הנתונים היא באמצעות פונקציות יוצרות, אנו יודעים כי הפונקציה היוצרת היא:

$$\left(1+x+x^2\right)^5=\sum_{t_1+t_2+t_3=5}\binom{5}{t_1,t_2,t_3}1^{t_1}x^{t_2}\left(x^2\right)^{t_3}\implies\binom{5}{0,1,4}\left[x^9\right]=5\left[x^9\right]$$

ii. כעת נותר לסדר את האותיות במקומות: $\binom{9}{2,2,2,2,1}$

דרך נוספת, היא לסדר מהתחלה את המילה עם 2 מופעים לכל אות בשורה שזה יוצא $\binom{9}{2,2,2,2,2}$ ולשים לב שבכל אופציה אם תורידו את האות הימנית ביותר במילה תקבלו מילה חוקית, דהיינו יש התאמה חח"ע (וגם על).

$$\boxed{\binom{9}{2,2,2,2,2} = 5 \cdot \binom{9}{2,2,2,2,1} = 113,400}$$

5. (א)
- נשים לב שיש פונקציה חח"ע ועל בין האופציות בהם 1 בא לפני 2 והאופציות בהם 2 בא לפני 1, לכן שני הקבוצות שוות וביחד משלימות לסה"כ האופציות לסדר n מספרים בשורה לפיכך מספר האופציות הינו $\frac{n!}{2}$
- דרך נוספת היא לבחור את המקומות של 1 ו-2 ולסדר אותם כך ש-1 בא לפני 2 ולאחר מכן לסדר את כל שאר המספרים לכן יש $\binom{n}{2} \cdot (n-2)!$

(ב) נסתכל על 1 ו-2 כמספר אחד נסדר אותם בשורה ואז נכפיל במספר האפשרויות לסדר את 1, ו-2, לפיכך: $(n-1)! \cdot 2!$

(ג) נשתמש בשיטת המשלים: כלומר מספר האפשרויות ש-1 ו2 לא מופיעים צמודים הינו מספר האפשרויות לסדר n איברים בשורה פחות מספר האפשרויות ש-1 צמוד ל-2, לכן $n! - (n-1)! \cdot 2!$

6. נשים לב שמספר האופציות עבור שורה במטריצה היינו 3^5 לאחר שבחרנו את השורה הראשונה השורה השניה לא יכולה להיות כמו השורה הראשונה ולכן יש פחות אופציה אחד מסה"כ האפשרויות, לשורה השלישית יש פחות שני אופציות, ולרביעית פחות 3 אופציות, סה"כ

$$3^5 \left(3^5 - 1\right) \left(3^5 - 2\right) \left(3^5 - 3\right)$$

שים לב: נסיון לפתור באמצעות כלל ההכלה וההדחה יוביל לסיבוך שכן צריך להגדיר תכונה עם שני אינדקסים של השורות שחופפות, וחיתוך בין שני תכונות כאלו מייגע ודורש חלוקה למקרים.

7. נגדיר את $\mathcal{X}$ להיות קבוצת תתי הקבוצות של A באורך זוגי, ונגדיר את $\mathcal{Y}$ להיות קבוצת תתי הקבוצות של A באורך אי זוגי, נראה שקיימת פונקציה הופכית מ-$\mathcal{X}$ ל- $\mathcal{Y}$. יהי $a \in A$ נגדיר את הפונקציה ההופכית כך ש- $f(x) = x \cup \{a\}$ אחרת נגדיר $f(x) = x \setminus \{a\}$. כיוון ש-f היינה פונקציה הפוכה הטענה נובעת. □

8. נשים לב שצריכים לבצע ארבע צעדים ימינה ושבעה צעדים כלפי מעלה,לכן מתוך 11 צעדים אנו צריכים לבחור את המיקום של ארבעת הצעדים ימינה, דהיינו $\binom{11}{4}$ □

9.
- נבחר תת קבוצה בגודל $0 \le k \le n$, ישנם $\binom{n}{k}$ אפשריות כאלו, לאחר מכן כל איבר מ-k האיברים יכול להופיע או לא בתת הקבוצה השניה ולכן כל אחד תורם 2^k אופציות לקבוצה השנייה ונותר לבחור את שאר האברים שלא בחרנו בקבוצה הראשונה לכך יש בדיוק אופציה אחת. סה"כ קיבלנו

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot 2^k$$

- נשים לב שלכל איבר בקבוצה A ישנם שלושה אופציות:
  - האיבר שייך לקבוצה הראשונה בלבד.
  - האיבר שייך לקבוצה השנייה בלבד.
  - האיבר שייך לקבוצה הראשונה וגם לקבוצה השנייה.

  כיוון שיש שלושה איברים ע"פ עקרון הכפל נובע שיש 3^n אפשרויות.

נשים לב שקיבלנו הוכחה קומבינטורית לזהות מהשאלה הראשונה. □

10. נשים לב שהבעיה שקולה לחלוקה של חמישים תפוזים לחמישה (כי נוכל לשים עשר תפוזים עבור כל ילד מראש ולחק את שאר הכדורים ויש העתקה חח"ע ועל בין הבעיות). ילדים כך שכל ילד מקבל בין אפס לעשרים תפוזים ולכן מכן הפתרון שכל לשאלה ארבע סעיף ה', לפיכך יש

$$\binom{5+50-1}{50} - \binom{5}{1}\binom{5+(50-20\cdot 1)-1}{30} + \binom{5}{2}\binom{5+(50-20\cdot 2)-1}{30}$$

11. לפני שניגש לשאלה הבאה נגדיר את הסימונים הבאים על מנת להקל על השימוש בעקרון ההכלה וההדחה: יהיו n איברים ו-k תכונות: $p_1, p_2, ..., p_k$ כל איבר ביחס לכל תכונה מקיים אותה או לא. נסמן $W\left(p_1, p_2, ..., p_r\right)$ - מספר האיברים המקיימים את התכונות $p_1, p_2, ..., p_r$ כאשר $1 \le r \le k$.

(א) נשתמש בעקרון ההכלה וההדחה לפיכך נגדיר את התכונות הבאות:

- p_1 – התמורה מכילה את הרצף FLY
- p_2 – התמורה מכילה את הרצף TOUR
- p_3 – התמורה מכילה את הרצף SHAPE

$$W\left(p_1\right) = (26 - 3 + 1)! = 24! \qquad W\left(p_1, p_2\right) = (26 - 3 + 1 - 4 + 1)! = 21!$$
$$W\left(p_2\right) = (26 - 4 + 1)! = 23! \qquad W\left(p_1, p_3\right) = (26 - 3 - 1 - 5 + 1)! = 20!$$
$$W\left(p_3\right) = (26 - 5 + 1)! = 22! \qquad W\left(p_2, p_3\right) = (26 - 4 + 1 - 5 + 1)! = 19!$$

$$W\left(p_1, p_2, p_3\right) = (26 - 3 - 4 - 5 + 1)! \cdot 3! = 6 \cdot 15!$$
$$26! - \sum_{i=1}^{3} W\left(p_i\right) + W\left(p_1, p_2\right) + W\left(p_2, p_3\right) - W\left(p_1, p_2, p_3\right)$$
$$\boxed{26! - 24! - 23! - 22! + 21! + 20! + 19! - 17!}$$

(ב)

- p_1 – ICE מופיעה
- p_2 – CAR מופיעה
- p_3 – RUN מופיעה

$$W\left(p_1\right) = W\left(p_2\right) = W\left(p_3\right) = (26 - 3 + 1)! = 24!$$
$$W\left(p_1, p_2\right) = W\left(p_1, p_2, p_3\right) = 0$$
$$W\left(p_1, p_3\right) = (26 - 3 + 1 - 3 + 1)! = 22!$$
$$W\left(p_2, p_3\right) = (26 - 5 + 1)! = 20!$$
$$\boxed{26! - 3 \cdot 24! + 0 + 22! + 20! - 0!}$$

12. (א) נשים לב שהמספרים ראשונים ונזכור כי מספר מתחלק ב p_1,p_2 ראשונים אם ורק אם המספר מתחלק בp_1,p_2, הקורא נדרש להשלים את הפרטים.

(ב)
- יהי p_1 – המספר מתחלק ב-10.
- יהי p_2 – המספר מתחלק ב-12.
- יהי p_3 – המספר מתחלק ב-15.

$$\begin{aligned}
W\left(p_1,p_2\right) &= \operatorname{lcm}\left(10,12\right) = \operatorname{lcm}\left(2\cdot 5, 2^2\cdot 3\right) = 2^2\cdot 5\cdot 3 = 60\\
W\left(p_2,p_3\right) &= \operatorname{lcm}\left(12,15\right) = \operatorname{lcm}\left(2^2\cdot 3, 3\cdot 5\right) = 2^2\cdot 3\cdot 5\\
W\left(p_1,p_3\right) &= \operatorname{lcm}\left(10,15\right) = \operatorname{lcm}\left(2\cdot 5, 3\cdot 5\right) = 2\cdot 3\cdot 5 = 30\\
W\left(p_1,p_2,p_3\right) &= \operatorname{lcm}\left(10,12,15\right) = \operatorname{lcm}\left(2\cdot 5, 2^2\cdot 3, 5\cdot 3\right) = 2^2\cdot 5\cdot 3 = 60\\
10000 &- \left(1+\left\lfloor\frac{9999}{10}\right\rfloor\right) - \left(1+\left\lfloor\frac{9999}{12}\right\rfloor\right) - \left(1+\left\lfloor\frac{9999}{15}\right\rfloor\right) + 2\cdot\left(1+\left\lfloor\frac{9999}{60}\right\rfloor\right) + \left(1+\left\lfloor\frac{9999}{30}\right\rfloor\right)\\
&- \left(1+\left\lfloor\frac{9999}{60}\right\rfloor\right) = \boxed{8,000}
\end{aligned}$$

13. נשים לב שיש התאמה חח"ע ועל בין הבעיה הנוכחית לבין הבעיה של אי סדרים שראינו בכיתה ולכן:

$$D_{10} = \sum_{r=0}^{n} \left(-1\right)^r \cdot \frac{10!}{r!} = 1334961$$

14. (א) מתוך נסיון לפתור תשאלה אנו רואים מבנה רקורסיבי שנעדיף לפתור אותו בעזרת נוסחאות נסיגה, נסתכל על התו הראשון במילה ונשים לב שיש שני מקרים זרים

- a היא האות הראשונה ולכן לא יכול להופיע a אחריה, כלומר מופיע b ונותר לפתור את הבעיה עבור מילה באורך $n-2$ מחדש.
- b היא האות הראשונה ולכן נותר לסדר את $n-1$ האיברים הנותרים.

לפיכך: $a_n = a_{n-2}+a_{n-1}$ עם תנאי ההתחלה $a_0=1, a_1=2$

$$\begin{aligned}
a_n &= a_{n-2}+a_{n-1}\\
x^n &= x^{n-1}+x^{n-2}\\
x^2 &- x - 1 = 0\\
x_1 &= \frac{1+\sqrt{5}}{2} \qquad\qquad x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}\\
a_n &= \alpha\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \beta\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n
\end{aligned}$$

$$\begin{cases}\alpha+\beta=1\\ \alpha\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)+\beta\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)=2\end{cases} \implies \alpha\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)+\left(1-\alpha\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)=2 \implies \sqrt{5}\alpha = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

$$\alpha = \frac{3+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \boxed{\frac{3\sqrt{5}+5}{10}} \qquad\qquad \boxed{\beta = \frac{3\sqrt{5}-5}{10}}$$

$$a_n = \frac{3\sqrt{5}+5}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{3\sqrt{5}-5}{10}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

□

(ב) נשים לב שהאות b לא מגבילה אותנו איזו אות לשים אחריה, אולם האות a מחייבת אותנו שאחריה יש רק רצף של aים עד סוף המילה ולכן נוכל לבחור את המקום לa הראשונה וזה יקבע את המילה. אומנם יש לשים לב שעבור מילה באורך n האות a כלל לא חייבת להופיע ולכן נוסיף עוד אופציה אחת. סה"כ $n+1$ □

(ג) נחלק למקרים:

- האיבר הראשון הוא b ונותר לפתור את הבעיה עבור $n-1$ המקומות הנותרים.
- המחרוזת מתחילה ב-ab ונותר לסדר את $n-2$ האיברים הנותרים כך שהרצף aaa לא יופיע.
- המרוזת מתחילה ב-aab ונותר לסדר את $n-3$ האיברים הנותרים.

סה"כ נוסחאת הנסיגה $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}$ עם תנאי ההתחלה $a_0 = 1, a_1 = 2, a_2 = 4$.

(ד) נשים לב שיש מספר אפשרויות זרות:

- המילה מתחילה באות b ולכן $f(n-1)$
- המילה מתחילה ב-a
  - לאחר ה-a יש b ולכן $f(n-2)$
  - לאחר ה-a יש a, במצב זה נראה שהכל יחזור ברקורסיה אינסופית (נסה וראה). לכן נגדיר סדרה חדשה $y(n)$ - מספר המילים באורך n שמתחילות ב-aa ולא מכילות aba

$$\boxed{f(n) = f(n-1) + f(n-2) + y(n)} \quad \textbf{(1)}$$

כעת נסתכל על נוסחאת הנסיגה ל$y(n)$

- האות שלישית היא b ולכן $f(n-3)$
- האות שלישית היא a ולכן $y(n-1)$

$$\boxed{y(n) = y(n-1) + f(n-3)} \quad \textbf{(2)}$$

אם נבודד מהמשוואה הראשונה 1 את $y(n)$ ונציב ב2 נקבל:

$$\boxed{f(n) = 2f(n-1) - f(n-2) + f(n-3)}$$

נסמן $f_x := f(x)$ ונרשום את תנאי ההתחלה: $f_0 = 1, \ f_1 = 2, \ f_2 = 4$.

□

15. (א) נשים לב שלאות הראשונה יש 4 אופציות ולאחר מכן היא לא יכולה להופיעה באות הבאה ולכן האות הבאה יכולה להיות כל האותיות חוץ מהאות הראשונה, לכן יש 3 אופציות, גם לאות השלישית יש שלוש אופציות מאותה סיבה, וכך גם לכל שאר האותיות, ע"פ עקרון הכפל נקבל: $\boxed{4 \cdot 3^{n-1}}$ □

(ב) נחלק למקרים:

- אם האות הראשונה שונה מ-a אז נותר להשלים כך שב-$n-1$ המקומות הנותרים לא יהיה ab - שזה בדיוק f_{n-1}.
- אם המילה מתחילה ב-a חייב להופיע באות הבאה a או c או d, עבור c או d נקבל $2f_{n-2}$, עבור a נשים לב שהתהליך מתבצע ברקורסיה אינסופית, ולכן נגדיר g_n להיות המילה באורך n שמתחילה ב-a ולא מכילה ab.

$$\boxed{f_n = g_n + 3 \cdot f_{n-1}} \quad \textbf{(3)}$$

כעת נסתכל על הסדרה g_n

- האות השניה שונה מ-a ולכן $2f_{n-2}$
- האות השניה היא a ולכן g_{n-1}

$$\boxed{g_n = 2f_{n-2} + g_{n-1}} \quad \textbf{(4)}$$

נבודד ממשוואה 3 את g_n ונציב ב4 ונקבל

$$g_n = f_n - 3f_{n-1}$$
$$g_n = 2f_{n-2} + g_{n-1}$$
$$f_n - 3f_{n-1} = 2f_{n-2} + f_{n-1} - 3f_{n-2}$$

$$\boxed{f_n = 4f_{n-1} - f_{n-2}}$$

נותר להוסיף תנאי התחלה(השלם!)

פתרון שגוי: נשתמש בשיטת המשלים, כל האופציות זה 4^n ואת מספר המילים שמכילות ab ניתן לחשב בצורה הבאה: נבחר 2 מקומות מתוך הn מקומות לרצף ab ולאחר מכן נסדר את כל שאר המילים, סה"כ נקבל: $4^n - \binom{n}{2} \cdot 4^{n-2}$ הפתרון שגוי כי יש מילים שמכילות ab שספרנו פעמים, לדוגמה המילה ש-ab הראשון מופיע באינדקסים $1,2$ וה-ab השני מופיע באינדקסים $4,5$ פעם ראשונה בחרנו ב-$\binom{n}{2}$ את $1,2$ ואז שסידרנו קיבלנו את $4,5$ ובפעם השניה הפוך.

(ג) אני לא רואה דרך לפתרון ישיר של הבעיה לשם פתרון הבעיה נגדיר ארבע נוסחאות נסיגה:

- $\mathcal{A}_n$ - מספר המילים באורך n שלא מכילות אף אות שלוש פעמים ברצף ומתחילות ב-a.
- $\mathcal{B}_n$ - מספר המילים באורך n שלא מכילות אף אות שלוש פעמים ברצף ומתחילות ב-b.
- $\mathcal{C}_n$ - מספר המילים באורך n שלא מכילות אף אות שלוש פעמים ברצף ומתחילות ב-c.
- $\mathcal{D}_n$ - מספר המילים באורך n שלא מכילות אף אות שלוש פעמים ברצף ומתחילות ב-d.

נסתכל על $\mathcal{A}_n$ ונבדוק את האופציות:

- האות השניה היא a, ננתח מה האות השלישית: ונקבל $\overbrace{\mathcal{B}_{n-2}}^{b} + \overbrace{\mathcal{C}_{n-2}}^{c} + \overbrace{\mathcal{D}_{n-2}}^{d}$
- האות השניה היא b, ולכן $\mathcal{B}_{n-1}$
- האות השניה היא c, ולכן $\mathcal{C}_{n-1}$
- האות השניה היא d, ולכן $\mathcal{D}_{n-1}$

$$\mathcal{A}_n = \mathcal{B}_{n-1} + \mathcal{C}_{n-1} + \mathcal{D}_{n-1} + \mathcal{B}_{n-2} + \mathcal{C}_{n-2} + \mathcal{D}_{n-2} \quad \textbf{(5)}$$
$$\mathcal{B}_n = \mathcal{A}_{n-1} + \mathcal{C}_{n-1} + \mathcal{D}_{n-1} + \mathcal{A}_{n-2} + \mathcal{C}_{n-2} + \mathcal{D}_{n-2} \quad \textbf{(6)}$$
$$\mathcal{C}_n = \mathcal{B}_{n-1} + \mathcal{A}_{n-1} + \mathcal{D}_{n-1} + \mathcal{B}_{n-2} + \mathcal{A}_{n-2} + \mathcal{D}_{n-2} \quad \textbf{(7)}$$
$$\mathcal{D}_n = \mathcal{B}_{n-1} + \mathcal{C}_{n-1} + \mathcal{A}_{n-1} + \mathcal{B}_{n-2} + \mathcal{C}_{n-2} + \mathcal{A}_{n-2} \quad \textbf{(8)}$$

נפתח משוואות נסיגה עבור כל סדרת נסיגה נציב נבודד כל נוסחאת נסגיה ובסוף נשים לב ש- $\boxed{X_n = \mathcal{A}_n + \mathcal{B}_n + \mathcal{C}_n + D_n}$ לגבי מקרה הבסיס, אנו צריכים להיזהר לגבי $n = 0$, שכן זאת המילה הריקה המסומנת ב-ε , אבל שרשור של המילה הריקה למילה הריקה הוא המילה הריקה, נעדיף לא להיכנס למקרה זה ונתחיל מ-$n = 1$ נקבל $X_1 = 4, \ X_2 = 16$

16. (א) ישנם שני אופציות או שהשתמשנו במלבן מסוג 1×1 ונותרו לסדר f_{n-1} מלבנים, או שהשתמשנו במלבן מסוג $1{\times}2$ ונותר לסדר $n{-}2$ מלבנים שזה f_{n-2} דרכים, סה"כ: $\boxed{f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, \ \ f_0 = 1, f_1 = 1}$

(ב) באותו אופן: $\boxed{f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, \ \ f_0 = 1, f_1 = 1, \ \ f_2 = 2}$

(ג) באותו אופן $\boxed{f_n = f_{n-2} + f_{n-5}, \ \ f_0 = 1, \ \ f_1 = 0, \ \ f_2 = 1, \ \ f_3 = 0, \ \ f_4 = 1}$

17. נשים לב שניתן להפוך את המשבצות במקרה זה ולכן נוכל לחשוב על המבעיה כאילו שהמשבצות שנתונות לנו הם
$1 \times 1, \ \ 1 \times 2, \ \ 2 \times 1, \ \ 2 \times 2$. כיוון שהלוח בגודל $2 \times n$. יהי a_n מספר הדרכים למילוי לוח בגודל $2 \times n$, אומנם כיוון שיש לנו משבצת מסוג 1×2 (כלומר אריח בגודל 2 הונח בצורה אופקית) דבר שיגרום לחוסר סימטריה בצורה שבשורה אחת כיסינו משבצת יותר מבשורה השניה, ולכן נגדיר סידרה חדשה b_n שתספור את מספר הדרכים לסדר לוח של 2 שורות בשורה הראשונה $n - 1$ משבצות ובשורה השניה n משבצות מכוסות (שים לב שזה לא משנה אם השורה הראשונה $n - 1$ והשניה n או להפך, לשני הצורות בדיוק אותו מספר דרכים, כלומר יש התאמה חח"ע ועל). נבחון את הדרכים לחסות את העמודה הימנית ביותר:

- שתי משבצות של 1×1 יותריו a_{n-1} דרכים להשלים את הצורה.
- משבצת של 2×1 תותיר a_{n-1} דרכים להשלים את הצורה.
- משבצת של 1×2 ומשבצת של 1×1 כאשר 2×1 למעלה יותירו b_{n-1} דרכים, כנ"ל שהסדר בין המשבצות הפוך.
- שתי אריחים של 2×1 יותירו a_{n-2} דרכים.
- משבצת של 2×2 תותיר a_{n-2} דרכים.

$$\boxed{a_n = 2a_{n-1} + 2b_{n-1} + 2a_{n-2}}$$

כעת נסתכל על b_n:

- משבצת של 1×1 תותיר a_{n-1}
- משבצת של 1×2 תותיר b_{n-1}

$\boxed{b_n = b_{n-1} + a_{n-1}}$ מהמשוואה הראשונה נבודד את b_n ונקבל $b_n = \frac{1}{2}a_{n+1} - a_n - a_{n-1}$ נציב במשוואה בנוסחאת הנסיגה האחרונה שקיבלנו:

$$\begin{aligned}
a_n &= 2a_{n-1} + 2b_{n-1} + 2a_{n-2} \\
b_{n-1} &= \frac{1}{2}a_n - a_{n-1} - a_{n-2} \\
b_n &= \frac{1}{2}a_{n+1} - a_n - a_{n-1} \\
\frac{1}{2}a_{n+1} - a_n - a_{n-1} &= \frac{1}{2}a_n - a_{n-1} - a_{n-2} + a_{n-1} \\
\frac{1}{2}a_{n+1} &= \frac{3}{2}a_n + a_{n-1} - a_{n-2} \\
a_{n+1} &= 3a_n + 2a_{n-1} - 2a_{n-2}
\end{aligned}$$

$$\boxed{a_n = 3a_{n-1} + 2a_{n-1} - 2a_{n-3},\ a_0 = 1,\ a_1 = 2,\ a_2 = 8}$$

$$\begin{aligned}
x^3 - 3x^2 - 2x + 2 &= 0 \\
(x+1)\left(x^2 - 4x + 2\right) &= 0
\end{aligned}$$

$$\boxed{x_1 = -1} \qquad \boxed{x_2 = 2 + \sqrt{2}} \qquad \boxed{x_3 = 2 - \sqrt{2}}$$

$$\begin{aligned}
a_n &= \alpha x_1^n + \beta x_2^n + \gamma x_3^n \\
1 = a_0 &= \alpha + \beta + \gamma \\
2 = a_1 &= \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 \\
8 = a_2 &= \alpha x_1^2 + \beta x_2^2 + \gamma x_3^2
\end{aligned}$$

$$\boxed{\alpha = \frac{2}{7},\ \ \beta = \frac{3\sqrt{2}+5}{14},\ \ \gamma = \frac{5-3\sqrt{2}}{14}}$$

$$\boxed{a_n = \frac{2}{7}(-1)^n + \frac{3\sqrt{2}+5}{14}\left(2+\sqrt{2}\right)^n + \frac{5-3\sqrt{2}}{14}\left(2-\sqrt{2}\right)^n}$$

הוכח קומבינטורית

$$\sum_{i=1}^{n} i = \binom{n+1}{2}.$$

פתרון: שני הבעיות פותרות את הבעיה הבאה: מספר הדרכים לבחור שני אנשים מקבוצה של $n+1$ אנשים.

- **אגף ימין:** טריוואלי.
- **אגף שמאל:** נשים לב שאם אנו יודעים כי האיש הראשון שנבחר הוא האיש ה-i אזי נותר לאיש השני יש $(n+1-i)$ אופציות, כיוון ש-$1 \leq i \leq n$ אזי נעבור על כל המאורעות (הזרים), ונקבל את אגף שמאל כנדרש.