



华南理工大学
South China University of Technology

课程设计报告书

题目： 微分方程数值解课程设计

学 院 数学学院

专 业 信息与计算科学

学生姓名 罗彦欣

学生学号 202030321227

指导教师 黄凤辉

课程编号 040100181

课程学分 2

起始日期 2022. 12. 25-2023. 1. 27

| | |
|------|---------------------------------|
| 教师评语 | <div>教师签名：</div> <div>日期：</div> |
| 成绩评定 | |
| 备注 | |

微分方程数值解课程设计

一、选题背景

作为计算数学的分支，微分方程数值解是解常微分方程各类定解问题的数值方法。一般的解析方法只适用于特殊类型的定解问题，无法求解更多有价值的常微分方程。所谓数值解，指求解区间内一系列离散点处给出真实解的近似值。通过计算工程中各类微分方程的数值解，对工程系统的原理有更直观的认识。本课题针对二类特殊的微分方程进行数值分析，分别是重调和的二阶边值问题与基于对流扩散的二阶混合问题。前者转化为两个 *Possion* 方程后使用五点差分法求解，后者根据不同边值条件使用向后差分格式计算。所有算法采用 *matlab* 实现。算法的收敛性分析采用表格法计算收敛阶，同时将数值解与解析解进行可视化对比。对流与扩散问题的数值分析结合了流体的物理性质和溢油区域的实际环境。通过灵活选取边值条件，求解区域的限制最终使溢油浓度的性质与状态发生变化。重调和问题的求解与对流扩散问题的分析充分体现微分方程在理论和实践中丰富的应用。

关键词：微分方程；重调和问题；对流扩散问题；边条件

二、方案论证

针对问题一，重调和问题的二阶边值问题可以转化为两个 *Dirichlet* 边值问题。利用椭圆型方程中的五点差分思想，重新构造对应的五点差分格式。

$$\begin{cases} \Delta^2 u - a\Delta u + bu = f & \text{in } \Omega \\ u = g_1 & \text{on } \Gamma \\ \Delta u = g_2 & \text{on } \Gamma \end{cases} \iff \begin{cases} \mu\Delta v - bv = f & \text{in } \Omega \\ v = \frac{1}{\mu}g_2 - g_1 & \text{on } \Gamma \end{cases} + \begin{cases} \frac{1}{\mu}\Delta u - u = v & \text{in } \Omega \\ u = g_1 & \text{on } \Gamma \end{cases}$$

其中， Δ 是 *Laplace* 算子， $\mu = (a + \sqrt{a^2 - 4b})/2$ ， Ω 是二维平面上的有限区域， Γ 是其光滑边界。 a 和 b 是非负常数，用来描述平板在不同荷载下的横向变形，*stokes* 流体的流动等。

该问题研究两类数值算列下的数值解，分别给定不同的边界条件及非齐次项 f ，解析解 u （边界条件由此解给出）。

| | 边界条件 | f | u |
|----|-------------------------------------|------------------------------------|-----------------------|
| Q1 | $\Omega = [0, \pi] \times [0, \pi]$ | $(4 + 2a + b)\sin x \sin y$ | $\sin x \sin y$ |
| Q2 | $\Omega = [0, \pi] \times [0, \pi]$ | $(1 + a + b)(x \sin y + y \sin x)$ | $x \sin y + y \sin x$ |

为了便于区分两种新的五点差分格式，记为微分方程(1)与(2)。

$$\begin{cases} \mu \Delta v - bv = f & \text{in } \Omega \\ v = \frac{1}{\mu} g_2 - g_1 & \text{on } \Gamma \end{cases} \dots\dots (1) \quad \begin{cases} \frac{1}{\mu} \Delta u - u = v & \text{in } \Omega \\ u = g_1 & \text{on } \Gamma \end{cases} \dots\dots (2)$$

设 x 方向划分 M 等分，步长为 h_1 ， y 方向划分 N 等分，步长为 h_2 ， (x_i, y_j) 是正则内点， $i = 1, 2, \dots, M-1, j = 1, 2, \dots, N-1$ 。方程(1)的五点差分格式推导如下。

$$\begin{cases} \mu \frac{\Delta^2 v}{\Delta x^2} + \mu \frac{\Delta^2 v}{\Delta y^2} - bv = f & v \in \Omega \\ v = (-2/\mu - 1) \sin x \sin y & v \in \Gamma \end{cases}$$

根据泰勒公式离散二阶差分，可得

$$\mu \left(\frac{v_{i+1,j} - 2v_{i,j} + v_{i-1,j}}{h_1^2} + \frac{v_{i,j+1} - 2v_{i,j} + v_{i,j-1}}{h_2^2} \right) - bv_{ij} = f_{ij}$$

记 $Q = 2\mu h_1^2 + 2\mu h_2^2 + bh_1^2 h_2^2$ ，于是差分格式整理为

$$\frac{h_1^2 h_2^2 f_{ij}}{Q} = \frac{\mu h_1^2}{Q} v_{i,j-1} + \frac{\mu h_2^2}{Q} v_{i-1,j} - v_{i,j} + \frac{\mu h_2^2}{Q} v_{i+1,j} + \frac{\mu h_1^2}{Q} v_{i,j+1}$$

对比已推导的一般的五点差分格式，建立各系数的对应关系，构造线性方程组

$$F_{ij} = -\alpha_4 u_{i,j-1} - \alpha_3 u_{i-1,j} + \alpha_0 u_{i,j} - \alpha_1 u_{i+1,j} - \alpha_2 u_{i,j+1}$$

$$\text{于是, } F_{ij} = \frac{h_1^2 h_2^2 f_{ij}}{Q}, \alpha_4 = -\frac{\mu h_1^2}{Q}, \alpha_3 = -\frac{\mu h_2^2}{Q}, \alpha_0 = -1, \alpha_1 = -\frac{\mu h_2^2}{Q}, \alpha_2 = -\frac{\mu h_1^2}{Q}$$

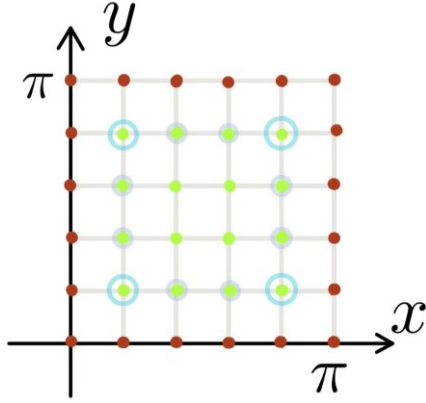
由边界条件获得 $v_{0,j}, v_{M,j} (j = 0, 1, \dots, N), v_{i,0}, v_{i,N} (i = 0, 1, \dots, M)$

记 $V_h = [v_{11}, v_{21}, \dots, v_{M-1,1}, v_{12}, \dots, v_{m-1,2}, \dots, v_{M-1,N-1}]^T$ ，则五点差分格式写为矩阵格式，

$$AV_h = F$$

$$A = \begin{bmatrix} B & -\alpha_2 I & & & \\ -\alpha_4 I & B & -\alpha_2 I & & \\ & -\alpha_4 I & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & B & -\alpha_2 I \\ & & & -\alpha_4 I & B \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} \alpha_0 & -\alpha_1 & & & \\ -\alpha_3 & \alpha_0 & -\alpha_1 & & \\ & -\alpha_3 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \alpha_0 & -\alpha_1 \\ & & & -\alpha_3 & \alpha_0 \end{bmatrix}$$



注意，靠近边界的内点对应的 F_{ij} 需要加上边界点的计算。边界条件的形状决定了 F_{ij} 附加计算的内点的分类以及数量。假设 $M = N = 5$ ，网格剖分结果如图所示，可以发现，靠近边界的正则内点中有 4 个内点的计算需要两个边界点；有 8 个内点的计算需要一个边界点，也就是 $2(M - 3) + 2(N - 3)$ 个内点。因此在算法实现中需要及时调整。

得到方程(1)的结果后，继续使用五点差分法计算方程(2)，

$$\begin{cases} \frac{\Delta^2 u}{\Delta x^2} + \frac{\Delta^2 u}{\Delta y^2} - \mu u = \mu v & u \in \Omega \\ u = \sin x \sin y & u \in \Gamma \end{cases}$$

$$\frac{v_{i+1,j} - 2v_{i,j} + v_{i-1,j}}{h_1^2} + \frac{v_{i,j+1} - 2v_{i,j} + v_{i,j-1}}{h_2^2} - \mu u_{ij} = \mu v_{ij}$$

$$\mu h_1^2 h_2^2 v_{ij} = h_1^2 v_{i,j-1} + h_2^2 v_{i-1,j} + (-2h_1^2 - 2h_2^2 - \mu h_1^2 h_2^2) v_{i,j} + h_2^2 v_{i+1,j} + h_1^2 v_{i,j+1}$$

对比已推导的一般的五点差分格式，建立各系数的对应关系，构造线性方程组

$$F_{ij} = -\alpha_4 u_{i,j-1} - \alpha_3 u_{i-1,j} + \alpha_0 u_{i,j} - \alpha_1 u_{i+1,j} - \alpha_2 u_{i,j+1}$$

$$F_{ij} = \mu h_1^2 h_2^2 v_{ij}, \alpha_4 = -h_1^2, \alpha_3 = -h_2^2, \alpha_0 = -2h_1^2 - 2h_2^2 - \mu h_1^2 h_2^2, \alpha_1 = -h_2^2, \alpha_2 = -h_1^2$$

由边界条件获得 $u_{0,j}, u_{M,j} (j = 0, 1, \dots, N), u_{i,0}, u_{i,N} (i = 0, 1, \dots, M)$ ，矩阵构造的思路同上，记 $U_h = [u_{11}, u_{21}, \dots, u_{M-1,1}, u_{12}, \dots, u_{m-1,2}, \dots, u_{M-1,N-1}]^T$ ，解线性方程组

$$AU_h = F$$

$$A = \begin{bmatrix} B & -\alpha_2 I & & & \\ -\alpha_4 I & B & -\alpha_2 I & & \\ & -\alpha_4 I & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & B & -\alpha_2 I \\ & & & -\alpha_4 I & B \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} \alpha_0 & -\alpha_1 & & & \\ -\alpha_3 & \alpha_0 & -\alpha_1 & & \\ & -\alpha_3 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \alpha_0 & -\alpha_1 \\ & & & -\alpha_3 & \alpha_0 \end{bmatrix}$$

最后将得到的数值解 U_h 与解析解的数值结果 U 对比，计算二者在无穷范数度量下的误差值 $Error1$ 。同时根据收敛阶的定义，固定某一方向的步长，改变另一方向的步长大小，计算得到另一误差值 $Error2$ 。将前后计算的误差值代入公式，得到该算法的

收敛阶估计值 $rate$ 。

$$rate = \frac{\log(Error1/Error2)}{\log(h_1/h'_1)}$$

针对问题二，采用有限差分法进行一维浓度扩散方程的数值模拟。采取无量纲的形式，只考虑理想状态下的溢油扩散问题。考虑到稳定性，本题求解均采用向后差分格式处理。在给定的物理条件下，记水中对流速度为 u （恒定），扩散系数为 D ， $C(x, t)$ 表示某空间某时刻的油浓度。假定初始时刻的溢油浓度 $C(x, 0)$ 已知。不同的边界条件将对求解区域产生影响，尤其是移动边条件。对于不同的边条件，层层迭代计算的矩阵格式将发生变化。为了简化计算，令移动边条件的边移动系数等于空间方向的步长，具体的格式推导将如下列举。

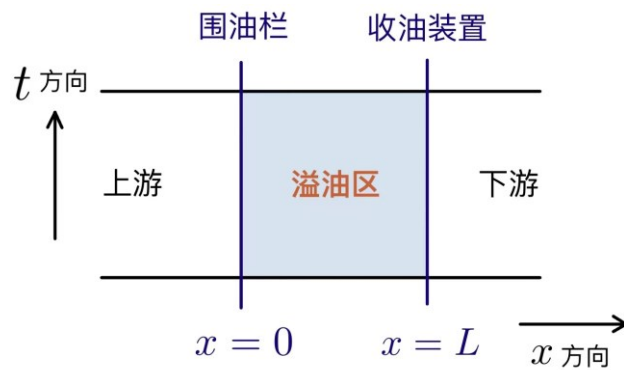
$$\frac{\partial C(x, t)}{\partial t} + u \frac{\partial C(x, t)}{\partial x} = D \frac{\partial^2 C(x, t)}{\partial x^2}$$

$$u \frac{\partial C(x, t)}{\partial x} : \text{对流项, 有方向, } u \text{ 可正可负;}$$

$$D \frac{\partial^2 C(x, t)}{\partial x^2} : \text{扩散项, 无方向, 扩散系数 } D \geq 0;$$

若 $u = 0$ ，为纯扩散方程，是抛物型方程。若 $D = 0$ ，为纯对流方程，是双曲型方程。当 $D \gg u$ 时，称为扩散占优，更多体现抛物型方程的特点；当 $D \ll u$ 时，称为对流占优，具有双曲型方程的特点。

扩散项具有二阶截差的中心差分具有把扰动向四周均匀传递的特性。中心差分离散格式能够很好地反映扩散过程的特点。数值计算误差的主要来源是对流项的离散格式。虽然对流项是一阶导数项，数学上离散简单，但是对流作用的强方向性在物理过程的解释中存在困难。



假设在溢油区的上下游铺设固定收油装置，当溢油扩散到收油装置处时，收油装

置会立刻吸收溢油。对于第一个边界条件，上下游收油装置处溢油始终为零，用数学语言描述（边值为零）：

$$\begin{cases} \frac{\partial C(x,t)}{\partial t} + u \frac{\partial C(x,t)}{\partial x} = D \frac{\partial^2 C(x,t)}{\partial x^2} \\ C(0,t) = C(l,t) = 0, \quad 0 < t < T \\ C(x,0) = \sin(\pi x), \quad 0 < x < l \end{cases}$$

网格剖分，取空间步长 $h = l/N$ 和时间步长 $\tau = T/M$ ，其中 N 和 M 是划分个数。用两族平行直线 $x = x_j = jh (j = 0, 1, \dots, N)$ 与 $t = t_k = k\tau (k = 0, 1, \dots, M)$ 将聚溢油区域分割成矩形网络 $\Omega = \{0 \leq x \leq l; 0 \leq t \leq T\}$ ，记 (x_j, t_k) 网格节点， Ω_h 网格内点集合， Γ_h 网格界点集合。

使用向后差分格式（最简隐格式），中心差分格式离散对流项，

$$\frac{C_j^{k+1} - C_j^k}{\tau} + u \frac{C_{j+1}^{k+1} - C_{j-1}^{k+1}}{2h} = D \frac{C_{j+1}^{k+1} - 2C_j^{k+1} + C_{j-1}^{k+1}}{h^2}$$

$$j = 1, 2, \dots, N-1, k = 0, 1, \dots, M-1$$

上式改写为， $-(a+b)C_{j-1}^{k+1} + (1+2b)C_j^{k+1} + (a-b)C_{j+1}^{k+1} = C_j^k$

$$a = \frac{u\tau}{2h}, b = D \frac{\tau}{h^2} > 0$$

其中，边界值与初始值， $C_0^k = C_N^k = 0, k = 0, 1, 2, \dots, M$

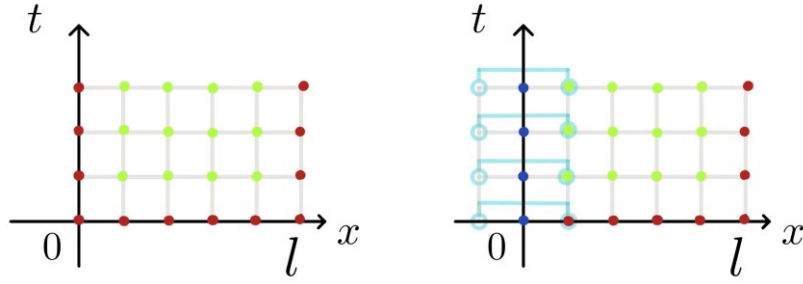
$$C_j^0 = \sin(\pi jh), j = 0, 1, \dots, N$$

截断误差 $R_j^k(u) = O(\tau + h^2)$

矩阵表达式如下， $k = 0, 1, 2, \dots, M-1$

$$\begin{pmatrix} 1+2b & a-b & & & \\ -a-b & 1+2b & a-b & & \\ & -a-b & \ddots & & \\ & & & 1+2b & a-b \\ & & & -a-b & 1+2b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1^{k+1} \\ C_2^{k+1} \\ \vdots \\ C_{N-2}^{k+1} \\ C_{N-1}^{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1^k \\ C_2^k \\ \vdots \\ C_{N-2}^k \\ C_{N-1}^k \end{pmatrix}$$

对于第二个边界条件，上游围油栏处的油浓度关于空间偏导始终为零，下游收油装置油浓度不变，简称为左边界条件。算法采用增设虚网格点的方式，将 $j=0$ 看作内点，即离散的差分方程从 $j=0$ 开始。



$$\begin{cases} \frac{\partial C(x,t)}{\partial t} + u \frac{\partial C(x,t)}{\partial x} = D \frac{\partial^2 C(x,t)}{\partial x^2} \\ \frac{\partial C(0,t)}{\partial t} = 0, C(l,t) = 0, & 0 < t < T \\ C(x,0) = \sin(\pi x), & 0 < x < l \end{cases}$$

与第一类边界的网格计算对比如下：

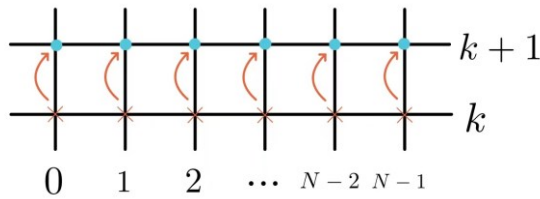
$$\frac{\partial C(0,t)}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{C_1^k - C_{-1}^k}{2h} = 0 \Rightarrow C_1^k = C_{-1}^k$$

采用向后差分格式处理，对于特殊的边界 $j=0$ ，计算如下，

$$\begin{aligned} -(a+b)C_{-1}^{k+1} + (1+2b)C_0^{k+1} + (a-b)C_1^{k+1} &= C_0^k \\ -(a+b)C_1^{k+1} + (1+2b)C_0^{k+1} + (a-b)C_{-1}^{k+1} &= C_0^k \\ (1+2b)C_0^{k+1} - 2bC_1^{k+1} &= C_0^k \end{aligned}$$

网格描述如下，

矩阵表达式如下： $k=0, 1, 2, \dots, M-1$



$$\begin{pmatrix} 1+2b & -2b & & & \\ -a-b & 1+2b & a-b & & \\ & -a-b & \ddots & & \\ & & & 1+2b & a-b \\ & & & -a-b & 1+2b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_0^{k+1} \\ C_1^{k+1} \\ \vdots \\ C_{N-2}^{k+1} \\ C_{N-1}^{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_0^k \\ C_1^k \\ \vdots \\ C_{N-2}^k \\ C_{N-1}^k \end{pmatrix}$$

对于第三个边界条件，假设其在上游处固定围油栏无溢出，下游处铺设移动收油装置，设收油船速度为 v ，此时左边界条件是第二类边条件，右边是第一类移动边条件。数学表达式描述如下：

$$\begin{cases} \frac{\partial C(x,t)}{\partial t} + u \frac{\partial C(x,t)}{\partial x} = D \frac{\partial^2 C(x,t)}{\partial x^2} \\ \frac{\partial C(0,t)}{\partial t} = 0, C(l-vt,t) = 0, \quad 0 < t < T \\ C(x,0) = \sin(\pi x), \quad 0 < x < l \end{cases}$$

合理选择时间和空间步长，使得各时间层的移动边界刚好为网格节点。令 $v\tau = h$ ，则移动边界 $x_B^k = l - vt_k = Nh - vk\tau = (N-k)h = x_{N-k}, k=1, 2, \dots, M$ ，则由移动边界条件 $C(l-vt, t) = 0$ 得到 $C(x_B^k, t_k) = C_{N-k}^k = 0$ ，此时要求 $M = N$ 。

采用向后差分格式，用虚网点方法处理左边界条件，格式推导如下，

$$-(a+b)C_{j-1}^{k+1} + (1+2b)C_j^{k+1} + (a-b)C_{j+1}^{k+1} = C_j^k$$

$$j = 0, 1, 2, \dots, N-k-2$$

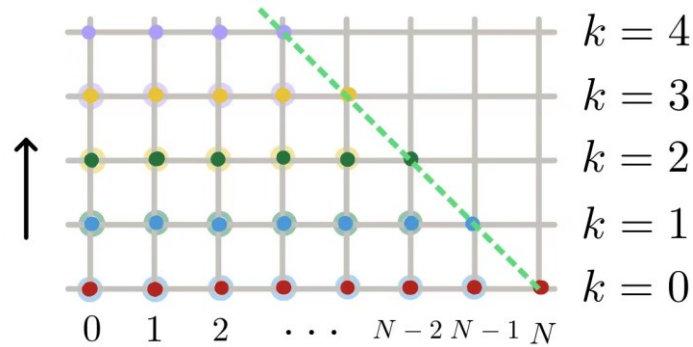
其中， $(1+2b)C_0^{k+1} - 2bC_1^{k+1} = C_0^k$

边界 $C_{N-k}^k = 0, k=1, 2, \dots, M$ ， $C_j^0 = \sin(\pi jh), j=0, 1, \dots, N$

矩阵表达式如下， $k=0, 1, \dots, M-1$

$$\begin{pmatrix} 1+2b & -2b & & & \\ -a-b & 1+2b & a-b & & \\ & -a-b & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1+2b & a-b \\ & & & -a-b & 1+2b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_0^{k+1} \\ C_1^{k+1} \\ \vdots \\ C_{N-k-2}^{k+1} \\ C_{N-k-1}^{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_0^k \\ C_1^k \\ \vdots \\ C_{N-k-2}^k \\ C_{N-k-1}^k \end{pmatrix}$$

网格描述举例，



对于第四个边界条件，假设上游铺设移动围油栏，围油栏从上游向下游拦截溢油，围油栏保持匀速 w ， $x = w\tau$ 表示围油栏移动的距离。下游铺设固定收油装置。当溢油在水流及围油栏的作用下向下游运动到收油装置处时，收油装置会立刻吸收油，即下游收油装置的溢油始终为零。此时模型用数学式描述为：

$$\begin{cases} \frac{\partial C(x,t)}{\partial t} + u \frac{\partial C(x,t)}{\partial x} = D \frac{\partial^2 C(x,t)}{\partial x^2} \\ \frac{\partial C(wt,t)}{\partial t} = 0, C(l,t) = 0, \quad 0 < t < T \\ C(x,0) = \sin(\pi x), \quad 0 < x < l \end{cases}$$

合理选择时间和空间步长，使得各时间层的移动边界刚好为网格节点，此时要求 $M = N$ 。令 $h = w\tau$ ，采用向后差分格式，用虚网点方法处理左边界条件，格式推导如下，

$$-(a+b)C_{j-1}^{k+1} + (1+2b)C_j^{k+1} + (a-b)C_{j+1}^{k+1} = C_j^k$$

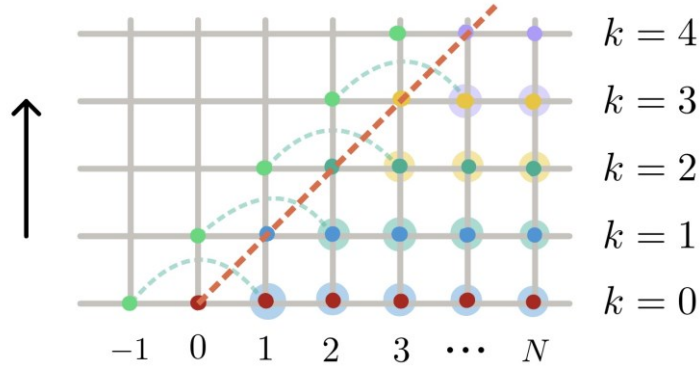
$$k = 0, 1, 2, \dots, M-1$$

其中， $(1+2b)C_{k+1}^{k+1} - 2bC_{k+2}^{k+1} = C_{k+1}^k$ ， $C_j^0 = \sin(\pi jh), j = 0, 1, \dots, N$

矩阵表达式如下， $k = 0, 1, 2, \dots, M-1$

$$\begin{pmatrix} 1+2b & -2b & & & \\ -a-b & 1+2b & a-b & & \\ & -a-b & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1+2b & a-b \\ & & & -a-b & 1+2b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{k+1}^{k+1} \\ C_{k+2}^{k+1} \\ \vdots \\ C_{N-2}^{k+1} \\ C_{N-1}^{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{k+1}^k \\ C_{k+2}^k \\ \vdots \\ C_{N-2}^k \\ C_{N-1}^k \end{pmatrix}$$

网格描述举例，



对于第五个边界条件，双移动边条件的处理结合上述边条件单独处理的思路，假设在其上游处铺设移动围油栏，下游铺设移动收油装置，讨论模型

$$\begin{cases} \frac{\partial C(x,t)}{\partial t} + u \frac{\partial C(x,t)}{\partial x} = D \frac{\partial^2 C(x,t)}{\partial x^2} \\ \frac{\partial C(wt,t)}{\partial t} = 0, C(l-vt,t) = 0, \quad 0 < t < T \\ C(x,0) = \sin(\pi x), \quad 0 < x < l \end{cases}$$

合理选择时间和空间步长，使得各时间层的移动边界刚好为网格节点，此时要求 $N = 2M$ ，令 $h = w\tau = v\tau$ ，采用向后差分格式，用虚网点方法处理左边界条件，格式推导如下，

$$-(a+b)C_{j-1}^{k+1} + (1+2b)C_j^{k+1} + (a-b)C_{j+1}^{k+1} = C_j^k$$

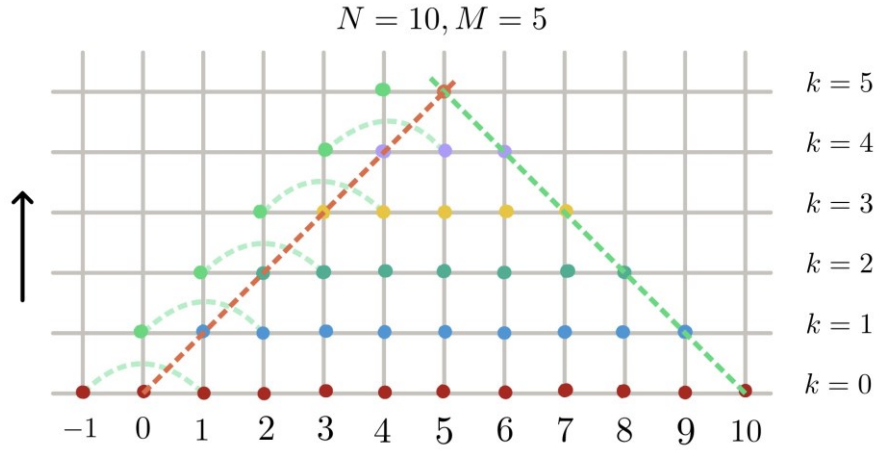
$$k = 0, 1, \dots, M-1$$

其中， $C_j^0 = \sin(\pi jh), j = 0, 1, \dots, N$

矩阵表达式如下， $k = 0, 1, 2, \dots, M$

$$\begin{pmatrix} 1+2b & -2b & & & \\ -a-b & 1+2b & a-b & & \\ & -a-b & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1+2b & a-b \\ & & & -a-b & 1+2b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{k+1}^{k+1} \\ C_{k+2}^{k+1} \\ \vdots \\ C_{N-k-2}^{k+1} \\ C_{N-k-1}^{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{k+1}^k \\ C_{k+2}^k \\ \vdots \\ C_{N-k-2}^k \\ C_{N-k-1}^k \end{pmatrix}$$

网格描述举例，



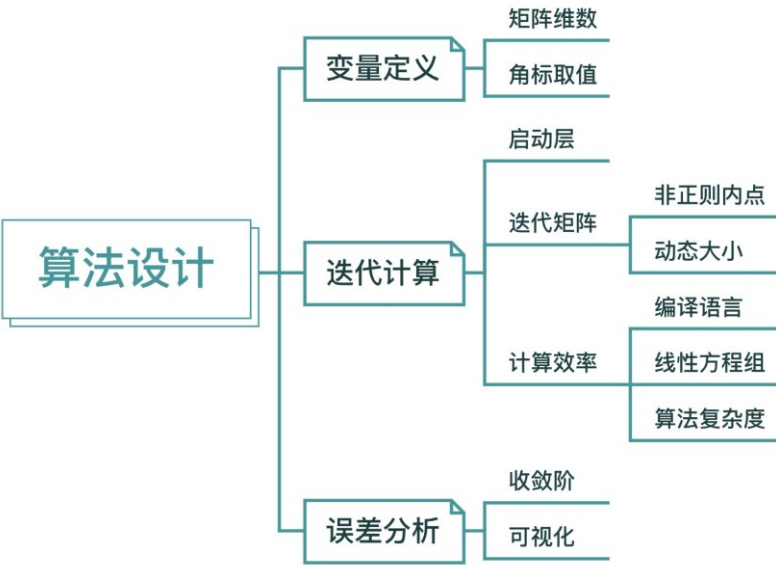
关于移动边条件的处理，约束时间层的移动边界为网格节点减少了计算的复杂度，反映在逐层计算节点的动态选择上。

三、过程论述

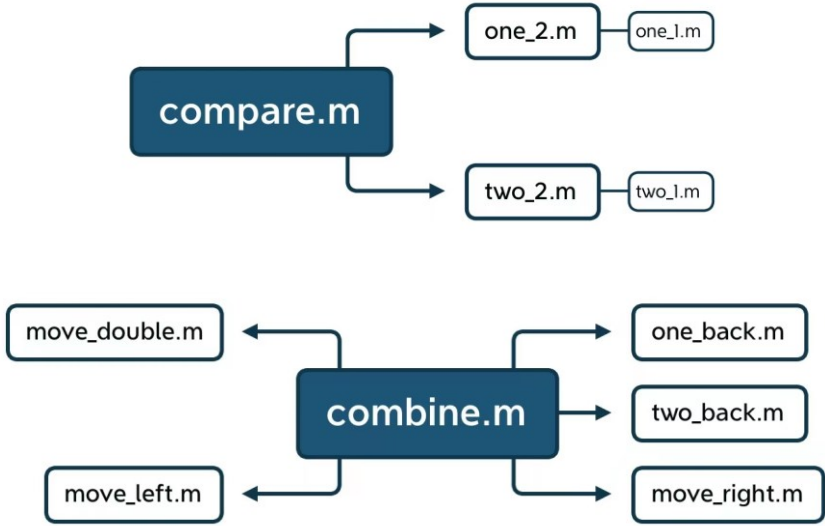
算法的设计包括三个步骤，一变量定义，二迭代计算，三误差分析。基于 *matlab* 语法以及题目潜在信息的要求，变量的定义不仅考虑存储计算结果的矩阵的维数，也要分析迭代计算的边界取值是否恰当，比如左边界条件的空间角标 j 是从0开始而不是从1开始。矩阵的维数和划分数 M, N 的大小密切相关。移动边条件的处理对于划分数有严格的限制，比如非混合的移动边条件要求 $M = N$ 。变量的合理定义对于保存计算结果，提高算法的规范性和可扩展性具有重要意义。

对于第二步，计算结果的层层递进是微分方程求解的特点，迭代计算是无法回避的思路。迭代计算一共有三个谨慎思考的角度，分别是启动层、迭代矩阵、计算效率。启动层是第一层计算的数据，一般由已知的边界条件代入算法得出。在整个迭代中，用循环语句`for`用作迭代计算的判断。但是循环语句的初始角标由 $j = 1$ 开始，需要第一层的数据才可继续计算，因此需要在循环语句外面增加计算第一层数据的语句。迭代矩阵的构造是算法的核心。正则内点的差分格式有助于整体上理解迭代矩阵，比如块三对角矩阵包含三对角矩阵的特点，但是非正则内点尤其是靠近边界点的内点需要额外关注。基于矩形计算区域的五点差分格式，靠近边界的内点可以分为两类。一类的差分计算需要一个边界点，另一类的差分计算需要二个边界点。由此引起的差异将体现在对应的常数项的计算上，增加或者减少某一项。特别地，移动边条件下的迭代矩阵是动态的。随着时间的发展，每一层计算的区域在规律性地增加或者减少，最终使计算区域约束在一个有限的闭环区域内。动态性对角标的选择和矩阵的定义提出很高要求，因此需要深刻理解数学语言转化为算法的思路才能准确地刻画。最后，计算效率包含了算法复杂度和语言编译二个维度。该算法中线性方程组求解方法的选择一定程度上影响计算效率，如果迭代矩阵大小相当。算法复杂度由划分数决定。查阅资料，`matlab`在科学计算的编译效率上比`python`有优势。迭代计算是整个算法的基础架构。基础的构造和打磨将直接影响最终的计算结果。

对于误差分析，误差来源主要是舍入误差，溢油问题均采用向后差分隐格式所以无条件稳定。进一步通过收敛阶判断计算的精度，可视化处理达到良好的对比效果。



matlab 上进行重调和问题和溢油浓度问题的数值模拟，相应程序及其依赖关系如图所示¹：



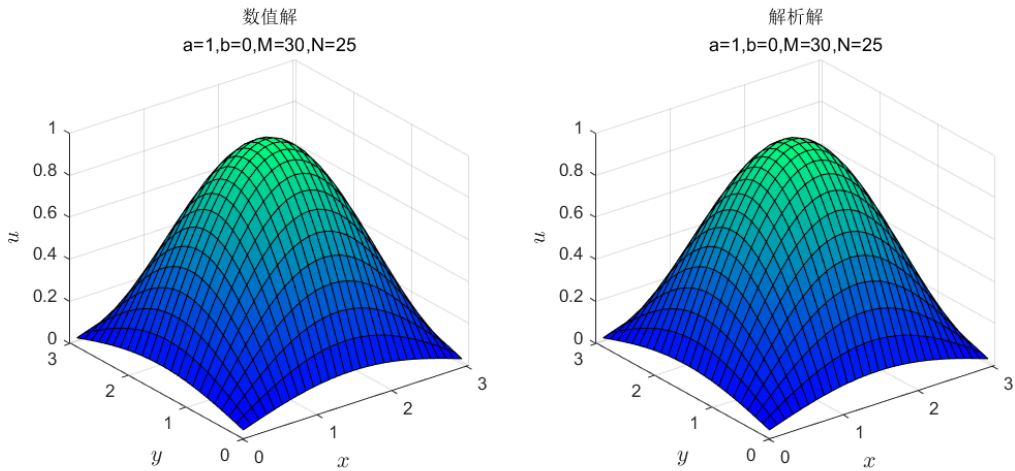
四、结果分析

(1) 重调和二阶边值问题求解

| | ① | ② | ③ | ④ |
|-----|---|-----|-----|---|
| a | 1 | 1 | 2 | 3 |
| b | 0 | 1/8 | 1/2 | 1 |

第一个数值算列 $\Omega=[0,\pi]\times[0,\pi]$ $f(x,y)=(4+2a+b)\sin x\sin y$ 采用①②取值。

Q1重调和二阶问题的五点差分格式求解



以为 $a=1,b=0,h_1=\pi/M,h_2=\pi/N$ 例，误差无穷范数 $mistake=0.0019$ ，数值

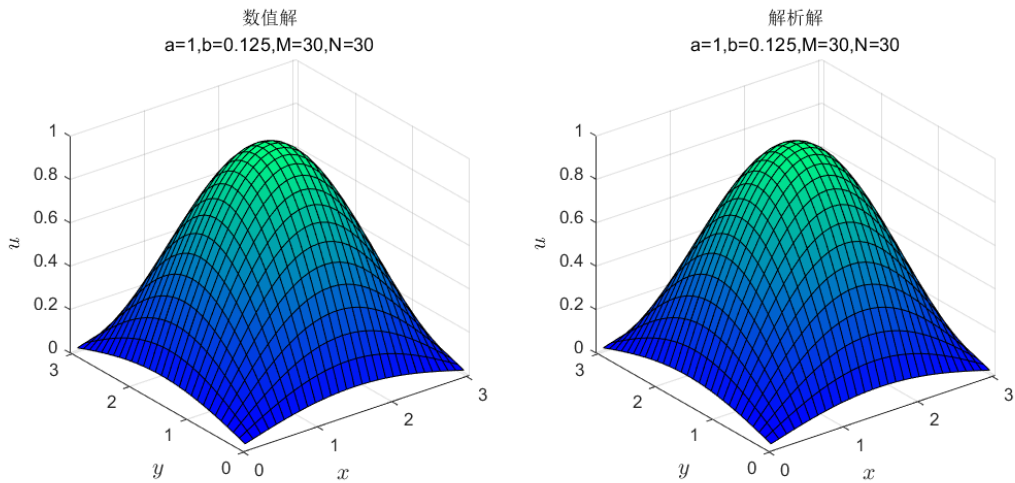
¹ 程序清单见附录

解与解析解的可视化如图：

表格法记录①取值下各系数及其对应收敛阶，*orientation* 表示计算时比较步长的方向，*num1* 表示被比较坐标的第一个划分数，*num2* 表示被比较坐标的第二个划分数，*fix* 表示固定坐标的划分数，*rate* 表示计算得出的收敛阶。

| <i>orientation</i> | <i>num1</i> | <i>num2</i> | <i>fix</i> | <i>rate</i> |
|--------------------|-------------|-------------|------------|-------------|
| <i>y</i> | 10 | 15 | 20 | 1.466483 |
| <i>y</i> | 20 | 22 | 20 | 1.324715 |
| <i>y</i> | 30 | 35 | 30 | 0.930493 |
| <i>y</i> | 40 | 50 | 30 | 0.622538 |
| <i>x</i> | 10 | 15 | 20 | 1.466483 |
| <i>x</i> | 20 | 22 | 20 | 0.954112 |
| <i>x</i> | 30 | 35 | 30 | 1.080703 |
| <i>x</i> | 40 | 50 | 30 | 0.622538 |

Q1重调问题的五点差分格式求解

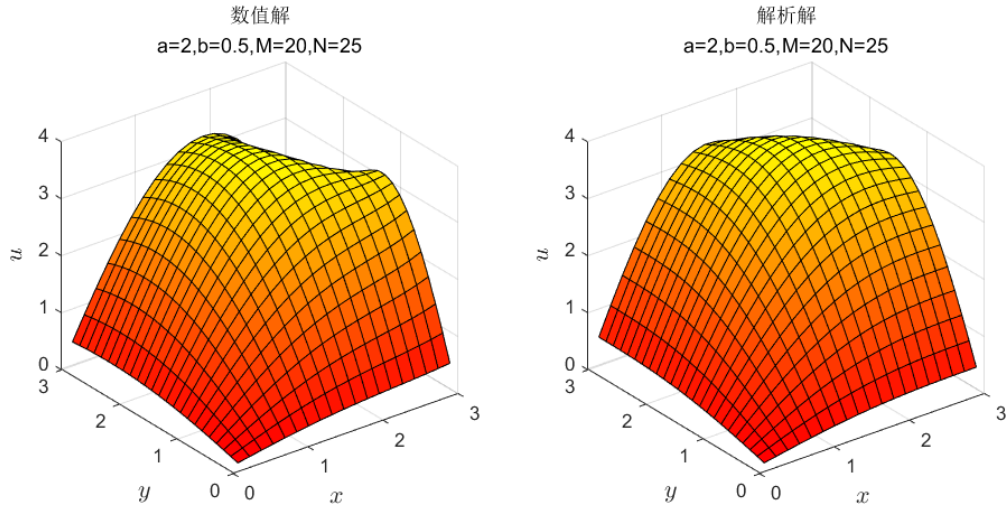


以 $a = 1, b = 1/8, h_1 = \pi/M, h_2 = \pi/N$ 为例，误差范数 $mistake = 0.0015$ ，数值解与解析解的可视化如图，表格列举部分收敛阶求解的数据：

| <i>orientation</i> | <i>num1</i> | <i>num2</i> | <i>fix</i> | <i>rate</i> |
|--------------------|-------------|-------------|------------|-------------|
| <i>y</i> | 10 | 15 | 20 | 1.124809 |
| <i>y</i> | 20 | 22 | 20 | 0.954048 |
| <i>y</i> | 30 | 35 | 30 | 0.930467 |
| <i>y</i> | 40 | 50 | 30 | 0.622524 |
| <i>x</i> | 10 | 15 | 20 | 1.466291 |

| | | | | |
|-----|----|----|----|----------|
| x | 20 | 22 | 20 | 0.954048 |
| x | 30 | 35 | 30 | 0.930467 |
| x | 40 | 50 | 30 | 0.622524 |

Q2重调和问题的五点差分格式求解



第二个数值算列 $\Omega = [0, \pi] \times [0, \pi]$ $f(x, y) = (1 + a + b)(x \sin y + y \sin x)$ 采用③④取值。以 $a = 2, b = 1/2, h_1 = \pi/M, h_2 = \pi/N$ 为例，误差无穷范数 $mistake = 1.3311$ ，数值解与精确解可视化如图，表格列举部分收敛阶求解的数据：

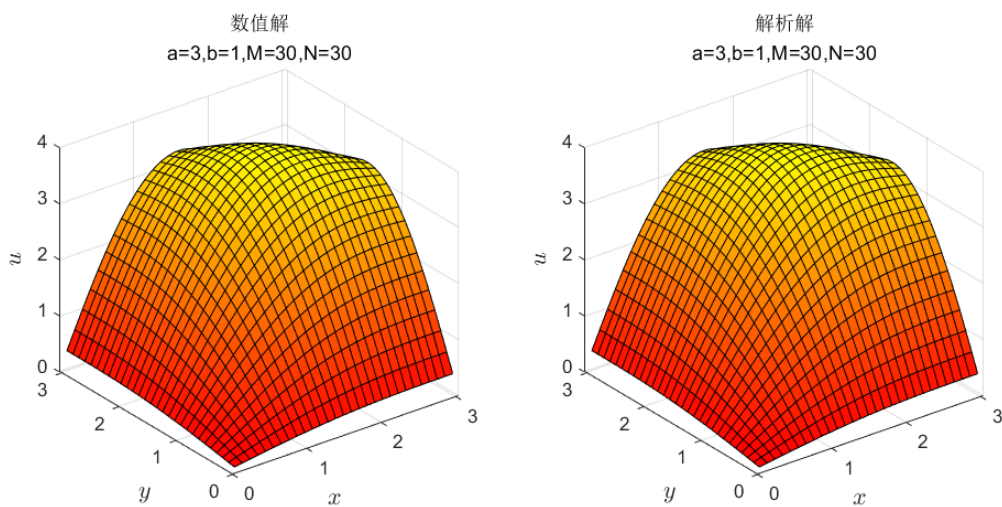
| <i>orientation</i> | <i>num1</i> | <i>num2</i> | <i>fix</i> | <i>rate</i> |
|--------------------|-------------|-------------|------------|-------------|
| y | 10 | 15 | 10 | -11.6743 |
| y | 15 | 20 | 20 | 20.32339 |
| y | 20 | 25 | 20 | -25.282 |
| y | 30 | 40 | 40 | 25.97909 |
| x | 10 | 15 | 10 | -11.6743 |
| x | 15 | 20 | 20 | 20.32339 |
| x | 20 | 25 | 20 | -25.282 |
| x | 30 | 40 | 40 | 25.97909 |

以 $a = 3, b = 1, h_1 = \pi/M, h_2 = \pi/N$ 为例，误差无穷范数 $mistake = 0.0019$ ，数值解与精确解可视化如图，表格列举部分收敛阶求解的数据：

| <i>orientation</i> | <i>num1</i> | <i>num2</i> | <i>fix</i> | <i>rate</i> |
|--------------------|-------------|-------------|------------|-------------|
| y | 10 | 15 | 10 | -11.8427 |
| y | 15 | 20 | 20 | 20.5818 |

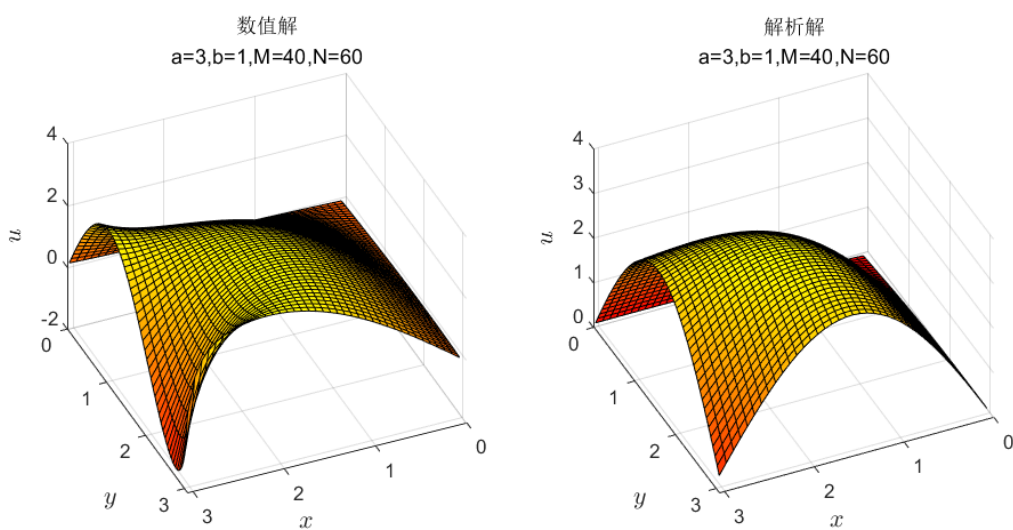
| | | | | |
|-----|----|----|----|----------|
| y | 20 | 25 | 20 | -25.6166 |
| y | 30 | 40 | 30 | 34.9465 |
| x | 10 | 15 | 10 | -11.8427 |
| x | 15 | 20 | 20 | 20.5818 |
| x | 20 | 25 | 20 | -25.6166 |
| x | 30 | 40 | 30 | -24.2387 |

Q2重调和问题五点差分格式求解



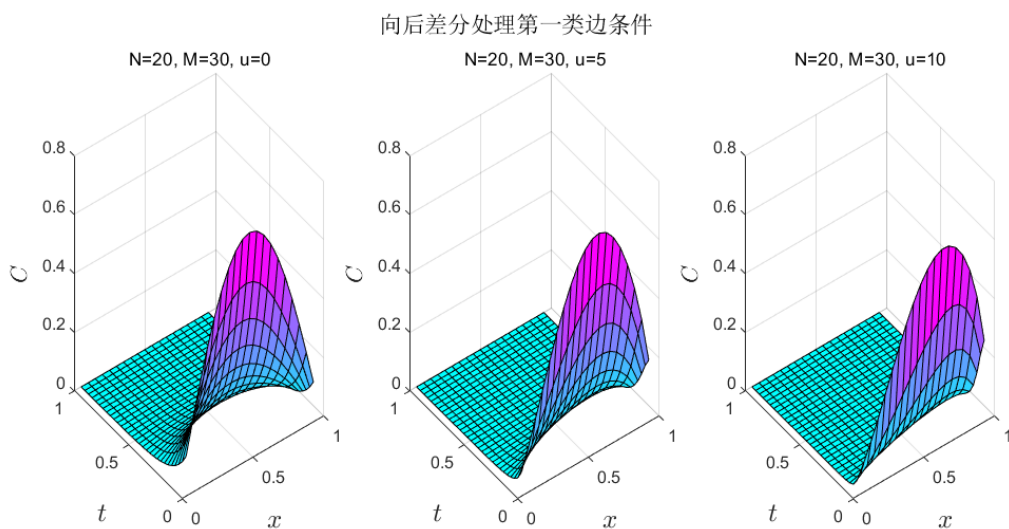
比较收敛阶 $rate$ ，第一个算列的收敛性良好，收敛阶不会因为步长和固定方向的选取发生大的变化；第二个算列的收敛性不稳定，固定同一方向，收敛阶因步长的选取变化可以改变符号。经过调试，对于第二个算列，如果 x, y 方向的步长不相等 $M \neq N$ ，数值解和解析在靠近 (π, π) 点发生形态上差异。猜测因此产生收敛阶的差异。

Q2重调和问题不稳定性的比较

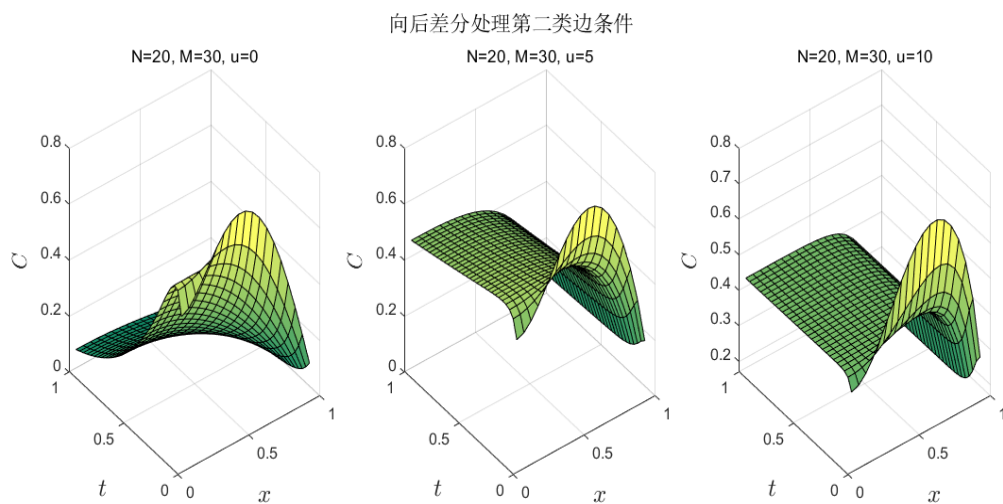


(2) 溢油事故对流扩散的模拟预测

对于模型一和模型二，数值模拟不同水流速度 $u = 0, 5, 10$ 及不同扩散系数 $D = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ 对溢油问题处理的影响。约定溢油长度 $l = 1$ 溢油时间 $T = 1$ 。为了更好地体现模型之间的差异，不同的模型的求解三维图采用不同 *colormap* 的显示。

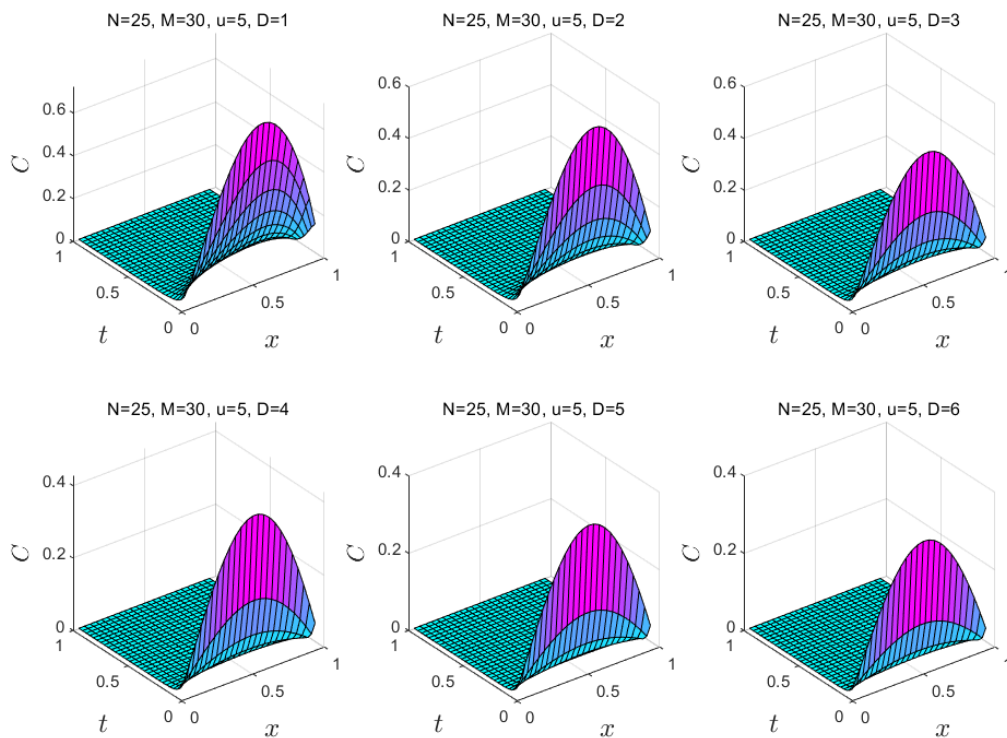


约定第一类变条件对应模型一第二类变条件对应模型二，以 $N = 20, M = 30$ 为例，固定扩散系数 $D = 1$ 对比不同水流速度 u 对溢油浓度 C 的影响。

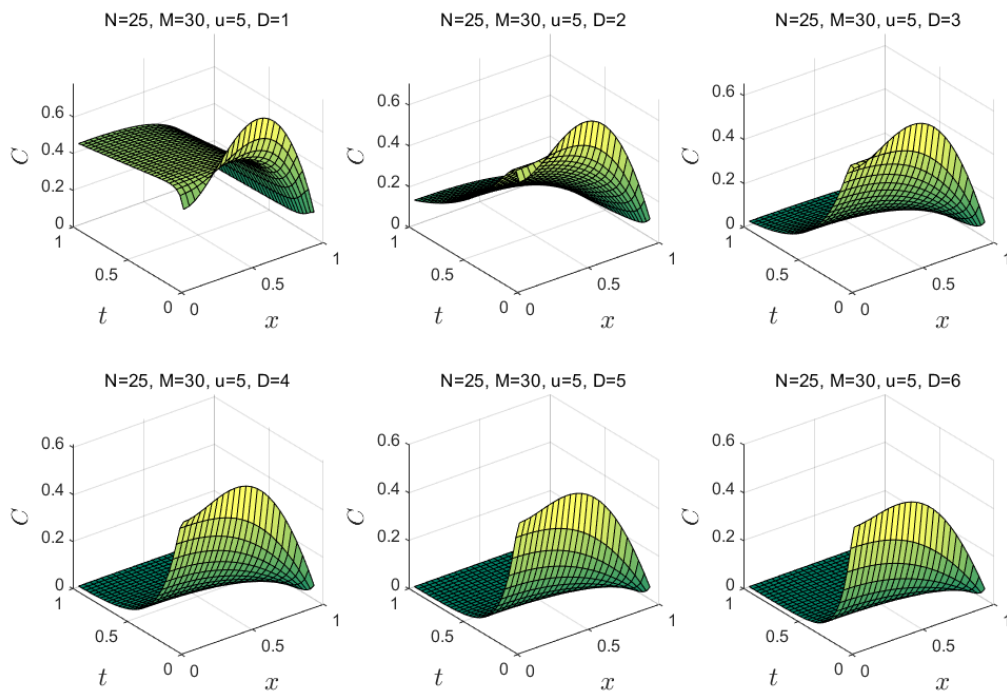


以 $N = 25, M = 30$ 为例，固定水流速度 $u = 5$ 对比不同扩散系数 D 对溢油浓度 C 的影响，模型一与模型二对比如下：

向后差分处理第一类边条件



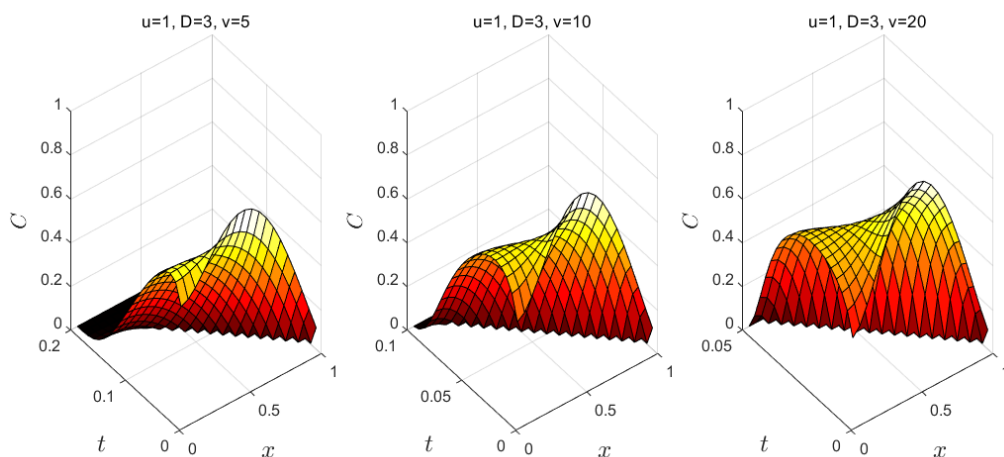
向后差分处理第二类边条件



对于模型三模型四和模型五,分别考虑收油装置不同移动速度 v 和围油栏不同的移动速度 w 对浓度 C 的影响,比如 $v, w = 5, 10, 20$ 。

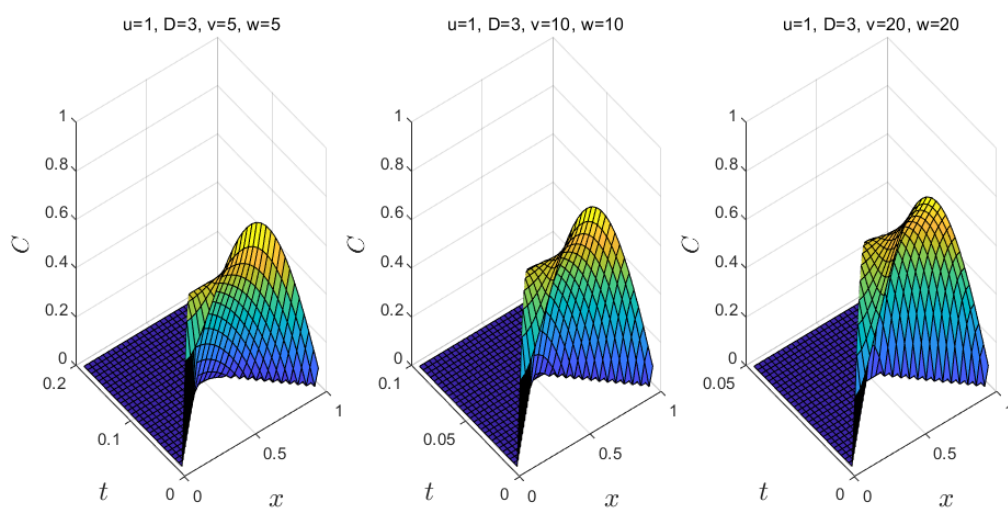
第一类移动边条件对应模型三,以 $N = 20, M = 20 (N = M)$ 为例,其中 $l = 1, u = 1, D = 3$,收油装置移动速度 v 随溢油时间 T 而变化。

向后差分处理第一类移动边条件



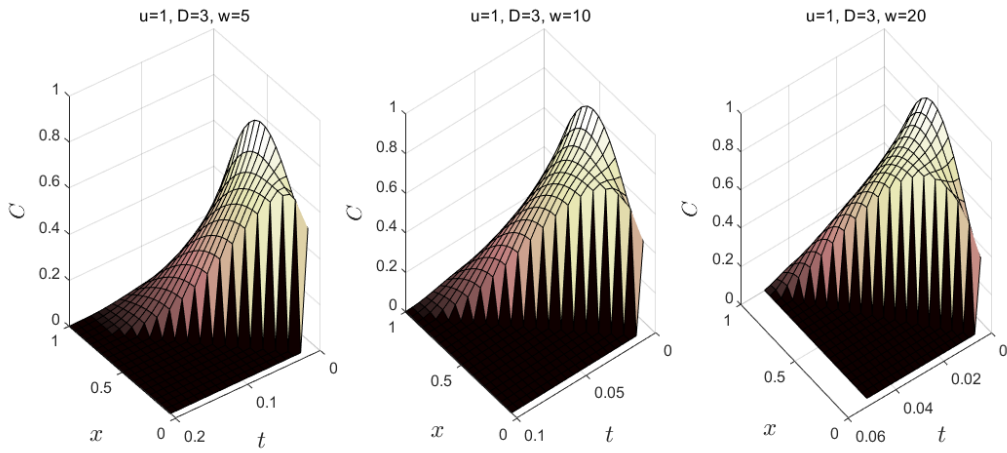
第三类移动边条件对应模型五,以 $N = 30, M = 15$ 为例,其中 $l = 1, u = 1, D = 3$,收油装置移动速度 v 随溢油时间 T 而变化($v = w$)。

向后差分处理第三类移动边条件



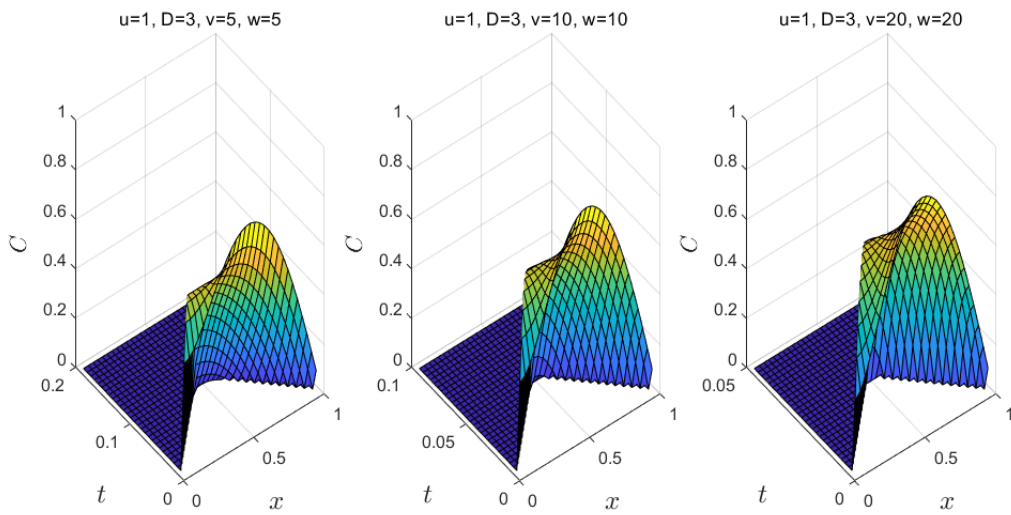
第二类移动边条件对应模型四,以 $N = 20, M = 20$ 为例,其中 $l = 1, u = 1, D = 3$,围油栏移动速度 w 随溢油时间 T 而变化。

向后差分处理第二类移动边条件



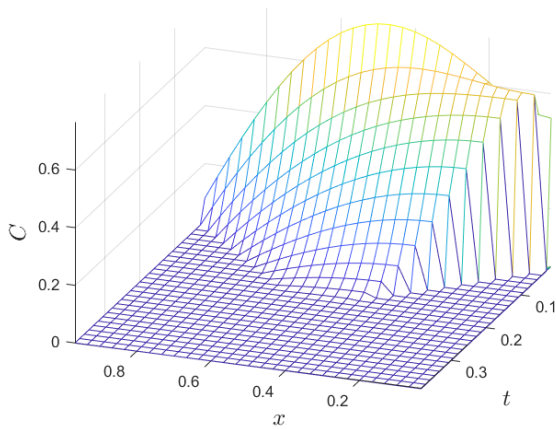
第三类移动边条件对应模型五，以 $N=30, M=15$ 为例，其中 $l=1, u=1, D=3$ ，围油栏移动速度 w 随溢油时间 T 而变化。

向后差分处理第三类移动边条件

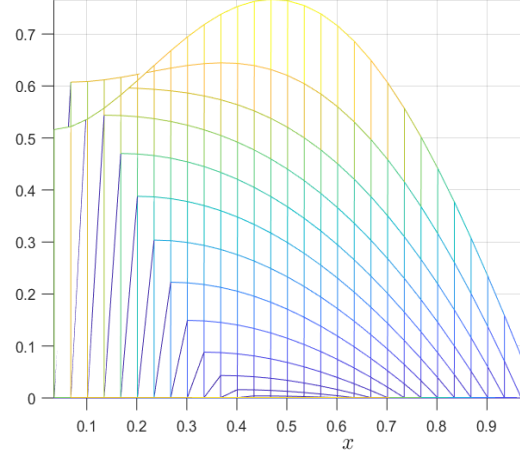


特别地，对于移动边条件的可视化可以从另一个角度思考，其中 $l=1, T=0.2$ 。

向后差分处理双移动边条件
 $N=30, M=15, v=2.5, w=2.5$



向后差分处理双移动边条件
 $N=30, M=15, v=2.5, w=2.5$



三维图很好展现了右移动边条件(1)剖面图很好地展现了左移动边条件(2)。而移动性将待求解区域不断减小为一个三角形。综上，数值模拟溢油模型浓度变化 C 已完成。

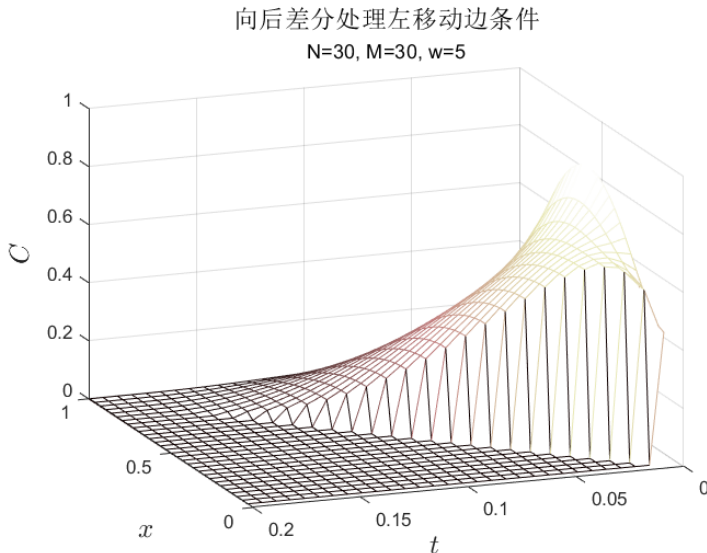
$$C(l-vt,t)=0\cdots\cdots(1)$$

$$\frac{\partial C(wt,t)}{\partial x}=0\cdots\cdots(2)$$

对于各种情况下收油分析的比较，现使用向后差分公式的三类边条件进行分析，以 $l=1,T=0.2,u=0.1,D=3$ 为例，使用图像回答。

① 当围油栏由上游向下游进行围油作业时，随着围油栏的移动，围油栏边界处的溢油量变化规律？

答：围油栏的移动对应左移动边条件。以模型四 $N=30,M=30$ 为例，剖面图如下：



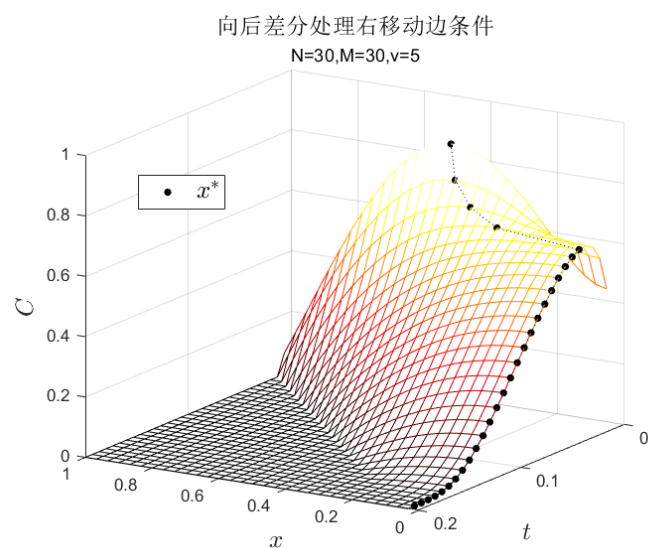
明显发现，左边界上的溢油浓度 C 呈现先增加后减少的趋势。

② 当收油装置由下游向上游进行收油作业时，随着收油装置的移动，不同离散时间点的最大浓度？

答：收油装置的移动对应右移动边条件。以模型三 $N=30,M=30$ 为例，记录每离散时间点的最大油浓度位置 x^* ，连线图如下²。可以发现，不同离散时间点的最大浓度在不断减小，最大浓度的位置从溢油中心逐渐转移到围油栏边界，直到完全吸收。

③ 其他情况下的围油栏边界处的溢油量变化规律？同一水流速度下，围油栏运动到不同位置时油浓度值变化规律？

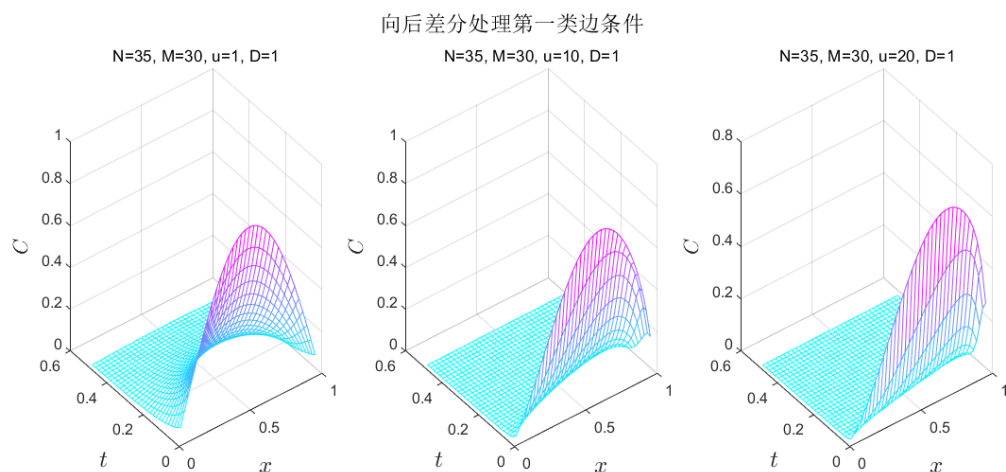
² 见下页



答：围油栏是左边界。经过比较分析上述五种模型，无论左右边界是否移动，同一水流速度下，围油栏处的溢油量总是呈现先增加后减少的趋势。

④ 水流速度不同时溢油浓度值的变化规律？

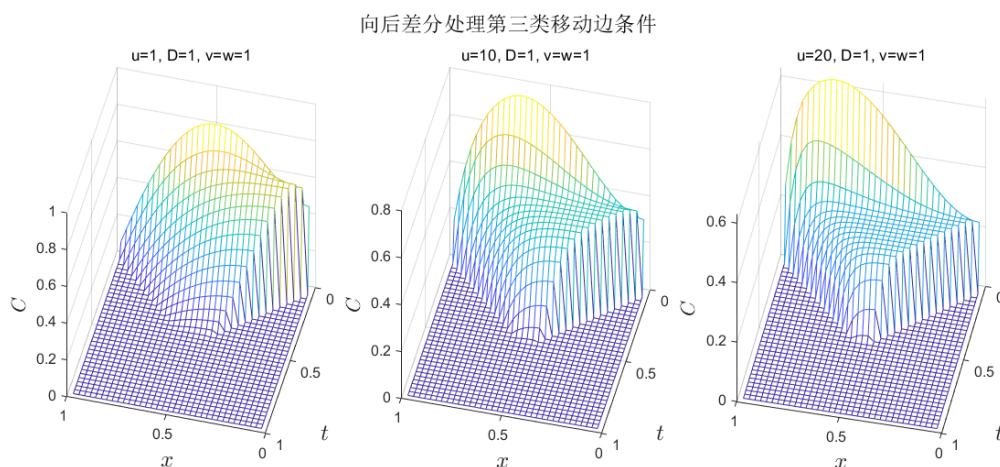
答：水流速度 u 是所有模型中均出现的系数。现从基本的第一类边条件以及双移动边条件入手，从边界条件的“静”与“动”分析水流速度 u 对溢油浓度值 C 的影响。对于第一类边条件，以 $N=35, M=30, l=1, T=0.5, D=1$ 为例， $u=1, 10, 20$ ，对比如下：



可以发现，随着水流速度 u 的增加，溢油时间 t^* 缩短，溢油速度加快，每时刻的溢油峰值 C^* 向右端移动。若水流有方向，如果水流速度 u 取负，猜测溢油时间 t^* 同样缩短，溢油峰值 C^* 向左端移动。水流速度增加会加速溢油过程，使达到完全吸收的时间越短，同时改变溢油峰值的趋向。

对于第三类移动边条件，以 $N=36, M=18, l=1, T=0.5, D=1$ 为例，

$u = 1, 10, 20$ ，对比如下：



随着水流速度 u 的增加，溢油峰值的变化方向更加明显。由于移动边条件的限制，溢油区域与非溢油区域的边界分明，右移动边界从平缓趋于陡峭，左移动边界从其起伏趋于平缓。水流速度 u 改变边界处溢油浓度 C 的变化形态，猜测水流速度 u 没有改变溢油总量³，而是扩散系数 D 改变了溢油总量。若想加快溢油的吸收，建议从扩散系数 D 入手，选择适合溢油扩散的达标的水域进行排放。

五、课程设计总结

本次微分方程数值解的课程设计用时三周完成，在这个过程中我虽然经历了很多挫折与困难，也体会到实现算法的成就感，加深了工业应用数值解的理解。我收获到二点非常重要的经验，这对今后的学习之路很有帮助。

理论知识的重要性。重调问题的五点差分格式和溢油装置的移动边条件都是基于差分对各阶偏导数处理。构造五点差分格式的矩阵时，我在大作业的基础上对差分格式的细节作了补充。由于没有及时发现课件上的错误，矩阵中某一系数少了符号，导致一直无法正确求解。在排除了算法框架的可能疏漏，仔细研究后我终于找到问题所在。所以理论知识上的细节不可忽视，任何结论只有在推导和应用后得到准确理解。同样，溢油装置的移动边条件在理论知识上提出很高要求。课件并没有给出所有移动边条件的求解格式，需要在已知的右移动边条件上举一反三以此类推。通过大量的画图举例分析，我耐心研究划分数和角标的规律，终于找出所有移动边条件的求解格式，确定算法的框架。理论知识及其推导是最重要的一环，必须深刻理解数值解迭代的变化规律才能把握正确的关键。

³ 溢油总量表达式 $\iint C(x,t) dx dt$

算法设计的必要性。在本次课程设计中我使用了部分网格画图，辅助理解每一种格式的迭代过程。对每一个角标的迭代设计以及研究矩阵大小变化的规律时，我大量使用 *notability* 画图理解，所有笔记⁴记录了每一种格式推导的细节。通过不同颜色的标识和箭头的引导，我确定了算法设计的框架，顺利地完成了所有差分格式推导。算法题一般需要画图理解，数值算法尤其体现这一点。数值算法设计的必要性在于梳理每一个变量之间的关系和顺序，在宏观设计的指引下，建立变量与数值结果之间的逻辑映射。算法设计同样培养我严谨、耐心的习惯，我充分领悟到微分方程的奇妙之处。

在这次课程设计中，相比于其他同学而言，我认为自己在某些方面做了较为深入的研究和尝试并取得了一定成功。

模型的完整性。在溢油事故的数值方法求解中，我顺利推导并计算出所有边条件的结果，尤其三类移动边条件。直观体现出围油栏和收油装置对溢油浓度的影响，为溢油装置的选择提供丰富的意见。

格式的稳定性。鉴于前后差分格式的无条件稳定，我不选择用向前差分格式作为求解思路。为了集中处理算法的构造，我将更多的精力放在算法实现上。

虽然在三周内我对算法做了很多调试和改进，但由于时间和能力，这次的课程设计仍然存在许多不足。格式的丰富性有待提升，对于 *CN* 格式和迎风差分格式也可以用于求解，精度的提高有助于保留数据的原始性。可视化数值结果有很多的方式，多样的图表分析提高报告的可读性。对模型求解结果的物理意义解释有所欠缺。虽然通过数值模拟求出溢油浓度，但是无法透过数值解给出深刻的与事实相符合的分析和建议。

虽然存在许多不足，但是我收获了丰富的理论实践经验，对微分方程数值解这门将数学与计算机相结合而研究的学科产生浓厚的兴趣。我在此特别感谢讲授微分方程数值解的老师，她为我提供了许多指导性的意见，耐心解答我在某细节上的疑惑；感谢热心的同学，帮助检查算法思路的正确性。我将在今后的学习中深入学习相关知识，继续发掘数学的魅力。

⁴ 见附件

参考文献

- 【1】 胡健伟, 汤怀民, 微分方程数值方法, 科学出版社, 2016.
- 【2】 黄风辉, 微分方程数值解课件, 2022.
- 【3】 郑咸义, 计算方法, 华南理工大学出版社, 2018.

附件

- (1) 可执行代码
- (2) 算法笔记
- (3) 截屏图

| 文件 | 注释 |
|---------------|-----------------|
| one_1.m | 数值算列一的第一个五点差分求解 |
| one_2.m | 数值算列一的第二个五点差分求解 |
| two_1.m | 数值算列二的第一个五点差分求解 |
| two_2.m | 数值算列二的第二个五点差分求解 |
| compare.m | 计算收敛阶 |
| one_back.m | 第一类边条件求解 |
| two_back.m | 第二类边条件求解 |
| move_left.m | 第二类移动边条件求解 |
| move_right.m | 第一类移动边条件求解 |
| move_double.m | 第三类移动边条件求解 |
| combine.m | 对比模型一二求解效果 |
| combine_2.m | 对比模型三四五求解效果 |
| notes.pdf | 算法笔记 |
| screams.pdf | 截屏图汇总 |