一、力和力系的简化

1. 求汇交力系的合力的解析方法(主矢)

矢量公式：$\vec{F}_0=\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i$　　基下的坐标公式：$F_0=\sum_{i=1}^{n}F_i$

对于每个单独的力 $\vec{F}_i$，确定其大小和方向即可：

①大小：题给条件 $\vec{F}_i=xN$，则该力大小(模)为：$|\vec{F}_i|=x$

②方向：观察题给图示力 $\vec{F}_i$ 的指向，并写出力 $\vec{F}_i$ 方向上的单位矢量 $\vec{e}_i=(a,b,c)^T$，($|\vec{e}_i|=1$)。

(此时已将作用点移到了原点)

则分力 $\vec{F}_i$ 的坐标阵为 $F_i=xe_i=x(a,b,c)^TN$，所有力相加得到合力 $\vec{F}_0$ 的坐标阵(力系的主矢)。

(例2.1-1，例2.3-1)

Δ力 $\vec{F}_i$ 在基下的坐标阵也可这样求：写出力 $\vec{F}_i$ 在基矢量方向上的投影长度，如在基 $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$ 上的投影 a_1,a_2,a_3，则力 $\vec{F}_i=a_1\vec{e}_1+a_2\vec{e}_2+a_3\vec{e}_3=\vec{a}_1+\vec{a}_2+\vec{a}_3$，自然得到坐标阵 $(a_1,a_2,a_3)^T$，和上面的方法一致

2、力矩计算

(1) 力对点的矩(矢量) ①力的三个分力对点的矩的矢量和(横) ②力对三坐标轴的矩组合成的矢量(竖)

(2) 力对轴的矩(标量)=力对点的矩矢量的三个坐标分量

(3) 平面力矩计算：力对轴的矩为力对点的矩的模

3、求力系对O点的合力偶(主矩)

由1得到各个力 $\vec{F}_i$ 的坐标阵后，再写出每个力作用点的矢径的坐标方阵 $\tilde{r}_i$，由 $M_i=\tilde{r}_iF_i$ 得到力偶的坐标阵

将每个力对O点的力偶的坐标阵相加得到主矩。

(由1和2可以做力系的简化)

4、一般力系的简化(最简情况下的主矢和主矩，简化中心)

①首先求合力(主矢) $\vec{F}_R$ 及合力偶矩(主矩) $\vec{M}_O$ ②按 $\vec{F}_R$，$\vec{M}_O$，$\vec{F}_R\cdot\vec{M}_O$ 三个量是否等于0分为五种情况。其中需要进一步简化的为：a. $\vec{F}_R\neq0$，$\vec{M}_O\neq0$，$\vec{F}_R\cdot\vec{M}_O\neq0$ 此时主矢和主矩不为零也不垂直，则平移合力作用线使得主矩在垂直于合力方向上的分量被抵消掉(力螺旋)。平移的方向 $\vec{r}_{OC}$ 应与 $\vec{F}_R\times\vec{M}_O$ 的方向平行。⇒ $\vec{r}_{OC}=\frac{\vec{F}_R\times\vec{M}_O}{F_R^2}$，$\vec{M}_C=\frac{\vec{F}_R\cdot\vec{M}_O}{F_R}$，$|\vec{r}_{OC}|=\left|\frac{M_O}{F_R}\right|$

5、平行力系的简化

(1) ①平行力系在一般力系的基础上一定满足 $\vec{M}_O\cdot\vec{F}_O=0$，即主矩和主矢垂直，按照力螺旋的简化方法，主矩可化为0，只留下合力。

②平行力系简化后有 $\vec{F}_R\neq0$，$\vec{M}_O=0$，即简化为一合力，已达最简。③简化后有 $\vec{F}_R=0$，$\vec{M}_O\neq0$，即简化为一合力偶，已达最简。

④简化后 $\vec{F}_R=0$，$\vec{M}_O=0$，力平衡。

⇒平行力系的最简情况只有三种②③④，即合力或合力偶或力平衡，①还可再简化为②。

(2) $\vec{F}_R\neq0$ 时，求最简下的合力及中心(该方法重在求简化中心，使得合力偶 $\vec{M}_O=0$)。

某线/面上分布着大小不同的平行力系，①首先求合力 $F_C=\iint dF(m)$，该问题计算过程可和电学相联系，求一线/面上分布着的不均匀电荷的总电量，或求一线/面上密度分布不均匀的物体的总质量等；(2) 再求中心，运用公式 $F_C\vec{r}_C=\Sigma F_i\vec{r}_i$ 得 $\vec{r}_C$ 某分量 $r_{Cy}=\frac{1}{F_C}\iint r_y\,dF_y(m)$。

6. 求均质组合体的重心(质心)(形心)

由于是均质，则可用面积(体积)代替质量.

① 建立坐标系 xOy / xyz.

② 将组合体分成各个部分 B_1. B_2 ⋯ B_n.

③ 计算各部分面积，实体为正，空白为负：A_1. A_2 ⋯ A_n (带正负号)

④ 写出各部分的质心坐标 (x_{c1}, y_{c1}) (x_{c2}, y_{c2}) ⋯ (x_{cn}, y_{cn}) 注意坐标有正负

⑤ 组合体质心坐标：$x_c = \dfrac{A_1x_{c1}+A_2x_{c2}+\cdots+A_nx_{cn}}{A_1+A_2+\cdots+A_n}$，$y_c = \dfrac{A_1y_{c1}+A_2y_{c2}+\cdots+A_ny_{cn}}{A_1+A_2+\cdots+A_n}$

7. 平面力系的简化.

(1) 平面力系和平行力系相似，最简情况只有三种：① 力平衡 $F_R=0$. $M_O=0$. ② 合力，$F_R\neq0$，③ 合力偶，$F_R=0$，$M_O\neq0$.

⇒ 平面力系和平行力系的区别在于：

① 平行力系的力 F_i 平行. 力偶 M_i 不平行. ② 平面力系的力 F_i 可不平行. 力偶 M_i 平行.

(2) 平面力系中的力 F_i 由于各不平行. 则不能像平行力系那样一步求出简化为一合力的情况，要先求出主矢. 主矩. 再用力螺旋的方法平移主矢，把主矩抵消掉. 但若平面力系同时也为平行力系，则可一步求出.

二、约束. (根据不同约束类型，假设不同系统中含有的约束力(存在性与方向性)).

三、平衡力系.

1. 力系的平衡方程.

(1) 空间一般力系存在6个平衡方程：三个坐标轴分力合为0 (3个). 合力对三个轴的矩和为0 (3个) (一般来说，对原点O的矩的坐标分量)

(2) 空间汇交力系：汇交点O的主矩为零矢量. 其平衡方程为：$\sum \vec{F}_{ix}=0, \sum \vec{F}_{iy}=0, \sum \vec{F}_{iz}=0$.

(主矩为0的三个平衡方程不足以约束力系达到平衡，不是平衡条件).

⇒空间汇交力系总能将主矩化为0，该点存在性已知，不用知道具体位置。不需要对主矩进行约束.

(3) 空间力偶系：主矢为零矢量，其平衡方程为 $\sum M_{ox}(\vec{F}_i)=0$, $\sum M_{oy}(\vec{F}_i)=0$ $\sum M_{oz}(\vec{F}_i)=0$

(4) 空间平行力系：设力该力系的方向为z轴. 则其平衡方程为：$\sum \vec{F}_{iz}=0$. $\sum M_{ox}(\vec{F}_i)=0$ $\sum M_{oy}(\vec{F}_i)=0$

(另外3个平衡方程已经成立).

(5) 平面一般力系：设该力系的公法线方向为z轴. 其平衡方程为：$\sum \vec{F}_{ix}=0$. $\sum \vec{F}_{iy}=0$. $\sum M_{oz}(\vec{F}_i)=0$

(另外3个平衡方程已经成立).

(6) 平面汇交力系：在空间汇交力系平衡方程的基础上减少一个方程 ($\sum \vec{F}_{iz}=0$).

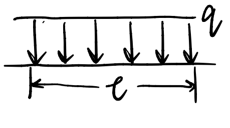
(7) 平面力偶系：该力偶系可合成为一个合力偶 $=M_1+M_2+\dots+M_n=\sum M_i$，其平衡方程为 $\sum M_i=0$

设力偶系的方向为z，则为 $\sum M_{oz}=0$.

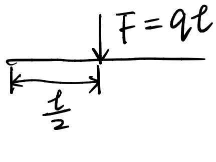
(8) 平面平行力系：在空间平行力系平衡方程中减少一个方程 ($\sum \vec{F}_{iz}=0$)：$\sum \vec{F}_{ix}=0/\sum \vec{F}_{iy}=0$, $\sum M_{oz}(\vec{F}_i)=0$

2. 对载荷分布的处理：

(1) 均匀分布载荷 (各处的载荷集度相同，均为q)



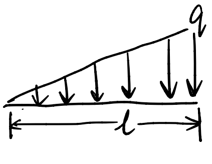
⇒等效为力：



$F=\int_0^l q\,dx = ql$

$x_c=\frac{1}{F_c}\int F(x)x\,dx=\frac{l}{2}$.

(2) 非均匀分布载荷：



左端载荷集度为0，右端为q. 则距左端x处的载荷集度为 $\frac{q}{l}x$.

取微元dx：$dF(x)=\frac{q}{l}x\,dx$ (dx近似以均匀分布). 积分得合力 $F_c=\frac{1}{2}ql$.

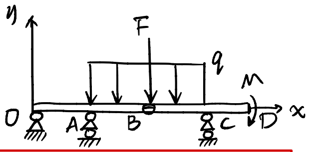
由 $x_c=\frac{1}{F_c}\sum_{i=1}^{n}F_i x_i=\frac{1}{F_c}\int F(x)x\,dx=\frac{1}{F}\int_0^l\frac{qx^2}{l}dx=\frac{2}{3}l$ 得合力作用点.

3. 刚体系的平衡

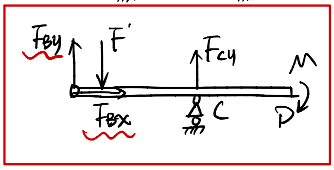
①首先分析约束力，作出其方向 ②判断属于静定还是静不定问题，对于静定问题直接列平衡方程求解

③静不定问题

(1)



⇒ O点固定铰支座有2个方向的约束力、A、D滑动铰支座各有1个约束力，总共4个待求量，而平面一般力系只有3个平衡方程 ⇒ 静不定问题。此时将系统分割，单独对BCD进行分析



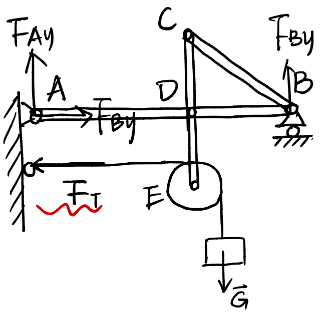
⇒ 在此系统中，有F_{By}，F_{Bx}和F_{Cy} 3个未知量，但其中F_{Bx}、F_{By}属于圆铰约束的内力，在对整体分析时是不考虑内力的，因此对B点取矩，只有F_{Cy}一个未知量，一个方程便可解出。注意F_{Bx} F_{By}此类约束内力，在对整体分析时约束内力互相抵消，不必画出，但当将其拆开分析时，需将真实受力情况画出，这里的F_{Bx} F_{By}来自圆铰的另一部分。

Δ处理作用在圆柱铰上的主动力，同样拆开分析时可视为作用在OAB部分，也可视为作用在BCD部分

Δ当遇到此(1)系统时，一般对圆柱铰不包含固定铰支座的一侧的杆进行拆分分析，如此题中的BC杆

Δ对于作用在圆柱铰两侧的载荷(主动力)，必须先拆分后简化，包括力偶拆分前也不能滑移！

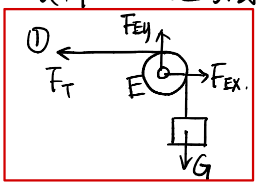
(2)



A为固定铰支座，B为滑动铰支座，C为圆柱铰。画出整体各部分的约束力

约束力共有4个：固定铰支座两个，滑动铰支座一个，柔索约束一个(不要忘记了柔索约束)

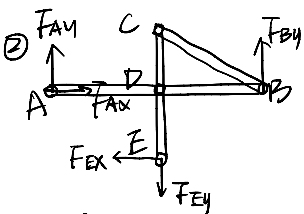
(其中C、D、E处的圆柱铰在整体上不存在约束力)，对该静不定问题进行拆分：



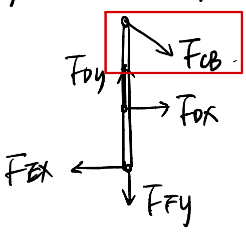
⇒ 该系统所受约束力有4个，圆柱铰的约束内力可用F_{Ex} F_{Ey}等表示

由平面力系的平衡方程：

$\Sigma F_{ix}=0$, $\Sigma F_{iy}=0$, $\Sigma M_{Ez}(F_i)=0$ 可以解出：$F_T=G=F_{Ex}=F_{Ey}$



⇒ 该系统中E处圆柱铰约束已知，系统有三个未知约束，则由平衡方程：$\Sigma F_{ix}=0$, $\Sigma F_{iy}=0$, $\Sigma M_{Az}(F_i)=0$ 可解出各约束力



Δ二力杆为直杆时，支点的约束力一定沿杆方向

⇒另外，BC杆为二力杆，二力杆的内力和圆柱铰约束力大小相等方向相反

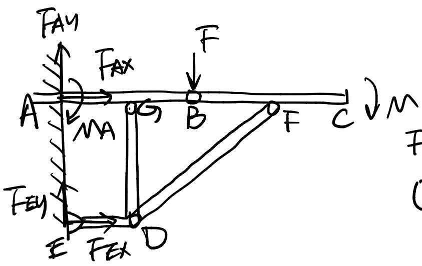
对杆CE单独分析可解出杆CE受到圆柱铰C的约束力，即为CB杆内力

也可对杆AB单独分析求出AB受圆柱铰B的约束力等于CB杆内力，但由于B处除了受圆柱铰约束力外，还有铰支座在y方向的力，而CE杆中的C只受圆柱铰约束力

Δ当遇到(2)系统为①所示时，一般可单独分析，总共4个约束力：柔索约束，圆柱铰约束(x、y方向)和重物约束，知其一即可解另外三个

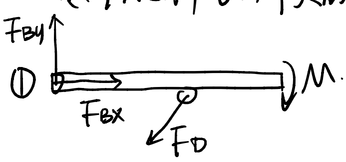
Δ将系统中的二力杆分析出来，约束力沿杆方向，杆的内力等于此沿杆方向的约束力

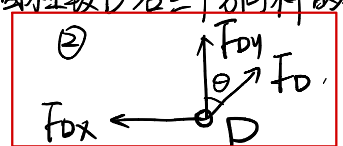
(3)



⇒初步判断，固定端约束有三个未知量，固定铰支座两个，共五个待求量

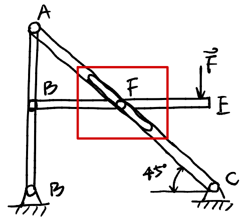
其中AC杆与(1)中类似，先对BC端作单独分析，可求出圆柱铰F的约束力，也即杆DF的内力，随后圆柱铰D沿三个方向杆的约束力也可求出





Δ当遇见(3)系统类似于②时，圆柱铰沿三个方向的力只需知道其中一个便能求出另外两个

(4)



⇒ 注意F点处可以滑动的销，此处F的约束力属于滑移约束，约束力沿垂直于销可滑动的方向。因此对杆BE和杆AC受力分析时，F点的约束力方向为垂直于杆AC。

⇒ 另外，对于该静不定问题，对系统进行拆分时，优先拆分已知主动力的受力杆(子系统)，以此为切入点。如首先对杆BE进行分析。

⇒ 对该系统有几处明显的二力杆(注意判别)，首先挑出二力杆以便确定约束力方向。(具体详见题目)。注意非二力杆两头的圆柱铰约束力方向只能设为F_x和F_y。二力杆如(2)中的C点。

四. 摩擦与摩擦力

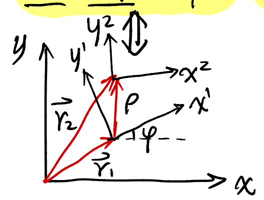
五、刚体平面运动学

1、什么是刚体的连体基？怎么描述刚体的位形？：$q=(r_c^T\ \varphi)^T=(x_c\ y_c\ \varphi)^T$

↳ 不同连体基下描述刚体的位形之间的关系：$r_2=r_1+A'\rho'$　$\varphi_2-\varphi_1=const$

$$\begin{pmatrix}x_2\\y_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_\rho\\y_\rho\end{pmatrix}$$ ⇐ 本质是坐标阵在基之间的转换 ⇐

$r_2=r_1+\rho$(参考基)，$\rho=A'\rho'$.



2、刚体的平面运动的类型？
- 平移运动 ⇒ $\varphi(t)=\varphi_0$
- 定轴转动 ⇒ $r_c(t)=r_{c0}$（取不动点为连体基基点）
- 一般运动 ⇒ 进行分解，在计算式上也能体现分解.

3、描述刚体的姿态变化 ⇒ 考虑姿态变化时不考虑基点位置的变化，只考虑绕基点的定轴转动.

① 两个物理量：角速度矢量 $\vec{\omega}$ 和角加速度矢量 $\vec{\alpha}$.

② 连体基本身的姿态变化 =（连体基矢量在参考基上对时间的导数）$\frac{^rd}{dt}\vec{e}^b=\vec{\omega}^{rb}\times\vec{e}^b$（连体基 b 和参考基 r）.

③ 任意矢量的姿态变化：$\dot{\vec{b}}=\mathring{\vec{b}}+\vec{\omega}\times\vec{b}$；$\dot{\vec{b}}=\vec{\omega}\times\vec{b}$（注意 $\vec{\omega}$ 均为 ω^{rb}）；$\frac{^rd}{dt}\vec{\omega}=\frac{^bd}{dt}\vec{\omega}$

↳ ②的推广，②只描述了连体基 b 中的基矢量随时间变化.

此处描述了连体基 b 中任意矢量在参考基上的变化.

也就是说，矢量本身与基的选择无关，但描述矢量的随时间变化（此处只描述姿态变化）时与基的选择有关，描述方式为在基下对时间求导。前一个式子是矢量在连体基和参考基中时间导数之间关系.

后一个式子描述与连体基固结的矢量（刚体）在参考基下的时间导数. ⇒ 可用于求刚体上给定点由于刚体存在绕连体基基点的转动而引起的速度，标量式为 $|\vec{v}|=v_{\omega b}=\omega b$.

特别地，角速度矢量 $\vec{\omega}$ 在各个基上是相同的，其垂直于各个基所在的平面，$\vec{\omega}=\omega\vec{z}$.

④ 角速度矢量叠加原理.（不要把角速度矢量和矢量对时间的导数弄混）

对空间：$\vec{\omega}^{ub}=\vec{\omega}^{ur}+\vec{\omega}^{rb}$

对平面：$\omega^{ub}=\omega^{ur}+\omega^{rb}$；$\vec{\alpha}^{ub}=\vec{\alpha}^{ur}+\vec{\alpha}^{rb}$；$\alpha^{ub}=\alpha^{ur}+\alpha^{rb}$.

⑤ 刚体绕平行轴转动的合成：$\omega^a=\omega^r+\omega^e$；　$\alpha^a=\alpha^r+\alpha^e$.

涉及三个基：定基、动基、连体基(研究对象)

4. 基点的描述（位置、速度、加速度）：① (参考基上)基点速度坐标阵为基点位置坐标阵对时间一阶导

② 加速度坐标阵为二阶导.

↳ 连体基位形变化描述的两方面

5. 刚体上给定点的描述(位置、速度、加速度)

⇒ 区别于对基点的描述，刚体上给定点的描述同基点的位置、速度、加速度以及姿态均有关

① 位置

刚体上的给定点可看作刚体的另一个连体基的基点，则该连体基位形中的 r_c 即为基点的位置

那有：$r_P = r_c + A\rho_P'$ ⇒ $\begin{pmatrix} x_P \\ y_P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_P' \\ y_P' \end{pmatrix}$

另外，通过上式求出 $\begin{cases} x_P(t) \\ y_P(t) \end{cases}$ 并消去参数t后可求得点P在参考基下的运动方程

② 速度

在参考基下(绝对速度)有 $\vec{r}_P = \vec{r}_c + \vec{\rho}_P$ ⇒ $\dot{\vec{r}}_P = \dot{\vec{r}}_c + \dot{\vec{\rho}}_P$ ⇒ $\vec{v}_P = \vec{v}_c + \vec{\omega}\times\vec{\rho}_P$

v_P：P点(刚体上给定点)的绝对速度；v_c：连体基基点的绝对速度

对上式的理解：$\vec{v}_P = \vec{v}_P^e = \vec{v}_{tP}^e + \vec{v}_{\omega P}^e$ ($\vec{v}_P^e$：由于刚体的一般运动造成的点P的牵连速度)

其中：$\vec{v}_{tP}^e = \vec{v}_c$；$\vec{v}_{\omega P}^e = \vec{\omega}\times\vec{\rho}_P$ ($\vec{v}_{tP}^e$：由于刚体平移运动造成点P的平移牵连速度

$\vec{v}_{\omega P}^e$：由于刚体绕基点的转动造成点P的转动牵连速度)

特别地：① 刚体作定轴转动 ⇒ $\vec{v}_P = \vec{\omega}\times\vec{\rho}_P$ ($v_P = \omega\rho_P$)

② 刚体作平移运动 ⇒ $\vec{v}_P = \vec{v}_c$ ($v_P = v_c$)

△ 注意 $\vec{v}_P = \vec{v}_c + \vec{\omega}\times\vec{\rho}_P$ 中 $\vec{\omega}$ 的含义，是指连体基绕基点的转动角速度，即在定基(参考基)下，连体基绕基点转动的绝对角速度，这和推导中的 $\dot{\vec{\rho}}_P = \vec{\omega}\times\vec{\rho}_P$ 的物理含义一致，详见题解

③ 加速度

在参考基下(绝对加速度)有：$\vec{r}_P = \vec{r}_c + \vec{\rho}_P$ ⇒ $\ddot{\vec{r}}_P = \ddot{\vec{r}}_c + \ddot{\vec{\rho}}_P$ ⇒ $\vec{a}_P = \vec{a}_c + \vec{\alpha}\times\vec{\rho}_P + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{\rho}_P)$

a_P：P点(刚体上给定点)的绝对加速度；a_c：连体基基点的绝对加速度

对上式的理解：$\vec{a}_P = \vec{a}_P^e = \vec{a}_{tP}^e + \vec{a}_{\alpha P}^e + \vec{a}_{\omega P}^e$ ($\vec{a}_P^e$：由于刚体的一般运动造成的点P的牵连加速度)

其中：$\vec{a}_{tP}^e = \vec{a}_c$；$\vec{a}_{\alpha P}^e = \vec{\alpha}\times\vec{\rho}_P = \alpha\vec{z}\times\vec{\rho}_P$；$\vec{a}_{\omega P}^e = \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{\rho}_P) = -\omega^2\vec{\rho}_P$

($\vec{a}_{tP}^e$：由于刚体平移运动造成点P的平移牵连加速度

$\vec{a}_{\alpha P}^e$：由于刚体绕基点的转动造成点P的切向牵连加速度

$\vec{a}_{\omega P}^e$：由于刚体绕基点的转动造成点P的法向牵连加速度)

特别地：① 刚体作定轴转动 ⇒ $\vec{a}_P = \vec{\alpha}\times\vec{\rho}_P + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{\rho}_P)$ ($a_P = \sqrt{a_{\alpha P}^2 + a_{\omega P}^2} = \rho_P\sqrt{\alpha^2+\omega^4}$)

② 刚体作平移运动 ⇒ $\vec{a}_P = \vec{a}_c$ ($a_P = a_c$)

6、瞬心.

(1) 确定瞬心的定轨迹和动轨迹.

六. 计算机辅助分析.
1. 建立主约束方程.

(6-1)
(1) 由中心主转动惯量基本定义可知
设某点坐标为 (x, y, z)
则 $J_{oxy}=J_{oyz}=J_{oxz}$. 即三点到某点距离相等. 则此点为 C 点

质心C: $J_{oxy}=mx_1y_1+mx_2y_2+mx_3y_3=0$. } x轴.
$J_{oxz}=0$
$J_{oyz}=my_1z_1+my_2z_2+my_3z_3=0$
J_{oyx} -

七、矢量动力学基础

1. 惯量

(1) 对刚体平行轴转动惯量的理解：$J_{Oz}=J_{Cz}+mh_z^2$. $J_{Ox}=J_{Cx}+mh_x^2$. $J_{Oy}=J_{Cy}+mh_y^2$.

(2) [题型] 已知基xyz和x'y'z'.（一般基xyz比较规则），求基x'y'z'下的惯性积.（例6.1-1，题6-2）.
①首先用规则基下的坐标表示不规则基下的坐标（利用 $r^b=A^{br}r^r$）②列惯性积的定义式，将坐标项用规则基下的已知量代入（转动惯量，惯性积）.

(3) [题型] 由质点系的动量定理求某点的支反力/约束力.
①写出系统的动量式（向量式或坐标式，要先建立惯性积）. ②对系统作受力分析（合外力即主矢F_R），其中包括了待求约束力的反作用力；③由动量定理：$\dot{p}=F_R$ 列式求出未知量，再由牛三得到支反力/约束力.

3. 动量矩

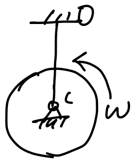
(1) 刚体对定点的动量矩.
○ [易错] 长为2R的直杆，其绕中心轴的转动惯量为 $J=\frac{1}{12}m(2R)^2=\frac{1}{3}mR^2$ $\left(\frac{1}{12}mL^2\right)$
○ 注意区分平移刚体和定轴转动刚体的动量矩：
$\vec{L}_{Oz}=\sum\vec{r}_{Oz}\times m\dot{\vec{r}}_{Oz}$ ⇒ 此公式是对质点系定义的，对刚体需讨论.
①平移刚体（无转动）：$\vec{L}=\vec{r}_c\times m\vec{v}_c$（用质心的矢径和速度计算）
②定轴转动刚体：$\vec{L}=J\vec{\omega}$.（相对于定轴的转动惯量和与定轴平行的角速度）.（题6-4不要弄混了）
↳ 不要用质心的矢径和速度计算!!!

(2) 刚体对动点的动量矩
①质点系对任意动点的绝对动量矩和相对动量矩的关系：$\vec{L}_D=\vec{L}_D'+\vec{d}_c\times m\vec{v}_D$（$\vec{v}_D$为D点的绝对速度）.
②质点系对质心的动量矩 ⇒ 绝对动量矩和相对动量矩相等（质心静止或运动）（且等于$J\omega$）
③质点系对任意动点（定点）的动量矩与其对质心动量矩之间关系：$\vec{L}_D=\vec{L}_c'+\vec{d}_c\times m\vec{v}_c=\vec{L}_c'+\vec{d}_c\times\vec{p}$.
（＝质点系对其质心的动量矩和其动量对动点（定点）的矩的矢量和）. ⇓ 普适公式
↳ 当刚体平移运动时，其对质心的动量矩 $L_c=L_c'=0$. 所以 $\vec{L}_D=\vec{d}_c\times m\vec{v}_c$.
当刚体定轴转动时，其动量为0，对动点（定点）的矩也为0，所以 $\vec{L}_D=\vec{L}_c'=\vec{L}_c=J\omega$.

0 [易错] (题6-18) 在圆盘上施加相同大小的力矩，但其角加速度不一定相同. 原因是由动量矩定理 $M=\dot{L}$ 知决定其角加速度的除力矩外，还包括自身的动量矩 L.（施加外力F和由重物提力矩M）.

④ 怎么求解单刚体对任意动点的动量矩.

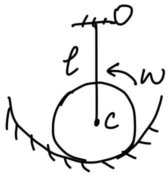
根据公式 $\vec{L}_O=\vec{L}_C'+\vec{r}_C\times m\vec{v}_C$ = a.先求对质心C的动量矩. b.再求刚体动量对动点的矩. c.相加



$\Rightarrow L_C'=J_C\omega_C=\frac{1}{2}mR^2\omega$

$r_C\cdot mv_C=0$

$L_O=L_C'+r_C\cdot mv_C=\frac{1}{2}mR^2\omega$

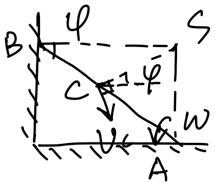


$\Rightarrow L_C'=J_C\omega_C=\frac{1}{2}mR^2\omega$.

$r_C\cdot mv_C=l\cdot m\omega R=m\omega Rl$

$\therefore L_O=\frac{1}{2}mR^2\omega+m\omega Rl=mR\omega(\frac{1}{2}R-l)$

注意方向



$\Rightarrow L_C'=L_C=\frac{1}{12}m\omega l^2$.

由瞬心求得 $v_C=\frac{1}{2}\omega l$. 且 $|\vec{r}_C\times m\vec{v}_C|=r_C\cdot mv_C\sin(\frac{\pi}{2}-2\varphi)=mr_Cv_C\cos2\varphi$

$\therefore L_B=L_C'+r_C\cdot mv_C\cos2\varphi=\frac{1}{12}m\omega l^2+\frac{1}{4}m\omega l^2\cos2\varphi=\frac{1}{12}m\omega l^2(1+3\cos2\varphi)$.

⑤ 怎么求刚体系(系统)对动点的动量矩？

[情况一] 各刚体分开求动量矩. 最后求矢量和

[情况二] 找出系统质心，按照单刚体进行求解（各刚体之间固结）[题6-22].

八、刚体动力学.

九、达朗贝尔原理.

1. 原理式：$\vec{F}+\vec{F}^*=0$. $\vec{F}$为系统真实受力. $\vec{F}^*$为系统的达朗贝尔惯性力.

① 先对一般情况(冻结)进行上述受力分析. ② 再对系统用静力平衡求解.

2. 一般运动物体.

原理式：
$$\left.\begin{aligned}&\vec{F}^a+\vec{F}^N+\vec{F}^*=0\\&\vec{M}_C^a+\vec{M}_C^N+\vec{M}_C^*=0\end{aligned}\right\}$$
通常将力系向质心简化.

其中 $\vec{F}^*$为作用点为质心，大小同惯性力主矢：$\vec{F}^*=-\dot{\vec{p}}$（惯性力主矢可用刚体动量求得）

$\vec{M}^*$为作用点为质心，大小同惯性力主矩：$\vec{M}^*=-\dot{\vec{L}}$（惯性力主矩可用刚体角动量求得）.

注意，惯性力向哪个点简化. 则 $\vec{F}^*$. $\vec{M}^*$就画在哪个点上. 大小可用 $\dot{p}$. $\dot{L}$ 求得.

3. 平面运动物体.

(1) 平动

(2) 定轴转动.

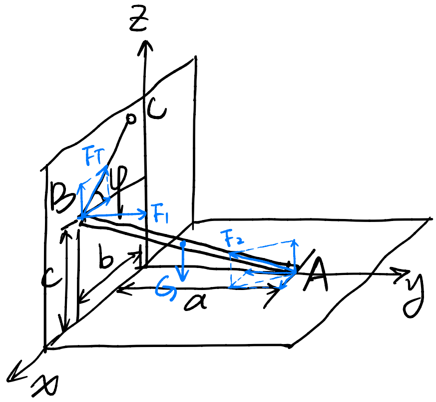
〈部分题目〉

(空间力系的平衡).

如图所示，均质杆AB重200N. 一端用球铰固定于地面. 一端靠在光滑的墙面上，并用绳子BC拉住. 已知 $a=0.7m$, $b=0.3m$. $c=0.4m$. $\varphi=45°$. 求：

(1) 绳子BC的拉力. 墙面对杆AB的约束力

(2) 当 φ 为何值时. 绳子对BC的拉力最小?



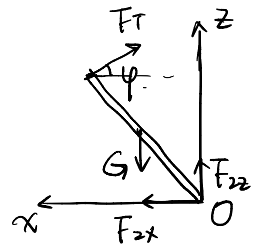
⇒ (1) 绳的拉力为 F_T. 墙面支撑力为 F_1. 球铰约束力为 F_2 (注意各力方向)

由 $\Sigma F_{iz}=0$ 有：$F_{Tz}-G+F_{2z}=0$

在 Oxz 平面内，对O取矩由 $\Sigma M_{oy}(F_i)=0$ 有：(分方向力矩平衡)

$$F_T\cos\varphi\cdot c+F_T\sin\varphi\cdot b-G\cdot\frac{b}{2}=0$$

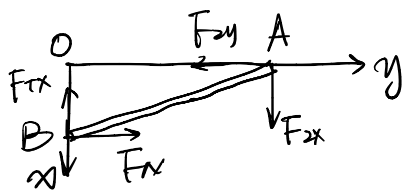
得到 $F_T=\dfrac{\frac{b}{2}G}{c\cos\varphi+b\sin\varphi}=60.16N$



(此处为什么要计算 Oxz 平面上的力矩平衡?)

在 Oxy 平面内，对A点取矩有：$F_T\cos\varphi\cdot a=F_N\cdot b$

得 $F_N=\dfrac{(F_T\cos\varphi)a}{b}=99.98N$



(2) 由 (1) 得：$F_T=\dfrac{bG}{2(c\cos\varphi+b\sin\varphi)}$

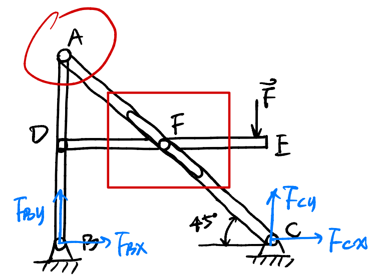
令 $f(\varphi)=c\cos\varphi+b\sin\varphi=0.4\cos\varphi+0.3\sin\varphi$

⇒ $f'(\varphi)=-0.4\sin\varphi+0.3\cos\varphi=0$ ⇒ $\tan\varphi=\frac{3}{4}$

此时 F_T 最小

(刚体系的平衡)(平面)

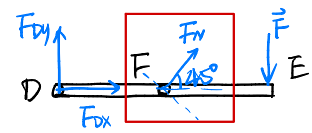
杆AB、AC与DE连接并支承如图所示，DE杆上有一销子F套在AC杆的导槽内，求在水平杆DE的一端有一铅垂力$\vec{F}$作用时，AB杆上所受的力，设AD=DB，DF=FE，所有杆重均不计。



该题显然属于静不定问题，需拆分：

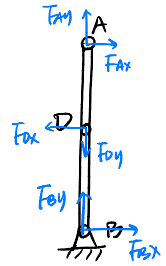
① 首先从已知主动力的构件入手，分析对象为DE杆，设各约束力如图所示

(其中注意F点处的约束力，F点处为圆柱形销子在导槽中滑移，用平面滑移约束可知销子F受到来自导槽的垂直于滑移方向的约束力，即F_N垂直于AC杆)



由DE杆上 $\sum M_{Dz}(\vec{F_i})=0$，$\sum F_{ix}=0$，$\sum F_{iy}=0$ 可求出：$F_N=2\sqrt{2}F$，$F_{Dx}=-2F$，$F_{Dy}=-F$

② 接着对AB杆分析，F_{Dx}，F_{Dy}已知。



由 $\sum M_{Az}(\vec{F_i})=0$：$2F_{Bx}-F_{Dx}=0 \Rightarrow F_{Bx}=-F$

$\sum F_{ix}=0$：$F_{Bx}+F_{Ax}-F_{Dx}=0 \Rightarrow F_{Ax}=-F$

观察发现，对系统分析有：$\sum M_{Cz}=F_{By}\cdot DE=0 \Rightarrow F_{By}=0$

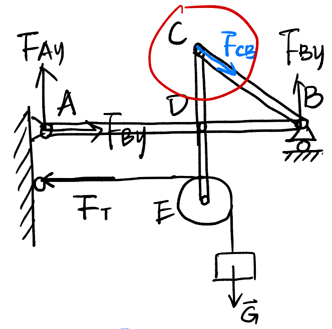
$\sum F_{iy}=0$：$F_{By}+F_{Ay}-F_{Dy}=0 \Rightarrow F_{Ay}=-F$

⇒ "二力杆约束力方向是否沿杆问题

△另外，图中A处连接了AB、AC两杆，~~AB为二力杆~~ 但AC显然不是二力杆

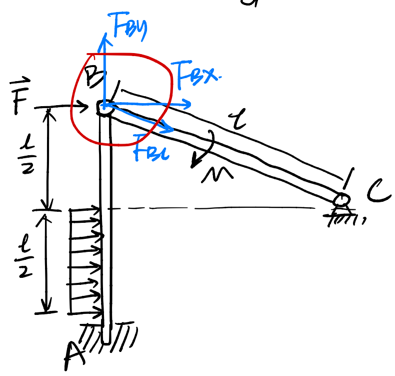
因此A点约束力可以发现不沿二力杆的方向

△而右图中圆柱铰C处~~两侧均为二力杆 CD~~ CB，因此可假设C处约束力方向平行CB或CD，若求CB的内力则假设CD杆受C约束力为CB方向



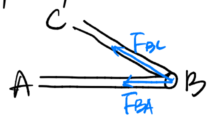
△再如下图中的圆柱铰B，两侧均不是二力杆（注意杆BC上有力偶），因此假设约束力方向F_{BC}是错误的，应假设为F_{By}，F_{Bx}。

⇒ 二力杆为直杆时，支点的约束力一定沿杆方向，非二力杆则不然



⇒ 二力杆约束力沿哪一杆问题

对~~某两二力杆~~：



圆柱铰B处约束力方向必定沿杆

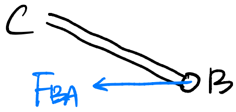
此处的圆柱铰约束力包含两部分：轴套和轴销所受力，设AB为轴套，CB为轴销

圆柱铰约束力包含了F_{BA}、F_{BC}两部分，而F_{BA}、F_{BC}分别对应杆AB、BC所受内力

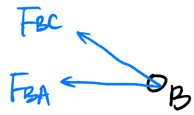
同时若将此系统拆分：

讨论杆AB受力情况时，F_{BA}不作出，因为是内力，则：

讨论杆BC受力情况时，F_{BC}不作出，因为是内力，则：



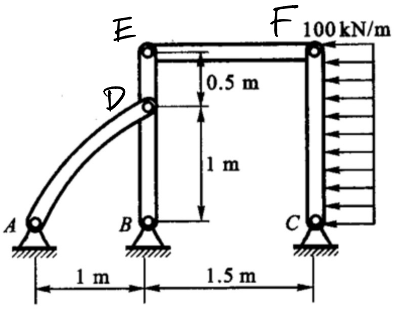
讨论支点B时，则F_{BA}、F_{BC}均为其所受力，则：



讨论两杆组成的整体时，F_{BA}、F_{BC}均不作出。

这就是为什么假设二力杆支点约束力时总是假设为平行于另一杆的方向：去掉哪根杆，就沿哪根杆方向

0 忽略杆重量，求各支座约束力。

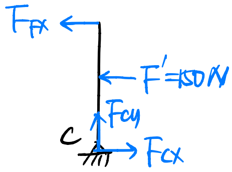


[分析]：由题可首先判断出哪些杆是二力杆，AD、EF是二力杆，其他均非二力杆，因此AD两支座A和D所受约束力必相等且反向。EF为直杆，因为EF杆所受约束力并沿杆EF。

①首先从主动力所在杆着手分析：

对CF杆，载荷可简化为力$F'=150N$，此外有三个未知力，易可由$\Sigma M_{Cz}(F_i)=0$求得 $F_{FX}=-75N$，则 $F_{CX}=75N$。

由$\Sigma F_{iy}=0 \Rightarrow F_{Cy}=0$

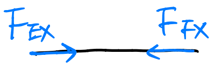


(1)

② 对二力杆EF分析：

由于EF为二力杆，则E、F的约束力必定沿杆！

因此 $F_{EX}=F_{FX}=-75N$。



(2)

③对杆BE分析：

由于AD为二力杆，可得到A、D两处的约束力方向，

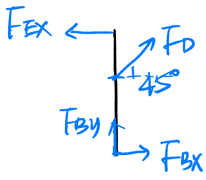
即得到BE杆D点约束力方向，共有3个未知力。

由$\Sigma M_{Bz}(F_i)=0$ 得：

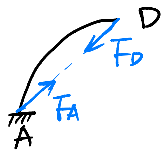
$$F_{EX}\cdot 1.5 - F_D\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 1 = 0 \Rightarrow F_D = 112.5\sqrt{2}N$$

由$\Sigma F_{ix}=0$ 和 $\Sigma F_{iy}=0$ 可得：

$F_{By}=-112.5N$ $F_{Bx}=-37.5N$



(3)



(4)

④对杆AD分析：

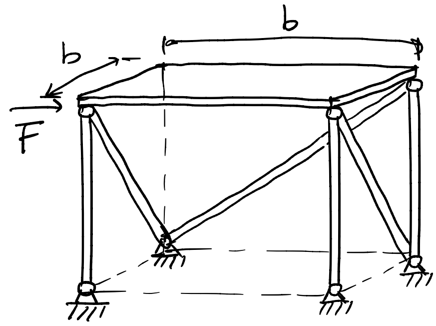
杆AD(曲杆)为二力杆，

$\Rightarrow F_A=F_D=112.5\sqrt{2}=159.1N$.

※对二力杆支座处约束力的分析(对前一页末括号内容重讨论)

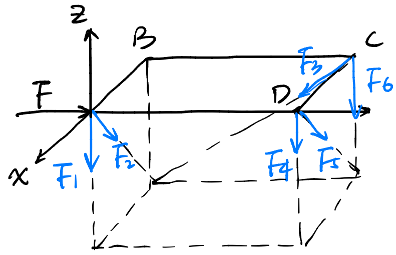
(刚体系的平衡)(空间)

○ 如图所示，一不计重量的正方形薄板，由六根直杆支撑。假定这六根直杆都看作二力杆，系统在 A 处作用一水平力 F，且处于平衡状态。求各杆的内力。



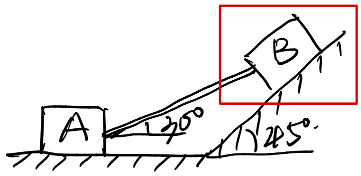
⇒ 充分利用上一题末尾总结的文字：

由题述六根直杆均为二力杆，则根据圆柱铰约束力必沿杆方向，且各二力杆的内力大小等于圆柱铰约束力，此时要求各杆的内力，则需将每个圆柱铰拆分，那六根单独的直杆，得到一空间力系，利用空间力系的平衡求解。



(干摩擦力)

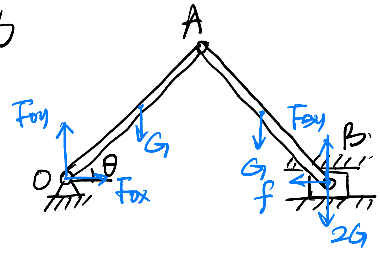
O 如图所示.重物A与B用一不计重量的连杆铰接，已知B重2kN. A与水平面的摩擦角为15°.斜面光滑.不计铰链中的摩擦力.求能使系统平衡之A的最小重量.



O 一折叠梯在地面上，与地面夹角60°.脚端A与B和地面的摩擦因数分别为 $f_{sA}=0.2$ $f_{sB}=0.6$. 在AC中点处有重有500N重物.不计折叠梯重量，问其是否平衡？

O 图示机构在铅垂面内，等长杆OA.OB铰接于A，两杆重均为G.滑块重2G.且与滑道间的静摩擦因数为0.3.求机构能保持平衡的最小角

⇒ 首先对整体分析，求出整体所受力(理想约束力).以求出极限摩擦力



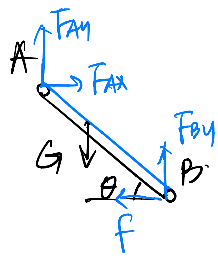
① 整体对B点取矩得：$\sum M_{Bz}(F_i)=0 \Rightarrow$

$$F_{Oy}\cdot 2l\cos\theta - G\cdot\frac{3}{2}l\cos\theta - G\cdot\frac{1}{2}l\cos\theta = 0$$ 求得 $F_{Oy}=G$.

再由 $\sum F_{iy}=0 \Rightarrow F_{Oy}-G-G-2G+F_{By}=0$ 求得 $F_{By}=3G$.

因此摩擦力极限为 $f_m=f_sF_{By}=0.3\cdot 3G=0.9G$.

② 对AB杆分析.为只有3个未知力的平面问题.令 $f=f_m$.



对A取矩：$\sum M_{Az}(F_i)=0 \Rightarrow G\cdot\frac{l}{2}\cos\theta + f_m\cdot l\sin\theta - F_{By}\cdot l\cos\theta = 0$.

可得 $\tan\theta=\frac{5}{9}$. 即 $\theta=\arctan\frac{5}{9}=28.8°$.

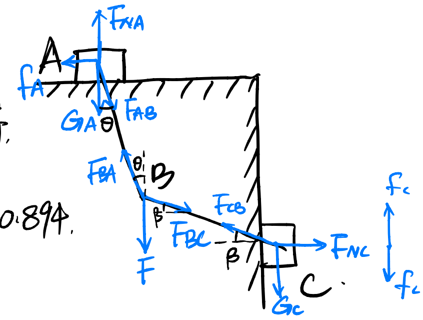
即为 $f=f_m$ 时的角度

0 不计重量的两直杆AB、BC用光滑铰链在B处相连，该处作用一力F，两杆端点与滑块A、C相连、A、C重量为$G_A=20N$、$G_C=10N$，两滑块与接触面摩擦因数为$f_s=0.25$。求力F能使系统保持平衡的范围。

(分析状态)

⇒系统的平衡为三个方面：物体A、物体C和支点B。

其中为使A不会向右滑动，需使F有上界；为使C不会向上、向下滑动，需使F有上、下界。最后$\boxed{\text{取交集}}$，该范围中的力能使系统平衡。



由图有：$\sin\theta=\frac{3}{\sqrt{109}}=0.287$，$\cos\theta=\frac{10}{\sqrt{109}}=0.958$，$\sin\beta=\frac{1}{\sqrt5}=0.447$，$\cos\beta=\frac{2}{\sqrt5}=0.894$。

① 对B点 由$\sum F_{ix}=0$及$\sum F_{iy}=0$得：$\begin{cases}F_{BA}\cos\theta-F-F_{BC}\sin\beta=0\\F_{BA}\sin\theta-F_{BC}\cos\beta=0\end{cases}$

由此可解出：$F_{BC}=\frac{\sin\theta F}{\cos\beta\cos\theta-\sin\theta\sin\beta}=0.478F$，$F_{BA}=\frac{\cos\beta F}{\cos\beta\cos\theta-\sin\theta\sin\beta}=0.745F$

② 对A分析：由$\sum F_{ix}=0$及$F_{iy}=0$得（令$f_A=f_m=f_sF_{NA}$）$=\begin{cases}F_{AB}\sin\theta-f_sF_{NA}=0\\F_{NA}-G_A-F_{AB}\cos\theta=0\end{cases}$

解得：$F_{AB}=\frac{G_A}{4\sin\theta-\cos\theta}=105.26N$，则$F_{AB}\le105.26N$，由$F_{BA}=0.745F$得：$F\le141.29N$

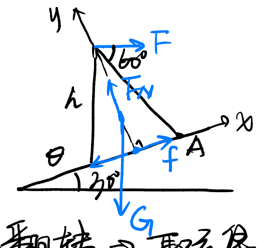
③ 对B分析：由$\sum F_{ix}=0$及$F_{iy}=0$得（令$f_B=f_m=f_sF_{NB}$）。

当f_B向上时：$\begin{cases}F_{CB}\sin\beta+f_sF_{NC}-G_C=0\\F_{CB}\cos\beta-F_{NC}=0\end{cases}$，解得：$F_{CB}=\frac{4G_C}{4\sin\beta+\cos\beta}=9.94N$。同理有$F\geqslant20.79N$

当f_B向下时：$\begin{cases}F_{CB}\sin\beta-f_sF_{NC}-G_C=0\\F_{CB}\cos\beta-F_{NC}=0\end{cases}$，解得：$F_{CB}=\frac{4G_C}{4\sin\beta-\cos\beta}=44.74N$。同理有$F\geqslant93.5N$

综上所述：$F\in[20.79,93.59]N$。

① 高$h=200mm$，底面半径$r=50mm$的锥体放在一倾斜$30°$的斜面上，重为$100N$。锥底底面与斜面间摩擦因数为0.50。圆锥顶点作用一力F。求该力能使圆锥在斜面上保持静止的最大最小值。



(分析状态)：当力F为最小值时，锥体应受沿斜面向上的摩擦力，并且锥体明显不会向下翻转；当力F为较大值时，锥体应具有沿斜面上滑或向右翻转的趋势(取决于摩擦力的大小)。F的上界应使锥体既不上滑也不翻转 ⇒ 取交集

① f向上时：由于$30° > \arctan(0.5) = 26.57°$，所以若F=0，锥体会下滑

列平衡方程：$\sum F_{iy}=0$：$F\sin\theta + G\cos\theta - F_N = 0$，令$f=0.5F_N$，解得：$F=6N$，即$F \geq 6N$

$\sum F_{ix}=0$：$F\cos\theta + f - G\sin\theta = 0$

② f向下时，列：$\sum F_{iy}=0$：$F\sin\theta + G\cos\theta - F_N = 0$，令$f=0.5F_N$，解得：$F=151.46N$，即$F \leq 151.46N$

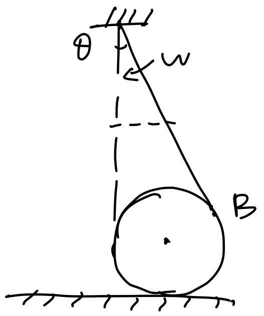
$\sum F_{ix}=0$：$F\cos\theta - f - G\sin\theta = 0$

③ 锥体将向右翻转时：由$\sum M_{Az}(F_i)=0$得：

(此时锥体受斜面支持力的受力点为一点A，不是整个底面)

$F\cdot h\cos\theta - F\sin\theta\cdot r - G\cdot r\cos\theta - G\sin\theta\cdot\frac{1}{4}h = 0$ ⇒ $F=46N$，即$F \leq 46N$

综上：$F \in [6, 46]N$



$\cos\theta = \frac{4}{5}$

$h_1 = \frac{4}{5}l \times \frac{1}{2} = \frac{2}{5}l = \frac{6}{5}m$

$h_2 = \frac{1}{2}l = \frac{3}{2}m$

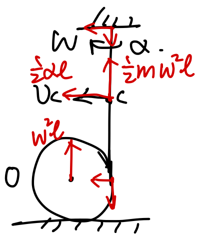
$\Delta h = \frac{3}{2} - \frac{6}{5} = \frac{3}{10}m$

$mgh = 6\times10\times\frac{3}{10} = 18$

$T_{杆} = \frac{1}{2}J\omega^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}ml^2\omega^2 = \frac{1}{6}m\omega^2l^2 = \omega^2l^2$

$v_B = \omega l = 3\omega$，$T_{盘} = \frac{1}{2}mv_B^2 = \frac{1}{2}m\omega^2l^2 = \omega^2l^2$

$T = 2\omega^2l^2 = 18$ ⇒ $\underline{\omega = 1}$

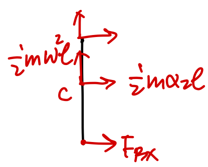


$\vec{a}_c = \vec{a}_{tc}^e + \vec{a}_{nc}^e + \vec{a}_{rc}$

$\vec{a}_{tc}^e = 0$，$\vec{a}_{nc}^e = \omega^2\frac{1}{2}l = 1.5$

$\vec{a}_o = \vec{a}_{to}^e + \vec{a}_{no}^e + \vec{a}_{ro}$

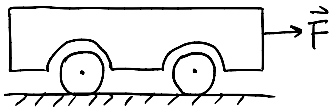
$\vec{a}_{to}^e = \omega^2 l$，$\vec{a}_{no}^e = 0$



⇒ $M=0$：$F_{By} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}m\alpha_2 l = \frac{9}{2}\alpha_2$

(滚动摩擦力)

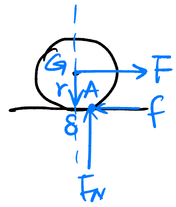
0 一水平力F拉小车. 该车总重为G. 车轮半径为r. 设轮子与地面滚阻系数为δ. 不计轮轴中摩擦力. 求力F拉动小车的最小值.



⇒ 简化为对一个轮子的分析(两个轮子的受力完全相同)

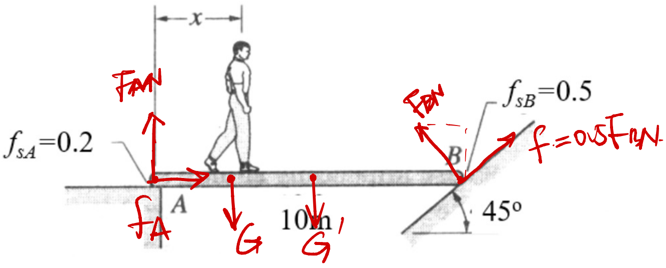
即力F要使轮子绕A点转动: 对A点取矩得:

$$F\cdot r-\frac{G}{2}\cdot\delta=0.\quad 即F=\frac{G\delta}{2r}.$$



由于力F要使2个相同的轮子转动. 则 $F=2\times\frac{G\delta}{2r}=\frac{G\delta}{r}$.

3



3. 板重100KG，重200KG的人从A走向B，确定木板开始滑动时的距离x。

$$G'\cdot 5 + G\cdot x = \frac{\sqrt{2}}{2}F_{BN} + \frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}F_{BN}\times 10$$

$\Sigma M_{Az}(F_i)=0$： $5000+2000x = \frac{15\sqrt{2}}{2}F_{BN} = 30f_A$

$\Sigma M_{Bz}(F_i)=0$： $F_{AN}\cdot 10 = 2000(10-x)+5000$

$\Sigma F_{iy}=0$： $F_{AN} - 3000 + \frac{3}{4}\sqrt{2}F_{BN} = 0$

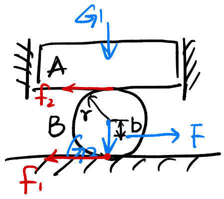
$\Sigma F_{ix}=0$： $\frac{\sqrt{2}}{2}F_{BN} = f_A + \frac{\sqrt{2}}{4}F_{BN} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{4}F_{BN} = f_A$

$f_A = \frac{1}{5}F_{AN}$

$F_{AN} = 3000 - 3f_A = 3000 - 0.6F_{AN}$

$$\Rightarrow \begin{cases} F_{AN} = 1875N. \\ f_A = 375N. \\ x = 3.125m. \\ F_{BN} = 1060.6N. \\ f_B = 530.3N. \end{cases}$$

0 (课本2-44) 重50N滑块A,只能上下铅垂运动,且压在一重300N的圆柱体B上,设圆柱体B与滑块A和地面 $f_{sAB}=0.3$, $f_{sB}=0.5$. 圆柱上作用一水平力,求能使圆柱体产生运动的力F的最小值. $r=0.2m$. $b=0.1m$.
假定滚阻不计.



⇒ 由题易得 $f_{1m}=f_{2m}=150N$. 若f_1先到达150N,则圆柱体将沿地面向右滚动.
若f_2先到达150N,则圆柱体将沿滑块向左滚动(向右移动).
由于F作用点靠近f_1,推测f_1先到达150N.

由于不计滚阻,则摩擦力作用点在重力线上,重力不提供力矩.

假设f_1,f_2方向如图所示:则由平衡方程: $\Sigma M_{O_2}(F_i)=0 \Rightarrow Fb-f_1r-f_2r=0$.

$\Sigma F_{ix}=0 \Rightarrow F-f_1-f_2=0$.

① 代入$f_1=150N$.解得: $F=200N$. $f_2=50N<150N$. 合理

② 代入$f_2=150N$ 解得: $F=-600N$. $f_1=-450N$. 不合理.

$\Rightarrow F_{min}=200N$

O (课本5-3). 一对内接齿轮. 齿轮B_1与机座固结、齿轮B_2由连杆B_3带动在齿轮B_1上滚动. 已知连杆B_3相对机座的角速度ω_3. 齿轮B_1与齿轮B_2的节圆半径为R_1、R_2. 求齿轮B_2相对于连杆B_3的角速度.

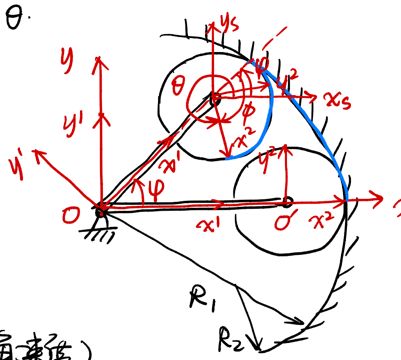
【刚体绕平行轴转动的合成】和【刚体上给定点的描述】

○ 内接齿轮. B_1与机座固结. 连杆B_3相对机座的角速度ω_3. 求齿轮B_2相对于连杆B_3的角速度.

⇒ 建立定基 $O-\vec e$. 动基$O-\vec e'$(连杆). 连体基$O'-\vec e^2$(齿轮B_2).

齿轮B_2相对连杆(相对动基)转过的角度为ϕ. 而齿轮自身姿态角的变化(相对于定基)角度为θ.

那么由内接齿轮的啮合关系, 有: $\phi-\varphi=2\pi-\theta$. 且 $\phi R_2=\varphi R_1$



△注意计算齿轮滚过的长度要用其转过的相对角度(相对动基)计算. 而不是$(\phi-\varphi)$

从接触点判断

则 $\theta=2\pi-\phi+\varphi$, 又有 $\dot\varphi=\omega_3$, $\dot\theta=\omega_2$, $\dot\phi=\omega'$

(连杆转过的角度对应自身绝对角速度, 即齿轮B_2的牵连角速度. 齿轮B_2相对连杆(动基)转过的角度对应相对角速度, 齿轮相对平移参考基转过角度对应自身绝对角速度)

代入有: $\omega_2=\omega_3-\omega'$ 且 $\omega'=\frac{R_1}{R_2}\omega_3$ 可得齿轮B_2绝对角速度 $\omega_2=\frac{R_2-R_1}{R_2}\omega_3$

又由平行轴转动合成定理有 $\omega_2=\omega_3+\omega_{32}$. 则 $\omega_{32}=\omega_2-\omega_3=-\frac{R_1}{R_2}\omega_3$.

实际上可直接由齿轮相对连杆的转角进行判断. ⇒ $\omega'=|\omega_{32}|=\frac{R_1}{R_2}\omega_3$. ω_{32}和ω_3反向. 则 $\omega_{32}=-\frac{R_1}{R_2}\omega_3$.

△弄清楚各个基的建立, 小齿轮的相对速度, 绝对速度是相对于什么? 牵连速度是由什么造成的?

$\theta'=2\pi-\theta$. ⇒ $\omega_2=\dot\theta'=-\dot\theta$.

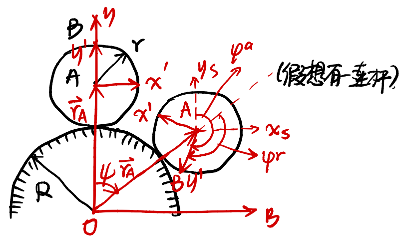
$R_1\varphi=R_2(\varphi+\theta)$ ⇒ $\theta=\frac{R_1-R_2}{R_2}\varphi$

⇒ $\dot\theta=(\frac{R_1}{R_2}-1)\omega_3$ ⇒ $\omega_2=(1-\frac{R_1}{R_2})\omega_3$.

○ 圆轮以匀角速度ω作纯滚动.

(1) 求轮心A速度与加速度. (2) 由矢量瞬时分析法求B速度与加速度.

⇒(1) 建立定基(参考基) $O-\vec e$ 和 连体基 $A-\vec e'$.



在参考基中对A点有: $\vec v_A=\vec v_0+\vec\omega\times\vec r_A=\vec\omega\times\vec r_A$ 即 $v_A=\omega r_A=\omega'(R+r)$

由啮合关系有: $\varphi^a=\varphi^r+\varphi$. 且 $r\varphi^r=R\varphi$. △注意φ^r和φ^a是相对于什么而言的.

并且 $\dot\varphi^a=\omega$ (注意此处是$\dot\varphi^a=\omega$还是$\dot\varphi^r=\omega$, 题目所述ω应当为绝对角速度).

$\dot\varphi=\omega'$, 代入求得 $\omega'=\frac{\omega r}{R+r}$. 则 $v_A=\omega r$, $a_A=\omega'^2 r_A=\frac{\omega^2r^2}{R+r}$

(2) B点是刚体上连体基中的给定点, 则可得 $\vec v_B=\vec v_B^e=\vec v_{oB}^e+\vec v_{\omega B}^e=\vec v_A+\vec\omega\times\vec r_B$

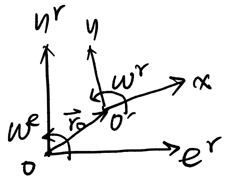
(此式可以看是由于连体基本身的运动而造成的B点的运动 即牵连速度; 而B点在连体基中无运动, 即无相对速度. 因此B点的绝对速度就是其牵连速度. 注意必须是给定点)(而此时的$\vec\omega\times\vec r_B$来自于 $\dot{\vec r}_B=\vec\omega\times\vec r_B$. $\vec\omega$的含义为与$\vec r_B$固结(因为$\mathring{\vec r}_B=0$)的基的基矢量(相对于参考基)转动的角速度 ⇒ 详见P114页底部对$\dot{\vec b}=\mathring{\vec b}+\vec\omega\times\vec b$的解释.

则 $v_B=v_A+\omega r_B=\omega r+\omega r=2\omega r$ (这里ω已经是连体基即刚体相对参考基的角速度了)

(那么一个基$\vec e$ 相对于参考基$\vec e^r$的角速度怎么算?

⇒ 通过平行轴转动合成定理: $\vec\omega^a=\vec\omega^r+\vec\omega^e$. (或者角速度叠加定理)

⇒



ω^r: 基$\vec e$自身绕基点转动角速度. ω^e 参考基下基$\vec e$基点矢径转动角速度.

可设想矢径$\vec r_{o'}$处为一动基).

即该题目所说的ω是刚体(连体基)的绝对角速度. ω'是牵连角速度(矢径$\vec r_A$转动).

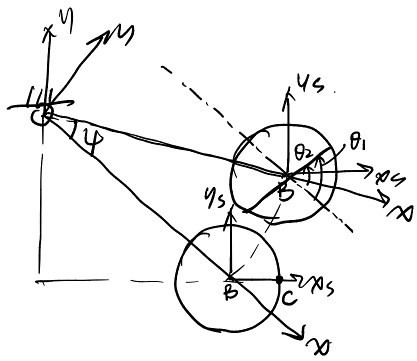
可知圆轮自转角速度为 $\omega-\omega'=\frac{\omega R}{R+r}$.

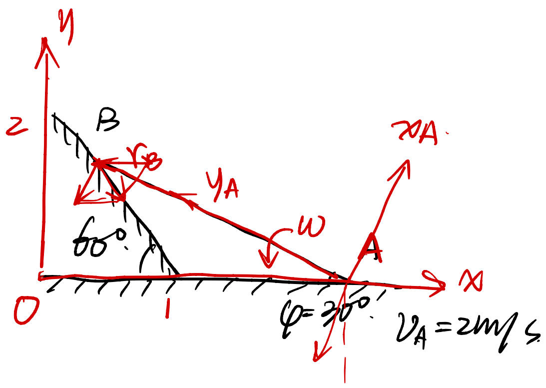
$\vec a_B=\vec a_A+\vec\alpha\times\vec r_B+\vec\omega\times(\vec\omega\times\vec r_B)$ ⇒ $a_B=a_A+\omega^2 r=\frac{\omega^2r^2}{R+r}+\omega^2 r=\frac{r(R+2r)\omega^2}{R+r}$

O曲杆OAB以$\omega = 2rad/s$绕O转动，圆盘以$\omega^r = 2rad/s$相对曲杆OAB转动。($OA = OB = 40mm$，$r = 20mm$)。

(1) 求圆盘绝对角速度

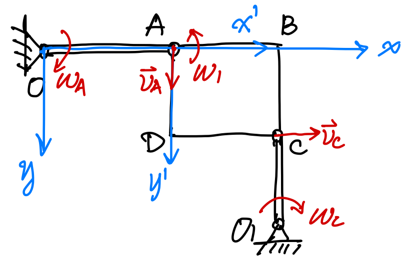
(2) 圆盘上C点的速度与加速度




y
2
B
v_B
y_A
x_A
$60°$
ω
A
x
O
1
$\varphi = 30°$
$v_A = 2m/s$

0 (题3-12). 正方形板ABCD与杆OA、O_1C铰接. 在图示位置OA角速度都为ω, 角加速度为0. 求板的瞬心及其加速度

建立定基O-e, 连体基A-e' 如图所示.

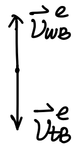


⇒ 已知: ω_A, α_A (绝对), v_B. 求: α_B (绝对)

需要求的量: ω_1, α_1.

1°. 速度分析

对基e'上的给定点B有: $\vec v_B = \vec v_{tB}^e + \vec v_{wB}^e$. ⇒



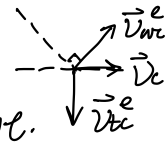
其中 $\vec v_{tB}^e = \vec v_A \Rightarrow v_{tB}^e = \omega_A r_A = \omega l$.

设定 $\vec v_{wB}^e$ 如图所示, 则 $\vec v_{wB}^e = \vec\omega_B \times \vec r_B$, 设基e'角速度 $\vec\omega_1$ 方向为逆时针, 则 $\vec\omega_B = \vec\omega_1$ (这里基e'的角速度ω_1为绝对角速度

⇒ $v_B = v_{tB}^e - v_{wB}^e = \omega l - \omega_1 l = 0 \Rightarrow \omega_1 = \omega$.

(也可以设基e'相对于r_A的角速度为ω_1. 则有 $\vec\omega_B = \vec\omega_A + \vec\omega_1$, $\omega_B = \omega_1 - \omega_A$ (角速度叠加) ⇒ $v_B = \omega l - (\omega_1 - \omega) l = 0 \Rightarrow \omega_1 = 2\omega$)

对给定点C有: $\vec v_C = \vec v_{tC}^e + \vec v_{wC}^e$ ⇒

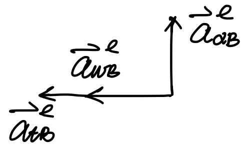


由分析知 $\vec v_C$ 方向如右图, 则

$v_C = v_{wC}^e \cos\frac{\pi}{4} = \omega_1 r_C \cdot \cos\frac{\pi}{4} = \omega \cdot \sqrt{2} l \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \omega l$.

又C点绕O_1作圆周运动. 则 $\omega_{O_1C} = \frac{v_C}{r_C'} = \omega$.

2°. 加速度分析

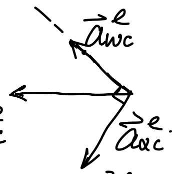


在基e'下, 对给定点B有: $\vec a_B = \vec a_{tB}^e + \vec a_{\alpha B}^e + \vec a_{wB}^e$. ⇒

其中 $\vec a_{tB}^e = \vec a_A$, 在定基e中对给定点A有 $\vec a_A = \vec\omega_A \times (\vec\omega_A \times \vec r_A) \Rightarrow a_A = \omega^2 l$ (方向为法向). 则 $a_{tB}^e = \omega^2 l$.

$\vec a_{\alpha B}^e = \vec\alpha_1 \times \vec r_B$, 则 α_1 待求; $\vec a_{wB}^e = \vec\omega_1 \times (\vec\omega_1 \times \vec r_B) \Rightarrow a_{wB}^e = \omega^2 l$ (方向为法向).

现求 $\vec\alpha_1$:



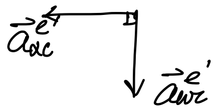
Δ记住 a_w为法线方向, a_α为切线方向

在基e'中对给定点C有: $\vec a_C = \vec a_{tC}^e + \vec a_{\alpha C}^e + \vec a_{wC}^e$ ⇒

其中 $\vec a_{tC}^e = \vec a_A \Rightarrow a_{tC} = \omega^2 l$.

$\vec a_{\alpha C}^e = \vec\alpha_1 \times \vec r_C$, 设$\vec\alpha_1$为顺时针方向; $\vec a_{wC}^e = \vec\omega_1 \times (\vec\omega_1 \times \vec r_C) \Rightarrow a_{wC} = \sqrt{2}\omega^2 l$.

同时在定基中对C点有: $\vec a_C = \vec a_{\alpha C}^{e'} + \vec a_{wC}^{e'}$, 设$\alpha_{O_1C}$方向为逆时针:



其中 $\vec a_{wC}^{e'} = \vec\omega_{O_1C} \times (\vec\omega_{O_1C} \times \vec r_C) \Rightarrow a_{wC}^{e'} = \omega^2 l = a_{Cy}$

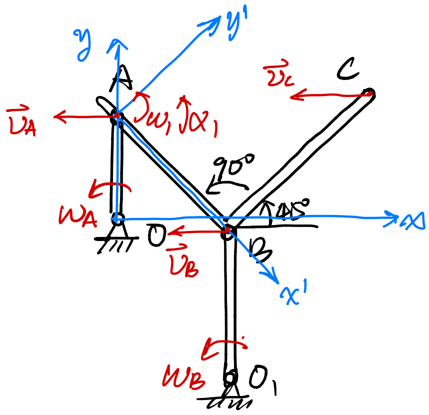
而基e'中有: $\frac{\sqrt{2}}{2}\alpha_1 \cdot \sqrt{2} l - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{2}\omega^2 l = a_{Cy} = \omega^2 l$, 可解得 $\alpha_1 = 2\omega^2$

那么在基e'中对点B: $\vec a_{\alpha B}^e = \vec\alpha_1 \times \vec r_B \Rightarrow a_{\alpha B}^e = 2\omega^2 l$.

综上: $a_B = \sqrt{a_{Bx}^2 + a_{By}^2} = \sqrt{(2\omega^2 l)^2 + (\omega^2 l + \omega^2 l)^2} = 2\sqrt{2}\omega^2 l$.

和3-12同类型.

O (题3-20) 已知 $AB=BC=O_1B=2OA=2r$. 杆OA以角速度 ω 转动. 用刚体系矢量瞬时分析法求该瞬时点C的速度和加速度.

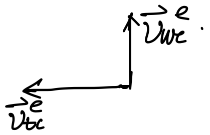


选定基 O-e. 连体基 A-e'. 如图所示.

已知: ω_A. 求: v_C. a_C.

1°. 速度分析:

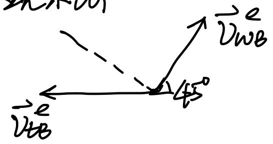
在基e'下对给定点C有: $\vec{v}_C = \vec{v}_{tC}^e + \vec{v}_{wC}^e$. ⇒



其中 $\vec{v}_{tC}^e = \vec{v}_A \Rightarrow v_{tC}^e = v_A = \omega r$.

$\vec{v}_{wC}^e = \vec{\omega}_1 \times \vec{r}_C$. 其中 α_1 未知, 设为逆时针方向. 现求 $\vec{\omega}_1$:

在基e'对给定点B有: $\vec{v}_B = \vec{v}_{tB}^e + \vec{v}_{wB}^e$. ⇒



其中 $\vec{v}_{tB}^e = \vec{v}_A \Rightarrow v_{tB}^e = v_A = \omega r$. $\vec{v}_{wB}^e = \vec{\omega}_1 \times \vec{r}_B$

而在基e'下由分析知 $\vec{v}_B$ 方向如图所示.

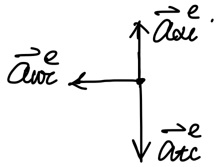
则 $\vec{v}_{wB}^e = 0$. 即 $\vec{\omega}_1 = 0$. (这里的 $\vec{\omega}_1$ 为绝对角速度, 也可设相对角速度, 解得 $\omega_1 = \omega$).

所以基e'无转动, 为平移运动. 那么对C点: $\vec{v}_C = \vec{v}_{tC}^e \Rightarrow v_C = \omega r$, 且有 $v_B = \omega r$

在定基下对B有: $\vec{v}_B = \vec{\omega}_{O_1B} \times \vec{r}_B \Rightarrow v_B = 2\omega_{O_1B} r$, 可得 $\omega_{O_1B} = \frac{1}{2}\omega$.

2°. 加速度分析.

在基e'下对给定点C有: $\vec{a}_C = \vec{a}_C' = \vec{a}_{tC}^e + \vec{a}_{\alpha C}^e + \vec{a}_{wC}^e$. ⇒

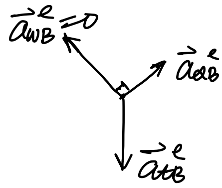


其中 $\vec{a}_{tC}^e = \vec{a}_A \Rightarrow a_{tC}^e = a_A = \omega^2 r$.

$\vec{a}_{\alpha C}^e = \vec{\alpha}_1 \times \vec{r}_C$. $\vec{\alpha}_1$ 为未知量. 设为逆时针方向; $\vec{a}_{wC}^e = \vec{\omega}_1 \times (\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_C) \Rightarrow a_{wC}^e = 0$.

现求 $\vec{\alpha}_1$:

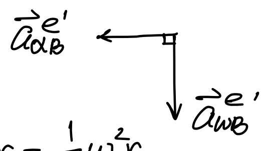
在基e'下对给定点B有: $\vec{a}_B = \vec{a}_B' = \vec{a}_{tB}^e + \vec{a}_{\alpha B}^e + \vec{a}_{wB}^e$. ⇒



其中 $\vec{a}_{tB}^e = \vec{a}_A \Rightarrow a_{tB}^e = a_A = \omega^2 r$.

$\vec{a}_{\alpha B}^e = \vec{\alpha}_1 \times \vec{r}_B \Rightarrow a_{\alpha B}^e = 2\alpha_1 r$; $\vec{a}_{wB}^e = \vec{\omega}_1 \times (\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_B) \Rightarrow a_{wB}^e = 0$

在基e下对点B有: $\vec{a}_B = \vec{a}_{\alpha B}^{e'} + \vec{a}_{wB}^{e'}$. ⇒



其中 $\vec{a}_{\alpha B}^{e'} = \vec{\alpha}_{O_1C} \times \vec{r}_B$. 而 α_{O_1C} 未知;

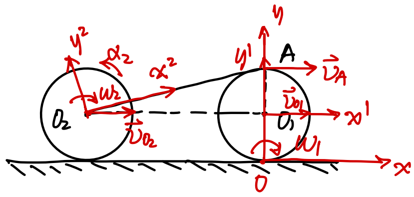
$\vec{a}_{wB}^{e'} = \vec{\omega}_{O_1C} \times (\vec{\omega}_{O_1C} \times \vec{r}_B) \Rightarrow a_{wB}^{e'} = (\frac{\omega}{2})^2 \cdot 2r = \frac{1}{2}\omega^2 r$.

则 $\vec{a}_B$ 在y方向的分量: $a_{By} = a_{wB}^{e'} = \frac{1}{2}\omega^2 r$, $a_{By} = \omega^2 r - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 2\alpha_1 r$ ⇒ 解出 $\alpha_1 = \frac{\omega^2}{2\sqrt{2}}$

所以 $a_{\alpha C}^e = \alpha_1 \cdot 2\sqrt{2} r = \omega^2 r$. 合成后有 $\vec{a}_C = 0$. 即 $a_C = 0$.

△ 固定解题模式.

○(题5-22). 半径为r的两轮用长l的杆O_2A相连. 前后轮均为纯滚动. 前轮B_1轮心O_1的速度恒为v. 求后轮滚动的角速度和角加速度.



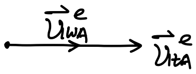
建立定基$O-e$. 连体基O_1-e^1. 连体基O_2-e^2.

(速度分析).

1°. 对定基下点O_1有: $\vec v_{O_1} = \vec v_{tO_1}^e + \vec v_{\omega O_1}^e = \vec v_{\omega O_1}^e = \vec\omega_1\times\vec r_{O_1} \Rightarrow v_{O_1}=\omega_1 r = v$

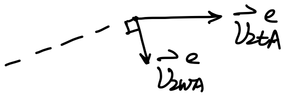
所以 $\omega_1 = \frac{v}{r}$.

2°. 对基e^1下点A有: $\vec v_{1A} = \vec v_{1tA}^e + \vec v_{1\omega A}^e \Rightarrow$



其中 $v_{1tA}^e = v_{O_1} = v$. $v_{1\omega A}^e = \omega_1 r_A = \frac{v}{r}\cdot r = v$, 则 $v_{1A} = v_A = 2v$ (点A的绝对角速度和点O绝对角速度相同)

3°. 对基e^2下点A有: $\vec v_{2A} = \vec v_{2tA}^e + \vec v_{2\omega A}^e \Rightarrow$



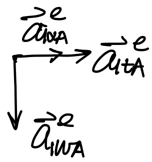
(假设ω_2为顺时针方向)

其中$v_{2tA}^e = v_{O_2}$, $v_{2\omega A}^e = \omega_2 r_A = \omega_2 l$.

与v_A比较可得 $v_{2\omega A}^e = 0$. 即 $\omega_2 = 0$. 杆无绝对转动. 作平移运动. 那么 $v_{O_2} = v_A = 2v$.

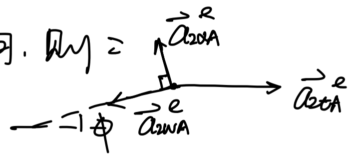
(加速度分析)

1°. 对定基下点O_1有: $a_{O_1}=0$; 对基e^1下点A有: $\vec a_{1A} = \vec a_{1tA}^e + \vec a_{1\alpha A}^e + \vec a_{1\omega A}^e \Rightarrow$



其中 $a_{1tA}^e = 0$. $a_{1\alpha A}^e = 0$. $a_{1\omega A}^e = \omega_1^2 r$ 则 $a_A = a_{1A} = \frac{v^2}{r}$.

2°. 对基e^2下A点有: $\vec a_{2A} = \vec a_{2tA}^e + \vec a_{2\alpha A}^e + \vec a_{2\omega A}^e$, 设基$e^2$(杆)的$\alpha_2$为逆时针方向. 则:



其中 $a_{2tA}^e = a_{O_2}$. $a_{2\alpha A}^e = \alpha_2 l$. $a_{2\omega A}^e = \omega_2^2 l = 0$.

与a_A比较可得: $a_{Ax} = a_{2\alpha A}^e \sin\phi - a_{2tA}^e = 0$; $a_{Ay} = a_{2\alpha A}^e \cos\phi = a_A = \frac{v^2}{r}$.

$$\Rightarrow a_{2\alpha A}^e = \frac{v^2}{r}\cdot\frac{1}{\cos\phi} = \frac{v^2 l}{r\sqrt{l^2-r^2}}.\quad a_{O_2} = a_{2\alpha A}^e \sin\phi = \frac{v^2}{\sqrt{l^2-r^2}}.$$

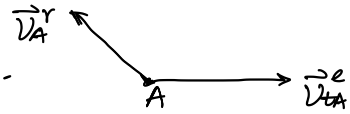
则后轮滚动角加速度 $\alpha = \frac{a_{O_2}}{r} = \frac{v^2}{r\sqrt{l^2-r^2}}$.

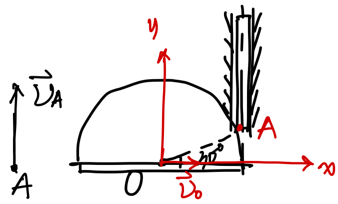
O (题5-13) 凸轮推杆机构. 此瞬时凸轮速度为 v, 加速度为0. 计算AB杆的速度和加速度.

(1) 以凸轮点O为基点建立动基 O-e.

(速度分析).

在基e下对点A有: $\vec{v}_A = \vec{v}_A^r + \vec{v}_{tA}^e + \vec{v}_{\omega A}^e$.





其中由于点A绕圆周运动. 所以 $\vec{v}_A$ 沿圆周切向.

$\vec{v}_{tA}^e = \vec{v}_o \Rightarrow v_{tA} = v$; 动基O-e无转动. 那么 $\vec{v}_{\omega A}^e = 0$. (?)

而点A的绝对速度方向如图所示. 比较得:

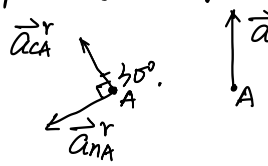
$$\left.\begin{array}{l} v_A^r \sin 30^\circ = v_{tA}^e = v \\ v_A^r \cos 30^\circ = v_A \end{array}\right\} \Rightarrow v_A = \sqrt{3}v.\quad v_A^r = 2v.$$

(加速度分析).

在基e下对点A有: $\vec{a}_A = \vec{a}_A^r + (\vec{a}_{tA}^e + \vec{a}_{\alpha A}^e + \vec{a}_{\omega A}^e) + \vec{a}_A^c$.

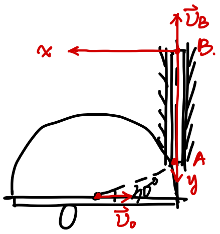
$\vec{a}_A^r$ 为点A相对基e(凸轮)的加速度, 分为切向加速度 $\vec{a}_{cA}^r$ 和法向加速度 $\vec{a}_{nA}^r$, 且 $a_{nA}^r = \frac{4v^2}{r}$.

$\vec{a}_{tA}^e = \vec{a}_o = 0$. $\vec{a}_{\alpha A}^e = 0$, $\vec{a}_{\omega A}^e = 0$. $\vec{a}_A^c = 2\vec{\omega} \times \vec{v}_A^r = 0$. 那么:



点A的绝对加速度方向如图所示:

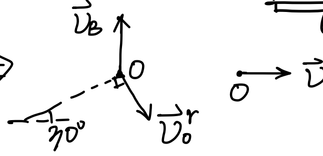
$$\left.\begin{array}{l} a_{cA}^r \cos 30^\circ - a_{nA}^r \sin 30^\circ = a_A \\ a_{cA}^r \sin 30^\circ + a_{nA}^r \cos 30^\circ = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow a_A = -\frac{8v^2}{r}. 方向向下.$$



(2) 以杆上B点为基点建立动基 B-e.

(速度分析)

在基e下对点O有: $\vec{v}_o = \vec{v}_o^r + \vec{v}_{to}^e + \vec{v}_{\omega o}^e$.



其中由于圆周运动关系. $\vec{v}_o^r$ 沿圆周切向. $\vec{v}_{to}^e = \vec{v}_B$. $\vec{v}_{\omega o}^e = 0$. $\Rightarrow$

而点O的绝对速度 $\vec{v}_o$ 为如图所示, 那么:

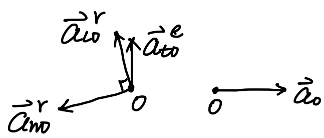
$$\left.\begin{array}{l} v_o^r \cos 30^\circ - v_B = 0 \\ v_o^r \sin 30^\circ = v_o \end{array}\right\} \Rightarrow v_o^r = 2v_o = 2v.\quad v_B = \sqrt{3}v = v_A$$

(加速度分析).

在基e下对点O有: $\vec{a}_o = \vec{a}_o^r + (\vec{a}_{to}^e + \vec{a}_{\alpha o}^e + \vec{a}_{\omega o}^e) + \vec{a}_o^c$.

其中点O相对基e作圆周运动. 则 $\vec{a}_o^r = \vec{a}_{co}^r + \vec{a}_{no}^r$. 且 $a_{no}^r = \frac{v_o^{r2}}{r} = \frac{4v^2}{r}$.

$\vec{a}_{to}^e = \vec{a}_B$, $\vec{a}_{\alpha o}^e = 0$, $\vec{a}_{\omega o}^e = 0$, $\vec{a}_o^c = 0$. 那么:



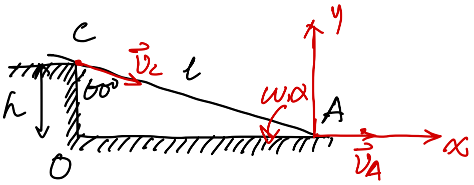
而点O绝对速度如图所示. 那么:

$$\left.\begin{array}{l} a_{no}^r \cos 30^\circ + a_{co}^r \sin 30^\circ = -a_o = 0 \\ a_{co}^r \cos 30^\circ - a_{no}^r \sin 30^\circ = a_{to} = a_B \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow a_B = -\frac{8v^2}{r} = a_A.$$

○(题3-14) 杆AB放在高为h平台上. A端以匀速v沿水平向右运动. 图示瞬时 $\varphi=60^\circ$. 求AB杆角速度和角加速度.

(1)(速度分析)

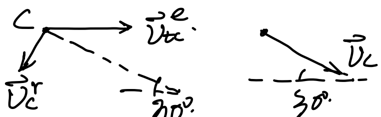


建立平动系A-e, 在该基下对杆上点C有:

$$\vec{v}_C=\vec{v}_C^r+\vec{v}_{tC}^e+\vec{v}_{\omega C}^e.$$

其中由于点C相对点A作圆周运动. 所以 $\vec{v}_C^r$ 为切线方向且 $v_C^r=\omega l$

$\vec{v}_{tC}^e=\vec{v}_A \Rightarrow v_{tC}^e=v$. $\vec{v}_{\omega C}^e=0$. 且有:



又易知点C绝对速度 v_C 如右图所示, 则有:

$$\left.\begin{aligned}v_{tC}^e\sin30^\circ-v_C^r=0.\\ v_{tC}^e\cos30^\circ=v_C\end{aligned}\right\}\Rightarrow v_C^r=\frac{1}{2}v.\ v_C=\frac{\sqrt{3}}{2}v.\ 则\ \omega=\frac{v}{2l}=\frac{v}{4h}.$$

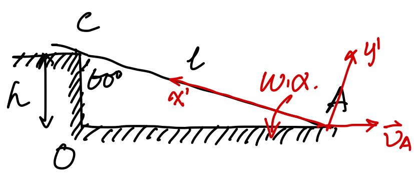
(加速度分析).

在基A-e下对杆上点C有: $\vec{a}_C=\vec{a}_C^r+(\vec{a}_{tC}^e+\vec{a}_{\alpha C}^e+\vec{a}_{\omega C}^e)+\vec{a}_C^c$

其中由于点C相对点A(基)作圆周运动. 所以 $\vec{a}_C^r=\vec{a}_{\tau C}^r+\vec{a}_{nC}^r$, 且 $a_{nC}^r=\omega^2 l=\frac{v^2}{8h}$, $a_{\tau C}^r=\alpha l$.

$\vec{a}_{tC}^e=\vec{a}_A\Rightarrow a_{tC}^e=0$. $\vec{a}_{\alpha C}^e=0$, $\vec{a}_{\omega C}^e=0$(平动系). $\vec{a}_C^c=2\vec{\omega}\times\vec{v}_C$ (为什么是 $\vec{v}_C$ 而不是 $\vec{v}_C^r$)

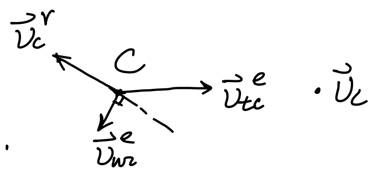
(2)(速度分析). 建立连体基A-e.



在基e下对平台上点C有: $\vec{v}_C=\vec{v}_C^r+\vec{v}_{tC}^e+\vec{v}_{\omega C}^e$.

其中由分析知 $\vec{v}_C=0$, $\vec{v}_C^r$ 沿杆方向. $\vec{v}_{\omega C}^e=\vec{\omega}\times\vec{r}_C$, $\vec{v}_{tC}^e=\vec{v}_A$

那么有: $\left.\begin{aligned}v_{tC}^e\cos30^\circ=v_C^r\\ v_{tC}^e\sin30^\circ=v_{\omega C}^e\end{aligned}\right\}\Rightarrow v_C^r=\frac{\sqrt{3}}{2}v.\ v_{\omega C}^e=\omega l=\frac{1}{2}v\Rightarrow\omega=\frac{v}{4h}$

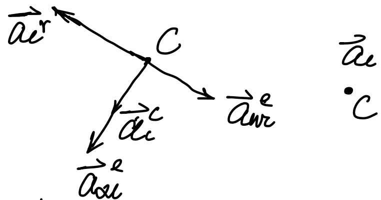


(加速度分析). 在基e下对平台上C点: $\vec{a}_C=\vec{a}_C^r+(\vec{a}_{tC}^e+\vec{a}_{\alpha C}^e+\vec{a}_{\omega C}^e)+\vec{a}_C^c$.

其中 $\vec{a}_C^r$ 沿杆方向. $\vec{a}_{tC}^e=\vec{a}_A=0$. $\vec{a}_{\alpha C}^e=\vec{\alpha}\times\vec{r}_C$. $\vec{a}_{\omega C}^e=\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}_C)$. $\vec{a}_C^c=2\vec{\omega}\times\vec{v}_C^r$

$$\Rightarrow a_{\alpha C}^e=2\alpha h,\ a_{\omega C}^e=2\omega^2 h.\ a_C^c=2\omega\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}v=\frac{\sqrt{3}v^2}{4h}$$

则: $a_{\alpha C}^e+a_C^c=0\Rightarrow 2\alpha h+\frac{\sqrt{3}v^2}{4h}=0\Rightarrow\alpha=-\frac{\sqrt{3}v^2}{8h^2}$.



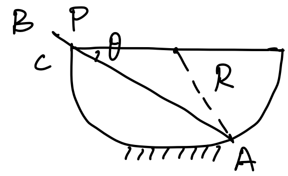
△书上例题[3.6.5].

这种情况下要对不动点(即平台上点C)进行列式, 因为其加速度已知为0.

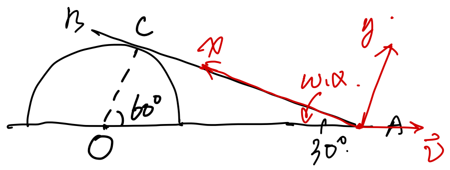
而对杆上点C列式和对平台上点C列式都能进行速度分析. 因为平台上点C速度已知为0. 杆上点C速度已知沿杆方向; 但对杆上点C列式无法进行加速度分析. 因为其绝对加速度大小方向未知. 可在通过考察不动点C进行加速度分析后求杆上点C的加速度.

根源: 杆上点C的加速度大小, 方向均未知.

○【例3.6-5】.



○ [题分15] 杆AB放在半径r的圆上. A端匀速v向右运动. 图示瞬时 $\varphi=30°$. 求该瞬时杆AB的角速度和角加速度.

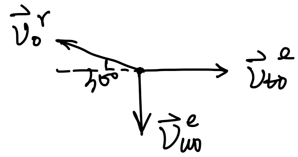


以A为基点建立连体基A-e. 则基点速度为 $\vec{v}_A=\vec{v}$.

(速度分析)

在基A-e下对点O(动点)有: $\vec{v}_O = \vec{v}_O^r + \vec{v}_{tO}^e + \vec{v}_{\omega O}^e$.

其中点O离杆距离保持不变. 则 $\vec{v}_O^r$ 沿杆方向; $\vec{v}_{tO}^e=\vec{v}_A$; $v_{\omega O}^e = \omega\cdot 2r$ ⇒



而点O的绝对速度 $\vec{v}_O=0$. 那么有:

$$\begin{cases} v_O^r\cos30° = v_{tO}^e \\ v_O^r\sin30° = v_{\omega O}^e \end{cases} \Rightarrow v_O^r=\frac{2\sqrt{3}}{3}v.\quad v_{\omega O}^e=\frac{\sqrt{3}}{3}v \Rightarrow \omega=\frac{\sqrt{3}v}{6r}.$$

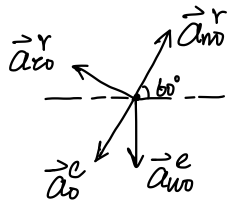
(加速度分析)

在基A-e下对点O有: $\vec{a}_O = \vec{a}_O^r + (\vec{a}_{tO}^e + \vec{a}_{\alpha O}^e + \vec{a}_{\omega O}^e) + \vec{a}_O^c$.

其中由于点O相对点C(基)作圆~~周~~运动. 则 $\vec{a}_O^r = \vec{a}_{\tau O}^r + \vec{a}_{nO}^r$. 且 $a_{nO}^r = \frac{{v_O^r}^2}{r} = \frac{4v^2}{3r}$.

$a_{tO}^e = a_A = 0$. $a_{\omega O}^e = \alpha\cdot\overline{OA} = 2\alpha r$. $a_O^c = 2\omega v_O^r = \frac{2v^2}{3r}$

而点O的绝对加速度 $\vec{a}_O=0$. 那么有:



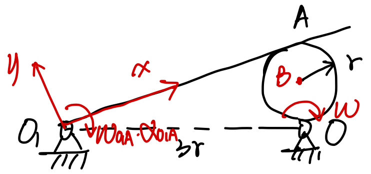
$$\begin{cases} a_O^c\sin30° + a_{\tau O}^r\cos30° = a_{nO}^r\cos60° \\ a_O^c\cos30° + a_{\omega O}^e = a_{\tau O}^r\sin30° + a_{nO}^r\sin60° \end{cases}$$

$$\frac{v^2}{3r} + \frac{\sqrt{3}}{2}a_{\tau O}^r = \frac{2v^2}{3r} \qquad a_{\tau O}^r = \frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{v^2}{3r} = \frac{2v^2}{3\sqrt{3}r}$$

$$+ 2\alpha r = \frac{\sqrt{3}v^2}{9r} + \frac{4\sqrt{3}v^2}{9r} \quad \frac{4\sqrt{3}v^2}{9r}$$

$$\alpha = \frac{2\sqrt{3}v^2}{9r^2}$$

01[题5-30] 半径为r的圆盘以等角速度ω绕轴O转动. 杆O₁A靠在盘上. 其O₁O=3r. 求该瞬时O₁A的角速度和角加速度.



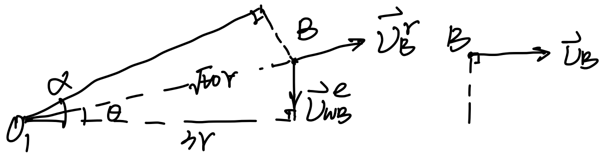
⇒以O₁为基点建立连体基. 选取B点为关键点.

(速度分析).

在基O₁-e下对点B(动点): $\vec{v}_B = \vec{v}_B^r + \vec{v}_{tB}^e + \vec{v}_{wB}^e$.

其中 ~~B点相对杆(基)作圆周运动~~ 距离保持不变 B点 v_B^r沿O₁A方向; $v_{tB}^e = v_{O_1} = 0$; $v_{wB}^e = \omega_{O_1A}\cdot\sqrt{10}r$.

而在参考基下对B点有$\vec{v}_B$如图. 且$v_B = \omega r$.



则有: $v_{Bx} = v_B^r\cos\alpha + v_{wB}^e\sin\theta = \omega r$

$v_{By} = v_B^r\sin\alpha - v_{wB}\cos\theta = 0$

其中 $\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{10}}$. $\cos\theta = \frac{3}{\sqrt{10}}$. $\sin\alpha = \frac{3}{5}$. $\cos\alpha = \frac{4}{5}$.

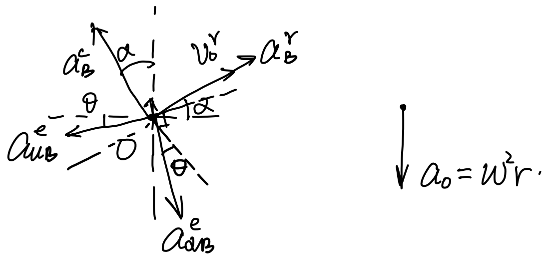
解得: $\omega_{O_1A} = \frac{1}{5}\omega$. $v_B^r = \omega r$.

(加速度分析).

在基O₁-e下对B点有: $\vec{a}_B = \vec{a}_B^r + (\vec{a}_{tB}^e + \vec{a}_{\alpha B}^e + \vec{a}_{wB}^e) + \vec{a}_B^c$.

其中 $\vec{a}_B^r$平行于杆O₁A. $a_{tB}^e = a_{O_1} = 0$. $a_{\alpha B}^e = \alpha_{O_1A}\cdot\sqrt{10}r$, $a_{wB}^e = \omega_{O_1A}^2\cdot\sqrt{10}r = \frac{\sqrt{10}}{25}\omega^2 r$, $a_B^c = \omega_{O_1A}v_B^r = \frac{2\omega^2 r}{5}$

在参考基下对B点有$\vec{a}_B$如图. 且$a_B = \omega^2 r$.



则在垂直于a_B^r的方向上有:

$$a_{\alpha B}^e\cos\theta - a_{wB}^e\sin\theta - \frac{2}{5}\omega^2 r = \omega^2 r\cdot\cos\alpha$$

解得: $\alpha = \frac{11}{25}\omega^2 r$.

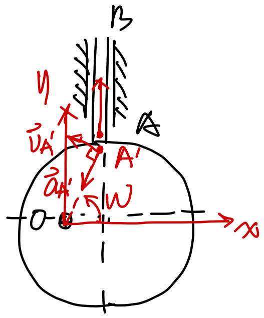
Δ错误做法:

① 此类型题目中, B点相对动基的加速度a_B^r是否按圆周运动做.
题(5-13)和(5-16)中动点直接落在圆周上. 明显作圆周运动 因此 $a^r = a_t^r + a_n^r$.
而该题及(5-15)和其余题目中, 相对加速度均沿相对速度方向.

② 科氏加速度 $a^c = 2\omega v^r$ 中, ω为连体基的角速度. v为动点相对连体基的速度.
不要忘记2倍.

①(题5-16). 一圆盘凸轮机构. 凸轮以角速度ω转动. 求此瞬时杆AB的速度和加速度

以转轴为基点建立动基(连体基) O-e. 则杆上点A对基来说为动点.

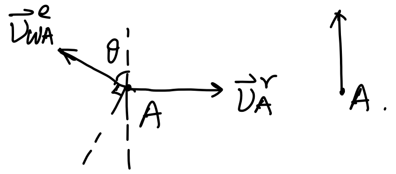


(速度分析)

在动基e下对点A有: $\vec{v}_A = \vec{v}_A^r + \vec{v}_{tA}^e + \vec{v}_{wA}^e$.

其中由于点A在圆周上,所以有圆周运动 v_A^r 沿切线方向.

$v_{tA}^e = v_0 = 0$, $v_{wA}^e = \omega r_A = \frac{\sqrt{5}}{2}\omega r$ ⇒



而点A的绝对速度为图示方向. 则有:

$$\left.\begin{aligned} v_{wA}^e\sin\theta - v_A^r &= 0 \\ v_{wA}^e\cos\theta &= v_A \end{aligned}\right\} \Rightarrow v_A^r = \omega r.\ v_A = \frac{1}{2}\omega r$$

(加速度分析).

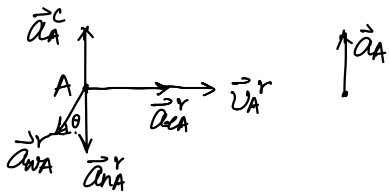
在动基下对点A有: $\vec{a}_A = \vec{a}_A^r + (\vec{a}_{tA}^e + \vec{a}_{\alpha A}^e + \vec{a}_{wA}^e) + \vec{a}_A^c$.

其中由于圆周运动. $\vec{a}_A^r = \vec{a}_{tA}^r + \vec{a}_{nA}^r$ (切向和法向). 且 $a_{nA}^r = \frac{v_A^{r2}}{r} = \omega^2 r$. a_{tA}^r大小未知.

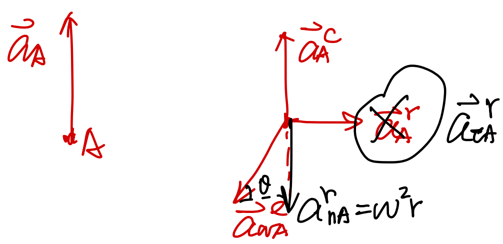
由动基基点固定,动基匀速转动: $a_{tA}^e = 0$. $a_{\alpha A}^e = 0$. 而 $a_{wA}^e = \omega^2 r_A = \frac{\sqrt{5}}{2}\omega^2 r$, $a_A^c = 2\omega v_A^r = 2\omega^2 r$.

而点A的绝对加速度方向如图所示. 则有:

$$\left.\begin{aligned} a_{wA}^r\cos\theta - a_{tA}^r &= 0 \\ a_A^c - a_{wA}^r\sin\theta - a_{nA}^r &= a_A \end{aligned}\right\}\ a_A = 0.\ a_{tA}^r = \frac{1}{2}\omega^2 r.$$



错误解法:



$\frac{\sqrt{5}}{2}\omega^2 r \cdot \cos\theta = \frac{1}{2}\omega^2 r = \cancel{\vec{a}_A^r}\ \vec{a}_{tA}^r$

$\vec{a}_A = \vec{a}_A^c - \sin\theta\,\vec{a}_{wA}^e - \vec{a}_{nA}^r$

$= 2\omega^2 r - \frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{5}}{2}\omega^2 r = \frac{1}{2}\omega^2$

$-\omega^2 r$

点A显然相对基e
作圆周运动.

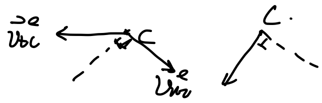
○ (题3-19) AB作匀角速转动. $\omega=4rad/s$. 求BC和CD的角速度和角加速度.

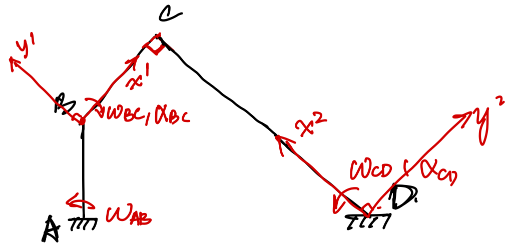
(解一) 建立连体基 $B-e^1$. $D-e^2$.

(速度分析)

在基e^1下对C点(给定点): $\vec{v}_C=\vec{v}_{tC}^e+\vec{v}_{\omega C}^e$

其中 $v_{tC}^e=v_B=\omega b$, $v_{\omega C}^e=\omega_{BC}\cdot\sqrt{2}b$ ⇒





而C点绝对速度如图所示. 比较得:

$$\begin{cases} v_{tC}^e\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=v_{\omega C}^e \\ v_{tC}^e\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=v_C \end{cases} \Rightarrow v_C=\frac{\sqrt{2}}{2}\omega b.\quad \omega_{BC}=\frac{1}{2}\omega.$$

在基e^2下对C点(给定点): $\vec{v}_C=\vec{v}_{tC}^e+\vec{v}_{\omega C}^e \Rightarrow v_C=\omega_{CD}\cdot r_C=2\sqrt{2}\omega_{CD}b$

又 $v_C=\frac{\sqrt{2}}{2}\omega b$. 则 $\omega_{CD}=\frac{1}{4}\omega$.

(设的都是绝对的)

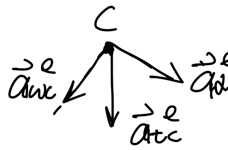
(加速度分析)

在基e^1下对C点: $\vec{a}_{1C}=\vec{a}_{1tC}^e+\vec{a}_{1\alpha C}^e+\vec{a}_{1\omega C}^e$, 其中 $\vec{a}_{1tC}^e=\vec{a}_B$ 且 $a_B=\omega^2 r$. $a_{1\alpha C}^e=\alpha_{BC}\cdot\sqrt{2}b$. $a_{1\omega C}^e=\omega_{BC}^2 r_C=\frac{\sqrt{2}}{4}\omega^2 b$

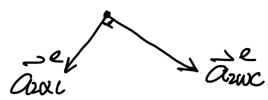
在基e^2下对C点: $\vec{a}_{2C}=\vec{a}_{2tC}^e+\vec{a}_{2\alpha C}^e+\vec{a}_{2\omega C}^e$, 其中 $\vec{a}_{2tC}^e=0$. $a_{2\alpha C}^e=\alpha_{CD}\cdot 2\sqrt{2}b$. $a_{2\omega C}^e=\omega_{CD}^2\cdot 2\sqrt{2}b=\frac{\sqrt{2}}{8}\omega^2 b$.

显然: $\vec{a}_{1C}=\vec{a}_{2C}$. 则分别有:

$$\begin{cases} a_{1\omega C}^e+\frac{\sqrt{2}}{2}a_{1tC}^e=a_{2\alpha C}^e \\ a_{1\alpha C}^e+\frac{\sqrt{2}}{2}a_{1tC}^e=a_{2\omega C}^e \end{cases} \Rightarrow \alpha_{BC}=-\frac{3}{8}\omega^2 b.\quad \alpha_{DC}=\frac{3}{8}\omega^2 b$$

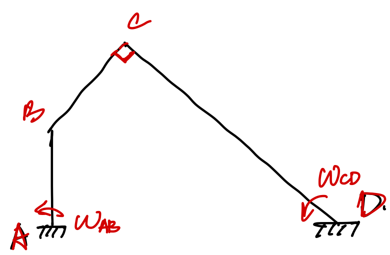


(e^1基).



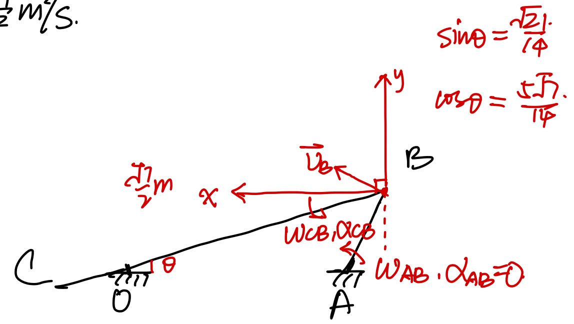
(e^2基)

(解二)



○（题5-27）$AB=5m$. $OA=1m$. 图示瞬时$\theta=60°$. $\omega_{AB}=7rad/s$. $a_{AB}=0$. 求BC在导管中运动的速度和加速度.

以B为基点，建立平动系$B\text{-}e$. 在参考系下B点：$v_B=\frac{7}{2}m/s$. $a_B=\frac{49}{2}m/s^2$.

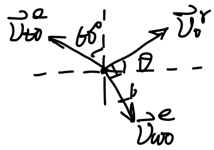


解一：

（速度分析）

在基$B\text{-}e$下对导管上O点（动点）有：$\vec{v}_O=\vec{v}_O^r+\vec{v}_{tO}^e+\vec{v}_{\omega O}^e$.

其中$v_{tO}^e=v_B$. $v_{\omega O}^e=\omega_{CB}\cdot\overline{BC}=\frac{\sqrt{7}}{2}\omega_{CB}$ ⇒



而固定点O有$\vec{v}_O=0$. 则有：

$$\begin{cases} v_{tO}^e\cos60°+v_O^r\sin\theta=\frac{\sqrt{7}}{2}\omega_{CB}\cos\theta \\ v_{tO}^e\sin60°=v_O^r\cos\theta+\frac{\sqrt{7}}{2}\omega_{CB}\sin\theta \end{cases}$$

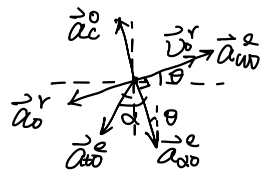
解得：$\omega_{CB}=2rad/s$. $v_O^r=\frac{\sqrt{21}}{2}m/s$

（加速度分析）.

在基$B\text{-}e$下 对导管上O点（动点）有：$\vec{a}_O=\vec{a}_O^r+(\vec{a}_{tO}^e+\vec{a}_{\alpha O}^e+\vec{a}_{\omega O}^e)+\vec{a}_O^c$.

其中$\vec{a}_O^r$沿杆方向；$\vec{a}_{tO}^e=\vec{a}_B$且$a_B=\frac{49}{2}m/s$. $a_{\alpha O}^e=\alpha_{CB}\cdot\overline{BC}=\alpha_{CB}\cdot\frac{\sqrt{7}}{2}$. $a_{\omega O}^e=\omega_{CB}^2\cdot\overline{BC}=2\sqrt{7}$；$a_O^c=\omega_{CB}^2 v_O^r=2\sqrt{21}$.

各分加速度方向如右图. $\vec{a}_O^r$即为AB在导管中运动的加速度.



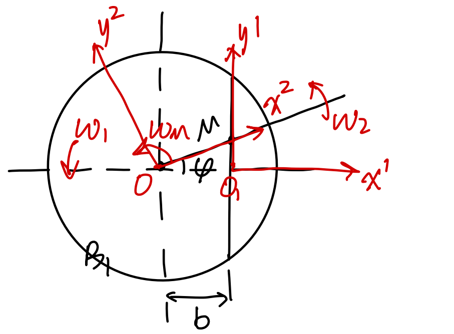
而固定点O有：$\vec{a}_O=0$. 则：

$a_{tO}^e\sin\alpha+a_r^r=a_{\omega O}^e$, 其中$\sin\alpha=\sin(30°+\theta)=\frac{4\sqrt{7}}{14}$

⇒解得 $a_O^r=-5\sqrt{7}\,m/s^2$.

解二：

○ (题3-33). 圆盘B_1与直杆B_2绕O转动. 图示瞬时$\varphi=30°$. B_1与B_2角速度为$\omega_1=9\,rad/s$. $\omega_2=3\,rad/s$. 两构件角加速度为0. 求该瞬时M的速度与加速度.



⇒ 建立如图所示的基$O-e^2$, O_1e^1.

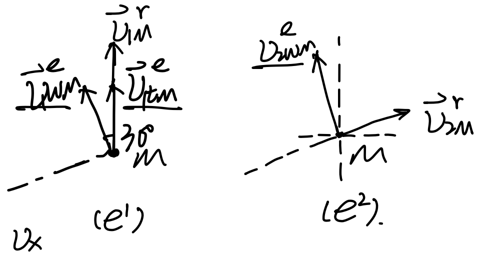
(速度分析).

在基O_1-e^1上对点M(动点): $\vec{v}_M = \vec{v}_{1M}^r + \vec{v}_{1tM}^e + \vec{v}_{1\omega M}^e$.

其中v_{1M}^r沿y¹轴方向, 设为正向; $v_{1tM}^e = v_{O_1} = \omega_1 b$; $v_{1\omega M}^e = \omega_1\cdot\frac{2\sqrt{3}}{3}b$

在基$O-e^2$上对点M(动点): $\vec{v}_{2M} = \vec{v}_{2M}^r + \vec{v}_{2tM}^e + \vec{v}_{2\omega M}^e$.

其中v_{2M}^r沿x_2方向, 设为正向; $v_{2tM}^e=0$; $v_{2\omega M}^e = \omega_2\cdot\frac{2\sqrt{3}}{3}b$

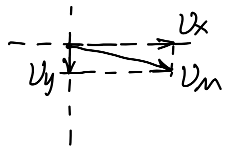


显然有$\vec{v}_M = \vec{v}_{1M} = \vec{v}_{2M}$. 那么有:

$$\begin{cases} v_x: \sin30° v_{1\omega M} = \sin30° v_{2\omega M}^e - \cos30° v_{2M} \\ v_y: v_{1M}^r + v_{1tM}^e = \cos30° v_{2\omega M}^e + \sin30° v_{2M}^r \end{cases}$$

解出: $\begin{cases} v_{1M}^r = -0.8\,m/s \\ v_{2M}^r = -0.4\,m/s \end{cases}$ $\begin{cases} v_x = \frac{3\sqrt{3}}{10}\,m/s \\ v_y = -0.1\,m/s \end{cases}$

所以 $v_M = \sqrt{v_x^2+v_y^2} = 0.529\,m/s$. 方向如右图所示:



(加速度分析)

在基O_1-e^1上对M点有: $\vec{a}_M = \vec{a}_{1M}^r + (\vec{a}_{1tM}^e + \vec{a}_{1\alpha M}^e + \vec{a}_{1\omega M}^e) + \vec{a}_{1M}^c$.

其中a_{1M}^r沿y¹方向; $a_{1tM}^e = \omega_1^2 b$; $a_{1\alpha M}^e = 0$; $a_{1\omega M}^e = \omega_1^2\cdot\frac{2\sqrt{3}}{3}b$; $a_{1M}^c = 2\omega_1\cdot v_{1M}^r = 14.4\,m/s^2$.

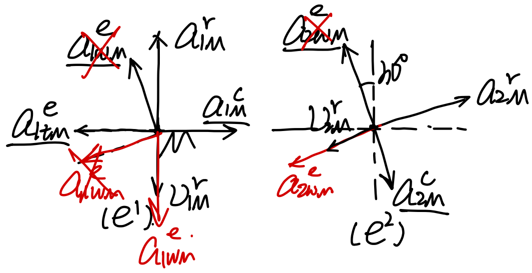
在基$O-e^2$上对M点有: $\vec{a}_{2M} = \vec{a}_{2M}^r + (\vec{a}_{2tM}^e + \vec{a}_{2\alpha M}^e + \vec{a}_{2\omega M}^e) + \vec{a}_{2M}^c$.

其中a_{2M}^r沿x_2方向; $a_{2tM}^e=0$; $a_{2\alpha M}^e=0$; $a_{2\omega M}^e = \omega_2^2\cdot\frac{2\sqrt{3}}{3}b$; $a_{2M}^c = 2\omega_2\cdot v_{2M}^r = 2.4\,m/s^2$.

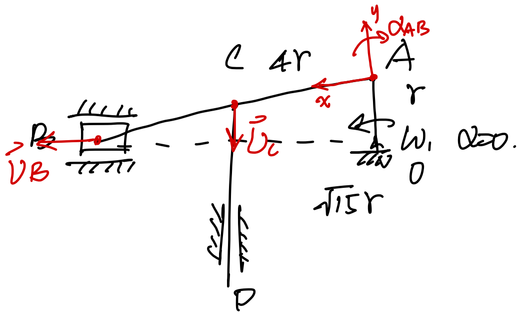
显然有$\vec{a}_M = \vec{a}_{1M} = \vec{a}_{2M}$. 那么有:

$$\begin{cases} a_x: \cos30° a_{1\omega M}^e + a_{1tM}^e - a_{1M}^c = \cos30° a_{2\omega M}^e - \sin30° a_{2M}^c - \cos30° a_{2M}^r \\ a_y: a_{1M}^r - a_{1\omega M}^e \sin30° = -\sin30° a_{2\omega M}^e + \sin30° a_{2M}^r - \cos30° a_{2M}^c \end{cases}$$

解出:

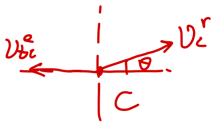


○[题3-34]



⇒平移运动．$\omega_{AB}=0$

在基A-e上对于点C(动点)：$\vec v_C = \vec v_C^r + \vec v_{tC}^e + \overset{\overset{0}{\|}}{\vec v_{\omega C}^e}$.



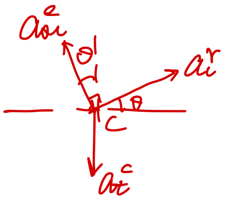
$\sin\theta=\frac{1}{4}$

$\cos\theta=\frac{\sqrt{15}}{4}$

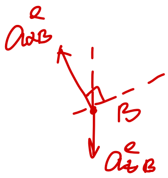
x: $v_C^r\cos\theta = v_{tC}^e \Rightarrow v_C^r\cdot\frac{\sqrt{15}}{4}=\omega r \Rightarrow v_C^r=\frac{4\sqrt{15}}{15}\omega r$

$v_C = v_C^r\sin\theta = \frac{4\sqrt{15}}{15}\omega r\times\frac{1}{4} = \frac{\sqrt{15}}{15}\omega r.$

在基A-e上对于点C：$\vec a_C = \vec a_C^r + (\underset{\omega^2 r}{\underset{\|}{\vec a_{tC}^e}} + \underset{\alpha_{AB}\cdot 2r}{\underset{\|}{\underline{\underline{\vec a_{\alpha C}^e}}}} + \underset{0}{\underset{\|}{\vec a_{\omega C}^e}}) + \underset{0}{\underset{\|}{\vec a_C^C}}.$



在基A-e上对于点B：$\vec a_B = \underset{\omega^2 r}{\underset{\|}{\vec a_{tB}^e}} + \underset{\alpha_{AB}4r}{\underset{\|}{\vec a_{\alpha C}^e}} + \underset{0}{\underset{\|}{\vec a_{\omega C}^e}}$

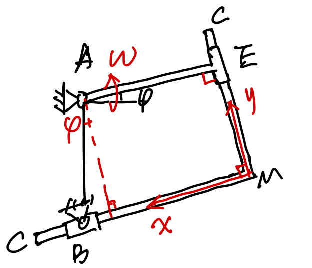


$\Rightarrow a_{\alpha B}^e\cos\theta = a_{tB}^e \Rightarrow \cancel{4}r\alpha_{AB}\frac{\sqrt{15}}{\cancel{4}} = \omega^2 r \Rightarrow \alpha_{AB}=\frac{\sqrt{15}}{15}\omega^2$

则有：(x方向) $\frac{\sqrt{15}}{15}\omega^2\cdot 2r\cdot\frac{1}{4} = a_C^r\cdot\frac{\sqrt{15}}{4} \Rightarrow a_C^r=\frac{2}{15}\omega^2 r.$

y: $a_C = \omega^2 r - \frac{\sqrt{15}}{15}\omega^2\cdot 2r\cdot\frac{\sqrt{15}}{4} - \frac{2}{15}\omega^2 r\times\frac{1}{4} = \frac{7}{15}\omega^2 r.$

○[题2-36] 直角弯杆CMD在两套筒中滑动，套筒AE以匀角速ω绕A转动，另一套筒绕B铰轴转动。AB=AE=a，AE⊥MC，求直角弯杆CMD上点M速度与加速度。

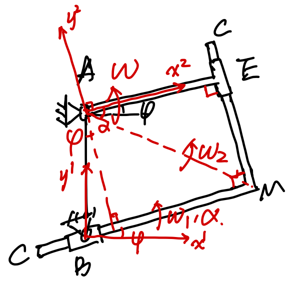


⇒ 以M点为基点建立连体基M-e.

(速度分析)

在基M-e下对A点(动点)有：$\vec{v}_A=\vec{v}_A^r+\vec{v}_{tA}^e+\vec{v}_{\omega A}^e$

其中，点A到CM距离不变，因此v_A^r沿y方向；$v_{tA}^e=v_M$；



建立参考基B-e¹，转动系A-e².

(速度分析)

在基B-e¹对点M(动点)：$\vec{v}_{M}=\vec{v}_{1M}^r+\vec{v}_{1tM}^e+\vec{v}_{1\omega M}^e$. 其中$v_{1M}^r$沿x方向；$v_{1tM}^e=v_B=0$；$v_{1\omega M}^e=\omega_1\overline{BM}$

由于CM和AE始终保持平行，那夹角不变，所以$\omega_1=\omega$，也有$\omega_2=\omega$.

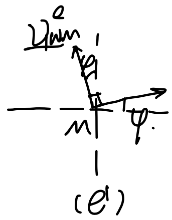
在基A-e²对点M(动点)：$\vec{v}_{2M}=\vec{v}_{2M}^r+\vec{v}_{2tM}^e+\vec{v}_{2\omega M}^e$.

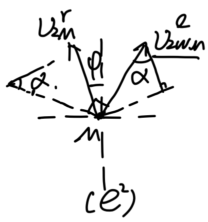
其中v_{2M}^r沿y方向；$v_{2tM}^e=v_A=0$；$v_{2\omega M}^e=\omega\overline{AM}$.

显然有$\vec{v}_{1M}=\vec{v}_{2M}=\vec{v}_M$，那么有4个非零量，其中2个未知，可解。

($\overline{EM}=a\cos\varphi$；$\overline{AM}=a\sqrt{1+\cos^2\varphi}$；$\overline{BM}=a(1+\sin\varphi)$)；

$\sin\alpha=\frac{\cos\varphi}{\sqrt{1+\cos^2\varphi}}$；$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+\cos^2\varphi}}$).





$\begin{cases} v_{x^2}: & v_{1M}^r=v_{2\omega M}^e\sin\alpha \\ v_{y^2}: & v_{1\omega M}^e=v_{2M}^r+v_{2\omega M}^e\cos\alpha \end{cases}$ ⇒ $\begin{cases} v_{1M}^r=\omega a\cos\varphi. \\ v_{2M}^r=\omega a\sin\varphi. \end{cases}$ 则有：$\begin{cases} v_{x^2}=\omega a\cos\varphi \\ v_{y^2}=\omega a(1+\sin\varphi) \end{cases}$ ⇒ $v=\omega a\sqrt{2+2\sin\varphi}$

(加速度分析)

在基B-e¹对点M有：$\vec{a}_{1M}=\vec{a}_{1M}^r+(\vec{a}_{1tM}^e+\vec{a}_{1\alpha M}^e+\vec{a}_{1\omega M}^e)+\vec{a}_{1M}^c$

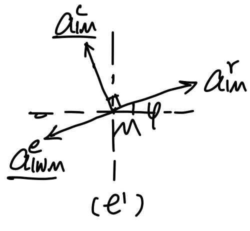
其中a_{1M}^r沿杆方向；$a_{1tM}^e=a_B=0$；同理，AE、BM具有相同的角加速度α；$a_{1\alpha M}^e=0$；$a_{1\omega M}^e=\omega^2\overline{BM}$；$a_{1M}^c=2\omega v_{1M}^r=2\omega^2a\cos\varphi$.

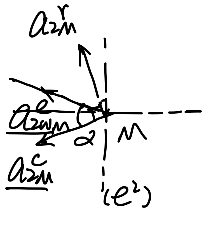
在基A-e²对点M有：$\vec{a}_{2M}=\vec{a}_{2M}^r+(\vec{a}_{2tM}^e+\vec{a}_{2\alpha M}^e+\vec{a}_{2\omega M}^e)+\vec{a}_{2M}^c$.

其中a_{2M}^r沿y方向；$a_{2tM}^e=a_A=0$；$a_{2\alpha M}^e=0$；$a_{2\omega M}^e=\omega^2\overline{AM}$. $a_{2M}^c=2\omega v_{2M}^r=2\omega^2a\sin\varphi$.

显然有$\vec{a}_{1M}=\vec{a}_{2M}=\vec{a}_M$，那么有：

$\begin{cases} a_{x^2}: & a_{1M}^r-a_{1\omega M}^e=-a_{2M}^c-a_{2\omega M}^e\cos\alpha \\ a_{y^2}: & a_{1M}^c=a_{2M}^r+a_{2\omega M}^e\sin\alpha \end{cases}$





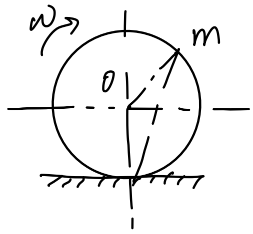
解得：$\begin{cases} a_{1M}^r=-\omega^2a\sin\varphi \\ a_{2M}^r=\omega^2a\cos\varphi. \end{cases}$ ⇒ $\begin{cases} a_{x^2}=-\omega^2a(1+2\sin\varphi). \\ a_{y^2}=2\omega^2a\cos\varphi \end{cases}$

⇓

$a_M=\omega^2a\sqrt{5+4\sin\varphi}$.

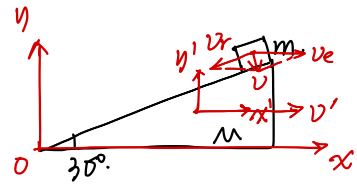
【刚体(系)对动点的动量矩】

o(题6-22). 一质量为m. 半径为R的圆环上固结质量为m的质点. 圆环在水平面上无滑动滚动. 求系统对环心O的绝对动量矩.



[矢量动力学基础]

0 (题6.33). 水平面上有个质量为4kg的斜面, 在斜面上放一个质量为2kg的方块. 方块由静止开始下滑, 只计方块与斜面之间摩擦力. $f_s=0.50$. 求方块脱离斜面时斜面的速度.



建立参考基和斜面的连体基. 系统初动能为 $T_0=0$.

终了动能为 $T=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}Mv'^2$.

在基 e' 下对方块有: $\vec{v}=\vec{v}_r+\vec{v}_e=\vec{v}_r+\vec{v}'$.

所以 $T=\frac{1}{2}m(v_r^2+v'^2-2v_rv'\cos30^\circ)+\frac{1}{2}Mv'^2$ …… ①

又由系统在水平方向外力主矢为0, 故动量守恒, 即:

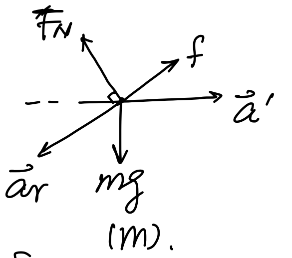
$mv_x+Mv'_x=m(v'-v_r\cos30^\circ)+Mv'=0$ …… ②

系统外力做功: $W=mgl\sin30^\circ-F_f\cdot l$ …… ③ 其中 $F_f=F_Nf_s$.

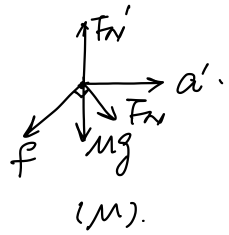
现求 F_N:

在基 e' 下对方块有: $\vec{a}=\vec{a}_r+\vec{a}_e=\vec{a}_r+\vec{a}'$, 由质心运动定理得 $m\vec{a}=\vec{F}_R$.

对 F_N 方向列式: $mg\cos30^\circ-F_N=ma'\sin30^\circ$



对斜面有: $\vec{a}'$ 如图所示, 且 $M\vec{a}'=\vec{F}_R'$.



对 a' 方向列式: $F_N\sin30^\circ-f\cos30^\circ=Ma'$.

其中 $f=F_Nf_s=\frac{1}{2}F_N$.

由以上两式解得: $F_N=17.03N$, 因此 $F_f=8.5N$

又 $T-T_0=T=W$ …… ④, 联立①②③④可解: $v'=0.28m/s$

【刚体动力学】单刚体

0 质量为m、半径为r的均质圆轮，在半径为R的圆弧面上只滚不滑.

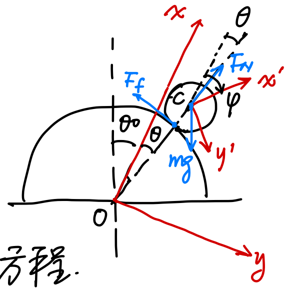
(1) 用一般方法建立圆轮的动力学方程.

(2) 化简该动力学方程.

(3) 初瞬时$\theta=\theta_0$，圆盘角速度为零. 计算圆轮滚到角θ位置瞬时的角速度.

(4) 求该瞬时圆轮受到的约束力.

(5) 计算圆轮与圆弧面脱离时的θ_1及此瞬时的角速度.



⇒(1) 建立如图所示参考系e、连体系e'. θ_0为初始状态角度.

则刚体的动力学方程：

$$\begin{cases} m\ddot{x}_c = F_N\cos\theta - mg\cos\theta_0 + F_f\sin\theta & ① \\ m\ddot{y}_c = F_N\sin\theta + mg\sin\theta_0 - F_f\cos\theta & ② \\ J\ddot{\varphi} = F_f r & ③ \end{cases}$$

⇒ 其有6个未知量. 需补充3个附加方程.

由滚动的啮合关系：$R\theta=(\varphi-\theta)r$ 即 $\theta=\frac{r}{R+r}\varphi$. ⇒ $\dot{\theta}=\frac{r}{R+r}\dot{\varphi}$，$\ddot{\theta}=\frac{r}{R+r}\ddot{\varphi}$ ④

且有位移约束方程：$x_c=(R+r)\cos\theta$，$y_c=(R+r)\sin\theta$

得加速度约束方程：
$$\begin{cases} \ddot{x}_c = -\ddot{\theta}(R+r)\sin\theta - \dot{\theta}^2(R+r)\cos\theta. & ⑤ \\ \ddot{y}_c = \ddot{\theta}(R+r)\cos\theta - \dot{\theta}^2(R+r)\sin\theta. & ⑥ \end{cases}$$

所以 ①~⑥式为刚体封闭的动力学方程.

(2) 由①②式解出F_N、F_f表达式为：
$$\begin{cases} F_N = m\ddot{x}_c\cos\theta + m\ddot{y}_c\sin\theta - mg\sin\theta_0\sin\theta + mg\cos\theta_0\cos\theta. \\ F_f = m\ddot{x}_c\sin\theta - m\ddot{y}_c\cos\theta + mg\sin\theta_0\cos\theta + mg\cos\theta_0\sin\theta. \end{cases} ⑦$$

代入③式得：$3\ddot{\varphi}r = 2g\sin\theta_0\cos\frac{r\varphi}{R+r} + 2g\cos\theta_0\sin\frac{r\varphi}{R+r} = 2g\sin\left(\frac{r}{R+r}\varphi+\theta_0\right)$ ⑧

(3) 初始：$\dot{\varphi}=0$. 由⑧式得：$\ddot{\varphi}=\frac{2g}{3r}\sin\left(\frac{r}{R+r}\varphi+\theta_0\right)$，又 $\ddot{\varphi}=\frac{d\dot{\varphi}}{dt}=\frac{d\dot{\varphi}}{d\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{dt}=\dot{\varphi}\frac{d\dot{\varphi}}{d\varphi}$

即 $\dot{\varphi}d\dot{\varphi}=\frac{2g}{3r}\sin\left(\frac{r}{R+r}\varphi+\theta_0\right)d\varphi$ (也可由 $\ddot{\varphi}d\dot{\varphi}=\frac{2g}{3r}\sin\left(\frac{r}{R+r}\varphi+\theta_0\right)\dot{\varphi}dt$ 得到).

又由 $\varphi=\frac{R+r}{r}\theta$ 得 $d\varphi=\frac{R+r}{r}d\theta$. 那么 $\dot{\varphi}d\dot{\varphi}=\frac{2g(R+r)}{3r^2}\sin(\theta+\theta_0)d\theta$. 两边积分：

$$\int_0^{\dot{\varphi}}\dot{\varphi}d\dot{\varphi}=\frac{2g(R+r)}{r^2}\int_0^{\theta}\sin(\theta+\theta_0)d\theta \Rightarrow \dot{\varphi}=\omega=\sqrt{\frac{4g(R+r)}{3r^2}(\cos\theta_0-\cos(\theta+\theta_0))} \quad ⑨$$

(4) 将⑤⑥代入⑦得：
$$\begin{cases} F_N = mg\cos(\theta_0+\theta) - m\dot{\theta}^2(R+r) = mg\cos(\theta_0+\theta) - m\dot{\varphi}^2\frac{r^2}{R+r} \\ F_f = mg\sin(\theta_0+\theta) - m\ddot{\theta}^2(R+r) = mg\sin(\theta_0+\theta) - m\dot{\varphi}^2\frac{r^2}{R+r} \end{cases} ⑩$$

代入⑨式得：$F_N=\frac{mg}{3}(7\cos(\theta_0+\theta)-4\cos\theta_0)$. $F_f=\frac{1}{3}mg\sin(\theta_0+\theta)$. ⑪

(5) 令⑪式中$F_N=0$得：$\theta_1=\arccos\left(\frac{4}{7}\cos\theta_0\right)$. 代入⑨式得：$\omega=\frac{1}{r}\sqrt{\frac{4}{7}g(R+r)\cos\theta_0}$.

△注意此题不要从参考系为↑→方向开始算. 要从一般位置开始算!!!

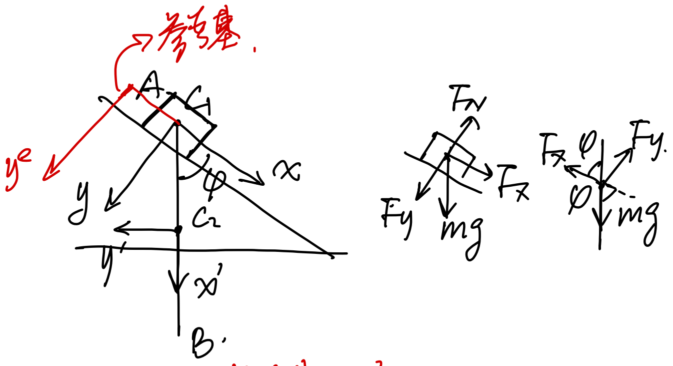
【刚体动力学】刚体系(双刚体)

例 质杆AB长为l，其A端与滑块质心C_1铰接，不计铰接摩擦，滑块沿倾角45°斜面无摩擦滑下，细杆与滑块质量均为m。

(1) 用一般方法建立系统的动力学方程

(2) 化简该动力学方程

(3) 如图所示由静止开始滑动，求此瞬时C_1、C_2加速度。



⇒ 建立参考基$\underline{e}$，连体基$\underline{e}$、$\underline{e}'$如图所示。

可写出刚体系的动力学方程：

$$\begin{cases} m\ddot{x}_{c_1} = F_x + \frac{\sqrt{2}}{2}mg & ① \\ m\ddot{y}_{c_1} = F_y + \frac{\sqrt{2}}{2}mg - F_N & ② \\ J\ddot{\varphi}_1 = 0 & ③ \\ m\ddot{x}_{c_2} = \frac{\sqrt{2}}{2}mg - F_x & ④ \\ m\ddot{y}_{c_2} = \frac{\sqrt{2}}{2}mg - F_y & ⑤ \\ J\ddot{\varphi} = F_x\sin\varphi\cdot\frac{l}{2} - F_y\cos\varphi\cdot\frac{l}{2} & ⑥ \end{cases}$$

⇒ $\ddot{x}$、$\ddot{y}$的方向都是对于参考基而言的。

共有9个未知量，6个方程，需补充3个方程

注意方向!!!

且有：$y_{c_1} \equiv 0 \Rightarrow \ddot{y}_{c_1} = 0$ ⑦

$$\begin{cases} x_{c_2} = \frac{l}{2}\cos\varphi + x_{c_1} \\ y_{c_2} = \frac{l}{2}\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{x}_{c_2} = -\frac{l}{2}\ddot{\varphi}\sin\varphi - \frac{l}{2}\dot{\varphi}^2\cos\varphi + \ddot{x}_{c_1} \\ \ddot{y}_{c_2} = \frac{l}{2}\ddot{\varphi}\cos\varphi - \frac{l}{2}\dot{\varphi}^2\sin\varphi \end{cases} \quad ⑧$$

则①~⑧为系统的动力学方程。

(2) 由④⑤得：
$$\begin{cases} F_x = \frac{\sqrt{2}}{2}mg - m\ddot{x}_{c_2} = \frac{l}{2}m\ddot{\varphi}\sin\varphi + \frac{l}{2}m\dot{\varphi}^2\cos\varphi - m\ddot{x}_{c_1} + \frac{\sqrt{2}}{2}mg \\ F_y = \frac{\sqrt{2}}{2}mg - m\ddot{y}_{c_2} = \frac{\sqrt{2}}{2}mg - \frac{l}{2}m\ddot{\varphi}\cos\varphi + \frac{l}{2}m\dot{\varphi}^2\sin\varphi \end{cases}$$

代入①式得：$\ddot{x}_{c_1} = \frac{l}{4}\ddot{\varphi}\sin\varphi + \frac{l}{4}\dot{\varphi}^2\cos\varphi + \frac{\sqrt{2}}{2}g$. ⇒ 消掉理想约束力$F_x$、$F_y$

所以，$F_x = \frac{l}{4}m\ddot{\varphi}\sin\varphi + \frac{l}{4}m\dot{\varphi}^2\cos\varphi$，将$F_x$、$F_y$代入式⑥得：仔细计算!!!

$$\ddot{\varphi}(5+3\cos^2\varphi) + 3\dot{\varphi}^2\sin\varphi\cos\varphi + 6\sqrt{2}\frac{g}{l}\cos\varphi = 0.$$

(3) 代入$\varphi = \frac{\pi}{4}$，$\dot{\varphi} = 0$得：$\ddot{\varphi} = -\frac{12g}{13l}$，代入$\ddot{x}_{c_1}$得 $\ddot{x}_{c_1} = \frac{8\sqrt{2}}{13}g$.

由于$\ddot{y}_{c_1} = 0$，所以滑块的质心加速度 $a_1 = \frac{8\sqrt{2}}{13}g$.

再代入$\ddot{x}_{c_2}$、$\ddot{y}_{c_2}$求得：$\ddot{x}_{c_2} = \frac{3\sqrt{2}}{13}g$，$\ddot{y}_{c_2} = \frac{5\sqrt{2}}{13}g$，所以杆的质心加速度 $a_2 = \frac{2\sqrt{17}}{13}g$

[碰撞]

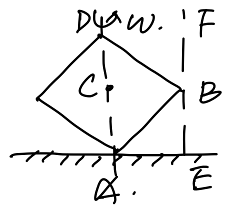
- 长为l的均质细杆OA无初速由铅垂静止位置绕下端的轴O倒下，杆上一点击中固定支座D，碰撞后杆弹回到水平位置，求：

(1) 碰撞时的恢复因数e

(2) 欲使轴承O处不受碰撞冲量的作用，支座D到固定铰链O距离为多少？

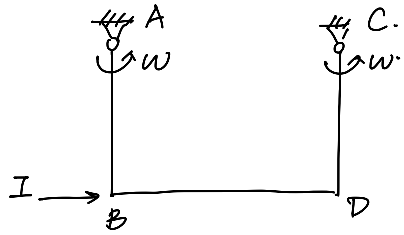
[题7-19] 碰撞：

① 正方形匀质薄板以角速度 ω_0 绕其铅垂线 AC 在光滑水平面上转动. 某瞬时、板的一角 B 突然被固定. 板绕过 B 点的轴 EF 转动，求此瞬时角速度.

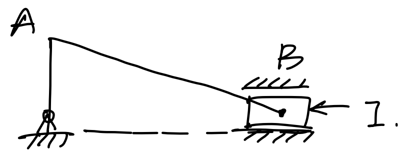


[题7-23].

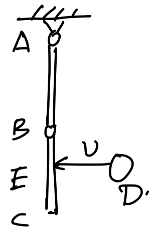
三根相同的匀质杆用铰连接. 求在水平冲量I作用下的杆AB角速度. 杆长l. 质量m.



[题7-25] 曲柄OA长r. 连杆AB长l. 曲柄、连杆、滑块质量均为m. 静止时在滑块上作用一冲量I. 试求曲柄OA的角速度.

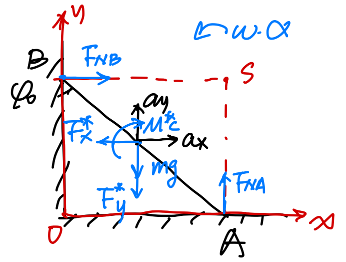


[题7-27] 两根相同的均质杆铰接后静止放在光滑的桌面上，A为固定铰支座，小球D以垂直于杆的速度 v 与BC的中点E发生碰撞，恢复因数 $e=0.5$，杆与小球质量为 m，$\frac{m}{2}$，杆长为 l，求碰撞两杆的角速度.



【题型：一般运动的动静法（达朗贝尔）】（已知运动求力）

0 均质杆AB，用达朗贝尔原理求解杆刚开始滑动时的角加速度与约束力。



首先进行受力分析，关键是求出达朗贝尔惯性力。

设定杆质心加速度如图所示，则对应有 $\vec{F}_x^* = -m\vec{a}_x$，$\vec{F}_y^* = -m\vec{a}_y$.

现求质心加速度：

易得质心坐标约束方程：$x_c = \frac{l}{2}\sin\varphi \quad y_c = \frac{l}{2}(1-\cos\varphi)$.

求导后有：
$$\begin{cases} \ddot{x}_c = \frac{l}{2}\ddot{\varphi}\cos\varphi - \frac{l}{2}\dot{\varphi}^2\sin\varphi = a_x \\ \ddot{y}_c = -\frac{l}{2}\ddot{\varphi}\sin\varphi + \frac{l}{2}\dot{\varphi}^2\cos\varphi = a_y \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} F_x^* &= \tfrac{1}{2}ml(\dot{\varphi}^2\sin\varphi - \ddot{\varphi}\cos\varphi) \\ F_y^* &= \tfrac{1}{2}ml(-\dot{\varphi}^2\cos\varphi + \ddot{\varphi}\sin\varphi). \end{aligned}$$

再由静力平衡求解 F_{NA}. F_{NB}：

由 $\Sigma F_{ix}=0$：$F_{NB} - F_x^* = 0$. ①

$\Sigma F_{iy}=0$：$F_{NA} - mg - F_y^* = 0$ ②

$\vec{M}_c^* = -J_c\vec{\alpha}$（方向相反），向质心简化后的惯性力主矩。

设杆的角加速度 α 与惯性力主矩 M_c^* 如图所示，有 $M_c^* = J_c\alpha = \frac{ml^2}{12}\ddot{\varphi}$.

为了减少未知量的出现，建立对S点的力矩平衡方程：

$$\Sigma M_{Sz}(F_i)=0：-M_c^* - F_x^*\cdot\frac{l}{2}\cos\varphi + F_y^*\cdot\frac{l}{2}(1-\sin\varphi) + mg\cdot\frac{l}{2}(1-\sin\varphi)=0 \quad ③$$

由初始时刻 $\varphi=\varphi_0$. $\dot{\varphi}=0$. 代入后由③可解得：$\ddot{\varphi}_0 = \frac{3g}{2l}\sin\varphi_0$.

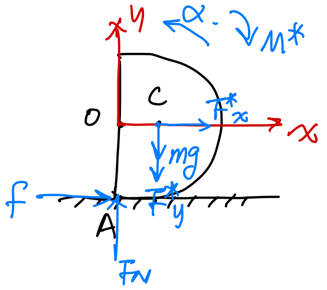
由①②可解得：$F_{NA} = mg(1-\frac{3}{4}\sin^2\varphi_0)$. $F_{NB} = \frac{3}{4}mg\sin\varphi_0\cos\varphi_0$.

(已知运动求力) 和前一题同一类型

① 质量为m半径为R的半圆柱在图示位置静止释放. 图中C为质心, $OC=\frac{4R}{3\pi}$. 为使半圆柱只滚动不滑动. 用达朗贝尔分析:

(1) 半圆柱的初始角加速度和地面对半圆柱的摩擦力.

(2) 半圆柱体与水平面之间摩擦因数最小值.

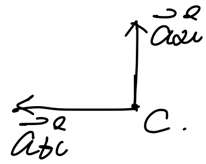


⇒(1) 思路同前一题类似.

建立连体基e. 则连体基角速度为0. 设初始角加速度为α.

则基点O有加速度 $a_0=\alpha R$. (滚动)

在基e下对点C有: $\vec{a}_e=\vec{a}_{tC}^{\,e}+\vec{a}_{wC}^{\,e}+\vec{a}_{\alpha C}^{\,e}$.



其中 $a_{tC}^e=a_0=\alpha R$. $a_{wC}^e=0$. $a_{\alpha C}^e=\alpha\cdot\frac{4R}{3\pi}$, 且

则有 $a_{ex}=\alpha R$. $a_{cy}=\alpha\cdot\frac{4R}{3\pi}$. 则 $F_x^*=m\alpha R$. $F_y^*=\frac{4mR\alpha}{3\pi}$. $M^*=J_C\alpha=\left[\frac{1}{2}-\left(\frac{4}{3\pi}\right)^2\right]mR^2\alpha$.

对半圆柱体作受力分析后由静力平衡.

$\sum F_{ix}=0$: $F_x^*+f=0$. ①

$\sum F_{iy}=0$: $F_N-mg-F_y^*=0$. ②

对点A取矩: $\sum M_{Az}(F_i)=0$: $F_x^*\cdot R+M^*+(F_y^*+mg)\cdot\frac{4R}{3\pi}=0$. ③

由③式可解得: $\alpha=-\frac{8g}{9\pi R}$. 因此 $F_x^*=-\frac{8mg}{9\pi}$. $F_y^*=-\frac{32mg}{27\pi^2}$.

由①② 得: $f=-F_x^*=\frac{8mg}{9\pi}=0.28mg$. $F_N=mg+F_y^*=0.88mg$.

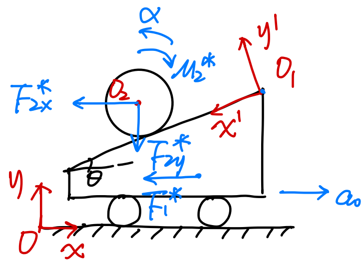
(2) $\mu=\frac{f}{F_N}=\frac{0.28mg}{0.88mg}=0.32$.

Δ 先找到 a_x. a_y. α 表达式. 没有可假设

由此得到 F_x^*. F_y^*. M^* 表达式. 列静力平衡方程.

通常由$\sum M=0$解出α. 再得到其他解.

○【题8-11】一质量为m的斜面置于光滑水平面上. 一质量为m_1的匀质圆柱置于斜面上. 其间摩擦因数为f. 用达朗贝尔分析圆柱在斜面上作纯滚动的条件.



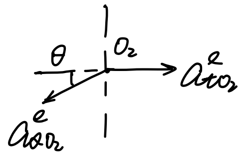
⇒ 斜面作平动, 圆柱作一般运动.

建立参考基e. 斜面连体基e'. 则 $\omega=v=0$.

设斜面加速度为a_0. 圆柱体角加速度为α. 则 $\vec{a}_{O_1}=\vec{a}_0$.

在基e'下对O_2点有: $\vec{a}_{O_2}=\vec{a}^e_{tO_2}+\vec{a}^e_{\omega O_2}+\vec{a}^e_{\alpha O_2}$.

其中 $a^e_{tO_2}=a_{O_1}=a_0$. $a^e_{\omega O_2}=0$. $a^e_{\alpha O_2}=\alpha R$ (纯滚动).



则 $a_{O_2x}=a^e_{tO_2}-a^e_{\alpha O_2}\cos\theta=a_0-\alpha R\cos\theta$

$a_{O_2y}=-a^e_{\alpha O_2}\sin\theta=-\alpha R\sin\theta$.

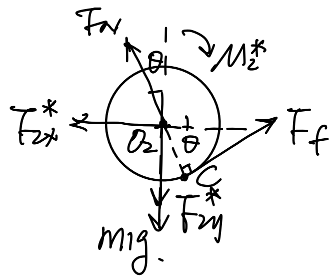
将圆柱体惯性力向O_2简化: $F_{2x}^*=m_1(a_0-\alpha R\cos\theta)$. $F_{2y}^*=m_1(-\alpha R\sin\theta)$, $M_2^*=\frac{1}{2}m_1R^2\alpha$.

斜面惯性力向质心简化: $F_1^*=ma_0$.

由静力平衡:

$\sum_i F_{ix}=0$: $-F_1^*-F_{2x}^*=0 \Rightarrow ma_0+m_1(a_0-\alpha R\cos\theta)=0$ ①

以圆柱体为研究对象有:



$\sum_i F_{ix'}=0$: $F_{2x}^*\cos\theta+F_{2y}^*\sin\theta+m_1g\sin\theta-F_f=0$ ②

↳ $m_1(a_0\cos\theta-\alpha R)=F_f$

$\sum_i M_{O_2z}(F_i)=0$: $F_fR-M_2^*=0 \Rightarrow F_f=\frac{1}{2}m_1R\alpha$ ③

由①②③可解出: $\alpha=\dfrac{2(m+m_1)g\sin\theta}{3R(m+m_1)-2Rm_1\cos^2\theta}$

$$a_0=\frac{2m_1g\sin\theta\cos\theta}{3(m+m_1)-2m_1\cos^2\theta}$$

再对圆柱体有: $\sum_i F_{iy'}=0$: $F_N+F_{2x}^*\sin\theta-(m_1g+F_{2y}^*)\cos\theta=0$.

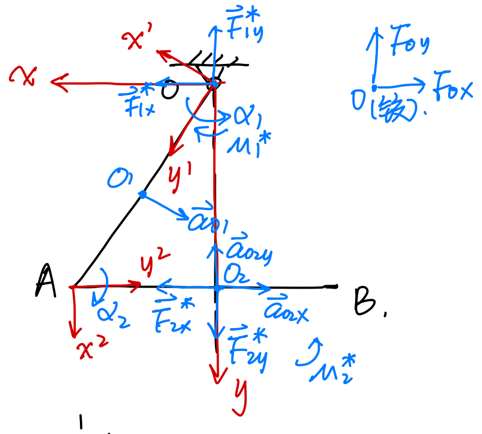
可得: $F_f=\frac{1}{2}m_1R\alpha=\dfrac{m_1(m+m_1)g\sin\theta}{3(m+m_1)-2m_1\cos^2\theta}$

$$F_N=m_1g\cos\theta-m_1a_0\sin\theta=\frac{(m_1+3m)m_1g\cos\theta}{3(m+m_1)-2m_1\cos^2\theta}$$

纯滚动的条件为: $F_f\le F_Nf$. 则 $f\ge\dfrac{F_f}{F_N}=\dfrac{m_1+m}{m_1+3m}\tan\theta$.

OA作定轴转动. AB作一般运动.

[例8-15] 两根质量为m、长为l的均质杆OA、AB以铰链连接，求在图示位置由初速开始运动时两杆的瞬时角速度.



⇒ 建立参考基e. 杆OA、AB的连体基e^1、e^2. 则 $\omega_1=\omega_2=0$.

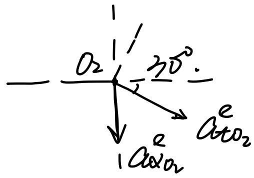
设杆OA、AB角加速度为α_1、α_2. 则在e下对O_1点有: $a_{O_1}=\frac{1}{2}\alpha_1 l$.

将杆OA惯性力向O点简化: $F^*_{1x}=m a_{O_1}\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{4}m\alpha_1 l$.

$F^*_{1y}=m a_{O_1}\sin 30^\circ=\frac{1}{4}m\alpha_1 l$.

$M_1^*=J_O\alpha_1=\frac{1}{3}ml^2\alpha_1$. 方向如图.

基e下对点O_2分析: $\vec{a}_{O_2}=\vec{a}^e_{tO_2}+\vec{a}^e_{\omega O_2}+\vec{a}^e_{\alpha O_2}$



其中 $a^e_{tO_2}=a_B=\alpha_1 l$. $a^e_{\omega O_2}=0$. $a^e_{\alpha O_2}=\frac{1}{2}\alpha_2 l$. 且

则可得: $a_{O_2x}=a^e_{tO_2}\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}\alpha_1 l$.

$a_{O_2y}=-a^e_{\alpha O_2}-a^e_{tO_2}\sin 30^\circ=-\frac{1}{2}(\alpha_1+\alpha_2)l$.

将AB惯性力向点O_2简化: $F^*_{2x}=m a_{O_2x}=\frac{\sqrt{3}}{2}m\alpha_1 l$.

$F^*_{2y}=m a_{O_2y}=-\frac{1}{2}m(\alpha_1+\alpha_2)l$.

$M_2^*=J_{O_2}\alpha_2=\frac{1}{12}ml^2\alpha_2$. 方向如图.

由静力平衡: 系统对O点取矩:

$\sum M_{Oz}(F_i)=0$: $mg\cdot l\cos 60^\circ-F^*_{2x}\cdot l\cos 30^\circ-M_1^*+M_2^*=0$.

↳ $\frac{1}{2}mgl-\frac{13}{12}ml^2\alpha_1+\frac{1}{12}ml^2\alpha_2=0$.

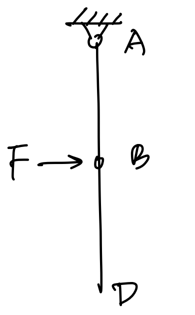
对杆BC分析: 对A点取矩:

$\sum M_{Az}(F_i)=0$: $mg\cdot\frac{l}{2}+F^*_{2y}\cdot\frac{l}{2}-M_2^*=0 \Rightarrow \frac{1}{2}mgl+\frac{1}{4}ml^2\alpha_1+\frac{1}{6}ml^2\alpha_2=0$.

由以上两式可解出: $\alpha_1=\frac{18g}{55l}$. $\alpha_2=\frac{69g}{55l}$.

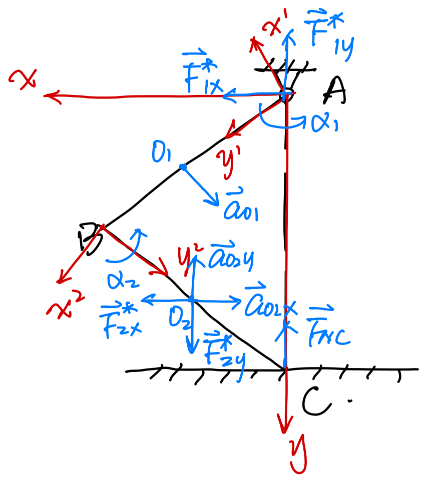
同类型的题目:

[题8-10]. 长l、质量为m的均质杆AB、BD在铅垂面内用光滑铰链B连接. 端A用铰链悬挂. 今在B点作一力F. 用达朗贝尔求此瞬时两杆角加速度.



(已知运动求力) 和前一题同一类型　AB作定轴转动. BC作一般运动

O [题8-8] 长l. 重G的两根相同的匀质杆AB与CD铰接, 端A用铰链悬挂. 另一端C置于光滑水平面上. 利用达朗贝尔求从图示位置无初速度开始运动时, 水平面对杆BC约束力.



⇒ 如图建立参考基e. 杆AB, BC连体基e^1, e^2.

由题知基e^1.e^2角速度 $\omega_1=\omega_2=0$. 设其角加速度分别为α_1.α_2.

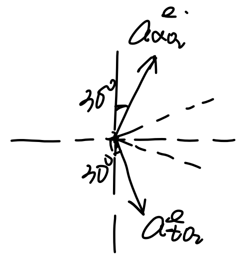
则在基e^1下对点O_1(给定点): $a_{O1}=\frac{1}{2}\alpha_1 l$. 方向如图.

对点B(给定点): $a_B=\alpha_1 l$.

将其惯性力向A点简化. 得 $F^*_{1x}=m a_{O1}\sin 30^\circ=\frac{1}{4}m\alpha_1 l$.

$F^*_{1y}=m a_{O1}\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{4}m\alpha_1 l$.

$M_1^*=J_A\alpha_1=\frac{1}{3}ml^2\alpha_1$, 方向如图.



在基e^2下对点O_2(给定点): $\vec{a}_{O_2}=\vec{a}^e_{tO_2}+\vec{a}^e_{\omega O_2}+\vec{a}^e_{\alpha O_2}$.

其中 $a^e_{tO_2}=a_B=\alpha_1 l$. $a^e_{\omega O_2}=0$. $a^e_{\alpha O_2}=\frac{1}{2}\alpha_2 l$. 且.

则对O_2点有: $a_{O_2x}=\frac{1}{2}(a^e_{\alpha O_2}+a^e_{tO_2})=\frac{1}{4}\alpha_2 l+\frac{1}{2}\alpha_1 l$.

$a_{O_2y}=\frac{\sqrt{3}}{2}(a^e_{\alpha O_2}-a^e_{tO_2})=\frac{\sqrt{3}}{4}\alpha_2 l-\frac{\sqrt{3}}{2}\alpha_1 l$.

方向如图所示. 将其惯性力向O_2点简化. 得 $F^*_{2x}=\frac{1}{4}m\alpha_2 l+\frac{1}{2}m\alpha_1 l$

$F^*_{2y}=\frac{\sqrt{3}}{4}m\alpha_2 l-\frac{\sqrt{3}}{2}m\alpha_1 l$.

$M_2^*=J_{O_2}\alpha_2=\frac{1}{12}ml^2\alpha_2$. 方向如图所示.

由静动平衡: 系统对A点列力矩平衡:

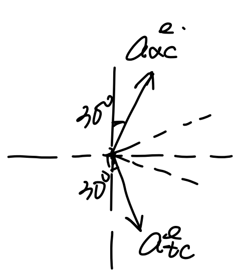
$\sum M_{Az}(F_i)=0$: $2G\cdot\frac{l}{2}\sin 60^\circ+F^*_{2y}\cdot\frac{l}{2}\sin 60^\circ-F^*_{2x}\cdot\frac{l}{2}\cos 60^\circ-M_1^*-M_2^*=0$.

↳ $\frac{\sqrt{3}}{2}Gl-\frac{13}{12}m\alpha_1 l^2-\frac{1}{12}m\alpha_2 l^2=0$.

对杆BC分析: 对点B列力矩平衡式:

$\sum M_{Bz}(F_i)=0$: $G\cdot\frac{l}{2}\cos 30^\circ+F^*_{2y}\cdot\frac{l}{2}\cos 30^\circ+F^*_{2x}\cdot\frac{l}{2}\cos 60^\circ-F_{NC}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}l+M_2^*=0$

↳ $\frac{1}{3}m\alpha_2 l^2+\frac{\sqrt{3}}{4}Gl-\frac{1}{4}m\alpha_1 l^2-\frac{\sqrt{3}}{2}F_{NC}l=0$.



还需补充方程: 基e^2下对点C分析:

$\vec{a}_C=\vec{a}^e_{tC}+\vec{a}^e_{\omega C}+\vec{a}^e_{\alpha C}$. 其中 $a^e_{tC}=a_B=\alpha_1 l$. $a^e_{\omega C}=0$. $a^e_{\alpha C}=\alpha_2 l$.

由于C点加速度水平向右. 则 $a^e_{\alpha C}\cos 30^\circ=a^e_{tC}\cos 30^\circ$. 即 $\alpha_1=\alpha_2$

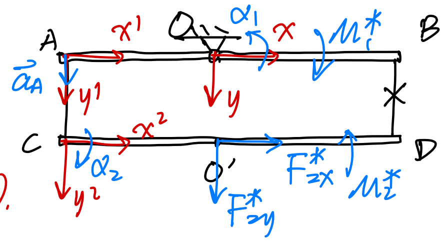
由3式可解出 $F_{NC}=\frac{4}{7}G$.

相比前一道题. 第二个补充方程

多了一个未知量F_{NC}. 故还要补充一个方程.

(已知运动求力) 和前一题同一类型　　AB定轴转动. CD一般运动

○【题8-7】如图所示，长l、重G的两根相同匀质杆AB、CD以软绳AC、BD相连，杆AB中点用铰链O悬挂，且处于平衡。用达朗贝尔求当BD被剪断瞬间点B、D的加速度。



⇒ 建立参考基e，两杆的连体基e^1、e^2。则 $\omega_1=\omega_2=0$。

设杆AB、CD的角加速度分别为α_1、α_2，正向如图所示。

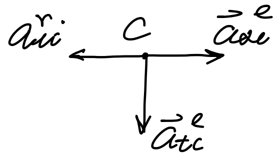
在基e下对点A有：$\vec a_A = \vec a_{\alpha A}^e$，$a_{\alpha A}^e = \frac12\alpha_1 l$。

(软绳相连，相对作圆周运动)

在基e^1下对点C(动点)有：$\vec a_C = \vec a_{tC}^e + \vec a_{\omega C}^e + \vec a_{\alpha C}^e + \vec a_C^r + \vec a_C^c$.

其中 $a_{tC}^e = a_A = \frac12\alpha_1 l$，$a_{\omega C}^e=0$，$a_{\alpha C}^e = \alpha_1\overline{AC}$，$a_C^c=0$。由点C相对A作圆周运动，则 $\vec a_C^r = \vec a_{\alpha C}^r + \vec a_{nC}^r$

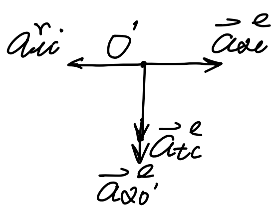
又 $a_{nC}^r=0$。则 $\vec a_C = \vec a_A + \vec a_{nC}^r + \vec a_{\alpha C}^e$.



在基e^2下对点O'有：$\vec a_{O'} = \vec a_{tO'}^e + \vec a_{\omega O'}^e + \vec a_{\alpha O'}^e$.

其中 $a_{tO'}^e = a_C$，$a_{\omega O'}^e=0$，$a_{\alpha O'}^e = \frac12\alpha_2 l$.

即 $\vec a_{O'} = \vec a_C + \vec a_{\alpha O'}^e$.



将AB惯性力向O点简化，则 $F_1^*=0$，$M_1^* = J_O\alpha_1 = \frac1{12}ml^2\alpha_1$，方向如图。

CD惯性力向O'点简化，则 $F_{2x}^* = ma_{O'x} = m(\alpha_1\overline{AC} - a_{\alpha C}^r)$.

$F_{2y}^* = -m(\frac12\alpha_2 l + \frac12\alpha_1 l) = \frac12(\alpha_1+\alpha_2)ml$

$M_2^* = J_{O'}\alpha_2 = \frac1{12}ml^2\alpha_2$，方向如图。

对系统由静力平衡，对点O取矩：

$\sum M_O(F_i)=0$：$-M_1^* + M_2^* + F_{2x}^*\cdot\overline{AC}=0$ ⇒ $\frac1{12}ml^2(\alpha_2-\alpha_1) = m(\alpha_1\overline{AC} - a_{\alpha C}^r)\overline{AC}$

对杆CD分析，对点C取矩：$F_{2y}^*\cdot\frac12 l + mg\cdot\frac12 l - M_2^*=0$.

↳ $\frac14 m(\alpha_1+\alpha_2)l^2 + \frac12 mgl = \frac1{12}ml^2\alpha_2$

且 $\sum F_x=0$：$F_{2x}^*=0$ ⇒ $a_{\alpha C}^r = \alpha_1\overline{AC}$.

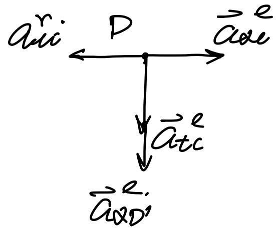
由以上3式可解得：$\alpha_1=\alpha_2=\frac{6g}{7l}$，$a_{\alpha C}^r = \frac{6g}{7l}\overline{AC}$.

由杆AB定轴转动，则 $a_B = \frac12\alpha_1 l = \frac37 g$

在基e^2下对点D有：$\vec a_D = \vec a_{tD}^e + \vec a_{\omega D}^e + \vec a_{\alpha D}^e$ 其中 $a_{tD}^e = a_C$，$a_{\omega D}^e=0$，$a_{\alpha D}^e = \alpha_2 l$.

则 $a_{Dx} = a_{\alpha C}^e - a_{\alpha C}^r = \alpha_1\overline{AC} - a_{\alpha C}^r = 0$.

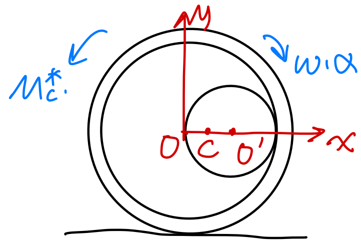
$a_{Dy} = a_{tC}^e + a_{\alpha D}^e = \frac12\alpha_1 l + \alpha_2 l = \frac97 g$



⇒ $a_D = \frac97 g$，方向向下。

[题型：求达朗贝尔惯性力系主矢和主矩]

质量m，半径R的圆环O，内刚连一个半径为$\frac{R}{2}$，质量为m的匀质圆盘，图示瞬时，圆环角速度为ω，角加速度为α，计算系统的惯性力系的主矢、主矩。

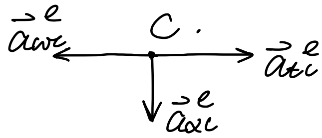


建立圆环连体基e，易知系统质心为C点，且$OC=\frac{R}{4}$。

由题可知基e角速度为ω，角加速度为α，现求系统质心加速度：

在基e下对点C有：

$\vec{a}_C=\vec{a}^e_{tC}+\vec{a}^e_{\omega C}+\vec{a}^e_{\alpha C}$，且

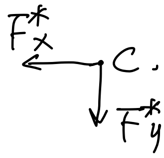


$a^e_{tC}=a_O=\alpha R$（瞬心）。

$a^e_{\omega C}=\omega^2 r=\frac{1}{4}\omega^2 R$，$a^e_{\alpha C}=\frac{1}{4}\alpha R$。

则C点：$a_{Cy}=-a^e_{\alpha C}=-\frac{1}{4}\alpha R$，$a_{Cx}=a^e_{tC}-a^e_{\omega C}=\alpha R-\frac{1}{4}\omega^2 R$。

因此 $F^*_x=2ma_{Cx}=2m\alpha R-\frac{1}{2}m\omega^2 R$，$F^*_y=2ma_{Cy}=-\frac{1}{2}m\alpha R$。方向为：



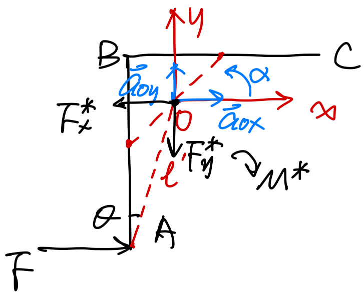
系统对质心C有：$J_C=[mR^2+m(\frac{R}{4})^2]+[\frac{1}{2}m(\frac{R}{2})^2+m(\frac{R}{4})^2]=\frac{5}{4}mR^2$

则 $M^*_C=J_C\alpha=\frac{5}{4}mR^2\alpha$，方向如图。

[题8-2]

长为l，质量为m的匀质杆AB与BC在点B连成直角后放在光滑水平面上，在A端作用一与AB垂直的水平力F，用达朗贝尔原理求A点加速度。

建系连体基e，系统质心为O点。（已知力求运动）



设系统质心加速度为a_{Ox}、a_{Oy}，角加速度为α。

则 $F^*_x=2ma_{Ox}$，$F^*_y=2ma_{Oy}$，$M^*=J_O\alpha=\frac{5}{12}ml^2\alpha$。

由静力学平衡可得：

$\sum_i F_{ix}=0$：$-F^*_x+F=0$。 $\sum_i F_{iy}=0$：$-F^*_y=0$。 F_N???

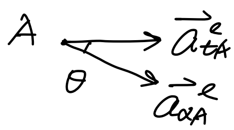
$\sum_i M_O(F_i)=0$：$-M^*+F\frac{3l}{4}=0$

由此解得：$a_{Ox}=\frac{F^*_x}{2m}=\frac{F}{2m}$，$a_{Oy}=0$，$\alpha=\frac{9F}{5ml}$

在连体基e下对点A有：

$\vec{a}_A=\vec{a}^e_{tA}+\vec{a}^e_{\omega A}+\vec{a}^e_{\alpha A}$，其中$a^e_{tA}=a_O=a_{Ox}=\frac{F}{2m}$，$a^e_{\omega A}=0$，$a^e_{\alpha A}=\alpha l'$

$$\Rightarrow\begin{cases}a_{Ax}=a_{Ox}+\alpha l'\cos\theta=\frac{37F}{20m}\\ a_{Ay}=-\alpha l'\sin\theta=-\frac{9F}{20m}\end{cases}$$

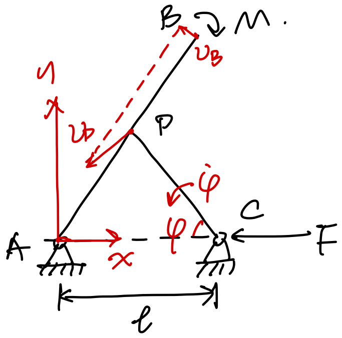


Δ { 已知平衡分析主动力之间关系.
已知主动力求平衡位置.

[题型：虚位移原理分析主动力]

0 分析主动力之间关系. [题8-13]

(1) ⇒ 该系统有一个自由度. 选取图示φ作为广义坐标，建立参考系.



由速度关系可写出：

$$v_D=\dot\varphi l. \qquad u_B=\frac{v_D\sin(\frac{\pi}{2}-\varphi)}{l}=\dot\varphi\cos\varphi$$

那么有：$\delta x_D = v_{Dx} = -\dot\varphi l\sin\varphi = -l\sin\varphi\,\delta\varphi$

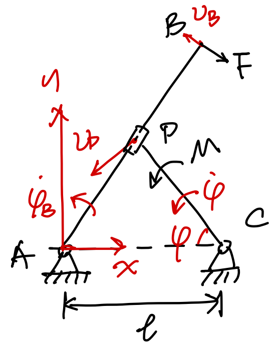
$\delta y_D = v_{Dy} = \dot\varphi l\cos\varphi = l\cos\varphi\,\delta\varphi$

$\delta\varphi_B = \dot\varphi_B = \cos\varphi\,\delta\varphi$ ⇒ 与广义坐标虚位移之间的关系.

由虚位移原理：$-M\delta\varphi_B - F\delta x_D = 0$.

代入得：$-M\cos\varphi\,\delta\varphi + Fl\sin\varphi\,\delta\varphi = 0 \xRightarrow{\varphi=60^\circ} M=\sqrt{3}Fl$

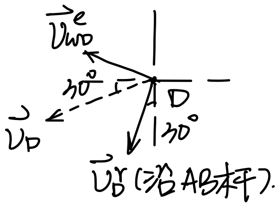
(2) 注意D点是套筒. 令D点在套筒上.



选取CD杆上φ为广义坐标, 在参考基下D点速度为图示. $v_D=\dot\varphi l$.

在基AB杆下讨论D点(动点)：

$\vec v_D = \vec v_{eO}^e + \vec v_{\omega D}^e + \vec v_D^r$. 且有关系：



其中$v_{eO}^e=0$. $v_{\omega D}^e=\omega_B l$. 由右图可得：

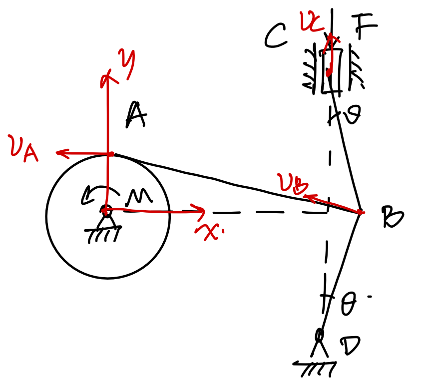
$$\begin{cases} v_{\omega D}^e\cos30^\circ = v_D^r\cos60^\circ \\ v_{\omega D}^e\cos60^\circ + v_D^r\cos30^\circ = v_D = \dot\varphi l \end{cases}$$

解出 $v_{\omega D}^e=\frac{1}{2}\dot\varphi l$. 则 $\dot\varphi_B=\frac{1}{2}\dot\varphi$. 所以 $v_B=\dot\varphi_B\cdot 2l=\dot\varphi l$

⇒ $\delta s_B = l\delta\varphi_B = l\delta\varphi$ (虚位移)

由虚位移原理：$F\delta s_B + M\delta\varphi = 0$. 代入得：$-Fl\delta\varphi + M\delta\varphi = 0 \Rightarrow M = Fl$.

(3) 选取θ为广义坐标. 则 $v_B=\dot\theta l$. 则有：



$v_A\cos\varphi = v_B\cos(\theta-\varphi) \Rightarrow \dot\varphi_A = \dot\theta l\frac{\cos(\theta-\varphi)}{r\cos\varphi}$

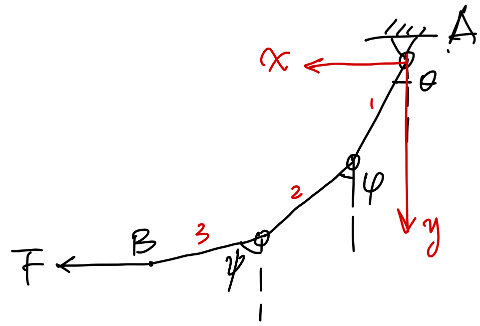
$v_C\cos\theta = v_B\cos[\frac{\pi}{2}-2\theta] \Rightarrow \dot y_C = \dot\theta l\frac{\sin2\theta}{\cos\theta}$.

可得：
$$\begin{cases} \delta\varphi_A = \dfrac{l\cos(\varphi-\theta)}{r\cos\varphi}\delta\theta. \\ \delta y_C = 2\sin\theta\, l\,\delta\theta. \end{cases}$$

由 $M\delta\varphi_A + F\delta y_C = 0$ 得 $M=\dfrac{2Fr}{\tan\varphi+\cot\theta}$

【题型：利用虚位移原理求平衡位置】

○ 三根相同匀质杆用铰链连接，求平衡时的位形.



① 令 $\dot{\varphi}=\dot{\psi}=0$，则有：

$\delta y_1=-\frac{l}{2}\sin\theta\,\delta\theta$，$\delta y_2=-l\sin\theta\,\delta\theta$，$\delta y_3=-l\sin\theta\,\delta\theta$.

$\delta x_B=l\cos\theta\,\delta\theta$.

$\Rightarrow \delta W_\theta=(-\frac{l}{2}\sin\theta G-l\sin\theta G-l\sin G+l\cos\theta F)\delta\theta$

② 令 $\dot{\psi}=\dot{\theta}=0$，有：

$\delta y_1=0$，$\delta y_2=-\frac{l}{2}\sin\varphi\,\delta\varphi$. $\delta y_3=-l\sin\varphi\,\delta\varphi$. $\delta x_B=l\cos\varphi\,\delta\varphi$.

$\Rightarrow \delta W_\varphi=(-\frac{l}{2}\sin\varphi G+l\cos\varphi G)\delta\varphi$

③ 令 $\dot{\varphi}=\dot{\theta}=0$，有：

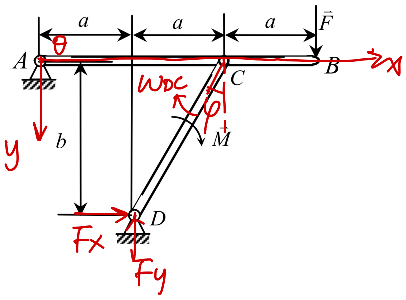
$\delta y_1=0$. $\delta y_2=0$. $\delta y_3=-\frac{l}{2}\sin\psi\,\delta\psi$. $\delta x_B=l\cos\psi\,\delta\psi$.

$\Rightarrow \delta W_\psi=(-\frac{l}{2}\sin\psi G+l\cos\psi F)\delta\psi$

分别由 $Q_\theta=Q_\varphi=Q_\psi=0$ 得：$\theta=\arctan\frac{2F}{5G}$，$\varphi=\arctan\frac{2F}{3G}$. $\psi=\arctan\frac{F}{2G}$.

[题型：虚位移原理求理想约束力]

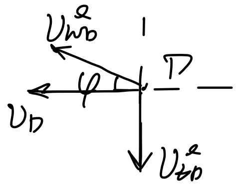
0 一平面机构在图示位置平衡. 杆AB, CD由铰C联结. A, D端为固定铰支座. 杆AB作用一铅垂力. CD上作用一力偶. 求支座D处的约束力. 不计杆重.



① 选取θ为广义坐标. 则 $v_C = 2a\dot\theta$. $v_B = 3a\dot\theta$. 方向向下.

以C为基点建立BC连体基, 则有:

$\vec v_D = \vec v_{tD}^e + \vec v_{wD}^e$, 且:



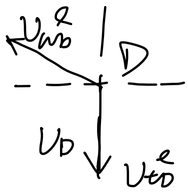
其中 $v_{tD}^e = v_C = 2a\dot\theta$. $v_{wD}^e = \omega_{DC}\sqrt{a^2+b^2}$.

则有: $\begin{cases} v_{wD}^e \sin\varphi = v_{tD}^e \\ v_D = v_{wD}^e \cos\varphi \end{cases}$ ⇒ 解得: $\omega_{DC} = 2\dot\theta$. $v_D = 2b\dot\theta$.

则 $\delta x_D = 2b\delta\theta$. $\delta y_B = 3a\delta\theta$. $\delta\varphi = 2\delta\theta$.

由 $-F_x\delta x_B + M\delta\varphi + F\delta y_B = 0$ 得: $F_x = \frac{2M+3a}{2b}$.

② 在BC连体基下对D有: $\vec v_D = \vec v_{tD}^e + \vec v_{wD}^e$. 且.

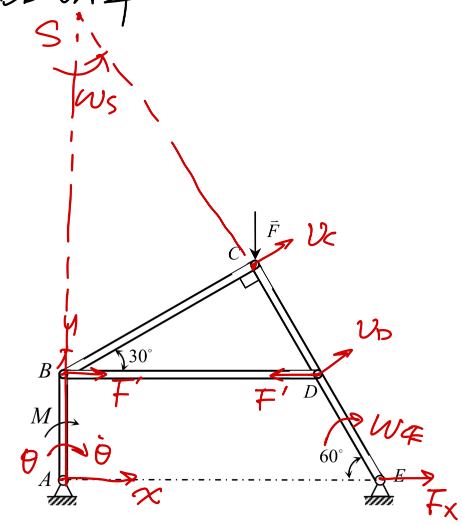


显然 $v_{wD}^e = 0$ 即CD作瞬时平动. $v_D = v_{tD}^e = v_C = 2a\dot\theta$.

⇒ $\delta y_D = 2a\delta\theta$. $\delta\varphi = 0$. $\delta y_B = 3a\delta\theta$.

由 $-F_y\delta y_D + M\delta\varphi + F\delta y_B = 0$ 得: $F_y = \frac{3}{2}F$.

○ 一平面平衡结构，受力F、力偶M。AB=L，BC=2L，CD=ED，BD为水平，不计自重。求(1) BD杆内力 (2) 铰链E处水平约束力。



⇒① 建立参考系，选取θ为广义坐标，则 $v_B=\dot\theta L$。

杆BC的瞬心为点S，易得 $\omega_S=\frac{v_B}{4L}$。

则 $v_C=2\sqrt3 L\cdot\omega_S=\frac{\sqrt3}{2}v_B=\frac{\sqrt3}{2}\dot\theta L$。

⇒ $\omega_{CE}=\frac{v_C}{\frac{4\sqrt3}{3}L}=\frac{3}{8}\dot\theta$，则 $v_D=\omega_{CE}\cdot\frac{2\sqrt3}{3}L=\frac{\sqrt3}{4}\dot\theta L$。

有 $\delta x_D=\frac{\sqrt3}{4}L\delta\theta\cdot\cos30°=\frac{3}{8}L\delta\theta$，$\delta x_B=L\delta\theta$

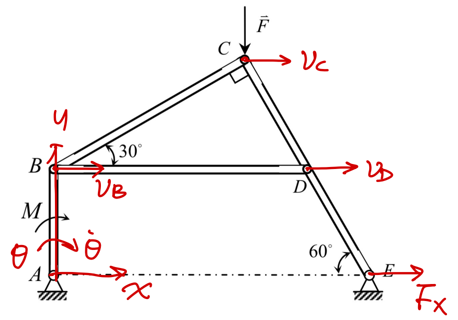
$\delta y_C=\frac{\sqrt3}{2}L\delta\theta\cdot\sin30°=\frac{\sqrt3}{4}L\delta\theta$

⇒ $-F'L\delta\theta-F\frac{\sqrt3}{4}L\delta\theta+F'\cdot\frac{3}{8}L\delta\theta+M\delta\theta=0$ 解得：$F'=\frac{2\sqrt3F-8M}{5}$。

② 分析易知BCDE作瞬时平动，即 $v_E=v_B=\dot\theta L$

$\delta y_C=0$，$\delta x_E=L\delta\theta$。

由 $M\delta\theta+F\delta y_C+F_x\delta x_E=0$ 得：$F_x=-\frac{M}{L}$

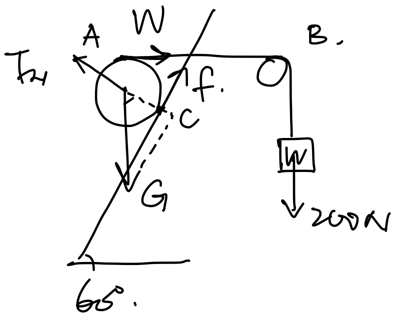


△ 注意两次分析时系统的运动状态不同!!!

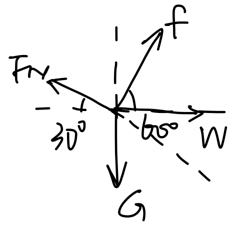
①中由于E处固定故CE作定轴转动，②中则不然。

Δ期末复习.

※ 已知物块重200N. 圆柱体C半径为20cm. 与斜面的静摩擦因数为0.6. 忽略滑轮摩擦. 求平衡时圆柱体C的重量



首先列力平衡关系式:



$\sum F_{ix}=0$: $F_N\cos30° = f\cos60° + W$

$\frac{\sqrt{3}}{2}F_N = \frac{1}{2}f + 200 \Rightarrow \underline{\sqrt{3}F_N = f + 400}$.

$\sum F_{iy}=0$: $\frac{\sqrt{3}}{2}f + \frac{1}{2}F_N = G \Rightarrow \underline{\sqrt{3}f + F_N = 2G}$.

① 当f达到最大时有$f=0.6F_N$. 代入上式中可求得:

$f=211.98N$. $G=360.23N$. $F_N=353.3N$.

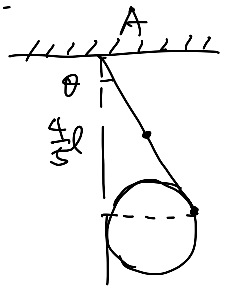
此为不滑动条件. 当$G<360.23N$时. $f<211.98N$ 均不滑动

② 列力矩平衡式: $f=W=200N$ 此为不滚动条件.

$f=200N<211.98N$. 满足平衡条件(不滑不滚).

将$f=200N$代入力平衡式得: $\underline{G=346.4\ N}$.

19.



$\cos\theta = \frac{4}{5}$.

$h_1 = \frac{2}{5}l$. $h_2 = \frac{1}{2}l$.

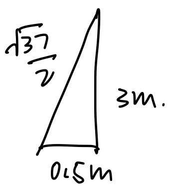
$\Delta h = \frac{1}{10}l$.

$m_{AB} g \Delta h = \frac{1}{2} J_A \omega^2$

$J_A = \frac{1}{3}ml^2 + (\frac{1}{2}mr^2 + m(\frac{\sqrt{37}}{2})^2)$

$= \frac{1}{3}\times 6\times 9 + (\frac{1}{2}\times 2\times\frac{1}{4} + 2\times\frac{37}{4}) = 36.75$.

$6\times 10\times 0.3 = \frac{1}{2}\times 36.75\times \omega^2 \Rightarrow \omega = 0.98974 \approx 1.0\ rad/s$



20.