在动态规划问题中，有一个常见的状态转移方程[1]：

$$m(i,j)=\begin{cases}\min\limits_{i<k\le j}\{m(i,k-1)+m(k,j)+w(i,j)\},i<j\\ 0,i=j\\ \infty,i>j\end{cases}\tag{1.1}$$

例如“最小代价子母树”问题，都用到了这个式子。假如对于 $i\le i'<j\le j'$，有 $w(i',j)\le w(i,j')$，那么我们称函数 w 满足　　　　　　　　　　　。另外，假如有：

$$w(i,j)+w(i',j')\le w(i',j)+w(i,j')\tag{1.2}$$

那么我们称函数 w 满足　　　　　　　　。

例如在“最小代价子母树”问题中，有 $w(i,j)+w(i',j')=w(i',j)+w(i,j')$。因此该问题中函数 w 是满足四边形不等式的。

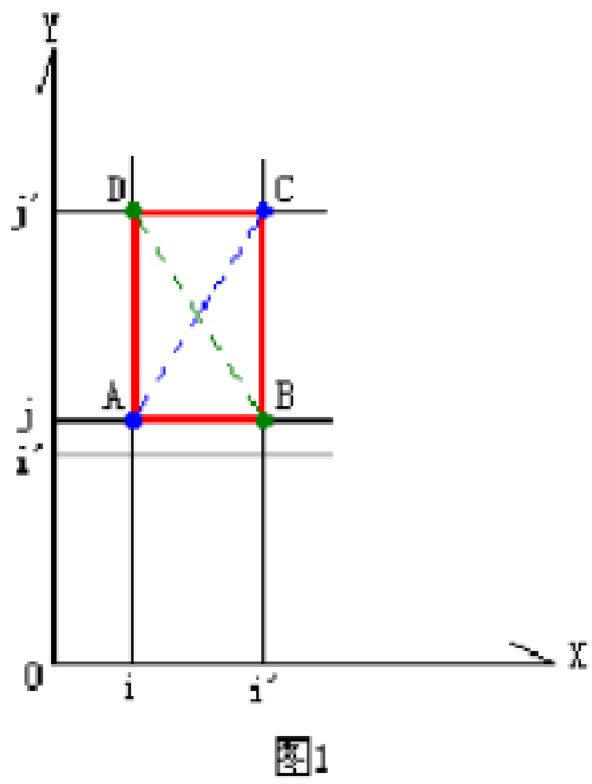

图1
四边形不等式的形象理解

左图是四边形不等式的一种形象化理解。上面的不等式在图中可以看作在四边形 ABCD 中，对角线 AC 两个端点的权值之和，不大于对角线 BD 两个端点的权值之和。

我们下面要研究的问题，是在 w 既满足关于区间包含的单调性，又满足四边形不等式的前提下进行的。

【定理 1】假如函数 w 满足上述条件，那么函数 m 也满足四边形不等式，即

$$m(i,j)+m(i',j')\le m(i',j)+m(i,j'),\quad i\le i'<j\le j'$$

证明：

当 $i=i'$ 或 $j=j'$ 时，显然有

$$m(i,j)+m(i',j')=m(i',j)+m(i,j')$$，不等式成立。

---

[1] 对于不同的问题，$m(i,j)$ 的边界取值可能不同。这对我们讨论的问题没有影响。

下面分两种情况进行归纳证明（对$l = j' - i$进行归纳）：

1　$i < i' = j < j'$

此时，四边形不等式转化为形如

$m(i, j) + m(j, j') \le m(j, j) + m(i, j') = m(i, j')$的反三角形式。

设$k = \max\left\{t \middle| m(i, j') = m(i, t-1) + m(t, j') + w(i, j')\right\}$。

由对称性，不妨假设$k \le j$。那么，有$m(i, j') = w(i, j') + m(i, t-1) + m(t, j')$。

因此，有：

$$\begin{aligned} m(i, j) + m(j, j') &\le w(i, j) + m(i, k-1) + m(k, j) + m(j, j') \\ &\le w(i, j') + m(i, k-1) + m(k, j) + m(j, j') \\ &\le w(i, j') + m(i, k-1) + m(k, j') \\ &= m(i, j') \end{aligned}$$

2　$i < i' < j < j'$

$$\text{设}\begin{cases} y = \max\left\{t \middle| m(i', j) = w(i', j) + m(i', t-1) + m(t, j)\right\} \\ z = \max\left\{t \middle| m(i, j') = w(i, j') + m(i, t-1) + m(t, j')\right\} \end{cases}$$

由对称性，不妨再假设$z \le y$。那么，由定义可知$i < z \le y \le j$。因此我们有：

$$\begin{aligned} &m(i, j) + m(i', j') \\ &\le w(i, j) + m(i, z-1) + m(z, j) + w(i', j') + m(i', y-1) + m(y, j') \\ &\le w(i, j') + w(i', j) + m(i', y-1) + m(i, z-1) + m(z, j) + m(y, j') \\ &\le w(i, j') + w(i', j) + m(i', y-1) + m(i, z-1) + m(y, j) + m(z, j') \\ &= m(i, j') + m(i', j) \end{aligned}$$

综上所述，由数学归纳法可知，函数$m(i, j)$也满足四边形不等式。证毕。

我们定义$s(i, j)$为函数$m(i, j)$对应的决策变量的最大值，即：

$$s(i, j) = \max_{i < k \le j}\left\{m(i, j) = w(i, j) + m(i, k-1) + m(k, j)\right\} \tag{1.3}$$

【定理 2】假如$m(i, j)$满足四边形不等式，那么$s(i, j)$单调，即：

$$s(i, j) \le s(i, j+1) \le s(i+1, j+1)$$

证明：

由对称性，我们仅需证明$s(i, j) \le s(i, j+1)$。在$i > j$时，$s(i, j) = s(i, j+1) = \infty$，

命题显然成立。$i=j$时，$s(i,j)=0\le s(i,j+1)$，命题也成立。下面讨论$i<j$的情况。

为了方便叙述，我们令$m_k(i,j)$表示决策变量取k的时候目标函数的值。即$m_k(i,j)=w(i,j)+m(i,k-1)+m(k,j)$。那么有$m_{s(i,j)}(i,j)=m(i,j)$。

由于$m(i,j)$满足四边形不等式，因此对于任意的$k\le k'\le j$，有：

$$m(k,j)+m(k',j+1)\le m(k',j)+m(k,j+1)$$

我们将等式两边同时加上$w(i,j)+m(i,k-1)+w(i,j+1)+m(i,k'-1)$，就可以得出

$$m_k(i,j)+m_{k'}(i,j+1)\le m_k(i,j+1)+m_{k'}(i,j)$$，即：

$$m_k(i,j)-m_{k'}(i,j)\le m_k(i,j+1)-m_{k'}(i,j+1) \tag{1.4}$$

通过(1.4)式我们可以发现，

$$m_{k'}(i,j)\le m_k(i,j)\to m_{k'}(i,j+1)\le m_k(i,j+1) \tag{1.5}$$

由于$k'\ge k$，同时对于所有的$k<s(i,j)$，有$m_{s(i,j)}(i,j)=m(i,j)\le m_k(i,j)$。有(1.5)式的蕴涵关系，我们可知$m_{s(i,j)}(i,j+1)\le m_k(i,j+1)$。因此$s(i,j+1)\ge s(i,j)$，证毕。

证明了$m(i,j)$取到最优值时的决策变量$s(i,j)$具有单调性之后，我们发觉$s(i,j-1)\le s(i,j)\le s(i+1,j)$。因此状态转移方程(1.1)等价于：

$$m(i,j)=\begin{cases}\min\limits_{s(i,j-1)\le k\le s(i+1,j)}\left\{m(i,k-1)+m(k,j)+w(i,j)\right\},i<j\\ 0,i=j\\ \infty,i>j\end{cases} \tag{1.6}$$

由于动态规划的阶段是$l=j-i$，因此我们在寻求$m(i,j)$的时候，$s(i,j-1)$和$s(i+1,j)$必定已经求出。因此我们可以缩小决策变量k的枚举范围，从而减少运算量。

状态转移方程(1.1)的时间复杂度为$O(n^3)$，而(1.6)式的复杂度为

$$
\begin{aligned}
&O\left(\sum_{l=2}^{n}\sum_{i=1}^{n+1-l}\left(1+s\left(i+1,i+l-1\right)-s\left(i,i+l-2\right)\right)\right)\\
&=O\left(\sum_{l=2}^{n}\left(n+1-l+s\left(n+2-l,n\right)-s\left(1,l-1\right)\right)\right)\\
&\le O\left(\sum_{l=2}^{n}\left[2n+1-2l\right]\right)=O\left[\left(n-1\right)^2\right]
\end{aligned}
$$

因此优化后的算法时间复杂度为$O\left(n^2\right)$。

事实上，四边形不等式并不仅仅限于(1.1)的形式。有不少与之类似的状态转移方程，也是满足四边形不等式的。

[ ]

用n个元素$e_1<e_2<\cdots<e_n$，可以构成$\dfrac{C_{2n}^{n}}{n+1}$种不同的二叉搜索树。对于一个给定的二叉搜索树T中包含值e_i的结点t_i，我们定义访问该结点的费用c_i为连接根结点和该结点的唯一路径所包含的边数。特别的，访问根结点的费用为 0。再给定n个常量$f_1,f_2,\cdots,f_n$，二叉搜索树T的总权值定义为

$$sum_T=\sum_{i=1}^{n}f_i\cdot c_i$$

我们把总权值最小的一个二叉搜索树称作“最优二叉搜索树”。给定$n,f_1,f_2,\cdots,f_n$，求最优二叉树的总权值。

[ ]

很明显，$e_1<e_2<\cdots<e_n$这个条件确定了问题的有序性。我们定义

$$w\left(i,j\right)=\begin{cases}\sum_{k=i}^{j}f_k\left(i\le j\right)\\ 0\left(i>j\right)\end{cases}$$

那么，我们可以得到状态转移方程：

$$m(i,j)=\begin{cases}\min\limits_{i\le k\le j}\left\{m(i,k-1)+w(i,k-1)+m(k+1,j)+w(k+1,j)\right\}, i<j \\ 0, i\ge j\end{cases} \tag{2.1}$$

$m(1,n)$即为所求。

[ ]

很明显，(2.1)式的时间复杂度为$O(n^3)$。但是注意到(2.1)和(1.1)的形式相当类似，因此我们试图证明其满足四边形不等式，从而得出决策变量的单调性，将该问题的复杂度降到$O(n^2)$。

首先，不难发现w满足区间包含的单调性和四边形不等式。下面我们证明m同样满足四边形不等式[②]。

当$i=i'$或$j=j'$时，不等式显然成立。下面进行归纳证明，对$l=j'-i$进行归纳：

1 $i<i'=j<j'$：

不等式转化为$m(i,j)+m(j,j')\le m(i,j')$。

设$k=\max\left\{t \middle| m(i,t-1)+w(i,t-1)+m(t+1,j)+w(t+1,j)\right\}$。有对称性，不妨假设$k\le j$。那么，有：

$$\begin{aligned}&m(i,j)+m(j,j')\\ &\le m(i,k-1)+w(i,k-1)+m(k+1,j)+w(k+1,j)+m(j,j')\\ &\le m(i,k-1)+w(i,k-1)+m(k+1,j')+w(k+1,j')\\ &=m(i,j')\end{aligned}$$

2 $i<i'<j<j'$

$$设\begin{cases}y=\max\left\{t \middle| m(i',j)=m(i',t-1)+w(i',t-1)+m(t+1,j)+w(t+1,j)\right\}\\ z=\max\left\{t \middle| m(i,j')=m(i,t-1)+w(i,t-1)+m(t+1,j')+w(t+1,j')\right\}\end{cases}$$

由对称性，不妨假设$z\le y$。那么有：$i\le z\le y\le j$。

---

② 为了节省篇幅，这里的证明省略了一些对于边界情况的讨论。

$$
\begin{aligned}
& m(i,j)+m(i',j') \\
\le & m(i,z-1)+w(i,z-1)+m(z+1,j)+w(z+1,j) \\
& +m(i',y-1)+w(i',y-1)+m(y+1,j')+w(y+1,j') \\
\le & m(i,z-1)+w(i,z-1)+m(z+1,j')+w(z+1,j') \\
& +m(i',y-1)+w(i',y-1)+m(y+1,j)+w(y+1,j) \\
= & m(i,j')+m(i',j)
\end{aligned}
$$

综上所述，由数学归纳法，命题得证。

由m满足四边形不等式，我们可以证明决策变量$s(i,j)$的单调性。证明过程和(1.1)的证明类似，这里就不再赘述了。

因此，(2.1)在$i<j$时等价于：

$$
m(i,j)=\min_{s(i,j-1)\le k\le s(i+1,j)}\left\{m(i,k-1)+w(i,k-1)+m(k+1,j)+w(k+1,j)\right\},i<j
$$

而这个状态转移方程的时间复杂度仅为$O(n^2)$。