

# 由对称性解2-SA7 问题

## 2-SAT:

- 2-SAT就是2判定性问题，是一种特殊的逻辑判定问题。
- 2-SAT问题有何特殊性？该如何求解？
- 我们从一道例题来认识2-SAT问题，并提出对一类2-SAT问题通用的解法。

## *Poi 0106 Peaceful Commission* [和平委员会]

- 某国有  $n$  个党派，每个党派在议会中恰有 2 个代表。
- 现在要成立和平委员会，该会满足：
- 每个党派在和平委员会中有且只有一个代表
- 如果某两个代表不和，则他们不能都属于委员会
- 代表的编号从 1 到  $2n$ ，编号为  $2a-1$ 、 $2a$  的代表属于第  $a$  个党派



- 输入  $n$  (党派数),  $m$  (不友好对数) 及  $m$  对两两不和的代表编号
- 其中  $1 \leq n \leq 8000$ ,  $0 \leq m \leq 20000$
- 求和平委员会是否能创立。
- 若能, 求一种构成方式。

例: 输入:  $\begin{matrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{matrix}$       输出:  $\begin{matrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{matrix}$

# 分析:

- 原题可描述为:

有  $n$  个组, 第  $i$  个组里有两个节点  $\mathcal{A}_i, \mathcal{A}_i'$ 。需要从每个组中选出一个。而某些点不可以同时选出 (称之为不相容)。任务是保证选出的  $n$  个点都能两两相容。

- (在这里把  $\mathcal{A}_i, \mathcal{A}_i'$  的定义稍稍放宽一些, 它们同时表示属于同一个组的两个节点。也就是说, 如果我们描述  $\mathcal{A}_i$ , 那么描述这个组的另一个节点就可以用  $\mathcal{A}_i'$ )

# 初步构图

- 如果 $\mathcal{A}_i$ 与 $\mathcal{A}_j$ 不相容, 那么如果选择了 $\mathcal{A}_i$ , 必须选择 $\mathcal{A}_j'$ ; 同样, 如果选择了 $\mathcal{A}_j$ , 就必须选择 $\mathcal{A}_i'$ 。

$$\mathcal{A}_i \longrightarrow \mathcal{A}_j'$$

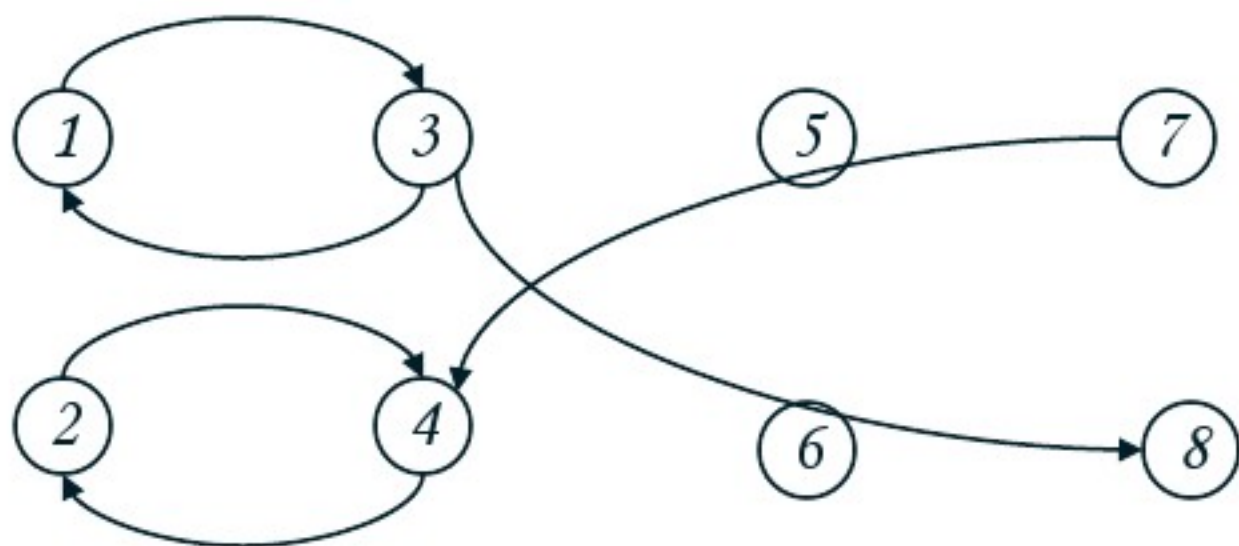
$$\mathcal{A}_j \longrightarrow \mathcal{A}_i'$$

这样的两条边**对称**

- 我们从一个例子来看:



- 假设4个组，不和的代表为：1和4，2和3，7和3，那么构图：



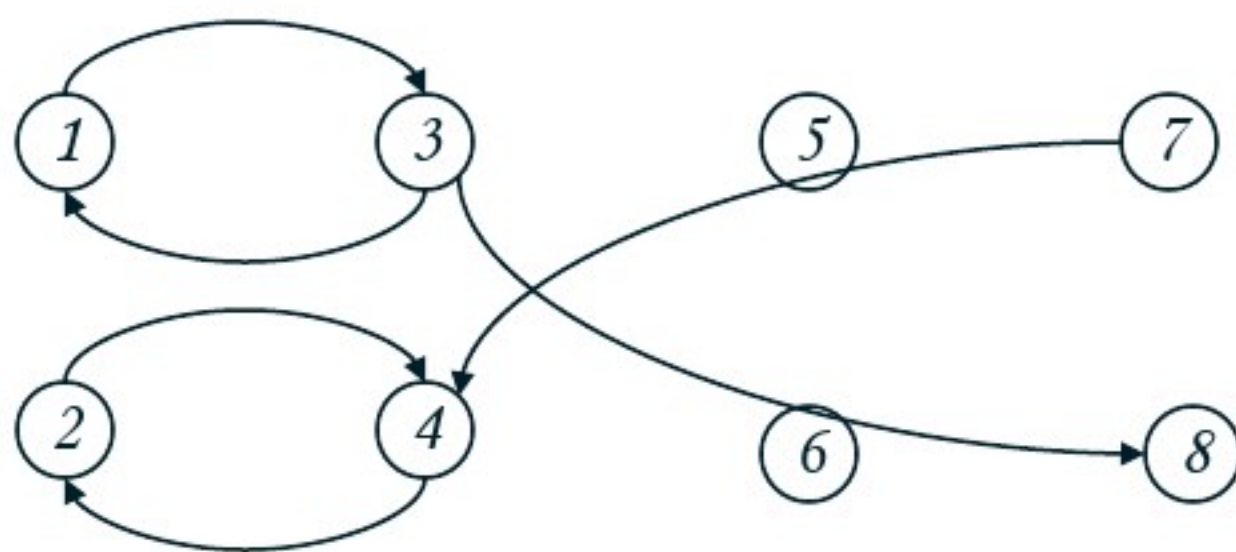
假设：

首先选1

→ 3必须选，2不可选

→ 8必须选，4、7不可选

5、6可以任选一个



■ **矛盾**的情况为:

存在 $\mathcal{A}_i$ , 使得 $\mathcal{A}_i$ 既必须被选又不可选。

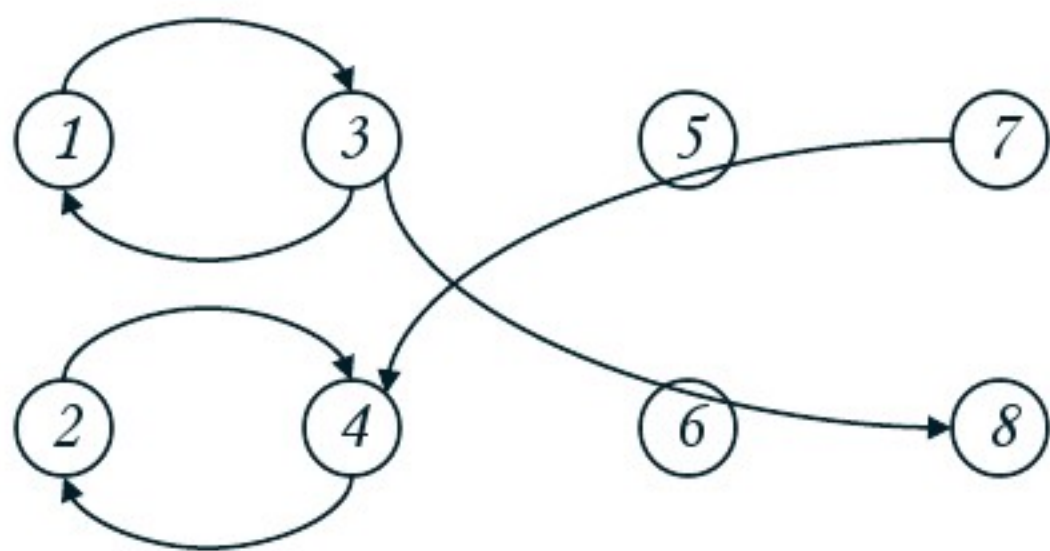
■ 得到**算法1**:

- 枚举每一对尚未确定的 $\mathcal{A}_i, \mathcal{A}_i'$ , 任选1个, 推导出相关的组, 若不矛盾, 则可选择; 否则选另1个, 同样推导。若矛盾, 问题必定无解。



- 此算法正确性简要说明:
- 由于 $\mathcal{A}_i, \mathcal{A}_i'$ 都是尚未确定的, 它们不与之前的组相关联, 前面的选择不会影响 $\mathcal{A}_i, \mathcal{A}_i'$ 。
- 算法的时间复杂度在最坏的情况下为  $O(nm)$ 。
- 在这个算法中, 并没有很好的利用图中边的**对称性**

- 先看这样一个结构:



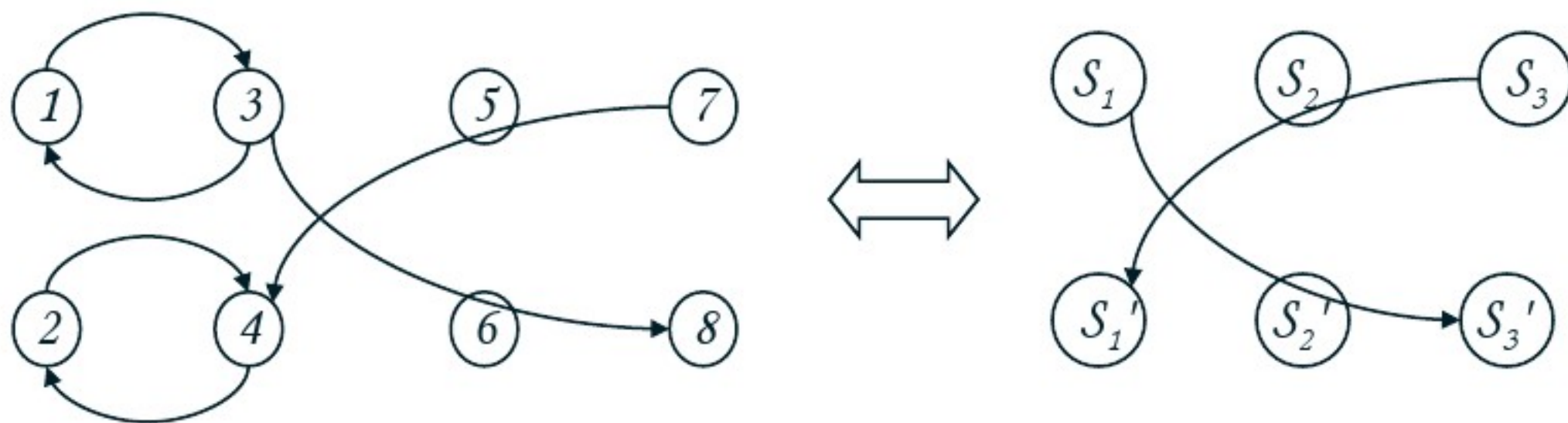
此图中 1 和 3 构成一个环，  
这样 1 和 3 要么都被选择，  
要么都不被选。  
2 和 4 同样如此。

- 更一般的说:
- 在每个一个环里，任意一个点的选择代表将要选择此环里的每一个点。不妨把环收缩成一个子节点  
(规定这样的环是**极大强连通子图**)。新节点的选择表示选择这个节点所对应的环中的每一个节点。

图的收缩

- 对于原图中的每条边  $\mathcal{A}_i \longrightarrow \mathcal{A}_j$  (设  $\mathcal{A}_i$  属于环  $S_i$ ,  $\mathcal{A}_j$  属于环  $S_j$ ) 如果  $S_i \neq S_j$ , 则在新图中连边:

$$S_i \longrightarrow S_j$$



- 这样构造出一个新的有向无环图。
- 此图与原图等价。

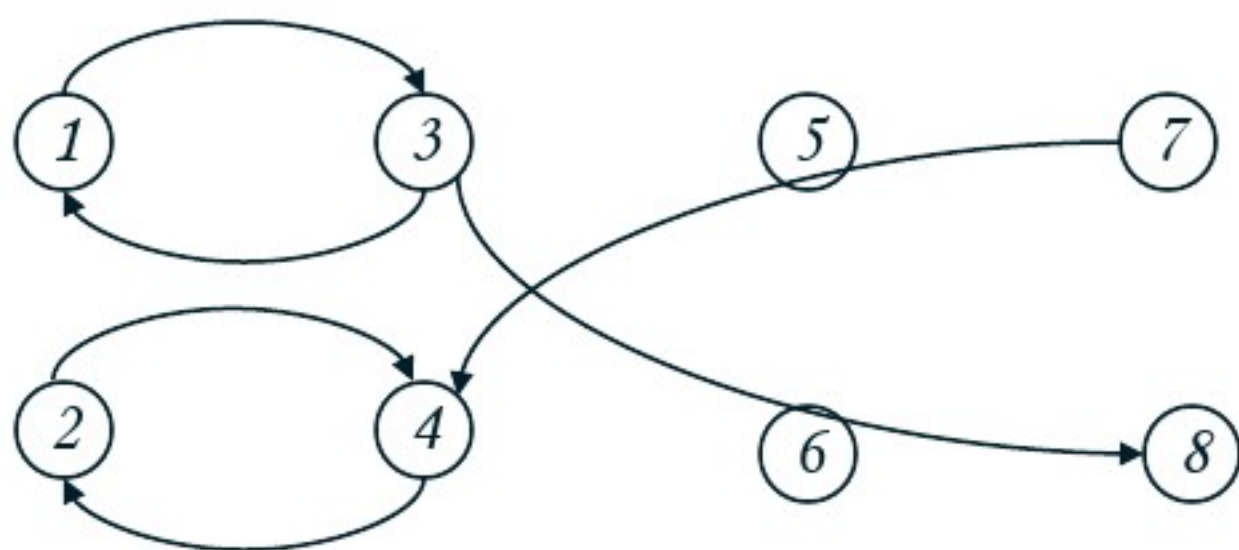
图的收缩



- 通过求强连通分量，可以把图转换成新的有向无环图，在这个基础上，介绍一个新的算法。
- 新算法中，如果存在一对 $\mathcal{A}_i, \mathcal{A}_j$ 属于同一个环，则判无解，否则将采用拓扑排序，以自底向上的顺序进行推导，一定能找到可行解。
- 至于这个算法的得来及正确性，将在下一段文字中进行详细分析。

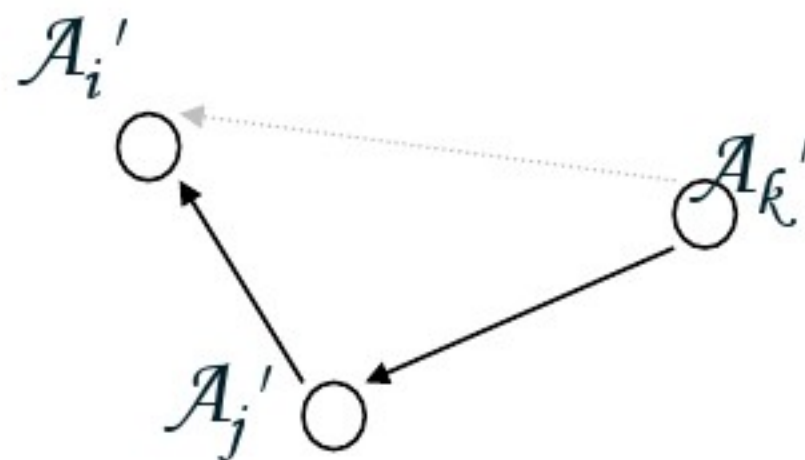
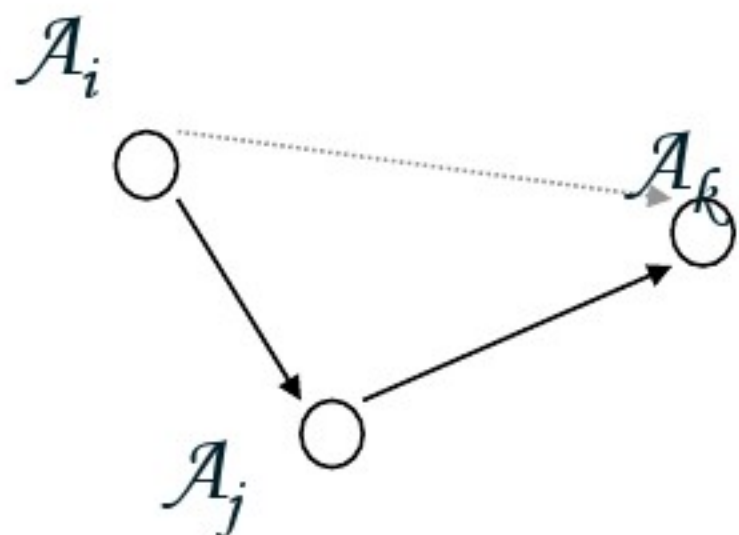
## 新算法的提出

## 深入分析:



- 回忆构图的过程:
- 对于两个不相容的点  $\mathcal{A}_i, \mathcal{A}_j$ , 构图方式为:  
$$\mathcal{A}_i \longrightarrow \mathcal{A}_j'$$
$$\mathcal{A}_j \longrightarrow \mathcal{A}_i'$$
- 前面提到过, 这样的两条边**对称**, 也就是说:
- 如果存在  $\mathcal{A}_i \longrightarrow \mathcal{A}_j$ , 必定存在  $\mathcal{A}_j' \longrightarrow \mathcal{A}_i'$ 。

## 引理：原图具有对称传递性



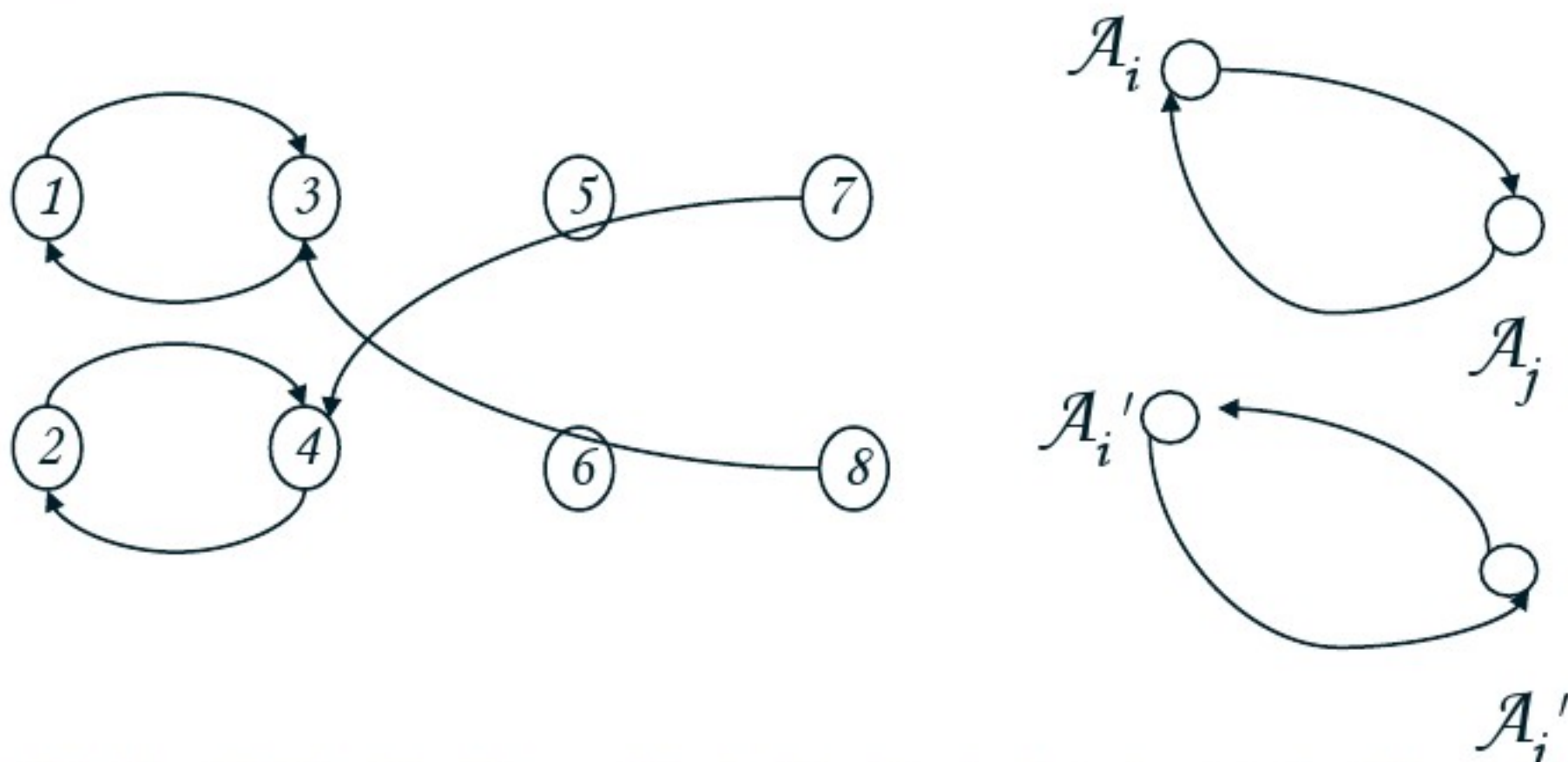
- 等价于： $\mathcal{A}_i \longrightarrow \mathcal{A}_k$   
 $\mathcal{A}_k' \longrightarrow \mathcal{A}_i'$

- 方便起见，之后 “ $\longrightarrow$ ” 代表这样一种传递关系



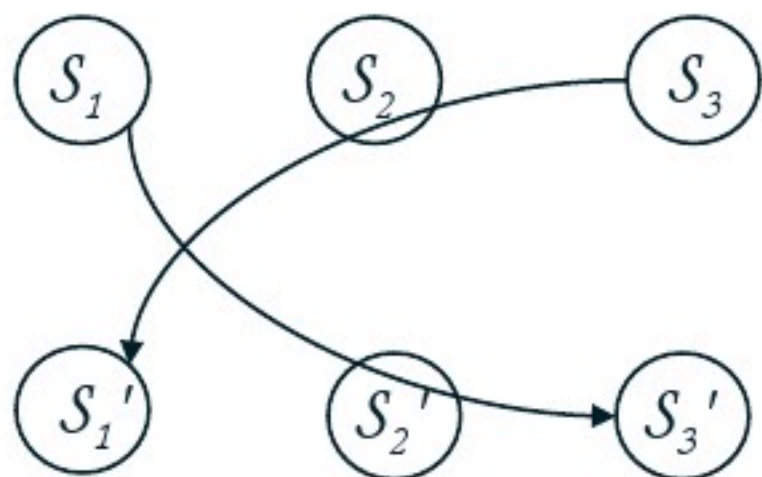
## 猜测1: 图中的环分别**对称**

- 如果存在 $\mathcal{A}_i, \mathcal{A}_j$ ,  $\mathcal{A}_i, \mathcal{A}_j$ 属于同一个环（记作 $\mathcal{S}_i$ ），那么 $\mathcal{A}_i', \mathcal{A}_j'$ 也必定属于一个环（记作 $\mathcal{S}_i'$ ）。

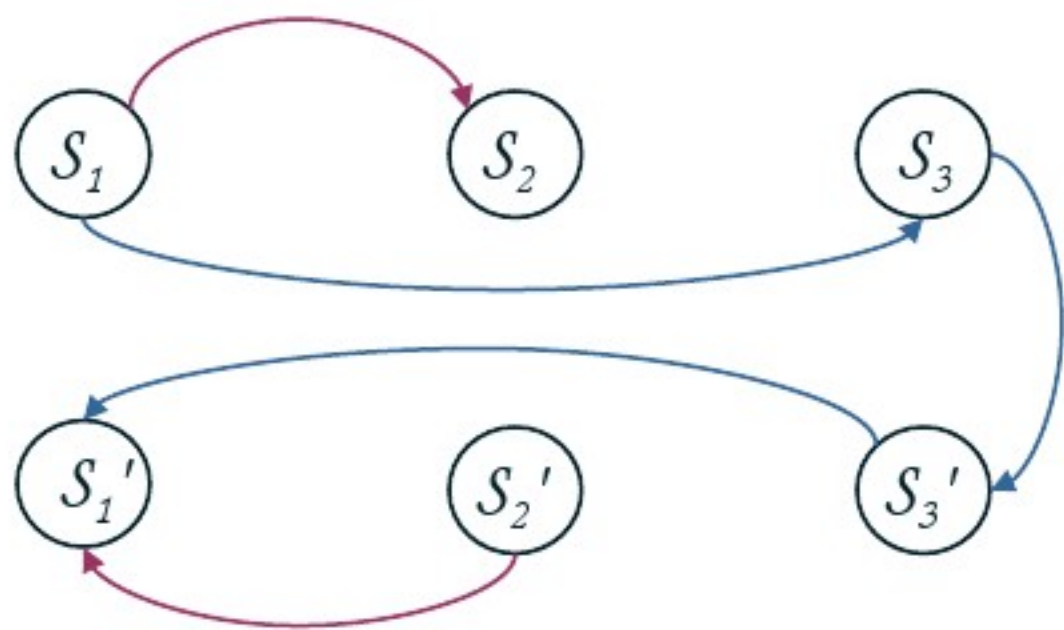


再根据前面的引理，不难推断出每个环分别对称。

推广 1: 新图中, 同样具有**对称**传递性。



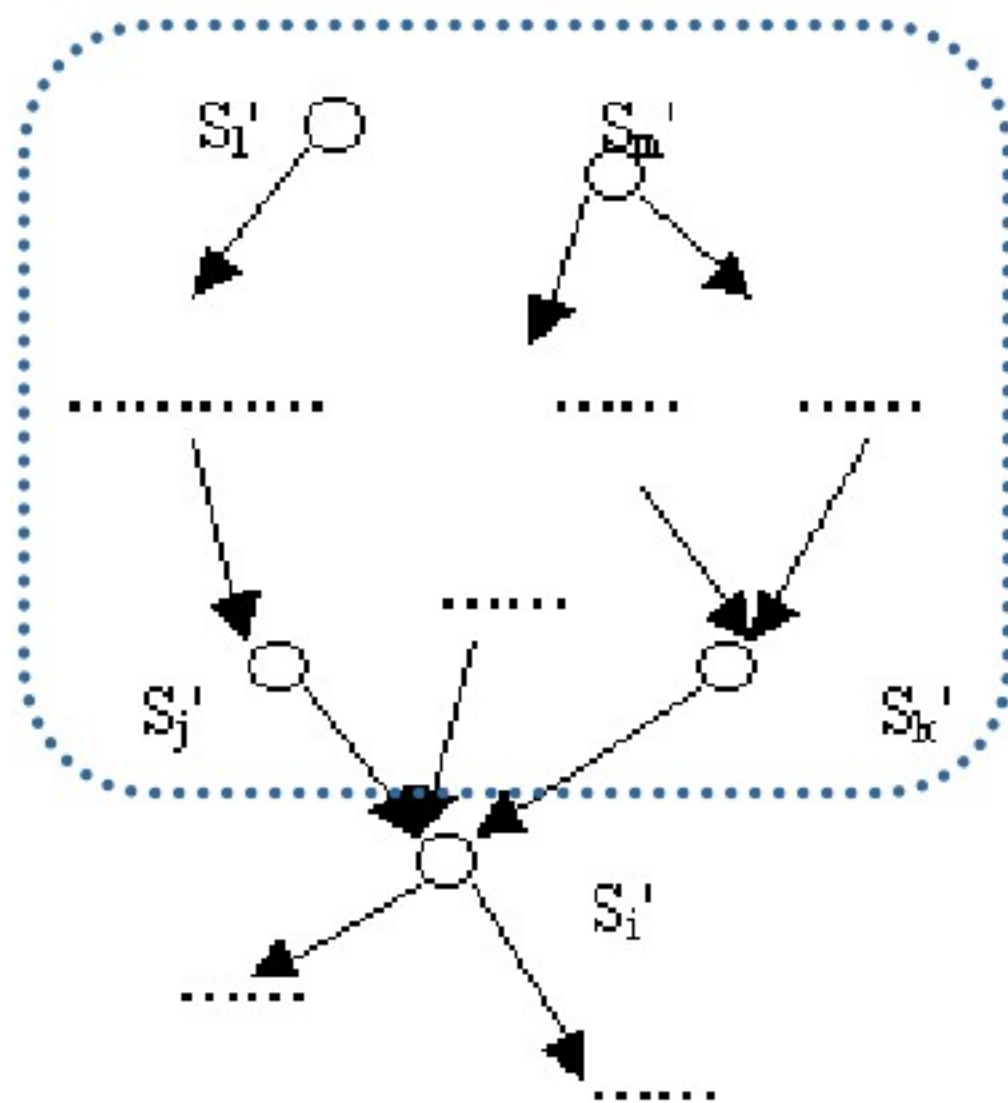
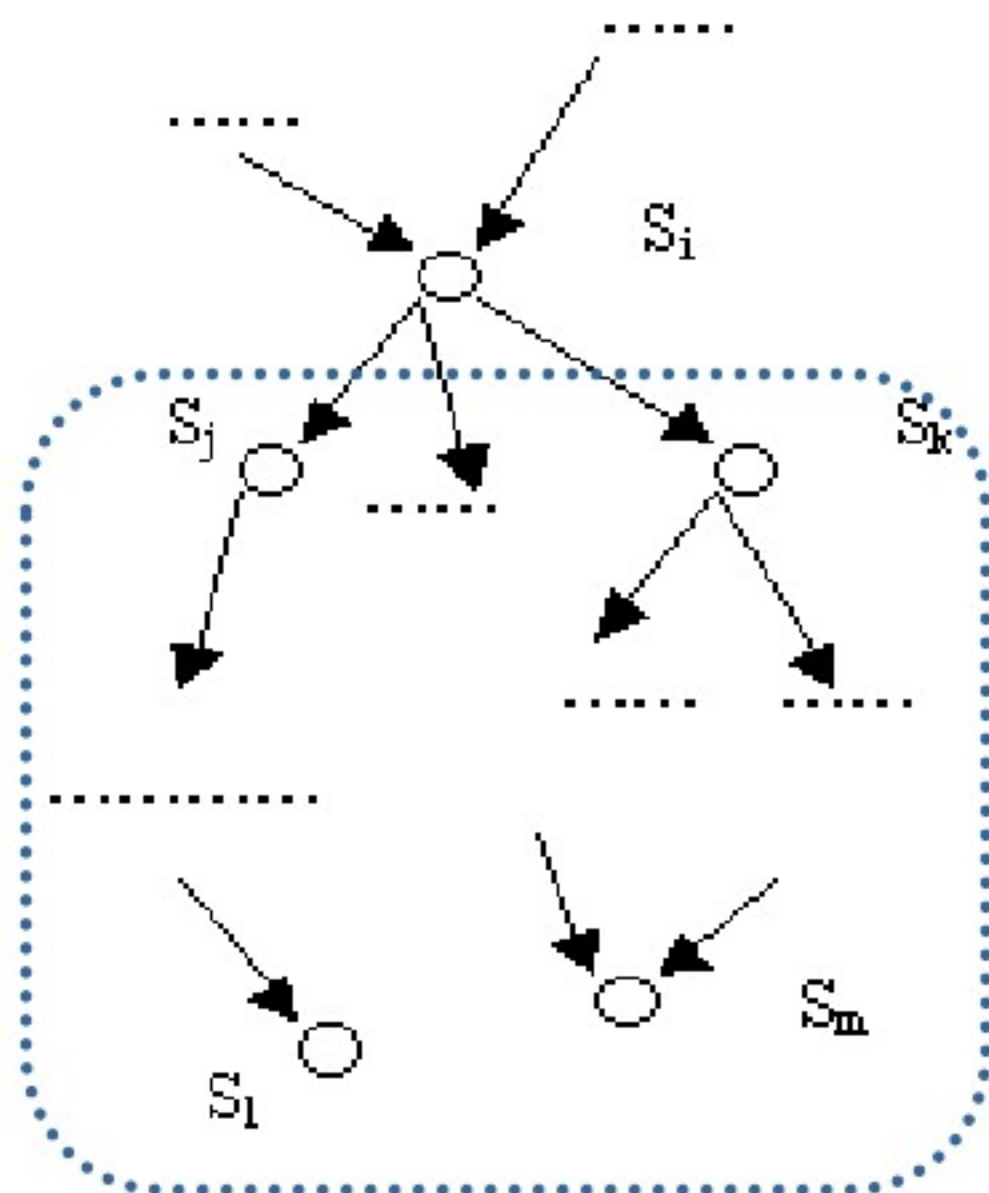
证明方式与引理相  
类似



一个稍稍复杂点的结构

其中红、蓝色部分分别为  
两组**对称**的链结构

- 分开来看，更加一般的情况，即下图：  
(说明：此图中 $s_i$ 有可能为 $s_i$ 的后代节点)



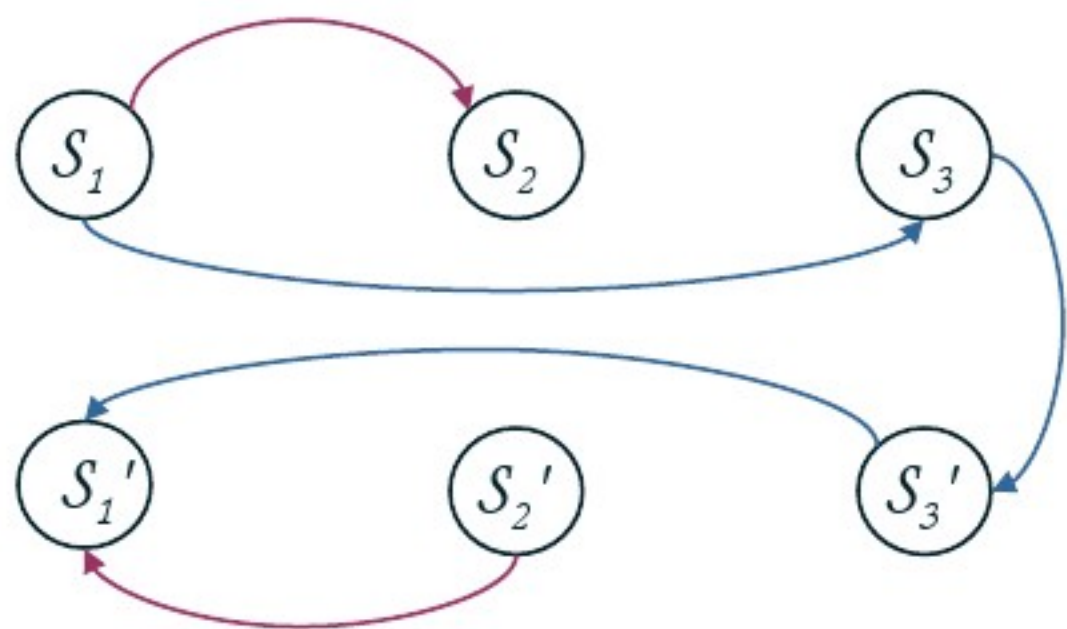


- 于是可以得到
- 推广2: 对于任意一对 $s_i, s_i'$ ,  $s_i$ 的后代节点与 $s_i'$ 的前代节点相互对称。
- 继而提出
- 猜测2: 若问题无解, 则必然存在 $a_i, a_i'$ , 使得 $a_i, a_i'$ 属于同一个环。
- 也就是, 如果每一对 $a_i, a_i'$ 都不属于同一个环, 问题必定有解。下面给出简略证明:

问题的关键

- 先提出一个跟**算法 1**相似的步骤:
- 如果选择 $s_i$ , 那么对于所有 $s_i \longrightarrow s_j$ ,  $s_j$ 都必须被选择。
- 而 $s_i'$ 必定不可选, 这样 $s_i$ 的所有前代节点也必定不可选 (将这一过程称之为**删除**)。
- 由**推广 2**可以得到, 这样的删除不会导致矛盾。

对称性的利用

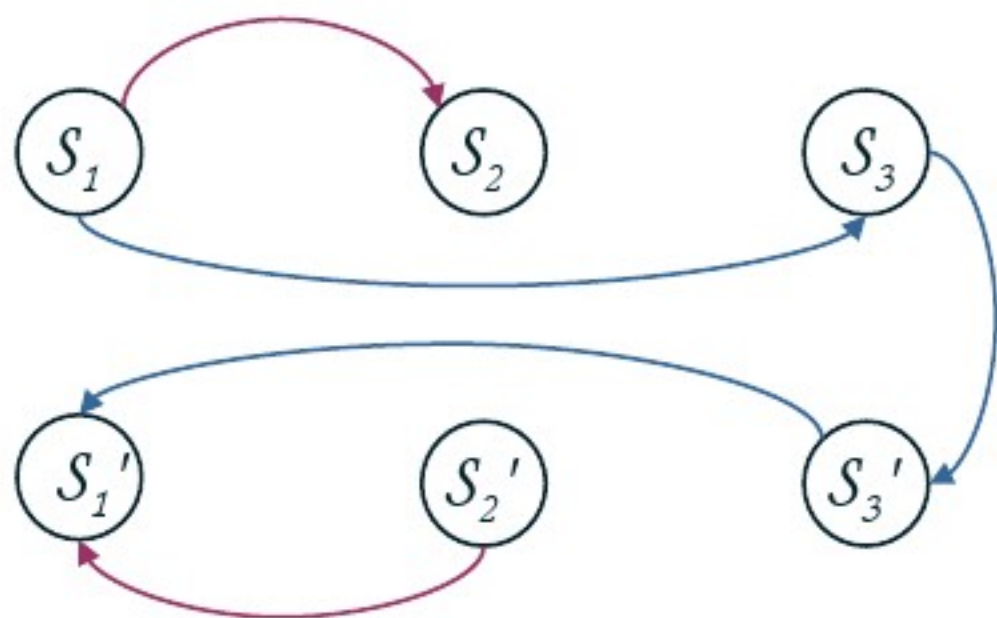


假设选择  $s_3'$   
→ 选择  $s_3$  的后代节点,  $s_1'$   
→ 删除  $s_3$   
→ 删除  $s_3$  的前代节点  $s_1$   
 $s_1$  与  $s_1'$  是**对称**的

- 每次找到一个未被确定的  $s_i$ , 使得不存在  $s_i \longrightarrow s_i'$   
选择  $s_i$  及其后代节点而删除  $s_i'$  及  $s_i'$  的前代节点。  
一定可以构造出一组可行解。
- 因此**猜测2**成立。



- 另外，若每次盲目的去找一个未被确定的 $s_i$ ，时间复杂度相当高。
- 以**自底向上**的顺序进行选择、删除，这样还可以免去“**选择 $s_i$ 的后代节点**”这一步。
- 用**拓扑排序**实现自底向上的顺序。



一组可能的拓扑序列  
(自底向上)

$s_1' \quad s_2 \quad s_2' \quad s_3' \quad s_3 \quad s_1$

## 算法2的流程:

- 1. 构图
- 2. 求图的极大强连通子图
- 3. 把每个子图收缩成单个节点, 根据原图关系构造一个有向无环图
- 4. 判断是否有解, 无解则输出 (退出)
- 5. 对新图进行拓扑排序
- 6. 自底向上进行选择、删除
- 7. 输出

## 小结:

- 整个算法的时间复杂度大概是  $O(m)$ , 解决此问题可以说是相当有效了。
- 在整个算法的构造、证明中反复提到了一个词: **对称**。发现、利用了这个图的特殊性质, 我们才能够很好的解决问题。
- 并且, 由  $2\text{-SAT}$  问题模型变换出的类似的题目都可以用上述方法解决。



# 全文总结:

- 充分挖掘图的性质，能够更好的解决问题。
- 不仅仅是对于图论，这种思想可以在很多问题中得到很好的应用。
- 希望我们能掌握此种解题的思想，在熟练基础算法的同时深入分析、灵活运用、大胆创新，从而解决更多更新的难题。