Cheating Paper.

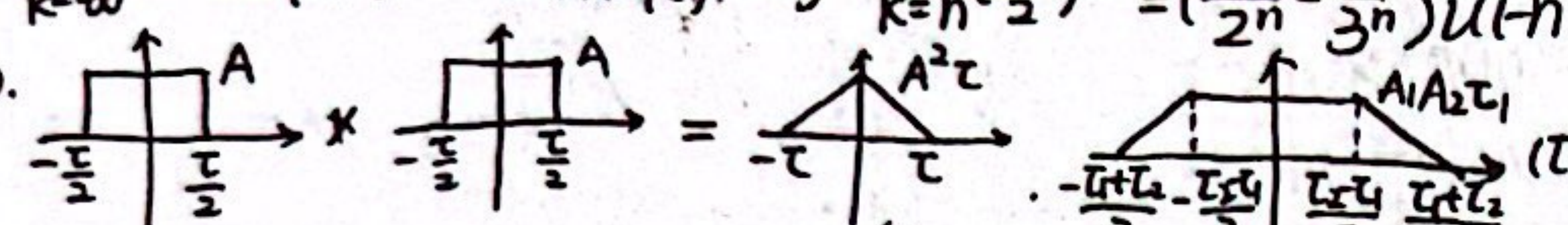
第一章 信号与系统.

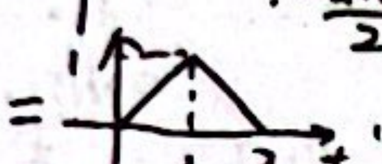
1. $\delta(at)=\delta(t)$; $u(n)\leftrightarrow u(-n-1)$. $u(t)\leftrightarrow u(-t)$.
2. 对系统 $y(t)=x(at)$, 有 $x(t)\to y(t)=x(at)$.
   $x(t-b)\longrightarrow y(t)=x(at-b)$ (画图). $y(t-b)\to x(at-ab)$.
3. 系统: $y(n)=2x(n)+3$ 不是线性系统(不满足零输入时零输出)

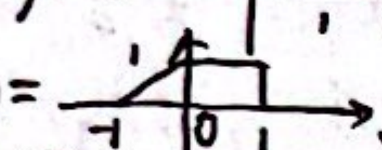
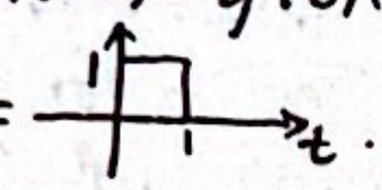
第二章 线性时不变系统.

1. 若 $x_1(n)$ 长度为 L. $x_2(n)$ 为 P. 则 $y(n)=x_1(n)*x_2(n)$ 为 $(L+P-1)$.
2. $u(n)*u(n)=[\delta(n)+\delta(n-1)+\cdots]*u(n)=(n+1)u(n)$. $u(t)*u(t)=tu(t)$.

○ $2^{-n}u(-n)*3^{-n}u(-n)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}2^{-k}u(-k)\cdot3^{-(n-k)}u[-(n-k)]$
$=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}2^{-k}u(-k)3^{-n+k}u(-n+k)=3^{-n}\sum_{k=n}^{0}(\frac{3}{2})^k=(\frac{3}{2^n}-\frac{1}{3^n})u(-n)$.

3. 

○ 已知 $x(t)=\sin t\,u(t)$. $y(t)=$  求 $h(t)=y''(t)+y(t)$.

○ 由定义计算卷积: $x_1(t)=$  . $x_2(t)=$ 

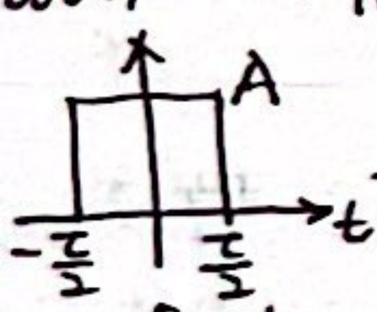
4. 离散系统特征根为二重实根 r. 设 $y_{zp}(n)=(C_1n+C_2)r^n$.
5. 求系统的 $h(n)$. $h(t)$ 可将 $x(t)=\delta(t)$. 或 $x(n)=\delta(n)$ 代入方程求解.

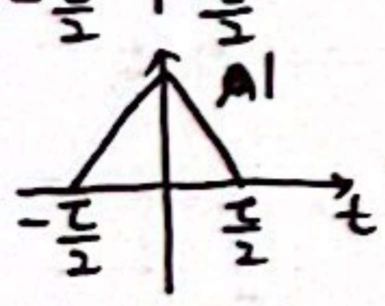
第三章 傅里叶变换.

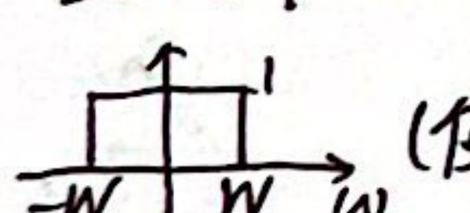
1. $X(j\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt$. $x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$.
2. 常用信号的傅里叶变换: $(e^{at}u(-t)\to\frac{1}{j\omega-a})$.

① $e^{-at}u(t)\longrightarrow\frac{1}{j\omega+a}$. $e^{-a|t|}\longrightarrow\frac{2a}{\omega^2+a^2}$.

② $u(t)\longrightarrow\pi\delta(\omega)+\frac{1}{j\omega}$. $sgn(t)\longrightarrow\frac{2}{j\omega}$.

③  $\longrightarrow A\tau Sa(\frac{\omega\tau}{2})=\frac{2A}{\omega}\sin(\frac{\omega\tau}{2})$ $(Sa(x)=\frac{\sin x}{x})$. $Sa(0)=1$

 $\longrightarrow\frac{\tau}{2}Sa^2(\frac{\omega\tau}{4})$. 两个相同门函数相卷.

④ $\frac{\sin Wt}{\pi t}\longrightarrow$  (使用 $F(t)=2\pi f(-\omega)$ 性质).

⑤ $t^n\longrightarrow2\pi(j)^n\delta^{(n)}(\omega)$. $\frac{1}{t}\longrightarrow-j\pi sgn(\omega)$. $t\,sgn(t)$ ⇑ $|t|\to-\frac{2}{\omega^2}$

⑥ $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)\longrightarrow\frac{2\pi}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-n\omega_s)$. $\omega_s=\frac{2\pi}{T}$. $\Rightarrow\omega_s\delta_{\omega_s}(\omega)$.
$\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_ne^{jn\omega_st}\longrightarrow2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n\delta(\omega-n\omega_s)$. $\omega_s=\frac{2\pi}{T}$.

⑦ $x_1(t)*x_2(t)\longrightarrow X_1(j\omega)X_2(j\omega)$. $x_1(t)x_2(t)\longrightarrow\frac{1}{2\pi}X_1(j\omega)*X_2(j\omega)$.

⑧ $\int_{-\infty}^{+\infty}|x(t)|^2dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|X(j\omega)|^2d\omega$. (能量守恒)

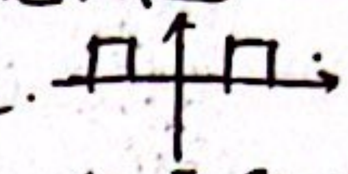
3. 通过微分求F变换.
(1) 若 $x(t)$ 为有限长 则 $F[x(t)]=F[x'(t)]\cdot\frac{1}{j\omega}$
(2) 若 $x(t)$ 为无限长 则 $F[x(t)]=F[x'(t)]\cdot[\pi\delta(\omega)+\frac{1}{j\omega}]$.
$F[x(t)]=\frac{1}{j\omega}F[x'(t)]+[x(+\infty)+x(-\infty)]\pi\delta(\omega)$.

4. $e^{j\omega_0t}\to2\pi\delta(\omega-\omega_0)$.
   $x(t)\cos\omega_0t\longrightarrow\frac{1}{2}[X(\omega+\omega_0)+X(\omega-\omega_0)]$.
   $x(t)\sin\omega_0t\longrightarrow\frac{j}{2}[X(\omega+\omega_0)-X(\omega-\omega_0)]$.

5. 对周期信号 $x(t)$ 及其一个周期 $x_0(t)$.
级数: $x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_ne^{jn\omega_st}$. $\omega_s=\frac{2\pi}{T}$.
F变换: $x(t)\longrightarrow2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n\delta(\omega-n\omega_s)$. $\omega_s=\frac{2\pi}{T}$.
其中: $\underbrace{F_n=\frac{1}{T}X_0(\omega)|_{\omega=n\omega_s}.\ 或\ F_n=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}x(t)e^{-jn\omega_st}dt}_{相等}$.

6. 采样: $x_p(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(nT)\delta(t-nT)$. $X_p(j\omega)=\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}X(j\omega-n\omega_s)$ $\omega_s=\frac{2\pi}{T}$.
对带限信号 $x(t)$. $\omega>\omega_m$ 时 $X(\omega)=0$.
Nquist 采样频率需满足 $\omega_s\ge2\omega_m$. $(2\omega_m)$

7. ① $e^{j\omega_1t}\longrightarrow\boxed{H(j\omega)}\longrightarrow y(t)=|H(j\omega_1)|e^{j(\omega_1t+\varphi)}$. $\varphi=\arg H(j\omega)$
② $\cos\omega_1t\to y(t)=|H(j\omega_1)|\cos(\omega_1t+\varphi)$. $\varphi=\arg H(j\omega)$.
③ $\sin\omega_1t\to y(t)=|H(j\omega_1)|\sin(\omega_1t+\varphi)$. $\varphi=\arg H(j\omega)$.
④ $x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_ne^{jn\omega_st}\to y(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}H(jn\omega_s)F_ne^{jn\omega_st}$

8. ① $h(t)=\frac{(\sin2\pi t)(\sin4\pi t)}{\pi t^2}\to$ 非理想低通. 
② $h(t)=\frac{\sin2\pi t\cos4\pi t}{\pi t}\longrightarrow$ 带通. 

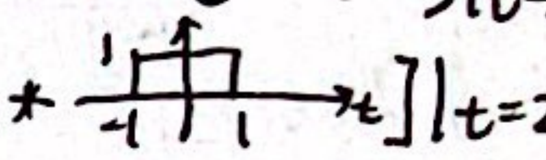
○ 已知 $x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{jnt}$, $s(t)=\cos t$. 低通滤波器频响为
$H(j\omega)=\begin{cases}e^{-j\frac{\pi}{3}\omega}, & |\omega|<\frac{3}{2}\\ 0, & |\omega|>\frac{3}{2}\end{cases}$ 求系统输出 $y(t)$.

$x(t)\longrightarrow\otimes\longrightarrow\boxed{低通}\longrightarrow y(t)$
$s(t)$

9. 奇偶性: $X_R(j\omega)\to x_e(t)$. $X_I(j\omega)\to x_o(t)$. 偶 奇

○ 已知 $F(\omega)=F_0(\omega)e^{-j\omega}$ 则 $\arg F(\omega)=\begin{cases}-\omega, & F_0(\omega)>0\\ \pi-\omega, & F_0(\omega)<0\end{cases}$

$\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)d\omega=[\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)e^{j\omega t}d\omega]|_{t=0}=[2\pi f(t)]|_{t=0}=2\pi f(0)$.

$\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)\frac{2\sin\omega}{\omega}e^{j2\omega}d\omega=[\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)2Sa(\omega)e^{j\omega t}d\omega]|_{t=2}$.
$=2\pi[f(t)*$  $]|_{t=2}$.

○ 确定 Nyquist 采样频率:
(1) $(Sa)^2(100t)$. (2) $f_1(t)*f_2(t)$. $\omega_{m1}=1000\pi$. $\omega_{m2}=2000\pi$.

○ 计算卷积 $f_1(t)=u(t)-u(t-4)$. $f_2(t)=\sin\pi t\cdot u(t)$.

10. 由 $f(t)\to F(\omega)$. $F(t)\longrightarrow2\pi f(-\omega)$ 得 $f(t)=\frac{1}{2\pi}F[F(t)]|_{\omega=-t}$.

---

10. $x(n)=e^{j\omega_0n}$ 时. 特征输出为 $y(n)=H(e^{j\omega_0})e^{j\omega_0n}$.
$x(n)=A\cos(\omega_0n+\varphi_0)\Rightarrow y(n)=|H(e^{j\omega_0})|A\cos(\omega_0n+\varphi_0+\arg H(e^{j\omega_0}))$.

第六章 系统的实现.

1. X 前向传播. Y 反向传播. X 的系数均不变. Y 中除 $y(n)$ 外其余系数变为相反数. 直接I型合并为直接II型.
2. $y(n)$ 项的系数必须化为 1. "+" 化成 "-".
3. 梅森公式. $H=\frac{1}{\Delta}\sum_i g_i\Delta_i$.
$\Delta=1-$(所有不同环路增益之和)+(所有两两互不接触环路的增益乘积之和)-(所有三个互不接触…)+….
g_i 表示由输入结点至输出结点的第 i 条前向通路的增益. Δ_i 是除去第 i 条前向通路相接触的环路外剩下流图的 Δ.

Δ 绝对可积是信号存在傅里叶变换的充分条件.
当 F(s) 的一阶极点离实轴越远. f(t) 振幅增长越快.
Δ 有限长序列 z 变换的 ROC: $x(n)\ne0$. $n_1\le n\le n_2$.
若 $n_1<0$. $n_2\le0$. 则 $0\le|z|<\infty$. 若 $n_1<0$. $n_2>0$. 则 $0<|z|<\infty$. 若 $n_1\ge0$. $n_2>0$. 则 $0<|z|\le\infty$.

○ $\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k)y(k-n)$ 的 z 变换为 $X(z)\cdot Y(-z)$.

第四章 拉氏变换.

1. ① $\delta(t)\rightarrow 1$, 全部S. $u(t)\rightarrow\frac{1}{s}$. $Re(s)>0$. $-u(-t)\rightarrow\frac{1}{s}$. $Re(s)<0$.

② $e^{-\alpha t}u(t)\longrightarrow\frac{1}{s+\alpha}$. $Re(s)>-\alpha$. $-e^{-\alpha t}u(-t)\longrightarrow\frac{1}{s+\alpha}$ $Re(s)<-\alpha$

③ $t^n u(t)\longrightarrow\frac{n!}{s^{n+1}}$. $Re(s)>0$. $-t^n u(-t)\longrightarrow\frac{n!}{s^{n+1}}$. $Re(s)<0$.

④ $\sin\omega t\cdot u(t)\longrightarrow\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$. $Re(s)>0$.

$\cos\omega t\cdot u(t)\longrightarrow\frac{s}{s^2+\omega^2}$. $Re(s)>0$.

2. ① $\frac{d}{dt}x(t)\longrightarrow sX(s)$, ~~▬~~ $-t x(t)\longrightarrow\frac{d}{ds}X(s)$.

② $\int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau\longrightarrow\frac{1}{s}X(s)$.

○ 因果信号 $X(s)=\frac{s^3}{s^2+s+1}$. $\Rightarrow\frac{1}{s^2+s+1}=\frac{1}{(s+\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt3}{2})^2}=\frac{\frac{\sqrt3}{2}}{(s+\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt3}{2})^2}\cdot\frac{2}{\sqrt3}$

$\xrightarrow{\mathcal{L}}\frac{2}{\sqrt3}\sin\frac{\sqrt3}{2}t\,u(t)e^{-\frac{1}{2}t}$. $x(t)=-\delta(t)+\delta'(t)+\frac{2}{\sqrt3}\sin\frac{\sqrt3}{2}t\,u(t)e^{-\frac{1}{2}t}$.

$(X(s)=s-1+\frac{1}{s^2+s+1})$.

○ 因果信号 $X(s)=\frac{s+3}{(s+1)(s+1)^3}=\frac{2}{(s+1)^3}-\frac{1}{(s+1)^2}+\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s+2}$.

$\Rightarrow x(t)=t^2e^{-t}u(t)-te^{-t}u(t)+e^{-t}u(t)-e^{-2t}u(t)$.

3. 周期信号的拉氏变换: $X(s)=X_0(s)\frac{1}{1-e^{-sT}}$, $Re(s)>0$.

○ 因果信号 $X(s)=\frac{1}{1+e^{-2s}}=\frac{1-e^{-2s}}{1-e^{-4s}}$. $X_0(s)=1-e^{-2s}$. $T=4$.

4. ① 初值定理: $\lim_{t\to0^+}x(t)=x(0^+)=\lim_{s\to\infty}sX(s)$.

② 终值定理: $\lim_{t\to\infty}x(t)=\lim_{s\to0}sX(s)$ (所有极点在左半平面).

○ $X(s)=\frac{s^3+s^2+2s+1}{(s+1)(s+2)(s+3)}=1-\frac{5s^2+9s+5}{(s+1)(s+2)(s+3)}$. $x(0^+)=-5$.

5. 单边拉氏变换微分性质:

① $x'(t)\longrightarrow sX(s)-x(0^-)$

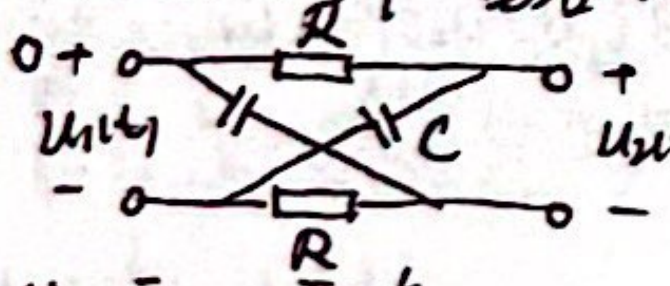
② $x''(t)\longrightarrow s^2X(s)-sx(0^-)-x'(0^-)$.

③ $x'''(t)\longrightarrow s^3X(s)-s^2x(0^-)-sx'(0^-)-x''(0^-)$.

④ $x^{(n)}(t)\longrightarrow s^{(n)}X(s)-\Sigma_{m=0}^{n-1}s^{n-m-1}x^{(m)}(0^-)$.

○ $H(s)=\frac{s^2}{(s+\frac{\sqrt2}{2})^2+\frac{1}{2}}=\frac{s^2}{s^2+\sqrt2 s+1}=1-\frac{\sqrt2 s+1}{s^2+\sqrt2 s+1}=1-\frac{\sqrt2(s+\frac{\sqrt2}{2})}{(s+\frac{\sqrt2}{2})^2+(\frac{\sqrt2}{2})^2}$.

6. 电路分析: 电容 $\rightarrow\frac{1}{sC}$. 电感 $\rightarrow sL$. 电阻 $\rightarrow R$.



$\Rightarrow H(s)=\frac{U_2(s)}{U_1(s)}=\frac{1-sCR}{sCR-1}=-\frac{s-\frac{1}{RC}}{s+\frac{1}{RC}}$.

第五章、Z变换. $X(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x(n)z^{-n}$ (双边).

1. $\sum_{n=0}^{\infty}a^n=\frac{1}{1-a}$. $|a|<1$. $\sum_{n=n_1}^{\infty}a^n=\frac{a^{n_1}}{1-a}$. $|a|<1$. $\sum_{n=n_1}^{n_2}a^n=\begin{cases}\frac{a^{n_1}-a^{n_2+1}}{1-a}, & a\neq1\\ n_2-n_1+1, & a=1\end{cases}$

2. ① $\delta(n)\rightarrow1$. All z, $u(n)\rightarrow\frac{1}{1-z^{-1}}$. $|z|>1$. $-u(-n-1)\rightarrow\frac{1}{1-z^{-1}}$. $|z|<1$.

② $a^nu(n)\rightarrow\frac{1}{1-az^{-1}}$, $|z|>|a|$. $-a^nu(-n-1)\rightarrow\frac{1}{1-az^{-1}}$. $|z|<|a|$.

③ $na^nu(n)\longrightarrow\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$. $|z|>|a|$. $-na^nu(-n-1)\longrightarrow\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$. $|z|<|a|$

④ $[\cos\omega_0 n]\cdot u(n)\longrightarrow\frac{1-[\cos\omega_0]z^{-1}}{1-[2\cos\omega_0]z^{-1}+z^{-2}}$. $|z|>1$ $\begin{cases}(n+1)a^nu(n)\\ a^nu(-n)\end{cases}$

$[\sin\omega_0 n]\cdot u(n)\longrightarrow\frac{[\sin\omega_0]z^{-1}}{1-[2\cos\omega_0]z^{-1}+z^{-2}}$. $|z|>1$.

⑤ $[r^n\cos\omega_0 n]u(n)\longrightarrow\frac{1-[r\cos\omega_0]z^{-1}}{1-[2r\cos\omega_0]z^{-1}+r^2z^{-2}}$. $|z|>r$.

$[r^n\sin\omega_0 n]u(n)\longrightarrow\frac{[r\sin\omega_0]z^{-1}}{1-[2r\cos\omega_0]z^{-1}+r^2z^{-2}}$. $|z|>r$.

⑥ $\delta(n-m)\Rightarrow z^{-m}$.

3. ① $x(n-m_0)\longrightarrow z^{-m_0}X(z)$. $e^{j\omega_0 n}x(n)\longrightarrow X(e^{-j\omega_0}z)$.

$z_0^nx(n)\longrightarrow X(\frac{z}{z_0})$. $a^nx(n)\longrightarrow X(\frac{z}{a})=X(a^{-1}z)$.

(尺度变换).

② $x(-n)\longrightarrow X(z^{-1})$.

③ $x(n)-x(n-1)=(1-z^{-1})X(z)$.

④ $\sum_{k=-\infty}^{n}x(k)\longrightarrow\frac{X(z)}{1-z^{-1}}$. ⑤ $nx(n)\longrightarrow-z\frac{dX(z)}{dz}$.

○ 已知 $X(z)=\frac{z^{-2}}{1+z^{-2}}$. $|z|>1$. 则 $X(z)=\frac{[\sin\frac{\pi}{2}]z}{z^2-[2\cos\frac{\pi}{2}]z+1}z^{-1}$. $|z|>1$

$\Rightarrow x(n)=[\sin\frac{\pi}{2}(n-1)]u(n-1)$.

4. ① 初值定理: 因果序列 $x(0)=\lim_{z\to\infty}X(z)$. 非因果序列 $x(0)=\lim_{z\to0}X(z)$.

② 终值定理: 因果序列 $x(\infty)=\lim_{z\to1}(z-1)X(z)$. 根据因果性分开求解.

○ 已知 $X(z)=\frac{\frac{5}{6}-\frac{1}{3}z^{-1}}{1-\frac{5}{2}z^{-1}+z^{-2}}$. $\Rightarrow X(z)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-2z^{-1}}$.

$|z|<\frac{1}{2}$ 时为非因果. $|z|>2$ 为因果. $\frac{1}{2}<|z|<2$ 时为双边序列.

5. 单边Z变换. $X(z)=\sum_{n=0}^{\infty}x(n)z^{-n}$.

$\begin{cases}x(n+1)u(n)\rightarrow zX(z)-zx(0).\\ x(n-1)u(n)\longrightarrow z^{-1}X(z)+x(-1).\end{cases}$

$\begin{cases}x(n+2)u(n)\longrightarrow z^2X(z)-z^2x(0)-zx(1)\\ x(n-2)u(n)\longrightarrow z^{-2}X(z)+z^{-1}x(-1)+x(-2).\end{cases}$

$\begin{cases}x(n+m)u(n)\rightarrow z^m[X(z)-\sum_{k=0}^{m-1}x(k)z^{-k}]\\ x(n-m)u(n)\longrightarrow z^{-m}[X(z)+\Sigma_{k=-m}^{-1}x(k)z^{-k}].\end{cases}$

○ 系统方程: $y(n+2)+y(n+1)-6y(n)=x(n+1)$. $y(0)=0$. $y(1)=1$. $x(n)=4^nu(n)$

① 使用单边Z变换代入 $y(0)$. $y(1)$. ② 使用双边Z变换求 $H(z)$. 再由起始条件推 $y(-2)$. $y(-1)$ 求零输入响应 ③ 将方程化为 $y(n)+y(n-1)-6y(n-2)=x(n-1)$. $x(n)=4^nu(n)$. 用 $y(-1)$. $y(-2)$ 作为方程的初始条件用单边Z变换.

6. $x(n)=z_i^n$ 时. 特征输出为 $y(n)=H(z_i)z_i^n$.

7. 离散信号傅里叶变换 $H(e^{j\omega})$ 具有周期性. 周期为 2π. $[-\pi,\pi]$

$\pm\pi$. $\pm3\pi$. $\pm5\pi$… 为高通. 0. $\pm2\pi$. $\pm4\pi$… 为低通. 中间为带通.

8. DTFT变换. $X(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x(n)e^{-j\omega n}$. $x(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$.

↳ 取主周期 $\int_{-\pi}^{\pi}$.

① $x(n)=\delta(n)$. $X(e^{j\omega})=1$.

② $x(n)=\begin{cases}1, & |n|\le N\\ 0, & |n|>N\end{cases}\Rightarrow X(e^{j\omega})=\frac{\sin\omega(N+\frac{1}{2})}{\sin\frac{\omega}{2}}$ (矩形序列).

③ $x(n)=a^nu(n)$. $|a|<1\Rightarrow X(e^{j\omega})=\frac{1}{1-ae^{-j\omega}}$.

④ $x(n)=(n+1)a^nu(n)$. $|a|<1\Rightarrow X(e^{j\omega})=\frac{1}{(1-ae^{-j\omega})^2}$ (可由Z变换求得

⑤ $x(n)=a^nu(-n)$. $|a|>1$. $\Rightarrow X(e^{j\omega})=\frac{1}{1-a^{-1}e^{j\omega}}$. $-a^nu(-n-1)\rightarrow\frac{1}{1-ae^{-j\omega}}$.

Δ 若 $x(n)$ 为有限序列. 直接求和; 若为无限长序列. 分为 $(-\infty,-1]$. $[0,+\infty)$ 两部分分别求和再相加.

⑥ $x(n-m_0)=X(e^{j\omega})e^{-j\omega m_0}$. ⑦ $x(n)=na^nu(n)$. $|a|<1$. $\Rightarrow\frac{ae^{-j\omega}}{(1-ae^{-j\omega})^2}$

⑦ $x(n)=1$, $-\infty<n<+\infty\Rightarrow X(e^{j\omega})=2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-2k\pi)$.

$x(n)=u(n)$. $\Rightarrow X(e^{j\omega})=\frac{1}{1-e^{-j\omega}}+\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-2k\pi)$.

⑧ $x(n)=\frac{\sin Wn}{\pi n}$. $\Rightarrow X(e^{j\omega})=\begin{cases}1, & |\omega|\le W\\ 0. & W<|\omega|\le\pi\end{cases}$ (2以2π为周期).

⑨ $e^{j\omega_0 n}x(n)\longrightarrow X(e^{j(\omega-\omega_0)})$.

⑩ 微分: $nx(n)\Rightarrow j\frac{d}{d\omega}X(e^{j\omega})$. $\Rightarrow -jnx(n)\Rightarrow\frac{d}{d\omega}X(e^{j\omega})$.

⑪ $x_1(n)\cdot x_2(n)\rightarrow\frac{1}{2\pi}X_1(e^{j\omega})*X_2(e^{j\omega})$.

○ $x(n)=(\frac{1}{3})^{|n|}u(-n-2)\Rightarrow(\frac{1}{3})^{-n}u(-n)-\delta(n)-\frac{1}{3}\delta(n+1)$.

$\Rightarrow X(e^{j\omega})=\frac{1}{1-\frac{1}{3}e^{j\omega}}-1-\frac{1}{3}e^{j\omega}$.

○ $x(n)=(n+1)(\frac{1}{2})^{|n|}$. 令 $X_0(e^{j\omega})=DTFT[(\frac{1}{2})^{|n|}]$. 则 $X(e^{j\omega})=(j\frac{d}{d\omega}+1)X_0(e^{j\omega})$

9. DTFT反变换.

○ $X(e^{j\omega})=\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k\delta(\omega-\frac{\pi}{2}k)$. 求 $x(n)$. $\Rightarrow$ 在 $-\pi\le\omega\le\pi$ 范围内:

$X(e^{j\omega})=\delta(\omega+\pi)-\delta(\omega+\frac{\pi}{2})+\delta(\omega)-\delta(\omega-\frac{\pi}{2})$ $(k=-2,-1,0,1)$.

$x(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(e^{j\omega})\cdot e^{j\omega n}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[\delta(\omega+\pi)-\delta(\omega+\frac{\pi}{2})+\delta(\omega)-\delta(\omega-\frac{\pi}{2})]\cdot e^{j\omega n}d\omega=\frac{1}{2\pi}(e^{-j\pi n}-e^{-j\frac{\pi}{2}n}+1-e^{j\frac{\pi}{2}n})=\frac{1}{2\pi}[1+(-1)^n+\cos\frac{\pi}{2}n]$.

○ $X(e^{j\omega})=\begin{cases}1 & \frac{\pi}{3}\le|\omega|\le\frac{2\pi}{3}\\ 0 & 其他\end{cases}$ (带通滤波器).

$x(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{2\pi}{3}}^{-\frac{\pi}{3}}1\cdot e^{j\omega n}d\omega+\frac{1}{2\pi}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}}1\cdot e^{j\omega n}d\omega$.

$=\frac{1}{\pi n}(\sin\frac{2\pi}{3}n-\sin\frac{\pi}{3}n)$. $\Rightarrow$ 两个门函数相减.

○ Z反变换: $X(z)=\frac{1+z^{-1}}{1-2z^{-1}\cos\omega+z^{-2}}=\frac{1-[\cos\omega]z^{-1}}{1-2z^{-1}\cos\omega+z^{-2}}+\frac{\cos\omega+1}{\sin\omega}\cdot\frac{[\sin\omega]z^{-1}}{1-2z^{-1}\cos\omega+z^{-2}}$.