导航

C++博客
首页
新随笔
联系
XML聚合
管理

< 2015年11月 >

日	一	二	三	四	五	六
25	26	27	28	29	30	31
1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	1	2	3	4	5

常用链接

我的随笔
我的评论
我参与的随笔
留言簿(22)

给我留言
查看公开留言
查看私人留言
随笔分类(102)

Pygame(6)(rss)
Sgu 题解(6)(rss)
区域赛 解题报告(8)(rss)
树状数组(19)(rss)
数学(8)(rss)
算法专辑(12)(rss)
线段树(39)(rss)
游戏开发(4)(rss)
文章分类(22)

ACM(22)(rss)
ACM

Aekdycoin
hhanger
javac++
Roba
sha崽
starvae
Teddy
流浪的枫之语
三鲜
亦纷菲幻剑
逐青
搜索

搜索

积分与排名

积分 - 349065
排名 - 57
最新评论 XML

1. re: 高斯消元

夜深人静写算法（四） - 差分约束

目录

一、引例

1、一类不等式组的解

给定n个变量和m个不等式，每个不等式形如 x[i] - x[j] <= a[k] (0 <= i, j < n, 0 <= k < m, a[k]已知)，求 x[n-1] - x[0] 的最大值。例如当n = 4，m = 5，不等式组如图一-1-1所示的情况，求x3 - x0的最大值。

$$x1 - x0 <= 2 \quad (1)$$
$$x2 - x0 <= 7 \quad (2)$$
$$x3 - x0 <= 8 \quad (3)$$
$$x2 - x1 <= 3 \quad (4)$$
$$x3 - x2 <= 2 \quad (5)$$

图一-1-1

观察x3 - x0的性质，我们如果可以通过不等式的两两加和得到c个形如 x3 - x0 <= Ti 的不等式，那么 min{ Ti | 0 <= i < c } 就是我们要求的x3 - x0的最大值。于是开始人肉，费尽千辛万苦，终于整理出以下三个不等式：

1. **(3)** x3 - x0 <= 8
2. **(2) + (5)** x3 - x0 <= 9
3. **(1) + (4) + (5)** x3 - x0 <= 7

这里的T等于{8， 9， 7}，所以min{ T } = 7，答案就是7。的确是7吗？我们再仔细看看，发现的确没有其它情况了。那么问题就是这种方法即使做出来了还是带有问号的，不能确定正确与否，如何系统地解决这类问题呢？

让我们来看另一个问题，这个问题描述相对简单，给定四个小岛以及小岛之间的有向距离，问

非常感谢你的代码和说明，让我一次就看懂了，非常感谢！

--fanyuheng

2. re: 夜深人静写算法（五） - 初等数论

C找循环节求递推式可以，也可以构造矩阵直接用矩阵快速幂啊~

--kirai

3. re: 夜深人静写算法（三） - 树状数组

博主太厉害了

--zyzhang

4. re: 夜深人静写算法（二） - 动态规划

楼主你好，例题8是不是不正确呢？把资金当价值，把概率当容量才对呀。

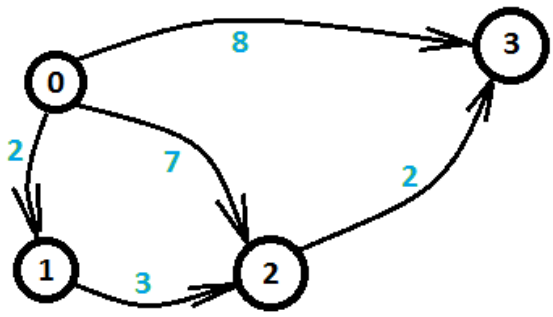
--韩

5. re: 夜深人静写算法（二） - 动态规划[未登录]

可以答疑吗？ 第一个专题 1291 HDUClosing Ceremony of Sunny Cup可以给个思路吗？想不出好的方法

--Gavin

从第0个岛到第3个岛的最短距离。如图一-1-2所示，箭头指向的线段代表两个小岛之间的有向边，蓝色数字代表距离权值。



图一-1-2

这个问题就是经典的最短路问题。由于这个图比较简单，我们可以枚举所有的路线，发现总共三条路线，如下：

1. **0 -> 3** 长度为8
2. **0 -> 2 -> 3** 长度为7+2 = 9
3. **0 -> 1 -> 2 -> 3** 长度为2 + 3 + 2 = 7

最短路为三条线路中的长度的最小值即7，所以最短路的长度就是7。这和上面的不等式有什么关系呢？还是先来看看最短路求解的原理，看懂原理自然就能想到两者的联系了。

二、最短路

1、Dijkstra

对于一个有向图或无向图，所有边权为正（边用邻接矩阵的形式给出），给定a和b，求a到b的最短路，保证a一定能够到达b。这条最短路是否一定存在呢？答案是肯定的。相反，最长路就不一定了，由于边权为正，如果遇到有环的时候，可以一直在这个环上走，因为要找最长的，这样就使得路径越变越长，永无止境，所以对于正权图，在可达的情况下最短路一定存在，最长路则不一定存在。这里先讨论正权图的最短路问题。

最短路满足最优子结构性质，所以是一个动态规划问题。最短路的最优子结构可以描述为：

D(s, t) = {Vs ... Vi ... Vj ... Vt}表示s到t的最短路，其中i和j是这条路径上的两个中间结点，那么D(i, j)必定是i到j的最短路，这个性质是显然的，可以用反证法证明。

基于上面的最优子结构性质，如果存在这样一条最短路D(s, t) = {Vs ... Vi Vt}，其中i和t是最短路上相邻的点，那么D(s, i) = {Vs ... Vi} 必定是s到i的最短路。Dijkstra算法就是基于这样一个性质，通过最短路径长度递增，逐渐生成最短路。

Dijkstra算法是最经典的最短路算法，用于计算正权图的单源最短路（**Single Source Shortest Path**，源点给定，通过该算法可以求出起点到所有点的最短路），它是基于这样一个事实：如果源点到x点的最短路已经求出，并且保存在d[x]（可以将它理解为D(s, x))上，那么可以利用x去更新 **x能够直接到达的点** 的最短路。即：

d[y] = min{ d[y], d[x] + w(x, y) }　　y为x能够直接到达的点，w(x, y) 则表示x->y这条有向边的边权

具体算法描述如下：对于图G = <V, E>，源点为s，d[i]表示s到i的最短路，visit[i]表示d[i]是否已经确定(布尔值)。

1) 初始化 所有顶点 d[i] = INF, visit[i] = false，令d[s] = 0;

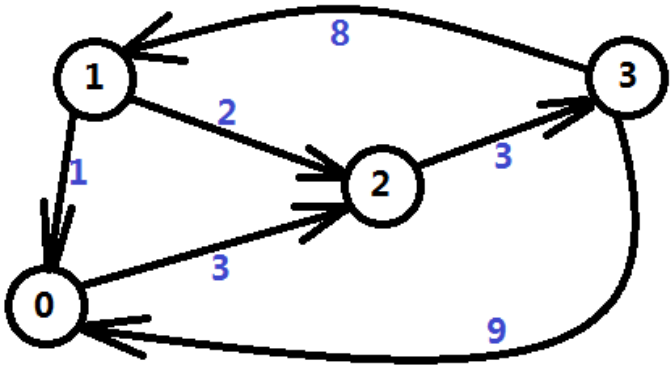
2) 从所有visit[i]为false的顶点中找到一个d[i]值最小的，令x = i; 如果找不到，算法结束;

3) 标记visit[x] = true, 更新和x直接相邻的所有顶点y的最短路： d[y] = min{ d[y], d[x] + w(x, y) }

（第三步中如果y和x并不是直接相邻，则令w(x, y) = INF）

2、图的存储

以上算法的时间复杂度为O(n^2)，n为结点个数，即每次找一个d[i]值最小的，总共n次，每次找到后对其它所有顶点进行更新，更新n次。由于算法复杂度是和点有关，并且平方级别的，所以还是需要考虑一下点数较多而边数较少的情况，接下来以图一-2-1为例讨论一下边的存储方式。



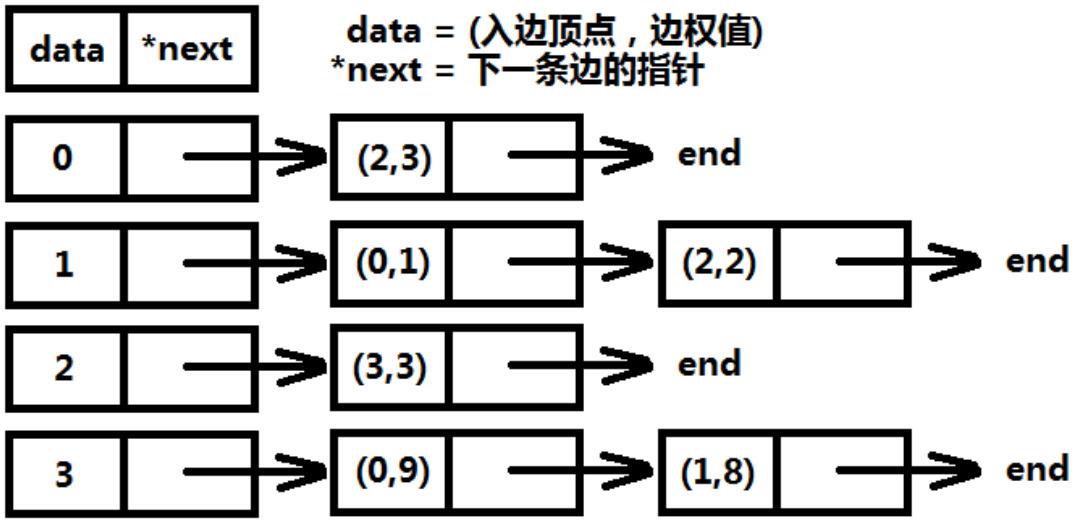
图一-2-1

邻接矩阵是直接利用一个二维数组对边的关系进行存储，矩阵的第i行第j列的值 表示 i -> j 这条边的权值；特殊的，如果不存在这条边，用一个特殊标记来表示；如果i == j，则权值为0。它的优点是实现非常简单，而且很容易理解；缺点也很明显，如果这个图是一个非常稀疏的图，图中边很少，但是点很多，就会造成非常大的内存浪费，点数过大的时候根本就无法存储。图一-2-2展示了图一-2-1的邻接矩阵表示法。

$$\begin{bmatrix} 0 & \infty & 3 & \infty \\ 1 & 0 & 2 & \infty \\ \infty & \infty & 0 & 3 \\ 9 & 8 & \infty & 0 \end{bmatrix}$$

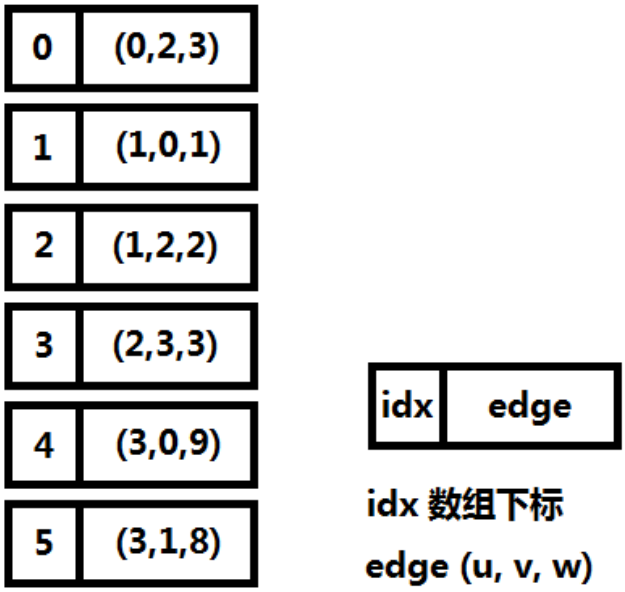
图一-2-2

邻接表是图中常用的存储结构之一，每个顶点都有一个链表，这个链表的数据表示和当前顶点直接相邻的顶点（如果边有权值，还需要保存边权信息）。邻接表的优点是对于稀疏图不会有数据浪费，缺点就是实现相对麻烦，需要自己实现链表，动态分配内存。图一-2-3展示了图一-2-1的邻接表表示法。



图一-2-3

前向星是以存储边的方式来存储图，先将边读入并存储在连续的数组中，然后按照边的起点进行排序，这样数组中起点相等的边就能够在数组中进行连续访问了。它的优点是实现简单，容易理解，缺点是需要在所有边都读入完毕的情况下对所有边进行一次排序，带来了时间开销，实用性也较差，只适合离线算法。图一-2-4展示了图一-2-1的前向星表示法。



图二-2-4

那么用哪种数据结构才能满足所有图的需求呢？这里介绍一种新的数据结构——链式前向星。

3、链式前向星

链式前向星和邻接表类似，也是链式结构和线性结构的结合，每个结点i都有一个链表，链表的所有数据是从i出发的所有边的集合（对比邻接表存的是顶点集合），边的表示为一个四元组(u, v, w, next)，其中(u, v)代表该条边的有向顶点对，w代表边上的权值，next指向下一条边。

具体的，我们需要一个边的结构体数组 edge[MAXM]，MAXM表示边的总数，所有边都存储在这个结构体数组中，并且用head[i]来指向 i 结点的第一条边。

边的结构体声明如下：

```
struct EDGE {
    int u, v, w, next;
    EDGE() {}
    EDGE(int _u, int _v, int _w, int _next) {
        u = _u, v = _v, w = _w, next = _next;
    }
}edge[MAXM];
```

初始化所有的head[i] = INF，当前边总数 edgeCount = 0

每读入一条边，调用addEdge(u, v, w)，具体函数的实现如下：

```
void addEdge(int u, int v, int w) {
    edge[ edgeCount ] = EDGE(u, v, w, head[u]);
    head[u] = edgeCount ++;
}
```

这个函数的含义是每加入一条边(u, v)，就在原有的链表结构的首部插入这条边，使得每次插入的时间复杂度为O(1)，所以链表的边的顺序和读入顺序正好是逆序的。这种结构在无论是稠密的还是稀疏的图上都有非常好的表现，空间上没有浪费，时间上也是最小开销。

调用的时候只要通过head[i]就能访问到由 i 出发的第一条边的编号，通过编号到edge数组进行索引可以得到边的具体信息，然后根据这条边的next域可以得到第二条边的编号，以此类推，直到next域为INF（这里的INF即head数组初始化的那个值，一般取-1即可）。

4、Dijkstra + 优先队列(小顶堆)

有了链式前向星，再来看Dijkstra算法，我们关注算法的第3)步，对和x直接相邻的点进行更新的时候，不再需要遍历所有的点，而是只更新和x直接相邻的点，这样总的更新次数就和顶点数n无关了，总更新次数就是总边数m，算法的复杂度变成了O(n^2 + m)，之前的复杂度是O(n^2)，但是有两个n^2的操作，而这里是一个，原因在于找d值最小的顶点的时候还是一个O(n)的轮询，总共n次查找。那么查找d值最小有什么好办法呢？

数据结构中有一种树，它能够在O(log(n))的时间内插入和删除数据，并且在O(1)的时间内得到当前数据的最小值，这个和我们的需求不谋而合，它就是**最小二叉堆**(小顶堆)，具体实现不讲了，比较简单，可以自行百度。

在C++中，可以利用STL的优先队列(priority_queue)来实现获取最小值的操作，这里直接给出利用优先队列优化的Dijkstra算法的类C++伪代码（请勿直接复制粘贴到C++编译器中编译执

行），然后再进行讨论：

```
    void Dijkstra_Heap(s) {
        for(i =0; i < n; i++) {
            d[i] = (i == s) ?0 : INF;  // 注释1
        }
        q.push( (d[s], s) );            // 注释2
        while( !q.empty() ) {
            (dist, u) = q.top();        // 注释3
            q.pop();                    // 注释4
            for (e = head[u]; e != INF; e = edge[e].next) {
                v = edge[e].v;
                w = edge[e].w;
                if(d[u] + w < d[v]) {
                    d[v] = d[u] + w;
                    path[v] = u;
                    q.push( (d[v], v) );
                }
            }
        }
    }
```

注释1：初始化s到i的初始最短距离，d[s] = 0

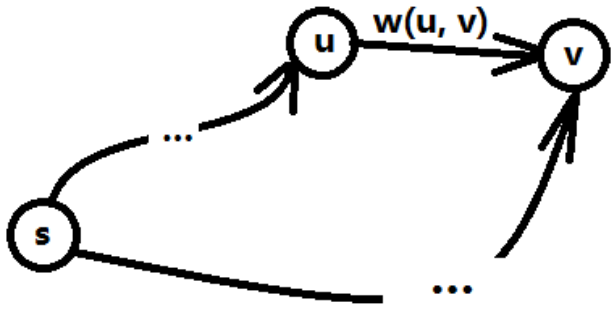
注释2：q即优先队列，这里略去声明是为了将代码简化，让读者能够关注算法本身而不是关注具体实现，　push是执行优先队列的插入操作，插入的数据为一个二元组(d[u], u)

注释3：执行优先队列的获取操作，获取的二元组为当前队列中d值最小的

注释4：执行优先队列的删除操作，删除队列顶部的元素（即注释3中d值最小的那个二元组）

以上伪代码中的主体部分竟然没有任何注释，这是因为我要用黑色的字来描述它的重要性，而注释只是注释一些和语法相关的内容。

主体代码只有一个循环，这个循环就是遍历了u这个结点的边链表，其中e为边编号，edge[e].w即上文提到的w(u, v)，即u ->v 这条边的权值，而**d[u] + w(u, v) < d[v]表示从起点s到u，再经过(u, v)这条边到达v的最短路比之前其它方式到达v的最短路还短**，如图二-4-1所示，如果满足这个条件，那么就更新这条最短路，并且利用path数组来记录最短路中每个结点的前驱结点，path[v] = u，表示到达v的最短路的前驱结点为u。



s到u的最短路已经确定的情况下更新s到v的最短路

图二-4-1

补充一点，这个算法求出的是一棵最短路径树，其中s为根结点，结点之间的关系是通过path数组来建立的，path[v] = u，表明u为v的父结点（树的存储不一定要存儿子结点，也可以用存父结点的方式表示）。

考虑这个算法的复杂度，如果用n表示点数，m表示边数，那么优先队列中最多可能存在的点数有多少？因为我们在把顶点插入队列的时候并没有判断队列中有没有这个点，而且也不能进行这样的判断，因为新插入的点一定会取代之前的点（距离更短才会执行插入），所以同一时间队列中的点有可能重复，插入操作的上限是m次，所以最多有m个点，那么一次插入和删除的操作的平摊复杂度就是O(logm)，但是每次取距离最小的点，对于有多个相同点的情况，如果那个点已经出过一次队列了，下次同一个点出队列的时候它对应的距离一定比之前的大，不需要用它去更新其它点，因为一定不可能更新成功，所以真正执行更新操作的点的个数其实只有n个，所以总体下来的平均复杂度为O((m+n)log m)，而这个只是理论上界，一般问题中都是很快就能找到最短路的，所以实际复杂度会比这个小很多，相比O(n^2)的算法已经优化了很多了。

Dijkstra算法求的是正权图的单源最短路问题，对于权值有负数的情况就不能用Dijkstra求解了，因为如果图中存在负环，Dijkstra带优先队列优化的算法就会进入一个死循环，因为可以从起点走到负环处一直将权值变小 。对于带负权的图的最短路问题就需要用到Bellman-Ford算法了。

5、Bellman-Ford

Bellman-Ford算法可以在最短路存在的情况下求出最短路，并且在存在负权圈的情况下告诉你最短路不存在，前提是起点能够到达这个负权圈，因为即使图中有负权圈，但是起点到不了负权圈，最短路还是有可能存在的。它是基于这样一个事实：一个图的最短路如果存在，那么最短路中必定不存在圈，所以最短路的顶点数除了起点外最多只有n-1个。

Bellman-Ford同样也是利用了最短路的最优子结构性质，用d[i]表示起点s到i的最短路，那么边数上限为 j 的最短路可以通过边数上限为 j-1 的最短路 加入一条边 得到，通过n-1次迭代，最后求得s到所有点的最短路。

具体算法描述如下：对于图G = <V, E>，源点为s，d[i]表示s到i的最短路。

1) 初始化 所有顶点 d[i] = INF, 令d[s] = 0，计数器 j = 0；

2) 枚举每条边(u, v)，如果d[u]不等于INF并且 d[u] + w(u, v) < d[v]，则令d[v] = d[u] + w(u, v)；

3) 计数器j + +，当j = n - 1时算法结束，否则继续重复2)的步骤；

第2)步的一次更新称为边的"松弛"操作。

以上算法并没有考虑到负权圈的问题，如果存在负圈权，那么第2)步操作的更新会永无止境，所以判定负权圈的算法也就出来了，只需要在第n次继续进行第2)步的松弛操作，如果有至少一条边能够被更新，那么必定存在负权圈。

这个算法的时间复杂度为O(nm)，n为点数，m为边数。

这里有一个小优化，我们可以注意到第2)步操作，每次迭代第2)步操作都是做同一件事情，也就是说如果第k(k <= n-1)次迭代的时候没有任何的最短路发生更新，即所有的d[i]值都未发生变化，那么第k+1次必定也不会发生变化了，也就是说这个算法提前结束了。所以可以在第2)操作开始的时候记录一个标志，标志初始为false，如果有一条边发生了松弛，那么标志置为true，所有边枚举完毕如果标志还是false则提前结束算法。

这个优化在一般情况下很有效，因为往往最短路在前几次迭代就已经找到最优解了，但是也不排除上文提到的负权圈的情况，会一直更新，使得整个算法的时间复杂度达到上限O(nm)，那么如何改善这个算法的效率呢？接下来介绍改进版的Bellman-Ford —— SPFA。

6、SPFA

SPFA(**Shortest Path Faster Algorithm**)是基于Bellman-Ford的思想，采用先进先出(**FIFO**)队列进行优化的一个计算单源最短路的快速算法。

类似Bellman-Ford的做法，我们用数组d记录每个结点的最短路径估计值，并用链式前向星来存储图G。利用一个先进先出的队列用来保存待松弛的结点，每次取出队首结点u，并且枚举从u出发的所有边(u, v)，如果d[u] + w(u, v) < d[v]，则更新d[v] = d[u] + w(u, v)，然后判断v点在不在队列中，如果不在就将v点放入队尾。这样不断从队列中取出结点来进行松弛操作，直至队列空为止。

只要最短路径存在，SPFA算法必定能求出最小值。因为每次将点放入队尾，都是经过松弛操作达到的。即每次入队的点v对应的最短路径估计值d[v]都在变小。所以算法的执行会使d越来越小。由于我们假定最短路一定存在，即图中没有负权圈，所以每个结点都有最短路径值。因此，算法不会无限执行下去，随着d值的逐渐变小，直到到达最短路径值时，算法结束，这时的最短路径估计值就是对应结点的最短路径值。

那么最短路径不存在呢？如果存在负权圈，并且起点可以通过一些顶点到达负权圈，那么利用SPFA算法会进入一个死循环，因为d值会越来越小，并且没有下限，使得最短路不存在。那么我们假设不存在负权圈，则任何最短路上的点必定小于等于n个（没有圈），换言之，用一个数组c[i]来记录i这个点入队的次数，所有的c[i]必定都小于等于n，所以一旦有一个c[i] > n，则表明这个图中存在负权圈。

接下来给出SPFA更加直观的理解，假设图中所有边的边权都为1，那么SPFA其实就是一个BFS（Breadth First Search，广度优先搜索），对于BFS的介绍可以参阅搜索入门。BFS首先到达的顶点所经历的路径一定是最短路(也就是经过的最少顶点数)，所以此时利用数组记录节点访问可以使每个顶点只进队一次，但在至少有一条边的边权不为1的带权图中，最先到达的顶点的路径

不一定是最短路，这就是为什么要用d数组来记录当前最短路估计值的原因了。

最后给出SPFA的类C++伪代码（请勿直接复制粘贴到C++编译器中编译执行）：

```
bool spfa(s) {
    for(i = 0; i < n; i++) {
        d[i] = (i == s) ? 0 : INF;
        inq[i] = (i == s);                    // 注释1
        visitCount[i] = 0;
    }
    q.push( (d[s], s) );
    while( !q.empty() ) {
        (dist, u) = q.front();                // 注释2
        q.pop();
        inq[u] = false;
        if( visitCount[u]++ > n ) {           // 注释3
            return true;
        }
        for (e = head[u]; e != INF; e = edge[e].next) {
            v = edge[e].v;
            w = edge[e].w;
            if(d[u] + w < d[v]) {             // 注释4
                d[v] = d[u] + w;
                if ( !inq[v] ) {
                    inq[v] = true;
                    q.push( (d[v], v) );
                }
            }
        }
    }
    return false;
}
```

注释1：inq[i]表示结点i是否在队列中，初始时只有s在队列中；

注释2：q.front()为FIFO队列的队列首元素；

注释3：判断是否存在负权圈，如果存在，函数返回true；

注释4：和Dijkstra优先队列优化的算法很相似的松弛操作；

以上伪代码实现的SPFA算法的最坏时间复杂度为O(nm)，其中n为点数，m为边数，但是一般不会达到这个上界，一般的期望时间复杂度为O(km)， k为常数，m为边数（这个时间复杂度只是估计值，具体和图的结构有很大关系，而且很难证明，不过可以肯定的是至少比传统的Bellman-Ford高效很多，所以一般采用SPFA来求解带负权圈的最短路问题）。

7、Floyd-Warshall

最后介绍一个求任意两点最短路的算法，很显然，我们可以求n次单源最短路（枚举起点），但是下面这种方法更加容易编码，而且很巧妙，它也是基于动态规划的思想。

令d[i][j][k]为只允许经过结点[0, k]的情况下，i 到 j的最短路。那么利用最优子结构性质，有两种情况：

a. 如果最短路经过k点，则d[i][j][k] = d[i][k][k-1] + d[k][j][k-1];

b. 如果最短路不经过k点，则d[i][j][k] = d[i][j][k-1];

于是有状态转移方程： d[i][j][k] = min{ d[i][j][k-1], d[i][k][k-1] + d[k][j][k-1] } (0 <= i, j, k < n)

这是一个3D/0D问题，只需要按照k递增的顺序进行枚举，就能在O(n^3)的时间内求解，又第三维的状态可以采用滚动数组进行优化，所以空间复杂度为O(n^2)。

三、差分约束

1、数形结合

介绍完最短路，回到之前提到的那个不等式组的问题上来，我们将它更加系统化。

如若一个系统由n个变量和m个不等式组成，并且这m个不等式对应的系数矩阵中每一行有且仅有一个1和-1，其它的都为0，这样的系统称为**差分约束(difference constraints)**系统。引例

中的不等式组可以表示成如图三-1-1的系数矩阵。

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x0 \\ x1 \\ x2 \\ x3 \end{pmatrix} \leqslant \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 8 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

图三-1-1

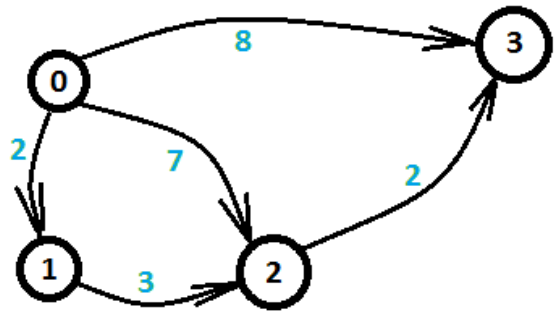
然后继续回到单个不等式上来，观察 x[i] - x[j] <= a[k]， 将这个不等式稍稍变形，将x[j]移到不等式右边，则有x[i] <= x[j] + a[k]，然后我们令a[k] = w(j, i)，再将不等式中的i和j变量替换掉，i = v， j = u，将x数组的名字改成d（以上都是等价变换，不会改变原有不等式的性质），则原先的不等式变成了以下形式：d[u] + w(u, v) >= d[v]。

这时候联想到SPFA中的一个松弛操作：

```
if(d[u] + w(u, v) < d[v]) {
    d[v] = d[u] + w(u, v);
}
```

对比上面的不等式，两个不等式的不等号正好相反，但是再仔细一想，其实它们的逻辑是一致的，因为SPFA的松弛操作是在满足小于的情况下进行松弛，力求达到d[u] + w(u, v) >= d[v]，而我们之前令a[k] = w(j, i)，所以我们可以将每个不等式转化成图上的有向边：

对于每个不等式 x[i] - x[j] <= a[k]，对结点 j 和 i 建立一条 j -> i的有向边，边权为a[k]，求x[n-1] - x[0] 的最大值就是求 0 到n-1的最短路。



图三-1-2

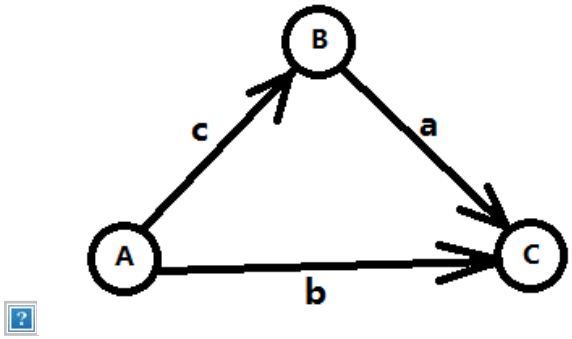
图三-1-2 展示了 图三-1-1的不等式组转化后的图。

2、三角不等式

如果还没有完全理解，我们可以先来看一个简单的情况，如下三个不等式：

B - A <= c (1)
C - B <= a (2)
C - A <= b (3)

我们想要知道C - A的最大值，通过(1) + (2)，可以得到 C - A <= a + c，所以这个问题其实就是求min{b, a+c}。将上面的三个不等式按照 **三-1 数形结合** 中提到的方式建图，如图三-2-1所示。

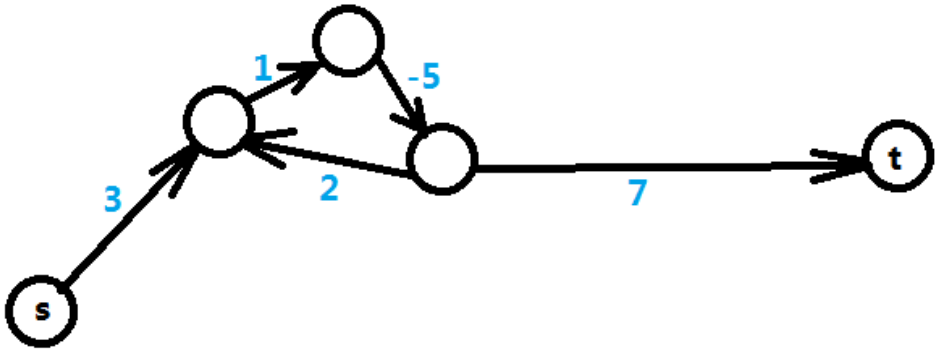


图三-2-1

我们发现min{b, a+c}正好对应了A到C的最短路，而这三个不等式就是著名的**三角不等式**。将三个不等式推广到m个，变量推广到n个，就变成了n个点m条边的最短路问题了。

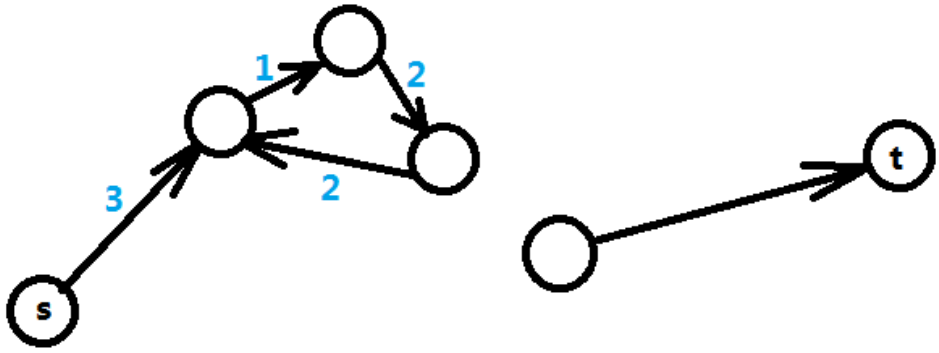
3、解的存在性

上文提到最短路的时候，会出现负权圈或者根本就不可达的情况，所以在不等式组转化的图上也有可能出现上述情况，先来看负权圈的情况，如图三-3-1，下图为5个变量5个不等式转化后的图，需要求得是X[t] - X[s]的最大值，可以转化成求s到t的最短路，但是路径中出现负权圈，则表示最短路无限小，即不存在最短路，那么在不等式上的表现即X[t] - X[s] <= T中的T无限小，得出的结论就是 X[t] - X[s]的最大值 不存在。



图三-3-1

再来看另一种情况，即从起点s无法到达t的情况，如图三-3-2，表明X[t]和X[s]之间并没有约束关系，这种情况下X[t] - X[s]的最大值是无限大，这就表明了X[t]和X[s]的取值有无限多种。



图三-3-2

在实际问题中这两种情况会让你给出不同的输出。综上所述，差分约束系统的解有三种情况：1、有解；2、无解；3、无限多解；

4、最大值 => 最小值

然后，我们将问题进行一个简单的转化，将原先的"<="变成">="，转化后的不等式如下：

B - A >= c (1)
C - B >= a (2)
C - A >= b (3)

然后求C - A的最小值，类比之前的方法，需要求的其实是max{b, c+a}，于是对应的是图三-2-1从A到C的最长路。同样可以推广到n个变量m个不等式的情况。

5、不等式标准化

如果给出的不等式有"<="也有">="，又该如何解决呢？很明显，首先需要关注最后的问题是什么，如果需要求的是两个变量差的最大值，那么需要将所有不等式转变成"<="的形式，建图后求最短路；相反，如果需要求的是两个变量差的最小值，那么需要将所有不等式转化成">="，建图后求最长路。

如果有形如：A - B = c 这样的等式呢？我们可以将它转化成以下两个不等式：

A - B >= c (1)
A - B <= c (2)

再通过上面的方法将其中一种不等号反向，建图即可。

最后，如果这些变量都是整数域上的，那么遇到A - B < c这样的不带等号的不等式，我们需要将它转化成"<="或者">="的形式，即 A - B <= c - 1。

四、差分约束的经典应用

1、线性约束

线性约束一般是在一维空间中给出一些变量（一般定义位置），然后告诉你某两个变量的约

束关系，求两个变量a和b的差值的最大值或最小值。

【例题1】N个人编号为1-N，并且按照编号顺序排成一条直线，任何两个人的位置不重合，然后给定一些约束条件。

X(X <= 100000)组约束Ax Bx Cx(1 <= Ax < Bx <= N)，表示Ax和Bx的距离不能大于Cx。

Y(X <= 100000)组约束Ay By Cy(1 <= Ay < By <= N)，表示Ay和By的距离不能小于Cy。

如果这样的排列存在，输出1-N这两个人的最长可能距离，如果不存在，输出-1，如果无限长输出-2。

像这类问题，N个人的位置在一条直线上呈线性排列，某两个人的位置满足某些约束条件，最后要求第一个人和最后一个人的最长可能距离，这种是最直白的差分约束问题，因为可以用距离作为变量列出不等式组，然后再转化成图求最短路。

令第x个人的位置为d[x]（不妨设d[x]为x的递增函数，即随着x的增大，d[x]的位置朝着x正方向延伸）。

那么我们可以列出一些约束条件如下：

1、对于所有的Ax Bx Cx，有 d[Bx] - d[Ax] <= Cx;

2、对于所有的Ay By Cy，有 d[By] - d[Ay] >= Cy;

3、然后根据我们的设定，有 d[x] >= d[x-1] + 1 (1 < x <= N) （这个条件是表示任何两个人的位置不重合）

而我们需要求的是d[N] - d[1]的最大值，即表示成d[N] - d[1] <= T，要求的就是这个T。

于是我们将所有的不等式都转化成d[x] - d[y] <= z的形式，如下：

1、d[Bx] - d[Ax] <= Cx

2、d[Ay] - d[By] <= -Cy

3、d[x-1] - d[x] <= -1

对于d[x] - d[y] <= z，令z = w(y, x)，那么有 d[x] <= d[y] + w(y, x)，所以当d[x] > d[y] + w(y, x)，我们需要更新d[x]的值，这对应了最短路的松弛操作，于是问题转化成了求1到N的最短路。

对于所有满足d[x] - d[y] <= z的不等式，从y向x建立一条权值为z的有向边。

然后从起点1出发，利用SPFA求到各个点的最短路，如果1到N不可达，说明最短路(即上文中的T)无限长，输出-2。如果某个点进入队列大于等于N次，则必定存在一条负环，即没有最短路，输出-1。否则T就等于1到N的最短路。

2、区间约束

【例题2】给定n（n <= 50000）个整点闭区间和这个区间中至少有多少整点需要被选中，每个区间的范围为[ai, bi]，并且至少有ci个点需要被选中，其中0 <= ai <= bi <= 50000，问[0, 50000]至少需要有多少点被选中。

例如3 6 2 表示[3, 6]这个区间至少需要选择2个点，可以是3,4也可以是4,6（总情况有 C(4, 2)种 ）。

这类问题就没有线性约束那么明显，需要将问题进行一下转化，考虑到最后需要求的是一个完整区间内至少有多少点被选中，试着用d[i]表示[0, i]这个区间至少有多少点能被选中，根据定义，可以抽象出 d[-1] = 0，对于每个区间描述，可以表示成d[bi] - d[ai - 1] >= ci，而我们的目标要求的是 d[50000] - d[-1] >= T 这个不等式中的T，将所有区间描述转化成图后求-1到50000的最长路。

这里忽略了一些要素，因为d[i]描述了一个求和函数，所以对于d[i]和d[i-1]其实是有自身限制的，考虑到每个点有选和不选两种状态，所以d[i]和d[i-1]需要满足以下不等式： 0 <= d[i] - d[i-1] <= 1 （即第i个数选还是不选）

这样一来，还需要加入 50000*2 = 100000 条边，由于边数和点数都是万级别的，所以不能采用单纯的Bellman-Ford ，需要利用SPFA进行优化，由于-1不能映射到小标，所以可以将所有点都向x轴正方向偏移1个单位（即所有数+1）。

3、未知条件约束

未知条件约束是指在不等式的右边不一定是个常数，可能是个未知数，可以通过枚举这个未知数，然后对不等式转化成差分约束进行求解。

【例题3】在一家超市里，每个时刻都需要有营业员看管，R(i)（0 <= i < 24)表示从i时刻开始到i+1时刻结束需要的营业员的数目，现在有N(N <= 1000)个申请人申请这项工作，并且每个申请者都有一个起始工作时间 ti，如果第i个申请者被录用，那么他会连续工作8小时。现在要求选择一些申请者进行录用，使得任何一个时刻i，营业员数目都能大于等于R(i)。

i = 0 1 2 3 4 5 6 ... 20 21 22 23 23，分别对应时刻 [i, i+1)，特殊的，23表示的是[23, 0)，并且有些申请者的工作时间可能会“跨天”。

a[i] 表示在第i时刻**开始工作**的人数，是个**未知量**

b[i] 表示在第i时刻能够**开始工作**人数的上限， 是个**已知量**
R[i] 表示在第i时刻必须值班的人数，也是**已知量**
那么第i时刻到第i+1时刻还在工作的人满足下面两个不等式（利用每人工作时间8小时这个条件）：
当 i >= 7,　　a[i-7] + a[i-6] + ... + a[i] >= R[i]　　(1)
当 0 <= i < 7,（a[0] + ... + a[i]) + (a[i+17] + ... + a[23]) >= R[i]　　(2)

对于从第i时刻开始工作的人，满足以下不等式：
0 <= i < 24,　0 <= a[i] <= b[i]　　(3)
令 s[i] = a[0] + ... + a[i]，特殊地，s[-1] = 0
上面三个式子用s[i]来表示，如下：
s[i] - s[i-8] >= R[i]　　(i >= 7)　　(1)
s[i] + s[23] - s[i+16] >= R[i]　　(0 <= i < 7)　　(2)
0 <= s[i] - s[i-1] <= b[i]　　(0 <= i < 24)　　(3)

仔细观察不等式(2)，有三个未知数，这里的s[23]就是**未知条件**，所以还无法转化成差分约束求解，但是和i相关的变量只有两个，对于s[23]的值我们可以进行枚举，令s[23] = T, 则有以下几个不等式：

s[i] - s[i-8] >= R[i]
s[i] - s[i+16] >= R[i] - T
s[i] - s[i-1] >= 0
s[i-1] - s[i] >= -b[i]

对于所有的不等式 s[y] - s[x] >= c，建立一条权值为c的边 x->y，于是问题转化成了求从原点-1到终点23的最长路。
但是这个问题比较特殊，我们还少了一个条件，即：s[23] = T，它并不是一个不等式，我们需要将它也转化成不等式，由于设定s[-1] = 0，所以 s[23] - s[-1] = T，它可以转化成两个不等式：
s[23] - s[-1] >= T
s[-1] - s[23] >= -T
将这两条边补到原图中，求出的最长路s[23]等于T，表示T就是满足条件的一个解，由于T的值时从小到大枚举的（T的范围为0到N），所以第一个满足条件的解就是答案。
最后，观察申请者的数量，当i个申请者能够满足条件的时候，i+1个申请者必定可以满足条件，所以申请者的数量是满足单调性的，可以对T进行二分枚举，将枚举复杂度从O(N)降为O(logN)。

五、差分约束题集整理

最短路

Shortest Path	★☆☆☆☆	单源最短路
Shortest Path Problem	★☆☆☆☆	单源最短路 + 路径数
HDU Today	★☆☆☆☆	单源最短路
Idiomatic Phrases Game	★☆☆☆☆	单源最短路
Here We Go(relians) Again	★☆☆☆☆	单源最短路
find the safest road	★☆☆☆☆	单源最短路
Saving James Bond	★☆☆☆☆	单源最短路
A strange lift	★☆☆☆☆	单源最短路
Free DIY Tour	★☆☆☆☆	单源最短路 + 路径还原
find the safest road	★☆☆☆☆	单源最短路(多询问)
Invitation Cards	★★☆☆☆	单源最短路
Minimum Transport Cost	★★☆☆☆	单源最短路 + 路径还原
Bus Pass	★★☆☆☆	单源最短路
In Action	★★☆☆☆	单源最短路 + 背包
Choose the best route	★★☆☆☆	单源最短路 + 预处理
find the longest of the shortest	★★☆☆☆	二分枚举 + 最短路
Cycling	★★☆☆☆	二分枚举 + 最短路
Trucking	★★☆☆☆	二分枚举 + 最短路
Delay Constrained Maximum Capacity	★★☆☆☆	二分枚举 + 最短路
The Worm Turns	★★☆☆☆	四向图最长路
A Walk Through the Forest	★★☆☆☆	按照规则求路径数
find the mincost route	★★☆☆☆	无向图最小环
Arbitrage	★★☆☆☆	多源最短路

zz's Mysterious Present	★★☆☆☆	单源最短路
The Shortest Path	★★☆☆☆	多源最短路
Bus System	★★★☆☆	单源最短路
How Many Paths Are There	★★★☆☆	次短路
WuKong	★★★☆☆	两条最短路的相交点个数为P，要求最大化P
Shortest Path	★★★☆☆	多询问的最短路
Sightseeing	★★★☆☆	最短路和次短路的路径数
Travel	★★★☆☆	最短路径树思想
Shopping	★★★☆☆	
Transit search	★★★★☆	
Invade the Mars	★★★★☆	
Circuit Board	★★★★☆	
Earth Hour	★★★★☆	
Catch the Theves	★★★★☆	
差分约束		
Layout	★★☆☆☆	差分约束系统 - 最短路模型 + 判负环
World Exhibition	★★☆☆☆	差分约束系统 - 最短路模型 + 判负环
House Man	★★☆☆☆	差分约束系统 - 最短路模型 + 判负环
Intervals	★★☆☆☆	差分约束系统 - 最长路模型 边存储用链式前向星
King	★★☆☆☆	差分约束系统 - 最长路模型 + 判正环
XYZZY	★★☆☆☆	最长路 + 判正环
Integer Intervals	★★☆☆☆	限制较强的差分约束 - 可以贪心求解
THE MATRIX PROBLEM	★★★☆☆	差分约束系统 - 最长路模型 + 判正环
Is the Information Reliable?	★★★☆☆	差分约束系统 - 最长路模型 + 判正环
Advertisement	★★★☆☆	限制较强的差分约束 - 可以贪心求解
Cashier Employment	★★★☆☆	二分枚举 + 差分约束系统 - 最长路模型
Schedule Problem	★★★☆☆	差分约束系统 - 最长路模型
Candies	★★★☆☆	
Burn the Linked Camp	★★★☆☆	
Instrction Arrangement	★★★☆☆	

posted on 2015-11-19 23:44 英雄哪里出来 阅读(27093) 评论(4) 编辑 收藏 引用 所属分类: 算法专辑

评论

 # re: 夜深人静写算法（四） **-** 差分约束 回复 更多评论

写得很不错。

2015-11-30 15:53 | Sleepless Loki

 # re: 夜深人静写算法（四） **-** 差分约束 回复 更多评论

差分约束一直不懂，知道看到博主举的例子，醍醐灌顶，感谢分享

2016-04-12 12:06 | _

 # re: 夜深人静写算法（四） **-** 差分约束 回复 更多评论

spfa中为何是vcnt++>n判断负环？
假如n=10,一个点已经入队10次，那么这样写显然会允许第11次入队，那么入队次数就大于n了呀

2016-06-01 20:54 | Rapiz

 # re: 夜深人静写算法（四） **-** 差分约束 回复 更多评论

“言之，用一个数组c[i]来记录i这个点入队的次数，所有的c[i]必定都小于等于n”
这里的"小于等于"应是写错了。

入队c[i]次的点的最短路包含c[i]+1个顶点。
比如邻s的点，边权足够小，那么它只会入队1次，包含2个顶点。

又因为最短路最长包含n个顶点，所以c[i]+1<=n
推出c[i]<n

这也就解释了我上一条评论的疑问。

2016-06-01 21:00 | Rapiz

刷新评论列表

只有注册用户登录后才能发表评论。

相关文章:

- 夜深人静写算法（七）[2016 贺岁版] - 线段树
- 夜深人静写算法（六） - 最近公共祖先
- 夜深人静写算法（五） - 初等数论
- 夜深人静写算法（三） - 树状数组
- 夜深人静写算法（二） - 动态规划
- 夜深人静写算法（一） - 搜索入门
- 二维线段树
- AC自动机
- RMQ