1. 设 n 为自然数，证明：$\left(\frac{1+\sin\theta+i\cos\theta}{1+\sin\theta-i\cos\theta}\right)^n=\cos n(\frac{\pi}{2}-\theta)+i\sin n(\frac{\pi}{2}-\theta)$.

令 $\theta=\frac{\pi}{2}-\varphi$，则 $\frac{1+\sin\theta+i\cos\theta}{1+\sin\theta-i\cos\theta}=\frac{1+\cos\varphi+i\sin\varphi}{1+\cos\varphi-i\sin\varphi}=\frac{2\cos^2\frac{\varphi}{2}+2i\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}}{2\cos^2\frac{\varphi}{2}-2i\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}}$

$=\frac{\cos\frac{\varphi}{2}+i\sin\frac{\varphi}{2}}{\cos\frac{\varphi}{2}-i\sin\frac{\varphi}{2}}=(\cos\frac{\varphi}{2}+i\sin\frac{\varphi}{2})^2=\cos\varphi+\sin\varphi$.

$\therefore\left(\frac{1+\sin\theta+i\cos\theta}{1+\sin\theta-i\cos\theta}\right)^n=\cos n\varphi+i\sin n\varphi=\cos n(\frac{\pi}{2}-\theta)+i\sin n(\frac{\pi}{2}-\theta)$.

2. 设复数 z_1, z_2, z_3 满足 $\frac{z_2-z_1}{z_3-z_1}=\frac{z_1-z_3}{z_2-z_3}$，证明 $|z_2-z_1|=|z_3-z_1|=|z_2-z_3|$.

由 $\frac{z_2-z_1}{z_3-z_1}=\frac{z_1-z_3}{z_2-z_3}$ 可得 $z_1^2+z_2^2+z_3^2=z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1 \Rightarrow \frac{1}{2}(z_1-z_2)^2+\frac{1}{2}(z_1-z_3)^2+\frac{1}{2}(z_2-z_3)^2=0$

$\Rightarrow z_1=z_2=z_3$

$\because \frac{z_2-z_1}{z_3-z_1}=\frac{z_1-z_3}{z_2-z_3}=\frac{z_2-z_3+z_3-z_1}{z_3-z_1}=\frac{z_2-z_3}{z_3-z_1}+1$，令 $a=\frac{z_2-z_3}{z_3-z_1}$，则 $a+1=-\frac{1}{a} \Rightarrow a^2+a+1=0$.

$\Rightarrow a=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i \Rightarrow |a|=\left|\frac{z_2-z_3}{z_3-z_1}\right|=1 \Rightarrow |z_2-z_3|=|z_3-z_1|$，同理可证其他.

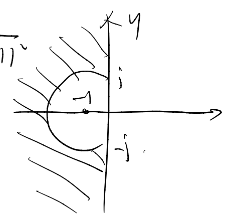
(等边三角形).

△ 画出复变函数图像并判断是否为区域.

3. 试判别满足条件 $0<\arg\frac{z-i}{z+i}<\frac{\pi}{4}$ 的点 z 组成的点集是否为一区域?

设 $z=x+iy$，记 $\theta=\arg\frac{z-i}{z+i}$，则 $\frac{z-i}{z+i}=\frac{x+(y-1)i}{x+(y+1)i}=\frac{[x+(y-1)i][x-(y+1)i]}{[x+(y+1)i][x-(y+1)i]}=\frac{x^2+y^2-1}{x^2+(y+1)^2}-i\frac{2x}{x^2+(y+1)^2}$

$\theta=\arctan\frac{-2x}{x^2+y^2-1}$，由 $0<\arg\frac{z-i}{z+i}<\frac{\pi}{4}$ 得 $0<\frac{-2x}{x^2+y^2-1}<1$. $\Rightarrow \begin{cases} x<0 \\ (x+1)^2+y^2>2 \end{cases} \Rightarrow$



o $\left|\frac{z-2}{z-3}\right|\leq 1$ 的图像，$\Rightarrow$ 充分考虑几何意义 $\Rightarrow |z-2|\leq|z-3|$ 且 $z\neq 3$

o $-\frac{\pi}{4}<\arg\frac{z-i}{i}<\frac{\pi}{4}$ 的图像 $\Rightarrow \frac{x+1-y}{1-y}>0$ 且 $\frac{x-1+y}{1-y}<0$

△ 求 z 平面上的曲线 C 经过映射 $w=f(z)$ 到 W 平面上的曲线 Γ.

4. 求函数 $w=\frac{1}{z}$ 把 z 平面内以点 $(1,0)$ 为圆心，1 为半径的圆周 C 映射成 w 平面上的像曲线 Γ.

① $C: (x-1)^2+y^2=1$. 令 $z=x+iy$，$w=u(x,y)+iv(x,y)$，则 $w=\frac{1}{z}=\frac{1}{x+iy}=\frac{x}{x^2+y^2}-i\frac{y}{x^2+y^2}$

由 $u=\frac{x}{x^2+y^2}$，$v=-\frac{y}{x^2+y^2}$ 得：$x=\frac{u}{u^2+v^2}$. $y=-\frac{v}{u^2+v^2}$. 代入 C 中得：$u=\frac{1}{2}$.

② $C: |z-1|=1$. 即 $|z-1|^2=(z-1)(\bar{z}-1)=1$. 由 $w=\frac{1}{z}$ 得 $z=\frac{1}{w}$，$\bar{z}=\frac{1}{\bar{w}}$ 代入 C 中得：

$(\frac{1}{w}-1)(\frac{1}{\bar{w}}-1)=1 \Rightarrow \frac{1}{w\bar{w}}-(\frac{1}{w}+\frac{1}{\bar{w}})=0 \Rightarrow w+\bar{w}=1$，又因为 $Re(w)=\frac{1}{2}(w+\bar{w})$，则 $Re\,w=\frac{1}{2}$

△ 讨论复变函数 $w=f(z)$ 的可导性(讨论极限).

5. 讨论函数 $w=f(z)=|z|^2$ 的可导性

$\frac{\Delta w}{\Delta z}=\frac{|z+\Delta z|^2-|z|^2}{\Delta z}=\frac{(z+\Delta z)(\bar{z}+\overline{\Delta z})-z\bar{z}}{\Delta z}=\bar{z}+\overline{\Delta z}+z\frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}$

当 $z=0$ 时. $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}=\lim\limits_{\Delta z\to 0}\overline{\Delta z}=0$.

当 $z\neq 0$ 时. 若取 $\Delta z=\Delta x\to 0$ 得：$\lim\limits_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}=\lim\limits_{\substack{\Delta z\to 0\\ \Delta z=\Delta x}}\frac{\Delta w}{\Delta z}=\bar{z}+z$.

若取 $\Delta z=i\Delta y\to 0$ 得：$\lim\limits_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}=\lim\limits_{\substack{\Delta z\to 0\\ \Delta z=i\Delta y}}\frac{\Delta w}{\Delta z}=\bar{z}-z$.

$\Rightarrow z\neq 0$ 时. $w=f(z)$ 导数不存在.

○ 求映射 $w=z+\frac{1}{z}$ 下圆周 $|z|=2$ 的像.

$\Rightarrow$ 设 $w=u+iv$, $z=x+iy$. 则: $|z|=2 \Rightarrow x^2+y^2=4$

$w=z+\frac{1}{z}=x+iy+\frac{1}{x+iy}=x+iy+\frac{x-iy}{x^2+y^2}=(x+\frac{x}{x^2+y^2})+i(y-\frac{y}{x^2+y^2})=u+iv$.

$\Rightarrow u=x+\frac{x}{x^2+y^2}=\frac{5}{4}x$, $v=y-\frac{y}{x^2+y^2}=\frac{3}{4}y$. $\Rightarrow \frac{16}{25}u^2+\frac{16}{9}v^2=16 \Rightarrow \frac{u^2}{25}+\frac{v^2}{9}=1$. (椭圆)

○ 函数 $w=z^2$ 将平面上直线段 $\mathrm{Re}\,z=1$, $-1\leq \mathrm{Im}\,z\leq 1$ 变成 W 平面什么曲线?

$\Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y\in[-1,1] \end{cases}$ $w=z^2=(x+iy)^2=x^2-y^2+2ixy \Rightarrow \begin{cases} u=1-y^2 \\ v=2y \end{cases}$ 消去参数 y 得 $u+\frac{v^2}{4}=1$

即: $u=1-\frac{v^2}{4}$, $v\in[-2,2]$ 抛物线.

○ 设 $|z_0|<1$. 试证明: 若 $|z|=1$. 则 $\left|\frac{z-z_0}{1-\bar{z}_0z}\right|=1$.

若 $|z|<1$. 则 $\left|\frac{z-z_0}{1-\bar{z}_0z}\right|<1$

$\Rightarrow$ 若 $|z|=1$. 则 $|\bar{z}|=1$. 则 $\left|\frac{z-z_0}{1-\bar{z}_0z}\right|=\frac{|z-z_0|}{|\bar{z}||1-\bar{z}_0z|}=\frac{|z-z_0|}{|\bar{z}-\bar{z}_0|}=\frac{|z-z_0|}{|\bar{z}-\bar{z}_0|}=1$.

若 $|z|<1$. 则 $|z-z_0|^2=|z|^2+|z_0|^2-2\mathrm{Re}(z\bar{z}_0)$, $|1-\bar{z}_0z|^2=1+|z_0|^2|z|^2-2\mathrm{Re}(z\bar{z}_0)$.

得: $\frac{|z-z_0|^2}{|1-\bar{z}_0z|^2}=\frac{|z|^2+|z_0|^2-2\mathrm{Re}(z\bar{z}_0)}{1+|z_0|^2|z|^2-2\mathrm{Re}(z\bar{z}_0)}<1$. 所以 $\left|\frac{z-z_0}{1-\bar{z}_0z}\right|<1$.

○ 求下列方程所表示的曲线. $\left|\frac{z-a}{1-\bar{a}z}\right|=1$ ($|a|<1$).

$\Rightarrow \left|\frac{z-a}{1-\bar{a}z}\right|=\frac{|z-a|}{|1-\bar{a}z|}=\frac{|\bar{z}||z-a|}{|\bar{z}||1-\bar{a}z|}=\frac{|\bar{z}||z-a|}{|\bar{z}-\bar{a}|}=|\bar{z}|=1$. 即 $x^2+y^2=1$ (单位圆周).

○ 试利用 $1+z+z^2+\cdots+z^n=\frac{1-z^{n+1}}{1-z}$, 证明:

$$\begin{cases} 1+\cos\theta+\cos2\theta+\cdots+\cos n\theta=\dfrac{\sin(n+\frac{1}{2})\theta+\sin\frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sin\frac{2n+1}{2}\theta}{2\sin\frac{\theta}{2}} \\ \sin\theta+\sin2\theta+\cdots+\sin n\theta=\dfrac{\cos\frac{\theta}{2}-\cos(n+\frac{1}{2})\theta}{2\sin\frac{\theta}{2}} \end{cases}$$

6. 讨论函数 $w=f(z)=\mathrm{Im}\,z$ 的可导性.

$$\frac{\Delta w}{\Delta z}=\frac{\mathrm{Im}\Delta z}{\Delta z}=\frac{\Delta y}{\Delta z}=\frac{\Delta y}{\Delta x+i\Delta y}$$

① $\Delta z=\Delta x\to 0$. $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}=\lim\limits_{\substack{\Delta z\to 0\\ \Delta y=0}}\frac{\Delta y}{\Delta x+i\Delta y}=0$.

② $\Delta z=i\Delta y\to 0$. $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}=\lim\limits_{\substack{\Delta z\to 0\\ \Delta x=0}}\frac{\Delta y}{\Delta x+i\Delta y}=\frac{1}{i}$

$\Big]$ $w=f(z)$ 不可导.

7. 证明函数 $f(z)=\sqrt{|xy|}$ 在点 $z=0$ 满足 C-R 条件, 但在 $z=0$ 处不可导.

由题可知 $w=f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$. $\Rightarrow u(x,y)=\sqrt{|xy|}$. $v(x,y)=0$.

则 $\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0,y=0}=0$. $\frac{\partial v}{\partial y}\Big|_{x=0,y=0}=0$. $\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{x=0,y=0}=0$. $\frac{\partial v}{\partial x}\Big|_{x=0,y=0}=0$. $\Rightarrow$ 满足 C-R 条件.

又 $\frac{\Delta w}{\Delta z}\Big|_{z=0}=\frac{\sqrt{|\Delta x\Delta y|}}{\Delta z}=\frac{\sqrt{|\Delta x\Delta y|}}{\Delta x+i\Delta y}$, 当 $\Delta y=k\Delta x$ 时. $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}=\frac{\sqrt{|k|(\Delta x)^2}}{\Delta x+ik\Delta x}=\frac{\sqrt{|k|}}{1+ik}$ $\Rightarrow$ 不可导.

Δ解析函数

8. 设函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在区域 D 内解析, 且 $v=u^2$, 证明: $f(z)$ 在 D 内为常数.

由 $v=u^2$ 得 $\frac{\partial v}{\partial x}=2u\frac{\partial u}{\partial x}$. $\frac{\partial v}{\partial y}=2u\frac{\partial u}{\partial y}$. 由柯西黎曼条件 $\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=2u\frac{\partial u}{\partial y}=-2u\frac{\partial v}{\partial x}=-4u^2\frac{\partial u}{\partial x}$ $\Rightarrow (1+4u^2)\frac{\partial u}{\partial x}=0\Rightarrow\frac{\partial u}{\partial x}=0$.

Δ调和函数的概念

9. 设 $f(x)=u(x,y)+iv(x,y)$ 为解析函数, 且满足: $u(x,y)+v(x,y)=x^2-y^2+2(x+y)+2xy$. $f(0)=0$. 求 $f(z)$ (用调和函数求解).

由 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$. 有 $if(z)=-v(x,y)+iu(x,y)$ 仍为解析函数. 所以 $u(x,y)$ 是 $-v(x,y)$ 的调和函数. 从而 $u(x,y)+v(x,y)$ 是 $u(x,y)-v(x,y)$ 的共轭调和函数. 由 C-R 条件 $(u-v)_x=(u+v)_y=2x-2y+2$

对上式两端关于 x 积分:

$$u-v=\int(2x-2y+2)dx=x^2-2xy+2x+\varphi(y)\quad(\text{偏积分})$$

$\Rightarrow$ 求导 $(u-v)_y=-2x+\varphi'(y)=-(u+v)_x=-2x+2y-2$. 因此 $\varphi'(y)=2y-2$. $\Rightarrow \varphi(y)=y^2-2y+C$.

$\Rightarrow u-v=x^2+y^2+2x-2y-2xy+C$ 联立题给条件 $u+v=x^2-y^2+2(x+y)+2xy$ 可解出 u、v.

Δ三角函数和双曲函数

10. 证明 $w=\cos z$ 将直线 $x=C_1$ 和 $y=C_2$ 分别变成双曲线和椭圆.

$\Rightarrow$ $\cos z=\cos(x+iy)=\cos x\cos iy-\sin x\sin iy=\cos x\cosh y-i\sin x\sinh y$.

得 $u=\cos x\cdot\cosh y$. $v=-\sin x\cdot\sinh y$.

由 $\cosh^2 y-\sinh^2 y=1$ 得: $\frac{u^2}{\cos^2 x}-\frac{v^2}{\sin^2 x}=1$. $\Rightarrow$ 双曲线

由 $\sin^2 y+\cos^2 y=1$ 得: $\frac{u^2}{\cosh^2 y}+\frac{v^2}{\sinh^2 y}=1$ $\Rightarrow$ 椭圆.

11. 判断极限是否存在，存在求之.

(1) $\lim\limits_{z\to i}\dfrac{z-i}{z(1+z^2)}$

(1) $z^2+1=z^2-i^2=(z+i)(z-i)$，则 $\dfrac{z-i}{z(1+z^2)}=\dfrac{1}{z(z+i)}\Rightarrow\lim\limits_{z\to i}=\dfrac{1}{i\times 2i}=-\dfrac{1}{2}$

12. 已知函数：

$$f(z)=\begin{cases}\dfrac{x^3-y^3+i(x^3+y^3)}{x^2+y^2}, & z\neq 0\\ 0, & z=0.\end{cases}$$

证明：(1) $f(z)$ 在 $z=0$ 处连续. (2) $f(z)$ 在 $z=0$ 处满足C-R方程. (3) $f(z)$ 在 $z=0$ 不可导.

(1) $z\neq0$ 时：$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)=\dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2}+i\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$.

$\Rightarrow u(x,y)=\dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2}=(x-y)\cdot\dfrac{x^2+xy+y^2}{x^2+y^2}=r(\cos\theta-\sin\theta)(1+\sin\theta\cos\theta)\Rightarrow\lim\limits_{r\to0}u(r\cos\theta,r\sin\theta)=0.$

同理可得：$\lim\limits_{r\to0}v(x,y)=\lim\limits_{r\to0}\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}=\lim\limits_{r\to0}r(\cos\theta+\sin\theta)(1-\sin\theta\cos\theta)=0.$

则 $\lim\limits_{z\to0}f(z)=0=f(0)$. 因此 $f(z)$ 在 $z=0$ 连续.

(2) $u_x(0,0)=\dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{(0,0)}=\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{u(\Delta x,0)-u(0,0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{\left(\frac{\Delta x^3-0}{\Delta x^2-0}\right)-0}{\Delta x}=1.$

$u_y(0,0)=\dfrac{\partial u}{\partial y}\Big|_{(0,0)}=\lim\limits_{\Delta y\to0}\dfrac{u(0,\Delta y)-u(0,0)}{\Delta y}=\lim\limits_{\Delta y\to0}\dfrac{\left(\frac{0-\Delta y^3}{0+\Delta y^2}\right)-0}{\Delta y}=-1.$

同理可得：$v_x(0,0)=1.\quad v_y(0,0)=1$

则 $f(z)$ 在 $z=0$ 有：$u_x=v_y.\quad u_y=-v_x\Rightarrow$ 满足C-R条件.

(3) $\dfrac{\Delta w}{\Delta z}=\dfrac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$，当 z 沿曲线 $y=kx$ 趋近于0时有

$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y=kx}}\dfrac{f(z)-f(0)}{z}=\lim\limits_{\substack{x\to0\\y=kx}}\dfrac{\frac{x^3-y^3+i(x^3+y^3)}{x^2+y^2}-0}{x+iy}=\lim\limits_{\substack{x\to0\\y=kx}}\dfrac{x^3(1-k^3)+ix^3(1+k^3)}{x^2(1+k^2)\cdot x(1+ik)}=\lim\limits_{\substack{x\to0\\y=kx}}\dfrac{1-k^3+i(1+k^3)}{(1+k^2)(1+ik)}=\dfrac{1-k^3+i(1+k^3)}{(1+k^2)(1+ik)}$

则 $f(z)$ 在 $z=0$ 不可导.

Δ判断复变函数在何处可导，何处解析

① 通过复变函数解析的充要条件判断.

13. 判断 (1) $f(z)=x^3-y^3+2x^2y^2i$ 在何处解析

$\Rightarrow u(x,y)=x^3-y^3.\ v(x,y)=2x^2y^2.\Rightarrow u_x=3x^2.\ u_y=-3y^2.\ v_x=4xy^2.\ v_y=4x^2y.$

由 $u_x=v_y$ 解得：$x=0$ 或 $y=\frac{3}{4}$；由 $u_y=-v_x$ 解得：$y=0$ 或 $x=\frac{3}{4}$

则 $f(z)$ 仅在 $(0,0)$，$(\frac{3}{4},\frac{3}{4})$ 两点解析.

(2) $f(z)=\bar{z}$.

令 $z=x+iy$. $f(z)=x-iy.\Rightarrow u=x.\ v=-y.\Rightarrow u_x=1.\ u_y=0.\ v_x=0.\ v_y=-1.\Rightarrow u_x\neq v_y.\ u_y=-v_x.$

则 $f(z)$ 在复平面内处处不解析.

② 解析函数经四则运算、复合、反函数仍为解析函数（初等解析函数）

对多项式 $P(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_n\ (a_0\neq0)$ 在全平面上解析.

对有理分式：$\dfrac{P(z)}{Q(z)}$ 在除使 $Q(z)=0$ 的点之外处处解析.

△ C-R方程的极坐标形式

14. 证明C-R的极坐标形式为：$\frac{\partial u}{\partial r}=-\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}$，$\frac{\partial v}{\partial r}=-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}$

⇒ 在极坐标系下：$f(z)=u(r,\theta)+iv(r,\theta)$.

1°. 当Δz沿径向$\Delta z=\Delta r e^{i\theta}$趋近于0，$(\Delta\theta=0)$ 则：

$$\text{则} \lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\lim_{\Delta re^{i\theta}\to 0}\frac{u(r+\Delta r,\theta)+iv(r+\Delta r,\theta)-u(r,\theta)-iv(r,\theta)}{\Delta re^{i\theta}}$$

$$=\lim_{\Delta r\to 0}\frac{u(r+\Delta r,\theta)-u(r,\theta)}{\Delta re^{i\theta}}+\lim_{\Delta r\to 0}\frac{iv(r+\Delta r,\theta)-iv(r,\theta)}{\Delta re^{i\theta}}=\left[\frac{\partial u}{\partial r}+i\frac{\partial v}{\partial r}\right]e^{-i\theta}$$

2°. 当Δz沿切向$\Delta z=ire^{i\theta}\Delta\theta$趋近于0，$(\Delta r=0)$ 则：

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\lim_{ire^{i\theta}\Delta\theta\to 0}\frac{u(r,\theta+\Delta\theta)+iv(r,\theta+\Delta\theta)-u(r,\theta)-v(r,\theta)}{ire^{i\theta}\Delta\theta}$$

$$=\lim_{\Delta\theta\to 0}\frac{u(r,\theta+\Delta\theta)-u(r,\theta)}{ire^{i\theta}\Delta\theta}+\lim_{\Delta\theta\to 0}\frac{iv(r,\theta+\Delta\theta)-iv(r,\theta)}{ire^{i\theta}\Delta\theta}=\left[\frac{\partial u}{\partial \theta}+i\frac{\partial v}{\partial \theta}\right](-i)\frac{1}{r}e^{-i\theta}$$

对比两式，有：$\frac{\partial u}{\partial r}=-\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}$，$\frac{\partial v}{\partial r}=-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}$

△ 给定复变函数的实部或虚部，确定其虚部或实部（求正交曲线簇）

若给定复变函数$f(z)$的实部$u(x,y)$. ① 根据C-R条件可以得到$v(x,y)$的两个偏导数

$$\Rightarrow \begin{cases} v_x=-u_y \\ v_y=u_x \end{cases}$$ ② 根据$u(x,y)$对x、y的偏微分求原函数，三种方法：

a. 偏积分：首先对v_x积分，注意常数项为y的函数 ⇒ $\int v_x dx=\int -u_y dx=u(x,y)+\varphi(y)$.

b. 曲线积分：⇒ $v(x,y)=\int v_x dx+v_y dy=\int (-u_y)dx+u_x dy$.（注意$dy$积分下限有时会产生负项！）

c. 全微分：凑.

15. 已知在区域D内，$u(x,y)$和$v(x,y)$为共轭调和函数，求$au(x,y)+bv(x,y)$的共轭调和函数.

⇒ 运用曲线积分法：令$f(x,y)=au(x,y)+bv(x,y)$，其共轭调和函数为$h(x,y)$

则有 $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial h}{\partial y}=au_x+bv_x$，$\frac{\partial f}{\partial y}=-\frac{\partial h}{\partial x}=au_y+bv_y$.

$$\therefore h(x,y)=\int -(au_y+bv_y)dx+(au_x+bv_x)dy=a\int -u_y dx+u_x dy+b\int -v_y dx+v_x dy$$

$$=a\int v_x dx+v_y dy+b\int -u_x dx-u_y dy=a\int dv-b\int du=av(x,y)-bu(x,y).$$

16. 下列等式是否正确？ → $\mathrm{Ln}z^2=\mathrm{Ln}z+\mathrm{Ln}z\neq 2\mathrm{Ln}z$.

(1) $\mathrm{Ln}z^2=2\mathrm{Ln}z$：不正确. $\mathrm{Ln}z^2=2\ln r+i(2\theta+\underline{2k\pi})$. $2\mathrm{Ln}z=2\ln r+i(2\theta+\underline{4k\pi})$.

(2) $e^{\mathrm{Ln}z}=z$：正确. 幂函数的定义

(3) $\mathrm{Ln}\sqrt{z}=\frac{1}{2}\mathrm{Ln}z$：不正确。因为 $\frac{1}{2}\mathrm{Ln}z=\frac{1}{2}(\ln r+i(\theta+2k\pi))=\frac{1}{2}\ln r+i(\frac{1}{2}\theta+k\pi)$ 而 $\sqrt{z}=\sqrt{r}e^{\frac{\theta+2k\pi}{2}i}=\sqrt{r}e^{\frac{\theta}{2}i}, -\sqrt{r}e^{\frac{\theta}{2}i}$.

$$\Rightarrow \mathrm{Ln}\sqrt{z}=\begin{cases}\mathrm{Ln}\sqrt{r}e^{\frac{\theta}{2}i}=\frac{1}{2}\ln r+i(\frac{\theta}{2}+2k\pi). \\ \mathrm{Ln}\sqrt{r}e^{\frac{\theta+2\pi}{2}i}=\frac{1}{2}\ln r+i(\frac{\theta}{2}+2(k+1)\pi).\end{cases}$$

(4) $\mathrm{Ln}e^{z}=z$：不正确，分析见下页

△ 圆的参数方程：$(z-z_0)=re^{i\theta}$.

表示一个圆周：$|z-z_0|=r$

令 $w=e^z=u+iv$. 则由 $e^z=e^{x+iy}=e^x(\cos y+i\sin y)$ 得：$u=e^x\cos y$, $v=e^x\sin y$.

$\Rightarrow \mathrm{Ln}e^z=\mathrm{Ln}w=\ln\sqrt{u^2+v^2}+i(\arctan\frac{v}{u}+2k\pi)=\ln\sqrt{e^{2x}(\cos^2y+\sin^2y)}+i(\arctan(\tan y)+2k\pi)=x+i(y+2k\pi)\neq z$

由此可知 $\ln e^z=z$. 且 $w=e^z$ 和 $z=\mathrm{Ln}w$ 不能相互推导.

△题型：解复方程

17. 求解下列方程.

(1) $e^{2z}-1+\sqrt{3}i=0$

$\Rightarrow$ 运用 $\ln e^z=z$ 进行求解：$e^{2z}=1-\sqrt{3}i \Rightarrow z=\frac12\ln(1-\sqrt{3}i)=\frac12\ln2+\frac12 i(-\frac{\pi}{3}+2k\pi)=\frac12\ln2+i(k-\frac16)\pi$.

(2) $\ln z=\frac{\pi}{2}i \Rightarrow e^{\ln z}=z$ （$\mathrm{Ln}z=\frac{\pi}{2}i \Rightarrow$ 错误说法！列等式的都是单值式）

(3) $\cos z=2 \Rightarrow z=\mathrm{Arccos}2=-i\mathrm{Ln}(2\pm\sqrt{3})=2k\pi-i\ln(2\pm\sqrt{3})$. $k=0,1,2\cdots$

(4) $\sin z-\cos z=2 \Rightarrow \sqrt{2}\sin(z-\frac{\pi}{4})=2 \Rightarrow z-\frac{\pi}{4}=\mathrm{Arcsin}\sqrt{2} \Rightarrow z=(2k+\frac14)\pi-i\ln(\sqrt{2}\pm1)$.

(5) $\cos z=i\sinh5$

$\Rightarrow \cos z=\cos(x+iy)=\cos x\cos iy-\sin x\sin iy=\cos x\cosh y-i\sin x\sinh y=i\sinh5$

对比可得：$\begin{cases}\cos x\cosh y=0\\ -\sin x\sinh y=\sinh5\end{cases}$ 因为 $\cosh y=\frac{e^z+e^{-z}}{2}\neq0$，所以 $\cos x=0 \Rightarrow x=(k+\frac12)\pi$.

$\Rightarrow \sin x=(-1)^k \Rightarrow (-1)^{k+1}\sinh y=\sinh5 \Rightarrow y=(-1)^{k+1}5$.

$\therefore z=(k+\frac12)\pi+i(-1)^{k+1}5$.

(6) $\sin iz=i$.

$\Rightarrow iz=\mathrm{Arcsin}i=-i\mathrm{Ln}(-1\pm\sqrt{2})=\begin{cases}-i(\ln(-1+\sqrt{2})+2k\pi i)=2k\pi-i\ln(-1+\sqrt{2})\\ -i(\ln(-1-\sqrt{2})+(\pi+2k\pi)i)=(2k+1)\pi-i\ln(-1-\sqrt{2})\end{cases}$

$\Rightarrow z=\begin{cases}-\ln(-1+\sqrt{2})-2k\pi i\\ -\ln(-1-\sqrt{2})-(2k+1)\pi i.\end{cases}$

$\Downarrow$

注意此处 $-1\pm\sqrt{2}$ 的 arg 值不相同.

(7) $\sin z+i\cos z=4i \Rightarrow \cos z-i\sin z=4 \Rightarrow e^{-iz}=4$

(8) $|\tanh z|=1$

$\Rightarrow \tanh z=\frac{e^z-e^{-z}}{e^z+e^{-z}}=\frac{e^{2z}-1}{e^{2z}+1} \Rightarrow |e^{2z}-1|=|e^{2z}+1|$.

又 $e^{2z}\neq0$. 则 $e^{2z}=i$. 即 $e^{2x}(\cos2y+i\sin2y)=1 \Rightarrow \begin{cases}e^{2x}=1\\ \cos2y=0\end{cases}$

$\Rightarrow x=0$. $y=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}$. $\Rightarrow z=i(\frac14+\frac{k}{2})\pi$.

18. 设 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 为 $z=x+iy$ 的解析函数. 记

$$w(z,\bar{z})=u\left(\frac{z+\bar{z}}{2},\frac{z-\bar{z}}{2i}\right)+iv\left(\frac{z+\bar{z}}{2},\frac{z-\bar{z}}{2i}\right)$$ 证明 $\frac{\partial w}{\partial \bar{z}}=0$.

⇒ 直接求导：$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}}=u_x\cdot\frac{1}{2}+u_y\cdot\left(-\frac{1}{2i}\right)+iv_x\cdot\frac{1}{2}+iv_y\left(-\frac{1}{2i}\right)$

$$=\frac{1}{2}u_x+\frac{i}{2}u_y+\frac{i}{2}v_x-\frac{1}{2}v_y=0$$

△ $f(z)$ 可导/解析 ⟺ $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}=0$，证明：

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \bar{z}}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \bar{z}}=\left(\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial u}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial y}\right)\left(\frac{1}{-i}\right)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}+i\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial y}=0$$

19. 设 $f(z)$ 为解析函数 则有：

(1) $\left(\frac{\partial}{\partial x}|f(z)|\right)^2+\left(\frac{\partial}{\partial y}|f(z)|\right)^2=|f'(z)|^2$ (2) $\frac{\partial^2}{\partial x^2}|f(z)|^2+\frac{\partial^2}{\partial y^2}|f(z)|^2=4|f'(z)|^2$

20. 设D为关于实轴对称的区域，证明：函数 $f(z)$ 与 $\overline{f(\bar{z})}$ 在D内同时解析.

证一：设 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$，则 $\overline{f(\bar{z})}=u(x,-y)-iv(x,-y)$.

由 $f(z)$ 解析 ⟺ $u_x=v_y$，$u_y=-v_x$. 记 $\varphi(x,y)=u(x,-y)$，$\psi(x,y)=-v(x,-y)$

⇒ $\varphi_x=u_x$，$\varphi_y=-u_y$，$\psi_x=-v_x$ $\psi_y=v_y$

则存在 φ,ψ 可微且，$\varphi_x=\psi_y$. $\varphi_y=-\psi_x$. 即 $\overline{f(\bar{z})}$ 解析.

证二：令 $g(z)=\overline{f(\bar{z})}$. 则：

$$\lim_{z\to z_0}\frac{g(z)-g(z_0)}{z-z_0}=\lim_{z\to z_0}\frac{\overline{f(\bar{z})}-\overline{f(\bar{z}_0)}}{z-z_0}=\lim_{z\to z_0}\left(\overline{\frac{f(\bar{z})-f(\bar{z}_0)}{\bar{z}-\bar{z}_0}}\right)$$

若 $f(x)$ 在 $\bar{z}_0$ 可导. 则由上式可知 $g(z)=\overline{f(\bar{z})}$ 在点 z_0 可导且 $g'(z_0)=\overline{f'(\bar{z}_0)}$

反之. 若 $g(z)$ 在 z_0 可导. 则 $f(z)=\overline{g(\bar{z})}$ 在 z_0 可导. 由解析定义知 $f(x)$ 和 $\overline{f(\bar{z})}$ 同时解析

21. 判断下列函数的多值性.

(1) $\sin\sqrt{z}$ (2) $\cos\sqrt{z}$ (3) $\frac{\sin\sqrt{z}}{\sqrt{z}}$ (4) $\mathrm{Ln}\sin z$

⇒ (1) $\sin\sqrt{z}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(\sqrt{z})^{2n+1}}{(2n+1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^n\cdot\sqrt{z}}{(2n+1)!}$ ⇒ 多值函数(双值)

(2) $\cos\sqrt{z}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(\sqrt{z})^{2n}}{(2n)!}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^n}{(2n)!}$ ⇒ 单值函数

(3) $\frac{\sin\sqrt{z}}{z}=\frac{1}{\sqrt{z}}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(\sqrt{z})^{2n+1}}{(2n+1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^n}{(2n+1)!}$ ⇒ 单值函数

(4) $\mathrm{Ln}\sin z=\mathrm{Ln}\,\xi$、$\xi=0$ 为支点、即 $z=k\pi$ ($k=0,\pm1,\pm2\cdots$) 为支点 ⇒ 多值函数 无穷多值.

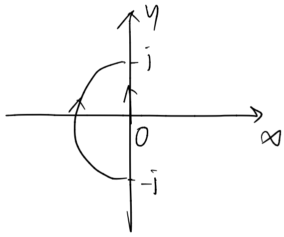
△ 初等解析函数的级数表达式(泰勒展开).

$\sin z=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$，$\cos z=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}$，$e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$

Δ复变函数积分基本操作

1、计算从$A=-i$到$B=i$的积分$\int_c |z|dz$的值，其中C为：

(1) 线段AB. (2) 左半单位圆.



(1) 令 $z=x+iy$. 则 $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$. $dz=dx+idy$

$$\Rightarrow \int_c |z|dz = \int_c \sqrt{x^2+y^2}(dx+idy) \underset{\substack{x=0\\dx=0}}{=} i\left[\int_{-1}^{0} -y\,dy + \int_0^1 y\,dy\right]$$

$$= i\left[-\tfrac{1}{2}y^2\Big|_{-1}^{0} + \tfrac{1}{2}y^2\Big|_0^1\right] = i$$

或者利用参数方程：写出z的参数方程 $z(t)=x(t)+iy(t)$. $x(t)=0$. $y(t)=t$. $(t\in[-1,1])$

即 $z(t)=iy(t)$. $|z|=|y|=i|t|$ $dz=dy(t)=dt$ $\Rightarrow \int_c |z|dz = \int|t|dt = i\int_{-1}^{0}-t\,dt + i\int_0^1 t\,dt = i$.

(2). 直接用参数方程较方便：$z=e^{it}$, $t:\frac{3}{2}\pi\to\frac{1}{2}\pi$. $\Rightarrow |z|=|e^{it}|=1$, $dz=ie^{it}dt$.

$$\Rightarrow \int_c |z|dz = \int_c ie^{it}dt = i\int_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\cos t+i\sin t)dt = i\left[\int_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos t\,dt + i\int_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin t\,dt\right] = 2i.$$

○ 计算积分 $\int_{|z|=1}\frac{dz}{z}$, $\int_{|z|=1}\frac{dz}{|z|}$, $\int_{|z|=1}\frac{|dz|}{z}$. $\int_{|z|=1}\left|\frac{dz}{z}\right|$.

(1) $z=e^{i\theta}$, $dz=ie^{i\theta}$. $\Rightarrow \oint_{|z|=1}\frac{dz}{z} = \oint_0^{2\pi} i\,d\theta = 2\pi i$

(2) $\oint_{|z|=1}\frac{dz}{|z|} = \oint_{|z|=1}dz = 0$

(3) $z=e^{i\theta}$. $|dz|=|ie^{i\theta}d\theta| = d\theta$. $\Rightarrow \int_{|z|=1}\frac{|z|}{z} = \oint_{|z|=1} e^{-i\theta}d\theta = i\oint_{|z|=1}de^{-i\theta} = i\cdot e^{-i\theta}\Big|_0^{2\pi} = 0$

(4) $z=e^{i\theta}$. $dz=ie^{i\theta}d\theta$. $\Rightarrow |z|=1$. $|dz|=|ie^{i\theta}d\theta|=d\theta$. $\Rightarrow \oint_{|z|=1}\left|\frac{dz}{z}\right| = \oint_{|z|=1}d\theta = 2\pi$

2. 设C_r为圆周$|z|=r$在第I象限中的部分，方向为正. 函数$f(z)$在C_r上连续，且 $\lim\limits_{z\to 0} zf(z)=0$. 证明：$\lim\limits_{r\to 0}\int_{C_r}f(z)dz=0$. 并计算极限 $\lim\limits_{r\to 0}\int_{C_r}\frac{P(z)}{z}dz$. 其中 $P(z)=C_0+C_1z+C_2z^2+\cdots C_nz^n$. $C_0\neq 0$.

(1) 由 $\lim\limits_{z\to 0}zf(z)=0$ 得：$\forall\varepsilon>0$. $\exists\delta>0$. 当$|z|<\delta$时. 有$|zf(z)|<\varepsilon$.

C_r的参数方程为$z=re^{i\theta}$, $\theta:0\to\frac{\pi}{2}$. 则 $\left|\int_{C_r}f(z)dz\right| = \left|\int_{C_r}f(re^{i\theta})rie^{i\theta}d\theta\right| \le \int_0^{\frac{\pi}{2}}|f(re^{i\theta})re^{i\theta}||d\theta| \le \frac{\pi}{2}\varepsilon$

则 $\lim\limits_{r\to 0}\int_{C_r}f(z)dz=0$.

(2)

Δ 积分的估值不等式的应用：$\left|\int_c f(z)dz\right| \le \int_c |f(z)||dz| \le ML$.

○ 设γ为半径为1的上半正向半圆周. 求证. $\left|\int_\gamma \frac{e^z}{z}dz\right| \le \pi e$.

$$\Rightarrow \left|\int_\gamma\frac{e^z}{z}dz\right| \le \int_\gamma\left|\frac{e^z}{z}\right||dz| = \int_\gamma\frac{|e^z|}{|z|}|dz| = \int_\gamma|e^z||dz| = \int_\gamma e^x|dz| \le e\int_\gamma|dz| = \pi e$$

○ 设C为正向圆周$|z|=2$在第I象限中的部分. 求证 $\left|\int_c\frac{1}{1+z^2}dz\right| \le \frac{\pi}{3}$.

$$\Rightarrow \left|\int_c\frac{1}{1+z^2}dz\right| \le \int_c\left|\frac{1}{1+z^2}\right||dz| \le \int_c\frac{1}{|1+z^2|}|dz| \le \int_c\frac{1}{||z|^2-1|}|dz| = \frac{1}{3}\int_c|dz| = \frac{\pi}{3}$$

⇒ 搭配使用：$\underline{|z_1z_2|=|z_1||z_2|}$. $\underline{\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|}}$, $\underline{|z_1+z_2|\le|z_1|+|z_2|}$, $\underline{|z_1-z_2|\ge||z_1|-|z_2||}$.

○ 试证 $\left|\int_{|z|=r}\frac{dz}{(z+a)(z-a)}\right| < \frac{2\pi r}{|r^2-|a|^2|}$ $(r>0,\ |a|\neq r)$.（熟练运用不等式）

原式 $\leq \int_{|z|=r}\frac{|dz|}{|z^2-a^2|} < \int_{|z|=r}\frac{|dz|}{|r^2-|a|^2|} = \frac{2\pi r}{|r^2-|a|^2|}$

△ 积分基本定理的应用（注意被积函数的奇点）及其推论

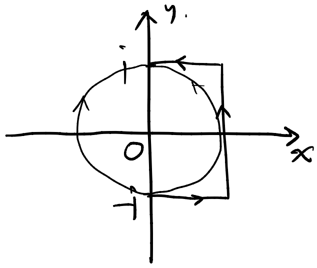
3. 计算积分 $\oint_c (z^2+2e^{-z}+\sin z)dz$. 其中 C 为正向圆周 $|z|=4$.

由 $(z^2+2e^{-z}+\sin z)$ 解析，得 原式 $=0$（判断复变函数解析性的第二条）

4. 计算积分 $\oint_c \frac{e^z}{z(z-1)}dz$. 其中 C 为正向圆周 $|z+1|=\frac{1}{2}$.

在积分区域内 $f(z)$ 无奇点且解析，因此原式为 0.

○ 计算积分 $\int_{-i}^{i}\frac{dz}{z}$. 其路径如右图 [推论3.1]



⇒ 被积函数 $f(z)=\frac{1}{z}$ 的解析区域为：从原点沿负实轴剪开的平面.

由积分基本定理推论，该积分与路径无关，设定路径为右半单位圆周

取 $z=e^{i\theta}$，$dz=ie^{i\theta}d\theta \Rightarrow \int_{-i}^{i}\frac{dz}{z}=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}e^{-i\theta}\cdot ie^{i\theta}d\theta = i\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \pi i$

若按照原路径计算：$\int_{-i}^{i}\frac{dz}{z}=\int_0^1\frac{dx}{x-i}+\int_{-1}^{1}\frac{idy}{1+iy}+\int_1^0\frac{dx}{x+i} = Ln(1-i)-Ln(-i)+Ln(1+i)-Ln(1-i)$
$+Ln(i)-Ln(1+i)$

$= Ln(i)-Ln(-i) = i(\frac{\pi}{2}+2k\pi)-i(-\frac{\pi}{2}+2k\pi)=\pi i$

但是若设定路径为左单位半圆周，积分为：$\int_{-i}^{i}\frac{dz}{z} = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}e^{-i\theta}\cdot ie^{i\theta}d\theta = -\pi i$

（对此可以理解为：此题中 $z=0$ 为被积函数的奇点，则 $f(z)$ 的解析区域因为是单连通区域，因此需从原点出发剪开一个平面，认为沿负实轴剪开的平面是解析区域，则左半圆周上 $f(z)$ 并不解析，因此结果不正确）

同样地，若设定路线为从 $-i$ 到 i 的直线段，则 $\int_{-i}^{i}\frac{dz}{z}=\int_{-1}^{1}\frac{idy}{iy}$ ⇒ 错误

○ 证明：$\int_0^{\pi}\frac{1+2\cos\theta}{5+4\cos\theta}d\theta=0$.（由 $\int_c\frac{dz}{z+2}=0$，C 为正向圆周 $|z|=1$ 证明）

⇒ $z=\cos\theta+i\sin\theta$，$dz=-\sin\theta+i\cos\theta$ ⇒ $\oint\frac{dz}{z+2}=\oint\frac{-\sin\theta+i\cos\theta}{\cos\theta+2+i\sin\theta}d\theta=\oint\frac{1+2\cos\theta}{5+4\cos\theta}d\theta=0$

Δ 柯西定理推广(复合闭路定理)的应用

⇒ 运用复合闭路定理：对于积分 $\oint_{\Gamma} f(z)dz$，被积函数在Γ内有奇点，设奇点为 $z_1, z_2 \cdots z_n$，则作n个包含奇点的正向圆周 $C_1, C_2 \cdots C_n$，原积分可化为：$\left(\oint_{\Gamma+C_1^-+C_2^-+\cdots+C_n^-} + \oint_{C_1^++C_2^++\cdots+C_n^+}\right) f(z)dz$，其中前者由积分基本定理可知为0，后者运用结论计算：

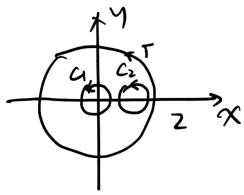
(遇见此类积分，可直接将积分曲线变化为包含奇点的正向曲线 ⇒ 推论)

即：$\oint_C f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \oint_{C_k} f(z)dz$ (其中 C_k 为包含 $f(z)$ 奇点的正向闭曲线)

O 熟练运用结论：$I = \oint_C \frac{1}{(z-z_0)^{n+1}}dx = \begin{cases} 2\pi i, & n=0 \\ 0, & n\neq 0 \end{cases}$，其中C为包含 z_0 的任意正向闭区线 $\left(\oint_C \frac{1}{(z-z_0)^n}dz\right)$

O、计算积分：$\oint_{|z|=2} \frac{1}{z(z-1)}dz = \oint_{C_1+C_2}\left(\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z}\right)dz = \oint_{C_1+C_2}\frac{1}{z-1}dz - \oint_{C_1+C_2}\frac{1}{z}dz$

$= \oint_{C_2}\frac{1}{z-1}dz - \oint_{C_1}\frac{1}{z}dz = 2\pi i - 2\pi i = 0$



Δ 柯西积分公式的应用 $\left(\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz\right)$

⇒ 运用柯西积分公式计算闭线积分：对积分 $\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz$ 来说，$z=z_0$ 为被积函数的奇点。
若积分曲线C围成的区域D不包含该奇点(即被积函数处处解析)，则原积分为0。
若D内包含奇点，且只有唯一奇点 $z=z_0$，则原积分可用 $f(z)$ 在该点函数值表示：$2\pi i f(z_0) = \oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz$

O 求积分 $\oint_{|z|=1} \frac{e^z}{z}dz$ 的值，并证明定积分 $\int_0^{\pi} e^{\cos\theta}\cos(\sin\theta)d\theta = \pi$

⇒ $\oint_{|z|=1} \frac{e^z}{z}dz = 2\pi i$，令 $z=e^{i\theta}$，则有 $\int_0^{2\pi} e^{\cos\theta}[\cos(\sin\theta)+i\sin(\sin\theta)]d\theta = \int_0^{2\pi}\frac{e^z}{iz}dz = 2\pi$

则 $\int_0^{2\pi} e^{\cos\theta}\cos(\sin\theta)d\theta = \int_0^{2\pi} Re[e^{\cos\theta}(\cos(\sin\theta)+i\sin(\sin\theta))]d\theta = Re\left[\int_0^{2\pi}\frac{e^z}{iz}dz\right] = 2\pi$

又 $\int_0^{2\pi} e^{\cos\theta}\cos(\sin\theta)d\theta = \left(\int_0^{\pi}+\int_{\pi}^{2\pi}\right)e^{\cos\theta}\cos(\sin\theta)d\theta$，其中 $\int_{\pi}^{2\pi} e^{\cos\theta}\cos(\sin\theta)d\theta \overset{\theta=2\pi-\alpha}{=\!=\!=} \int_{\pi}^{0} e^{\cos(2\pi-\alpha)}\cos(\sin(2\pi-\alpha))(-d\alpha)$

$= \int_0^{\pi} e^{\cos\alpha}\cos(\sin\alpha)d\alpha$，所以 $\int_0^{\pi} e^{\cos\theta}\cos(\sin\theta)d\theta = \pi$

或者也由 $\int_{\pi}^{2\pi} e^{\cos\theta}\cos(\sin\theta)d\theta = \int_{-\pi}^{0} e^{\cos\theta}\cos(\sin\theta)d\theta = \int_0^{-\pi} e^{\cos\theta}\cos(\sin\theta)(-d\theta) = \int_0^{\pi} e^{\cos\theta}\cos(\sin\theta)d\theta$

O 计算积分 $\oint_{|z|=2} \frac{2z^2-z+1}{z-1}dz$。⇒ 原式 $= 2\pi i(2z^2-z+1)\Big|_{z=1} = 4\pi i$

Δ 不能把有奇点的因子约掉

△解析函数高阶导数公式的应用（$\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^n}dz$）

○ 计算积分 $I=\int_0^{2\pi} e^{\cos\theta}\cos(n\theta-\sin\theta)d\theta$

⇒ 尽量将此积分式化为关于 z 的积分式，即可运用定理求解

$e^{\cos\theta}(n\theta-\sin\theta)$ 和 $z=re^{i\theta}$ 比较相似，因此考虑将其转化为 f(z) 的积分

由题有 $e^{\cos\theta}[\cos(n\theta-\sin\theta)+i\sin(n\theta-\sin\theta)]=e^{\cos\theta+in\theta-i\sin\theta}=e^{e^{-i\theta}+in\theta}=e^{e^{-i\theta}}\cdot e^{in\theta}$

则令 $z=e^{-i\theta}$，上式可化为：$e^z\cdot z^{-n}=\frac{e^z}{z^n}$ 且有 $dz=-ie^{-i\theta}d\theta=-izd\theta$，即 $d\theta=\frac{1}{iz}dz$

⇒ $I'=\int_0^{2\pi}e^{\cos\theta}[\cos(n\theta-\sin\theta)+i\sin(n\theta-\sin\theta)]d\theta=\oint_{|z|=1}\frac{e^z}{iz^{n+1}}dz$（注意积分区域的变化）

由高阶导数公式：$\oint_{|z|=1}\frac{e^z}{iz^{n+1}}dz=\frac{1}{i}\cdot\frac{2\pi i}{n!}\cdot(e^z)^{(n)}\big|_{z=0}=\frac{2\pi}{n!}$.

✓ 设函数 f(z) 在 $|z|\le 2$ 上解析，且在 $|z|=2$ 上有 $|f(z)-z|\le|z|$，证明：$|f'(1)|\le 8$

建立积分：$I=\oint_{|z|=\frac{1}{2}}\frac{f(z)}{(z-1)^2}dz$，则显然 $I=2\pi i f'(1)$

另方面 $\left|\oint_{|z|=\frac{1}{2}}\frac{f(z)}{(z-1)^2}dz\right|\le\oint_{|z|=\frac{1}{2}}\frac{|f(z)|}{|(z-1)^2|}|dz|$，其中由 $|f(z)-z|\le\big||f(z)|-|z|\big|\le|z|\le 2$ 得 $|f(z)|\le 4$

对 $|z|=\frac{1}{2}$ 有 $|(z-1)^2|\le\frac{1}{4}$，则上式 $\le 16\oint_{|z|=\frac{1}{2}}|dz|=16\pi$，即 $|f'(1)|\le\left|\frac{I}{2\pi i}\right|=\frac{|I|}{2\pi}\le 8$

或者建立对 $|z|=2$ 的积分

○ 设函数 f(z) 在 $|z|<1$ 内解析，且 $f(0)=1$，$f'(0)=2$。(1) 计算积分 $I_1=\oint_{|z|=1}\frac{(z+1)^2}{z^2}f(z)dz$

(2) 计算积分 $I_2=\int_0^{2\pi}\cos^2\frac{\theta}{2}f(e^{i\theta})d\theta$

(1) 由柯西导数公式容易得 $I_1=2\pi i[(z+1)^2f(z)]'\big|_{z=0}=8\pi i$

(2) 将(1)中令 $z=e^{i\theta}$，则 $I_1=4i\int_0^{2\pi}\cos^2\frac{\theta}{2}f(e^{i\theta})d\theta$，则 $I_2=\frac{1}{4i}I_1=2\pi$.

○ 计算积分 $\oint_{|z|=1}(z+\frac{1}{z})^{2n}\frac{dz}{z}$，并证明 $\int_0^{2\pi}\cos^{2n}\theta d\theta=\frac{2\pi(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}=2\pi\cdot\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$

⇒ 基本上都是令 $z=e^{i\theta}$.

● 设 D 为单连通区域，$z_0\in D$，f(z) 在 D 内除 z_0 外均解析，且 $|f(z)|$ 在 z_0 的邻域内有界，证明：$\oint_C f(z)dz=0$，其中 C 为 D 内任一包含 z_0 的闭曲线.

⇒ 由积分基本定理的推论知：$\oint_C f(z)dz=\oint_{C'}f(z)dz$，其中 C' 为 $z=z_0$ 邻域内包含 z_0 在内的闭曲线

则由 $|f(z)|$ 在 z_0 邻域内有界得：$\exists M>0$，使得 $|f(z)|\le M$

同时有 $\left|\oint_{C'}f(z)dz\right|\le\oint_{C'}|f(z)||dz|\le M\oint_{C'}|dz|$，由 C' 为任意闭曲线，则当 C' 趋于无限小时 $\oint_{C'}|dz|\to 0$

即 $0<\left|\oint_{C'}f(z)dz\right|\le M\oint_{C'}|dz|\to 0$，由 z 的任意性可知 $\left|\oint_C f(z)dz\right|=0$，即 $\oint_C f(z)dz=0$.

○ 设 $f(z)=\oint_{|\zeta|=2}\frac{\zeta^3+2\zeta+1}{(\zeta-z)^2}d\zeta$，求 $f'(i)$. [例3.18]

$\Rightarrow f(z)=\oint_{|\zeta|=2}\frac{\zeta^3+2\zeta+1}{(\zeta-z)^2}d\zeta=2\pi i(\zeta^3+2\zeta+1)\Big|_{\zeta=z}=2\pi i(3z^2+2)\Rightarrow f'(i)=-12\pi$,

○ 求积分 $\oint_{|z|=1}\frac{e^z}{z}dz$. 计算 $\int_0^{\pi}e^{\cos\theta}(\sin\theta)d\theta=\pi$.

$\Rightarrow \int_0^{2\pi}e^{\cos\theta}[\cos(\sin\theta)+i\sin\theta(\sin\theta)]d\theta=2\int_0^{\pi}e^{\cos\theta}\cos(\cos\theta)d\theta$.

复级数

Δ复数项级数.

○[题型]判别级数敛散性.

(1) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(1+i)^n}{2^{\frac{n}{2}}\cos in}$ (2) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{i^n}{n}$ 和 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{i^n}{n^\alpha}(\alpha>0)$ (3) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(1+i)^{2n}}$ (4) $\sum_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{n^2})e^{\frac{i\pi}{n}}$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{\frac{i\pi}{n}}}{n}$ (5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+(-i)^{2n+1}}{n}$

(6) $\sum_{n=2}^{\infty}\sin(n\pi+\frac{1}{\ln n})$ (7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^n}{\ln n}$ (8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos ni}{2^n}$ (9) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+(\frac{1}{2}i)^n}$

⇒(1) 首先判断函数项是否收敛: $\left|\frac{(1+i)^n}{2^{\frac{n}{2}}\cos in}\right| \le \left|\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^n\right| = \left|\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right|^n = 1$ ⇒无法判断.

考虑比较审敛法: $\left|\frac{(1+i)^n}{2^{\frac{n}{2}}\cos in}\right| = \left|\frac{(1+i)^n}{2^{\frac{n}{2}}}\right|\cdot\left|\frac{1}{\cosh n}\right| = \frac{2}{e^n+e^{-n}} < \frac{2}{e^n} < 1$. 由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{e^n}$ 收敛. 则原级数收敛.

(2) 首先有 $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{i^n}{n^\alpha}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ ⇒ 发散.

再有: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^n}{n^\alpha} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}(\cos\frac{n\pi}{2}+i\sin\frac{n\pi}{2})$ ⇒ $Re = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}\cos\frac{n\pi}{2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)^\alpha}$, 由交错级数相关性质 知其收敛

同理 $Im = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}\sin\frac{n\pi}{2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^\alpha}\cdot\sin\frac{(2n+1)\pi}{2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)^\alpha}$ ⇒收敛, 则原级数是收敛的.

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{1}{(1+i)^{2n}}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{1}{1+i}\right|^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{|1+i|}\right)^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ ⇒收敛⇒绝对收敛

(4)

(5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+(-i)^{2n+1}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+(-1)^n i}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}+i\frac{1}{n}(-1)^n\right)$ ⇒显然发散.

(6) $\sum_{n=2}^{\infty}\sin(n\pi+\frac{1}{\ln n}) = \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\sin\frac{1}{\ln n}$ ⇒ 交错级数收敛

(7) $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{i^n}{\ln n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln n} > \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ ⇒发散.

又 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^n}{\ln n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln n}(\cos\frac{n\pi}{2}+i\sin\frac{n\pi}{2}) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n}{\ln(2n)}+\frac{(-1)^m}{\ln(2m+1)}\right]$ ⇒收敛. } ⇒条件收敛

(8) $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\cos ni}{2^n}\right| < \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ ⇒收敛⇒绝对收敛.

(9) 令 $a_n = \frac{1}{1+(\frac{1}{2}i)^n}$, 则 $\lim_{n\to\infty}a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{2^n}(\cos\frac{n\pi}{2}+i\sin\frac{n\pi}{2})} = 1 \ne 0$ ⇒ 发散.

○[题型]求幂级数的收敛半径.

(1) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{2n-1}{2^n}\cdot z^{2n-1}$. (2) $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n})^n\cdot(z-i)^{n(n+1)}$.

(1)⇒ 令 $f_n(z) = (-1)^n\cdot\frac{2n-1}{2^n}\cdot z^{2n-1}$, 则由 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{f_{n+1}(z)}{f_n(z)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}\cdot\frac{2n+1}{2^{n+1}}\cdot z^{2n+1}}{(-1)^n\cdot\frac{2n-1}{2^n}\cdot z^{2n-1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)}{2}\cdot\frac{2n+1}{2n-1}\cdot z^2\right| = \frac{1}{2}|z|^2$.

当 $\frac{1}{2}|z|^2<1$ 时, 幂级数绝对收敛; 当 $\frac{1}{2}|z|^2>1$ 时 幂级数发散. 故收敛半径 $R=\sqrt{2}$.

(2) 令 $f_n(z) = (\frac{1}{n})^n\cdot(z-i)^{n(n+1)}$ ⇒ $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{f_{n+1}(z)}{f_n(z)}\right| =$

⇒对于缺项幂级数, 不能用系数模比值/根值法确定收敛半径, 可使用数项级数的比值/根值判别法, $\lim_{n\to\infty}\frac{C_{n+1}}{C_n}$, $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{C_n}$.

○[题型]讨论级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(z^{n+1}-z^n)$ 的敛散性.

⇒ $\sum_{n=0}^{\infty}(z^{n+1}-z^n) = z^{n+1}-1$. 则当 $z=1$ 时 级数收敛于0, 当 $|z|<1$ 时 级数收敛于 -1.

当 $z=-1$ 时 由 $(-1)^{n+1}=-1$ 或1 知级数发散, 当 $z=e^{i\theta}, \theta\ne0$ 时, $\cos n\pi \cdot \sin n\pi$ 均无极限. 因此发散

当 $|z|>1$ 时 显然发散.

○[题型]求下列级数的和函数

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}nz^n$ (2) $\frac{1}{1\times2}+\frac{z}{2\times3}+\frac{z^2}{3\times4}+\frac{z^3}{4\times5}+\cdots$

$\Rightarrow$ (1) $S(z)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}nz^n=z-2z^2+3z^3-4z^4+\cdots$

$\Rightarrow zS(z)=z^2-2z^3+3z^4-4z^5+\cdots$ 两式相加：$(z+1)S(z)=z-z^2+z^3-z^4\cdots=-(-z+z^2-z^3+z^4+\cdots)$

$=-\frac{-z(1-(-z)^n)}{1+z}=\frac{z}{1+z}$. $(|z|<1)$

即 $S(z)=\frac{z}{(1+z)^2}$. $|z|<1$

(2) $S(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{n-1}}{n(n+1)}\Rightarrow z^2S(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{n+1}}{n(n+1)}$. 求导有 $[z^2S(z)]''=\sum_{n=1}^{\infty}z^{n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-z^n}{1-z}=\frac{1}{1-z}$, $|z|<1$.

$\Rightarrow[z^2S(z)]'=\int\frac{1}{1-z}dz=-\ln|1-z|$ $\Rightarrow z^2S(z)=\int(-\ln|1-z|)dz=z-(z-1)\ln|1-z|\Rightarrow S(z)=\frac{1}{z}-\frac{z-1}{z^2}\ln|1-z|$. $|z|<1$

○[题型]将$f(z)$展开成形如$\sum_{n=0}^{\infty}C_n(z-z_0)^n$的幂级数

(1) 将$f(z)=\frac{1}{3z-2}$展开成形如$\sum_{n=0}^{\infty}C_n(z-2)^n$的幂级数

$\Rightarrow f(z)=\frac{1}{3z-2}=\frac{1}{3(z-2)+4}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1-\frac{-3}{4}(z-2)}=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left[-\frac{3}{4}(z-2)\right]^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{3^n}{4^{n+1}}(z-2)^n$.

(思路：形如$f(z)=\frac{1}{a+bz}$的函数通过等比数列的求和公式逆向进行转换)

其收敛区域由几何级数知 $\left|-\frac{3}{4}(z-2)\right|=\frac{3}{4}|z-2|<1$ 即 $|z-2|<\frac{4}{3}$. 收敛半径为$\frac{4}{3}$.

△泰勒级数

✓

○ 设$0<r<1$. 利用函数$f(z)=\frac{1}{1-z}$的幂级数证明：

$$\sum_{n=0}^{+\infty}r^n\cos n\theta=\frac{1-r\cos\theta}{1-2r\cos\theta+r^2}\quad;\quad\sum_{n=0}^{\infty}r^n\sin n\theta=\frac{r\sin\theta}{1-2r\cos\theta+r^2}$$

$\Rightarrow$ 思路：观察等式左侧，发现比较相似。等式右侧，分母可化为$(r\cos\theta-1)^2+r^2\sin^2\theta$形式

考虑将两个等式相加，用实部和虚部的方法。

$\Rightarrow\sum_{n=0}^{\infty}r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}z^n=\frac{1}{1-z}$，其中$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ 则 $\frac{1}{1-z}=\frac{1}{1-r(\cos\theta+i\sin\theta)}$

$=\frac{1}{(1-r\cos\theta)-ir\sin\theta}=\frac{1-r\cos\theta+ir\sin\theta}{(1-r\cos\theta)^2+\sin^2\theta r^2}=\frac{1-r\cos\theta}{1-2r\cos\theta+r^2}+j\frac{r\sin\theta}{1-2r\cos\theta+r^2}$ 由实部、虚部对应相等即证

○ 设函数 $f(z)=\frac{1}{1-z-z^2}$ 在 $z=0$ 处的泰勒级数为 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$. (1) 求级数的收敛半径.

(2) 导出 a_n 满足的递推关系式. (3) 证明: $n=0,1,2,\cdots$

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\xi|<R}\frac{1+\xi^2 f(\xi)}{(\xi-z)^{n+1}(1-\xi)}d\xi=\frac{f^{(n)}(z)}{n!},\ |z|<r<R. \qquad a_n=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

⇒ (1) $R=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ (2). 此表达式 $f(z)=\frac{1}{1-z-z^2}$ 不便于使用间接法. 于是使用直接法. 将问题转化为求 $f(z)$ 的 n 阶导数. ⇒ $(1-z-z^2)f(z)=1$. 那有 $C_n^0(1-z-z^2)f^{(n)}(z)+C_n^1(-1-2z)f^{(n-1)}(z)+C_n^2(-2)f^{(n-2)}(z)=0$

代入 $z=0$ 得: $f^{(n)}(0)-nf^{(n-1)}(0)-n(n-1)f^{(n-2)}(0)=0$. 又有 $f(0)=1$. $f'(0)=1$. $f''(0)=4$.

则 $f^{(3)}(0)=3f^{(2)}(0)+3\times2f^{(1)}(0)\Rightarrow\frac{f^{(3)}(0)}{3!}=\frac{f^{(2)}(0)}{2!}+f^{(1)}(0)$

$f^{(4)}(0)=4f^{(3)}(0)+4\times3f^{(2)}(0)\Rightarrow\frac{f^{(4)}(0)}{4!}=\frac{f^{(3)}(0)}{3!}+\frac{f^{(2)}(0)}{2!}$

$\Rightarrow\frac{f^{(n)}(0)}{n!}=\frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}+\frac{f^{(n-2)}(0)}{(n-2)!}\Rightarrow a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$. 其中 $a_0=a_1=1$.

(3) $\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\xi|<R}\frac{1+\xi^2 f(\xi)}{(\xi-z)^{n+1}(1-\xi)}d\xi=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\xi|<R}\frac{\frac{1+\xi^2 f(\xi)}{1-\xi}}{(\xi-z)^{n+1}}d\xi$. 其中 $\frac{1+\xi^2 f(\xi)}{1-\xi}=f(\xi)$. 证毕.

[题型: 求函数的泰勒展开式]. { 在某点 $z=z_0$ 处展开 ⇒ 先找圆域 ⇒ 找最近奇点. / 在某圆域 $|z-z_0|<A$ 内展开 }

(比较系数法)

○ 将 $f(z)=\sec z$ 在 $z=0$ 处泰勒展开

⇒ $f(z)=\sec z=\frac{1}{\cos z}$. 其收敛半径易求得 $R=\frac{\pi}{2}$. 故当 $|z|<\frac{\pi}{2}$ 时. $f(z)$ 在 $z=0$ 处的泰勒级数可设为:

$$f(z)=C_0+C_1z+C_2z^2+\cdots+C_nz^n+\cdots$$

由幂级数在收敛圆内绝对收敛的性质得:

$1=\sec z\cdot\cos z=(C_0+C_1z+C_2z^2+\cdots)(1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\frac{z^6}{6!}+\cdots)$

$=C_0+(-\frac{C_0}{2!}+C_2)z^2+(\frac{C_0}{4!}-\frac{C_1}{2!}+C_4)z^4+\cdots$

经比较系数后可得: $C_0=1$. $C_2-\frac{C_0}{2!}=0$. $C_4-\frac{C_1}{2!}+\frac{C_0}{4!}=0$, $\cdots$. $C_{2n}-\frac{C_{2n-2}}{2!}+\frac{C_{2n-4}}{4!}+\cdots+(-1)^n\frac{C_0}{(2n)!}=0$

即 $C_0=1$. $C_2=\frac{1}{2!}$. $C_4=\frac{5}{4!}\cdots$. 所以 $\sec z=1+\frac{1}{2!}z^2+\frac{5}{4!}z^4+\cdots$ $(|z|<\frac{\pi}{2})$

(直接法) ⇒ 直接由 $C_n=\frac{1}{2\pi i}\int\frac{f(\xi)}{(\xi-z)^n}d\xi=\frac{f^{(n)}(z)}{n!}$ 公式求出泰勒系数

(间接法) ⇒ ①求导; ②积分; ③借助已知函数的泰勒展开.

○ 将 $f(z)=\frac{1}{z^3}$ 在 $z=1$ 处泰勒展开.

⇒ $f(z)=\frac{1}{2}\cdot\frac{d^2}{dz^2}(\frac{1}{z})=\frac{1}{2}\frac{d^2}{dz^2}(\frac{1}{1+z-1})=\frac{1}{2}\frac{d}{dz^2}[\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(z-1)^n]=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n(n-1)}{2}\cdot(z-1)^{n-2}$. $|z-1|<1$

奇点为 $z=0$. 故收敛半径 $R=1-0=1$ ⇒ $|z-1|<1$

⇒ 对于 $f(z)=\frac{1}{z^n}$ $(n>1)$ 在 $z\neq0$ 的泰勒展开用求导 | $f(z)=\frac{1}{a+bz}$ 直接凑

○ 将 $f(z)=\frac{1}{(z-a)(z-b)}$ $(ab\neq0)$ 在 $z=0$ 处展成泰勒级数并指出收敛域.

对 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n$ 类型的级数其收敛域为 $|z|<1 \Rightarrow |-z|<1$

$\Uparrow$

Δ 罗朗级数.

o (基础) 求罗朗级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(z-2)^{-n}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(1-\frac{z}{2})^n$ 的收敛域.

$\Rightarrow$ 对正幂项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(1-\frac{z}{2})^n=\sum_{n=1}^{\infty}(-\frac{1}{2})^n(2-z)^n \Rightarrow$ 收敛半径 $R=\frac{1}{\sqrt[n]{|-\frac{1}{2}|^n}}=2$ 即 $|z-2|<2$.

对负幂项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(z-2)^{-n} \Rightarrow$ 令 $\xi=\frac{1}{z-2}$. 则原式 $=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\xi^n=\frac{1}{1+\xi}=\frac{z-2}{z-1}$, 奇点 $z=1$. 则收敛半径 $R=1$. 即 $|\xi|<1 \Rightarrow |z-2|>1$

将 $|z-2|=1$ 及 $|z-2|=2$ 代入级数, 均发散. 综上: 收敛域为环域 $1<|z-2|<2$.

o. 将函数 $f(z)=\frac{\sin z}{z}$ 在圆环域 $0<|z|<+\infty$ 内展开为罗朗级数 $\Rightarrow$ 级数中心为 $z=0$

将函数 $f(z)=\frac{1}{z^3}$ 在点 $z=1$ 处展开为泰勒级数. $\Rightarrow$ 级数中心为 $z=1$.

$\Rightarrow$ 注意泰勒级数和罗朗级数的区别.

【题型: 求函数的罗朗展开式】{ 在某圆环域内展开 / 在以某点为中心的收敛域内展开

o 将函数 $f(z)=\frac{4}{z^2-6z+5}$ 在以 $z=2$ 为中心的邻域内级数展开.

$\Rightarrow f(z)=\frac{1}{z-5}-\frac{1}{z-1}$, 其零点为 $z=1$, $z=5$. 则其收敛域被分为3个部分: $|z-2|<1$, $1<|z-2|<3$, $|z-2|>3$

在 $|z-2|<1$ 内: $\frac{1}{z-5}=\frac{1}{(z-2)-3}=-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-(\frac{z-2}{3})}=-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-2)^n}{3^n}$; $\frac{1}{z-1}=\frac{1}{1+(z-2)}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-2)^n \Rightarrow f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}[-\frac{1}{3^{n+1}}+(-1)^{n+1}](z-2)^n$

$1<|z-2|<3$: $\frac{1}{z-5}=-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-(\frac{z-2}{3})}=-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-2)^n}{3^n}$; $\frac{1}{z-1}=\frac{1}{1+(z-2)}=\frac{1}{z-2}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{z-2}}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\frac{1}{z-2})^{n+1}$

$\Rightarrow f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}[-\frac{1}{3^{n+1}}(z-2)^n+(-1)^{n+1}\frac{1}{(z-2)^{n+1}}]$

$|z-2|>3$: $\frac{1}{z-5}=-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-(\frac{z-2}{3})}=-\frac{1}{(z-2)}\cdot\frac{1}{1-(\frac{3}{z-2})}=-\frac{1}{z-2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{(z-2)^n}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{(z-2)^{n+1}}$

$\frac{1}{z-2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\frac{1}{z-2})^{n+1} \Rightarrow f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}[-3^n+(-1)^{n+1}]\frac{1}{(z-2)^{n+1}}$.

$\Rightarrow$ 级数 $f(z)=\frac{1}{1+z}$ 能直接展开的条件为 $|z|<1$. 否则要创造此条件. 答案中必定含有因子 $(z-z_0)$

以题给中心, 首先由奇点确定多个收敛域.

o 将 $f(z)=\frac{1}{z^2(z-i)}$ 在以 i 为中心的邻域内级数展开.

o 将 $f(z)=e^{\frac{1}{1-z}}$ 在 $|z|>1$ 内展开.

o 将 $f(z)=\frac{z}{(z-1)(z-3)}$ 在指定点展开为罗朗级数. (1) $z=0$. (2) $z=1$ 或 $z=3$.

○ 求 $f(z)=e^{z+\frac{1}{z}}$ 在 $0<|z|<+\infty$ 内的罗朗展开式

$\Rightarrow e^{z+\frac{1}{z}}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_n z^n = C_0+\sum_{n=1}^{\infty}C_n(z^n+z^{-n})$. 其中 $C_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}e^{2\cos\theta}\cos n\theta d\theta$. $n=0,1,2,\cdots$.

$\left(C_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi|=1}\frac{e^{\xi+\xi^{-1}}}{\xi^{n+1}}d\xi=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{e^{2\cos\varphi}}{e^{i(n+1)\varphi}}\cdot ie^{i\varphi}d\varphi=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{2\cos\varphi}\cos n\varphi d\varphi.\right)$

○ 试证：在 $0<|z|<+\infty$ 内下列展开式成立：$\cosh\left(z+\frac{1}{z}\right)=C_0+\sum_{k=1}^{\infty}C_k(z^k+z^{-k})$

其中 $C_k=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos k\varphi\cosh(2\cos\varphi)d\varphi$.

$\Rightarrow w=z+\frac{1}{z}$ 在 z 平面上只有一个奇点 $z=0$，又 $\cosh w$ 在 w 全平面上解析. 因此 $\cosh\left(z+\frac{1}{z}\right)$ 在 z 平面上也只有 $z=0$ 一个奇点. 即在 $0<|z|<+\infty$ 环域内解析. 由罗朗定理得 $\cosh\left(z+\frac{1}{z}\right)$ 可罗朗展开：

$$\cosh\left(z+\frac{1}{z}\right)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}C_k z^k=\sum_{k=0}^{\infty}C_k z^k+\sum_{k=-\infty}^{-1}C_k z^k=C_0+\sum_{k=1}^{\infty}C_k z^k+\sum_{k=1}^{\infty}C_{-k}z^{-k}.$$

其中 $C_k=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\rho}\frac{\cosh(z+z^{-1})}{z^{n+1}}dz$. Γ_ρ 表示任意圆周 $|z|=\rho\ (\rho>0)$. 若取 $\rho=1$. 则沿圆周 Γ_ρ：$z=e^{i\varphi}$. $0\le\varphi\le2\pi$ 有：

$$C_k=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cosh(e^{i\varphi}+e^{-i\varphi})e^{-ni\varphi}d\varphi=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cosh(2\cos\varphi)\cos n\varphi d\varphi-\frac{i}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cosh(2\cos\varphi)\sin n\varphi d\varphi.$$

令 $\varphi=2\pi-\theta$. 则 $\int_0^{2\pi}\cosh(2\cos\varphi)\sin n\varphi d\varphi=-\int_0^{2\pi}\cosh(2\cos\theta)\sin n\theta d\theta$，则 $\int_0^{2\pi}\cosh(2\cos\varphi)\sin n\varphi d\varphi=0$

则 $C_k=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cosh(2\cos\varphi)\cos n\varphi d\varphi$. 且有 $C_{-k}=C_k$. $\Rightarrow \cosh\left(z+\frac{1}{z}\right)=C_0+\sum_{k=1}^{\infty}C_k(z^k+z^{-k})$.

○ (与上题类似) 试证 $\sin\left[t\left(z+\frac{1}{z}\right)\right]=C_0+\sum_{k=1}^{\infty}C_k(z^k+z^{-k})$. $0<|z|<+\infty$. 其中 t 为与 z 无关的实参数.

$C_k=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin(2t\cos\varphi)\cos k\varphi d\varphi\ (k=0,1,2,\cdots)$.

$\Rightarrow \sin\left[t\left(z+\frac{1}{z}\right)\right]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}C_k z^k$.

其中 $C_k=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi|=1}\frac{\sin[t(\xi+\xi^{-1})]}{\xi^{n+1}}d\xi=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{\sin[t(e^{i\varphi}+e^{-i\varphi})]}{e^{i(k+1)\varphi}}\cdot ie^{i\varphi}d\varphi=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\sin(2t\cos\varphi)}{e^{ik\varphi}}d\varphi$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin(2t\cos\varphi)(\cos k\varphi-i\sin k\varphi)d\varphi=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin(2t\cos\varphi)\cos k\varphi d\varphi.$$

Δ 孤立奇点

[题型：确定函数的奇点及其类型，极点及其阶数.]

○ 在复平面内找出函数 $f(z)=\dfrac{z^2(z^2-1)}{(\sin\pi z)^2}$ 的孤立奇点，并确定类型及可能的阶数

⇒ 分母 $(\sin\pi z)^2$ 的零点为 $z=n,\ (n=0,\pm1,\pm2\cdots)$，则 $f(z)$ 具有奇点 $z=n\ (n=0,\pm1,\pm2\cdots)$.

① 又 $\lim\limits_{z\to0}f(z)=\lim\limits_{z\to0}\dfrac{z^2(z^2-1)}{(\sin\pi z)^2}=-\dfrac{1}{\pi^2}$ 即 $z=0$ 为可去奇点.；（也可由 $z=0$ 为分母、分子的二阶零点得到）

② $(\sin\pi z)'|_{z=n}=\pi\cos\pi z|_{z=n}=(-1)^n\pi\neq0$ 可知 $z=n$ 为 $\sin\pi z$ 的一阶零点. 则为 $(\sin\pi z)^2$ 的二阶零点.

（也可由 $(\sin\pi z)^2|_{z=n}=0$. $(\sin\pi z)'|_{z=n}=0$. $(\sin\pi z)''|_{z=n}\neq0$ 得到）

而 $f(z)$ 的分子有一阶零点：$z=\pm1$. 因为 $z^2-1=(z+1)(z-1)$. 所以 $z=\pm1$ 为 $f(z)$ 的一阶极点.

$\left(\lim\limits_{z\to\pm1}f(z)=\lim\limits_{z\to\pm1}\dfrac{z^2(z^2-1)}{(\sin\pi z)^2}=\lim\limits_{z\to\pm1}\dfrac{z^2}{\sin\pi z}\Rightarrow\text{一阶极点}\right)$

③ 对于 $z=\pm2,\pm3,\cdots$. 其为 $f(z)$ 的二阶极点.

○ 确定函数 $f(z)=\dfrac{z}{e^z-1}e^{\frac{1}{z-1}}$ 的孤立奇点 并确定其类型.

⇒ 由 $e^z-1=0$ 得 $z=\operatorname{Ln}1=2k\pi i$. 则有奇点 $z=1,\ 2k\pi i\ (k=0,\pm1,\cdots)$.

① $\lim\limits_{z\to1}f(z)=\lim\limits_{z\to1}\dfrac{z}{e^z-1}e^{\frac{1}{z-1}}=\dfrac{1}{e-1}e^{\infty}\Rightarrow$ 不存在. 因此 $z=1$ 为本性奇点.

② 对分母有：$(e^z-1)|_{z=2k\pi i}=0$. $(e^z-1)'|_{z=2k\pi i}=1\neq0\Rightarrow z=2k\pi i$ 为一阶极点. $(k\neq0)$

③ $k=0$ 时. $\lim\limits_{z\to0}f(z)=e^{-1}$，则 $z=0$ 为可去奇点.

Δ 讨论函数无穷远性态

$|z|<1$：$f(z)=\dfrac{z}{2}\left(\dfrac{1}{z-1}-\dfrac{1}{z-3}\right)=\dfrac{z}{2}\left(\dfrac{1}{3-z}-\dfrac{1}{1-z}\right)$

$=\dfrac{z}{2}\left(\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{1-\frac{z}{3}}-\dfrac{1}{1-z}\right)$

$=\dfrac{z}{2}\cdot\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{z^n}{3^{n+1}}-\sum\limits_{n=0}^{\infty}z^n\right)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{3^{n+1}}-1\right)z^n$

$1<|z|<3$：$f(z)=\dfrac{z}{2}\left(\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{1-\frac{z}{3}}+\dfrac{1}{z}\cdot\dfrac{1}{1-\frac{1}{z}}\right)=\dfrac{z}{2}\cdot\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{z^n}{3^{n+1}}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{z^{n+1}}\right)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{z^{n+1}}{2\cdot3^{n+1}}+\dfrac{1}{2z^n}\right)$

$3<|z|<+\infty$：$f(z)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{1-\frac{1}{z}}-\dfrac{1}{1-\frac{3}{z}}\right)=\dfrac{1}{2}\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{z^n}-\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{3^n}{z^n}\right)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{2}(1-3^n)\dfrac{1}{z^n}$.

$0<|z-1|<2$　$f(z)=\dfrac{z-1}{(z-1)(z-3)}+\dfrac{1}{(z-1)(z-3)}=\dfrac{1}{z-3}+\dfrac{1}{z-1}\cdot\dfrac{1}{z-3}$

$\dfrac{1}{z-3}=\dfrac{1}{(z-1)-2}=-\dfrac{1}{2-(z-1)}=-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{1-\frac{z-1}{2}}=-\dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(z-1)^n}{2^n}=-\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(z-1)^n}{2^{n+1}}$.

$\boxed{-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{z-1}+\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{1}{z-3}}$ ⇒ $-z\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(z-1)^{n-1}}{2^{n+1}}$.

$2<|z-1|<+\infty$.　$\dfrac{1}{z-3}=\dfrac{1}{(z-1)-2}=\dfrac{1}{z-1}\cdot\dfrac{1}{1-\frac{2}{z-1}}=\dfrac{1}{z-1}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{2^n}{(z-1)^n}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{2^n}{(z-1)^{n+1}}$

⇒ $z\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{2^n}{(z-1)^{n+2}}$.

$\dfrac{A}{z-1}+\dfrac{B}{z-3}$

$Az-3A+Bz-B$

$A+B=1$

$3A+B=0$

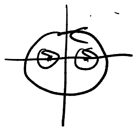
$2A=-1$

$A=-\frac{1}{2}$

$f(z)=\dfrac{z-3}{(z-1)(z-3)}+3\cdot\dfrac{1}{(z-1)(z-3)}=\dfrac{1}{z-1}+3\cdot\dfrac{1}{z-3}\cdot\dfrac{1}{z-1}=\dfrac{1}{z-1}-3\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(z-1)^{n-1}}{2^{n+1}}$.

留数

$|a|\neq 2.\ \oint_{|z|=2}\frac{e^{iz}\sin z}{z^2-a^2}dz$



$=\oint_{|z|=2}\frac{e^{iz}\sin z}{(z+a)(z-a)}$

若$|a|>2$，则 $|z|=2$内无极点. $\oint=0$

若$|a|<2$，则两奇点：$z=a.\ z=-a$.

$$\oint_{|z|=2}=\oint_{C_1}\frac{\frac{e^{iz}\sin z}{z-a}}{(z+a)}dz+\oint_{C_2}\frac{\frac{e^{iz}\sin z}{z+a}}{(z-a)}dz$$

$$=2\pi i\left(\frac{e^{iz}\sin z}{z-a}\right)\Big|_{z=-a}+2\pi i\left(\frac{e^{iz}\sin z}{z+a}\right)\Big|_{z=a}$$

$$\int_0^{2\pi}\frac{1}{1+a\sin x}dx$$

令 $z=e^{i\theta}$. $\sin\theta=\frac{z-z^{-1}}{2i}=\frac{z^2-1}{2iz}$

$d\theta=\frac{1}{iz}dz$

$$=\int_{|z|=1}\frac{1}{1+a\cdot\frac{z^2-1}{2iz}}\cdot\frac{1}{iz}dz$$

$$=\int_{|z|=1}\frac{2iz}{2iz+a(z^2-1)}\cdot\frac{1}{iz}dz$$

$$=\int_{|z|=1}\frac{2}{2iz+a(z^2-1)}dz$$

$az^2+2iz-a$

$=a(z^2+\frac{2i}{a}z-1)$

$=a(z^2+\frac{2i}{a}z-\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a^2}-1)$

$=a(z+\frac{i}{a})^2+\frac{1}{a}-a$.

$(z+\frac{i}{a})^2=1-\frac{1}{a^2}=\frac{a^2-1}{a^2}$

$z+\frac{i}{a}=i\frac{\sqrt{1+a^2}}{a}$

$z=\frac{\sqrt{1+a^2}}{a}i-\frac{i}{a}=\frac{i}{a}(\sqrt{1+a^2}-1)$ 一阶极点.

$\frac{2}{2i+2az}=\frac{1}{az+i}$

$=\frac{1}{i\sqrt{1+a^2}\cancel{-i+i}}=\frac{2\pi}{\sqrt{1+a^2}}$

$$\sin^2\theta = \frac{(z^2-1)^2}{-4z^2}$$

令 $z = e^{i\theta} \Rightarrow \sin\theta = \frac{z-\frac{1}{z}}{2i} = \frac{z^2-1}{2iz}$, $d\theta = \frac{1}{iz}dz$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\sin^2 x}dx = \frac{1}{4}\int_{|z|=1} \frac{1}{1-\frac{(z^2-1)^2}{4z^2}} \cdot \frac{1}{iz}dz$$

$$= \frac{1}{4i}\int_{|z|=1} \frac{1}{z-\frac{(z^2-1)^2}{4z}}dz = \frac{1}{4i}\int_{|z|=1} \frac{4z}{4z^2-(z^2-1)^2}dz$$

$$= \frac{1}{4i}\int_{|z|=1} \frac{4z}{(z^2+2z-1)(-z^2+2z+1)}dz$$

$$z = \frac{-2\pm\sqrt{8}}{2} = -1\pm\sqrt{2} = \underline{-1+\sqrt{2}}$$

$$z = \frac{-2\pm\sqrt{8}}{-2} = 1\mp\sqrt{2} = \underline{1-\sqrt{2}}$$ 极点

$$-i \cdot \frac{z}{8z-4z(z^2-1)}$$

$$= -i \cdot \frac{\sqrt{2}-1}{8(\sqrt{2}-1)-4(\sqrt{2}-1)\cdot 2(1-\sqrt{2})} = -i \cdot \frac{\sqrt{2}-1}{8(2-\sqrt{2})}$$

$$-i \cdot \frac{1-\sqrt{2}}{8(1-\sqrt{2})-4(1-\sqrt{2})\cdot 2(1-\sqrt{2})} = -i \cdot \frac{1-\sqrt{2}}{8(\sqrt{2}-2)}$$

$$-i \frac{\sqrt{2}-1}{16(2-\sqrt{2})}$$ $2\sqrt{2}+\cancel{2}-\cancel{2}-\sqrt{2}$

$$= -i \cdot \frac{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}{16(2-\sqrt{2})(\sqrt{2}+1)}$$

$$= -i \cdot \frac{1}{16\sqrt{2}}$$

$$= -\frac{i}{\sqrt{2}}$$

$$-\frac{i}{\sqrt{2}} \times 2\pi i = \frac{2}{\sqrt{2}}\pi$$

✓ 设z_0为函数$f(z)$的m阶极点，函数$g(z)$在z_0处解析，证明：$Res[g(z)\cdot\frac{f'(z)}{f(z)}, z_0] = -mg(z_0)$.

⇒由z_0为$f(z)$的m阶极点可设$f(z)=\frac{\varphi(z)}{(z-z_0)^m}$，其中$\varphi(z)$在$z_0$处非零解析.

那$f'(z)=\frac{\varphi'(z)-m\varphi(z)}{(z-z_0)^{m+1}}$，$z=z_0$为其$m+1$阶极点，那么令$T(z)=g(z)\frac{f'(z)}{f(z)}$，则$z=z_0$为$T(z)$的一阶极点.

则 $Res[T(z),z_0] = \lim_{z\to z_0}(z-z_0)\cdot g(z)\frac{f'(z)}{f(z)} = g(z_0)\lim_{z\to z_0}\frac{(z-z_0)\cdot\frac{\varphi'(z)-m\varphi(z)}{(z-z_0)^{m+1}}}{\frac{\varphi(z)}{(z-z_0)^m}} = g(z_0)\lim_{z\to z_0}\frac{\varphi'(z)-m\varphi(z)}{\varphi(z)} = -mg(z_0)$.

✓ 设$z=z_0$是函数$f(z)$的m阶极点，证明：对任意给定的正整数n有

$$Res[f(z),z_0]=\frac{1}{(m+n-1)!}\lim_{z\to z_0}\left\{\frac{d^{m+n-1}}{dz^{m+n-1}}[(z-z_0)^{m+n}f(z)]\right.$$

⇒由题可设$f(z)=\frac{\varphi(z)}{(z-z_0)^m}$，其中$\varphi(z)$在$z_0$处解析且非零，那么$(z-z_0)^m f(z)=\varphi(z)$.

$(z-z_0)^{m+n}f(z)=(z-z_0)^n\varphi(z)$. ⇒ $z=z_0$为其n阶零点.

那么有：$\frac{d^{m+n-1}}{dz^{m+n-1}}[(z-z_0)^{m+n}f(z)] = \frac{d^{m+n-1}}{dz^{m+n-1}}[(z-z_0)^n\varphi(z)] = \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[\frac{d^n}{dz^n}((z-z_0)^n\varphi(z))\right]$

其中 $\frac{d^n}{dz^n}[(z-z_0)^n\varphi(z)] = C_n^0(z-z_0)^n\varphi^{(n)}(z)+\cdots+C_n^n[(z-z_0)^n]^{(n)}\varphi(z)$，记其为$g(z)+n!\varphi(z)$，显然$g(z_0)=0$

则 $\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[\frac{d^n}{dz^n}((z-z_0)^n\varphi(z))\right] = \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}[g(z)+n!\varphi(z)] = \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}g(z)+\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}[n!\varphi(z)]$.

⇒ $Res[f(z),z_0]=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}[(z-z_0)^m f(z)] = \frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\varphi(z) = \frac{1}{(m+n-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}[n!\varphi(z)]$

而 $\lim_{z\to z_0}\left[\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}g(z)\right]=0$. 所以 $\lim_{z\to z_0}\left[\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}g(z)+\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}(n!\varphi(z))\right] = \lim_{z\to z_0}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}[n!\varphi(z)]$

即 $\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}[(z-z_0)^m f(z)] = \frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\varphi(z) = \frac{1}{(m+n-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{m+n-1}}{dz^{m+n-1}}[(z-z_0)^n\varphi(z)]$

$= \frac{1}{(m+n-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{m+n-1}}{dz^{m+n-1}}[(z-z_0)^{m+n}f(z)]$.

○ 设C为正向圆周$|z|=2$，计算积分 (1) $I=\oint_C z[e^{\frac{1}{z-1}}+\frac{1}{(z^2-9)(z+i)}]dz$　(2) $I=\oint_C \frac{1}{z\sin(1+\frac{1}{z^2})}dz$

(1) 该题目重点在 $\oint_C ze^{\frac{1}{z-1}}dz$，其只有一个无穷奇点$z=1$，~~且~~

$I_1=\oint_C ze^{\frac{1}{z-1}}dz = 2\pi i Res[ze^{\frac{1}{z-1}},1] = -2\pi i Res[ze^{\frac{1}{z-1}},\infty] = 2\pi i Res[\frac{1}{z}e^{\frac{z}{1-z}}\cdot\frac{1}{z^2},0]$

(2) $I=\oint_C\frac{1}{z\sin(1+\frac{1}{z^2})}dz = 2\pi i[\frac{1}{z\sin(1+\frac{1}{z^2})},0] = -2\pi i Res[\frac{1}{z\sin(1+\frac{1}{z^2})},\infty] = 2\pi i Res[\frac{1}{z\sin(1+\frac{1}{z^2})},0] = \frac{2\pi i}{\sin 1}$

留数定理 yyds！

○计算积分.

(1) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin bx}{x^4+a^4}dx \ (a>0, b>0)$. $\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x}{x^4+1}dx\right)$.

$\Rightarrow$ 原式 $= \mathrm{Im}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{z}{z^4+a^4}e^{ibz}dz$，由 $z^4+a^2=0$ 得4个根 $z=ae^{\frac{(2k+1)\pi}{4}i}$，在上半平面的有两个：$z=ae^{\frac{\pi}{2}i}, ae^{\frac{3\pi}{2}i}$.

$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{z}{z^4+a^2}e^{ibz}dz = 2\pi i\left[\mathrm{Res}\left(\frac{ze^{ibz}}{z^4+a^4}, ae^{\frac{\pi}{2}i}\right)+\mathrm{Res}\left(\frac{ze^{ibz}}{z^4+a^4}, ae^{\frac{3\pi}{2}i}\right)\right] = \left(\frac{e^{\frac{ab}{\sqrt2}(i-1)}}{4a^2e^{\frac{\pi i}{2}}}+\frac{e^{\frac{ab}{\sqrt2}(-i-1)}}{4a^2e^{\frac{3\pi i}{2}}}\right)2\pi i$

$= \frac{\pi i}{2a^2}\left(\frac{e^{\frac{ab}{\sqrt2}(i-1)}}{i}+\frac{e^{\frac{ab}{\sqrt2}(-i-1)}}{-i}\right) = \frac{\pi}{2a^2}\left(e^{\frac{ab}{\sqrt2}(i-1)}-e^{\frac{ab}{\sqrt2}(-i-1)}\right) = \frac{\pi}{2a^2}e^{-\frac{ab}{\sqrt2}}\left(e^{\frac{ab}{\sqrt2}i}-e^{-\frac{ab}{\sqrt2}i}\right) = \frac{\pi}{a^2}e^{-\frac{ab}{\sqrt2}}\sin\frac{ab}{\sqrt2}$

(2) $I = \int_0^{2\pi}\frac{\cos 3\theta}{1-2a\cos\theta+a^2}d\theta$

令 $z=e^{i\theta}$，则 $d\theta=\frac{1}{iz}dz$. $\cos 3\theta=\frac{z^3+z^{-3}}{2}$. $\cos\theta=\frac{z+z^{-1}}{2}$.

$\Rightarrow I=\oint_{|z|=1}\frac{\frac{z^3+z^{-3}}{2}}{1-2a\cdot\frac{z+z^{-1}}{2}+a^2}\cdot\frac{1}{iz}dz = \frac{1}{2i}\oint_{|z|=1}\frac{z^6+1}{z^3[a^2z-a(z^2+1)+z]}dz = \frac{1}{2i}\oint\frac{z^6+1}{z^3(az-1)(a-z)}dz$. $\Rightarrow$ 两个一阶极点：$z=\frac{1}{a}, a$. 三阶：$z=0$

只有 $z=0, \frac{1}{a}$ 在积分区域内，则有 $I=\pi\mathrm{Res}\left[\frac{z^6+1}{z^3(az-1)(a-z)}, \frac{1}{a}\right]+\pi\mathrm{Res}\left[\frac{z^6+1}{z^3(az-1)(a-z)}, 0\right]$

$= -\pi\mathrm{Res}\left[\frac{z^6+1}{z^3(az-1)(a-z)}, \infty\right]-\pi\mathrm{Res}\left[\frac{z^6+1}{z^3(az-1)(a-z)}, a\right]$

其中 $-\mathrm{Res}\left[\frac{z^6+1}{z^3(az-1)(a-z)}, \infty\right]=\mathrm{Res}\left[\frac{1+z^6}{z^3(a-z)(az-1)}, 0\right]=-\frac{1}{a}$；$-\mathrm{Res}\left[\frac{z^6+1}{z^3(az-1)(a-z)}, a\right]=$

[题型：求函数f(t)的傅里叶积分].

可用到的公式为：

$$f(t)=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}A(w)\cos wt\,dw+\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}B(w)\sin wt\,dw$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\cos w\tau\,d\tau\right]\cos wt\,dw+\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\sin w\tau\,d\tau\right]\sin wt\,dw.$$

先判断f(t)的奇偶性.再计算出A(w)和B(w)表达式. 将f(t)表达上式第一式即可.

① 求下列函数的傅里叶积分.

(1) $f(t)=\begin{cases}\sin t, & |t|\le\pi\\ 0, & |t|>\pi.\end{cases}$

[题型：证明积分式]

①运用函数的傅里叶积分形式进行证明.

$$2\int_0^{\pi}\sin\tau\sin w\tau\,d\tau=\int(\cos(1+w)\tau-\cos(1-w)\tau)\,d\tau$$

$$=\int\cos(1-w)\tau\,d\tau-\int\cos(1+w)\tau\,d\tau$$

$c-c=-ss.$

$-\frac{1}{2}(\cos A-\cos B)=\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$

$\frac{A+B}{2}=\tau$　　$A+B=2\tau$

$\frac{A-B}{2}=w\tau$　　$A-B=2w\tau$

$2A=2\tau+2w\tau$

$A=(w+1)\tau$

$B=(1-w)\tau$

$$=\frac{1}{1-w}\sin(1-w)\tau\Big|_0^{\pi}-\frac{1}{1+w}\sin(1+w)\tau\Big|_0^{\pi}$$

$$=\frac{\sin(1-w)\pi}{1-w}-\frac{\sin(1+w)\pi}{1+w}$$

$$=\frac{(1+w)\sin(1-w)\pi-(1-w)\sin(1+w)\pi}{1-w^2}$$

$$=\frac{[\sin(1-w)\pi-\sin(1+w)\pi]+w[\sin(1-w)\pi+\sin(1+w)\pi]}{1-w^2}$$

$=$

$$\frac{2\cos\pi\sin(-w\pi)+2\sin\pi\cos w\pi.}{1-w^2}$$

$$=\frac{2\sin w\pi}{1-w^2}$$

[题型：求函数f(t)的傅里叶变换]

0 设 $F(\omega)=\mathcal{F}[f(t)]$. 证明 (1) $F(-\omega)=\mathcal{F}[f(-t)]$; (2) $|F(\omega)|=|F(-\omega)|$.

(2) ⇒ 由 $f(t)$ 为实值函数. 由 $F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-i\omega t}dt$ 有 $\overline{F(\omega)}=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\overline{e^{-i\omega t}}dt=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{i\omega t}dt=F(-\omega)$.
即 $|F(\omega)|=|\overline{F(\omega)}|=|F(-\omega)|$.

0 设 $F(\omega)=\mathcal{F}[f(t)]$. 证明: $f(t)$ 为实值函数的充分必要条件为 $\overline{F(\omega)}=F(-\omega)$.

△关键是在傅里叶变换中. 共轭与积分号可以交换. 即先积分再共轭⇔先共轭再积分.

0 求函数 $f(t)=e^{-\alpha t}$ 的傅里叶正弦和余弦变换. 其中 $\alpha>0$.

[题型：傅里叶变换性质的应用]

○ 求各函数的傅里叶变换.

(1) $f(t)=\delta(t-1)(t-2)^2\sin t$. ($\delta(t)$函数)

$\Rightarrow$ 利用$\delta(t-1)$函数独特的筛选性质有：$f(t)=\delta(t-1)(t-1)^2\sin t=\delta(t-1)\sin 1$.

则 $\mathcal{F}[f(t)]=\mathcal{F}[\delta(t-1)\sin 1]=\sin 1\,\mathcal{F}[\delta(t-1)]=\sin 1\cdot e^{-i\omega}\mathcal{F}[\delta(t)]=\sin 1\cdot e^{-i\omega}$.

(2) $f(t)=u(t)e^{-t}\cos t$. ($u(t)$函数)

$\Rightarrow \mathcal{F}[f(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-i\omega t}dt=\int_0^{+\infty}e^{-t}\cos t\cdot e^{-i\omega t}dt=\int_0^{+\infty}e^{-(i\omega+1)t}\cos t\,dt=\frac{i\omega+1}{(i\omega+1)^2+1}$

(两次分部积分).

(3) $f(t)=\frac{\sin t}{t}$.

(4) $f(t)=\frac{1}{a^2+t^2}$.

$\Rightarrow$ 由 $\mathcal{F}[e^{-a|t|}]=\frac{2a}{a^2+\omega^2}$ 知 $\frac{1}{2a}\mathcal{F}[e^{-a|t|}]=\frac{1}{a^2+\omega^2}=f(\omega)=\mathcal{F}[\frac{1}{2a}e^{-a|t|}]$.

所以 $\mathcal{F}[f(t)]=2\pi\cdot\frac{1}{2a}e^{-a|\omega|}=\frac{\pi}{a}e^{-a|\omega|}$.

(6) $f(t)=te^{-it}\sin t$.

$\Rightarrow \mathcal{F}[f(t)]=\mathcal{F}[t(\cos t\sin t)]-i\mathcal{F}[\sin^2 t]$.

其中 $\mathcal{F}(\cos t\sin t)=\frac{\pi i}{2}(\delta(\omega+2)-\delta(\omega-2))$. $\mathcal{F}[\sin^2 t]=\pi\delta(t)-\frac{\pi}{2}(\delta(\omega+2)+\delta(\omega-2))$

○ 求各函数的傅里叶逆变换.(注意把逆变换和对称性区分开)

(1) $F(\omega)=\cos 2\omega$.

令 $f(t)=\cos 2\omega$，则有 $\mathcal{F}[f(t)]=\pi(\delta(\omega+2)+\delta(\omega-2))$. 那么由对称性有：

$\mathcal{F}[\pi(\delta(t+2)+\delta(t-2))]=2\pi f(-\omega)=2\pi\cos 2\omega$. 所以 $\mathcal{F}^{-1}(\cos 2\omega)=\frac{1}{2}[\delta(t+2)-\delta(t-2)]$.

A～种求逆变换的方法(像函数看起来很像原函数)直接对其求傅里叶变换，再利用对称称性.

(2) $F(\omega)=-2\pi\delta''(\omega)$.

① $\Rightarrow F(\omega)=i\cdot(2\pi i\delta'(\omega))'$. 设 $\mathcal{F}[g(t)]=2\pi i\delta'(\omega)$，则 $\mathcal{F}^{-1}[F(\omega)]=t\,g(t)$.

对 $\mathcal{F}[g(t)]=i(2\pi\delta(\omega))=i\mathcal{F}[1]$，所以$g(t)=t$. 那么 $\mathcal{F}^{-1}[F(\omega)]=t^2$.

② $\mathcal{F}[-2\pi\delta''(t)]=-2\pi\mathcal{F}[\delta''(t)]=-2\pi(i\omega)^2\mathcal{F}[\delta(t)]=2\pi\omega^2$. 所以 $\mathcal{F}[2\pi t^2]=2\pi\mathcal{F}[t^2]=2\pi\cdot[-2\pi\delta''(-\omega)]$

即 $\mathcal{F}[t^2]=-2\pi\delta''(\omega)$. $\Rightarrow$

(3) $F(\omega)=\frac{1}{2+i\omega}$. (单边指数型)

(4) $F(\omega)=\frac{-2i\omega}{(\omega^2+1)(\omega^2+4)}$. (双边指数型)

$\Rightarrow F(\omega)=\frac{-2i\omega}{(\omega^2+1)(\omega^2+4)}=\frac{1}{3}(\frac{2i\omega}{\omega^2+4}-\frac{2i\omega}{\omega^2+1})$，其中 $\mathcal{F}^{-1}[\frac{2i\omega}{\omega^2+4}]=e^{2t}u(-t)-e^{-2t}u(t)$. $\mathcal{F}^{-1}[\frac{-2i\omega}{\omega^2+1}]=e^{-t}u(t)-e^{t}u(-t)$

所以 $\mathcal{F}^{-1}[F(\omega)]=\frac{1}{3}[(e^{2t}-e^{t})u(-t)+(e^{-t}-e^{-2t})u(t)]$

即：$\mathcal{F}^{-1}[F(\omega)]=\begin{cases}\frac{1}{3}(e^{2t}-e^{t}), & t<0\\ 0, & t=0\\ \frac{1}{3}(e^{-t}-e^{-2t}), & t>0.\end{cases}$

(5) $F(\omega)=\frac{2\sin\omega}{\omega}$.

⇒令 $g(t)=u(t+1)-u(t-1)$ 那么 $\mathcal{F}[g(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty}g(t)e^{-i\omega t}dt=\int_{-1}^{1}e^{-i\omega t}dt=\frac{e^{i\omega t}-e^{-i\omega t}}{i\omega}=\frac{2\sin\omega}{\omega}$

所以 $\mathcal{F}^{-1}[F(\omega)]=[u(t+1)-u(t-1)]$. ⇒ $\mathcal{F}^{-1}[F(\omega)]=\begin{cases}1, & |t|<1\\ \frac{1}{2}, & |t|=1\\ 0, & |t|>1\end{cases}$ ⇒注意间断点

[题型：卷积及卷积定理]、

○. 已知 $f(t)=\begin{cases}e^{-t}, & t\geq 0\\ 0, & t<0\end{cases}$, $g(t)=\begin{cases}\sin t, & 0\leq t\leq\frac{\pi}{2}\\ 0, & \text{otherwise}.\end{cases}$, 计算 $f(t)*g(t)$

⇒ 直接由卷积定义：

$$f(t)*g(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(s)g(t-s)ds=\begin{cases}0, & t\leq 0\\ \int_0^t f(s)g(t-s)ds, & 0<t\leq\frac{\pi}{2}\\ \int_0^{\frac{\pi}{2}}f(s)g(t-s)ds, & t>\frac{\pi}{2}.\end{cases}$$

其中 $\int_0^t f(s)g(t-s)ds=\int_0^t e^{-s}\sin(t-s)ds=\frac{1}{2}(\sin t-\cos t+e^{-t})$.

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(s)g(t-s)ds=\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-s}\sin(t-s)ds=\frac{1}{2}e^{-t}(1+e^{\frac{\pi}{2}})$.

○ 计算 $f(t)=\frac{t^2}{(1+t^2)^2}$ 的傅里叶变换. [运用留数定理计算傅里叶变换]

⇒ $\mathcal{F}[f(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{t^2}{(1+t^2)^2}e^{-i\omega t}dt$

①当 $\omega>0$ 时. 上式 $=\int_{+\infty}^{-\infty}\frac{(-t)^2}{(1+(-t)^2)^2}e^{-i\omega(-t)}d(-t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{t^2}{(1+t^2)^2}e^{i\omega t}dt=2\pi i\,\mathrm{Res}[\frac{t^2}{(1+t^2)^2},i]$

$=2\pi i\lim_{t\to i}[\frac{t^2}{(t+i)^2}e^{i\omega t}]'=-\frac{\pi}{2}e^{-\omega}(\omega-1)=\frac{\pi}{2}e^{-\omega}(1-\omega)$

Δ仔细计算!!!

②当 $\omega<0$ 时. 上式 $=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{t^2}{(1+t^2)^2}e^{-i\omega t}dt=2\pi i\,\mathrm{Res}[\frac{t^2}{(1+t^2)^2}e^{-i\omega t},i]=\frac{\pi}{2}e^{\omega}(1+\omega)$

综上：$\mathcal{F}[f(t)]=\frac{\pi}{2}e^{-|\omega|}(1-|\omega|)$.

○ 求 $f(t)=e^{-\beta t}u(t)\sin bt$ 的傅里叶变换 [运用卷积定理求傅里叶变换].

$\mathcal{F}[e^{-\beta t}u(t)\sin bt]$.

$=\frac{1}{2\pi}\mathcal{F}[e^{-\beta t}u(t)]*\mathcal{F}[\sin bt]$

$=\int_0^{+\infty}e^{-\beta t}e^{-i\omega t}dt$ $\qquad$ $i\pi(\delta(\omega+b)-\delta(\omega-b))$

$\int_0^{+\infty}e^{-(\beta+i\omega)t}dt$

$-\frac{1}{\beta+i\omega}e^{-(\beta+i\omega)t}\Big|_0^{+\infty}$

$\frac{1}{\beta+i\omega}$

$=(\frac{1}{\beta+i\omega})*[i\pi(\delta(\omega+b)-\delta(\omega-b))]$.

$-s+\omega-b$

$(s-\omega+b)$

$s-(\omega-b)$

$=i\pi\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\beta+is}\cdot(\delta(\omega-s+b)-\delta(\omega-s-b))ds$

$=i\pi[\frac{-1}{\beta+i(\omega+b)}+\frac{1}{\beta+i(\omega-b)}]=i\pi[\frac{1}{\beta+i\omega-ib}-\frac{1}{\beta+i\omega+ib}]$

$=i\pi\cdot\frac{2ib}{(\beta+i\omega)^2+b^2}=\frac{-2\pi b}{(\beta+i\omega)^2+b^2}$.

[题型：解微积分方程]

○ $x'(t)-9\int_{-\infty}^{t}x(s)ds=e^{-|t|}$，其中 $\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)dt=0$.　△指数信号变换公式的运用(考)

$\Rightarrow \mathcal{F}[x'(t)]-9\mathcal{F}[\int_{-\infty}^{t}x(s)ds]=\mathcal{F}[e^{-|t|}]$：$i\omega X(\omega)-\frac{9}{i\omega}X(\omega)=\frac{2}{1+\omega^2}$

则 $X(\omega)=\frac{-2i\omega}{(\omega^2+9)(\omega^2+1)}=\frac{i\omega}{4(\omega^2+9)}-\frac{i\omega}{4(\omega^2+1)}$，由于 $e^{-\beta t}u(t)-e^{\beta t}u(-t)=\frac{-2i\omega}{\beta^2+\omega^2}$ 则

$X(\omega)=\frac{1}{8}[(e^{3t}u(-t)-e^{-3t}u(t))-(e^{t}u(-t)-e^{-t}u(t))]$

$=\begin{cases}\frac{1}{8}(e^{-t}-e^{-3t}), & t>0.\\ 0, & t=0 \text{ (注意间断点)}.\\ \frac{1}{8}(e^{3t}-e^{t}), & t<0.\end{cases}$

○ $x''(t)-x(t)=\delta(t)$.

$\Rightarrow \mathcal{F}[x''(t)]-\mathcal{F}[x(t)]=\mathcal{F}[\delta(t)]$：$(i\omega)^2X(\omega)-X(\omega)=1 \Rightarrow X(\omega)=-\frac{1}{\omega^2+1}$

则 $X(\omega)=\frac{1}{2}(e^{t}u(-t)-e^{-t}u(t)) \Rightarrow X(\omega)=\begin{cases}-\frac{1}{2}e^{-t}, & t\geq 0\\ \frac{1}{2}e^{t}, & t<0\end{cases}$ ($t=0$时$X(\omega)=\frac{1}{2}$).

○ $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{y(\xi)}{(t-\xi)^2+a^2}d\xi=\frac{1}{t^2+b^2}$，$0<a<b$.　△卷积公式的运用(考)

○ $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-|t-\xi|}x(\xi)d\xi=f(t)$.

○ $\int_{y}^{+\infty}y(\xi)\sin\omega\xi d\xi=\begin{cases}\sin\omega, & 0\leq\omega\leq\pi\\ 0, & \omega>\pi.\end{cases}$　△正余弦傅里叶(逆)变换公式的运用.

○ $\int_{0}^{+\infty}x(\omega)\sin\omega t\,d\omega=e^{-t}\ (t>0)$.

△常见傅里叶变换对.(逐一证明).

①

○ $e^{-at}u(t) \sim \frac{1}{a+i\omega}$; $e^{at}u(-t) \sim \frac{1}{a-i\omega}$. (单边指数)

证明: $\mathcal{F}[e^{-at}u(t)] = \int_0^{+\infty} e^{-(i\omega+a)t}dt = -\frac{1}{a+i\omega}e^{-(i\omega+a)t}\Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{a+i\omega}$.

$\mathcal{F}[e^{at}u(-t)] = \int_{-\infty}^0 e^{(a-i\omega)t}dt = \frac{1}{a-i\omega}e^{(a-i\omega)t}\Big|_{-\infty}^0 = \frac{1}{a-i\omega}$.

○ $e^{-at}u(t)+e^{at}u(-t) \sim e^{-a|t|} \sim \frac{2a}{a^2+\omega^2}$; $e^{-at}u(t)-e^{at}u(-t) \sim \frac{-2i\omega}{a^2+\omega^2}$. (双边指数)

证明: $\mathcal{F}[e^{-at}u(t)+e^{at}u(-t)] = \frac{1}{a+i\omega}+\frac{1}{a-i\omega} = \frac{2a}{a^2+\omega^2}$. (实际上 $e^{-at}u(t)+e^{at}u(-t) = e^{-a|t|}$)

$\mathcal{F}[e^{-at}u(t)-e^{at}u(-t)] = \frac{1}{a+i\omega}-\frac{1}{a-i\omega} = \frac{-2i\omega}{a^2+\omega^2}$.

拉普拉斯变换

△基本性质：$\mathcal{L}[f(t)]=F(p)$.

(1) 线性性质：$\mathcal{L}[\alpha f(t)+\beta g(t)]=\alpha\mathcal{L}[f(t)]+\beta\mathcal{L}[g(t)]$.

(2) 相似性：$\mathcal{L}[f(at)]=\frac{1}{a}F(\frac{p}{a})$. $\mathcal{L}^{-1}[F(ap)]=\frac{1}{a}f(\frac{t}{a})$.

(3) 延迟性：(时域) $\mathcal{L}[f(t-t_0)u(t-t_0)]=e^{-t_0p}F(p)$. (注意是 $f(t-t_0)u(t-t_0)$ 而不是 $f(t-t_0)$). ⇒ 时移

(4) 平移性：(频域). $F(p-p_0)=\mathcal{L}[e^{p_0t}f(t)]$. ⇒ 频移

(5) $\boxed{\text{微分性}}$：(时域微分)：$\mathcal{L}[f'(t)]=pF(p)$ ⇒ $F(p)=(\frac{1}{p}\mathcal{L}[f'(t)]=\mathcal{L}[f(t)])$

(频域微分)：$F'(p)=-\mathcal{L}[tf(t)]$. ⇒ $f(t)=(\frac{\mathcal{L}^{-1}[F'(p)]}{-t}=\mathcal{L}^{-1}[F(p)].)$

(6) $\boxed{\text{积分性}}$：(时域积分)：$\mathcal{L}[\int_0^t f(s)ds]=\frac{F(p)}{p}$ ⇒ $p\mathcal{L}[\int_0^t f(s)ds]=\mathcal{L}[f(t)]$

(频域积分)：$\int_p^{+\infty}F(s)ds=\mathcal{L}[\frac{f(t)}{t}]$. ⇒ $\int_p^{+\infty}\mathcal{L}[f(t)]dt=\mathcal{L}[\frac{f(t)}{t}]$.

⇒ $\mathcal{L}[f(t)]=\frac{\mathcal{L}[f'(t)]}{p}=p\mathcal{L}[\int_0^t f(t)dt]$

⇓ 用 $f'(t)$ 或 $\int_0^t f(s)ds$ 求 $\mathcal{L}[f(t)]$.

(7) 周期性：$\mathcal{L}[f(t)]=\frac{\int_0^T f(t)e^{-pt}dt}{1-e^{-pT}}$

[题型：求拉普拉斯变换]

○ (1) $\sin(t-2)$, (2) $\sin t\cdot u(t-2)$. (3) $\sin(t-2)\cdot u(t-2)$. (4) $e^{2t}\cdot u(t-2)$.

○ (1) $\frac{1-\cos t}{t^2}$. (2) $\int_0^t te^{-3t}\sin 2t\,dt$

○ (1) $|\cos t|$.

[题型：求拉普拉斯逆变换]

○ (1) $\frac{e^{-5p+1}}{p}$ (2) $\frac{4p}{(p^2+4)^2}$ (3) $\frac{2p+5}{p^2+4p+13}$ (4) $\ln\frac{p^2+1}{p}$

【题型：用拉普拉斯变求微积分方程】

【题型：用拉普拉斯变换求广义积分】

[题型：建立定解问题]

① 长为 l 的均匀杆，侧面绝热，一端温度为零，另一端有恒定热流 q 进入（单位时间内通过单位面积流入的热量），杆初始温度分布为 $\frac{1}{2}x(l-x)$，写出定解问题。

② 一均匀杆原长为 l，一端固定，另一端沿杆轴线方向被拉长 e 而静止，突然放手任其振动，建立振动方程与定解条件。

[题型：二维拉普拉斯方程]

① 求解矩形域 $0\le x\le a,\ 0\le y\le b$ 内的拉普拉斯方程：

$$u_{xx}+u_{yy}=0,\quad 0<x<a,\ 0<y<b.$$

(1) 满足边界条件：$\begin{cases} u|_{x=0}=Ay(b-y),\ u|_{x=a}=0, & 0<y<b. \\ u|_{y=0}=0,\ u|_{y=b}=0, & 0<x<a. \end{cases}$

求解：用分离变量法，设 $u(x,y)=X(x)Y(y)$. 则 $X''(x)Y(y)+X(x)Y''(y)=0 \Rightarrow \dfrac{X''(x)}{X(x)}=-\dfrac{Y''(y)}{Y(y)}=-\lambda$

得到 $\begin{cases} X''(x)-\lambda X(x)=0 \\ Y''(x)+\lambda Y(y)=0 \end{cases}$ 对 $Y''(y)+\lambda Y(y)=0$ 进行求解：

由 $u|_{y=0}=0,\ u|_{y=b}=0$ 得：$Y(0)=Y(b)=0$ 得固有问题：$\begin{cases} Y''(y)+\lambda Y(y)=0 \\ Y(0)=Y(b)=0. \end{cases}$

解得 $\lambda=(\frac{n\pi}{b})^2,\ n=1,2,\cdots\ Y(y)=C_2\sin\frac{n\pi}{b}y.$ ($u|_{y=0}=0, u|_{y=b}=0$：第一类边界条件)

再由 $X''(x)-\lambda X(x)=0$ 得 $X(x)=C_1e^{\frac{n\pi}{b}x}+C_2e^{-\frac{n\pi}{b}x}$

$\Rightarrow u(x,y)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(a_ne^{\frac{n\pi}{b}x}+b_ne^{-\frac{n\pi}{b}x})\sin\frac{n\pi}{b}y.=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(c_n\cosh\frac{n\pi}{b}x+d_n\sinh\frac{n\pi}{b}x)\sin\frac{n\pi}{b}y.$

转换后计算简便 → 不是所有时候都适合转换

由边界条件：$\begin{cases} u|_{x=0}=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}d_n\sin\frac{n\pi}{b}y=Ay(b-y). \\ u|_{x=a}=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(c_n\cosh\frac{n\pi}{b}a+d_n\sinh\frac{n\pi}{b}a)\sin\frac{n\pi}{b}y=0 \end{cases}$

即得方程组：$\begin{cases} d_n=\frac{2}{b}\int_0^b Ay(b-y)\sin\frac{n\pi}{b}y\,dy \quad (正交). \\ c_n\cosh\frac{n\pi}{b}a+d_n\sinh\frac{n\pi}{b}a=0. \end{cases}$

其中 $d_n=\frac{2}{b}\int_0^b Ay(b-y)\sin\frac{n\pi}{b}y\,dy=2A\int_0^b y\sin\frac{2\pi}{b}y\,dy-\frac{2A}{b}\int_0^b y^2\sin\frac{n\pi}{b}y\,dy=\dfrac{4Ab^2[1-(-1)^n]}{n^3\pi^3}$ △仔细计算.

$c_n=-\dfrac{\sinh\frac{n\pi}{b}a}{\cosh\frac{n\pi}{b}a}d_n=\dfrac{4Ab^2[(-1)^n-1]\sinh\frac{n\pi}{b}a}{n^3\pi^3\cosh\frac{n\pi}{b}a}.$

通解为：$u(x,y)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(c_n\cosh\frac{n\pi}{b}x+d_n\sinh\frac{n\pi}{b}x)\sin\frac{n\pi}{b}y.$

(2) 满足边界条件 $\begin{cases} u|_{x=0}=0.\quad u|_{x=a}=Ay,\quad 0<y<b. \\ u_y|_{y=0}=0,\ u_y|_{y=b}=0,\quad 0<x<a. \end{cases}$

设 $u(x,y)=X(x)Y(y)$. $\Rightarrow X''(x)Y(y)+X(x)Y''(y)=0 \Rightarrow \dfrac{X''(x)}{X(x)}=-\dfrac{Y''(y)}{Y(y)}=\lambda$

得固有问题 $\begin{cases} Y''(y)+\lambda Y(y)=0 \\ Y'(0)=Y'(b)=0. \end{cases}$ 易解得 $Y(y)=C_n\cos\frac{n\pi}{b}y,\ \lambda=(\frac{n\pi}{b})^2,\ n=0,1,2\cdots$

可解得: $X(x)=\begin{cases} A_0x+A_1, & n=0. \\ C_1e^{-\frac{n\pi}{b}x}+C_2e^{\frac{n\pi}{b}x}=C_1'\cosh\frac{n\pi}{b}x+C_2'\sinh\frac{n\pi}{b}x, & n\neq 0. \end{cases}$

可得解具有形式: $u(x,t)=a_0+a_1x+\sum_{n=1}^{+\infty}[a_n\cosh\frac{n\pi}{b}x+b_n\sinh\frac{n\pi}{b}x]\cos\frac{n\pi}{b}y.$

又 $u|_{x=0}=a_0+\sum_{n=1}^{+\infty}a_n\cos\frac{n\pi}{b}y=0. \Rightarrow a_0=a_n=0.$

$u|_{x=b}=a_1a+\sum_{n=1}^{+\infty}b_n\sinh\frac{n\pi a}{b}\cos\frac{n\pi}{b}y=Ay.$ 则有:

$$b_n=\frac{1}{\sinh\frac{n\pi a}{b}}\cdot\frac{2}{b}\int_0^b Ay\cos\frac{n\pi}{b}y\,dy=\frac{2[(-1)^n-1]Ab}{n^2\pi^2\sinh\frac{n\pi a}{b}}$$

$$\Delta\ a_1a=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{b}\int_0^b Ay\,dy\right)=\frac{Ab}{2}\Rightarrow a_1=\frac{Ab}{2a}$$

则解为: $u(x,t)=\dfrac{Ab}{2a}+\dfrac{2Ab}{\pi^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n-1}{n^2\sinh\frac{n\pi a}{b}}\sinh\frac{n\pi}{b}x\cos\frac{n\pi}{b}y.$

$u_{xx}+u_{yy}=0,\ 0<x<\pi,\ 0<y<\pi.$

(3). $\begin{cases} u_x(0,y)=y-\frac{\pi}{2}, & u_x(\pi,y)=0, \quad 0\le y\le\pi \\ u_y(x,0)=0, & u_y(x,\pi)=0, \quad 0\le x\le\pi \end{cases}$

$\Rightarrow$ 令 $u(x,y)=X(x)Y(y) \Rightarrow \frac{X''(x)}{X(x)}=-\frac{Y''(y)}{Y(y)}=\lambda.$

可解得 $Y(y)=\cos ny,\ \lambda=n^2,\ n=0,1,2,\cdots$

由 $X''(x)-\lambda X(x)=0$ 可解得：$\begin{cases} X_0(x)=a_0+a_1x, & n=0 \\ X_n(x)=C_ne^{nx}+d_ne^{-nx}, & n=1,2,\cdots \end{cases}$

则 $u(x,t)=a_0+a_1x+\sum_{n=1}^{+\infty}(C_ne^{nx}+d_ne^{-nx})\cos ny.$ 代入边界条件：

$\begin{cases} u_x(0,y)=y-\frac{\pi}{2}=a_1+\sum_{n=1}^{+\infty}n(C_n-d_n)\cos ny \\ u_x(\pi,y)=0=a_1+\sum_{n=1}^{+\infty}n(C_ne^{nx}-d_ne^{-nx})\cos ny. \end{cases}$

易得：$a_1=0$. $\begin{cases} C_ne^{nx}-d_ne^{-nx}=0. \\ n(C_n-d_n)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(y-\frac{\pi}{2})\cos ny\,dy=\frac{2}{n^2\pi}[(-1)^n-1]. \end{cases}$

$\Rightarrow C_n=\frac{e^{-n\pi}[1-(-1)^n]}{n^3\pi\sinh n\pi}.\quad d_n=\frac{e^{n\pi}[1-(-1)^n]}{n^3\pi\sinh n\pi}.$

解为 $u(x,y)=a_0+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2[1-(-1)^n]}{n^3\pi}\frac{\cosh n(x-\pi)}{\sinh n\pi}\cos ny.$ a_0 为任意常数.

【题型：求解定解问题(非齐次)】. 特解法和固有函数法.

(1) $$\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=\sin 2x, & 0<x<\pi,\ t>0. \\ u|_{x=0}=0. & u|_{x=\pi}=0. \\ u|_{t=0}=0. & u_t|_{t=0}=0. \end{cases}$$

(2) $$\begin{cases} u_t-a^2u_{xx}=Ax. & 0<x<l.\ t>0. \\ u|_{x=0}=0. & u|_{x=l}=0 \\ u|_{t=0}=0. & \end{cases}$$

[固有函数法]

$$①\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx}+A, & 0<x<l,\ t>0, \\ u|_{x=0}=0,\quad u_x|_{x=l}=0, & t>0, \\ u|_{t=0}=0,\quad u_t|_{t=0}=0, & 0<x<l. \end{cases}$$

二维Laplace方程

⇒ 满足该齐次边界条件的固有函数为 $\sin\frac{(2n+1)\pi}{2l}$，$n=1,2,\cdots$ 故设解具有以下形式

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{+\infty}T_n(t)\sin\frac{(2n+1)\pi}{2l}x.$$

将自由项按固有函数展开：$A=\sum_{n=1}^{+\infty}A_n\sin\frac{(2n+1)\pi}{2l}x$. 其中 A_n 为：

$$A_n=\frac{2}{l}\int_0^l A\sin\frac{(2n+1)\pi}{2l}x\,dx=\frac{2A}{l}\cdot\frac{-2l}{(2n-1)\pi}\cos\frac{(2n+1)\pi}{2l}x\Big|_0^l=\frac{4A}{(2n+1)\pi}$$

把解和自由项代入原方程：

$$\sum_{n=1}^{+\infty}T_n''(t)\sin\frac{(2n+1)\pi}{2l}x=-\frac{(2n+1)^2\pi^2}{4l^2}a^2\sum_{n=1}^{+\infty}T_n(t)\sin\frac{(2n+1)\pi}{2l}x+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{4A}{(2n+1)\pi}\sin\frac{(2n+1)\pi}{2l}x$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} T_n''(t)=-\frac{(2n+1)^2\pi^2a^2}{4l^2}T_n(t)+\frac{4A}{(2n+1)\pi} \\ T_n(0)=0,\quad T_n'(0)=0. \end{cases}$$

得到关于 $T_n(t)$ 的常微分方程.

解此方程得：$T_n(t)=C_1\cos\frac{(2n+1)\pi a}{2l}t+C_2\sin\frac{(2n+1)\pi a}{2l}+\frac{16Al^2}{(2n+1)^3\pi^3a^3}$

↳ 常数变易法

由初始条件得：$C_1=-\frac{16Al^2}{(2n+1)^3\pi^3a^3}$，$C_2=0$. 则

$$T_n(t)=-\frac{16Al^2}{(2n+1)^3\pi^3a^3}\cos\frac{(2n+1)\pi a}{2l}t+\frac{16Al^2}{(2n+1)^3\pi^3a^3}.$$

则解为：$u(x,t)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{16Al^2}{(2n+1)^3\pi^3a^3}\left(1-\cos\frac{(2n+1)\pi a}{2l}t\right)\sin\frac{(2n+1)\pi}{2l}x.$

△ 此题目只能用固有函数法，用特解法错误.

※、

$$\begin{cases} u_t = a^2u_{xx} - bu, & 0<x<\pi,\ t>0 \\ u_x|_{x=0} = 0, & u_x|_{x=\pi} = 0,\ t>0 \\ u|_{t=0} = x, & 0<x<\pi \end{cases}$$

[固有函数法]　～维热传导方程

该定解问题对应的固有值问题为：$\begin{cases} X''(x)+\lambda X(x)=0 \\ X'(0)=X'(\pi)=0 \end{cases}$ 解得 $\lambda=n^2$，$X_n=\cos nx$，$n=0,1,2\cdots$

故设定解问题的解的形式为：$u(x,t)=\sum_{n=0}^{+\infty}T_n(t)\cos nx$.

该问题没有自由项，将形式解代入方程有：

$$\sum_{n=0}^{+\infty}T_n'(t)\cos nx + a^2n^2\sum_{n=0}^{+\infty}T_n(t)\cos nx + b\sum_{n=0}^{+\infty}T_n(t)\cos nx = 0$$

可得关于 $T_n(t)$ 的常微分方程：

$$\begin{cases} T_n'(t)+n^2a^2T_n(t)+bT_n(t)=0 \\ \cancel{T_n(0)=x} \end{cases}$$ ✗

解此方程得：$T_n(t)=C_ne^{-(n^2a^2+b)t}$，即 $u(x,t)=\sum_{n=0}^{+\infty}C_ne^{-(n^2a^2+b)t}\cos nx$.

由初始条件 $u|_{t=0}=x$ 得：$u|_{t=0}=\sum_{n=0}^{+\infty}C_n\cos nx = x$.

那么 $C_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nx\,dx = \frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi}x\,d\sin nx$

$$= \frac{2}{n\pi}x\sin nx\Big|_0^{\pi} - \frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi}\sin nx\,dx = \frac{2}{n^2\pi}\cos nx\Big|_0^{\pi} = \frac{2[(-1)^n-1]}{n^2\pi}$$

$C_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x\,dx = \frac{1}{2\pi}x^2\Big|_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}$　$\left(\frac{1}{\pi}\right)$ 注意余弦函数正交性时要注意 $n=0$ 的情况

即有：$C_n=\begin{cases} \frac{\pi}{2}, & n=0 \\ \frac{4}{n^2\pi}, & n=2k-1 \\ 0, & n=2k \end{cases} \Rightarrow \frac{2[(-1)^n-1]}{n\pi}$.

综上：$u(x,t)=\frac{\pi}{2}e^{-bt}-\frac{4}{\pi}e^{-bt}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}e^{-(2k-1)^2a^2t}\cos(2k-1)x$

$\left(u(x,t)=\frac{\pi}{2}e^{-bt}-\frac{2}{\pi}e^{-bt}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{[(-1)^n-1]}{n^2}e^{-n^2a^2t}\cos nx\right)$

[题型：非齐次边界条件的处理]

0 求解定解问题 $\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, & 0<x<l,\ t>0 \\ u|_{x=0} = kt,\ u|_{x=l} = bt, & t>0 \\ u|_{t=0} = E(1-\frac{x}{l}),\ u_t|_{t=0} = k(1-\frac{x}{l}), & 0<x<l. \end{cases}$

先将非齐次边界条件化为齐次. 设 $W(x,t) = A(t)x + B(t)$,

由 $W|_{x=0} = B(t) = kt$, $W|_{x=l} = A(t)l + B(t) = bt$ 得 $W(x,t) = \frac{k-b}{l}tx + kt$

则 $u(x,t) = v(x,t) + W(x,t)$. 其中 $v(x,t)$ 满足:

$$\begin{cases} v_{tt} = a^2 v_{xx}, & 0<x<l,\ t>0. \\ v|_{x=0} = 0, \quad v|_{x=l} = 0, & t>0. \\ v|_{t=0} = E(1-\frac{x}{l}),\ v_t|_{t=0} = k(1-\frac{x}{l}) - \frac{k-b}{l}x \end{cases}$$

设 $v(x,t) = X(x)T(t)$, 得:

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X(0) = X(l) = 0 \end{cases}$$ 解出 $\lambda = (\frac{n\pi}{l})^2$, $X(x) = C\sin\frac{n\pi}{l}x$, $n=1,2,\cdots$

得 $T(t) = C_1\cos\frac{n\pi a}{l}t + C_2\sin\frac{n\pi a}{l}t$, $\Rightarrow v(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty}[a_n\cos\frac{n\pi a}{l}t + b_n\sin\frac{n\pi a}{l}t]\sin\frac{n\pi}{l}x$

由 $v|_{t=0} = E(1-\frac{x}{l})$ 及 $v_t|_{t=0} = k(1-\frac{x}{l}) - \frac{k-b}{l}x$ 得:

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l E(1-\frac{x}{l})\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx = \frac{2E}{n\pi}.$$

$$b_n = \frac{2}{n\pi a}\int_0^l [k(1-\frac{x}{l}) - \frac{k-b}{l}x]\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx = (-1)^n\frac{2bl}{n^2\pi^2 a}.$$

所以 $u(x,t) = \sum_{n=0}^{+\infty}[\frac{2E}{n\pi}\cos\frac{n\pi a}{l}t + (-1)^n\frac{2bl}{n^2\pi^2 a}\sin\frac{n\pi a}{l}t]\sin\frac{n\pi}{l}x + \frac{k-b}{l}tx + kt$

[题型：Fourier积分变换]

(波动方程)

0 $\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=t\sin x, & -\infty<x<+\infty,\ t>0 \\ u|_{t=0}=0, & u_t|_{t=0}=\sin x. \end{cases}$

⇒记 $\tilde{u}(w,t)=\mathcal{F}[u(x,t)]$，原方程化为：$\begin{cases} \dfrac{\partial^2\tilde{u}}{\partial t^2}+w^2\tilde{u}=i\pi[\delta(w+1)-\delta(w-1)]t=f(w)t \\ \tilde{u}|_{t=0}=0,\ \tilde{u}_t|_{t=0}=f(w) \end{cases}$

①解常微分方程：

由 $r^2+w^2=0$ 得齐次通解：$\bar{u}=C_1\cos wt+C_2\sin wt$.

设非齐次通解为 $\tilde{u}=C_1(t)\cos wt+C_2(t)\sin wt$，则得到： [常数变易法]

$$\begin{cases} \cos wt\,C_1'(t)+\sin wt\,C_2'(t)=0 \\ -w\sin wt\,C_1'(t)+w\cos wt\,C_2'(t)=f(w)t. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1'(t)=\dfrac{f(w)}{w}\cos wt\cdot t \\ C_2'(t)=-\dfrac{f(w)}{w}\sin wt\cdot t. \end{cases}$$

积分：$C_1(t)=-\dfrac{f(w)}{w}\int t\sin wt\,dt=\dfrac{f(w)}{w^2}\left[t\cos wt-\dfrac{\sin wt}{w}+C_3\right]$

$C_2(t)=\dfrac{f(w)}{w}\int t\cos wt\,dt=\dfrac{f(w)}{w^2}\left[t\sin wt+\dfrac{\cos wt}{w}+C_4\right]$

所以 $\tilde{u}(w,t)=\dfrac{f(w)}{w^2}t+\dfrac{f(w)}{w^2}[C_3\cos wt+C_4\sin wt]$.

由 $\tilde{u}|_{t=0}=0$ 及 $\tilde{u}_t|_{t=0}=f(w)$ 得：$C_3=0$. $C_4=\dfrac{1}{w}\left(1-\dfrac{1}{w^2}\right)$.

则 $\tilde{u}(w,t)=\dfrac{i\pi}{w^2}[\delta(w+1)-\delta(w-1)]t+\dfrac{i\pi}{w}\left(1-\dfrac{1}{w^2}\right)[\delta(w+1)-\delta(w-1)]\sin wt$.

②求逆变换：

$$u(x,t)=\mathcal{F}^{-1}[\tilde{u}(w,t)]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{u}(w,t)e^{iwx}dw$$

$$=\frac{it}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{w^2}[\delta(w+1)-\delta(w-1)]e^{iwx}dw+\frac{i}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{w}\left(1-\frac{1}{w^2}\right)[\delta(w+1)-\delta(w-1)]\sin wt\,e^{iwx}dw$$

$$=\frac{it}{2}[e^{-ix}-e^{ix}]=\frac{t}{2i}[e^{ix}-e^{-ix}]=t\sin x.$$

(利用 $\delta(w)$ 的筛选性质).

○ $\begin{cases} u_t + a u_x = f(x,t), & -\infty < x < +\infty,\ t>0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x), & -\infty < x < +\infty. \end{cases}$

记 $\tilde{u}(w,t) = \mathcal{F}[u(x,t)]$, $\tilde{f}(w,t) = \mathcal{F}[f(x,t)]$. $\tilde{\varphi}(w) = \mathcal{F}[\varphi(x)]$.

则 $\begin{cases} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + aiw\tilde{u} = \tilde{f}(w,t). \\ \tilde{u}|_{t=0} = \tilde{\varphi}(w) \end{cases}$ 由一阶常数变易法：

$$\tilde{u}(w,t) = e^{-\int aiw dt}\left(\int_0^t \tilde{f}(w,\tau) e^{\int aiw d\tau} d\tau + C\right) = e^{-aiwt}\left(\int_0^t \tilde{f}(w,\tau) e^{aiw\tau} d\tau + C\right)$$

$$= \int_0^t \tilde{f}(w,t) e^{-ai(t-\tau)w} d\tau + Ce^{-aiwt}.$$

由 $\tilde{u}|_{t=0} = \tilde{\varphi}(w)$ 得：$C = \tilde{\varphi}(w)$. 所以 $\tilde{u}(w,t) = \int_0^t \tilde{f}(w,t) e^{-ai(t-\tau)w} d\tau + \tilde{\varphi}(w) e^{-aiwt}$.

由于 $\mathcal{F}[\delta(x-at)] = e^{-aiwt}$. $\mathcal{F}[\delta(x-a(t-\tau))] = e^{-ai(t-\tau)w}$. 则

$$\tilde{u}(w,t) = \tilde{\varphi}(w)\tilde{\delta}(x-at) + \int_0^t \tilde{f}(w,\tau)\tilde{\delta}(x-a(t-\tau))d\tau$$

作逆变换：

$$u(x,t) = \mathcal{F}^{-1}[\hat{u}(w,t)] = \varphi(x) * \delta(x-at) + \int_0^t f(x,\tau) * \delta(x-a(t-\tau)) d\tau.$$ ※逆变换

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x-\xi)\delta(\xi-at)d\xi + \int_0^t\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-\xi,\tau)\delta(\xi-a(t-\tau))d\xi\right]d\tau$$

$$= \varphi(x-at) + \int_0^t f(x-a(t-\tau),\tau)d\tau.$$

○ $\begin{cases} u_t - a^2u_{xx} - bu_x - cu = 0. & -\infty < x < +\infty,\ t>0. \\ u(x,0) = \varphi(x). & -\infty < x < +\infty. \end{cases}$

记 $\tilde{u}(w,t) = \mathcal{F}[u(x,t)]$, $\tilde{\varphi}(w) = \mathcal{F}[\varphi(x,t)]$.

$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + a^2iw\tilde{u} - b\hat{u} - c\tilde{u} = 0. \\ \tilde{u}|_{t=0} = \tilde{\varphi}(w). \end{cases}$ 解得：$\tilde{u} = \tilde{\varphi}(w) e^{-(a^2w^2 - biw - c)t}$

经过配方：$\tilde{u}(w,t) = \tilde{\varphi}(w) e^{-\frac{b^2-4a^2c}{4a^2}t} e^{-a^2t(w-\frac{bi}{2a^2})^2}$，又因为 $\mathcal{F}\left[\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}\right] = e^{-a^2tw^2}$

所以 $\mathcal{F}^{-1}\left[e^{-\frac{b^2-4a^2c}{4a^2}} e^{-a^2t(w-\frac{bi}{2a^2})^2}\right] = e^{-\frac{b^2-4a^2c}{4a^2}} \cdot \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4a^2t}} \cdot e^{-\frac{bx}{2a^2}} = \frac{e^{ct}}{2a\sqrt{\pi t}} e^{\frac{(x+bt)^2}{4a^2t}}$

则 $u(x,t) = \mathcal{F}^{-1}\left[\tilde{\varphi}(w) e^{-(a^2w^2-biw-c)t}\right] = \mathcal{F}^{-1}[\tilde{\varphi}(w)] * \mathcal{F}^{-1}\left[e^{-(a^2w^2-biw-c)t}\right]$

$$= \varphi(x) * \frac{e^{ct}}{2a\sqrt{\pi t}} e^{\frac{(x+bt)^2}{4a^2t}} = \frac{e^{ct}}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x-\xi) e^{\frac{(\xi+bt)^2}{4a^2t}} d\xi$$

【题型：Laplace 积分变换】

① $\begin{cases} u_{xy}=1, & x>0,\ y>0 \\ u|_{x=0}=y+1, & u|_{y=0}=1 \end{cases}$ （这里的"1"就是 $u(x)$ 单位阶跃）.

对 $u(x,y)$ 关于 x 取 L 变换. 记 $\tilde{u}(p,y)=\mathcal{L}[u(x,y)]$.

则 $\mathcal{L}[\frac{\partial u(x,y)}{\partial x\partial y}]=\frac{\partial}{\partial y}[\mathcal{L}[\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}]]=\frac{\partial}{\partial y}[p\tilde{u}(p,y)-y-1]=p\frac{\partial \tilde{u}}{\partial y}-1$

$\mathcal{L}[1]=\frac{1}{p}$.

原方程化为 $\begin{cases} p\frac{\partial \tilde{u}}{\partial y}-1=\frac{1}{p} \\ \tilde{u}|_{y=0}=\frac{1}{p} \end{cases} \Rightarrow \tilde{u}=(\frac{1}{p^2}+\frac{1}{p})y+\frac{1}{p}$.

取逆变换：$u(x,y)=\mathcal{L}^{-1}[\tilde{u}(p,y)]=\mathcal{L}[(\frac{1}{p^2}+\frac{1}{p})y+\frac{1}{p}]=xy+y+1$.

① $\begin{cases} u_{xx}+u_{xt}=0, & x>0,\ t>0 \\ u|_{x=0}=\psi(t), & u_x|_{x=0}=0 \\ u|_{t=0}=\varphi(x), & \varphi(0)=\psi(0) \end{cases}$

记 $\tilde{u}(p,t)=\mathcal{L}[u(x,t)]$, $\tilde{\varphi}(p)=\mathcal{L}[\varphi(x)]$

则 $\mathcal{L}[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}]=p^2\tilde{u}-p\tilde{u}|_{x=0}-\tilde{u}_x|_{x=0}=p^2\tilde{u}-p\psi$, $\mathcal{L}[\frac{\partial u}{\partial x}]=p\tilde{u}-\tilde{u}|_{x=0}=p\tilde{u}-\psi$

原方程化为：$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t}+p\tilde{u}=\psi+\frac{\psi'}{p} \\ \tilde{u}|_{t=0}=\tilde{\varphi}(p) \end{cases}$

由常数变易法：$\tilde{u}=e^{-\int p\,dt}(\int_0^t(\psi+\frac{\psi'}{p})e^{p\tau}d\tau+C)=e^{-pt}(\int_0^t(\psi+\frac{\psi'}{p})e^{p\tau}d\tau+\tilde{\varphi}(p))$

其中 $\int_0^t(\psi+\frac{\psi'}{p})e^{p\tau}d\tau=\int_0^t\psi e^{p\tau}d\tau+\int\frac{\psi'}{p}e^{p\tau}d\tau=\int_0^t\frac{\psi}{p}de^{p\tau}+\int\frac{\psi'}{p}e^{p\tau}d\tau=\frac{\psi}{p}e^{pt}$

所以 $\tilde{u}=e^{-pt}(\frac{\psi}{p}e^{pt}+\tilde{\varphi}(p))=\frac{\psi}{p}+\tilde{\varphi}(p)e^{-pt}$.

求逆变换：$u(x,t)=\mathcal{L}^{-1}[\tilde{u}(p,t)]=\psi(t)+\varphi(x-t)\bar{u}(x-t)$

$\bar{u}(x-t)$ 为单位阶跃函数. 即：$u(x,t)=\begin{cases}\psi(t), & x-t<0 \\ \psi(t)+\varphi(x-t), & x-t>0\end{cases}$

1. 正确个数( ).

(1) 设 $z=\infty$ 为 $f(z)$ 可去奇点，则 $Res[f(z),\infty]=0$.

(2) 设 $f(z)$ 在 $|z|>R>0$ 内解析，且 $\lim_{z\to\infty} zf(z)=0$，则 $Res[f(z),\infty]=0$

(3) 设 $f(z)$ 的罗朗展开：$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{-2}\frac{a_n}{(z-1)^n}+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{b_n}{(z-1)^n}$. 则 $Res[f(z),1]=0$.

(A) 0.　(B) 2.　(C) 3.　(D) 4.

2. 给定复平面上点集：

① $|z-2+i|\le 1$. ② $0\le \arg z\le \frac{\pi}{4}$. ③ $|z-4|\ge|z|$. ④ $|2z+3|>4$.

其中构成区域的有( )

(A) 1.　(B) 2.　(C) 3　(D) 4.

3. 设 $f(z)=1+2z+3z^2+\cdots+2012z^{2011}$. 则 $\oint_{|z|=1}\frac{(\bar z)^{2011}f(z)}{z}dz=$ ( ).

4. $f(z)=\frac{z+2}{z(z+1)}$ 在 $|z|>1$ 内的罗朗级数为 ______.

5. 用 Laplace 变换计算积分. $\int_0^{+\infty}\frac{x\sin x}{1+x^2}dx$.

6. $\lim_{z\to z_0}\frac{Im(z)-Im(z_0)}{z-z_0}=$ ( ). A. i　B. $-i$　C. 0.　D. 不存在.

↳ 该式为 $f(z)=Im(z)$ 导数定义式. $f(z)=Im z$ 不满足 C-R 条件. 因此不可导.

7. 不正确的是( ).

(A) 积分 $\oint_{|z-a|=r}\frac{1}{z-a}dz$ 值与 r 大小无关.　(B) $\left|\int_C(x^2+iy^2)dz\right|<1$. 其中 C 为 $-i$ 到 i 的线段.

(C) 若 $f(z)$ 在 $0<|z|<1$ 内解析. 且沿任何圆周 $C: |z|=r\ (0<r<1)$ 积分为0. 则 $f(z)$ 在 $z=0$ 处解析.

(D) 设 $g(z)$ 在区域 D 内有定义，且 $f'(z)=g(z)$. 则 D 内 $g'(z)$ 存在且解析.

↳ (C) 存在可去奇点.　(D) 由 $f'(z)=g(z)$ 知 $f(z)$ 解析. 则 $g(z)$ 也解析. 则 $g'(z)$ 也解析.

8. $Res[f(z),0]=0$ 的是( ).

(A) $f(z)=\frac{1}{e^z-1}-\frac{1}{z}$.　(B) $f(z)=\frac{\sin z}{z}-\frac{1}{z}$.　(C) $f(z)=\frac{\sin z+\cos z}{z}$　(D) $f(z)=\frac{e^z-1}{z^2}$.

9. $z=0$ 为函数 $\frac{1}{z^3-\sin z^3}$ 的 m 阶极点. 则 $m=$ ______.

10. 调和函数 $u=\frac{x}{x^2+y^2}$ 的共轭调和函数为 ______.

11. 设幂级数 $\sum_{n=0}^{+\infty}C_n(z-2)^n$ 在 $z=4$ 收敛而在 $z=2+2i$ 发散. 则其收敛圆域为 ______.

12. 将 $f(z)=\frac{1}{z^2(z^2+1)}$ 在 $0<|z-1|<1$ 内展开为罗朗级数

13. [证明题] 试证：复变函数 $f(z)=\cos(z+\frac{1}{z})$ 的罗朗级数展开式 $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n z^n$ 的系数为：

$$C_n=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos n\theta\cos(2\cos\theta)d\theta.$$

$\Rightarrow$ 令 $z=e^{i\theta}$. 则 $f(z)=\frac{1}{2}[e^{i(z+\frac{1}{z})}+e^{-i(z+\frac{1}{z})}]=\frac{1}{2}[e^{2i\cos\theta}+e^{-2i\cos\theta}]=\cos(2\cos\theta)$.

$C_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=1}\frac{f(z)}{z^{n+1}}dz=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{\cos(2\cos\theta)}{e^{i(n+1)\theta}}ie^{i\theta}d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(2\cos\theta)[\cos n\theta-i\sin n\theta]d\theta$

令 $t=\theta-\pi$ 可得 $\int_0^{2\pi}\sin n\theta\cos(2\cos\theta)d\theta=0$. 原式得证.

14. 不正确的是( )

(A) ∞ 是 $\sin\frac{1}{z}$ 的本性奇点.　　(B) ∞ 是 $\sin z$ 的本性奇点

(C) ∞ 是 $\frac{1}{\sin z}$ 的孤立奇点.　　(D) ∞ 是 $\frac{1}{\sin\frac{1}{z}}$ 的孤立奇点.

15. 函数 $f(x)=u(x)e^{-x}\sin wx$ 的傅立叶变换为( ).

(A) $\frac{1}{(1+iw)^2+1}$.　(B) $\frac{1}{(1-iw)^2+1}$.　(C) $\frac{1}{(1+iw)^2-1}$.　(D) $\frac{1}{(1-iw)^2-1}$

$\Rightarrow \int_0^{+\infty}\sin wx\cdot e^{-(1+iw)x}dx=\frac{1}{p^2+1}\Big|_{p=1+iw}=\frac{1}{(1+iw)^2+1}$ (运用了Laplace变换)

$e^{-at}u(t)\Rightarrow\frac{1}{a+iw}$.

16. 积分 $\oint_{|z|=2}\sin\frac{1}{z-1}=$ ______.

$\oint_{|z|=2}\sin\frac{1}{z-1}=2\pi i\,Res[\sin\frac{1}{z-1},1]$. 由 $\sin\frac{1}{z-1}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!(z-1)^{2n+1}}$ 知 $C_{-1}=1$ 则原式 $=2\pi i$

△用罗朗级数展开求留数.

$Res[f(z),1]=-Res[f(z),\infty]=Res[\frac{1}{z^2}f(\frac{1}{z}),0]$.

17. $f(z)=\tan z+\frac{z}{1+z}$ 在 $z=2$ 处泰勒级数收敛半径为 ______.

18. 若 $z=z_0$ 分别为 $f_1(z)$, $f_2(z)$ 的 m 阶和 n 阶极点, 则 $z=z_0$ 是 $f_1(z)f_2(z)$ 的 ______ 阶极点

19. 设函数 $f(z)$ 在 $z=0$ 的邻域内罗朗级数为 $f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}C_nz^n$. 求 C_n. 其中 $n=-\infty,\cdots,0$.

20. 由Laplace变换求微分方程 $\begin{cases} ty''(t)+2y'(t)+ty(t)=2\sin t \\ y(0)=-1,\ y'(0)=0. \end{cases}$

21. 设 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在区域D内解析.
(1) 若在D内 $f'(z)=0$. 则 $f(z)$ 为常数.
(2) 若 $u(x,y)$ 在D内为常数. 则 $f(z)$ 为常数.
(3) 若在D内 $u(x,y)=v(x,y)$. 则 $f(z)$ 为常数. 正确的有( ). D.
(A). 0个. (B) 1个. (C) 2个. (D) 3个.

22. 已知 $|e^{i\theta}-1|=2$. 则 $\theta=$______.
⇒ 观察法: $\theta_0=\pi$. e^z 周期为 2π ⇒ $\theta=(2k+1)\pi,\ k=0,\pm1,\pm2\cdots$.

23. 将函数 $f(z)=\frac{1}{z^2+1}$ 在区域D内展开为形如 $f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n z^n$ 的级数. 则区域D为 $|z|<1$ 和 $|z|>1$. 中心为 $z=0$.

24. 对一维热传导方程混合初边值问题 $\begin{cases} u_t=a^2u_{xx},\ 0<x<l,\ t>0 \\ u_x(0,t)=A,\ u_x(l,t)=-A,\ t>0 \\ u(x,0)=B,\ 0\le x\le l. \end{cases}$ 其中 $A\neq0$. 进行边界齐次化.可令 $u(x,t)=v(x,t)+w(x)$. 得 $v(x,t)$ 满足齐次边界条件. 则 $w(x)=$ $-\frac{A}{l}x^2+Ax$.

25. $f(t)=\delta(t-1)(t-2)^2\sin t$ 的 Flourier 变换= $\sin 1$ ✗

26. 计算积分 $\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{(1+x^2)(a^2+x^2)}dx$. ⇒ 原式 $=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{(1+x^2)(a^2+x^2)}dx$

27. 用Laplace变换求解常微分方程边值问题. $\begin{cases} y''(t)+y(t)=10\sin 2t,\ 0<t<\frac{\pi}{2} \\ y(0)=0,\ y(\frac{\pi}{2})=1. \end{cases}$
⇒ $p^2Y(p)-py(0)-y'(0)+Y(p)=\frac{20}{p^2+4}$. $Y(p)=\frac{20}{(1+p^2)(p^2+4)}+\frac{y'(0)}{p^2+1}=\frac{y'(0)+\frac{20}{3}}{p^2+1}-\frac{10}{3}\cdot\frac{2}{p^2+4}$
$y(t)=[y'(0)+\frac{20}{3}]\sin t-\frac{10}{3}\sin 2t$. 由 $y(\frac{\pi}{2})=1$ 得 $y'(0)+\frac{20}{3}=1$. ⇒ $y(t)=\sin t-\frac{10}{3}\sin 2t$.
注意 $\mathcal{L}[y''(t)]=p^2Y(p)-py(0)-y'(0)$!!!

28. 函数 $f(z)=\frac{z^{13}}{(z^{2}-1)(z^{8}+1)}$ 在复平面上所有有限点处留数的和是（ ）.

(A) 2.　(B) −2.　(C) 1.　(D) −1.

29. 将 $f(z)=\frac{1}{z}e^{\frac{z}{z+1}}$ 在区域 $1<|z|<+\infty$ 内展开成罗朗级数. 只要求含有 z^{-2} 到 z^{0} 的各项

①间接法：

$\Rightarrow e^{\frac{z}{z+1}}=e^{(1-\frac{1}{z+1})}=e\cdot e^{-\frac{1}{z+1}}$，其中 $e^{-\frac{1}{z+1}}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\cdot\frac{(-1)^n}{(z+1)^n}=1-\frac{1}{z+1}+\frac{1}{2!}(\frac{1}{z+1})^2-\frac{1}{3!}(\frac{1}{z+1})^3+\cdots$

其中 $\frac{1}{1+z}=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{z}}=\frac{1}{z}\cdot\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{z^n}=\frac{1}{z}(1-\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}-\frac{1}{z^3}+\cdots)=\frac{1}{z}-\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}-\frac{1}{z^4}+\cdots$

$(\frac{1}{1+z})^2=-\frac{d}{dz}\frac{1}{1+z}=-\frac{d}{dz}(\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{z}})=\frac{1}{z^2}-\frac{2}{z^3}+\frac{3}{z^4}-\frac{4}{z^5}+\cdots$

$(\frac{1}{1+z})^3=\frac{1}{2}\frac{d^2}{dz^2}(\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{z}})=\frac{1}{2}\frac{d^2}{dz^2}(\frac{1}{z}-\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}-\frac{1}{z^4}+\cdots)=-\frac{1}{z^3}+\frac{3}{z^4}-\frac{6}{z^5}+\frac{10}{z^6}+\cdots$

代入得：$e^{-\frac{1}{z+1}}=1-\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}-\frac{1}{z^3}+\frac{1}{z^4}+\cdots+\frac{1}{2z^2}-\frac{1}{z^3}+\frac{3}{2z^4}-\frac{2}{z^5}+\cdots+\frac{1}{6z^3}-\frac{1}{2z^4}+\frac{1}{z^5}-\frac{5}{3z^6}+\cdots$

$=1-\frac{1}{z}-\frac{1}{2z^2}+\cdots$

则 $f(z)=\frac{1}{z}e^{\frac{z}{1+z}}=\frac{e}{z}-\frac{e}{z^2}+\cdots$

②直接法：令 $w=\frac{1}{z}$. $g(w)=f(\frac{1}{z})=we^{\frac{1}{w+1}}$. $w=0$ 为 $g(w)$ 解析点. $g(w)=\sum_{n=0}^{+\infty}C_nw^n$. $C_n=\frac{g^{(n)}(0)}{n!}$

$\Rightarrow C_0=g(0)=0$. $C_1=g'(0)=e$. $C_2=\frac{g''(0)}{2!}=-e$. 则 $g(w)=ew-ew^2+\cdots$

得 $f(z)=\frac{e}{z}-\frac{e}{z^2}+\cdots$. 罗朗级数不能用此公式.

或者 $f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}C_nz^n$，其中 $C_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(z)}{z^{n+1}}dz$.

$C_{-2}=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{e^{\frac{z}{1+z}}}{z\cdot z^{-2+1}}dz=\frac{1}{2\pi i}\oint e^{\frac{z}{1+z}}dz=Res[\frac{1}{z^2}e^{\frac{1}{1+z}},0]=-e.$

$C_{-1}=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{e^{\frac{z}{1+z}}}{z\cdot z^{-1+1}}dz=\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{e^{\frac{z}{1+z}}}{z}dz=Res[\frac{1}{z}e^{\frac{1}{1+z}},0]=e.$

$C_0=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{e^{\frac{z}{1+z}}}{z\cdot z^{0+1}}dz=\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{e^{\frac{z}{1+z}}}{z^2}dz=Res[e^{\frac{1}{1+z}},0]=0.$

则 $f(z)=\frac{e}{z}-\frac{e}{z^2}+\cdots$

30. 设曲线 C 为正向圆周 $|z|=2$. 计算积分 $I=\oint_C\frac{1}{z\sin(1+\frac{1}{z^2})}dz$.

$I=-2\pi i Res[f(z),\infty]=2\pi i Res[\frac{1}{z^2}f(\frac{1}{z}),0]$.

31. 设 $\alpha>0$. 计算积分 $I=\int_0^{\alpha}\frac{1}{(5-3\sin\frac{2\pi\theta}{\alpha})}d\theta$.

32. 用 Laplace 变换求解 $\begin{cases} y'(t)+3y(t)+2\int_0^t y(s)ds = e^{-t}+\sinh t \\ y(0)=0. \end{cases}$

记 $Y(p)=\mathcal{L}[y(t)]$. $\Rightarrow$ $pY(p)+3Y(p)+\dfrac{2Y(p)}{p} = \dfrac{1}{p+1}+\dfrac{1}{p^2-1}$

$$\Rightarrow Y(p)=\frac{1}{(p+1)^2(p+2)}+\frac{1}{(p^2-1)(p+1)(p+2)}=\frac{1}{(p+1)^2(p+2)}+\frac{1}{(p+1)^2(p-1)(p+2)}$$

$$y(t)=\mathcal{L}^{-1}[Y(p)]=\mathrm{Res}[Y(p)e^{pt},(\pm1,-2)]=\left[\frac{e^{pt}}{p+2}+\frac{e^{pt}}{(p-1)(p+2)}\right]'\Bigg|_{p=-1}+\left[\frac{(p-1)e^{pt}}{(p+1)^2(p+2)}+\frac{e^{pt}}{(p+1)^2(p+2)}\right]\Bigg|_{p=1}$$
$$+\left[\frac{e^{pt}}{(p+1)^2}+\frac{e^{pt}}{(p+1)^2(p+1)}\right]\Bigg|_{p=-2}=\frac{1}{12}e^{t}+\frac{5}{4}e^{-t}-\frac{t}{2}e^{-t}-\frac{4}{3}e^{-2t}.$$

[复反演公式]

或者: $Y(p)=\dfrac{p^2}{(p-1)(p+2)(p+1)^2}=\dfrac{A}{p-1}+\dfrac{B}{p+2}+\dfrac{Cp+D}{(p+1)^2}$.

$$\Rightarrow A=\lim_{p\to1}Y(p)(p-1)=\lim_{p\to1}\frac{p^2}{(p+2)(p+1)^2}=\frac{1}{12}.$$

$$B=\lim_{p\to-2}Y(p)(p+2)=\lim_{p\to-2}\frac{p^2}{(p-1)(p+1)^2}=-\frac{1}{3}$$

$$D=\lim_{p\to0}Y(p)(p+1)^2-\lim_{p\to0}\left[\frac{A(p+1)^2}{p-1}+\frac{B(p+1)^2}{p+2}\right]=\frac{3}{4}$$

[求待定系数]

$$-C+D=\lim_{p\to-1}Y(p)(p+1)^2=-\frac{1}{2}\Rightarrow C=\frac{5}{4}$$

$$\therefore Y(p)=\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{p-1}-\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{p-2}+\frac{5}{4}\cdot\frac{1}{(p+1)}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(p+1)^2}$$

△ 自由项为三角函数形式，则在比较系数得到 $T_n(t)$ 的定解问题时对n的取值作划分。

33. 求解定解问题 $\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=\underline{\sin\frac{2\pi}{l}x\sin\frac{2a\pi}{l}t}, & 0<x<l,\ t>0 \\ u(0,t)=0,\ u(l,t)=0 & t>0 \\ u(x,0)=0,\ u_t(x,0)=0, & 0<x<l \end{cases}$ 【固有函数法】

该齐次边界条件对应的固有值 $\lambda=\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$, $n=1,2,\cdots$ 固有函数为 $\sin\frac{n\pi}{l}x$, $n=1,2,\cdots$

故设解具有如下形式：$u(x,t)=\sum_{n=1}^{+\infty}T_n(t)\sin\frac{n\pi}{l}x$

自由项 $\sin\frac{2\pi}{l}x\sin\frac{2a\pi}{l}t$

将 $u(x,t)$ 代入方程得：$\sum_{n=1}^{+\infty}T_n''(t)\sin\frac{n\pi}{l}x+\frac{l^2a^2}{n^2\pi^2}\sum_{n=1}^{+\infty}T_n(t)\sin\frac{n\pi}{l}x=\sin\frac{2\pi}{l}x\sin\frac{2a\pi}{l}t.$

比较系数得：$T_n''(t)+\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2T_n(t)=\begin{cases}\sin\frac{2a\pi}{l}t, & n=2.\\ 0, & n\neq 2.\end{cases}$

由初始条件 $u(x,0)=0$、$u_t(x,0)=0$ 得 $T_n(0)=0$，$T_n'(0)=0$。

得 $T_n(t)$ 的常微分方程定解问题：

(1) $n\neq2$ 时：$\begin{cases}T_n''(t)+\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2T_n(t)=0.\\ T_n(0)=T_n'(0)=0.\end{cases}$ 通解为 $T_n(t)=a_n\cos\frac{n\pi a}{l}t+b_n\sin\frac{n\pi a}{l}t$

由初始条件得 $a_n=b_n=0$，即 $T_n(t)=0$，$n\neq2$.

(2) $n=2$ 时，$\begin{cases}T_2''(t)+\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2T_2(t)=\sin\frac{2\pi a}{l}t.\\ T_2(0)=T_2'(0)=0.\end{cases}$

$\pm\frac{2\pi a}{l}i$ 为特征根，即通解为 $T_2(t)=C_1\cos\frac{2\pi a}{l}t+C_2\sin\frac{2\pi a}{l}t$.

设特解为 $T_2^*(t)=t\left(A\cos\frac{2\pi a}{l}t+B\sin\frac{2\pi a}{l}t\right)$，代入方程得 $T_2^*(t)=-\frac{l}{4\pi a}t\cos\frac{2\pi a}{l}t$.

$\Rightarrow T_2(t)=C_1\cos\frac{2\pi a}{l}t+C_2\sin\frac{2\pi a}{l}t-\frac{l}{4\pi a}t\cos\frac{2\pi a}{l}t.$

由 $T_2(0)=T_2'(0)=0$ 得 $C_1=0$，$C_2=\frac{l^2}{8\pi^2a^2}$.

所以 $T_2(t)=\frac{l^2}{8\pi^2a^2}\sin\frac{2\pi a}{l}t-\frac{l}{4\pi a}t\cos\frac{2\pi a}{l}t$.

综上：$u(x,t)=\frac{l^2}{8\pi^2a^2}\sin\frac{2\pi a}{l}t\sin\frac{2\pi}{l}x-\frac{l}{4\pi a}t\cos\frac{2\pi a}{l}t\sin\frac{2\pi}{l}x.$

△ 初始条件为三角函数形式时，在最后用正交性求待定系数时有区分。例如：$\begin{cases}u_t-a^2u_{xx}=0, & 0<x<l,\ t>0.\\ u|_{x=0}=0,\ u|_{x=l}=0, & t>0.\\ u|_{t=0}=\underline{\sin\frac{\pi}{l}x+3\sin\frac{2\pi}{l}x}, & 0\le x\le l.\end{cases}$

34. 不正确的是 (A).

(A). 设 $f(z)=\dfrac{g(z)}{(z-z_0)^n}$. n为正整数. $g(z)$在z_0点解析. 则z_0是$f(z)$的n阶极点.

(B) 若$f(z)$在D内任一点z_0的邻域内可展开成泰勒级数. 则$f(z)$在D内解析

(C) 若$f(z)$在单连域D内连续, 且沿D内任一条简单闭曲线的积分值为0. 则$f(z)$在D内解析

(D) 若$f(z)$在单连域D解析. 则积分$\int_{z_0}^{z_1} f(z)\,dz$与路径无关.

35.

5. 下列命题中正确的是 (C)

(A) 如果$f(z)$在$|z|<1$内可导，则$f(z)$在$|z|\le 1$内解析; X

(B) 如果$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$在$|z|<1$内解析，则$u(x,y)$ 是$v(x,y)$的共轭调和函数;

(C) 如果$f(z)$在$z=0$点可展成 Taylor 级数，则$f(z)$在$z=0$点的某去心邻域内解析;

(D) 如果$f(z)$在$0<|z|<1$内解析, 且沿此区域内的任一闭曲线积分等于0，则$z=0$ 为$f(z)$的解析点. X可去奇点.

36. 不正确的是 (B)

(A) $\overline{e^z}=e^{\bar z}$　(B) $\operatorname{Ln} z^2=2\operatorname{Ln} z$.　(C) $\overline{\operatorname{Ln} z}=\operatorname{Ln}\bar z$.　(D) $\overline{\sin z}=\sin\bar z$.

37. 设 $x^2+x+1=0$. 则 $x^{11}+x^7+x^3+1=($　$)$.

(A) 2.　(B) 1　(C) 0　(D) -1

$\Rightarrow x+1+\frac{1}{x}=0 \Rightarrow x+\frac{1}{x}=-1$.　$x^{11}+x^7+x^3=x^7(x^4+1+\frac{1}{x^4})=x^7[(x^2+\frac{1}{x^2})^2-1]$

$=x^7[((x+\frac{1}{x})^2-2)^2-1]=0$.

38. 设$f(t)$的 Flourier 变换为 $F(w)=\pi\delta(w+2)$, 则$f(t)+f(-t)$的 Laplace 变换为 (A).

(A) $\dfrac{p}{p^2+4}$　(B) $\dfrac{2}{p^2+4}$　(C) $\dfrac{p}{p^2-4}$　(D) $\dfrac{2}{p^2-4}$.

△ 计算积分 $\int_0^{+\infty}\frac{x\sin x}{1+x^2}dx$

令 $f(t)=\int_0^{+\infty}\frac{x\sin tx}{1+x^2}dx$. 则 $\mathcal{L}[f(t)]=F(p)=\int_0^{+\infty}\left[\int_0^{+\infty}\frac{x}{1+x^2}\sin tx\,dx\right]e^{-pt}dt$

$\Rightarrow F(p)=\int_0^{+\infty}\frac{x}{1+x^2}dx\int_0^{+\infty}\sin tx\,e^{-pt}dt=\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{(1+x^2)(p^2+x^2)}dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{(1+x^2)(p^2+x^2)}dx$

积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{(1+x^2)(p^2+x^2)}dx=2\pi i\,\mathrm{Res}[f(p),i]+2\pi i\,\mathrm{Res}[f(p),ti]=2\pi i\left[\frac{-1}{2i(t^2-1)}+\frac{-t^2}{2ti(1-t^2)}\right]$

$=\frac{\pi}{2(1+p)}$ 则 $f(t)=\mathcal{L}[F(p)]=\frac{\pi}{2}e^{-t}$. 令 $t=1\Rightarrow$ 原积分 $=\frac{\pi}{2e}$

39. 计算积分 $\oint_{|z|=2}\frac{z^3}{1+z}e^{\frac{1}{z}}dz$.

40. 设 $f(t)=\begin{cases}\sin t, & |t|\le\pi\\ 0, & |t|>\pi\end{cases}$

(1) 求 $f(t)$ 的 Flourier 变换 $F(\omega)$.

(2) 计算广义积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin\omega\pi\sin\omega t}{1-\omega^2}d\omega$. 其中 t 为参数.