DISCRETE GEOMETRY - PREPRATION

1. נסח את משפט קטאודורי.
   א. תהי $P \subseteq R^d$ קבוצה של $n \geq d+1$ נקודות, אז אם $p \in CH(P)$ אזי p צירוף קמור של לכל היותר $d+1$ נקודות מ-P.
2. נסח את משפט רדון.
   א. תהא $S \subseteq R^d$ קבוצה קמורה של $d+2$ נקודות אזי קיימים שני קבוצות זרות $P, Q \subset S$ כך ש-
   $$CH(P) \cap CH(Q) \neq \varnothing$$
3. נסח את separation lemma.
   א. יהיו $P, Q \subseteq R^d$ קבוצות קמורות וזרות, אזי קיימים $n \in R^d, b \in R$ כך שמתקיים
   ב. $x \cdot n \geq b$ לכל $x \in P$
   ג. $x \cdot n \leq b$ לכל $x \in Q$
4. הגדר עומק של נקודה בקבוצה P
   א. מספר הנקודות המינימלי מ-P ש-halfspace שמכיל את הנקודה.
5. נסח את משפט ה-centerpoint.
   א. תהא $P \subseteq R^d$ קבוצה בגודל n אזי קיימת נקודה מעומק $n/(d+1)$.
6. הגדר מהי קבוצה במצב קמור
   א. קבוצה P במצב קמור אם אף נקודה אינה צירוף קמור של האחרות.
7. נסח את משפט הסוף הטוב
   א. בכל קבוצה של 5 נקודות במצב כללי יש 3 נקודות במצב קמור.
8. נסח את משפט ארדש-סקרש.
   א. לכל $k \in \mathbb{N}$ קיים $n \in \mathbb{N}$ כך שלכל קבוצה עם n נקודות במצב כללי מכילה k נקודות במצב קמור.
9. נסח את משפט רמזי.
   א. לכל $m, c, k \in \mathbb{N}$ קיים $n \in \mathbb{N}$ כך שאם נצבע את ה-m-יות של $[n]$ ב-c צבעים תהיה תת-קבוצה של k מהם מונוכרומטית.
10. הגדר k-hole.
    א. תהא P קבוצה. קבוצה של k נקודות במצב קמור שלא מכילה אף נקודה מ-P תיקרא k-$hole$.
11. הגדר את קבוצת הורטון.
    א. בסיס: הנקודה $H_0 = (0{,}0)$.
    ב. צעד: לוקחים עותק של H_{n-1} מקווצים אותו כך שציר ה-y מתכווץ ממש חזק ומסמינים אותו ב-L. לוקחים את L ומותחים את ציר ה-x כך שעכשיו האינדקסים של הנקודות בציר ה-x הם רק ערכיים זוגיים, מסמנים עותק זה ב-U. לבסוף שמים את L מתחת ממש ל-U.
12. הגדר $cup - 4$.
    א. קבוצה של 4 נקודות כך שהיחס בין השיפועים של הנקודות שלה עולה.
13. נסח את משפט ה-$cap - 4$.

Oran Danon

א. קבוצה שהיחס בין השיפועים של כל זוג נקודות עוקבות יורד.

14. מה נובע מהמשפט??

א. בקובצת הורטון מעל כל $cup - 4$ יש נקודה, ומתחת לכל $cap - 4$ יש נקודה.

15. הגדר מהי חלות?

א. נאמר שנקודה a חלה בישר ℓ אם $a \in \ell$.

16. נסח את משפט סמרדי-טרוטר.

א. בקבוצה עם n ו-m ישרים במצב כללי מספר החלויות המקסימלי הינו:
$$O\left((nm)^{2/3} + n + m\right)$$

17. נסח את ה-weak-crossing-lemma.

א. בגרף יש לפחות $e - 3v + 6$ חיתוכים.

18. נסח את ה-strong-crossing-lemma.

א. מספר החיתוכים בגרף הוא לפחות $\frac{n^3}{64m^2} - m = \Omega\left(\frac{n^3}{m^2}\right)$.

19. הגדר מה זה $H - polyhedron$.

א. חיתוך של חצאי מישורים.

20. הגדר מה זה $H - polytope$.

א. H-polyhedron חסום.

21. הגדר מה זה $V - polytope$.

א. צירוף קמור של קבוצה של נקודות.

22. מה הקשר בין $V - polytope$ ל-$H - polytope$?

א. אמ"מ

23. מהו המימד של polytope?

א. כמימד של ה-Affine-space שפורס אותו.

24. מה זה permutohedron?

א. ה-polytope שנוצר מכל הפרמוטציות על הקודקודים.

25. מהי face של polytope P?

א. חיתוך של hyperplane עם ה-polytope כך שה-polytope נמצא כולו באחד הצדדים של החצי מרחב. גם ה-polytope עצמו נחשב face.

26. הגדר simplex.

א. Polytope כך שאף נקודה לא בקמור של האחרות.

27. הגדר את הדואליות נקודה ו-hyperplane.

א. $\mathcal{D}(a) \coloneqq \left\{x \in R^d : \langle x, a\rangle = 1\right\}$, הדואליות של על מישור היא הנקודה המיוצגת ע"י ווקטור הנורמל של העל מישור.

28. הגדר את הדואליות של k-flat.

א. $K = CH(p_0, \dots, p_k) \Longleftrightarrow \mathcal{D}(K) = \left\{x \in R^d : \langle x, p_0\rangle, \dots, \langle x, p_k\rangle = 1\right\}$.

29. אפיין את הקבוצה $(S^*)^*$.

א. הסגור של הקבוצה $CH\left(S \cup \{0\}\right)$.

30. מה נובע מהאפיון?

א. תשובה. אם S היא קמורה סגורה ומכילה את 0 אז $S = (S^*)^*$.

31. הגדר מתי polytope הוא simplicial.

א. אם כל facet שלו הוא simplex.

32. הגדר מתי polytope הוא simple.

א. אם כל נקודה שלו שייכת ל-d facets.

33. מה הקשר בין simplicial ו-simple.

א. הם מוסגים דואלים, כלומר אם polytope אחד הוא simple אז הדואלי שלו הוא simple.

34. מהו **Asymptotic upper bound theorem**.

35. A d-dimenstional n-vertex polytope has at most $O\left(n^{\lfloor n/2 \rfloor}\right)$ **facets**.

36. הגדר מהי עקומה קמורה.

Definition: A ***convex curve*** in $\mathbb{R}^d$ is a curve that intersects every hyperplane in at most d points.

א. עקומה קמורה היא עקומה שנחתכת עם כל פוליטופ במימד d בלכל היותר d נקודות.

37. מהו cyclic polytope?

א. הצירוף הקמור של n נקודות מעקומה קמורה.

38. מהו מערך פשוט?

א. מערך שהחיתוך של כל k על מישורים הוא $(d-k)$-flat, לכל $1 \le k \le d+1$.

39. מהי רמה של נקודה?

א. מעבירים קרן כלפי מטה מהנקודה וסופרים את מספר הישרים שחוצים את הקרן.

40. נסח את משפט קלרקסון.

א. במערך פשוט של n ישרים מספר הקודקודים שמרמה לכל היותר k הוא $O(nk)$.

41. הוכח את משפט קלרקסון.

42. הראה שמשפט קלרקסון הוא הדוק.

43. הגדר מהי סיבוכיות של איזור?

א. מספר הצלעות או הקודקודים שבאיזור.

44. מהו מספר התאים של איזור?

א. באיזור של n ישרים כחולים וישר אחד אדום יש $n+1$ תאים.

45. תן חסם טריוויאלי לסיבוכיות של איזור.

א. כל איזור מכיל לכל היותר n נקודות אז סה"כ $O(n^2)$.

ב. $\binom{n}{2} = O(n^2)$, שכן מספר החיתוכים של n ישרים הוא לכל היותר $\binom{n}{2}$.

46. נסח את ה-zone theorem.

א. בהינתן n ישרים כחולים וישר אחד כחול הסיבוכיות של האיזור המוגדר ע"י הישר האדום היא $O(n)$.

47. מהו סידור של פסאדו-ישרים.

א. קבוצה של עקומות מונוטוניות ורציפות שמתחילות באינטרוול $(-\infty, \infty)$.

48. מתי סידור ישרים הוא איזומורפי.

א. כאשר סדר החיתוכים נשמר.

49. מהי מתיחה של ישרים.

א. קבוצה של פסאדו-ישרים תיקרא מתיחה אם קיימת קבוצת ישרים כך שהיא איזומורפית לה.

50. האם כל פסאדו-ישרים מתחים.

א. לא, Roger הראה באמצעות משפט פפוס קיום של קבוצה של 9 פסאדו ישרים שאינה מתיחה.

ב. יש משפט שאומר שכל 8 פסאדו ישרים מתיחים.

51. תן חסם תחתון על מספר הסידוקים הפשוטים של n פסאדו-ישריים. חלק ב'

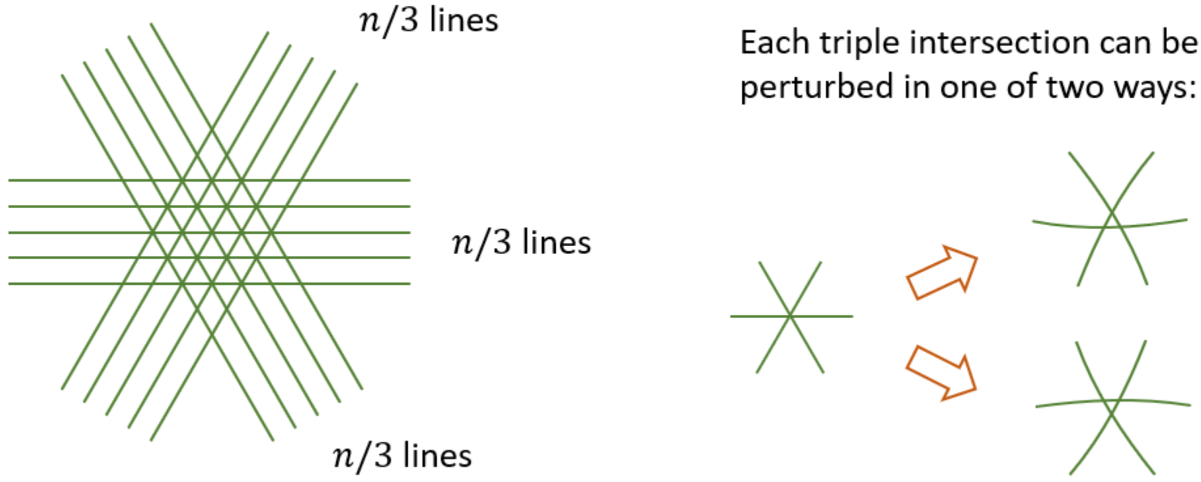
א. $2^{\Omega(n^2)}$.

ב. לוקחים שלוש קבוצות של $n/3$ ישרים מקבילים כך שמספר החיתוכים סה"כ הוא $(n/3)^2$, ואז יש שני דרכים להפוך כל שלשה לשלשה של פסאדו-ישרים, ולכן נקבל $2^{\Omega(n^2)}$.

Proof:

$\Theta(n^2)$ triple intersections

Each triple intersection can be perturbed in one of two ways:



52. מהי מעטפת תחתונה.

א. סדרת הישרים שבהם יש נקודות המינימום כשמסתכלים משמאל לימין.

53. מהו החסם העליון על סדרת מעטפת תחתונה.

א. $\Theta\big(n\alpha(n)\big)$, כאשר $\alpha(\cdot)$ היא פונקציית אקרמן ההפוכה.

54. נסח את משפט Tverberg.

א. תהא S קבוצה של $(d+1)(r-1)+1$ נקודות אזי אפשר לחלק אותה ל-r קבוצות $A_1, \dots, A_r$ כך ש-$conv(A_1) \cap \dots \cap conv(A_r) \neq \emptyset$.

55. נסח את משפט קטאודורי הצבעוני.

א. יהיו $P_1, \dots, P_{d+1} \subseteq R^d$ קבוצות של נקודות כך ש-$q \in conv(P_i)$ לכל $i \in [d+1]$. אזי ניתן לבחור איבר מכל קבוצה $p_i \in P_i$ כך ש-$q \in conv(p_1, \dots, p_{d+1})$.

56. הסבר את המספר של משפט טוורברג.

א. נסתכל על ה-Affine-hull ונרצה שה-codim של החיתוך של כולם יהיה d כי ה-codim של נקודה הוא d. נזכיר שה-codim זה $d - \dim(\cdot)$. ולכן ה-$codim$ של k נקודות הוא $d-(k-1) = d-k+1$, ולכן נקבל:

$$d = \sum_{i=1}^{r}(d - k_i + 1) = (d+1)\cdot r - \sum_{i=1}^{r} k_i \Longrightarrow \sum_{i=1}^{r} k_i = (d+1)(r-1)+1$$

57.נסח את ה-First Slection Lemma.

א. יש נקודה שמכולת ב-α-חלק מכל ה-simplices.

58.מהו החסם העליון על ה-First selection Lemma?

א. $\frac{n^{d+1}}{(d+1)^{d+1}}$

59.מהו ישר חוצה?

א. ישר שעובר דרך שתי נקודות כך ומחלק את הקבוצה כך שבכל חצי מישור ישר חצי מהאברים הנותרים.

60.מהי קבוצה חוצה?

א. Half-set של S היא תת-קבוצה מהצורה $T = S \cap H$ כאשר H הוא חצי מישור כך שמתקיים $|T| = n/2$.

61. ציין חסם עליון על מספר הישרים החוצים.

א. ע"פ Dey מתקיים שבקוצה של n נקודות יש לכל היותר $O(n^{4/3})$ ישרים חוצים.

62.ציין חסם תחתון.

א. בנייה של Toth מבטיחה שלכל $n \in \mathbb{N}$ יש קבוצה של n נקודות עם לפחות $n \cdot e^{\Omega(\sqrt{\log n})}$ ישרים חוצים.

63.**ציין את ה-Alternation Lemma.**

א. תהא P קבוצה של n נקודות במצב כללי, ויהי $p \in P$, אזי p שייך למספר אי זוגי של ישרים חוצים. ובנוסף, כאשר ישר ℓ שלא עובר דרך אף נקודה מ-p משלים סיבוב שלם סביב p הוא פוגש את הישרים החוצים אחד מקדימה אחד מאחורה באלטרנציה.

64.**הוכח אותה**

א. כל נקודה עוברת לצד הימני רק מהצד מהחלק העליון ושמאלה רק מהחלק התחתון. היות ויש מספר אי-זוגי של נקודות אזי בהכרח בצד אחד יהיו יותר נקודות מהצד השני. בנוסף נשים לב שכאשר הישר מתלכד עם ה-Halving Edge אז יש איזון בין שני הצדדים. נניח בה"כ שבהתחלה יש יותר נקודות בצד ימין מצד שמאל, כל עוד לא הגענו לישר חוצה יש עדיין יותר נקודות בצד שמאל מצד ימין ולכן במעבר לישר חוצה נפגוש את הנקודה השנייה של הישר החוצה עם החלק העליון כאשר ניצא מהישר החוצה אז יהיו יותר נקודות בצד שמאל ושוב עד שלא נפגוש בישר חוצה לא יהיו יותר נקודות בצד שמאל, במעבר לנקודה נוספת של ישר חוצה היא תהיה חייבת לעבור שמאלה ולכן מהחלק התחתון על מנת ליצור איזון, וככה התהליך ימשך באלטרנציה. בנוסף נקודה חוצה חייבת להופיע שכן לאחר 180 מעלות עברנו מיותר נקודות בצד ימין ליותר נקודות בצד שמאל ולכן היה חייב להיות ישר חוצה.

65.חסם עליון על מספר ה-Halving Facets.

א. לכל $d \in \mathbb{N}$ קיים $c_d > 0$ כך שלכל קבוצה של n נקודות ב-R^d יש לכל היותר $O(n^{d-c_d})$ Halving Facets, כאשר $c_d = 1/(2d)^d$.

66.Second Selection Lemma.

א. עבור קבוצה S של n נקודות ב-R^d ומשפחה $\mathcal{F}$ של $\alpha \cdot \binom{n}{d+1}$ סימלקסים קיימת נקודה שמוכלת בלפחות $c_d\alpha^{s_d}\binom{n}{d+1}$ מהסיפלקסים של $\mathcal{F}$.

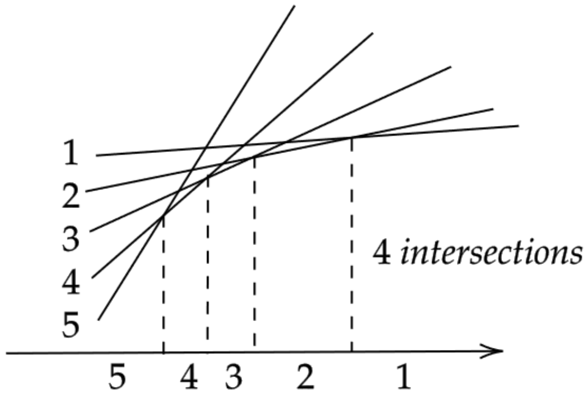
67.מה החסם העליון על מספר המשולשים החוצים.

א. עבור $S \subset R^3$ של n נקודות במצב כללי, כאשר n אי-זוגי, קיימים לכל היותר $O(n^{2.5})$ משולשים חוצים.

שאלה 3

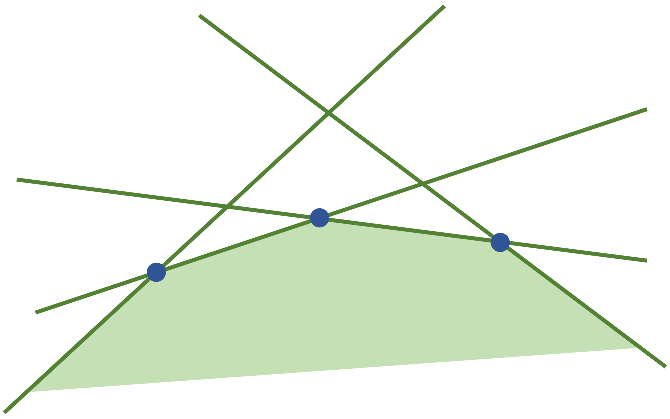
סעיף א'

באיור מתוארת דוגמה כאשר $m = 5$ ההכללה ברורה.

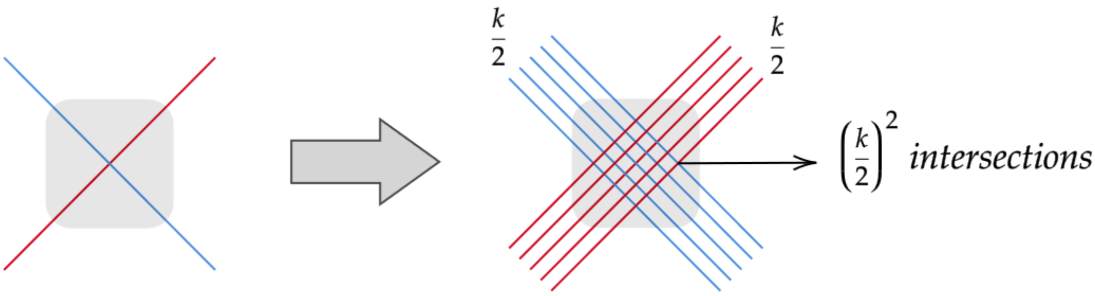


סעיף ב'

ניזכר בקונפיגורציה שנתנה לנו $n-1$ נקודות ברמה 0.



כעת ניצור אותה קונפיגורציה רק עם $n/2k$ ישרים ברמה התחתונה ביותר. כעת נחליף כל ישר ב-$k/2$ ישרים מקבילים שצמודים לו, כפי שמתואר באיור:

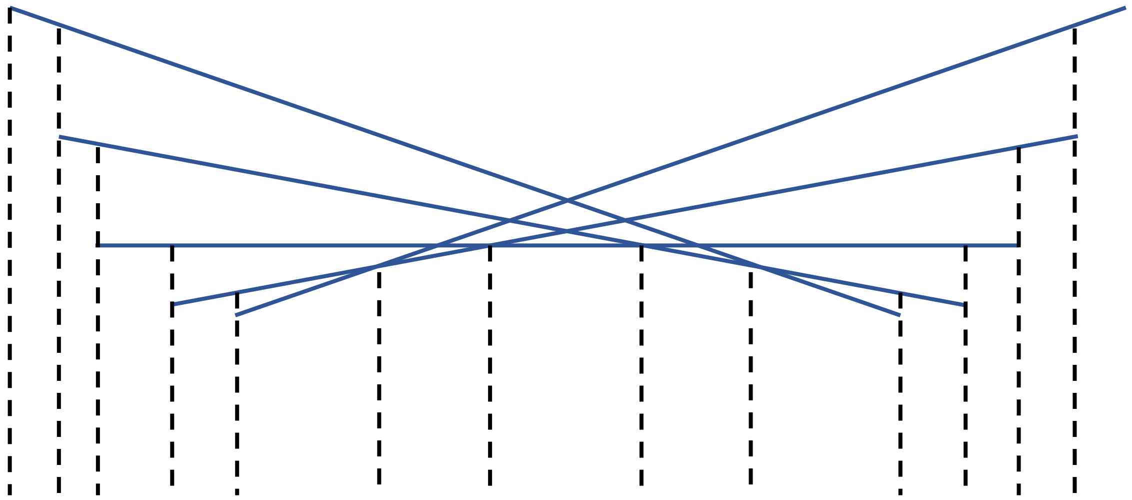


ונשים לב שהרמה של כל קודקוד כזה היא לכל היותר $k/2+k/2=k$. היות וכל חיתוך מניב $(k/2)^2$ חיתוכים ויש $\Theta\left(\frac{n}{k}\right)$ חיתוכים אזי סה"כ יש $(2n/k)\cdot(k/2)=n$ ישרים וכן

$$\Omega\left(\left(\frac{n}{2k}\right)\cdot\left(\frac{k}{2}\right)^2\right)=\Omega(2nk)=\Omega(nk)$$

נקודות ברמה לכל היותר k, כנדרש.

שאלה 4



שאלה 5