מתמטיקה בדידה

אורן דנון

תשע"ז סמסטר ב' - מועד א'

1. • תהי $f: X \to Y$, כך שמתקיים $f\left(\left(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5\right)\right) = \left(a_1+1,a_2+2,a_3+3,a_4+4,a_5+5\right)$ נראה כי הפונקציה חח"ע ועל.

חח"ע: יהיו $x_1=\left(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5\right), x_2=\left(a_1',a_2',a_3',a_4',a_5'\right)\in X$ כך שמתקיים $f\left(x_1\right)=f\left(x_2\right)$, נראה כי $x_1=x_2$.

$$\begin{aligned}
f\left(x_1\right)=f\left(x_2\right) &\iff \left(a_1+1,a_2+2,a_3+3,a_4+4,a_5+5\right)=\left(a_1'+1,a_2'+2,a_3'+3,a_4'+4,a_5'+5\right)\\
&\iff \left(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5\right)=\left(a_1',a_2',a_3',a_4',a_5'\right)\\
&\iff \forall_{1\le i\le 5}a_i=a_i'\\
&\iff x_1=x_2
\end{aligned}$$

על: יהא $y=\left(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5\right)=\in Y$, נראה שקיים $x=\left(a_1',a_2',a_3',a_4',a_5'\right)\in X$ כך ש-$f(x)=y$. אכן נגדיר $\forall_{1\le i\le 5}a_i'=a_i-i$, לפיכך מתקיים

$$\begin{aligned}
&f\left(x\right)=f\left(\left(a_1',a_2',a_3',a_4',a_5'\right)\right)=f\left(a_1-1,a_2-2,a_3-3,a_4-4,a_5-5\right)\\
&\quad=\left(a_1-1+1,a_2-2+2,a_3-3+3,a_4-4+4,a_5-5+5\right)=\left(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5\right)
\end{aligned}$$

• נשים לב שלחשב את $|Y|$ יותר קל כיוון שסה"כ צריך לבחור מתוך 14 מספרים 5 מספרים ללא חזרות (כי זה גדול ממש) וללא חשיבות לסדר(כי בהינתן המספרים יש סידור אחד שמתאים אז לאחר שנבחר את המספרים ללא חשיבות לסדר נותר אופציה אחת לסדר אותם). ולכן נקבל

$$\boxed{\binom{14}{5}}$$

2. • נשתמש בשיטת המשלים סה"כ האופציות הינו $7!$ מספר התמורות שמכילות את DOG היינו $(7-3+1)!$ כיוון שהסתכלנו על כל הרצף כתו אחד ולאחר מכן סידרנו בשורה.

$$\boxed{7!-5!}$$

• נשתמש בשיטת המשלים שוב אולם הפעם נשים לב שיש חיתוך בין המילה DOG והמילה GAP והוא DOGAP ולכן צריך להשתמש בעקרון ההכלה וההדחה, לפיכך:

$$\boxed{7!-\binom{2}{1}\cdot 5!+\binom{2}{2}\cdot 3!}$$

3.

- $$\log(n!) = \log(n\cdot(n-1)\cdots 1) \le \log(n\cdot n\cdots n) = \log(n^n) = n\log n$$

- $$\log(n!) = \log\left(\prod_{i=1}^{n} i\right) \ge \log\left(\prod_{i=\frac{n}{2}}^{n} i\right) \ge \log\left(\prod_{i=\frac{n}{2}}^{n} \frac{n}{2}\right) = \log\left(\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}}\right) = \frac{n}{2}\log\left(\frac{n}{2}\right)$$

$$\frac{n}{2}\log\left(\frac{n}{2}\right) > cn\log(n)$$
$$c = \frac{1}{4}$$
$$\log\left(\frac{n}{2}\right) > \frac{1}{2}\log n$$
$$\log\left(\frac{n}{2}\right) > \log\left(n^{\frac{1}{2}}\right)$$
$$\frac{n}{2} > \sqrt{n}$$
$$n > 2\sqrt{n}$$
$$\text{As } n \ge 0 \text{ it occurs } \iff$$
$$n^2 > 4n$$
$$n^2 - 4n > 0$$
$$\iff n_c > 4$$

- הטענה אינה נכונה, נראה דוגמה נגדית $f(x) = (\sin x + 2)x^2 + 1, g(x) = x$.
נניח בשלילה ש-$f = O(g)$ כלומר קיים $c > 0$ וקיים $n_0 \in \mathbb{N}$ כך שמתקיים $(\sin x + 2)x^2 + 1 \le cx \iff f \le c\cdot g$ לכל $x > n_0$.

$$x^2 + 1 \le (\sin x + 2)x^2 + 1 \le cx$$
$$x^2 - cx + 1 < 0$$

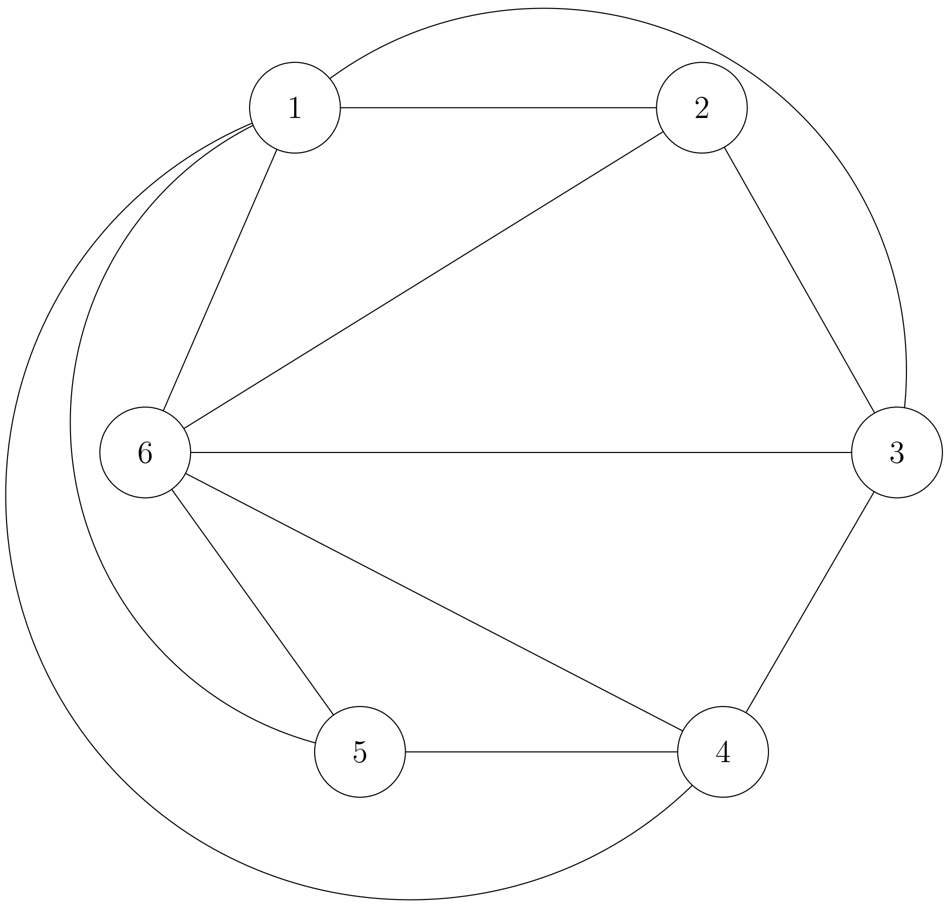
אם $\Delta = c^2 - 4 < 0$ אין פתרון לאי שוויון הנ"ל והגענו לסתירה אחרת נקבל:

$$\frac{c - \sqrt{c^2-4}}{2} \le x \le \frac{c + \sqrt{c^2-4}}{2}$$

אז ניקח $x > \frac{c+\sqrt{c^2-4}}{2}$ ונקבל סתירה לאי השוויון הנ"ל. באותו אופן ניתן להניח בשלילה שמתקיים $f = \Omega(g)$ ולהגיע לסתירה, לפיכך הדוגמה הנ"ל אכן דוגמה נגדית לטענה.

4.

- נשים לב שב-K_6 יש בדיוק $\binom{6}{2} = \frac{6\cdot 5}{2} = 15$ צלעות אם נסיר שתי צלעות ניוותר עם 13 צלעות לפיכך נניח בשלילה שהוא מישורי ולכן מתקיים $e \le 3v - 6$ כלומר $13 \le 3\cdot 6 - 6 = 12$ סתירה.
- ראה ציור



5.
- ברור שבמקרה זה היונים זה הקודקודים והדרגות הם השובכים, נשים לב שאם קיים קודקוד בעל דרגה $n-1$ אז לא קיים קודקוד מדרגה 0 ולהפך לכן יש לנו לכל הפחות $n-1$ דרגות ו-n קודקודים, ע"פ עקרון שובך היונים יש שני קודקודים עם אותה דרגה.
-

$$n\delta = \sum_{v\in V} \delta \leq \sum_{v\in V} deg\left(v\right) \leq \sum_{v\in V} \Delta = n\Delta$$

$$\sum_{v\in V} deg\left(v\right) = 2m$$

$$n\delta \leq 2m \leq n\Delta$$

$$\delta \leq \frac{2m}{n} \leq \Delta$$

קיץ 2016 מועד א'

1.
   - נמספר את רכיבי הקשירות במספרים שונים בין 1 ל-n ונגדיר $\forall_{1\le i\le d} n_i$ מספר הקודקודים ברכיב קשירות ה-אי באותו אופן נגדיר m_i בפרט מתקיים ש-$\forall_{1\le i\le d} m_i = n_i - 1$ וכן מתקיים $\sum_{i=1}^{d} m_i = m$, $\sum_{i=1}^{d} n_i = n$ שכן קבוצת הצלעות והקודודים זרים בין כל שני רכיבי קשירות מהגדרת רכיבי הקשירות, לפיכך מתקיים

$$\sum_{i=1}^{d} m_i = \sum_{i=1}^{d}(n_i - 1) = \sum_{i=1}^{d} n_i - \sum_{i=1}^{d} 1 = n - d$$

   - נוכיח טענה חזקה יותר, נראה באינדוקציה על m שבגרף עם m צלעות יש לפחות $n-m$ רכיבי קשירות, אם $m = n-2$ נקבל מהמשפט שנוכיח כי בגרף יש לפחות שני רכיבי קשירות, לפיכך יתקיים $m \geq n-1$ בגרף קשיר.

     הוכחת טענת העזר: עבור $m = 0$ יש n רכיבי קשירות. כעת נניח שהטענה נכונה עבור $m-1$ ונוכיח עבור m. יהא G גרף עם m צלעות. יהא $e \in E(G)$ צלע בגרף נסתכל על הגרף עם $G' = (V, E \setminus \{e\}$, בגרף זה יש $m-1$ צלעות. ע"פ הנחת האינדוקציה קיימים לפחות $n-(m-1)$ רכיבי קשירות, נוסיף חזרה את $\{e\}$ ונשקול את המקרים האפשריים

     - הצלע e חיברה שני רכיבי קשירות לכן יש לפחות $n-m+1-1$ רכיבי קשירות והטענה נובעת.
     - אחרת הצלע לא חיברה שום רכיב קשירות והטענה נובעת כי אם יש לפחות $n-m+1$ רכיבי קשירות בפרט יש לפחות $n-m$ רכיבי קשירות.

     דרך נוספת לסעיף ב': יהי T תת גרף קשיר של G על כל הקודקודים של G כלומר $V_G = V_T$, כך שמספר הצלעות ב-T הוא מנימלי, אם ב-T יש $n-1$ קשתות.

     הוכחת טענת העזר: נניח בשלילה שלא אזי ב-T יש לפחות m קשתות, ע"פ משפט בגרף עם $m \geq n$ קיים מעגל. תהי e צלע החלה במעגל. נסתכל על $T \setminus \{e\}$ הגרף הנ"ל קשיר שכן כל בין שני קודקודים שהיה מסלול שעבר דרך הצלע $\{e\}$ ניתן לחליף את הצלע בהליכה על הצלעות שחלו במעגל ונותרו בגרף. לפיכך קיבלנו גרף קשיר החל על כל הקודקודים עם מספר קטן יותר של צלעות, סתירה למינימליות של T.

2.

3. **סעיף א' + סעיף ב':** נפתור בעיה כללית יותר: כמה פונקציות על יש מקבוצה בגודל n לקבוצה בגודל k כך שלכל $x_2 > x_1$ מתקיים $f(x_2) \geq f(x_1)$? ברור שכאשר $n < k$ אין פתרון כזה. עבור $k \leq n$ נוכל לחשוב על k האיברים כתאים ועל n האיברים כעצמים זהים(למה זהים? כי ברגע שקבענו

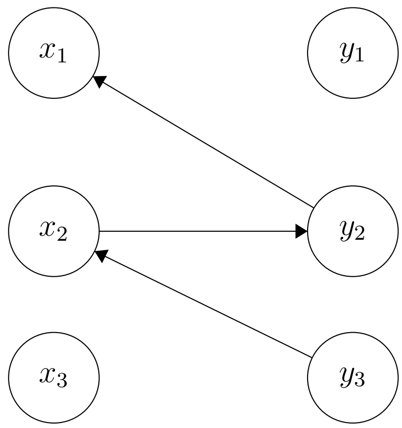
כמה איברים נשלחים לכל איבר מ-$[k]$ האיברים, אז יש אז המונוטוניות של הפונקציה קובעת פונקציה אחת ויחידה.) אומנם אנו צריכים לדאוג כי אף תא לא יוותר ריק ולכן נכניס מלכתחילה לכל תא כדור איבר ולאחר מכן נחלק את שאר העצמים. סה"כ נקבל:

$$\binom{\overset{\text{תאים\#}}{k} + \overset{\text{לכל תא חילקנו כדור}}{n-k} - 1}{k-1} = \binom{n-1}{k-1}$$

סעיף ג': נצטרך לבחור בשיטה אחרת, כי עכשיו אין את המונוטוניות שתיקבע לנו את הסדר, ואם אנחנו נכפיל בסוף ב- $(n+3)!$ אנחנו ניתן חשיבות לסדר של הכדורים בין התאים שיש בהם יותר מכדור אחד אבל הסדר הזה לא משנה, אומנם מישהו יכול לנסות לתקן ולחלק בכמה פעמים ספרנו כפול כל תא כזה, אך הבעיה היא שיש תאים שספרנו כפול $2!$ פעמים (התאים עם שני כדורים) ויש תאים שספרנו $3!$ פעמים (התאים עם שלוש כדורים) ויש שני מקרים זרים, ואין לנו מושג באיזה מקרה אנחנו.

תשע"ח סמסטר ב'- מועד ב'

1. דוגמה נגדית:



אם הייו מבקשים בנוסף שהגרף יהיה קשיר אז היינו צריכים להוכיח שהטענה נכונה, כיוון שיש בגרף מעגל אוילר מתקיים $\forall_{v\in V}\deg v\geq 2$ ובנוסף כל הדרגות זוגיות. ∎