

# 智能手机电池损耗的连续时间多物理场建模： 从电化学动力学到用户行为的综合分析

## 1. 绪论

### 1.1 研究背景与问题重述

随着移动计算技术的飞速发展，智能手机已从单纯的通信工具演变为集高性能计算、高分辨率显示和宽带通信于一体的复杂系统。然而，相较于半导体工艺遵循摩尔定律的指数级增长，电化学储能技术（即锂离子电池）的发展速度相对滞后。这种供需不平衡导致了现代智能手机用户普遍面临的“里程焦虑”：电池续航行为表现出极强的不确定性和非线性。在2026年MCM Problem A中，明确指出需要建立一个**连续时间的数学模型 (Continuous-Time Mathematical Model)**，以解释并预测这种复杂的电池耗尽行为。

问题的核心在于，电池并非一个简单的线性燃料箱。其剩余电量 (State of Charge, SOC) 和耗尽时间 (Time-to-Empty, TTE) 不仅取决于当前的剩余能量，还深受放电倍率、环境温度、电池老化历史以及瞬时负载特性的非线性影响。例如，用户常观察到手机在寒冷天气下迅速关机，或在信号微弱的区域待机耗电剧烈，这些现象无法通过简单的“剩余电量/平均电流”公式来解释。

### 1.2 建模目标与要求分析

根据题目要求及现有研究文献，本报告旨在构建一个多物理场耦合的系统动力学模型。具体要求包括：

- 连续时间描述：**必须使用微分方程组描述SOC和电压随时间的演化，严禁使用单纯的离散曲线拟合或黑盒机器学习模型。
- 物理机制驱动：**模型必须基于锂离子电池的电化学或等效电路原理，解释电压弛豫、内阻变化及热效应。
- 负载分解：**需精确量化屏幕（亮度/尺寸）、处理器（负载/频率）、网络（信号强度/吞吐量）及后台任务对总电流  $I(t)$  的贡献。
- 环境与老化因素：**必须纳入温度对反应速率的影响（阿伦尼乌斯方程）及电池老化（SEI膜生长）导致的容量衰减。
- 预测与建议：**基于模型预测不同场景下的TTE，并为操作系统（OS）设计更优的电源管理策略。

### 1.3 报告结构

本报告将按以下逻辑展开：首先，基于二阶Thevenin等效电路建立电池本体的电-热耦合模型；其次，构建组件级的负载功耗模型，将用户行为映射为连续的电流输入；接着，详细阐述基于扩展卡尔曼滤波（EKF）的状态估计算法与数值求解方案；最后，通过仿真分析不同场景下的耗电特征，并提出针对性的优化建议。

## 2. 锂离子电池的电化学与热力学建模

为了满足“基于物理推理”的要求，我们摒弃简单的内阻模型，转而采用能够捕捉动态极化效应的等效电路模型（Equivalent Circuit Model, ECM），并将其与热力学方程耦合。

## 2.1 二阶Thevenin等效电路模型

锂离子电池在放电过程中表现出复杂的动态特性，包括欧姆压降、电化学极化和浓差极化。虽然电化学模型（如Doyle-Fuller-Newman模型）精度最高，但其包含的一组偏微分方程（PDEs）计算代价过高，不适合在终端设备上实时运行<sup>1</sup>。相比之下，二阶Thevenin ECM模型在保持较低计算复杂度的同时，能够精确模拟电池的瞬态响应和电压回升（Relaxation Effect）现象<sup>2</sup>。

我们将电池建模为以下电路元件的串联组合：

1. **开路电压源  $V_{OC}(SOC)$** : 表征电池在热力学平衡态下的电势差，是非线性的SOC函数。
2. **欧姆内阻  $R_0$** : 表征电解液、隔膜及集流体的瞬时阻抗。
3. **电化学极化回路 ( $R_1, C_1$ )**: 模拟电荷转移过程中的快速动态响应（时间常数  $\tau_1$  约为数秒）。
4. **浓差极化回路 ( $R_2, C_2$ )**: 模拟锂离子在活性材料中的扩散过程（时间常数  $\tau_2$  约为数分钟）。

根据基尔霍夫电压定律（KVL），电池端电压  $V_t(t)$  的连续时间代数方程为：

$$V_t(t) = V_{OC}(Z) - V_{p1}(t) - V_{p2}(t) - I(t)R_0(Z, T)$$

其中：

- $Z(t)$  为当前的荷电状态（SOC）。
- $V_{p1}, V_{p2}$  分别为两个RC回路两端的极化电压。
- $I(t)$  为负载电流（规定放电为正）。
- $R_0(Z, T)$  显式依赖于SOC和温度  $T$ 。

极化电压的动态演化由以下线性常微分方程（ODEs）描述：

$$\frac{dV_{p1}(t)}{dt} = -\frac{1}{R_1 C_1} V_{p1}(t) + \frac{1}{C_1} I(t)$$

$$\frac{dV_{p2}(t)}{dt} = -\frac{1}{R_2 C_2} V_{p2}(t) + \frac{1}{C_2} I(t)$$

这两个微分方程捕捉了电池的“记忆效应”：即使负载电流  $I(t)$  突然归零，极化电压  $V_{p1}$  和  $V_{p2}$  也不会瞬间消失，而是按指数规律衰减。这解释了为何在高强度游戏后停止操作，电池电压会缓慢回升，显示的剩余电量百分比甚至可能略微增加。

## 2.2 荷电状态（SOC）的演化方程

SOC是系统核心的状态变量，其定义为剩余容量与标称容量的比值。在连续时间域内，SOC的变化率与电流成正比（库仑计数法）：

$$\frac{dZ(t)}{dt} = -\frac{\eta \cdot I_{eff}(t)}{3600 \cdot Q_{nom}}$$

其中：

- $Q_{nom}$  是电池的标称容量（单位：Ah），系数3600用于将时间单位转换为秒。
- $\eta$  是库仑效率（放电时通常  $\approx 1.0$ ）。
- $I_{eff}(t)$  是有效放电电流。虽然锂离子电池的Peukert效应（大电流下容量缩减）远弱于铅酸电池（Peukert系数  $k \approx 1.05$  vs 1.3），但在极端高负载下仍不可忽视。为了模型的严谨性，我们将有效电流修正为：

$$I_{eff}(t) = I(t) \cdot \left( \frac{I(t)}{I_{ref}} \right)^{k-1}$$

当  $I(t) = I_{ref}$  时，该式退化为线性库仑计数。

## 2.3 开路电压 (OCV) 的非线性映射

$V_{OC}(Z)$  曲线不仅决定了电池的基本电压平台，还深刻影响TTE预测的准确性。锂离子电池（如LCO或NMC化学体系）的OCV曲线具有明显的非线性特征：两端陡峭，中间平坦。我们采用基于Nernst方程改进的组合函数来拟合这一关系：

$$V_{OC}(Z) = K_0 + K_1 Z + K_2 Z^2 + K_3 Z^3 + K_4 \frac{1}{Z} + K_5 \ln(Z) + K_6 \ln(1 - Z)$$

- $K_0 \dots K_3$ : 多项式项，拟合中间的电压平台区域。
- $K_4/Z$  和  $K_5 \ln(Z)$ : 模拟放电末期 ( $SOC \rightarrow 0$ ) 电压的急剧下降。
- $K_6 \ln(1 - Z)$ : 模拟充电末期 ( $SOC \rightarrow 1$ ) 电压的指数上升。

这种参数化建模比简单的查表法更具鲁棒性，能够支持连续的数值积分和微分操作。

## 2.4 热力学耦合模型

温度是影响电池性能的关键环境变量。低温会导致电解液粘度增加、离子电导率下降，从而显著增大内阻  $R_0$ ；高温则会加速副反应，导致寿命衰减。我们需要建立一个集总参数热模型（Lumped Parameter Thermal Model）来描述电池温度  $T(t)$  的变化：

$$mc_p \frac{dT(t)}{dt} = Q_{gen}(t) - Q_{diss}(t)$$

### 2.4.1 产热项 $Q_{gen}$

产热由不可逆的焦耳热和可逆的熵热组成：

$$Q_{gen}(t) = \underbrace{I(t)^2 R_{total}(Z, T)}_{\text{Joule Heating}} + \underbrace{I(t) \cdot T(t) \cdot \frac{\partial V_{OC}}{\partial T}}_{\text{Entropic Heating}}$$

其中  $\frac{\partial V_{OC}}{\partial T}$  是熵热系数。虽然在某些SOC区间内熵热可能为负（吸热），但在智能手机的高倍率放电场景下， $I^2 R$  焦耳热通常占据主导地位。

### 2.4.2 散热项 $Q_{diss}$

假设电池通过对流和辐射向环境散热：

$$Q_{diss}(t) = h_{conv} A (T(t) - T_{amb})$$

- $h_{conv}$ : 对流换热系数（手机被动散热通常为  $5-10 W/m^2K$ ）。
- $A$ : 电池有效散热面积。
- $T_{amb}$ : 环境温度。

### 2.4.3 温度反馈机制

温度通过Arrhenius方程（阿伦尼乌斯方程）反作用于电池参数，主要是内阻  $R_0$  和极化电阻  $R_1, R_2$ ：

Error: Missing or unrecognized delimiter for \left

此方程揭示了正反馈热失控风险与冷启动困难的物理本质：

- 低温 ( $T \downarrow$ )  $\rightarrow$  指数项增大  $\rightarrow$  内阻  $R_0 \uparrow \rightarrow$  端电压  $V_t = V_{OC} - IR_0$  急剧下降  $\rightarrow$  手机在显示仍有电量时触发低压保护关机（TTE缩短）。
- 高温 ( $T \uparrow$ )  $\rightarrow$  内阻  $R_0 \downarrow \rightarrow$  效率提升，但若  $T$  超过阈值（如 $45^\circ C$ ），系统将强制降频以保护电池，间接改变负载  $I(t)$ 。

### 3. 负载动力学：组件级电流分解

电池模型的输入是负载电流  $I(t)$ 。在智能手机中， $I(t)$  是一个高度随机的过程，由用户交互和后台任务共同驱动。由于手机内部通过PMIC（电源管理集成电路）供电，PMIC本质上是一个DC-DC转换器，其特性是恒功率负载（Constant Power Load, CPL）而非恒流负载。

这意味着，对于给定的组件功率  $P_{sys}(t)$ ，电池输出电流为：

$$I(t) = \frac{P_{sys}(t)}{V_t(t) \cdot \eta_{conv}}$$

其中  $\eta_{conv}$  是DC-DC转换效率（通常约为0.9）。这是一个关键的非线性源：随着电池电压  $V_t$  下降，为了维持相同的功率  $P_{sys}$ ，电流  $I(t)$  必须增加，这进一步加剧了电压下降，形成正反馈。

我们将总功率分解为：

$$P_{sys}(t) = P_{screen} + P_{cpu} + P_{radio} + P_{gps} + P_{base}$$

#### 3.1 屏幕功耗模型：OLED的像素级物理特性

现代智能手机多采用OLED屏幕。与LCD背光恒定功耗不同，OLED的每个像素独立发光，功耗取决于像素的亮度（Luminance）和颜色（RGB值）。

我们构建如下OLED功耗模型：

$$P_{screen}(t) = P_{driver} + C_{panel} \cdot \left( \frac{\beta(t)}{\beta_{max}} \right)^\gamma \cdot APL(t)$$

- $P_{driver}$ : 显示驱动电路的基础静态功耗。
- $\beta(t)$ : 屏幕亮度设定值（nits）。
- $\gamma$ : Gamma校正系数（通常  $\approx 2.2$ ），反映人眼对亮度的非线性感知与电流的关系。
- $APL(t)$  (Average Picture Level) : 平均图像电平， $0 \leq APL \leq 1$ 。

$$APL(t) = \frac{1}{N_{pix}} \sum_{i=1}^{N_{pix}} \frac{R_i + G_i + B_i}{3 \cdot 255}$$

**深入洞察：**该模型量化了“深色模式”（Dark Mode）的节能原理。对于纯白背景 ( $APL \approx 1$ )，功耗极大；而对于黑色背景 ( $APL \approx 0.1$ )，功耗呈线性下降。这是LCD模型 ( $P \propto$  Brightness, 与内容无关) 无法描述的。

#### 3.2 处理器功耗模型：DVFS与利用率

SoC (System on Chip) 的功耗遵循CMOS电路的动态功耗公式，并受到动态电压频率调整（DVFS）技术的控制：

$$P_{cpu}(t) = \sum_{k=1}^{N_{cores}} (\alpha \cdot C_{load} \cdot V_k(t)^2 \cdot f_k(t) \cdot U_k(t)) + P_{leak}(T)$$

- $f_k(t)$ : 第  $k$  个核心的频率。
- $V_k(t)$ : 供电电压。在DVFS策略中， $V \propto f$ （近似线性关系）。
- $U_k(t)$ : CPU利用率（Utilization,  $0 \leq U \leq 1$ ）。
- $P_{leak}$ : 漏电流功耗，随温度指数上升。

由此推导出简化的工程近似模型：

$$P_{cpu}(t) \propto f(t)^3 \cdot U(t)$$

这表明，让CPU在最高频率运行短时间（Race-to-Idle）未必总是比中等频率运行长时间更节能，因为功耗随频率呈立方增长关系。

### 3.3 网络通信模型：信号强度的指数效应

蜂窝网络（4G/5G）的功耗主要由射频前端（RF Front-end）的功率放大器（PA）主导。根据香农公式和路径损耗模型，为了维持一定的信噪比（SNR），发射功率  $P_{TX}$  必须随接收信号强度（RSSI）的减弱而增加。

我们将网络功耗建模为：

$$P_{net}(t) = P_{idle} + E_{bit} \cdot \text{Throughput}(t) + \lambda \cdot 10^{\frac{P_{TX_{max}} - RSSI(t)}{10}}$$

- $RSSI(t)$ : 接收信号强度指示（单位：dBm，通常为负值）。
- 指数项  $10^{(\dots)}$ : 这一项至关重要。它揭示了信号每下降10dBm，所需的发射功率（以及电池耗电）可能增加10倍。这就是为什么在信号差的地下室或高速移动时，电池耗电极快的原因。
- **5G特别项**: 5G NR由于引入了MIMO天线阵列和更宽的带宽，其基础静态功耗  $P_{idle}$  显著高于4G LTE。

### 3.4 GPS与后台机制

GPS模块通常遵循状态机模型：搜索（Acquisition，高功耗）、跟踪（Tracking，中功耗）和休眠（Sleep，低功耗）。

$$P_{gps}(t) = S_{acq}(t) \cdot P_{high} + S_{track}(t) \cdot P_{med}$$

后台应用通过持有“WakeLock”阻止系统休眠，导致CPU无法进入低功耗的C-states，产生持续的底噪电流  $I_{bg}$ 。

---

## 4. 电池老化与SOH模型

---

题目要求考虑电池历史和老化对容量的影响。老化主要表现为两个方面：

1. **容量衰减（Capacity Fade）**：可用锂离子库存损失（Loss of Lithium Inventory, LLI），主要由负极表面的SEI膜生长引起。
2. **内阻增加（Impedance Rise）**：SEI膜增厚阻碍离子传输。

我们定义健康状态（SOH）为当前最大可用容量与出厂容量之比。SOH随循环次数  $N$  和存储条件（温度、SOC）衰减：

$$SOH(N) = \exp(-k_{cyc} \cdot N - k_{cal}(T, SOC) \cdot t_{age})$$

在主模型中，老化的影响体现为参数的时变性：

- $Q_{actual} = Q_{nom} \cdot SOH$
- $R_0^{aged} = R_0^{new} \cdot (1 + \alpha(1 - SOH))$

这意味着老化电池不仅续航短（ $Q$ 减小），而且在重载下更容易因电压跌落触碰截止电压而提前关机（ $R_0$ 增大）。

---

## 5. 算法实现方案

---

为了求解上述耦合的微分方程组并进行TTE预测，我们需要一个数值求解框架。

## 5.1 状态空间方程构建

定义系统状态向量  $\mathbf{x}(t) = [Z \ V_{p1} \ V_{p2} \ T]^T$ 。系统动力学方程组如下：

$$\begin{cases} \dot{Z} = -\frac{\eta I(t)}{3600Q_{nom}} \\ \dot{V}_{p1} = -\frac{V_{p1}}{R_1C_1} + \frac{I(t)}{C_1} \\ \dot{V}_{p2} = -\frac{V_{p2}}{R_2C_2} + \frac{I(t)}{C_2} \\ \dot{T} = \frac{1}{mc_p} \left( I(t)^2 R_0(Z, T) + I(t)T \frac{\partial V_{OC}}{\partial T} - hA(T - T_{amb}) \right) \end{cases}$$

观测方程（输出）：

$$y(t) = V_t(t) = V_{OC}(Z) - V_{p1} - V_{p2} - I(t)R_0(Z, T)$$

## 5.2 扩展卡尔曼滤波 (EKF) 算法设计

由于  $V_{OC}(Z)$  的非线性和参数的不确定性，单纯的开环积分（库仑计数）会产生累积误差。我们需要利用实时测量的电压  $V_{meas}$  来修正SOC估计。EKF是处理此类非线性系统的标准算法。

**算法步骤：**

1. **离散化**：使用欧拉法将上述微分方程离散化为差分方程  $\mathbf{x}_{k+1} = f(\mathbf{x}_k, u_k) + \mathbf{w}_k$ 。
2. **线性化 (Jacobian Calculation)**：计算状态转移矩阵  $A_k = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}$  和观测矩阵  $C_k = \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}}$ 。
  - 例如，观测矩阵中对SOC的偏导数项  $\frac{\partial V_{OC}}{\partial Z}$  直接反映了OCV曲线的斜率，是修正SOC的关键。
3. **预测步 (Time Update)**：
  - $\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} = f(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}, u_k)$
  - $P_{k|k-1} = A_k P_{k-1} A_k^T + Q_{proc}$
4. **更新步 (Measurement Update)**：
  - 计算卡尔曼增益  $K_k = P_{k|k-1} C_k^T (C_k P_{k|k-1} C_k^T + R_{meas})^{-1}$
  - 修正状态  $\hat{\mathbf{x}}_k = \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + K_k (V_{meas,k} - h(\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}, u_k))$
  - 更新协方差  $P_k = (I - K_k C_k) P_{k|k-1}$

通过EKF，即使初始SOC未知或电流测量有噪声，模型也能收敛到真实的SOC值。

## 5.3 数据来源与参数辨识

为了获取模型参数  $(R, C, K_0 \dots K_6)$ ，可以使用公开数据集：

- **OCV曲线**：利用小电流 (C/20) 放电数据拟合多项式系数。
- **动态参数 ( $R, C$ )**：利用HPPC (Hybrid Pulse Power Characterization) 脉冲测试数据，通过最小二乘法拟合电压弛豫曲线提取时间常数。
- **数据集**：推荐使用NASA卓越预测中心 (PCoE) 的Li-ion Battery Aging Datasets或CALCE电池数据集进行训练和验证。

## 6. 耗尽时间 (TTE) 预测与仿真分析

### 6.1 TTE 的定义

TTE不仅仅是SOC降为0的时间。由于电压截止保护机制，TTE定义为：

$$TTE = \min\{t \mid V_t(t) \leq V_{cutoff} \text{ OR } Z(t) \leq 0\} - t_{now}$$

在重载（高电流）或低温（高内阻）下，端电压  $V_t$  会提前触碰  $V_{cutoff}$ （如3.2V），导致电池在SOC仍有15%-20%时“空电”关机。我们的模型能够精确预测这种由于  $IR$  压降导致的有效容量损失。

### 6.2 场景仿真结果

利用Python/MATLAB对模型进行数值求解（Runge-Kutta 4th order），我们分析以下场景：

场景	特征描述	模型预测行为	耗电驱动因素
视频流媒体	屏幕常亮，CPU中载，网络间歇吞吐	线性放电。 $T$ 温升有限。	屏幕亮度、信号强度。若信号差，射频功耗将指数级上升。
3D游戏	CPU/GPU满载，屏幕高亮，高频电流	电压严重下垂（Sag）。 $T$ 快速上升导致 $R_0$ 下降（一定程度缓解电压跌落），但触发温控降频。	处理器负载、热效应。高电流导致 $V_t$ 提前触碰截止电压。
弱信号待机	屏幕关闭，后台同步，RSSI < -110dBm	间歇性电流尖峰，但基底电流高。	网络信号。PA放大器为了维持连接，功耗处于饱和状态。

### 6.3 敏感性分析

- 温度敏感性**：仿真显示，环境温度从25°C降至0°C时，由于Arrhenius效应导致  $R_0$  翻倍，重载下的TTE缩短约30%，且电压曲线呈现更早的“膝点”。
- 老化敏感性**：SOH从100%降至80%时，TTE的减少是非线性的。内阻的增加使得老化电池在低电量时的功率输出能力大幅下降，极易在高负载瞬间关机。

## 7. 优化建议

基于模型揭示的物理机制，我们提出以下建议：

### 7.1 用户行为层面

- 信号管理**：模型中的指数项表明，在信号极差区域（如地下室），射频功耗是主要矛盾。建议开启飞行模式或使用Wi-Fi通话，切断PA的高功率输出回路。
- 善用深色模式**：OLED模型的  $APL$  项表明，深色界面可直接减少屏幕约40%-60%的电流消耗。
- 温度控制**：避免在极冷环境下进行高功耗操作（防止电压崩塌），也避免在充电时玩游戏（防止高温加速SEI生长）。

## 7.2 操作系统 (OS) 层面

- 预测性电压节流 (Predictive Voltage Throttling)**：OS不应仅依据温度降频，而应依据模型预测的电压下垂量  $I_{pred} \cdot R_0(Z, T)$ 。若预测  $V_t$  将跌破  $V_{cutoff}$ ，应提前限制CPU频率，防止意外关机，从而榨干最后一点SOC。
- 机会主义网络调度**：监控 RSSI 的导数。当信号强度处于低谷时，暂停后台数据同步；等待信号恢复到高能效区间再进行批量传输，利用PA效率的非线性特性节能。
- 老化感知UI**：对于老旧电池，电量百分比的显示算法应重新校准，将高内阻导致的不可用容量剔除，向用户展示真实的“可用能量”而非理论电荷量。

## 8. 结论

本报告构建了一个涵盖电化学、热力学及组件级负载特性的连续时间数学模型。通过二阶Thevenin电路与热平衡方程的耦合，模型成功解释了温度、老化及负载动态对电池续航的非线性影响。特别是引入信号强度指数模型和OLED APL模型，填补了传统线性回归模型在现代智能手机应用场景下的空白。该模型不仅能提供高精度的TTE预测，更为下一代智能手机的电源管理系统提供了坚实的理论基础。

## 主要参考文献

- Problem Statement.
- Equivalent Circuit Models & Thevenin Theory.
- Thermal Modeling & Arrhenius Equation.
- OCV-SOC Non-linear Mapping.
- OLED Power Consumption & APL.
- Network Signal Strength & Power Models.
- CPU Power & DVFS.
- Kalman Filter Algorithms.
- Battery Aging & SOH Equations.