函数

1. 利用AG不等式证明不等式.

(1) $n! \le \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$. $n\in N_+$. (2) $\sqrt[n]{n}-1 < \frac{2}{\sqrt{n}}$. $n\in N_+$.

(2) $\Rightarrow \sqrt[n]{n} < 1+\frac{2}{\sqrt{n}}$. $\sqrt[n]{\sqrt{n}\cdot\sqrt{n}\cdot\underbrace{1\cdots1}_{n-2个1}} < \frac{\sqrt{n}+\sqrt{n}+1+\cdots+1}{n} = \frac{2\sqrt{n}+n-2}{n} = \frac{2}{\sqrt{n}}+1-\frac{2}{n} < \frac{2}{\sqrt{n}}+1$.

2. 证明不等式. $\frac{1}{2\sqrt{n}} < \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$. $(n\ge 2)$

$\Rightarrow (2n-1)(2n+1) = 4n^2-1 < 4n^2 = (2n)^2$.

$(2n+1)[(2n-1)!!]^2 = (2n+1)(1^2\cdot 3^2\cdot 5^2\cdots(2n-1)^2) = (2n+1)[(1\cdot 3)\cdot(3\cdot 5)\cdots(2n-1)(2n+1)]$

$\le (2n+1)(2^2\cdot 4^2\cdots(2n)^2) = (2n+1)[(2n)!!]^2 \le [(2n)!!]^2 \Rightarrow \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \le \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$

由 $\frac{m}{m+1} < \frac{m+1}{m+2}$ 及 $\frac{m}{m+1} > \frac{m-1}{m}$ 可得:

$\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} = \frac{1\times 3\times 5\times\cdots\times(2n-1)}{2\times 4\times 6\times\cdots\times(2n)} < \frac{2\times 4\times 6\times\cdots\times(2n)}{3\times 5\times 7\times\cdots\times(2n+1)} = \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\cdot\frac{1}{2n+1} \Rightarrow \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$

$\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} = \frac{1\times 3\times 5\times\cdots\times(2n-1)}{2\times 4\times 6\times\cdots\times(2n)} > \frac{1\times 2\times 4\times\cdots\times(2n-2)}{1\times 3\times 5\times\cdots\times(2n-1)} = \frac{2\times 4\times\cdots\times(2n)}{3\times 5\times\cdots\times(2n-1)}\cdot\frac{1}{2n} = \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\cdot\frac{1}{2n} \Rightarrow \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} > \frac{1}{2\sqrt{n}}$

3. 证明 $\frac{k^n}{n^n} < \frac{(k+1)^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}$. (和1.(2)类似)

$\Rightarrow \sqrt[n+1]{\frac{k^n}{n^n}} < \frac{k+1}{n+1} \Rightarrow \sqrt[n+1]{\frac{k^n}{n^n}} = \sqrt[n+1]{\frac{k}{n}\cdot\frac{k}{n}\cdots 1} < \frac{n\cdot\frac{k}{n}+1}{n+1} = \frac{k+1}{n+1}$

4. 设 $f(n+1) = f(n)-\frac{M}{n(n+1)}$, 求 $f(n)$.

$\Rightarrow \frac{M}{n(n+1)} = \frac{M}{n}-\frac{M}{n+1} \Rightarrow f(n+1)-\frac{M}{n+1} = f(n)-\frac{M}{n}$, 令 $C_n = f(n)-\frac{M}{n}$. 则 $C(n)\equiv C$. $\Rightarrow f(n) = C+\frac{M}{n}$.

5. 证明 $f(x) = \frac{x^2+1}{x^4+1}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界.

$\Rightarrow f(x)>0$. $f(x) = \frac{x^2+1}{x^4+1} \le \frac{x^2+1}{2x^2} = \frac{1}{2}+\frac{1}{2x^2} \le \frac{1}{2}$. 即 $0<f(x)<\frac{1}{2}$.

6. $f(x)$ 定义在 $(0,+\infty)$ 上. $x_1>0$. $x_2>0$. 且函数 $\frac{f(x)}{x}$ 单调下降. 求证 $f(x_1+x_2)\le f(x_1)+f(x_2)$

Δ 不妨设 $x_1<x_2$. 则由 $\frac{f(x)}{x}$ 单调递减可得. $\frac{f(x_1)}{x_1} < \frac{f(x_2)}{x_2} \Rightarrow x_2 f(x_1) < x_1 f(x_2)$.

又由 $x_1+x_2 < x_1$ 得 $\frac{f(x_1+x_2)}{x_1+x_2} < \frac{f(x_1)}{x_1} \Rightarrow x_1 f(x_1+x_2) < x_1 f(x_1)+x_2 f(x_1)$

$< x_1 f(x_1)+x_1 f(x_2) \Rightarrow f(x_1+x_2)\le f(x_1)+f(x_2)$

7. 证明:若对任意 $x,y\in R$. $2f(x)f(y) = f(x+y)+f(x-y)$. 且 $f(x)$ 不恒为0. 则:

(1) $[f(x)]^2 = \frac{f(2x)+1}{2}$ (2) $[f(x)]^2+[f(y)]^2 = f(x+y)f(x-y)+1$

(2) 将 $2f(x)f(y) = f(x+y)+f(x-y)$ 中的 x,y 用 $x+y$、$x-y$ 替换后,得:

$2f(x+y)f(x-y) = f(2x)+f(2y) = 2[f(x)]^2-1+2[f(y)]^2-1$. 证毕.

8. 求证 $\max\{a,b\} = \frac{a+b}{2}+\frac{|a-b|}{2}$, $\min\{a,b\} = \frac{a+b}{2}-\frac{|a-b|}{2}$.

Δ 由 $\max\{a,b\}$, $\min\{a,b\}$ 及绝对值定义可得: $\begin{cases}\max\{a,b\}+\min\{a,b\} = a+b\\ \max\{a,b\}-\min\{a,b\} = |a-b|\end{cases}$

解出 $\max\{a,b\}$ 和 $\min\{a,b\}$.

9. 设 $\max\{|a+b|,|a-b|\}<\frac{1}{2}$. 求证 $|a|<\frac{1}{2}$. $|b|<\frac{1}{2}$.

Δ $\Rightarrow |a|=\frac{1}{2}|a+b+a-b| \le \frac{1}{2}(|a+b|+|a-b|) \le \max\{|a+b|,|a-b|\}=\frac{1}{2}$，$|b|$ 同理.

10. 设 $a\le c\le b$. 求证 $|c|\le\max\{|a|,|b|\}$.

Δ $\Rightarrow \max\{|a|,|b|\}\ge|b|\ge b\ge c$; $-\max\{|a|,|b|\}\le-|a|\le a\le c$.

两式和并得 $|c|\le\max\{|a|,|b|\}$.

11. 证明 $\sin(\arccos x)=\cos(\arcsin x)=\sqrt{1-x^2}$

$[\sin(\arccos x)]'=\cdots\cdots$

12. 设 $f(x)=\sin x$. $g(x)=\arcsin x$. 求 $f(g(x))$. $g(f(x))$.

$\Rightarrow f(g(x))=\sin(\arcsin x)=x$. $x\in[-1,1]$.

A 当 $x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ 时. $g(f(x))=\arcsin(\sin x)=x$. $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$

当 $x\in[k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi+\frac{\pi}{2}]$ 时. $x-k\pi\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$. $\Rightarrow$

$g(f(x))=\arcsin(\sin x)=\arcsin(\sin(x-k\pi+k\pi))=\arcsin((-1)^k\sin(x-k\pi))$

$=(-1)^k\arcsin(\sin(x-k\pi))=(-1)^k(x-k\pi)$.

13. 设 $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$. $f_1(x)=f[f(x)]$, $f_2(x)=f[f_1(x)]$, $f_3(x)=\cdots\cdots$

则 $f_n(x)=$ ______ ?

$\Rightarrow$ 直接简单的数学归纳.

$f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$. $f_1(x)=\frac{f(x)}{\sqrt{1+f^2(x)}}=\frac{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1+\frac{x^2}{1+x^2}}}=\frac{x}{\sqrt{1+2x^2}}$. $f_2(x)=\frac{f_1(x)}{\sqrt{1+f_1^2(x)}}=\frac{\frac{x}{\sqrt{1+2x^2}}}{\sqrt{1+\frac{x^2}{1+2x^2}}}=\frac{x}{\sqrt{1+3x^2}}$.

则 $f_n(x)=\frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$.

数列极限、函数极限与连续

1、用定义证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n-2}{2n+1}=\frac{3}{2}$.

$\forall\varepsilon>0$. 由 $\left|\frac{3n-2}{2n+1}-\frac{3}{2}\right|=\frac{7}{2(2n+1)}<\frac{7}{n}<\varepsilon$. 得 $n>\frac{7}{\varepsilon}$.

于是取 $N=[\frac{7}{\varepsilon}]$. 当 $n>N$ 时. 有 $\left|\frac{3n-2}{2n+1}-\frac{3}{2}\right|<\varepsilon$. 原式得证.

2. 用定义证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+n+9}{7n^3-9}=0$

$\forall\varepsilon>0$. 由于当 $n>3$ 时, $\left|\frac{n^2+n+9}{7n^3-9}\right|<\frac{3n^2}{7n^3-9}<\frac{3n^2}{6n^3}<\frac{1}{2n}<\frac{1}{n}<\varepsilon$ 得 $n>\frac{1}{\varepsilon}$

于是取 $N=\max\{3,[\frac{1}{\varepsilon}]\}$. 当 $n>N$ 时有 $\left|\frac{n^2+n+9}{7n^3-9}\right|<\varepsilon$. 原式得证.

Δ 用定义证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$ 的适当放大法: 将 $|x_n-A|$ 在 $n>N_1$ 的条件(可取)下进行, 放大到 $G(n)$. 再由 $G(n)<\varepsilon$ 求出 $n>N_2$ 从而取 $N=\max\{N_1,N_2\}$.

$G(n)$ 必须趋向于0!

且都要保留因子 $|x-x_0|$.

3. 用定义证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2n+\sqrt{n}}-\sqrt{n}}{n+1}=0$.   Δ 每一次放大之后都要趋向于0, 否则错误.

$\forall\varepsilon>0$. 由 $\left|\frac{\sqrt{2n+\sqrt{n}}-\sqrt{n}}{n+1}\right|=\frac{\sqrt{2n+\sqrt{n}}-\sqrt{n}}{n+1}=\frac{n+\sqrt{n}}{(n+1)(\sqrt{2n+\sqrt{n}}+\sqrt{n})}<\frac{n+\sqrt{n}}{n^{\frac{3}{2}}}<\frac{2n}{n^{\frac{3}{2}}}=\frac{2}{\sqrt{n}}<\varepsilon$.

得 $n>\frac{4}{\varepsilon^2}$. 取 $N=[\frac{4}{\varepsilon^2}]$. 当 $n>N$ 时. 有 $\left|\frac{\sqrt{2n+\sqrt{n}}-\sqrt{n}}{n+1}\right|<\varepsilon$. 原式得证.

4. 求极限.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(1+2x+3x^2+\cdots+(n-1)x^{n-2}+nx^{n-1})\ (|x|<1)$. 级数

令 $S_n=1+2x+3x^2+\cdots+(n-1)x^{n-2}+nx^{n-1}$, 则 $xS_n=x+2x^2+3x^3+\cdots+(n-1)x^{n-1}+nx^n$.

$\Rightarrow (1-x)S_n=1+x+x^2+x^3+\cdots+x^{n-1}-nx^n=\frac{1-x^n}{1-x}-nx^n \Rightarrow S_n=\frac{1-x^n}{(1-x)^2}-\frac{nx^n}{1-x}$

原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1-x^n}{(1-x)^2}-\frac{nx^n}{1-x}\right]=\frac{1}{(1-x)^2}$.

(2) Δ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\cdots+\frac{n}{(n+1)!}\right)$

由 $\boxed{\frac{n}{(n+1)!}=\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}}$ $\Rightarrow$ 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\cdots-\frac{1}{(n+1)!}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{(n+1)!}\right)=1$.

✓ (3) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{i(i+1)(i+2)}$ $\Rightarrow$ $\frac{1}{i(i+1)(i+2)}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{i(i+1)}-\frac{1}{(i+1)(i+2)}\right]$

5. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\sqrt{1+2+\cdots+n}-\sqrt{1+2+\cdots+(n-1)}\right]$ (分子有理化, 拉格朗日中值定理)

6. 求极限.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{n+k}{n^2+k}$.   ✓ (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\arctan(n^2+1)}$.

$\Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{n}\frac{n+k}{n^2+k}>\frac{n+\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+n}=\frac{\frac{3}{2}n^2+\frac{1}{2}n}{n^2+n}\to\frac{3}{2}\ (n\to\infty)$.

$\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{n+k}{n^2+k}<\frac{n+\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2}=\frac{\frac{3}{2}n^2+\frac{1}{2}n}{n^2}\to\frac{3}{2}\ (n\to\infty)$.

$\rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{n+k}{n^2+k}=\frac{3}{2}$.

✓ 7. 设 $0<x_1<1$, $x_{n+1}=1-\sqrt{1-x_n}\ (n=1,2,\cdots)$. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}$.

由 $1-x_n\in(0,1)$ 得 $\sqrt{1-x_n}>1-x_n$, 则 $x_{n+1}=1-\sqrt{1-x_n}<1-(1-x_n)=x_n$. 即 $x_n\downarrow$

又 $x_n>0$. 则 x_n 存在极限, 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-\sqrt{1-x_n}}{x_n}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{x_n(1+\sqrt{1-x_n})}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{1+\sqrt{1-x_n}}$

$=\frac{1}{2}$

8. 设数列$\{x_n\}$满足$0<x_n\le 1$，$(1-x_n)x_{n+1}>\frac{1}{4}$，$(n=1,2,\cdots)$，证明$\{x_n\}$收敛并求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

由$(1-x_n)x_{n+1}>\frac{1}{4}$得 $x_{n+1}>\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1-x_n}$ $\Rightarrow$ $\frac{x_{n+1}}{x_n}>\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x_n(1-x_n)}$，又 $x_n(1-x_n)\le\left[\frac{x_n+(1-x_n)}{2}\right]^2=\frac{1}{4}$

$\therefore \frac{x_{n+1}}{x_n}>\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x_n(1-x_n)}\ge 1$，即$\{x_n\}\uparrow$，又$x_n\le 1$ 则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在

由$(1-A)A>\frac{1}{4}$得：$A=\frac{1}{2}$

9. 当$n\to\infty$时，数列$x_n=n^2\cos\frac{n\pi}{2}$是(　).

A. 无穷小.　B. 无穷大.　C. 有界但不是无穷小.　D. 无界但不是无穷大.

观察考虑奇偶子列，$n=$even时，$x_n=0$；$n=$odd时，$x_n=\infty$或$(-\infty)$，因此选D.

10. 用定义证明：$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta$ 使得当$|x-\frac{\pi}{4}|<\delta$时，由$\left|\sin x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right|=\left|\sin x-\sin\frac{\pi}{4}\right|=\left|2\cos\frac{x+\frac{\pi}{4}}{2}\sin\frac{x-\frac{\pi}{4}}{2}\right|<\left|2\sin\frac{x-\frac{\pi}{4}}{2}\right|$

当$|x-\frac{\pi}{4}|<\frac{\pi}{2}$时，$\left|2\sin\frac{x-\frac{\pi}{4}}{2}\right|<\left|x-\frac{\pi}{4}\right|<\varepsilon$得：取$\delta=\min\{\frac{\pi}{2},\varepsilon\}$，

则当$0<|x-\frac{\pi}{4}|<\delta$时，有$\left|\sin x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right|<\varepsilon$.

11. 用定义证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$.

$a>1$时：令$\alpha_n=\sqrt[n]{a}-1$，则$a=(1+\alpha_n)^n>1+n\alpha_n$，则$\alpha_n<\frac{a-1}{n}$ $\Rightarrow$ $|\sqrt[n]{a}-1|<\left|\frac{a-1}{n}\right|$

$a<1$时：

A 12. 用定义证明 $\lim\limits_{x\to2}\frac{4-x^2}{x^2-3x+2}=-4$.

$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta$，使得当$|x-2|<\delta$时，由$\left|\frac{4-x^2}{x^2-3x+2}+4\right|=\left|\frac{6-3x}{1-x}\right|=3\left|\frac{x-2}{x-1}\right|$，$(x-2)$是需要保留的限制

$|x-2|<\frac{1}{2}$，此时$|x|>\frac{3}{2}$，$|x-1|>\frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ $3\left|\frac{x-2}{x-1}\right|<6|x-2|<\varepsilon$，得$|x-2|<\frac{\varepsilon}{6}$

则取$\delta=\min\{\frac{1}{2},\frac{\varepsilon}{6}\}$，当$|x-2|<\delta$时，有$\left|\frac{4-x^2}{x^2-3x+2}+4\right|<\varepsilon$.

13. 证明$\{x_n\}$为无穷小的充要条件是$\{|x_n|\}$也为无穷小.

$|x_n|=\mathrm{sgn}\cdot x_n$，sgn有界，$x_n$为无穷小，则$|x_n|$也为无穷小.

$x_n=\mathrm{sgn}\,|x_n|$.

14. 讨论函数$f(x)=x\sin x$在$x\to\infty$时的敛散性(Heine定理)

15. 求$\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\sin x}{\pi-x}$.（令$t=\pi-x$）.

16. 求函数极限. (1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}(\sqrt{x+2}-2\sqrt{x+1}+\sqrt{x})$.　(2) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x+x^2+\cdots+x^n-n}{x-1}$　(3) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1-x^2}-\cos x}{e^x-1-x}$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}(\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}-(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}))=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}}-\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0$

(4) $\lim\limits_{x\to0}\frac{3\sin x+x^2\cos\frac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(1+x)}$.

17. 已知 $f(x)$ 是 R 上的周期函数，且 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$. 求证 $f(x)\equiv 0$.

(反证法). 假设存在 $x_0\in R$. 使得 $f(x_0)=A\neq 0$. 由 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$. 取 $\varepsilon=\frac{|A|}{2}>0$. 则 $\exists X>0$. 当 $|x|>X$ 时. 有 $|f(x)-0|=|f(x)|<\frac{|A|}{2}$, 又由 $f(x)$ 为周期函数. 则 $\exists N\in N_+$. 使得 $|x_0+NT|>X$ 时. 有：
$|f(x_0+NT)|=|f(x_0)|=|A|>\frac{|A|}{2}$. 前后矛盾. 故 $f(x)\equiv 0$.
(若 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ 存在且 $f(x)$ 为周期函数 则 $f(x)\equiv const$).

18. 已知 $x=0$ 的某邻域内成立 $|f(x)|\le e^x-1$. 证明：$f(x)$ 在 $x=0$ 连续.

由 $|f(0)|\le e^0-1=0$ 知 $f(0)=0$. 又夹逼知 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0=f(0)$.

19. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a\neq 0$. 用定义证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=1$；又若 $a=0$. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$ 是否存在.

由 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ 知 $\exists N_1$, 当 $n>N_1$ 时. 有 $|a_n|>\frac{|a|}{2}$, 且 $\forall\varepsilon_1>0$. $\exists N_2$. 当 $n>N_2$ 时. $|a_n-a|<\varepsilon_1$

由 $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}-1\right|=\left|\frac{a_{n+1}-a_n}{a_n}\right|<2\left|\frac{a_{n+1}-a_n}{a}\right|=2\left|\frac{a_{n+1}-a-(a_n-a)}{a}\right|\le\frac{2}{|a|}(|a_{n+1}-a|+|a_n-a|)\le\frac{4\varepsilon_1}{|a|}$

则 $\forall\varepsilon_2>\frac{4\varepsilon_1}{|a|}>0$. 取 $N_3=\{N_1,N_2,[\varepsilon_2]\}$. 当 $n>N_3$ 时. 有 $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}-1\right|<\varepsilon_2$.

20. 设有数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$. 如果 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=0$. $(a\neq 0)$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$. 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$.

由 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=a$ 知. $\exists N_1>0$. 当 $n>N_1$ 时. $\left|\frac{a_n}{b_n}\right|>\frac{|a|}{2}$

由 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$ 知. $\forall\varepsilon_1>0$. $\exists N_1>0$. 当 $n>N_1$ 时. $|a_n|<\varepsilon_1$.

则由 $|b_n-0|=|b_n|<\frac{2|a_n|}{|a|}<\frac{2\varepsilon_1}{|a|}$ 可知. $\forall\varepsilon_2\ge\frac{2\varepsilon_1}{|a|}>0$. $\exists N_3=\max\{N_1,N_2\}$. 当 $n>N_3$ 时
$|b_n|<\varepsilon_2$. 即 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$.

21. 若函数 $f(x)$ 在 $[0,2a]$ 上连续, 且 $f(0)=f(2a)$. 求证：方程 $f(x)=f(x+a)$ 在 $[0,a]$ 上至少有个实根.

$F(x)=f(x)-f(x+a)$. $F(0)=-F(a)$.

22. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a\ge 0$. 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[m]{x_n}=\sqrt[m]{a}$.

23. 设 $f(x)\in C(-\infty,+\infty)$ 且 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=+\infty$. 证明：$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 取到它的最小值.

由 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=+\infty$, 故对 $f(0)$. $\exists X>0$. 当 $|x|>X$ 时. $f(x)>f(0)$
又由于 $f(x)$ 在 $[-X,X]$ 上连续. 由最值定理知 $\exists c\in(-X,X)$. 使得 $f(x)\ge f(c)$, $x\in[-X,X]$.
即 $f(0)\ge f(c)$. 另外当 $x\in(-\infty,X)\cup(X,+\infty)$ 时有 $f(x)>f(0)\ge f(c)$. 即在 $(-\infty,+\infty)$ 上有
$f(x)\ge f(c)$. 所以 $f(x)$ 取到最小值.

24. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续，且 $\forall x,y\in(-\infty,+\infty)$ 有关系式 $f(x+y)=f(x)+f(y)$，求证：$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，继续证明 $f(x)=xf(1)$.

思路：关键在于证 $\lim\limits_{\Delta x\to 0} f(x+\Delta x)=f(x)$.

由 $f(0)=2f(0)$ 得 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)=0$，则 $x\in(-\infty,+\infty)$ 时，$\lim\limits_{\Delta x\to 0} f(x+\Delta x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}[f(x)+f(\Delta x)]$

$=f(x)+f(0)=f(x)$，则 $f(x)$ 连续.

25. 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-x_{n-2})=0$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n-x_{n-1}}{n}=0$.

Δ

由于 $\underbrace{(-1)^n\sum_{k=3}^{n}(-1)^k(x_k-x_{k-2})}=(-1)^n\sum_{k=3}^{n}(-1)^k x_k+(-1)^n\sum_{k=3}^{n}(-1)^{k-1}x_{k-2}$

$=x_n-x_{n-1}+(-1)^{n-1}(x_2-x_1)$

故有 $x_n-x_{n-1}=(-1)^n\left[\sum_{k=3}^{n}(-1)^k(x_k-x_{k-2})+(x_2-x_1)\right]$

$\Rightarrow \left|\dfrac{x_n-x_{n-1}}{n}\right|=\left|\dfrac{(-1)^n}{n}\left[\sum_{k=3}^{n}(-1)^k(x_k-x_{k-2})+(x_2-x_1)\right]\right|\le\dfrac{1}{n}\left|\sum_{k=3}^{n}(-1)^k(x_k-x_{k-2})\right|+\dfrac{1}{n}|x_2-x_1|$.

由 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-x_{n-2})=0$ 知 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N>3$，当 $n>N$ 时，有 $|x_n-x_{n-2}|<\dfrac{\varepsilon}{2}$

则 $\left|\dfrac{x_n-x_{n-1}}{n}\right|\le\dfrac{1}{n}\left|\sum_{k=3}^{N}|x_k-x_{k-2}|+\sum_{k=N+1}^{n}|x_k-x_{k-2}|+|x_2-x_1|\right|$

$\le\dfrac{1}{n}\left(\sum_{k=3}^{N}|x_k-x_{k-2}|+|x_2-x_1|\right)+\dfrac{n-N}{n}\cdot\dfrac{\varepsilon}{2}$

对上述 N，存在一个 $N_1\ge N$，当 $n>N_1$ 时，有 $\dfrac{1}{n}\left|\sum_{k=3}^{N}|x_k-x_{k-2}|+|x_2-x_1|\right|<\dfrac{\varepsilon}{2}$?

故当 $n>N_1$ 时，有 $\left|\dfrac{x_n-x_{n-1}}{n}\right|<\dfrac{\varepsilon}{2}+\dfrac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n-x_{n-1}}{n}=0$.

26. 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}n^2\left(\dfrac{k}{n}-\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n+2}-\cdots-\dfrac{1}{n+k}\right)=\dfrac{k(k+1)}{2}$.

思路：夹逼定理，将 $\dfrac{k}{n}$ 拆开.

$\lim\limits_{n\to\infty}n^2\left(\dfrac{k}{n}-\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n+2}-\cdots-\dfrac{1}{n+k}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}n^2\left[\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)+\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+2}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+k}\right)\right]$

$=\lim\limits_{n\to\infty}n^2\left(\dfrac{1}{n(n+1)}+\dfrac{2}{n(n+2)}+\cdots+\dfrac{k}{n(n+k)}\right)$

由于 $\dfrac{1}{n(n+1)}+\dfrac{2}{n(n+2)}+\cdots+\dfrac{k}{n(n+k)}>\dfrac{1+2+\cdots+k}{n(n+k)}=\dfrac{\frac{k(k+1)}{2}}{n(n+k)}$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2\cdot\frac{k(k+1)}{2}}{n(n+k)}=\dfrac{k(k+1)}{2}$

$\dfrac{1}{n(n+1)}+\dfrac{2}{n(n+2)}+\cdots+\dfrac{k}{n(n+k)}<\dfrac{1+2+\cdots+k}{n^2}=\dfrac{\frac{k(k+1)}{2}}{n^2}$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2\cdot\frac{k(k+1)}{2}}{n^2}=\dfrac{k(k+1)}{2}$

$\therefore$ 原式成立.

27. 设 $0<x_1<3$，$x_{n+1}=\sqrt{x_n(3-x_n)}$ $(n=1,2,\cdots)$，证明 $\{x_n\}$ 收敛并求极限.

由 $0<x_1<3$ 知 $3-x_1>0$，于是 $0<x_2=\sqrt{x_1(3-x_1)}\le\dfrac{1}{2}(x_1+3-x_1)=\dfrac{3}{2}$

设 $0<x_k\le\dfrac{3}{2}$，则：$0<x_{k+1}=\sqrt{x_k(3-x_k)}\le\dfrac{1}{2}(x_k+3-x_k)=\dfrac{3}{2}$ $\Rightarrow$ 不能直接用 $\sqrt{x_n(3-x_n)}\le\dfrac{3}{2}$，因为 $x_n>0$，$3-x_n>0$ 才成立！

由数学归纳法得：$0<x_n\le\dfrac{3}{2}$.

由 $\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=\sqrt{\dfrac{3}{x_n}-1}\ge 1$ 和 $x_n\uparrow$，则极限存在.

28. 设 $x_1=1$. $x_2=2$. $x_{n+2}=\frac{x_{n+1}+x_n}{2}$ $(n=1,2,\cdots)$. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

思路：对 $x_{n+2}=\frac{x_{n+1}+x_n}{2}$ 可发现 $\{x_n-x_{n-1}\}$ 为等比数列.

由 $x_{n+2}=\frac{x_{n+1}+x_n}{2}$ 得：$x_{n+2}-x_{n+1}=-\frac{1}{2}(x_{n+1}-x_n)$.

则当 $n>3$ 时. $x_n-x_{n-1}=-\frac{1}{2}(x_{n-1}-x_{n-2})=(-\frac{1}{2})^2(x_{n-2}-x_{n-3})=\cdots=(-\frac{1}{2})^{n-2}(x_2-x_1)=(-\frac{1}{2})^{n-2}$

$\therefore x_n=(x_n-x_{n-1})+(x_{n-1}-x_{n-2})+\cdots+(x_3-x_2)+(x_2-x_1)+x_1$

$=[(-\frac{1}{2})^{n-2}+(-\frac{1}{2})^{n-3}+\cdots+1]+1=\frac{2}{3}(1-(-\frac{1}{2})^{n-1})+1$.

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}x_n=\frac{2}{3}+1=\frac{5}{3}$.

29. 已知 $x_1>0$. $x_{n+1}=3+\frac{4}{x_n}$ $(n=1,2,\cdots)$. 讨论 $\{x_n\}$ 的敛散性. 若收敛, 求出极限.

由数学归纳易证 $x_n>0$. 假设 $\{x_n\}$ 极限存在. 设其为A. 则 $A=4$. 现证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=4$.

由 $x_{n+1}=3+\frac{4}{x_n}$ 知 $\frac{1}{x_n}=\frac{x_{n-1}}{3x_{n-1}+4}$.

$|x_n-4|=\left|\frac{4}{x_n}-1\right|=\left|\frac{4x_{n-1}}{3x_{n-1}+4}-1\right|=\left|\frac{x_{n-1}-4}{3x_{n-1}+4}\right|=\frac{1}{3x_{n-1}+4}|x_{n-1}-4|<\frac{1}{4}|x_{n-1}-4|$

$<(\frac{1}{4})^2|x_{n-2}-4|<\cdots<(\frac{1}{4})^n|x_1-4|\to 0$ $(n\to\infty)$. 则 $|x_n-4|\to 0$, $n\to\infty$.

30. 确定常数 a.b. 使 $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt[3]{1-x^6}-ax^2-b)=0$.

① 由 $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt[3]{1-x^6}-ax^2-b)=0$ 有 $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt[3]{\frac{1}{x^6}-1}-a-\frac{b}{x^6})=0$. 其中 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{b}{x^6}=0$ 则 $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt[3]{\frac{1}{x^6}-1})=a=-1$

$\Rightarrow b=\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt[3]{1-x^6}-ax^2)=\lim\limits_{x\to\infty}x^2(\sqrt[3]{\frac{1}{x^6}-1}+1)=\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sqrt[3]{t^6-1}+1}{t^2}=\lim\limits_{t\to 0}\frac{t^4}{(t^6-1)^{\frac{2}{3}}}=0$

② 泰勒展开.

31. 设 $\sum\limits_{k=1}^{n}a_k=0$. 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}a_k\cdot\sqrt{k+x}$.

① 由题可知, 当 $x>0$ 时 $\sum\limits_{k=1}^{n}a_k\sqrt{x}=0$. 则 $\lim\limits_{x\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}a_k\sqrt{k+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}a_k(\sqrt{k+x}-\sqrt{x})$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}a_k\cdot\frac{k}{\sqrt{k+x}+\sqrt{x}}=0$.

② 柯西不等式?

32. 讨论函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2+(2x)^n+x^{2n}}$. $(x\geq 0)$ 的连续性.

① 若 $0\leq x<\frac{1}{2}$. 则 $0\leq 2x<1$ $\Rightarrow f(x)=1$.

② $x=\frac{1}{2}$ 时. $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{3+(\frac{1}{4})^n}=1$

③ $\frac{1}{2}<x<2$ 时. 有 $2x>x^2$, 则 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2+(2x)^n+(x^2)^n}=2x$.

④ $x=2$ 时. $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2+4^n+4^n}=4$

⑤ $x>2$ 时. 有 $2x<x^2$. 则 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2+(2x)^n+(x^2)^n}=x^2$.

综上：$f(x)=\begin{cases}1, & 0\leq x\leq\frac{1}{2}\\ 2x, & \frac{1}{2}\leq x\leq 2\\ x^2, & x\geq 2\end{cases}$ $\Rightarrow$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续

$\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^-}f(x)=\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^+}f(x)=f(\frac{1}{2})$. $\lim\limits_{x\to 2^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}f(x)=f(2)$

33、确定a、b的值，使$f(x)=\dfrac{e^x-b}{(x-a)(x-1)}$有无穷间断点$x=0$，有可去间断点$x=1$

$a=0$. $b=e$.

34. 设$f(x)=\lim\limits_{t\to x}\left(\dfrac{\sin t}{\sin x}\right)^{\frac{x}{\sin t-\sin x}}$，求间断点并指出其类型.

35. 已知当$0<x\le 1$时，$f(x)=x^{\sin x}$，对于其他x，$f(x)$满足$f(x)+k=2f(x+1)$，试求常数k，使$f(x)$在$x=0$连续.

取$-1<x\le 0$ 则 $0<x+1\le 1$. $\Rightarrow f(x)+k=2f(x+1)=2(x+1)^{\sin(x+1)}$.

则当$-1<x<1$时：$f(x)=\begin{cases} x^{\sin x}, & 0<x\le 1 \\ 2(x+1)^{\sin(x+1)}-k, & -1<x\le 0 \end{cases}$ 要使$f(x)$在$x=0$处连续，则

$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}[2(x+1)^{\sin(x+1)}-k]=2-k$. $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}x^{\sin x}=1$.

由$2-k=1$ 知 $k=1$.

36. 对任意给定的$\varepsilon\in(0,1)$，$\exists N\in N^+$，当$n\ge N$时，有$|x_n-a|<2\varepsilon$，是x_n收敛到a的 <u>A</u>.

A. 充分必要条件 B. 必要不充分条件 C. 充分条件 D. 非充分非必要条件

37. 证明数列$a_n=(1+\frac{1}{n})\sin\frac{n\pi}{2}$没有极限.

① 找出某两个子列的极限为不同值. ② 找出某子列极限值为无穷大.

当$n=2k+1$时，$a_n=(1+\frac{1}{2k+1})\to 1 \ (k\to\infty)$

当$n=2k$时，$a_n=(1+\frac{1}{2k})\sin k\pi=0 \ (k\to\infty)$

因此$\{a_n\}$不存在极限.

38. 设对任意的x，总有$\varphi(x)\le f(x)\le g(x)$，且$\lim\limits_{x\to\infty}[g(x)-\varphi(x)]=0$，则$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ ______.

A. 存在且为0. B. 存在且不一定为0. C. 一定存在 D. 不一定存在.

举例：取$\varphi(x)=x$，$f(x)=x+e^{-|x|}$，$g(x)=x+2e^{-|x|}$，此时$f(x)$不存在.

取$\varphi(x)=0$，$f(x)=e^{-|x|}$，$g(x)=2e^{-|x|}$，此时$f(x)$存在.

由条件$\lim\limits_{x\to\infty}[g(x)-\varphi(x)]=0$，不能推出$g(x)$和$\varphi(x)$存在极限且相等，因为可能无穷大项被减掉了，只留下无穷小项.

39. 设数列x_n与y_n满足$\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$，则下列断言正确的是 ____.

A. 若x_n发散，则y_n必发散. ✗ B. 若x_n无界，则y_n必有界.

C. 若x_n有界，则y_n必为无穷小. ? D. 若$\frac{1}{x_n}$为无穷小，则y_n必为无穷小. ✓

$\Rightarrow$ A、B显然错误. D正确. y_n是比x_n更高阶的无穷小.

从C可以看出，无穷小和有界量乘积为无穷小，但反之不一定

注意 $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}$ 和 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$ 的区别。

40. 求极限 $\lim\limits_{x\to-\infty} x(\sqrt{x^2+100}+x)$.

$\Rightarrow$ 注意 x 为负数，进入根号时要加负号！

$\lim\limits_{x\to-\infty} x(\sqrt{x^2+100}+x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{100x}{\sqrt{x^2+100}-x} = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{100}{-\sqrt{1+\frac{100}{x^2}}-1} = -50$.（或者 $\frac{-(\sqrt{1+\frac{100}{x^2}}-1)}{\frac{1}{x^2}} = \frac{-\frac{1}{2}\cdot\frac{100}{x^2}}{\frac{1}{x^2}} = -50$）

Δ 遇到 $(x\to-\infty)$ 的极限时先作变换 $t=-x$，或者记住加负号！

又如 $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4x^2+x-1}+x+1}{\sqrt{x^2+\sin x}}$，$x\to-\infty$ 时极限为1，$x\to+\infty$ 时极限为3。

41. 若 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 6x + xf(x)}{x^3}=0$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{6+f(x)}{x^2}$ 为？

① 洛必达，可得 $\frac{f(x)}{2}=36$，不严谨。

② 由 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 6x + xf(x)}{x^3}=0$ 可知 $\sin 6x + xf(x) = o(x^3)$ $\Rightarrow f(x) = o(x^2) - \frac{\sin 6x}{x}$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\frac{6+f(x)}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{6+o(x^2)-\frac{\sin 6x}{x}}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} o(1) + \lim\limits_{x\to 0}\frac{6-\frac{\sin 6x}{x}}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{6x-\sin 6x}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{6+6\cos 6x}{3x^2}$

$= \lim\limits_{x\to 0}\frac{-36\sin 6x}{6x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{216\cos 6x}{6} = 36$.

42.（和上题同类型）若 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+\frac{f(x)}{\sin x})}{a^x-1}=A$，求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}$.

$\Rightarrow \ln(1+\frac{f(x)}{\sin x}) = A(a^x-1) + o(a^x-1)$

43. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}\right) \Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+n+k}$，$\frac{k}{n^2+n+n}<\frac{k}{n^2+n+k}<\frac{k}{n^2+n} \Rightarrow \frac{1}{2}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+\pi}+\frac{n}{n^2+2\pi}+\cdots+\frac{n}{n^2+n\pi}\right) \Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k\pi}$，$\frac{n}{n^2+n\pi}<\frac{n}{n^2+k\pi}<\frac{n}{n^2} \Rightarrow 1$.

Δ 此类题目对非主要项进行放缩，保证极限不变

44. 设 $a_0=0$，$a_{n+1}=1+\sin(a_n-1)$ $(n\geq 0)$，求 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

两种方法。

$b_0=\sin x$，$x>0$，$b_1=\sin b_0$，$b_n=\sin b_{n-1}$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=0$.

45. 若 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{e^x-a}(\cos x-b)=5$，则 $a=$____，$b=$____.

$\Rightarrow$ 由分子为0知此极限为 $\frac{0}{0}$ 型，分母也为0。

46. 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(1+2^x)\ln(1+\frac{3}{x})$.（不用洛必达法则）

$\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(1+2^x)\ln(1+\frac{3}{x}) = \lim\limits_{x\to+\infty}\ln(1+2^x)\cdot\frac{3}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\ln 2^x(2^{-x}+1)\cdot\frac{3}{x}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty}[x\ln 2+\ln(1+2^{-x})]\cdot\frac{3}{x} = 3\ln 2 + \lim\limits_{x\to+\infty}2^{-x}\cdot\frac{3}{x} = 3\ln 2$.

47. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt[3]{n^3+n^2}-n)$. $\frac{1}{3}$

48. 讨论函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}x$ 的连续性. 若有间断点, 判断其类型.

$\Rightarrow f(x)=\begin{cases}x, & |x|<1\\ 0, & |x|=1\\ -x, & |x|>1\end{cases}$ 间断点(一类): $x=-1, x=1$.

49. 已知 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln(e^n+x^n)}{n}$, $x>0$. 求出 $f(x)$ 并判断连续性.

思路: 注意 x 是和 e^n 进行比较.

1°. 当 $x<e$ 时. 由 $\frac{\ln(e^n+x^n)}{n}<\frac{\ln 2e^n}{n}\to 1$ 且 $\frac{\ln(e^n+x^n)}{n}<\frac{\ln e^n}{n}\to 1$, 知 $f(x)=1$.

或者由 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln(e^n+x^n)}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln e^n(1+(\frac{x}{e})^n)}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{\ln(1+(\frac{x}{e})^n)}{n}\right)=1$.

2°. 当 $x=e$ 时. 由 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln(e^n+e^n)}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln 2e^n}{n}=1$.

3°. 当 $x>e$ 时. 由 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln(e^n+x^n)}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{e^n+x^n\ln x}{e^n+x^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(\frac{e}{x})^n+\ln x}{(\frac{e}{x})^n+1}=\ln x$.

或者 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln(e^n+x^n)}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln x^n(1+(\frac{e}{x})^n)}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\ln x+\frac{\ln(1+(\frac{e}{x})^n)}{n}\right)=\ln x$.

综上: $f(x)=\begin{cases}1, & 0<x\le e\\ \ln x, & x>e\end{cases}$

50. 设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+x}{1+x^{2n}}$. 求其间断点.

$|x|<1$ 时. $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+x}{1+x^{2n}}=1+x$. $|x|>1$ 时. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+x}{1+x^{2n}}=0$. $|x|=1$ 时 $f(x)=1$

51. 函数 $f(x)=\frac{|x|\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}$. 在下列哪个区间有界?

A. $(-1,0)$ B. $(0,1)$ C. $(1,2)$ D. $(2,3)$

$\sin(x-2)$ 有界. 去掉不考虑. $\frac{|x|}{x}$ 也有界. 去掉. 则只需考虑 $f(x)=\frac{1}{(x-1)(x-2)^2}$, 其奇点为 $x=1$. $x=2$

则区间中不包括这两点即可

$\Rightarrow$ $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续. 则在 $[a,b]$ 上有界

$f(x)$ 在开区间 (a,b) 上连续. 且 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to b^-}f(x)$ 存在. 则在 (a,b) 上有界

52. 证明数列 $x_n=(1+\frac{1}{n})^n$ 收敛.

由A-G不等式. $x_n=(1+\frac{1}{n})^n\cdot 1=\underbrace{(1+\frac{1}{n})\cdot(1+\frac{1}{n})\cdot\cdots\cdot(1+\frac{1}{n})\cdot 1}_{(n+1)项}<\left(\frac{1+\frac{1}{n}+\cdots+1+\frac{1}{n}+1}{n+1}\right)^{n+1}=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}=x_{n+1}$.

$$C_n^0 1^0\frac{1}{n^n}+C_n^1 1\frac{1}{n^{n-1}}+C_n^2\cdot\frac{n(n-1)}{2}\cdot\frac{1}{n^{n-2}}$$

$$\frac{1}{n^n}+n\cdot\frac{1}{n^{n-1}}+\frac{n(n-1)}{2}\cdot\frac{1}{n^{n-2}}+\frac{n(n-1)(n-2)}{6}\cdot\frac{1}{n^{n-3}}$$

$$<C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n$$

52. 数列 $a_1=10$. $a_{n+1}=\sqrt{6+a_n}$. $(n=1,2,\cdots)$ 证明其极限存在.

实际上就是正项级数

53. 数列 $a_n=\frac{3}{1^2\cdot 2^2}+\frac{5}{2^2\cdot 3^2}+\cdots+\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$，证明其存在极限.

⇒利用单调有界原理.

$a_n=\frac{3}{1^2\cdot 2^2}+\frac{5}{2^2\cdot 3^2}+\cdots+\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}<\frac{4}{1\cdot 2^2}+\frac{6}{2\cdot 3^2}+\cdots+\frac{2(n+1)}{n\cdot(n+1)^2}=\frac{2}{1\cdot 2}+\frac{2}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{2}{n(n+1)}$

$=2(1-\frac{1}{n+1})<2$. 则 a_n 有界.

54. 证明数列 $x_n>0$. $x_n+\frac{1}{4x_{n+1}}<1$ 极限存在并求之.

54. 设函数 $f(x)$ 在 $(a,b]$ 上连续，且 $x\to a^+$ 时函数 $f(x)$ 的极限存在，则函数 $f(x)$ 在 $(a,b]$ 上有界.

设 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=A$. 则由极限定义知. 对于 $\varepsilon=1$. 必存在正数 δ，当 $0<x-a<\delta$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

即 $A-1<f(x)<A+1$.

对于闭区间 $[a+\delta,b]$，由 $f(x)$ 连续知必存在常数 k. 使得对任一 $x\in[a+\delta,b]$ 有 $|f(x)|\le k$.

则取 $M=\max\{k,|A+1|,|A-1|\}$，则对任何 $x\in(a,b]$ 有 $|f(x)|\le M$. ⇒ $f(x)$ 有界.

55. 设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续. 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在，证明 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上有界.

设 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$. 则 $\forall\varepsilon>0$. $\exists X>0$. 当 $x>X$ 时有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

取 $\varepsilon=1$. 则存在 X_1，使 $x>X_1$ 时. $|f(x)-A|<1$. 即 $A-1<f(x)<A+1$.

由 $f(x)$ 的连续性 知 $f(x)$ 在 $[X_1,X_1]$ 上有最大最小值. 即存在 a,b，使 $a\le f(x)\le b$.

取 $m=\min\{A-1,a\}$. $M=\max\{A+1,b\}$. 则 $x\in[a,+\infty)$ 时 $m<f(x)<M$，即 $f(x)$ 有界

√

56. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续. $a<x_1<x_2<\cdots<x_n<b$. 证明 $[a,b]$ 内至少存在一点 ξ 使 $f(\xi)=\frac{1}{n}[f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)]$.

57. 用"$\varepsilon-\delta$"定义证明：$\lim\limits_{x\to-\infty}x(\sqrt{x^2+1}+x)=-\frac{1}{2}$

⇒ $\left|x(\sqrt{x^2+1}+x)+\frac{1}{2}\right|=\left|\frac{x}{\sqrt{x^2+1}-x}+\frac{1}{2}\right|=\left|\frac{\frac{1}{2}\sqrt{x^2+1}+\frac{1}{2}x}{\sqrt{x^2+1}-x}\right|=\frac{1}{2}\left|\frac{1}{(\sqrt{x^2+1}-x)^2}\right|$

$<\left|\frac{1}{x^2}\right|\underset{x<-1时}{<}-\frac{1}{x}<\varepsilon$. ⇒ $x>-\frac{1}{\varepsilon}$. 取 $X=\max\{1,-\frac{1}{\varepsilon}\}$，$x<-X$ 时. $\left|f(x)+\frac{1}{2}\right|<\varepsilon$.

58. 求 C 的一个值. 使 $(b+c)\sin(b+c)-(a+c)\sin(b+c)=0$. $b>a$ 且均为常数.

令 $F(x)=x\sin x$. 则 $F(-x)=F(x)$. 由 $F(a+c)=F(b+c)$ 得：$a+c=-(b+c)$

⇒ $C=\frac{1}{2}(a+b)$.

59. 设 $b>a$. 求方程 $\sin(x+b)\ln[(x+b)+\sqrt{(x+b)^2+1}]=\sin(x+a)\ln[(x+a)+\sqrt{(x+a)^2+1}]$

⇒令 $F(x)=\sin x\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ 易知 $F(x)$ 为偶函数

Δ 60. 求极限 $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\sin nx}{\sin mx}\overset{t=\pi-x}{=\!=}\lim\limits_{t\to0}\frac{(-1)^{n+1}\sin nt}{(-1)^{m+1}\sin mt}=(-1)^{n-m}\cdot\frac{n}{m}$.

61. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} n\sin(2\pi\sqrt{n^2+1})$.

△ $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} n\sin(2\pi\sqrt{n^2+1}-2n\pi+2n\pi) = \lim\limits_{n\to\infty} n\sin[2\pi(\sqrt{n^2+1}-n)] = \lim\limits_{n\to\infty} n\sin 2\pi\cdot\frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n}$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin 2\pi\cdot\frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n}}{2\pi\cdot\frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n}}\cdot\frac{2\pi\cdot n}{\sqrt{n^2+1}+n} = \pi$

62. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^3(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n})}{(n+1)+2(n+2)+\cdots+n(n+n)}$.

$\Rightarrow (n+1)+2(n+2)+3(n+3)+\cdots+n(n+n) = n(1+2+3+\cdots+n)+(1+4+9+\cdots+n^2) = \frac{n^2(n+1)}{2}+\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{1}{6}(n+1)(5n^2+3)$

原式 $= \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^3(2-\frac{1}{2^n})}{\frac{1}{6}(n+1)(5n^2+3)} = \frac{12}{5}$.

63. 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2\sin\frac{1}{x}+2\sin x}{x}$. $\Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty}3x\sin\frac{1}{x}+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2\sin x}{x} = \lim\limits_{x\to\infty}3x\cdot\frac{1}{x} = 3$.

64. $1+x^2-e^{x^2}$ 当 $x\to 0$ 时是 x 的_____阶无穷小?

△ $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+x^2-e^{x^2}}{x^k} = C$, 由泰勒 $e^{x^2} = 1+x^2+\frac{1}{2}x^4+o(x^4)$, 原式 $= \lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^4+o(x^4)}{x^k} = C \Rightarrow k=4$

65. 下列命题中正确的是( ).

△

A. 若 $x_n<y_n\ (n>N)$, 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$, $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=B$ 存在, 则 $A<B$

B. 设 $f(x)$ 定义在 (a,b), 又 $c\in(a,b)$, 存在极限 $\lim\limits_{x\to c}f(x)=A$, 则 $f(x)$ 在 (a,b) 有界

C. 若 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty$, 则存在 $\delta>0$, 当 $0<|x-a|<\delta$ 时, $\frac{1}{f(x)}$ 有界

D. 若存在 $\delta>0$ 当 $0<|x-a|<\delta$ 时 $f(x)>0$, 且存在极限 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$, 则 $A>0$

$\Rightarrow$ B: $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to b^-}f(x)$ 存在时才有界, A: 考虑 $x_n=\frac{1}{n}$, $y_n=\frac{1}{n-1}$ $\Rightarrow A=B$.
应该是 $A\geq B$ 而不是 $A>B$.

D: 极限 $A\geq 0$ 而不是 $A>0$.

66. 一些命题:

(1). 初等函数在其定义区间上连续 (√) 在其定义域上连续 (×)

(2). 函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续是否说明 $f(x)$ 在 x_0 的某个邻域内处处连续? (×)
考虑函数 $D(x)=\begin{cases}1, & x\in Q\\ 0, & x\in Q^c\end{cases}$ 只在 $x=0$ 连续, 其他处处不连续.

(3) 函数 $f(x)$ 在 x_0 连续, 则 $|f(x)|$ 是否也在 x_0 连续 (√). 反之是否成立 (×).
$\exists\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$, 当 $|x-x_0|<\delta$ 时, 有 $\big||f(x)|-|f(x_0)|\big|\leq|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$, 反之不成立.

(4). 若 $f(x)$ 在 x_0 连续, $g(x)$ 在 x_0 不连续, 讨论 $f(x)+g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)}$ 的连续情况.

① $f(x)+g(x)$ 不连续, 若 $f(x)+g(x)$ 连续, 则 $[f(x)+g(x)]-f(x)=g(x)$ 连续, 矛盾

② $f(x)\cdot g(x)$ 可能连续, 可能不连续. 考虑 $f(x)\equiv 0$, $g(x)=\begin{cases}1, & x>0\\ -1, & x\leq 0\end{cases}$ 和 $f(x)\equiv 1$, $g(x)=\begin{cases}1, & x>0\\ -1, & x\leq 0\end{cases}$

$f(x)/g(x)$

③ $\frac{g(x)}{f(x)}$ 一定不连续

15) 函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上有定义，在开区间(a,b)内连续，且$f(a)\cdot f(b)<0$，则$f(x)$在(a,b)存在零点(X)

考虑函数：$f(x)=\begin{cases}-1, & x=-1\\ 2, & -1<x<2\\ 1, & x=2\end{cases}$ 在开区间(a,b)上不存在零点.

16) 连续函数的和、积一定是连续函数(√). 不连续函数的和、积一定不是连续函数(X).

$f(x)=\begin{cases}1, & x\geq 0\\ -1, & x<0\end{cases}$ 与 $g(x)=\begin{cases}-1, & x\geq 0\\ 1, & x<0\end{cases}$ 均不连续，但 $f(x)\cdot g(x)$，$f(x)+g(x)$ 均连续

17) $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上有定义，且$f(x)$有间断点，则$f(f(x))$是否有间断点？(不一定)

考察函数 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leq 1\\ 0, & |x|>1\end{cases}$ 和 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$

(18) $f(x)$和$g(x)$在$(-\infty,\infty)$上有定义，$f(x)$为连续函数，且$f(x)\neq 0$，$g(x)$有间断点，则

① $f(g(x))$必有间断点 ② $g^2(x)$必有间断点 ③ $g(f(x))$必有间断点 ④ $\frac{g(x)}{f(x)}$必有间断点.

⇒ ① 错误. $f(x)=\sin x$. $g(x)=\begin{cases}x-\pi, & x\leq 0\\ x+\pi, & x>0\end{cases}$ ⇒ $f(g(x))=\begin{cases}\sin(x-\pi), & x\leq 0\\ \sin(x+\pi), & x>0\end{cases}$ ⇒ $-\sin x$

② 错误：$g(x)=\begin{cases}1, & x\leq 0\\ -1, & x>0\end{cases}$ ⇒ $g^2(x)=1$

③ 错误：$g(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$ 则 $g(f(x))$是连续的. 或有 $f(x)=\sin x$，$g(x)=\begin{cases}1, & |x|\leq 1\\ 0, & |x|>1\end{cases}$

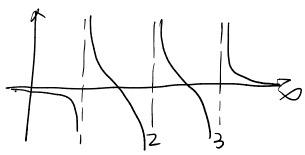
④ 正确，分情况讨论：a. $g(x)$在x_0无定义 b. $g(x)$在x_0有定义但$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$不存在 c. $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)\neq g(x_0)$

67. 设$f(x)=\frac{x}{a+e^{bx}}$在$(-\infty,+\infty)$上连续，且$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$，则常数$a,b$满足(　).

A. $a<0,\ b<0$　B. $a<0,\ b>0$　C. $a\leq 0,\ b>0$　D. $a\geq 0,\ b<0$

⇒ 由极限为0可得 $b<0$；由连续可知 $a+e^{bx}\neq 0$ 即 $a\neq -e^{bx}$，所以 $a\geq 0$.

68. 证明函数 $f(x)=\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x-3}$ 仅有两个零点并指出所在区间.



⇒ $f(-\infty)=0$　$f(1^-)<0$　$f(1^+)>0$，$f(2^-)<0$　$f(2^+)>0$　$f(3^-)<0$　$f(3^+)>0$　$f(+\infty)=0$

69. 设$f(x)$在(a,b)连续，$x_1,x_2\cdots x_n\in(a,b)$，$\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_n$为任意$n$个正数，求证

$\exists\xi\in(a,b)$，使得 $f(\xi)=\frac{\alpha_1 f(x_1)+\alpha_2 f(x_2)+\cdots+\alpha_n f(x_n)}{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}$

不妨设 $\min\{f(x_1),f(x_2)\cdots f(x_n)\}=f(x_1)$，$\max\{f(x_1),f(x_2)\cdots f(x_n)\}=f(x_n)$.

则有 $f(x_1)\leqslant\frac{1}{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i f(x_i)\leqslant f(x_n)$

因为 $f(x)\in[x_1,x_n]$，则$\exists\xi\in[x_1,x_n]\subset(a,b)$ 使原式成立.

(用连续函数性质求极限)

70. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$x_1, x_2, \cdots x_n$ 是 $[a,b]$ 上一个点列. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}e^{f(x_k)}}$.

由连续知 $f(x)\in[m,M]$. 则有 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}e^{f(x_k)}} \geq \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{e^m}=1$，$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}e^{f(x_k)}} \leq \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{e^M}=1$.

71. 设数列 $\{x_n\}$ 由方程 $x_n^3+2x_n+\frac{1}{n}=0\ (n\in N^+)$ 的实根所定义. 证明：

(1) $\{x_n\}$ 收敛.

(2) $\{n x_n\}$ 收敛. 并求极限.

(1) 由 $x_n^3+2x_n+\frac{1}{n}=0$ 及 $n\geq 1$ 得 $x_n<0$.

又 $x_{n+1}^3+2x_{n+1}+\frac{1}{n+1}=0$. 则有 $(x_n-x_{n+1})(x_n^2+x_nx_{n+1}+x_{n+1}^2+2)=\frac{1}{n(n+1)}>0$

所以 $x_n>x_{n+1}$. 则 $\{x_n\}$ 存在极限. 设其为 A. $\Rightarrow A^3+2A=0\Rightarrow A=0$.

(2) 由 $x_n^3+2x_n+\frac{1}{n}=0$ 有 $nx_n=\frac{-1}{2+x_n^2}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}nx_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-1}{2+x_n^2}=-\frac{1}{2}$

72. 已知存在 $M>0$. 使数列 $\{x_n\}$ 满足 $\sum_{k=2}^{n}|x_k-x_{k-1}|<M$. 证明 $\{x_n\}$ 收敛.

$\Rightarrow$ 利用 Cauchy 收敛定理证明

令 $y_n=\sum_{k=2}^{n}|x_k-x_{k-1}|$. 则由 $y_n-y_{n-1}>0$ 易知 $\{y_n\}$ 单调增加且有上界. 则 $\{y_n\}$ 收敛.

于是 $\forall\varepsilon>0$. $\exists N>0$. 当 $n>N$ 时有：

$$|y_{n+p}-y_p|=\sum_{k=n+1}^{n+p}|x_k-x_{k-1}|<\varepsilon\quad(\forall p=1,2,\cdots)$$

又因为 $\sum_{k=n+1}^{n+p}|x_k-x_{k-1}|\geq|x_{n+p}-x_n|$，即 $|x_{n+p}-x_n|<\varepsilon$，由 Cauchy 收敛知 $\{x_n\}$ 收敛.

Δ Cauchy 收敛准则 $=\{x_n\}$ 收敛的充要条件是 $\forall\varepsilon>0$. $\exists N>0$. 当 $m,n>N$ 时有 $|x_m-x_n|<\varepsilon$

(级数)

73. 已知当 $a\leq x\leq b$ 时. $a\leq f(x)\leq b$，且存在常数 $k\ (0\leq k<1)$. $\forall x', x''\in[a,b]$ 时有 $|f(x')-f(x'')|\leq k|x'-x''|$. 证明：

(1) $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续.

(2) 存在唯一的 $\xi\in[a,b]$，使 $f(\xi)=\xi$.

(3) 对任意 x_1，定义 $x_{n+1}=f(x_n)\ (n=1,2,\cdots)$ 则 $\{x_n\}$ 收敛. 且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\xi$.

(1) 由连续定义：$\forall\varepsilon>0$. $\exists\delta>0$. 当 $|x-x_0|<\delta$ 时. 由 $|f(x)-f(x_0)|\leq k|x-x_0|<\varepsilon$ 知：$|x-x_0|<\frac{\varepsilon}{k}$，则取 $\delta=\frac{\varepsilon}{k}$. 当 $|x-x_0|<\delta$ 时有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$.

即 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$. 由 x_0 的任意性知 $f(x)$ 连续. (也可证 $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)-f(x_0)|=0$)

(2) 令 $F(x)=f(x)-x$. 由 $F(a)\geq 0$，$F(b)\leq 0$，若 $F(a)=0$. 则取 $\xi=a$. 有 $f(\xi)=\xi$. 若 $F(b)=0$. 则取 $\xi=b$

若 $F(a)\neq F(b)\neq 0$. 则由介值定理知 $\exists\xi\in(a,b)$ 使 $F(\xi)=0$. $\Rightarrow f(\xi)=\xi$.

证明唯一性：设 $\exists\eta\neq\xi\in[a,b]$. 使 $f(\eta)=\eta$. 则 $|\eta-\xi|=|f(\eta)-f(\xi)|=k|\eta-\xi|\Rightarrow(1-k)|\eta-\xi|=0$

$\Rightarrow\eta=\xi$.

(3) 由 $|x_n-\xi|=|f(x_{n-1})-f(\xi)|\leq k|x_{n-1}-\xi|\leq\cdots\leq k^n|x_1-\xi|\to 0$ 及夹逼定理得 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\xi$.

74. 设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续，且$\lim\limits_{x\to+\infty}f(f(x))=\infty$，求证$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\infty$.

$\Rightarrow$ 采用反证法.

假设$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\infty$不成立. 则$\exists A>0$. $\forall X>0$. 当$|x|>X$时有$|f(x)|\leq A$.

由$f(x)\in C[-A,A]$知当$x\in[-A,A]$时. $\exists M>0$. 使$|f(x)|\leq M$. 即$|f(f(x))|\leq M$

则与题设$\lim\limits_{x\to+\infty}f(f(x))=\infty$矛盾. 因此$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\infty$.

75. $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续，$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=+\infty$. 且$f(x)$的最小值$f(x_0)<x_0$. 证明$f(f(x))$至少在两点处取得最小值.

$\Rightarrow$ 由题分析可知. 当$f(x)=x_0$时. $f(f(x))$取到最小值. 又由$f(x_0)<x_0$及$f(\infty)=+\infty$可知.

$x=x_0$左右存在两点使$f(x)=x_0$. 现需证存在两点x_1. x_2. 使$f(x)=x_0$.

构造$F(x)=f(x)-x_0$可证.

76. 设$b>a$均为常数. 求方程:

$$\sin(x+b)\ln[(x+b)+\sqrt{(x+b)^2+1}]=\sin(x+a)\ln[(x+a)+\sqrt{(x+a)^2+1}]$$的一个解.

【题型：求函数表达式】

77. 设$f(x)$在$x=0$附近有界. 且满足方程$f(x)-\frac{1}{2}f(\frac{x}{2})=x^2$. 求$f(x)$

$\Rightarrow$ $f(x)-\frac{1}{2}f(\frac{x}{2})=x^2$; $\frac{1}{2}f(\frac{x}{2})-\frac{1}{2^2}f(\frac{x}{2^2})=\frac{x^2}{2^3}$.

$\frac{1}{2^2}f(\frac{x}{2^2})-\frac{1}{2^3}f(\frac{x}{2^3})=\frac{x^2}{2^6}$; $\frac{1}{2^3}f(\frac{x}{2^3})-\frac{1}{2^4}f(\frac{x}{2^4})=\frac{x^2}{2^9}$

... $\frac{1}{2^n}f(\frac{x}{2^n})-\frac{1}{2^{n+1}}f(\frac{x}{2^{n+1}})=\frac{x^2}{2^{3n}}$

$\Rightarrow f(x)=\frac{1}{2^{n+1}}f(\frac{x}{2^{n+1}})+x^2(1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^6}+\cdots+\frac{1}{2^{3n}})$

$=\frac{1}{2^{n+1}}f(\frac{x}{2^{n+1}})+x^2\cdot\frac{(1-\frac{1}{2^{3n}})}{1-\frac{1}{2^3}}$

$\Rightarrow f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}[\frac{1}{2^{n+1}}f(\frac{x}{2^{n+1}})+x^2\cdot\frac{(1-\frac{1}{2^{3n}})}{1-\frac{1}{2^3}}]=x^2\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2^3}}=\frac{8}{7}x^2$.

78. 设$f(x)$满足$\sin f(x)-\frac{1}{3}\sin f(\frac{1}{3}x)=x$. 求$f(x)$.

$\Rightarrow$ $\sin f(x)-\frac{1}{3}\sin f(\frac{1}{3}x)=x$

$\frac{1}{3}\sin f(\frac{1}{3}x)-\frac{1}{3^2}\sin f(\frac{1}{3^2}x)=\frac{x}{3^2}$

$\frac{1}{3^2}\sin f(\frac{1}{3^2}x)-\frac{1}{3^3}\sin f(\frac{1}{3^3}x)=\frac{x}{3^4}$

$\vdots$

$\frac{1}{3^{n-1}}\sin f(\frac{1}{3^{n-1}}x)-\frac{1}{3^n}\sin f(\frac{1}{3^n}x)=\frac{x}{3^{2(n-1)}}$

$\Rightarrow \sin f(x)-\frac{1}{3^n}\sin f(\frac{1}{3^n}x)=x(1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^4}+\cdots+\frac{1}{3^{2(n-1)}})$

$\sin f(x)=\frac{1}{3^n}\sin f(\frac{1}{3^n}x)+x\cdot\frac{(1-\frac{1}{9^n})}{1-\frac{1}{9}}$

因为$|\sin f(x)|\leq1$. 则$\sin f(x)=\frac{9}{8}x$.

$\Rightarrow f(x)=\arcsin\frac{9}{8}x+2k\pi$.

79. 设$\sum\limits_{k=1}^{n}a_k=0$. 求$\lim\limits_{x\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}a_k\sqrt{k+x}$.

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}a_k\sqrt{k+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}(\sum\limits_{k=1}^{n}a_k\sqrt{k+x}-\sum\limits_{k=1}^{n}a_k\sqrt{x})=\lim\limits_{x\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}a_k(\sqrt{k+x}-\sqrt{x})=\lim\limits_{x\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{ka_k}{\sqrt{k+x}+\sqrt{x}}=0$

80. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\arctan(n!)\times(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})^2-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2\times3}+\cdots+\frac{1}{(n+1)n}\right)^{\frac{3n^2+1}{n^2-1}}\right]$.

因为 $|\arctan(n!)|\le\frac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{n\to+\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})^2=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\right)^n=0$.

又有 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2\times3}+\cdots+\frac{1}{(n+1)n}\right)^{\frac{3n^2+1}{n^2-1}}=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{\frac{3+\frac{1}{n^2}}{1-\frac{1}{n^2}}}=3$.

因此原式 $=-3$.

81. 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x\sqrt{\cos2x}\sqrt[3]{\cos3x}}{x^2}$ (经典).

82. 设 $f(x)\in C[0,2]$, 且 $f(0)=f(2)$, 证明存在 $x,y\in[0,2]$, 使得 $|x-y|=1$ 时有 $f(x)=f(y)$

?

令 $F(x)=f(x)-f(x+1)$, $x\in[0,1]$. 则可知 $F(x)\in C[0,1]$.

$F(0)=f(0)-f(1)$, $F(1)=f(1)-f(2)$ 因为 $f(0)=f(2)$. $\Rightarrow F(1)=f(1)-f(0)=-F(0)$

$\Rightarrow F(0)F(1)\le0$. 由零值定理有 $\exists c\in[0,1]$. 使得 $F(c)=0\Rightarrow f(c)=f(c+1)$.

令 $x=c$. $y=c+1$. 则原题得证.

82. 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[6]{x^6+x^5}-\sqrt[6]{x^6-x^5})$

83. (2019 期中). 设 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上二阶可导, $x_0\in(0,a)$. $f'(x_0)=0$. $f''(x_0)\neq0$

对于下面两个命题. 正确选项是(　　).

(1) $x\to x_0$ 时. $f(x)-f(x_0)$ 是 $x-x_0$ 的二阶无穷小.

(2) 设 $f(0)=0$. 集合 $S=\{x\mid x\in(0,a]$, 且 $f(x)=0\}$. 则有 $S_0\in S$. 使得 $\forall s\in S$. 有 $s\ge S_0$.

A. (1)√(2)× 　B. (1)×(2)√ 　C. (1)(2)× 　D. (1)(2)√.

$\Rightarrow$ (2) 选项意即 $f(x)=0$ 有最小解 举反例 $f(x)=\begin{cases}x^2\sin\frac{1}{x}, & x\neq0\\ 0, & x=0\end{cases}$ 即可.

84. (2019 期中). 设定义在 R 上的函数满足: $\forall x\in R$. $f(f(x))=x$. 则正确个数为____.

(1) $f(x)$ 存在反函数. 　(2) $f(x)$ 不是周期函数 　(3) $f(x)$ 不存在极值.

A. 0 　B. 1 　C. 2 　D. 3.

$\Rightarrow$ (3) 可举反例: $f(x)=\begin{cases}x, & x=R-\{\pm\frac{1}{2}\}\\ -\frac{1}{2}, & x=\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}, & x=-\frac{1}{2}\end{cases}$ $\Rightarrow$ 存在极值 $\pm\frac{1}{2}$

85. (2019 期中). 已知 $f(x)=x^3-3x^2+3x+2$, $a_n=\sum\limits_{i=1}^{2n+1}f\left(\frac{i}{n}\right)$, $n\in Z^+$. 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=$____.

① 由积分定义求得 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=6$.

② 三次函数有对称点. 其横坐标为二阶导零点 $x=1$, 则对称中心 $f(1)=3$. $\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3\cdot(2n+1)}{n}=6$

86. (2018 期中). 已知函数 $f(x)$ 在 R 上可导. 且 $f(0)=0$ $f'(x)$ 有界. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n^2}\right)$.

87. (2015期中) 函数 $\frac{x^2-2x+1}{x^3-x}\sin\pi x$ 的可去间断点有（ ）.

A. 0个. B. 1个. C. 2个. D. 3个.

88. (2015期中) 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某个邻域里有定义且 $f(0)=0$. 下列选项哪个成立时 $f(x)$ 在 $x=0$ 可导?

A. $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x^3)}{x}$ 存在. B. $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x^2)}{x}$ 存在. C. $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(e^x-1)}{x}$ 存在 D. $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(\cos x-1)}{x^2}$ 存在

89. (2015期中) 设 $f(x)$ 在 R 上连续. $a_1\in R$. $a_{n+1}=f(a_n)$. $n\in Z^+$. 则( )

①若 $f(x)$ 严格单增且有上界. 则数列 $\{a_n\}$ 收敛. ②若 $f(x)$ 严格单减且有界. 则数列 $\{a_n\}$ 收敛.

A. 仅①正确. B. 仅②正确. C. ①②都正确 D. ①②都错误.

90. (2015期中). $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2-1}}-\frac{1}{\sqrt{n^2-2}}-\frac{1}{\sqrt{n^2-3}}-\cdots-\frac{1}{\sqrt{n^2-n}}\right)=$ ______.

$\Rightarrow$ 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{2}{\sqrt{n^2-1}}-\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2-k}}\right]=-\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2-k}}=-\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2}}=-1$.

证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2-k}}=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2}}=1$.

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2-k}}-\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2-k}}-\frac{1}{n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{n-\sqrt{n^2-k}}{n\sqrt{n^2-k}}=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{n\sqrt{n^2-k}(n+\sqrt{n^2-k})}$

$<\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{n\sqrt{n^2-n}(n+\sqrt{n^2-n})}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2-n}(n+\sqrt{n^2-n})}=0$. 即 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2-k}}=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2}}$

91. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1-x^2}\sin^2x-\tan^2x}{x^2\ln^2(1+x)}$.

原式 $=\lim\limits_{x\to0}\frac{(\sqrt{1-x^2}-1)\sin^3x}{x^2\ln^2(1+x)}+\frac{\sin^3x-\tan^3x}{x^2\ln^2(1+x)}=-\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}$

[题型:全面讨论函数性态].

92. 全面讨论 $y=5x+\frac{32x}{x^2-1}$ 并作图. ($y'=5-\frac{32(x^2+1)}{(x^2-1)^2}$, $y''=\frac{64(x^3+3x)}{(x^2-1)^3}$).

[题型:用定义证明极限]

93. 用定义证明极限 $\lim\limits_{x\to1}\frac{2-\arctan x}{1-x^2}=\infty$.

$\forall M>0$. $\exists\delta$. 当 $|x-1|<\delta$ 时. 有 $\left|\frac{2-\arctan x}{1-x^2}\right|=\left|\frac{2-\arctan x}{x+1}\right|\left|\frac{1}{x-1}\right|$. 限制 $x>0$. 此时 $|x-1|<1$

则上式 $>|2-\arctan x|\left|\frac{1}{x-1}\right|>\left|2-\frac{\pi}{4}\right|\left|\frac{1}{x-1}\right|=\frac{4-\pi}{2}\left|\frac{1}{x-1}\right|>M$. 解得 $|x-1|<\frac{4-\pi}{2M}$.

所以取 $\delta=\min\left\{1,\frac{4-\pi}{2M}\right\}$. 则当 $|x-1|<\delta$ 时有 $\left|\frac{2-\arctan x}{1-x^2}\right|>M$.

94. 若$f(x)$

又、莫要大意!!!

95. 当$x\to0$时，与$(1+4x)\sqrt{1+2x}-1$等价的无穷小是（ ）.

A. x.　　B. $2x$　　C. $4x$.　　D. $5x$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to0}\frac{(1+4x)\sqrt{1+2x}-1}{kx} = \lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+2x}-1+4x\sqrt{1+2x}}{kx} = \lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\sqrt{1+2x}-1}{kx}+\frac{4}{k}\sqrt{1+2x}\right) = \frac{5}{k} = 1 \Rightarrow k=5$

或者 $\lim\limits_{x\to0}(1+4x)\sqrt{1+2x}-1 = \lim\limits_{x\to0}\left(\sqrt{1+10x+32x^2+32x^3}-1\right) = \lim\limits_{x\to0}(5x+16x^2+16x^3)\sim5x$

96. 已知$a_1=\frac{1}{2}$，$a_{n+1}=\frac{1}{2}-\frac{a_n^2}{2}$. 求$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

97.（2014期中）已知数列满足$a_n>0$ $(n=1,2,\cdots)$ 且$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$ 则（ ）

A. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=1$.　　B. $\lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{i=1}^{n}(1+a_i)=1$　　C. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_na_{n+1}}{a_n+a_{n+1}}=0$.　　D. $\lim\limits_{n\to\infty}a_n^{a_n}=0$

举反例：A. 令$a_n=\frac{1}{2^n}$. 则$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\frac{1}{2}$.；

B. 令$a_n=\frac{1}{2^{2^n}}$ 则$\prod\limits_{i=1}^{n}(1+a_i)=(1+\frac{1}{2^2})(1+\frac{1}{2^4})\cdots(1+\frac{1}{2^{2^n}}) = \frac{1-\frac{1}{2^{2^{n+1}}}}{1-\frac{1}{2^2}} = \frac{4}{3}$

C. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_na_{n+1}}{a_n+a_{n+1}} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{a_n}+\frac{1}{a_{n+1}}} = 0$.

D. $\lim\limits_{n\to\infty}a_n^{a_n} = \exp\lim\limits_{n\to\infty}a_n\ln a_n = e^0 = 1$.