גאומטריה דיסקרטית

שיעור ראשון

הקדמה

הגדרה (תת-מרחב אפייני). יהי L תת-מרחב של $\mathbb{R}^d$ ויהי $b \in \mathbb{R}^d$ אזי $L + b \coloneqq \{x + b : x \in L\}$ הינו תת-מרחב אפייני של $\mathbb{R}^d$.

הגדרה (Affine Hull). ה-Affine hull של קבוצה $X \subseteq \mathbb{R}^d$ הוא החיתוך של כל התת-מרחבים האפיינים של X, אנחנו נסמן ב-$\mathbf{aff}\, X$ את ה-Affine Hull של X.

הגדרה (צירוף אפייני). צירוף אפייני של הנקודות $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^d$ הוא ביטוי מהצורה

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i, \qquad where \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1 \tag{1}$$

משפט אפיון ל-Affine Hull. $\mathbf{aff}\, X$ היא קבוצת כל הצירופים האפיינים של נקודות של X.

$$\mathbf{aff}\, X = \left\{ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i : k \in \mathbb{Z}^+, x_i \in X, \lambda_i \in \mathbb{R}, \sum_{i} \lambda_i = 1 \right\}$$

הגדרה (תלות אפיינית). קבוצה של נקודות $p_1, \dots, p_n \in \mathbb{R}^d$ תיקרא תלויה אפינית אם אחד מהם הוא צירוף אפייני של האחרים.

הגדרה (תלות אפיינית). נאמר ש-$a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^d$ תלויים אפיינית אם קיימים סקלרים $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ כך שלא כולם אפס ומתקיים:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i = 0 \qquad and \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 0 \tag{2}$$

הגדרה (קטע). עבור שתי נקודות $p, q \in \mathbb{R}^d$ נגדיר את הקטע הסגור $pq \coloneqq \{\lambda p + (1-\lambda) q : 0 \le \lambda \le 1\}$.

הגדרה (קבוצה קמורה). קבוצה $C \subseteq \mathbb{R}^d$ תיקרא קמורה אם $pq \subseteq C$ לכל שני נקודות $p, q \in C$.

הגדרה (צירוף קמור). עבור $p_1, \dots, p_k \in \mathbb{R}^d$ נגדיר את הצירוף הקמור של $p_1, \dots, p_k$ ע"י

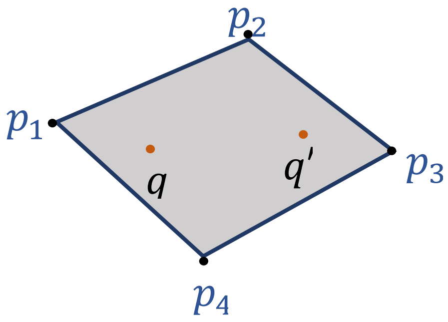
$$\mathbf{conv}\{p_1, \dots, p_k\} \coloneqq \left\{ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i p_i : \lambda_1, \dots, \lambda_k \ge 0 \text{ and } \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1 \right\}$$

הגדרה (קמור). הקמור של $C \subseteq \mathbb{R}^d$ היא קבוצת כל הצירופים הקמורים של נקודות של C.

משפט. תהא $C \subseteq \mathbb{R}^d$ אזי $\mathbf{conv}\, C$ היא הקבוצה הקמורה הקטנה ביותר שמכילה את C.

משפט קרטאודורי (Carathéodory's theorem)

יהי $P \subseteq \mathbb{R}^d$ ויהי $q \in CH(P)$ אזי q הוא צירוף קמור של לכל היותר $d+1$ נקודות מ-P.



לדוגמה בציור משמאל ניתן לראות כי $q \in CH(p_1, p_2, p_4)$
וכן $q' \in CH(p_2, p_3, p_4)$.

הוכחה: נניח בשלילה שהטענה אינה נכונה כלומר קיימים $k \geq d+2$ נקודות $p_1, \dots, p_k \in P$ וקבועים $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ כך שמתקיים:

$$q = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i p_i \text{ and } \sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1 \text{ and } \alpha_1, \dots, \alpha_k \geq 0$$

בתרגיל הבית הוכחנו כי כל $d+2$ נקודות ב-$\mathbb{R}^d$ הם תלויות אפינית, כלומר קיימים קבועים $\beta_1, \dots, \beta_k \in \mathbb{R}$ לא כולם 0, כך שמתקיים

$$\sum_{i=1}^{k} \beta_i p_i = 0 \ \ and \ \ \sum_{i=1}^{k} \beta_i = 0$$

נכפיל את הסכום השמאלי ב-$\gamma \in \mathbb{R}$ ונחבר את הסכום העליון והשני ונקבל:

$$q = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i p_i + \gamma \left(\sum_{i=1}^{k} \beta_i p_i \right) = \sum_{i=1}^{k} (\alpha_i + \gamma \beta_i) p_i$$

אנו נרצה לבחור γ כך שהצירוף ישאר צירוף קמור וגם אחד מה-p_i-ים יתבטל, ואז נקבל צירוף קמור של $k-1$ נקודות, כנדרש. היות ו-$\sum_{i=1}^{k} \beta_i = 0$ אזי נוכל לבחור $\beta_j > 0$ כך ש-$\gamma = \alpha_j / \beta_j$ הקטן ביותר ואז יתקיים שהמקדם של p_j מתאפס. נותר להראות ש-q הוא צירוף קמור של $k-1$ נקודות, תחילה נשים לב ש-$\alpha_i + \gamma \beta_i \geq 0$ לכל $i \in [k]$ שכן עבור $\beta_\ell > 0$ מתקיים

$$\alpha_\ell + \gamma \beta_\ell = \alpha_\ell - \alpha_j \beta_\ell / \beta_j = \beta_\ell \cdot \underbrace{\left(\frac{\alpha_\ell}{\beta_\ell} - \frac{\alpha_j}{\beta_j} \right)}_{\geq 0} \geq 0$$

כעת נותר להראות שסכום המקדמים הוא 1,

$$\sum_{i \neq j} (\alpha_i + \gamma \beta_i) = \sum_{i=1}^{k} (\alpha_i + \gamma \beta_i) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i + \gamma \sum_{i=1}^{k} \beta_i = 1 + \gamma \cdot 0 = 1$$

כאשר השוויון הראשון נובע מהבחירה של γ שכן $\alpha_j + \gamma \beta_j = 0$, כנדרש.

∎

טופולוגיה

הגדרה (קבוצה קומפקטית). קבוצה סגורה וחסומה.

הגדרה (קבוצה סגורה). קבוצה שמכילה את כל נקודות הגבול שלה.

הגדרה (נקודת גבול). $p \in S$ תיקרא נקודת גבול אם קיים סדרה $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ כך ש-$p \neq q_i \in S$ לכל $i \in \mathbb{N}$, עבורה $\lim_{n \to \infty} q_n = p$.

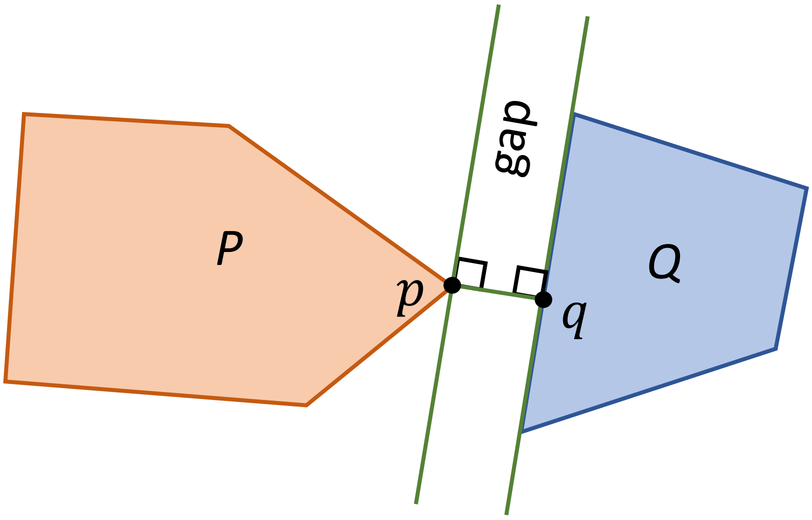
הגדרה (נקודות גבול). $S \ni p$ תיקרא נקודה אם לכל $\varepsilon > 0$ קיימת נקודה $p \neq q \in S$ כך שמתקיים: $\|p-q\| < \varepsilon$.

משפט: $S \subseteq \mathbb{R}$ היא קבוצה סגורה **אם ורק אם** הגבול של כל סדרה מתכנסת של איברים מ-S שייך ל-S.

הגדרה (קבוצה חסומה). $A \subseteq \mathbb{R}^d$ תיקרא קבוצה חסומה אם קיים $r > 0$ כך ש-$\|u-v\| \le r$ לכל $u, v \in A$.

משפט (The weak separating hyperplane theorem).
יהיו $P, Q \subseteq \mathbb{R}^d$ קבוצות קמורות וזרות, אזי קיימים $n \in \mathbb{R}^d, b \in \mathbb{R}$ כך שמתקיימים: 1. $\langle x, n \rangle \ge b$ לכל $x \in Q$.   2. $\langle x, n \rangle \le b$ לכל $x \in P$.

משפט (The strong separating hyperplane theorem).
יהיו $P, Q \subseteq \mathbb{R}^d$ קבוצות קומפקטיות, קמורות וזרות. אזי קיימים $n \in \mathbb{R}^d, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ כך שמתקיימים: 1. $\langle x, n \rangle \ge b_1$ לכל $x \in Q$.   2. $\langle x, n \rangle \le b_2$ לכל $x \in P$.



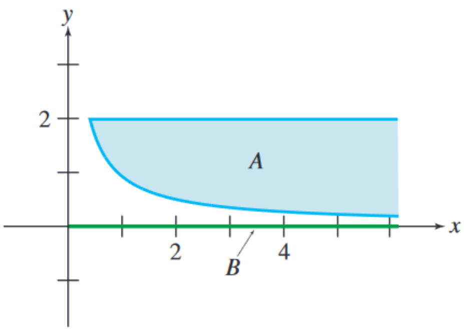
תרגיל. הראו שקומפקטיות היא תנאי הכרחי להפרדה חזקה.

הדרכה. תנו דוגמה נגדית של קבוצות $P, Q \subseteq \mathbb{R}^d$ קמורות וזרות שעבורם לא מתקיימת הפרדה חזקה.

פתרון. יהיו

$$A = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} : x \ge \frac{1}{2} \text{ and } \frac{1}{x} \le y \le 2 \right\} \quad \text{and} \quad B = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} : x \ge 0 \text{ and } y = 0 \right\}$$

היות ו-$\lim_{n\to\infty} 1/x = 0$ נובע שאף ישר לא יפריד את A מ-B.



Theorem 4.15 (Separation Theorem). *Any two compact convex sets* $C, D \subset \mathbb{R}^d$ *with* $C \cap D = \emptyset$ *can be separated strictly by a hyperplane, that is, there exists a hyperplane* h *such that* C *and* D *lie in the opposite open halfspaces bounded by* h.

Proof. Consider the distance function $\delta : C \times D \to \mathbb{R}$ with $(c, d) \mapsto \|c - d\|$. Since $C \times D$ is compact and δ is continuous and strictly bounded from below by 0, the function δ attains its minimum at some point $(c_0, d_0) \in C \times D$ with $\delta(c_0, d_0) > 0$. Let h be the hyperplane perpendicular to the line segment $\overline{c_0 d_0}$ and passing through the midpoint of c_0 and d_0. (See Figure 4.2.)

If there was a point, say, c' in $C \cap h$, then by convexity of C the whole line segment $\overline{c_o c'}$ lies in C and some point along this segment is closer to d_0 than is c_0, in contradiction to the choice of c_0. The figure shown to the right depicts the situation in $\mathbb{R}^2$. If, say, C has points on both sides of h, then by convexity of C it has also a point on h, but we just saw that there is no such point. Therefore, C and D must lie in different open halfspaces bounded by h. $\square$

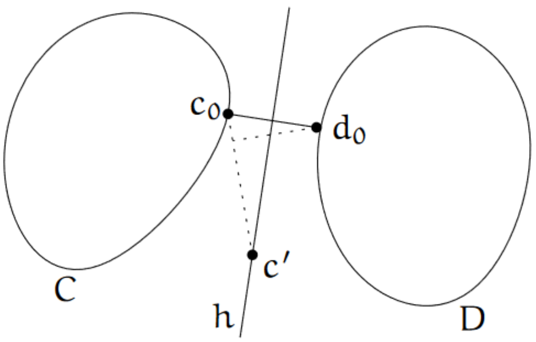
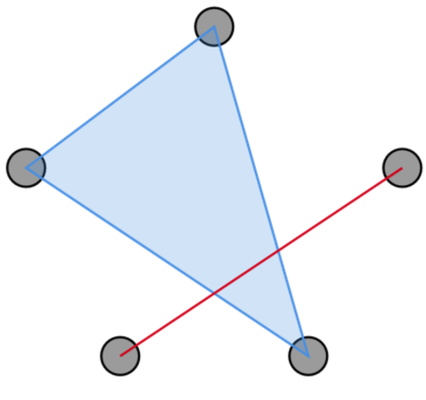
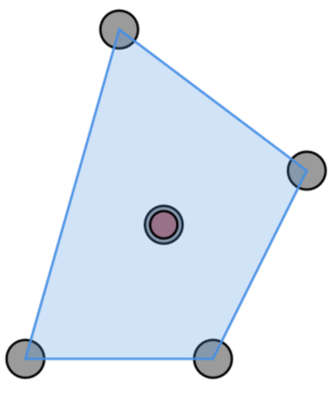


Figure 4.2: *The disjoint compact convex sets* C *and* D *have a separating hyperplane* h.

משפט רדון (Radon's Theorem)
תהי $S \subseteq \mathbb{R}^d$ כך ש-$|S| = d + 2$ אזי קיימת חלוקה של S לשני תתי-קבוצות זרות $S_1, S_2 \subset S$ כך שמתקיים $\mathbf{conv}\,(S_1) \cap \mathbf{conv}\,(S_2) \neq \emptyset$

Exercise 4: Make all possible types of examples in $\mathbb{R}^3$





הוכחת משפט רדון. היות ו-S היא קבוצה של $d+2$ נקודות ב-$\mathbb{R}^d$ אזי הנקודות תלויות אפינית, כלומר
$$\sum_{i=1}^{d+2} \alpha_i x_i = 0 \; and \; \sum_{i=1}^{d+2} \alpha_i = 0$$
נעביר את כל המקדמים השליליים לצד השני ונקבל

$$\sum_{i:\alpha_i \geq 0} \alpha_i = -\sum_{i:\alpha_i<0} \alpha_i := k \tag{3}$$
$$\sum_{i:\alpha_i \geq 0} \alpha_i \, x_i = -\sum_{i:\,\alpha_i<0} \alpha_i x_i \tag{4}$$

נזכור שאנחנו רוצים לבנות צירוף קמור ולכן נחלק את שני האגפים של משוואה (3) ב-k על מנת לקבל שסכום המקדמים הוא 1.
$$\sum_{i:\alpha_i \geq 0} \frac{\alpha_i}{k} \cdot x_i = \sum_{i:\,\alpha_i<0} \frac{(-\alpha_i)}{k} \cdot x_i := \boldsymbol{p}$$
כעת נבחין שרשמנו את אותה נקודה $\boldsymbol{p}$ בתור צירוף קמור של שני קבוצות זרות.

∎

רעיון ההוכחה.

1. $d+2$ נקודות תמיד תלויות אפינית ב-$\mathbb{R}^d$.
2. נעביר אגפים כך שמקדמים חיובים בצד אחד ומקדמים שליליים בצד השני.
3. נחלק בסכום המקדמים.
4. נקבל צירוף קמור של אותה נקודה באמצעות שני קבוצות של נקודות זרות.

∎

משפט הֵיילי (Helly's theorem)
יהיו $C_1, \dots, C_n$ קבוצות קמורות ב-$\mathbb{R}^d$ כאשר $n \geq d+1$ והחיתוך של כל $d+1$ מהם לא ריק אזי החיתוך של כולם לא ריק.

בעצם משפט Helly אומר שאם החיתוך של כל הקבוצות הוא ריק אזי יש עד באחד החיתוכים בגודל $d+1$.

הוכחה באינדוקציה על $\boldsymbol{n}$ (שימוש במשפט רדון).

בסיס.

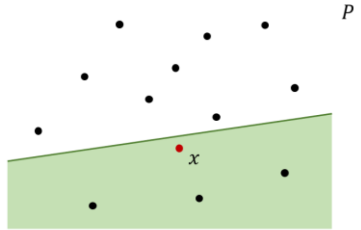
- עבור $n=d+1$, ה-premise הוא בדיוק כמו ה-assertion ולכן הטענה טריוויאלית
- עבור $n=d+2$. נגדיר $a_i \in \cap_{j \neq i} C_j$ כאשר $1 \leq i \leq n$, ונשים לב שנוכל להפעיל את משפט רדון על הקבוצה $A=\{a_1, \dots, a_n\}$, שכן $n \geq d+2$ וגם $a_i \in \mathbb{R}^d$ לכל $i \in [n]$. ע"פ משפט רדון קיימות שתי קבוצות זרות $A_1, A_2 \subset A$ כך שמתקיים:
$$\mathbf{conv}\,(A_1) \cap \mathbf{conv}\,(A_2) \neq \emptyset$$
לכן נוכל לבחור $a \in \mathbf{conv}\,(A_1) \cap \mathbf{conv}\,(A_2)$. יהי $i \in \{1, \dots, n\}$ כלשהו, ונראה ש-$a \in C_i$, מכך ינבע ש-$a \in \cap_i C_i$. נגדיר את $I(S) := \{i: a_i \in S\}$ – קבוצת האינדקסים של האיברים ב-S. ונשים לב שאחד מהבאים מתקיים:

- $i \in I(A_1)$ אז היות ו-A_1 ו-A_2 זרים אזי $i \notin I(A_2)$ ולכן האיברים ב-A_2 נמצאים כולם ב-C_i, מכאן נובע $\mathbf{conv}\,(A_2) \subseteq C_i$.
- $i \in I(A_2)$ אז $i \notin I(A_1)$ ולכן $\mathbf{conv}\,(A_1) \subseteq C_i$, כנדרש.

- **צעד האינדוקציה.** נניח שהטענה נכונה עבור $n \geq d+2$ ונוכיח עבור $n+1$. יהיו $C_1, \dots C_{n+1}$ קבוצות קמורות ב-$\mathbb{R}^d$ שהחיתוך של כל $d+1$ מהם הוא לא ריק, ונוכיח שהחיתוך של כולם לא ריק. נגדיר $C_n' := C_n \cap C_{n+1}$, ונסתכל על האוסף $C_1, \dots, C_n'$. נותר להראות שכל $d+1$ מהם נחתכות ומה"א נסיק כי
$$\left(\cap_{i=1}^{n-1} C_i\right) \cap C_n' = \cap_{i=1}^{n+1} C_i \neq \emptyset .$$
אם החיתוך לא כולל את C_n' הטענה נובעת מיידית מההנחה, אחרת יש חיתוך של $d+2$ קבוצות $C_{i_1}, \dots, C_{i_{d+2}}$. היות ואנחנו יודעים שכל $d+1$ מתוכם בעלי חיתוך לא ריק (ע"פ ההנחה), נובע מבסיס האינדוקציה שהחיתוך של כולם לא ריק, כנדרש.

∎

הגדרה (עומק של נקודה). תהי $P \subseteq \mathbb{R}^d$ קבוצה סופית של נקודות ותהי $x \in \mathbb{R}^d$ נקודה (לא בהכרח ב-P). העומק של x ב-P הוא מספר הנקודות המינימלי ב-P שמוכלות בחצי מרחב שמכיל את x.



באיור משמאל העומק של x הוא 3.

משפט נקודת המרכז (Centerpoint Theorem)

תהי $P \subseteq \mathbb{R}^d$ קבוצה בגודל n אזי קיימת נקודה $x \in \mathbb{R}^d$ כך שהעומק שלה הוא לפחות $n/(d+1)$.

הוכחה. תהא $\mathcal{A} := \{A_1, \dots, A_m\}$ אוסף כל התתי-קבוצות של P שנוצרו ע"י חיתוך של חצי מרחב עם P ומכילות יותר מ-$\frac{dn}{d+1}$ נקודות מ-P. מספיק להוכיח כי
$$\mathfrak{C} := \bigcap_{i=1}^{m} \mathbf{conv}\,(A_i) \neq \emptyset .$$
בפרט כל נקודה $c \in \mathfrak{C}$ תהיה נקודה שעומקה ב-P הוא לפחות $n/(d+1)$. שכן אחרת בקבוצה המשלימה יש
$$n - \frac{n}{d+1} = \frac{dn}{d+1}$$
נקודות, אבל אז קיים $i \in [m]$ כך ש-$c \in A_\iota$, בסתירה להנחה ש-$c \in A_i$.
אנחנו נראה שהחיתוך של כל $d+1$ קבוצות מ-$\mathcal{A}$ אינו ריק וע"פ משפט היילי ינבע שכל החיתוך אינו ריק. נניח בשלילה שקיימות $d+1$ קבוצות ב-$\mathcal{A}$ כך שהחיתוך שלהם ריק, כלומר נקודה כלשהי מ-P מופיעה לכל היותר ב-d מהקבוצות הנ"ל, לפיכך סה"כ יתכנו לכל היותר dn נקודות מ-P. מצד שני, כל קבוצה מהקבוצות הנ"ל מכילה יותר מ- $\frac{dn}{d+1}$ נקודות מ-P ויש $d+1$ קבוצות, לכן יש יותר מ-dn נקודות מ-P, סתירה שכן אין מספר שגדול מ-dn וקטן מ-dn בעת ובעונה אחת, מכאן שהחיתוך של כל $d+1$ קבוצות אינו ריק ולכן ע"פ משפט היילי החיתוך של כולם אינו ריק, כנדרש.

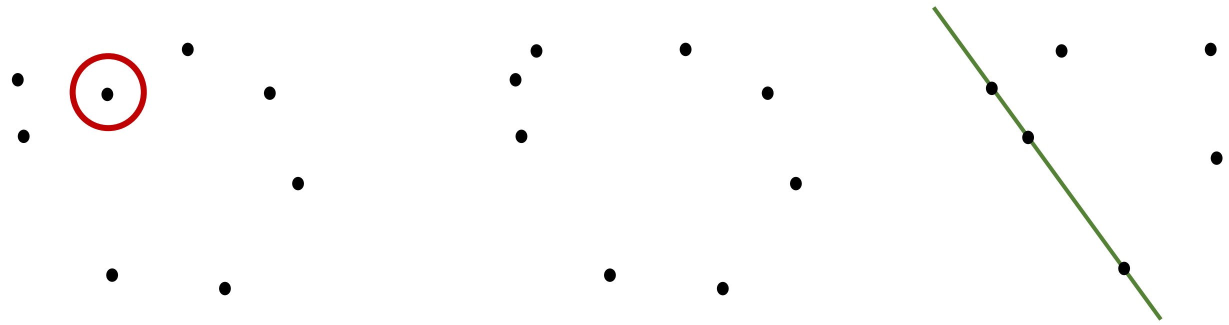
∎

שיעור 3

הגדרה (נקודות במצב קמור)

קבוצה של נקודות במצב קמור אם אף נקודה אינה צרוף קמור של האחרות.

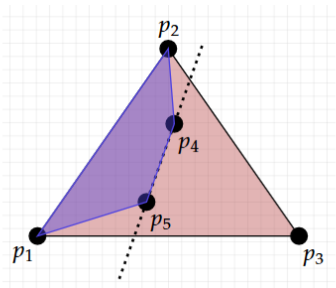
דוגמה:



איור 1. נשים לב שהנקודות באיור השמאלי אינם במצב קמור כיוון שהנקודה המסומנת היא צירוף קמור של האחרות. האיור האמצעי אכן מתאר מצב של נקודות במצב קמור. באיור הימני ניתן לראות כי ישנה נקודה בקטע בין שני נקודות ולכן היא צירוף קמור שלהם. דהיינו יש לשים לב גם לשפה של הקמור.

אנחנו נדון בשאלה מה מספר הנקודות המינימלי שיבטיח קיום של k נקודות במצב קמור. עבור $k = 3$ התשובה היא אינסוף היות שנוכל לשים אינסוף נקודות על ישר. לפיכך, אנחנו נגביל את עצמנו לנקודות כך שאין שלוש נקודות על אותו ישר ונקרא להם נקודות במצב כללי. עבור $k = 3$ נקודות במצב כללי מספיק 3 נקודות.

משפט הסוף הטוב. כל 5 נקודות במצב כללי מגדירה קבוצה מגודל 4 במצב קמור.



הוכחה (משפט הסוף הטוב). נניח ש-5 נקודות במצב כללי, ונשקול כמה נקודות מספיקות בשביל להגדיר את הקמור של הקבוצה. במקרה בו 4 או 5 נקודות יוצרים את הקמור סיימנו, כיוון שהן מגדירות לפחות 4 נקודות במצב קמור. נניח כעת כי 3 נקודות יוצרות את הקמור ונשקול את הישר שעובר דרך שני הנקודות שלא יצרו את הקמור. הישר הנ"ל חוצה את המרחב כך ששתי נקודות בצד אחד של הישר. ארבעת הנקודות הנ"ל (2 שהגיעו מהישר ו-2 מהקמור) יוצרים קבוצה במצב קמור בגודל 4 כנדרש.

נרצה להכליל את הטענה באופן הבא:

משפט (ארדש – סקרש).

לכל $k \in \mathbb{N}$ קיים $n \in \mathbb{N}$ כך שבכל קבוצה של n נקודות במצב כללי תהיה קבוצה של k נקודות במצב קמור.

בשביל להוכיח את המשפט הזה אנחנו נשתמש במשפט רמזי, שהוא חלק מתורה שלמה שנקראת תורת רמזי.

משפט רמזי.

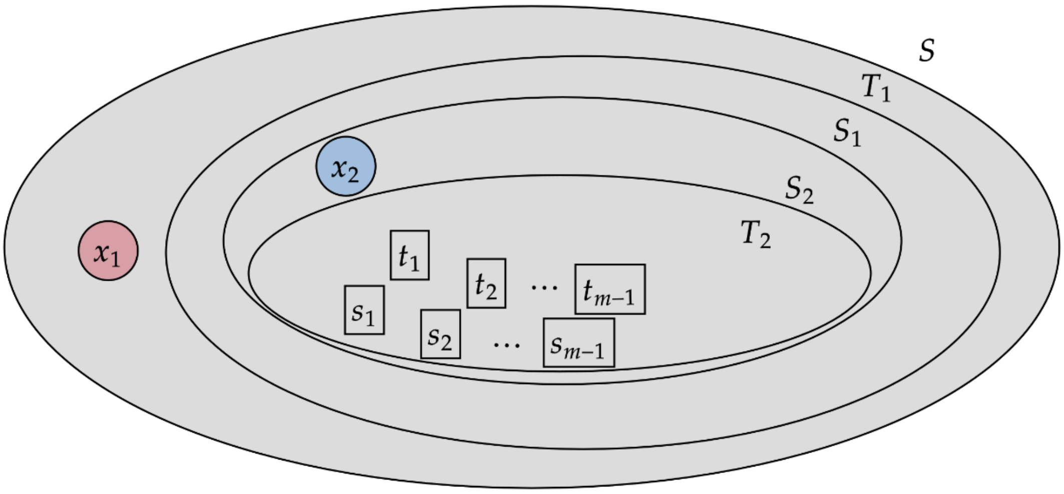
לכל $m, c, k \in \mathbb{N}$ קיים $n \in \mathbb{N}$ כך שבהינתן קבוצה בגודל n וצביעה של m-יות באמצעות c צבעים, אזי תהיה תת-קבוצה (של m-יות) בגודל k מונוכרומטית (שצבועה באותו צבע).

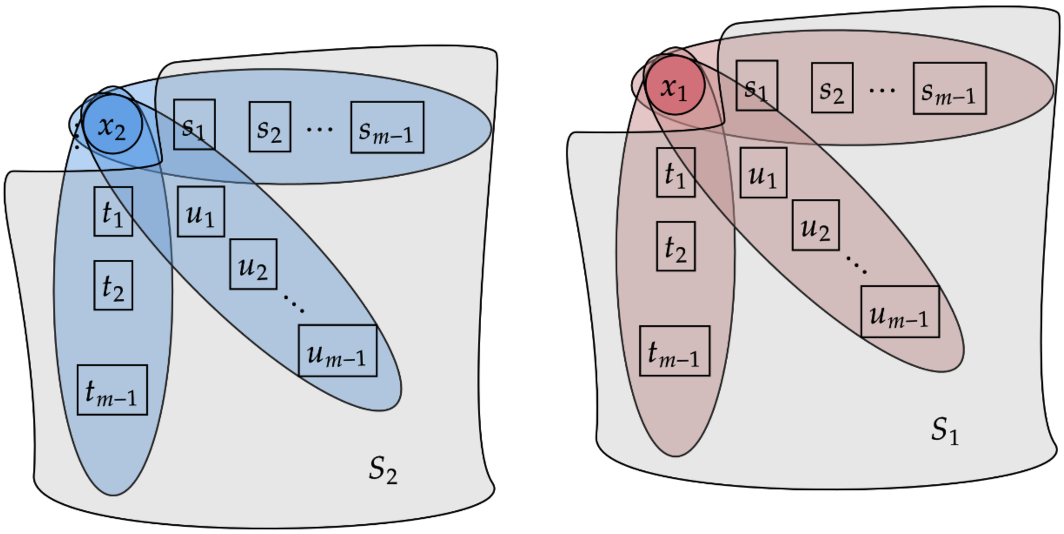
הוכחת משפט רמזי. ההוכחה באינדוקציה על m.

בסיס. עבור $m = 1$ ישנם $\lceil n/c \rceil$ קודקודים שצבועים באותו צבע, לכן נבחר n כך שמתקיים $\lceil n/c \rceil > k$.

צעד. תהא S קבוצה בגודל n גדולה מספיק, ותהא $\varphi: S^m \to [c]$ צביעה ב-c צבעים של m-יות מ-S. יהי $x_1 \in S$, ויהי $T_1 = S \setminus \{x_1\}$. נגדיר את הצביעה φ_1 של $m-1$-יות באופן הבא: עבור כל $\mathbf{s_1} := (s_1, \dots, s_{m-1}) \in T_1^{m-1}$, נגדיר[1] $\varphi_1(\mathbf{s_1}) = \varphi(s_1, \dots, s_{m-1}, x_1)$.
ע"פ הנחת האינדוקציה קיימת תת-קבוצה $S_2 \subseteq T_1$ שכל ה-$m-1$-יות עם אותו צבע תחת $\varphi_1(\cdot)$, נגיד אדום. ע"פ הבחירה של n נוכל להבטיח כי גם S_2 גדולה מספיק. כעת עבור $x_2 \in S_2$ נגדיר את $T_2 = S_2 \setminus \{x_2\}$, ונגדיר את φ_2 באופן הבא: עבור כל $\mathbf{s_2} := (s_1, \dots, s_{m-1}) \in T_2^{m-1}$, נגדיר $\varphi_2(\mathbf{s_2}) = \varphi_1(s_1, \dots, s_{m-1}, x_2)$, כעת ע"פ ה"א קיימת תת-קבוצה $S_3 \subseteq T_2$ גדולה מספיק שבא כל $\mathbf{s_2} \in T_2^{m-1}$ נצבעו באותו צבע תחת $\varphi_2(\cdot)$, נניח כחול. נמשיך באותו אופן. אנחנו נמשיך ככה עד שנקבל $x_{i_1}, \dots, x_{i_k}$ שצבועים באותו צבע, בפרט אם נסמן ב-N את מספר האיטרציות נקבל שאם $\lceil N/c \rceil \geq k$ אזי יהיו k איברים שצבועים באותו הצבע, כלומר מספיקות $N = c \cdot (k-1) + 1$ איטרציות.

x_1 is red just to indicates that $(s_1, s_2, \dots, s_{m-1}, x_1)$ is red, whenever $s_1, \dots, s_{m-1} \in S_1$.
x_2 is blue just to indicates that $(s_1, s_2, \dots, s_{m-1}, x_2)$ is blue, whenever $s_1, \dots, s_{m-1} \in S_2$.

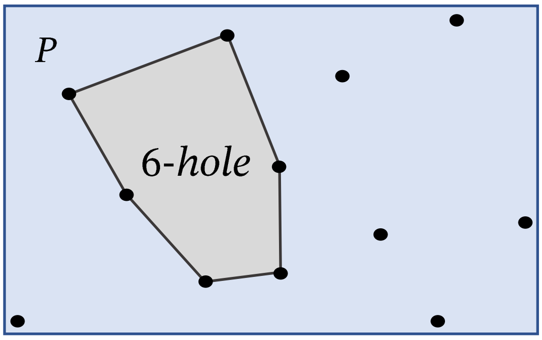




[1] נשים לב שאנחנו מגדירים את הצביעה באופן הנ"ל על מנת שכשנחזור ל-φ יובטח לנו כי $(s_1, \dots, s_m)$ צבועה באותו צבע כמו $\mathbf{s}$ תחת φ_1.

כעת אנחנו מוכנים להוכיח את משפט ארדש-סקרש ☺.

הוכחת משפט ארדש-סקרש. עבור n גדול מספיק, וקבוצה של נקודות P, נצבע רביעיות של נקודות בשני צבעים: אדום או כחול, כאשר אנחנו נצבע רביעייה בצבע אדום אם היא במצב קמור ואחרת נצבע אותה בכחול. כעת, ממשפט רמזי נובע כי קיימת קבוצה P' של $|P'| \geq 5$ נקודות כך שכל הרביעיות בה צבועות באותו צבע. ע"פ משפט הסוף הטוב כל חמש נקודות במצב כללי מגדירים ארבע נקודות במצב קמור, לכן לא יתכן כי P' צבועה בכחול. לפיכך, כל הרביעיות במצב קמור, כעת נטען שכל הקבוצה במצב קמור. נניח בשלילה שהטענה לא נכונה, אזי קיימת נקודה $p \in \mathbf{conv}(P' - \{p\})$, ע"פ משפט קארטאודורי p בקמור של שלושה נקודות, אבל כל רבעיה היא במצב קמור ולכן גם כל שלישה בסתירה להנחה.
∎



<u>הגדרה</u>. תהא P קבוצה סופית של נקודות במצב כללי. קבוצה של k נקודות תיקרא <u>k-hole</u> אם היא במצב קמור כך שהקמור שלה לא מכיל אף נקודה נוספת מ-P.

האיור מצד שמאל מתאר דוגמה לקבוצה שהיא 6-hole.

שאלה. האם לכל k קיים $n := n(k)$ כך שכל קבוצה של n נקודות במצב כללי מכילה k-hole.

משפט שבע החורים (Seven-hole theorem)

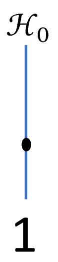
There exist arbitrarily large finite sets in the plane in general position without a 7-hole.

אנחנו נדרשים למספר הגדרות מקדימות:

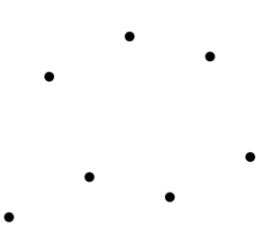
הגדרה (גבוהה ממש/מתחת ממש). עבור קבוצות סופיות $X, Y \subset \mathbb{R}^2$ נאמר ש-X גבוהה ממש מ-Y (ו-Y נמצאת מתחת ממש מ-X) אם התנאים הבאים מתקיימים:

1. אין שני נקודות מ-$X \cup Y$ שיוצרות קו אנכי.
2. כל שני נקודות מ-X מגדירות קו ששוכן מעל כל הנקודות של Y.
3. כל שני נקודות מ-Y מגדירות קו ששוכן מתחת לכל הנקודות של X.

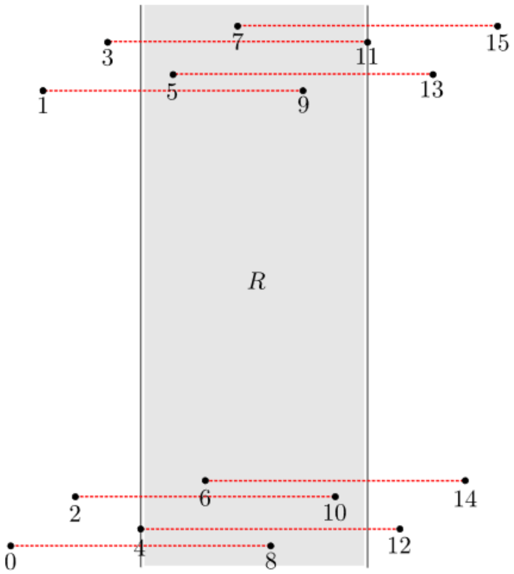
נראה בנייה אינדוקטיבית של קבוצה $\mathcal{H}_n$ בגודל 2^n.

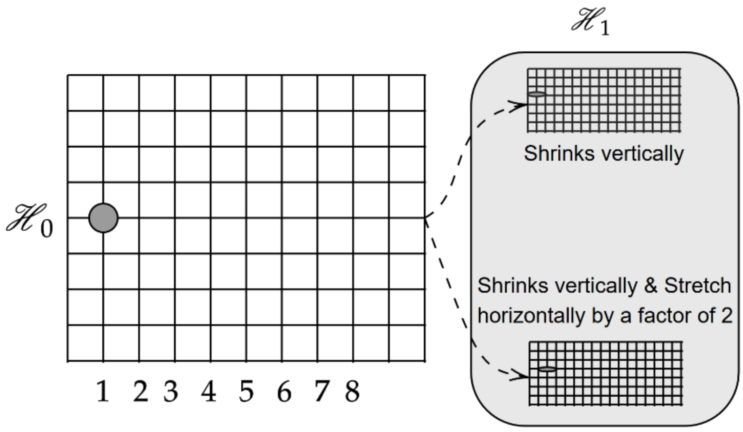


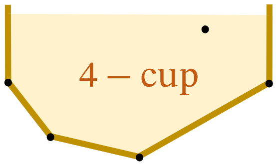
אנחנו נגדיר את הקבוצה כך שהקודרדינטאות ה-x יהיו מספרים עוקבים. מקרה הבסיס מתואר באיור המופיע בצד שמאל. כדי לבנות את $\mathcal{H}_n$ לוקחים שני עותקים של $\mathcal{H}_{n-1}$. אחד מהם משטחים אנכית בצורה מאוד חזקה נסמן עותק זה ב-$\mathcal{H}_{n-1}^{(a)}$, ואת העותק השני נשטח באופן מאוד חזק אנכית ולאחר מכן נמתח אופקית את הצירים בפקטור של 2, נסמן עותק זה ב-$\mathcal{H}_{n-1}^{(b)}$. כעת נגדיר את $\mathcal{H}_n$ להיות מורכבת כך ש-$\mathcal{H}_{n-1}^{(a)}$ גבוהה ממש מ-$\mathcal{H}_{n-1}^{(b)}$. כלומר, מספיק להוסיף h_k גדול מספיק לרכיב ה-y של כל הנקודות של $\mathcal{H}_{n-1}^{(a)}$.



באיור משמאל ניתן לראות את $\mathcal{H}_4$ ובאיור למטה ניתן לראות את הבנינה של $\mathcal{H}_1$ מ-$\mathcal{H}_0$.





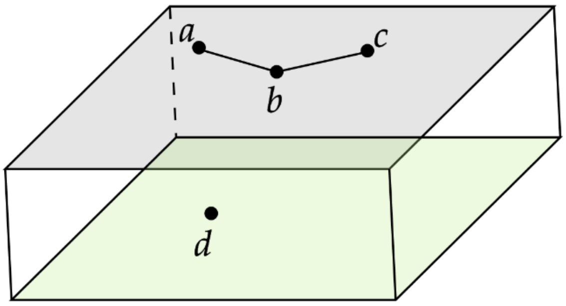


הגדרה (k-cup). קבוצה של k נקודות שהנקודות שלה יוצרים סדרת שיפועים עולה תיקרא **k-cup**. נאמר שנקודה <u>מעל</u> ה-cup אם היא בתוך הקמור או מעליו.

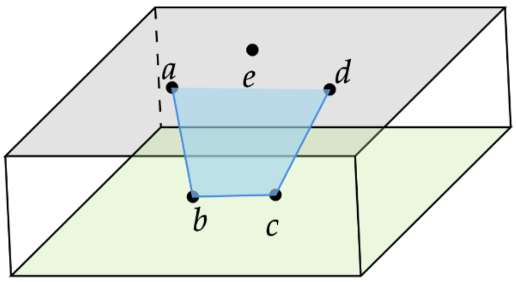
למה. ב-$\mathcal{H}_n$ יש נקודה מעל כל 4-cup.

הוכחה (באינדוקציה על n). נסמן ב-C את קבוצת הנקודות שיוצרים את ה-cup. נחלק למקרים:

- אם $C \subseteq \mathcal{H}_{n-1}^{(a)}$ אז ע"פ ה"א הטענה נובעת.
- אם $C \subseteq \mathcal{H}_{n-1}^{(b)}$ הטענה נובעת ע"פ ה"א.
- המקרה המשלים הוא ש-$C \cap \mathcal{H}_{n-1}^{(a)} \neq \emptyset \neq C \cap \mathcal{H}_{n-1}^{(b)}$. כלומר ל-$C$ יש חיתוך גם עם $\mathcal{H}_{n-1}^{(a)}$ וגם עם $\mathcal{H}_{n-1}^{(b)}$. נשים לב שלא יתכן ש-3 נקודות בחלק אחד ונק' בחלק השני, לדוגמא אם כל הנקודות בחלק העליון אז לא יתכן שתיווצר cup זאת משום שהשיפוע בין d לכל נקודה אחרת בקטע העליון יהיה גדול מכל שאר השיפועים בחלק העליון כנדרש מהגדרת cup.



לפיכך נסיק שיש בדיוק שני נקודות בחלק העליון ובדיוק שני נקודות בחלק התחתון. היות ובחלק התחתון של קבוצת הורטון רכיבי קורדינאת ה-x זוגיות אזי מובטח לנו שבין שני איברים בחלק התחתון חייב להיות איבר בחלק העליון ולכן תהיה נקודה e הנמצאת מעל ה-cup, כמתואר באיור:



∎

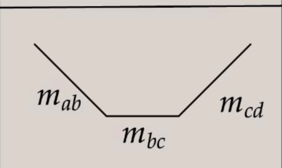
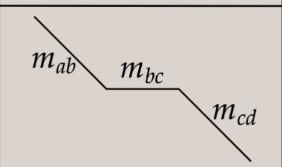
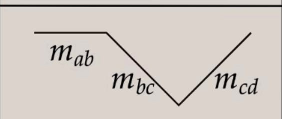
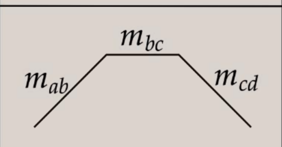
הגדרה (k-cap). קבוצה של k נקודות שהנקודות בא יוצרים סידרה יורדת של שיפועים תיקרא k-cap. נאמר שנקודה <u>מתחת</u> למכסה (cap) אם היא בתוך הקמור של הנקודות או מתחתיו.

באופן דומה ללמה שהוכחה לעיל ניתן להוכיח את המשפט הבא.

למה. בקבוצת הורטון יש נקודה <u>מתחת</u> לכל 4-cap.

<u>הוכחת משפט שבעת החורים.</u> נניח בשלילה שיש 7 נקודות במצב קמור, נוכיח באינדוקציה על n שיש נקודה בתוך הקמור.

צעד. אם כל ה-7 נקודות באותו חלק נשתמש בהנחת האינדוקציה להסיק את הטענה. אחרת, ע"פ עיקרון שובך היונים באחד החלקים יש 4 נקודות, אנחנו נטען שהם חייבים להוות 4-cup אם הם בחלק התחתון, ואילו אם הם בחלק העליון הם חייבים להוות 4-cap. הטענה תנבע לפי שתי הלמות שהוכחנו לעיל. נניח בלי הגבלת הכלליות שארבעת הנקודות נמצאות בחלק התחתון, ונבחין שלוש נקודות במצב כללי הם תמיד 3-cap או 3-cup. כעת נניח בשלילה שארבעת הנקודות הם לא 4-cup ולכן שלוש מתוכם הם 3-cap, אזי לא יתכן שארבעתם נמצאות במצב קמור, שכן כפי שניתן לראות באיור בשורה שנייה ושלישית יש נקודה שבקמור של האחרות, לפיכך שני המצבים היחידים האפשריים הם המצבים המתוארים בשורה הראשונה והאחרונה. לסיום נשים לב שהיות ואנחנו בחלק התחתון, אם המצב הוא כמתואר בשורה התחתונה אז המשובע לא במצב קמור, זאת מכיוון ששתי הנקודות b, c בקמור של שאר הנקודות.

Slopes changes	Scheme	Description
↑↑		$m_{ab} \leqslant m_{bc} \leqslant m_{cd}$ *Sequance of slopes is increasing*
↑↓		$m_{ab} \leqslant m_{bc} \geqslant m_{cd}$ *Increasing* $\rightarrow$ *Decreasing*
↓↑		$m_{ab} \geqslant m_{bc} \leqslant m_{cd}$ *Decreasing* $\rightarrow$ *Increasing*
↓↓		$m_{ab} \geqslant m_{bc} \geqslant m_{cd}$ *Sequance of slopes is decreasing*

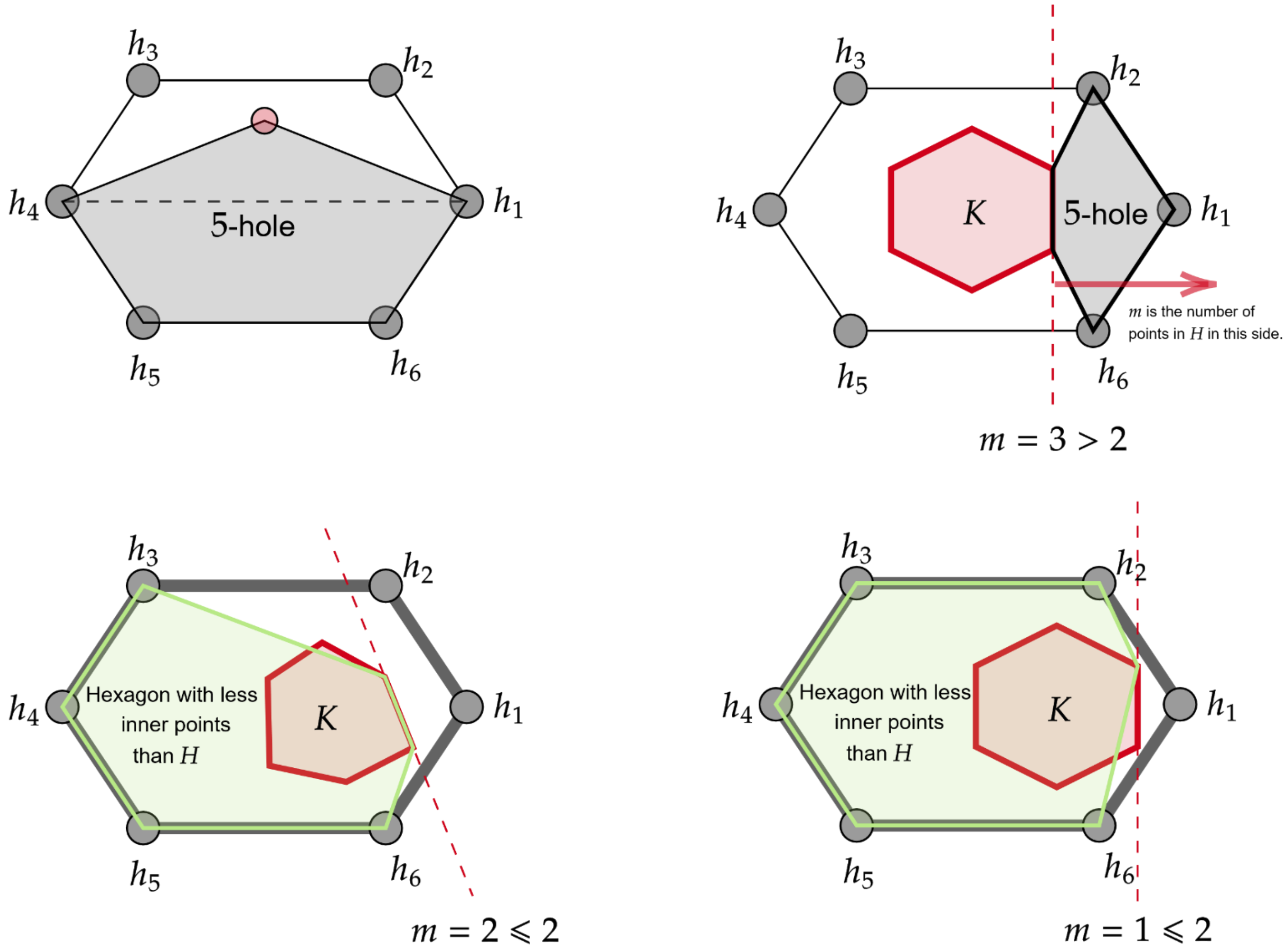
∎

משפט (קיום של 5-hole). כל קבוצה גדולה דיו X במישור במצב כללי מכילה 5-hole.

משפט ארדש-סקרש מבטיח לנו שתמיד תהיה תת-קבוצה בגודל 6 במצב קמור. הבעיה היא מה קורה שיש נקודות בפנים, ככל שיש יותר נקודות בפנים אנחנו מתרחקים מהמטרה, דהיינו שיהיו 0 נקודות בפנים. לפיכך, אנחנו נרצה לבחור את המשושה הקמור עם הכי מעט נקודות מ-X בתוכו.

הוכחה. תהא $H \subseteq X$ המשושה הקמור עם הכי מעט נקודות מ-X שנמצאות בתוכו. נסמן ב-k את מספר הנקודות מ-$K = \mathbf{conv}(H) \cap (X \setminus H)$, ונשקול את המקרים הבאים:

- אם $k = 0$, סיימנו כי כל 6-*hole* הוא גם 5-*hole*, כנדרש.
- אם $k = 1$, נסמן ב-$h_1, \dots h_6$ את הנקודות של המשושה נגד כיוון השעון. נעביר קו בין h_1, h_4 וניקח את הנקודה $k_1 \in K$ ביחד עם ארבעת הנקודות הכיוון השני של הקו, ונשיג 5-hole כמתואר באיור.
- אם $k \geq 2$, יהי e hyperplane שמוגדר באמצעות שתי נקודות מ-$\mathbf{conv}(K)$, ונשקול את מספר הנקודות m מ-H ששוכנות בחצי המישור של e בצד הנגדי ל-$\mathbf{conv}(K)$ (כמתואר באיור).
  - אם $m > 2$ אנחנו מראים כיצד לבנות 5-hole (כמתואר באיור).
  - אם $m \leq 2$, אנחנו בונים דוגמה נגדית לכך ש-H הוא המשושה עם הכי מעט נקודות בפנים מ-X, כמתואר באיור.



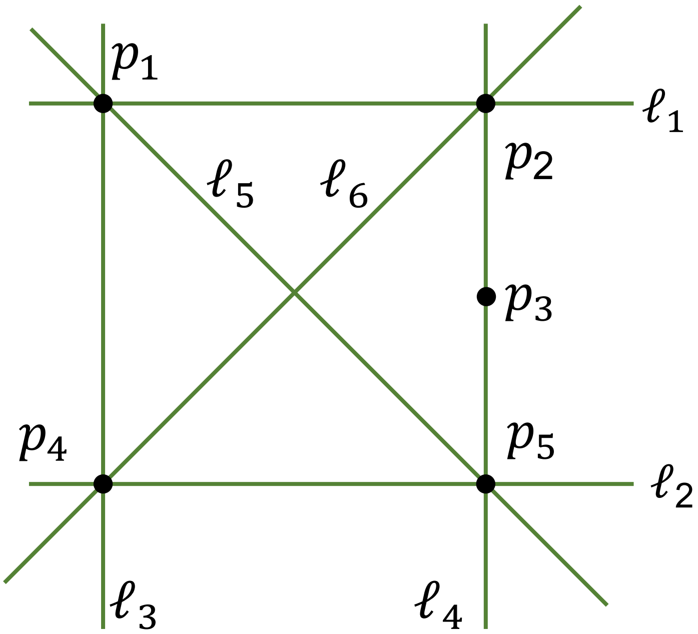
∎

חלויות- Incidences

הגדרה (חלות)

תהא P קבוצת נקודות, ותהא L קבוצת קווים. עבור נקודה $p \in P$ וקו $\ell \in L$ נאמר כי (p, ℓ) היא חלות אם $p \in \ell$, כלומר הנקודה p חלה (נמצאת) על ℓ.

לדוגמה:



	ℓ_1	ℓ_2	ℓ_3	ℓ_4	ℓ_5	ℓ_6
p_1	(p_1, ℓ_1)		(p_1, ℓ_3)		(p_1, ℓ_5)	
p_2	(p_2, ℓ_1)			(p_2, ℓ_4)		(p_2, ℓ_6)
p_3				(p_3, ℓ_4)		
p_4		(p_4, ℓ_2)	(p_4, ℓ_2)			(p_4, ℓ_6)
p_5		(p_5, ℓ_2)		(p_5, ℓ_4)	(p_5, ℓ_5)	

נשים לב שמספר החלויות בדוגמה לעיל הוא 13. אנו נשאל מהו המספר המקסימלי של חלויות שיכולות להיווצר באמצעות שישה קווים וחמישה נקודות. האם 13 הוא מספר החלויות המקסימלי?
ברור שלא, לדוגמה רק באמצעות הזזת הנקודה p_3 לחיתוך של ℓ_5 עם ℓ_6 מפחיתה את מספר החלויות ב-1 ומגדילה אותה ב-2 כלומר סה"כ הוספנו חלות, ולכן אפשר לעשות 14 חלויות.

באופן כללי נרצה לדעת מה מספר החלויות של k נקודות ו-ℓ ישרים. חסם טריוויאלי הוא $k\ell$ שכן כל נקודה יכולה לכל היותר על כל הקווים. משפט **Szemerédi–Trotter** יגיד שהמספר המקסימלי הוא $O\left((k\ell)^{2/3} + k + \ell\right)$.

משפט (Szemerédi–Trotter). המספר המקסימלי של חלויות בין k נקודות ו-ℓ קווים הוא $O\left((k\ell)^{2/3} + k + \ell\right)$.

אם נסמן ב-$f(k, \ell)$ את המספר המקסימלי של החלויות אז נוכל לרשום:

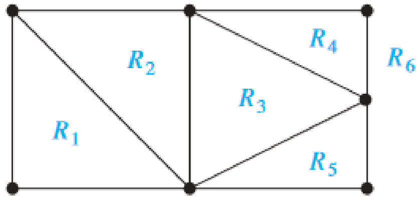
$$f(k, \ell) = \begin{cases} (k\ell)^{2/3}, & if\ \sqrt{\ell} \ll k \ll \ell^2 \\ k, & if\ k \gg \ell^2 \\ \ell, & if\ k \ll \sqrt{\ell} \end{cases}.$$

כדאי לראות זאת נבדוק את התנאים

$$k^{2/3}\ell^{2/3} \gg k \iff \ell^{2/3} \gg k^{1/3} \iff k \ll \ell^2$$
$$k^{2/3}\ell^{2/3} \gg \ell \iff k^{2/3} \gg \ell^{1/3} \iff k^2 \ll \ell$$

ונסיק את הדרש.

הגדרה (גרף מישורי). גרף G נקרא מישורי אם ניתן לייצג אותו במישור מבלי שאף שתי צלעות תיחתכנה.



הגדרה (פאה). כל איזור החסום ע"י צלעות הגרף נקרא פאה, האזור שאינו חסום ע"י צלעות הגרף נקרא הפאה החיצונית או הפאה האינסופית ונחשב לפאה.

משפט (אוילר). יהי G גרף פשוט קשיר ומישורי, ויהי f מספר הפאות בגרף, אזי מתקיים $v+f-e=2$.

מסקנה. בגרף פשוט קשיר ומישורי עם לפחות 3 קודקודים מתקיים $e \le 3v-6$, בנוסף אם בגרף אין מעגלים מאורך שלוש אזי מתקיים כי $e \le 2v-4$.

בעצם משפט אוילר אומר שמספר הפאות בגרף הוא $e-v+2$.

<u>הוכחת משפט אוילר באינדוקציה על e.</u> בסיס. $e=v-1$ אמ"מ הגרף הוא עץ ולכן מכיל רק את הפאה האינסופית, דהיינו פאה אחת. נוכיח שהטענה נכונה עבור $e \ge n$. יהא G גרף מישורי עם e צלעות אזי G מכיל מעגל. תהא e צלע במעגל ונשים לב שהשמטת e מאחדת את שתי הפאות בה היא גובלת לפאה אחת. כלומר מספר הפאות יהיה קטן באחד ממספר הפאות המקורי. לפיכך, בגרף $G=G\setminus e$ ניתן להפעיל את הנחת האינדוקציה ולקבל כי $v-(e-1)+(f-1)=2$, כלומר $v-e+f=2$, כנדרש. ∎

לפני שנוכיח את המסקנה נגדיר את הדרגה של פאה כמספר הצלעות שחלות בה, כאשר צלע חלה פעמיים על פאה נוגעת בשני צדדי הקשת, עבור פאה F נסמן ב-$\deg_G F$ את הדרגה של הפאה F גרף G.

הוכחת המסקנה. נסמן ב-$\mathcal{F}(G)$ את קבוצת הפאות של G, ונשים לב שמתקיים

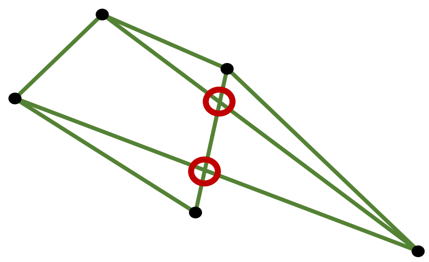
$$2e=\sum_{F\in\mathcal{F}(G)}\deg_G F \ge 3\cdot|\mathcal{F}(G)|=3f.$$

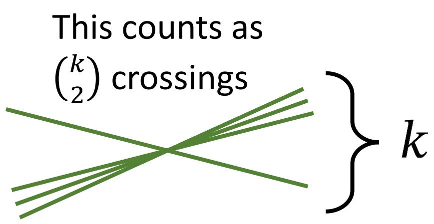
שכן כל צלע נספרת בדיוק פעמיים (פעמיים באותה פאה או פעם אחת בשני פאות שונות), בנוסף כל פאה מכילה לפחות שלושה צלעות. מכאן $f\le 2e/3$. נציב בנוסחת אוילר ונקבל,

$$2=v-e+f\le v-e/3 \Longrightarrow e\le 3v-6.$$

נשים לב שאם הגרף לא מכיל מעגלים באורך שלוש אזי כל פאה מכילה לפחות ארבעה צלעות ולכן נקבל $2e\ge 4f$, כלומר $f\le e/2$, נציב בנוסחת אוילר ונקבל $e\ge 2v-4$, כנדרש.

הגדרה. נקודת חיתוך היא נקודה הנוצרת מחיתוך של שני ישרים.





משפט (Weak Crossing Lemma). יהי G גרף עם לפחות שלושה קודקודים, אזי ישנם לפחות $e-(3v-6)$ חיתוכים. יתרה מכך, אם G לא מכיל מעגלים באורך 3 אז ב-G יש לפחות $e-(2v-4)$ חיתוכים.

נסמן ב-$cr(G)$ את מספר החיתוכים בגרף G.

הוכחה. יהא G גרף, נשים לב שניתן להוריד כל חיתוך באמצעות קשת אחת. לכן לאחר הורדת $cr(G)$ צלעות נקבל גרף מישורי ולכן

$$e - cr(G) \leq 3v - 6 \iff cr(G) \geq e - (3v - 6).$$

אם G לא מכיל מעגלים מאורך 3 אזי $e - cr(G) \leq 2v - 4$, ולכן $cr(G) \geq e - (2v - 4)$, כנדרש. ∎

משפט (Crossing Lemma). יהא G גרף, אזי

$$cr(G) \geq \frac{e_G^3}{64v_G^2} - v_G.$$

הוכחה. נשים לב שהטענה נכונה באופן הריק כאשר $e_G \geq 4v_G$ שכן כל שהטענה אומרת היא ש-$cr(G) \geq 0$. לפיכך נניח כי $e_G \geq 4v_G$. כעת על מנת לרתום את כוחה של השיטה ההסתברותית נגדיר גרף חדש G' בו כל קודקוד נשאר בהסתברות $p \in (0,1)$. נשים לב שעל מנת שצלע תישמר נצטרך ששני קצבותיה תשמרנה, ובשביל שנקודת חיתוך תישמר נצטרך ששתי הישרים שמגדירים אותה ישמרו. נשים לב שמתקיימים

$$\mathbb{E}[v_{G'}] = \mathbb{E}\left[\sum_{v\in V(G)} \mathbb{1}_{v\in V(G')}\right] = \sum_{v\in V(G)} \mathbb{E}[\mathbb{1}_{v\in V(G')}] = \sum_{v\in V(G)} \Pr[\mathbb{1}_{v\in V(G')} = 1] = \sum_{v\in V(G)} p = pv_G,$$

$$\mathbb{E}[e_{G'}] = \mathbb{E}\left[\sum_{e\in E(G)} \mathbb{1}_{e\in E(G')}\right] = \sum_{e\in E(G)} \mathbb{E}[\mathbb{1}_{e\in E(G')}] = \sum_{e\in E(G)} \Pr[\mathbb{1}_{e\in E(G')} = 1] = \sum_{e\in E(G)} p^2 = p^2 e_G,$$

$$\mathbb{E}[\mathrm{cr}(G)] = \mathbb{E}\left[\sum_{c\in C(G)} \mathbb{1}_{c\in C(G')}\right] = \sum_{c\in C(G)} \mathbb{E}[\mathbb{1}_{c\in E(G')}] = \sum_{c\in C(G)} \Pr[\mathbb{1}_{c\in E(G')} = 1] = \sum_{c\in C(G)} p^4 = p^4 \cdot \mathrm{cr}(G)$$

כאשר $C(G)$ היא קבוצת כל הנקודות של החיתוכים של G. היות וה-weak crossing lemma אמור להתקיים גם בגרף שנדגם מהמודל ההסתברותי הזה (כי הוא נכון לכל גרף, בפרט גם לגרף במודל ההסתברותי הנ"ל), נובע כי:

$$\mathbb{E}[\mathrm{cr}(G)] \geq \mathbb{E}[e_{G'}] - (3 \cdot \mathbb{E}[v_{G'}] - 6)$$
$$p^4 \cdot \mathrm{cr}(G) \geq p^2 e_G - 3pv_G + 6 \geq p^2 e_G - 3pv_G$$
$$\mathrm{cr}(G) \geq \frac{e_G}{p^2} - \frac{3v_G}{p^3}$$

נגזור ונראה שהנגזרת עולה כאשר $0 < p < 9v_G/2e_G$, אבל במצב זה יתכן כי $9v_G/2e_G > 1$ ולכן נבחר את $p = 4v_G/e_G$ כך שה-p המקסימלי אכן יהיה 1, כזכור אנחנו ש-$e_G \geq 4v_G$. לפיכך, נציב ונקבל

$$cr(G) \geq \frac{e^3}{16v_G^2} - \frac{3e^3}{64v_G^2} = \frac{e^3}{64v_G^2}$$

שזה תוצאה טובה יותר מהחסם במשפט.

∎

הוכחת Szemerédi–Trotter. בהינתן קבוצה P של k נקודות וקבוצה $\mathcal{L}$ של ℓ ישרים נגדיר את הגרף $G=(P,E)$ כאשר $E\coloneqq\{uv\colon u,v\in P \text{ and } uv\subseteq\ell \text{ for some } \ell\in\mathcal{L}\}$, כלומר כל הקטעים של ישרים שקצוותם ב-P. נשים לב שישר $\ell\in\mathcal{L}$ שמכיל $k\geq 1$ נקודות מגדיר $k-1$ צלעות. לפיכך, אם נסמן ב-$k(\ell)$ את מספר הנקודות על הישר ℓ וב-I את מספר החלוויות הכולל, נקבל:

$$|E|=\sum_{\ell\in\mathcal{L}}(k(\ell)-1)=\sum_{\ell\in\mathcal{L}}k(\ell)-\ell=I-\ell$$

כאשר השוויון האחרון נובע כי כל נקודה נספרה במספר הפעמים שקווים חלים בה, והסכום הנ"ל מעל כל הקווים זה בדיוק מספר החלוויות הכולל I. לסיום נשים לב שמספר החיתוכים בגרף עם ℓ צלעות הוא לכל היותר $\binom{\ell}{2}=\frac{\ell(\ell-1)}{2}=\frac{\ell^2}{2}-\frac{\ell}{2}\leq\frac{\ell^2}{2}$, כעת נפעיל את ה-Crossing Lemma ונקבל:

$$\frac{(I-\ell)^3}{64k^2}-k\leq\frac{e_G^3}{64v_G^2}-v_G\leq cr(G)\leq\frac{\ell^2}{2}$$

$$(I-\ell)^3\leq 32k^2\ell^2+64k^3$$

$$I\leq\ell+\sqrt[3]{32k^2\ell^2+64k^3}$$

כעת היות ומעניין אותנו רק הסדרי גודל נשתמש בזהות $\sqrt[3]{a+b}=\Theta\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\right)$ ונקבל

$$I\leq\ell+k^{2/3}\ell^{2/3}+k^{3/2}$$

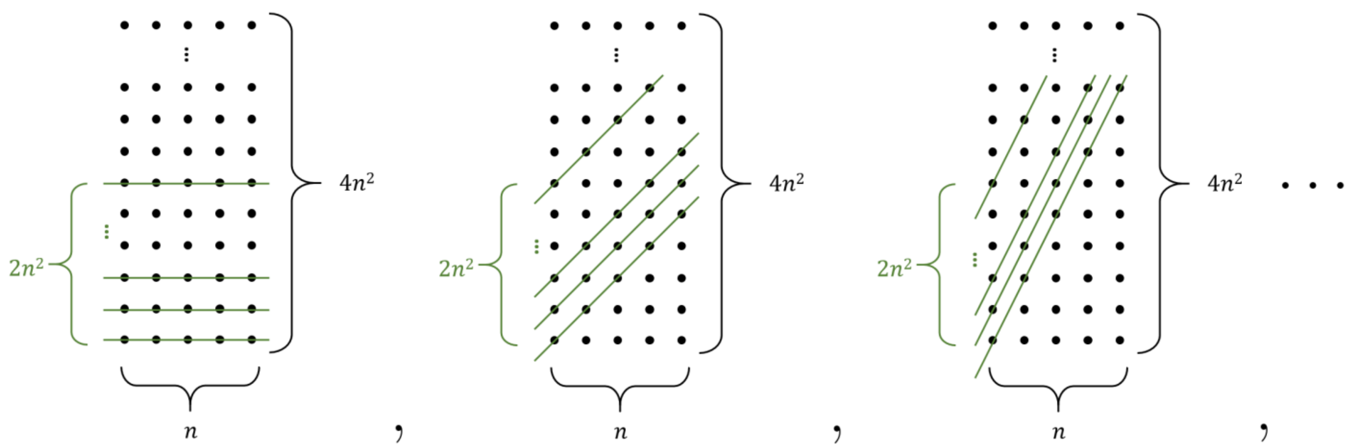
כנדרש.

∎

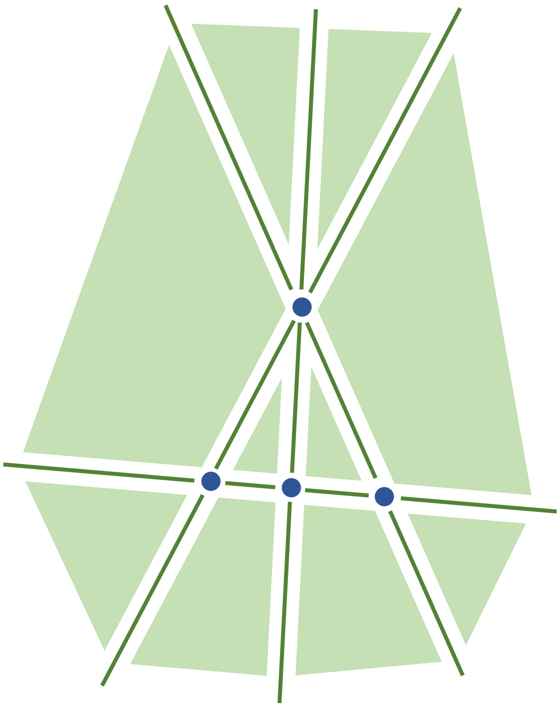
Szemerédi–Trotter הוא הדוק. נראה את זה עבור $k=\ell$. לשם פשטות נניח כי $k=4n^3$ ונבנה Grid שממדיו הם $n\times 4n^2$. נרצה להגדיר אוסף של ישרים כך שכל ישר עובר דרך n נקודות, והיות ויש $\ell=k$ ישרים נקבל שמספר החלוויות הוא $4n^3\times n=4n^4$, כלומר $\Theta\left(k^{4/3}\right)$ חלוויות. לשם כך נגדיר:

0. $2n^2$ ישרים עם שיפוע 0.
1. $2n^2$ ישרים עם שיפוע 1.
2. ...
3. $2n^2$ ישרים עם שיפוע $2n-1$.

נשים לב שכל ישר אכן חותך n נקודות, שכן העליון ביותר עם הנקודה הכי גבוהה מגיע לרכיב y:
$$2n^2+(n-1)\cdot(2n-1)\leq 2n^2+n\cdot 2n=4n^2.$$



שיעור 6 – מערכים – Arrangements



ה-Arrangement של קבוצה של ישרים $\mathcal{L}$ היא החלוקה של המישור ל-faces שמושרות תחת $\mathcal{L}$ ומסומנת ע"י $\mathcal{A}(\mathcal{L})$

הגדרה (מערך). Face של $\mathcal{A}(\mathcal{L})$ היא קבוצה קשירה של קבוצה מהצורה $(\cap\mathcal{L}')\cup(\mathcal{L}\setminus\mathcal{L}')$ עבור תת-קבוצה $\mathcal{L}'\subseteq\mathcal{L}$.

$\mathcal{A}(\mathcal{L})$ contains:

- 10 ***cells*** (8 of them unbounded)
- 13 ***edges*** (5 segments, 8 rays)
- 4 ***vertices***

מערך נקרא פשוט אם הישרים נמצאים במצב כללי, כלומר אין שני ישרים מקבילים או במילים אחרות אין שלושה ישרים שנחתכים בנקודה משותפת.

Definition 4. Let H be a hyperplane in $\mathcal{A}$. We name $\mathcal{A}'=\mathcal{A}\backslash H$ the *deleted arrangement* and $\mathcal{A}''=\{K\cap H : K\in\mathcal{A}'\}$ the *restricted arrangement*. The triple, $(\mathcal{A},\mathcal{A}',\mathcal{A}'')$, is (creatively) named a triple of arrangements.

For instance, if we choose the red hyperplane the one we choose to create a triple of arrangements, we get the following result:

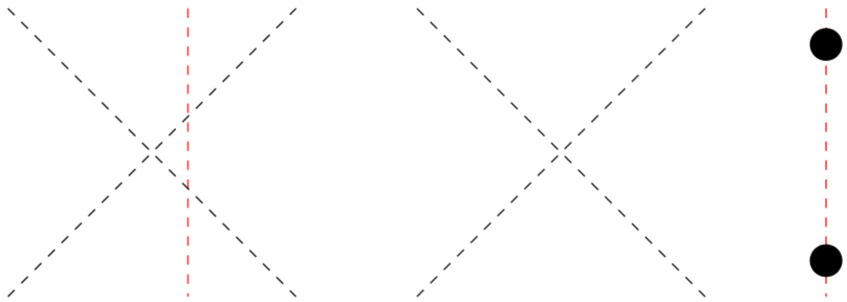


Figure 2: An Example of a Triple or Arrangements, with $\mathcal{A},\mathcal{A}'$, and $\mathcal{A}''$, Respectively

משפט. מערך פשוט עם n ישרים יש $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}$ תאים (cells).

הוכחה (באינדוקציה על n). עבור $n=1$ יש שני תאים ואכן $2=\binom{1}{0}+\binom{1}{1}$, כנדרש. נניח כעת שהטענה נכונה עבור $n-1$ ישרים ונוכיח עבור n. יהי $\ell\in\mathcal{L}$. אזי $n-1$ הישרים מפצלים את הישר ℓ ל-n צלעות, כל צלע כזאת מחלקת איזור לשני חלקים ולכן מספר האיזורים הינו:

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}=n+\binom{n-1}{0}+\binom{n-1}{1}+\binom{n-1}{2}.$$

משפט. מספר התאים במערך פשוט של n hyperplanes הוא

$$\Phi_d(n) \coloneqq \sum_{i=0}^{d} \binom{n}{i}$$

הוכחה. ההוכחה באינדוקציה על n ו-d.

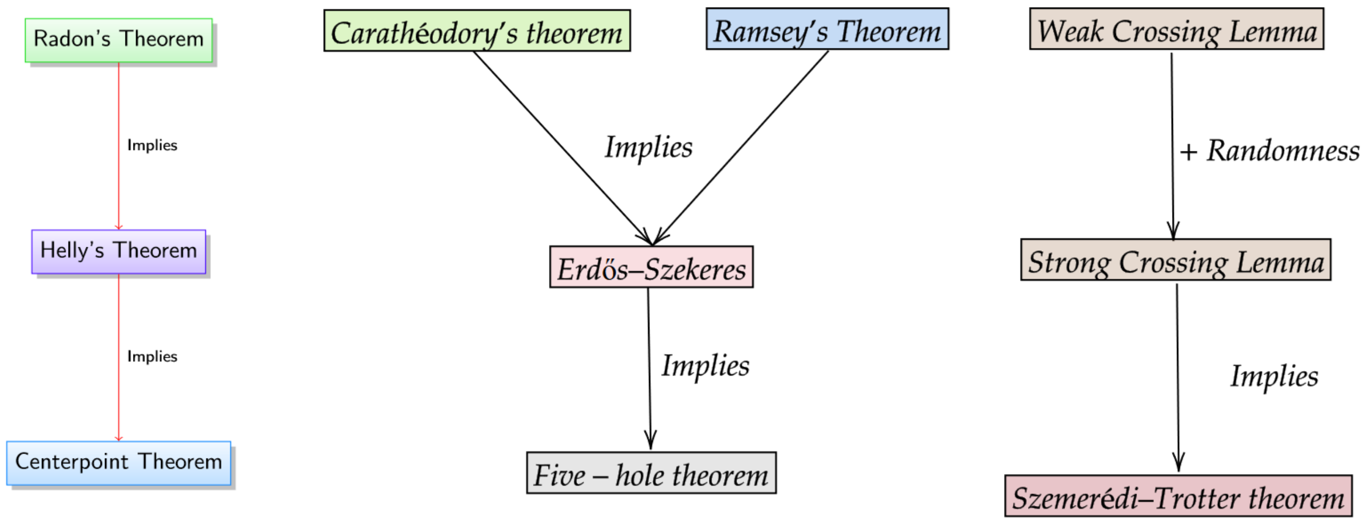
בסיס. עבור $d = 2$ הוכחנו את הטענה במשפט הקודם.

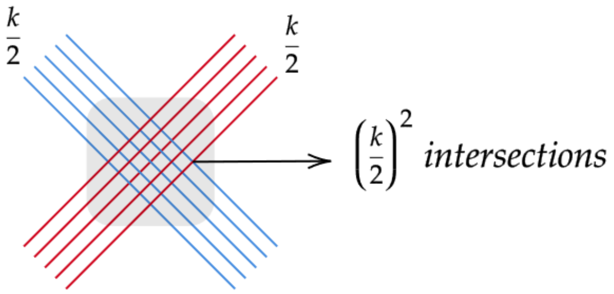
צעד. נניח שיש לנו $n-1$ hyperplanes ואנחנו מוסיפים אחד. נשים לב ש-$n-1$ ה-hyperplanes חותכים את ה-hyperplane החדש ב-$\Phi_{d-1}(n-1)$ facets, כל קטע כזה מחלק כל תא לשתיים ולכן הרווחנו תא על כל קטע כזה. לפיכך מספר התאים הוא:

$$\begin{aligned}
\Phi_d(n) &= \Phi_d(n-1) + \Phi_{d-1}(n-1) \\
&= \sum_{i=0}^{d} \binom{n-1}{i} + \sum_{i=0}^{d-1} \binom{n-1}{i} \\
&= \binom{n-1}{0} + \sum_{i=1}^{d} \binom{n-1}{i} + \binom{n-1}{i-1} \\
&= \binom{n}{0} + \sum_{i=1}^{d} \binom{n}{i} \\
&= \sum_{i=0}^{d} \binom{n}{i}
\end{aligned}$$

∎

סיכום חלקי




$\frac{k}{2}$
$\frac{k}{2}$
$\left(\frac{k}{2}\right)^2$ *intersections*