LCA和RMQ的一些事情

推荐技术公众号：不爱睡觉的大猪

本来想详细写写LCA和RMQ的东西的，但是觉得积累得还不够而且比较懒就不写了。鉴于都是超经典问题，网上和大量书籍都是很好的学习材料，所以就不想说了

这里只简单说说原理，说说代码实现上面的一些细节和注意问题，并且给出模板

下面写提供几个学习LCA和RMQ的博客，都很通熟易懂，向博主致敬

http://dongxicheng.org/structure/lca-rmq/

这个应该是讲得最好的，且博主还有很多其他文章，可以读读，感觉认真读了这篇，都不太需要看别的资料了，百度和谷歌搜索的第一位都是他，好东西大家一起学习

http://scturtle.is-programmer.com/posts/30055

这个博客讲LCA的Tarjan算法个人觉得是比较好的，我看这篇文章，看了1个小时就搞懂了LCA的Tarjan，谢谢博主。可以认真阅读，并且看懂里面附带的那个图

其余的博客，就请百度和谷歌了，能找到很多，都很好

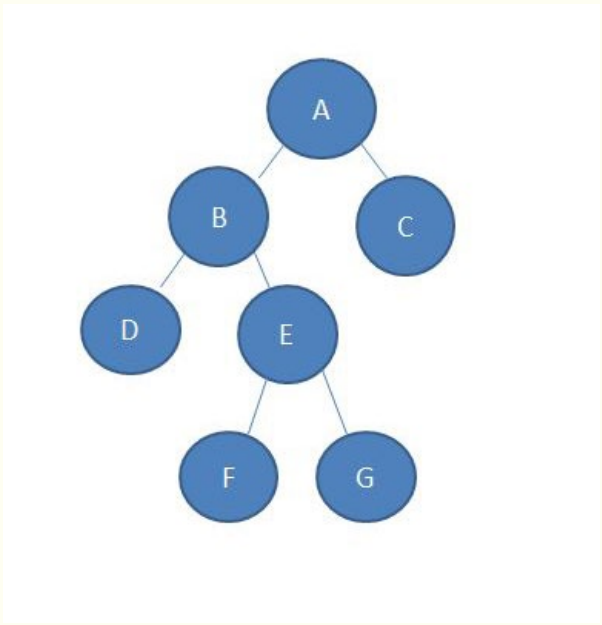
一：LCA和RMQ是可以相互转化的

往往都只是提到了LCA可以转化为RMQ去求解，其实RMQ也能转化为LCA去求解，RMQ怎么转LCA，可以看2007年的国家队论文，里面有介绍，非常好懂。不过个人觉得，RMQ转LCA，可以学习这个思想，但是实际应用中最好不要，多此一举的感觉，求解RMQ的算法很多，不必要用LCA去求解

所以下面讲讲LCA转RMQ的实现方法（只讲实现方法，具体的原理不讲，可以看书百度，不过看了实现过程，原理大概也懂了）

LCA转RMQ算法是一个在线算法：先用时间去做预处理，然后每读入一个询问，就用很短的时间去回答它，即"问一个答一个，回答时间很短"

预备知识：LCA转为RMQ后，几乎是裸的RMQ问题，RMQ问题，这里推荐ST算法求解，如果不懂ST算法，先学习一下



遍历，结果保存在数组中

数组下标:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
遍历序列：	A	B	D	B	E	F	E	G	E	B	A	C	A
节点在树中的深度:	1	2	3	2	3	4	3	4	3	2	1	2	1

要查询D和G的LCA：

1.在遍历序列中找到D和G第一次出现的位置，first[D] = 3 ， first[G] = 8 (3,8指数组下标)

2.取节点数组的[3,8]的那段序列，查询一个最小值

<3 , 2 , 3 , 4 , 3 , 4>，最小值为2，对应的节点是B，所以D,G的LCA是B

3.用ST算法可以查询到最小值，但是仅仅是知道最小值的值是多少，并不知道最小值在哪

ST算法本质是DP，在预处理构建DP数组的时候，再用另一个数组pos数组记录位置

dp[i][j] ： 表示从下标i开始长度为2^j的那段序列中的最小值

pos[i][j] ： 表示对应dp[i][j]状态的那个最小值的数组下标

例如<2,1,2,3,4,5> dp[1][2]表示从下标1开始到下标4里面的最小值

dp[1][2] = 1 , pos[1][2] = 2 ， 表示1在下标2的位置

怎么得到pos数组

看看dp的转台转移方程

dp[i][j] = min { dp[i][j-1] , dp[i+2^(j-1)][j-1] }

If dp[i][j-1] < dp[i+2^(j-1)][j-1] , pos[i][j] = pos[i][j-1];

else pos[i][j] = pos[i+2^(j-1)][j-1];

思考:记录位置一定要用pos数组吗，不是的，可以省略掉pos数组

1.首先我们DP找的最小值，其实是节点深度，即深度序列里面的内容，而深度序列是已经保存下来的了，上面的DP方法，我们只在初始化DP数组的时候用到了它，那为什么不直接用DP数组来记录位置，然后取出位置，直接用深度序列数组来比较呢？

说得有点复杂，看看下面的代码

```
void ST(int len)
{
    int K = (int)(log((double)len) / log(2.0));
    for(int i=1; i<=len; i++) dp[i][0] = i;
    for(int j=1; j<=K; j++)
        for(int i=1; i+_pow[j]-1<=len; i++)
        {
            int a = dp[i][j-1] , b = dp[i+_pow[j-1]][j-1];
            if(R[a] < R[b]) dp[i][j] = a;
            else            dp[i][j] = b;
        }
}

int RMQ(int x ,int y)
{
    int K = (int)(log((double)(y-x+1)) / log(2.0));
    int a = dp[x][K] , b = dp[y-_pow[K]+1][K];
    if(R[a] < R[b]) return a;
    else            return b;
}
```

二：LCA的Tarjan算法

Tarjan算法是个离线算法：即先把所有询问保存下来，但是不回答（也回答不了），重新组织这些询问，然后再回答，但是回答的顺序，不一定是询问的顺序，即”一口气问完，处理完，再一口气回答“。如果一定要你按照询问的顺序得出答案，那么还

要稍微处理一下

说说感悟：很多人说Tarjan算法强调递推的性质，我个人感觉说递推不够直接，应该说是强调时间，先后顺序。学了Tarjan几个算法，都有时间戳这个概念，这个算法里没强调这个，但是有这个意思。它定义了一个概念，什么叫处理完的节点，就是这个节点被访问了且它下面的所有子树的所有节点都被访问了，就认为这个节点是处理完了，由于是前序遍历这棵树，所以节点被处理，是有个先后顺序的，我们知道Tarjan在处理完一个节点后，就看看这个节点涉及了哪些询问，看看呗询问的另一个点是否也是被处理完的，如果另一个点也是被处理完的，那么这个询问可以被回答，否则，现在还不能回答，要等下再回答，什么时候回答，就是等到那个节点也被处理完的时候。

说说代码实现上的问题

如果理解了Tarjan，写出那个核心的dfs遍历反而不难，有时候纠结的是怎么保存询问的答案，并且按照询问的顺序，还原出答案

首先，我们是先把询问拆成两份，例如询问x和y的lca，拆成x和y的lca ， y和x的lca，两者是完全相同的，等价的

对于一系列询问

1 2

1 3

2 3

3 4

变为

1 2

2 1

1 3

3 1

2 3

3 2

3 4

4 3

然后保存，保存方式是用邻接表（个人感觉这种方法比较好，可以用上位运算，记录的东西也比较少）。保存在一个表中，表的下标从0开始标号

对已表中的第k项，例如 2 3 ， 那么k^1项和k项的LCA是相同的，所以就可以保存 a[k].lca = a[k^1].lca = ans

最后注意一点，Tarjan的伪代码可以很好帮助理解算法本质，注意里面一个并查集合并的操作Union(x,y)。这个Union(x,y)有好多写法，其中最简单的就是一个语句（个人推荐这种），这个Union的写法会稍微影响到dfs函数里面的写法（不影响算法本质，只是影响写法）

具体看模板

LCA转RMQ的模板

```
const int N = 40010;
```

```
const int M = 25;

int _pow[M];      //事先保存2^x，不必重复计算
int head[N];      //邻接表表头
int ver[2*N];     //保存遍历的节点序列，长度为2n-1，从下标1开始保存
int R[2*N];       //和遍历序列对应的节点深度数组，长度为2n-1，从下标1开始保存
int first[N];     //每个节点在遍历序列中第一次出现的位置
int dir[N];       //保存每个点到树根的距离，很多问题中树边都有权值，会询问两点间的距离，如果树边没权值，相当于权值为1
int dp[2*N][M];   //这个数组记得开到2*N，因为遍历后序列长度为2*n-1
bool vis[N];      //遍历时的标记数组
int tot;
struct edge //保存边，数组大小至少为2*n
{
    int u,v,w,next;
}e[2*N];

void dfs(int u ,int dep) //遍历树，过程中顺便做了好多事情
{
    vis[u] = true; ver[++tot] = u; first[u] = tot; R[tot] = dep;
    for(int k=head[u]; k!=-1; k=e[k].next)
        if( !vis[e[k].v] )
        {
            int v = e[k].v , w = e[k].w;
            dir[v] = dir[u] + w;
            dfs(v,dep+1);
            ver[++tot] = u; R[tot] = dep;
        }
}

int RMQ(int x ,int y) //这个询问仅仅是返回一个位置，即LCA所在序列数组的位置，ver[res]才是LCA的标号
{
    int K = (int)(log((double)(y-x+1)) / log(2.0));
    int a = dp[x][K] , b = dp[y-_pow[K]+1][K];
    if(R[a] < R[b]) return a;
    else            return b;
}

int LCA(int u ,int v)  //返回点u和点v的LCA
{
    int x = first[u] , y = first[v];
    if(x > y) swap(x,y);
    int res = RMQ(x,y);
    return ver[res];
}


//  lcaxy = LCA(x,y);
//  lcaab = LCA(a,b);
```

Tarjand的伪代码

```
void Tarjan(int u)
```

```
{
    vis[u] = true;
    Make-Set(u); //以点u自己为代表元素建立一个集合，此时集合也只有它自己一个元素
    ance[Find(u)] = u; //记录点u所在的那个集合的祖先是u自己，其实此时还是只有它自己
    for(u的所有儿子v)
        if(该儿子v没有被访问)
        {
            Tarjan(v);
            Union(u,v); //将儿子v所在集合并在点u所在的集合，点u已经是集合的代表元素
            ance[Find(u)] = u; //确保点u所在的集合的祖先是u自己
        }
    colour[u] = true;    //这个点u认为已经处理完
    for(u的所有儿子v)
        if( colour[v] )  //儿子v也被处理完
            LCA(u,v) = LCA(v,u) = ance[Find(v)];  //两者的LCA此时可以回答了，就是儿子v所在的集合的祖先
}
```

Tarjan模板

```
using namespace std;
const int N = 40010;
const int M = 410;

int head[N];              //树边邻接表的表头
int __head[N];            //保存询问的邻接表的表头
struct edge{              //保存边
    int u,v,w,next;
}e[2*N];
struct ask{              //保存询问
    int u,v,lca,next;
}ea[M];
int dir[N];               //保存点到树根的距离
int fa[N];                //并查集，保存集合的代表元素
int ance[N];              //保存集合的组合，注意对象是集合而不是元素
bool vis[N];              //遍历时的标记数组

inline void add_edge(int u,int v,int w,int &k) //保存边
{
    e[k].u = u; e[k].v = v; e[k].w = w;
    e[k].next = head[u]; head[u] = k++;
    u = u^v; v = u^v; u = u^v;
    e[k].u = u; e[k].v = v; e[k].w = w;
    e[k].next = head[u]; head[u] = k++;
}

inline void add_ask(int u ,int v ,int &k) //保存询问
{
    ea[k].u = u; ea[k].v = v; ea[k].lca = -1;
    ea[k].next = __head[u]; __head[u] = k++;
    u = u^v; v = u^v; u = u^v;
    ea[k].u = u; ea[k].v = v; ea[k].lca = -1;
    ea[k].next = __head[u]; __head[u] = k++;
}
```

```
int Find(int x)
{
    return x == fa[x] ? x : fa[x] = Find(fa[x]);
}
void Union(int u ,int v)
{
    fa[v] = fa[u];  //可写为  fa[Find(v)] = fa[u];
}

void Tarjan(int u)
{
    vis[u] = true;
    ance[u] = fa[u] = u; //可写为 ance[Find(u)] = fa[u] = u;
    for(int k=head[u]; k!=-1; k=e[k].next)
        if( !vis[e[k].v] )
        {
            int v = e[k].v , w = e[k].w;
            dir[v] = dir[u] + w;
            Tarjan(v);
            Union(u,v);
            ance[Find(u)] = u;  //可写为ance[u] = u;  //甚至不要这个语句都行
        }
    for(int k=__head[u]; k!=-1; k=ea[k].next)
        if( vis[ea[k].v] )
        {
            int v = ea[k].v;
            ea[k].lca = ea[k^1].lca = ance[Find(v)];
        }
}

int main()
{
    //.............省略.............
    memset(head,-1,sizeof(head));
    memset(__head,-1,sizeof(__head));
    tot = 0;
    for(int i=1; i<n; i++)  //建树
    {
        int u,v,w;
        scanf("%d%d%d",&u,&v,&w);
        add_edge(u,v,w,tot);
    }
    tot = 0;
    for(int i=0; i<q; i++) //拆开保存询问
    {
        int u,v;
        scanf("%d%d",&u,&v);
        add_ask(u,v,tot);
    }
    memset(vis,0,sizeof(vis));
    dir[1] = 0;
    Tarjan(1);
    for(int i=0; i<q; i++)
    {
        int s = i * 2 , u = ea[s].u , v = ea[s].v , lca = ea[s].lca;
        //已经按顺序取出了询问和答案，lca = LCA(u,v)
```

```
    }
    return 0;
}
```

分类: 学习笔记

好文要顶 关注我 收藏该文

Titanium
关注 - 0
粉丝 - 110
+加关注

4 推荐 0 反对

« 上一篇: hdu 2586 How far away ?
» 下一篇: poj 1986 Distance Queries

posted @ 2013-05-26 23:53 Titanium 阅读(7941) 评论(1) 编辑 收藏

评论

#1楼 2019-04-25 16:25 | 西风show码 回复 引用

LCA转RMQ算法模板应该是少了一个ST表构造的函数

支持(0) 反对(0)

刷新评论 刷新页面 返回顶部

发表评论

编辑 预览

提交评论 退出 订阅评论

[Ctrl+Enter快捷键提交]

相关博文:
· LCA和RMQ
· LCA与RMQ
· LCA算法解析-Tarjan&倍增&RMQ
· poj 1986 RMQ&&LCA(模板题)
· RMQ和LCA
» 更多推荐...

最新 **IT** 新闻:
· 字节1000万挖走大V，B站为何左右为难?
· 未授权Switch变正品， 拼多多百亿补贴真靠谱吗?
· 巫师财经出B站记
· 卖力"演出"，买单者寥寥，李国庆却不能停
· 魅族没有老朋友，也没有新故事
» 更多新闻...

昵称: Titanium
园龄: 8年1个月
粉丝: 110
关注: 0
+加关注

12	13	14	15	16	17	**18**
19	20	**21**	**22**	**23**	**24**	25
26	**27**	28	**29**	**30**	**31**	1
2	3	4	5	6	7	8

搜索

找找看

谷歌搜索

常用链接

我的随笔
我的评论
我的参与
最新评论
我的标签

积分与排名

积分 - 160111
排名 - 3691

随笔分类 (1194)

《ACM程序设计竞赛基础教程》(6)
2013年省赛选拔(16)
ACM(278)
ACM-ICPC Live Archive(7)
codeforces(10)
HDU(42)
hrbeu 哈工程(6)
Java学习(2)
LCA(11)
POJ(50)
RMQ(7)
SCAU(9)
SGU(2)
Sicily(7)
SJTU(1)
SPOJ(2)
Ural(Timus)(19)
Uva(115)
ZOJ(3)
暴力求解(9)
并查集(8)
差分约束(3)

随笔档案 (311)

最新评论

1. Re:poj 1185 炮兵布阵

dp是二维的不可以吗
dp[r][i] 表示r行取状态i时，r行及之前的士兵之和的最大值

--DUT_LYH

2. Re:hdu 2874 Connections between cities

说错了， MLE了

--你轻轻的走了

3. Re:poj 3694 Network

把lca里面改成这个样子，具体原因可以仔细思考一下时间戳的本质哦

--while123

4. Re:poj 3694 Network

#include <iostream>#include <cstdio>#include <cstring>#include <utility>#include <vector>using names...

--while123

5. Re:线段树辅助——扫描线法计算矩形面积并

@ a1b3c7d9你真的不理解吗？...

--谁是鸽王

阅读排行榜

1. SPFA算法——最短路径(39538)
2. 线段树辅助——扫描线法计算矩形面积并(10083)
3. LCA和RMQ的一些事情(7941)
4. suac 2012新生赛 F切水果(5869)
5. LCA题目总结(5734)

评论排行榜

1. SPFA算法——最短路径(6)
2. poj 3352 Road Construction(6)
3. 线段树辅助——扫描线法计算矩形面积并(6)
4. poj 3667 Hotel(5)
5. hdu 2841 Visible Trees(5)

推荐排行榜

1. SPFA算法——最短路径(12)
2. 线段树辅助——扫描线法计算矩形面积并(11)
3. poj 3667 Hotel(4)
4. LCA和RMQ的一些事情(4)
5. uva 10054 The Necklace(4)