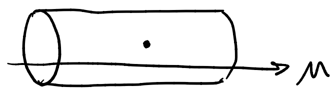
55 第十三章. 磁场与物质的相互作用

8 一直径为25mm. 长为75mm的均匀磁化棒. 总磁矩为12000 $A\cdot m^2$. 求磁棒表面上的磁化电流强度 λ 以及棒内中点的磁感应强度B的大小.

⇒ 由 $\Sigma\mu = IS = M\cdot\Delta V = M\cdot l\cos\theta\cdot S$ 知:

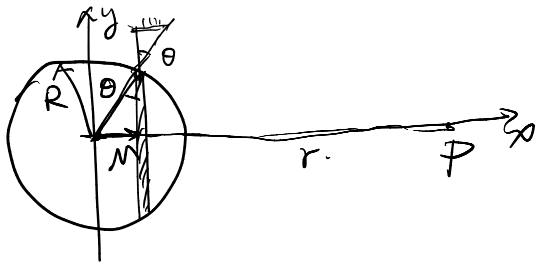
只有棒的侧面存在磁化电流. 其沿轴线方向的线密度为:



$$\lambda = M = \frac{\Sigma\mu}{\Delta V} = \frac{12000\,A\cdot m^2}{2\pi\cdot\left(\frac{25\times10^{-3}}{2}\right)^2\times75\times10^{-3}} =$$

棒内中点的磁感应强度 $B = \mu_0 n I = \mu_0\lambda$ ⇒ 等效于螺线管.

0- 均匀磁化的球体. 半径为R. 磁化强度为M. 求P点($r \gg R$)的磁感应强度



磁化电流密度 $\vec{\alpha} = \vec{M}\times\vec{e}_n$. 则环形磁化电流密度 $\alpha = M\sin\theta$.

每宽度为 $d\theta$ 的环形电流在r点产生的 $dB_x = \frac{\mu_0 dI}{2}\cdot\frac{(R\sin\theta)^2}{[(r-R\cos\theta)^2+(R\cos\theta)^2]^{\frac{3}{2}}}$

由 $r \gg R$. 则 $dB_x = \frac{\mu_0 MR\sin\theta}{2}\cdot\frac{R^2\sin^2\theta}{r^3}d\theta = \frac{\mu_0 MR^3\sin^3\theta}{2r^3}d\theta$

$$\Rightarrow B = \int_0^{\pi}\frac{\mu_0 MR^3\sin^3\theta}{2r^3}d\theta = \frac{2\mu_0 MR^3}{3r}.$$

Δ B、M、H之间的关系.

○ 一圆柱形无限长导体，磁导率为μ，半径为R，通有沿轴线方向的均匀电流I，求：

(1) 导体内任一点H、B和M的大小。(2) 导体外任一点H、B的大小。

⇒ (1) 由 $\oint \vec{H} d\vec{l} = 2\pi r H = \frac{I}{\pi R^2} \pi r^2$ 得：$H = \frac{Ir}{2\pi R^2}$ $(0 \le r \le R)$.

$M = \chi_m H = (\mu_r - 1)H = (\frac{\mu}{\mu_0} - 1)H = (\frac{\mu}{\mu_0} - 1)\frac{Ir}{2\pi R^2}$ $(0 \le r \le R)$，$B = \mu H = \frac{\mu I r}{2\pi R^2}$ $(0 \le r \le R)$

(2) ⇒ $2\pi r H = I$：$H = \frac{I}{2\pi r}$ $(r > R)$. $B = \mu_0 H = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$. $M = \frac{B}{\mu_0} - H = 0$ $(r > R)$

(1) 作高斯面，则有：$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = 2\pi r \cdot H = \frac{I}{R^3} \cdot r^3$ ⇒ $H = \frac{Ir}{2\pi R^3}$ $(r < R)$.

$B = \mu H = \frac{\mu I r}{2\pi R^3}$. $M = \chi_m H = (\frac{\mu}{\mu_0} - 1)H = (\frac{\mu}{\mu_0} - 1)\frac{Ir}{2\pi R^3}$.

(2) 同理有：$H = \frac{I}{2\pi r}$ $(r > R)$. $B = \frac{\mu I}{2\pi r}$，$M = (\frac{\mu}{\mu_0} - 1)\frac{I}{2\pi r}$.

✗

Δ 注意M和I之间的推导关系. B、H、M之间的推导关系. μ和μ_0的使用场合

↳ 这里的I是介质表面的磁化电流，勿要与导体的传导电流混淆！

○ 螺绕环内通有电流20A，环上所绕线圈400匝，环的平均周长40cm，环内磁感应强度为1.0T，求：

(1) 介质内的磁场强度 (2) 磁化强度 (3) 磁化率 (4) 磁化面电流和相对磁导率

⇒ (1) 由介质中的环路定理 $\oint \vec{H} d\vec{l} = H \cdot l = NI$ ⇒ $H = \frac{NI}{l} = \frac{400 \times 20}{0.4} = 2 \times 10^4$

(2) 磁化强度 $M = \frac{B}{\mu_0} - H$ (3) 磁化率 $\chi_m = \frac{M}{H} = \frac{B}{\mu_0 H} - 1$.

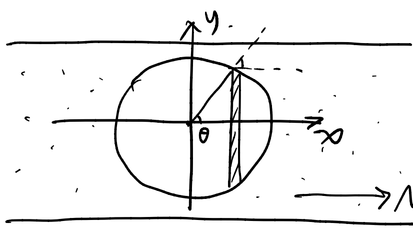
(4) 磁化面电流密度：$\lambda = -n \times M = M$. 总电流 $I = \lambda l = Ml$. 相对磁导率 $\mu_r = \chi_m + 1$.

✓○ 在磁化强度为M的均匀磁化介质中有一球形空腔，证明空腔表面的磁化电流在球心激发的磁感应强度 $\vec{B} = -\frac{2}{3}\mu_0 \vec{M}$.

① 微元法. 夹角为θ处的磁化线电流密度 $\lambda = M\sin\theta$.

取圆环元，电流为 $dI = \lambda ds = \lambda R d\theta = MR\sin\theta d\theta$

其在球心激发的磁感应强度为 $dB = \frac{\mu_0 (R\sin\theta)^2 dI}{2[(R\sin\theta)^2 + (R\cos\theta)^2]^{\frac{3}{2}}}$



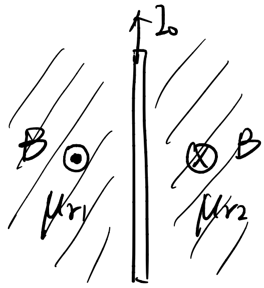
$$B = \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0 (R\sin\theta)^2 \cdot MR\sin\theta d\theta}{2[(R\sin\theta)^2 + (R\cos\theta)^2]^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{3}\mu_0 M$$

Δ 两侧磁介质

〇 无限大平面导体内通有均匀面电流，其左右两侧充满相对磁导率分别为 μ_{r1} 和 μ_{r2} 的两种均匀介质。已知两侧介质中磁感应强度量值为 B，方向垂直纸面。求：

(1) 两介质表面上的磁化电流密度 α'。

(2) 导体平板上的传导电流面密度 α_0。



⇒ 由分析易知传导电流方向如图所示，作安培环路后有：

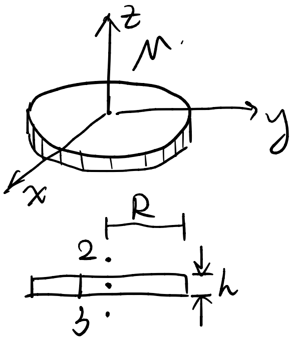
$\oint \vec{H}\cdot d\vec{l} = H_1 l + H_2 l = \alpha_0 l \Rightarrow H_1 + H_2 = \alpha_0$ 又由 $B=\mu H=\mu_r\mu_0 H$ 可得：

$H_1=\frac{B}{\mu_{r1}\mu_0}$，$H_2=\frac{B}{\mu_{r2}\mu_0}$ 可解得 $\alpha_0=\frac{B}{\mu_0}\left(\frac{1}{\mu_{r1}}+\frac{1}{\mu_{r2}}\right)=\frac{B(\mu_{r1}+\mu_{r2})}{\mu_0\mu_{r1}\mu_{r2}}$

由 $\alpha'=M=\frac{B}{\mu_0}-H$ 得：$\alpha_1'=\frac{B}{\mu_0}-H_1=\frac{B}{\mu_0}\left(1-\frac{1}{\mu_{r1}}\right)=\frac{B(\mu_{r1}-1)}{\mu_0\mu_{r1}}$，$\alpha_2'=\frac{B}{\mu_0}-H_2=\frac{B}{\mu_0}\left(1-\frac{1}{\mu_{r2}}\right)=\frac{B(\mu_{r2}-1)}{\mu_0\mu_{r2}}$

Δ 导体磁化（无传导电流）

〇 一半径为 R，厚为 h 的圆形薄磁片均匀磁化，磁化强度为 M，M 的方向为 z 轴正向。图中1、2、3点在磁片中心和磁片两面外靠近中心处，求磁片上的电流分布和各点的 B、H。



从分子电流角度求解：

(1) 根据磁化电流和磁化强度的关系：

磁片内的磁化电流密度为：$\vec{j}_m=\nabla\times\vec{M}=0$（均匀磁化）

磁化电流面密度：上下平面：$\vec{\alpha}_1=\vec{M}\times\vec{n}=0$

侧面：$\vec{\alpha}_2=\vec{M}\times\vec{n}\Rightarrow\alpha_2=M$。

即只有侧面有磁化电流，方向为 M 的右手螺旋方向，侧面总电流 $=NI=\alpha_2 h=Mh$

磁片产生的磁场等效于一个载流圆线圈（不是螺线管）产生的磁场

⇒ 载流圆线圈在中心产生的磁场：$B_1=\frac{\mu_0 NI}{2R}=\frac{\mu_0 Mh}{2R}$，方向沿 z 轴正向。

且当 $R\gg h$ 时，$B_1\approx 0$。

又由 B 的法向分量连续，则 $B_2=B_3=B_1=\frac{\mu_0 h}{2R}M$。

可得各点的磁场强度：$H_1=\frac{B_1}{\mu_0}-M_1=\frac{h}{2R}M-M\approx -M$。

$$H_2=\frac{B_2}{\mu_0}-M_2=\frac{h}{2R}M-0=\frac{h}{2R}$$

$$H_3=\frac{B_3}{\mu_0}-M_3=\frac{h}{2R}M-0=\frac{h}{2R}$$

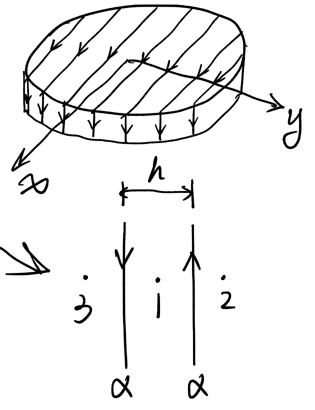
Δ 本题还可用磁荷观点求解。

(2) 当磁化强度方向 M 为 y 轴正向时，易知只有侧面左右两点的磁化电流为0。

则：

磁化电流分布如图所示，将其分为两部分：

(1) 圆盘电流 (2) 侧边电流



⇒ 圆盘电流近似于平面电流，其在各点产生的磁感为：

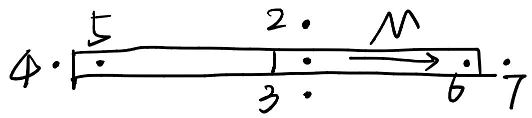
$$B_1' = 2\times\frac{\mu_0\alpha}{2} = \mu_0\alpha = \mu_0 M \quad B_2' = B_3' = 0$$

而侧边电流构成圆柱电流，作安培环路易知 $B_1'' = B_2'' = B_3'' = 0$

$\Rightarrow B_1 = \mu_0 M \quad B_2 = B_3 = 0 \quad \Rightarrow H_1 = M \quad H_2 = H_3 = 0$

O 一细长的均匀磁化棒，磁化强度为 $\vec{M}$，$\vec{M}$ 沿棒长方向，求图中 1 至 7 点各点的磁场强度 H 和磁感强度 B。

(和下一题铁环比较，铁环相当于无限长铁棒)

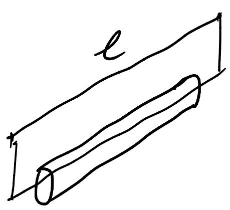


用分子电流求解：

⇒ 由均匀磁化可知，只有表面存在磁化电流

作一长方形闭合回路，则有：

$\oint \vec{M}\, d\vec{l} = I'$，其中 I' 为棒上被回路套住的磁化电流



$\Rightarrow \quad Ml = I'$ 即 $M = \alpha'$，α' 为沿棒长方向的磁化电流密度

此时该磁化棒相当于一螺线管，其管中心的磁感强度为：

$$B = \frac{\mu_0 n I}{2}(\cos\beta_1 - \cos\beta_2) = \frac{\mu_0 M}{2}(\cos\beta_1 - \cos\beta_2)$$

当棒足够细长时：

1：$\beta_1 \approx 0 \quad \beta_2 \approx \pi \qquad B_1 \approx \mu_0 M$

5：$\beta_1 = \frac{\pi}{2} \quad \beta_2 \approx \pi \qquad B_5 \approx \frac{1}{2}\mu_0 M$ 同理有 $B_6 \approx \frac{1}{2}\mu_0 M$

由 B 法向分量连续：$B_4 = B_5 = B_6 = B_7 \approx \frac{1}{2}\mu_0 M$，$B_2 = B_3 \approx 0$

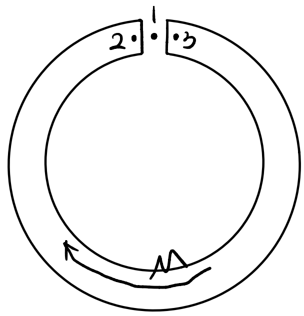
再由 H 的定义式：$H = \frac{B}{\mu_0} - M$：

$$H_1 = \frac{B_1}{\mu_0} - M \approx M - M = 0$$

$$\left.\begin{aligned} H_5 = H_6 &= \frac{B_5}{\mu_0} - M \approx \frac{1}{2}M - M = -\frac{1}{2}M \\ H_4 = H_7 &= \frac{B_4}{\mu_0} - M \approx \frac{1}{2}M - 0 = \frac{1}{2}M \end{aligned}\right\}\text{两侧面上有磁荷分布}$$

$$H_2 = H_3 = \frac{B_2}{\mu_0} - M = 0 - 0 = 0$$

0-铁环均匀磁化，磁化强度为M. M沿环的方向. 环上有一很窄的空隙，已知环横截面半径比环长小很多. 试求图中1.2和3等点的磁场强度H和磁感强度B.



⇒用分子电流的观点求解.

由铁环均匀磁化知环内不存在磁化电流. 只存在磁化面电流.

其密度为: $\vec{\lambda} = \vec{M}\times\vec{e}_n$ ⇒ $\lambda = M$.

此时环内的磁场B相当于载流螺绕环产生的磁场.

即 $B_2=B_3=\mu_0\lambda=\mu_0 M$，方向与$\vec{M}$相同.(螺绕环)

由于B法向分量连续. 所以 $B_1=B_2=B_3=\mu_0 M$.

磁场强度: $H_1=\frac{B_1}{\mu_0}-M_1=M-0=M$.

$$H_2=\frac{B_2}{\mu_0}-M_2=M-M=0$$

$$H_3=\frac{B_3}{\mu_0}-M_3=M-M=0.$$

※ 和(B.M.H的关系)下第二题相比较:

① 通有传导电流I的螺绕环，根据安培环路定理有环内H不为0且与电流I有关.
对于完整的环: $\oint \vec{H}\cdot d\vec{l}=2\pi r\cdot\lambda$ ⇒ $H=\lambda$，由电流产生磁场因此铁环存在磁化
磁化强度为 $M=(\mu_r-1)H=(\mu_r-1)\lambda$，进而产生面磁化电流，其密度为 $\lambda'=M$.
则实际上螺绕环上的总电流为 $\lambda_0=\lambda-\lambda'=H-M$.
此时由螺绕环内的磁感公式: $B=\mu_0\lambda_0=\mu_0(H-M)$ 可见此式显然成立.
⇒ $B=\mu_0(H-M)=\mu_0(\lambda-(\mu_r-1)\lambda)=\mu_0\mu_r\lambda$ (此处λ仅为传导电流).

② 单纯一个均匀磁化的铁环、其上并没有通传导电流，根据安培环路定理有$H=0$. 此时铁环上仅存在磁化电流 $\lambda'=M$. 即总电流为 $\lambda_0=\lambda'=M$.
因此铁环内产生的磁感(仅由磁化电流产生) $B=\mu_0\lambda_0=\underbrace{\mu_0 M}_{\text{磁化强度产生的附加磁场}}$.
$(\oint \vec{H}\cdot d\vec{l}=\sum I=0,\ \oint \vec{M}\cdot d\vec{l}=\sum I'\neq 0)$

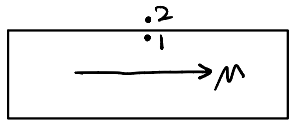
⇒ $B=\mu_0(H-M)$ ($H=\frac{B}{\mu_0}-M$) 在任何情况下均成立.

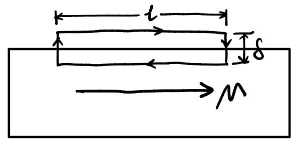
H表征传导电流. M表征磁化电流.

- $M=\cancel{\chi_m}H=(\mu_r-1)H$. 此公式中的$M$和$H$是存在联系的. 即均由传导电流而产生. 仅给出外加的磁化强度$\underbrace{M}_{\text{存在外部磁化场}}$(没有传导电流)不能由此得到$H$. 此公式不适用

0 有一具有任意长度的沿轴向磁化的磁棒，试证明：在棒的中垂方向上，棒表面附近内外的1和2两点的磁场强度相等，另这两点的磁感是否相等？

⇒ 联系磁场的边值问题。





(1) 作安培环路如图所示：使得 $\delta\to 0$ 时有：

$\oint \vec{H}\cdot d\vec{l}=0$. 其中 $\oint \vec{H}\cdot d\vec{l} = H_1 l - H_2 l$. 则 $H_2=H_1$

(2) 由 $H=\frac{B}{\mu_0}-M$ 有：$B=\mu_0(H+M)$.

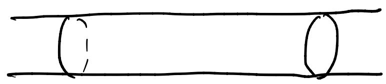
∴ $B_1=\mu_0(H_1+M_1)=\mu_0(H_1+M)$

$B_2=\mu_0(H_2+M_2)=\mu_0(H_2+0)=\mu_0H_2$ 所以 $B_1\neq B_2$

或者：

$B_1=\mu_1H_1$，$B_2=\mu_2H_2$. 由于1.2两点磁导率不同 $\mu_1\neq\mu_2$，即 $B_1\neq B_2$

○ 有限长磁介质圆棒中磁感强度和长度关系.



(1) 对于无限长磁介质棒:

由 $B=B_0+B'$ 及 $B'=\frac{\mu_0 M}{2}(\cos\beta_1-\cos\beta_2)$

$\beta_1=0$ $\beta_2=\pi$ 因此磁化强度产生的附加磁场 $B'=\mu_0 M$, $B=B_0+\mu_0 M$.

(2) 极薄的磁介质片:

$\beta_1\approx\beta_2$. 因此 $B'\approx 0$. 即总磁场 $B\approx B_0$.

(3) 对于有限长磁介质棒:

$\Rightarrow$ 有限长磁介质棒应介于无限长介质棒和极薄介质片之间.

即 $\underline{B_0 < B < B_0+\mu_0 M}$ $B\in(B_0, B_0+\mu_0 M)$.

此结论可用于对带缺口的螺绕环的磁感强度中:

① 无缺口时: $B=B_0+\mu_0 M$.

② 有缺口时: $B\in(B_0, B_0+\mu_0 M)$. 且缺口越大. 则 B 越小.

△螺绕环内有间隙问题

① 一铁环中心线半径为R. 环上均匀绕有绝缘导线. 导线中通有一定电流. 若在环上锯出一宽为d_1的空气间隙. 则通过环的磁通量为Φ_1. 若间隙宽度为d_2. 则磁通量为Φ_2. 忽略漏磁. 求铁环的磁导率.

由安培环路定理：设空气间隙部分的磁场强度为H_g. 则

$$\oint \vec{H}\cdot d\vec{l} = NI \Rightarrow NI = H(l-\delta)+H_g\delta,\ 又有 H=\frac{B}{\mu_0\mu_r}=\frac{\Phi}{\mu_0\mu_r S},\ H_g=\frac{B}{\mu_0}=\frac{\Phi}{\mu_0 S}.\ 则:$$

$$NI=\Phi\left[\frac{l-\delta}{\mu_0\mu_r S}+\frac{\delta}{\mu_0 S}\right]\ (磁路定理)$$

则有题意可列：$NI=\Phi_1\left[\frac{\pi D-\delta_1}{\mu_0\mu_r S}+\frac{\delta_1}{\mu_0 S}\right]=\Phi_2\left[\frac{\pi D-\delta_2}{\mu_0\mu_r S}+\frac{\delta_2}{\mu_0 S}\right]$

$$\Rightarrow \Phi_1[\pi D+(\mu_r-1)\delta_1]=\Phi_2[\pi D+(\mu_r-1)\delta_2]$$

$$\Rightarrow \mu_r = 1+\frac{\pi D(\Phi_1-\Phi_2)}{\Phi_2\delta_2-\Phi_1\delta_1}$$

△处理螺绕环内有间隙问题：使用安培环路定理！

进而可推导出磁路定理：$\underbrace{NI}_{安匝数}=\Phi\sum_i\frac{l_i}{\mu_i S_i}$ $(\underbrace{\mathcal{E}_m}_{磁动势}=\Phi\sum_i \underbrace{R_{mi}}_{磁阻})$

此外还利用了磁感B在介质交界面法向分量连续结论. 环内和空隙(足够小)的B是相同的

① 一铁环中心线半径为R=20cm. 横截面为边长为4.0cm的正方形. 环上绕有500匝表面绝缘的导线. 导线中载有1.0A电流. 此时铁的相对磁导率为$\mu_r=400$. 若此时在环上锯开一个宽为1.0mm的空气间隙. 求通过铁环横截面的磁通量减少了多少？(实际上H、B均发生了变化)

$\Rightarrow$锯开前：$\Phi_1=BS=\mu_0\mu_r HS=\mu_0\mu_r\frac{NI}{l}S=3.2\times10^{-4}(Wb)$

锯开后：由安培环路定理：$NI=H(l-\delta)+H_g\delta \Rightarrow NI=\Phi_2\left[\frac{l-\delta}{\mu_0\mu_r S}+\frac{\delta}{\mu_0 S}\right]$

$$\Rightarrow \Phi_2=\frac{\mu_r\mu_0 NIS}{l+(\mu_r-1)\delta}=2.4\times10^{-4}(Wb)$$

$\therefore \Delta\Phi=\Phi_1-\Phi_2=8\times10^{-5}(Wb)$

○ 一铁环中心线半径为 200mm. 横截面积为 $150mm^2$. 其上绕有表面绝缘的导线 N 匝. 导线中通有电流 I. 在铁环上有一个空气隙, 宽为 1.0mm. 现要在空气隙内产生 B=0.5T 的磁感强度, 由 B-H 曲线得出此时铁的 $\mu_r=250$. 求所需的安匝数 NI

$$\Rightarrow NI=\Phi\left[\frac{l-\delta}{\mu_0\mu_r S}+\frac{\delta}{\mu_0\mu_r S}\right]=\frac{B}{\mu_0}\left[\frac{l-\delta}{\mu_r}+\delta\right]=2.4\times10^3 \text{(安匝)}$$

○ 某电钟里有一铁芯线圈. 已知铁芯的磁路长为 14.4cm. 空气隙宽 2.0mm. 铁芯横截面积为 $0.60cm^2$. 铁芯的相对磁导率为 $\mu_r=1600$. (1) 现要使通过空气隙的磁通量为 $4.8\times10^{-6}Wb$. 试求绕在铁芯上的线圈的安匝数. (2) 若线圈两端电压为 220V. 线圈消耗功率 2.0W. 求线圈的匝数

$$\Rightarrow NI=\Phi\left[\frac{l-\delta}{\mu_0\mu_r S}+\frac{\delta}{\mu_0 S}\right]=1.3\times10^2 \text{(安匝)}$$

$$I=\frac{NIU}{IU}=\frac{1.3\times10^2\times220}{2.0}=1.4\times10^4 \text{(匝)}$$

△ 磁矩的微振动

○ 一小磁针的磁矩为 m. 处在磁场强度 H 的匀强外磁场中. 该磁针可以绕它的中心转动. 转动惯量为 J. 它在平衡位置附近做小振动时. 求振动的周期和频率.

磁矩为 m 的物体 (磁针、载流线圈等) 在磁感强度为 B 中受力矩大小为 $M=mB\sin\theta$.

则 $M=mB\sin\theta=\mu mH\sin\theta$. 当磁针做微小振动时:

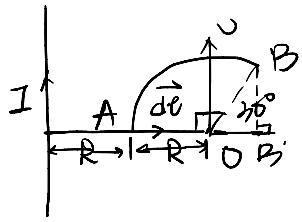
有 $J\frac{d^2\theta}{dt^2}=-M=-\mu mH\sin\theta\approx-\mu mH\theta$. 即 $J\frac{d^2\theta}{dt^2}+\mu mH\theta=0$

$$\Rightarrow \omega=\sqrt{\frac{\mu mH}{J}}\quad T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{J}{\mu mH}}$$

§5 第十四章 电磁感应(electromagnetic induction)

Δ 计算电动势 (注意将Gs换算为T：$1Gs=10^{-4}T$)

O 电流为I的无限长直导线旁有一弧形导线，圆心角为120°. 几何尺寸及位置如图所示. 求当圆弧形导线以速度v平行于长直导线方向运动时，弧形导线中的动生电动势.



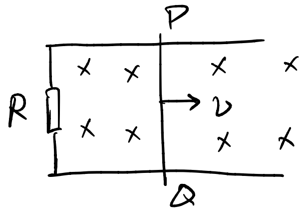
⇒ 用直导线连接AO、OB'、B'B. AOB'B及$\overset{\frown}{AB}$组成的闭合回路电动势为0. 则$\overset{\frown}{AB}$电动势等于AOB'产生的电动势 进而等于直导线AOB'的电动势.

$$\Rightarrow \varepsilon=\int_R^{\frac{5}{2}R}(\vec{v}\times\vec{B})\cdot d\vec{l}=\int_R^{\frac{5}{2}R}-\frac{\mu_0 I v}{2\pi r}dr=-\frac{\mu_0 I v}{2\pi}\ln\frac{5}{2}.$$

Δ 在恰当的时候，将不规则形状导线简化为直导线(组合在一起后闭合回路磁通量不变)

O 半无限长的金属导轨上放一质量为m的金属杆，其PQ段的长度为l. 导轨的一端连接电阻R. 整个装置处匀强磁场B中. 设杆以初速度v_0向右运动，忽略导轨和杆的电阻及其间的摩擦力. 忽略回路自感.

(1) 求金属杆能通过的距离. (2) 求该过程中电阻R产生的焦耳热.



⇒ (1) $F=BIl=B\frac{\varepsilon}{R}l=B\frac{Blv}{R}l=\frac{B^2l^2v}{R}=-ma=-m\frac{dv}{dt}$

又 $\underbrace{\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}=v\frac{dv}{dx}}$ $\Rightarrow \frac{B^2l^2v}{R}=-mv\frac{dv}{dx}$

即 $\frac{B^2l^2}{mR}dx=-dv$ 积分得：$x=\frac{mRv_0}{B^2l^2}$

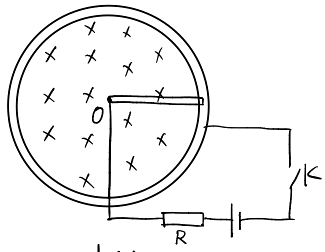
(2) $Q=I^2Rt=\frac{\varepsilon^2}{R}t=\frac{B^2l^2v^2}{R}t \Rightarrow \frac{dQ}{dt}=\frac{B^2l^2v^2}{R}$，又 $\underbrace{\frac{dQ}{dt}=\frac{dQ}{dv}\cdot\frac{dv}{dt}=a\frac{dQ}{dv}}$

$\Rightarrow -\frac{B^2l^2v}{mR}\cdot\frac{dQ}{dv}=\frac{B^2l^2v^2}{R} \Rightarrow dQ=-mv\,dv$ 积分：$\int_0^Q dQ=\int_{v_0}^0 -mv\,dv \Rightarrow Q=\frac{1}{2}mv_0^2$.

Δ 动生电动势和动力学结合(转动)

O 在水平光滑桌面上，有一根长为l，质量为m的匀质金属细棒，可以O点为中心旋转，而另一端在半径为l的金属圆环上滑动. 在回路中接一电阻R和一电动势为ε_0的电源. 垂直于桌面加一匀强磁场B，开始时金属棒静止.

(1) 当开关闭合瞬间金属棒角加速度大小，(2) 任意时刻金属棒角速度大小



⇒ (1) 金属棒受力大小：$F=BIl=B\frac{\varepsilon_0}{R}l$，则$dl$处受力 $dF=B\frac{\varepsilon_0}{R}dl$.

金属杆所受力矩：$M=\int dM=\int_0^l B\frac{\varepsilon_0}{R}l\,dl=\frac{B\varepsilon_0 l^2}{2R}$

$\underbrace{\text{由转动定律有}}$：$\frac{B\varepsilon_0 l^2}{2R}=\frac{1}{3}ml^2\frac{d\omega}{dt} \Rightarrow \beta_0=\frac{B\varepsilon_0}{6mR}$

(2) $F'=BI'l=B\frac{\varepsilon_0-\varepsilon'}{R}l$，其中$\varepsilon'=\frac{1}{2}B\omega l^2$. 又有 $M'=\frac{1}{3}ml^2\frac{d\omega}{dt}$.

其中 $M'=\int dM=\int_0^l B\frac{\varepsilon_0-\frac{1}{2}B\omega l^2}{R}l\cdot dl=\frac{Bl^2}{6R}(3\varepsilon_0-B\omega l) \Rightarrow \frac{B}{2mR}dt=\frac{d\omega}{3\varepsilon_0-B\omega l}$

积分得：$\ln\left|1-\frac{B\omega l}{3\varepsilon_0}\right|=-\frac{B^2l}{2mR}t \Rightarrow \omega(t)=\frac{3\varepsilon_0}{Bl}\left(1-e^{-\frac{B^2l}{2mR}t}\right)$，则 $\omega_m=\frac{3\varepsilon_0}{Bl}$ $(t\to\infty)$

$\Rightarrow$ 用微分方程求解:

$\varepsilon' = \int \vec{v} \times \vec{B} \cdot d\vec{l} = Bvl = Bwr$

$M = \int dM = \int rB(\frac{\varepsilon_0}{R} - v) dr = \int rB(\frac{\varepsilon_0}{R} - wr) dr = \int (B\frac{\varepsilon_0}{R} r - Bwr^2) dr$

$= \frac{B\varepsilon_0 l^2}{2R} - \frac{1}{3} Bwl^3 = \frac{1}{3} ml^2 \alpha$

$\Rightarrow \alpha = \frac{3B\varepsilon_0}{2mR} - \frac{Bwl}{m} = \frac{dw}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{dw}{dt} + \frac{Bl}{m} w = \frac{3B\varepsilon_0}{2mR}$

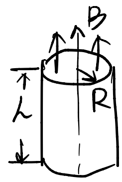
解方程: $w = e^{-\frac{Bl}{m}t} (\int \frac{3B\varepsilon_0}{2mR} e^{\frac{Bl}{m}t} + C) = \frac{3\varepsilon_0}{2Rl} + Ce^{-\frac{Bl}{m}t}$

$C = -\frac{3\varepsilon_0}{2Rl} \Rightarrow w = \frac{3\varepsilon_0}{2Rl}(1 - e^{-\frac{Bl}{m}t})$

Δ 涡旋电流和涡旋电场

圆柱形匀强磁场中同轴放置一半径为R、高为h、电阻率为ρ的金属圆柱体，若匀强磁场以 $\frac{\partial B}{\partial t}=k>0$ 的规律变化，求圆柱体内涡电流的热功率。

⇒ 思路：热功率 → 热功率密度对体积积分 → 热功率密度表达式



由感应电场中有：$\oint \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\iint \frac{\partial B}{\partial t} d\vec{S} \Rightarrow E = \frac{r}{2}\cdot\frac{\partial B}{\partial t} = \frac{1}{2}kr\ (0\le r\le R)$.

热功率密度：$w = \frac{\partial P}{\partial V} = \frac{(\partial I)^2 \partial r}{\partial S\cdot\partial l} = \left(\frac{\partial I}{\partial S}\right)^2\cdot\frac{\partial S\partial r}{\partial S} = j^2\rho$

又由电场强为E中的电流密度为 $j=\gamma E$，则 $w=j^2\rho=(\gamma E)^2\rho=\gamma E^2=\frac{E^2}{\rho}=\frac{k^2r^2}{4\rho}$.

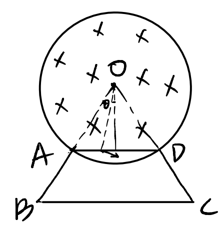
积分：$W=\iiint w\,dV=\int_0^R 2\pi r h\cdot w\,dr=\frac{2\pi h k^2}{4\rho}\int_0^R r^3dr=\frac{\pi h k^2}{8\rho}R^4$.

Δ 加深理解

半径为a的长直螺线管中有 $\frac{\partial B}{\partial t}>0$ 的磁场，一直导线弯成等腰闭合回路ABCDA，总电阻为R，上底为a，下底为2a，求：

(1) AD段、BC段和闭合回路中的电动势　(2)、BC两点电势差 U_B-U_C

⇒ 作闭合回路后有：距圆心r处感应电场强度为：



$\varepsilon=\oint\vec E\cdot d\vec l=-\oiint\frac{\partial B}{\partial t}\cdot d\vec S \Rightarrow 2\pi r E=-k\pi r^2\Rightarrow E=-\frac{k}{2}r\ \left(k=\frac{\partial B}{\partial t}>0\right)$

在AD段上积分：$\varepsilon_{AD}=\int\vec E\cdot d\vec l=\int_A^D E\cos\theta\,dl=\int_A^D\left(-\frac{k}{2}r\right)\cdot\frac{\sqrt{R^2-a^2/4}}{r}dl=\frac{\sqrt3}{4}a^2k$

同理：BC段有 $2\pi r\cdot E=-k\pi R^2\Rightarrow E=-\frac{kR^2}{2r}$.

$\varepsilon_{BC}=\int\vec E\cdot d\vec l=\int_B^C E\cos\theta\,dl=\frac{\pi a^2}{6}k$.

闭合回路电动势：$\varepsilon=-\oiint\frac{\partial B}{\partial t}d\vec S=-\frac{\partial\Phi}{\partial t}$.　$\Phi=BS=\left(\frac{\pi a^2}{6}-\frac12 a\cdot\frac{\sqrt3}{2}a\right)B=B\left(\frac{\pi a^2}{6}-\frac{\sqrt3}{4}a^2\right)$

则 $\varepsilon=\frac{\partial B}{\partial t}\left(\frac{\pi a^2}{6}-\frac{\sqrt3}{4}a^2\right)=\varepsilon_{BC}-\varepsilon_{AD}$.

(2) $U_B-U_C=IR=\frac{\varepsilon}{5}=\left(\frac{\pi}{30}-\cancel{\frac{\sqrt3}{20}}\right)a^2\frac{dB}{dt}$.

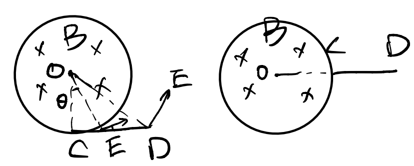
Δ 加深理解

一个密绕圆柱形长螺线管，长度为L，总匝数为N，其中通有电流 $I=kt$，求：

(1) r=R处涡旋电场场强大小和方向　(2) 螺线管外有长度为R的金属棒CD，求CD上的电动势。

⇒ (1) $B=\mu_0\lambda=\mu_0\frac{NI}{L}=\mu_0\frac{N}{L}kt \Rightarrow \nabla\times E=-\frac{\partial B}{\partial t}=-\mu_0\frac{N}{L}k$.

则电场场强：$E=-\frac{r}{2}\frac{\partial B}{\partial t}=\frac{\mu_0 Rk}{2L}$



(2) 右边：$\varepsilon_{CD}=0$.　左边：$E=\frac{R^2}{2r}\frac{\partial B}{\partial t}$

$\varepsilon=\oint\vec E\cdot d\vec l=\int E\cos\theta\,dl=\int\frac{R^2}{2r}\cdot\frac{\partial B}{\partial t}\cdot\frac{R}{r}dl$

或者 $\varepsilon=\iint\left(-\frac{\partial B}{\partial t}\right)dS=\frac{\pi a^2}{4}\mu_0\cdot\frac{N}{L}\cdot k$ (遇见这种情况都用此方法做！)

计算在磁场区域外的感应电动势。

A 自感和互感（求自感电动势和互感电动势）

○ 金属薄片弯成所示回路，两端为半径为 a 的圆柱面，中间为边长为 ℓ、间隔为 d 的两正方形平面，且 $\ell \gg a$，$a \gg d$。

(1) 求回路中自感系数。

(2) 沿圆柱面轴向加变化磁场 $B = B_0 + kt$，求回路中电流 $I(t)$（回路电阻很小，忽略不计）

⇒ (1) 自感公式：$\psi = LI$。向右加电流 I，则圆柱内磁感 $B_1 = \mu_0 \lambda = \mu_0 \frac{I}{\ell}$

平面之间磁感：$B_2 = 2 \times \frac{\mu_0 \alpha}{2} = \mu_0 \alpha = \mu_0 \frac{I}{\ell}$ ⇒ $\psi = 2B_1S_1 + B_2S_2$

其中 $S_1 = \pi a^2$，$S_2 = \ell d$ ⇒ $\psi = 2 \cdot \mu_0 \frac{I}{\ell} \cdot \pi a^2 + \mu_0 \frac{I}{\ell} \cdot \ell d$

∴ $L = \frac{\psi}{I} = \mu_0 d + \frac{2\mu_0 \pi a^2}{\ell}$ ⇒ 计算"磁通量"，不要乘 ℓ，和磁通链匝数区分开。

↳ N 匝线圈每一圈都是 I，故乘 N，该题中总电流为 I。

(2) $\varepsilon = \varepsilon_i + \varepsilon_L = IR \approx 0$

其中 $\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{dB}{dt}S = -k(2\pi a^2 + \ell d)$，$\varepsilon_L = -L\frac{dI}{dt}$，则 $\varepsilon_i - L\frac{dI}{dt} = 0$

积分有：$I = \frac{\varepsilon_i}{L}t = \frac{-k(2\pi a^2 + \ell d)}{\mu_0 d + \frac{2\mu_0 \pi a^2}{\ell}}t = -\frac{k\ell}{\mu_0}t$

↳ 回路中电动势包括两部分：变化磁场引起的感应电动势 ε_i，由本身电流变化引起的自感电动势 ε_L，其中 ε_i 和 ε_L 都由 $-\frac{d\Phi}{dt}$ 计算，但 $\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{dB}{dt}S$，$\varepsilon_L = -L\frac{dI}{dt}$，即 ε_i 的成因为 B，ε_L 的成因为 I。

$\Delta\ \varepsilon = \varepsilon_i + \varepsilon_L = -S\frac{dB}{dt} - L\frac{dI}{dt}$

(1) 问还可用能量进行求解：回路中的磁感 B_1、B_2 已知。

则磁场中的能量密度 $w = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0}$ ⇒ $w_1 = \frac{1}{2}\frac{B_1^2}{\mu_0} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\mu_0 I^2}{\ell^2}$，$w_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{B_2^2}{\mu_0} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\mu_0 2^2}{\ell}$

回路中的能量 $W = \iiint w\,dV = \frac{1}{2}\frac{\mu_0 I^2}{\ell^2} \cdot 2\pi a^2 \ell + \frac{1}{2}\frac{\mu_0 I^2}{\ell^2} \cdot \ell^2 d$

又因为 $W = \frac{1}{2}LI^2$，则 $L = \frac{2W}{I^2} = \frac{\mu_0 2\pi a^2}{\ell} + \mu_0 d$

（加深理解）

○ 一圆形线圈 A 由 50 匝细导线绕成，其面积为 $4cm^2$，放在另一个匝数为 100 匝、半径为 20cm 的圆形线圈 B 的中心，两线圈同轴。

(1) 求两线圈的互感。 (2) 当线圈 B 中电流以 50A/s 变化率减小时，线圈 A 中感生电动势大小。

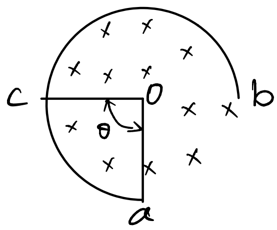
(加深理解).

○ 如图.圆柱形匀强磁场中放置一半径为r的圆弧形金属导轨abc. 单位长度电阻为ρ. Oa.Oc为电阻忽略的金属棒. 与导轨保持良好接触. 磁感按$B=kt$规律变化.忽略回路自感

(1) 若棒Oc静于$\theta=\frac{\pi}{2}$处. $OacO$回路中的感生电动势多大？分布如何？

(2) 若Oc棒从Oa棒开始($t=0$).绕O点按$\theta=\omega t$做匀角速度运动. $\theta=\frac{\pi}{2}$时.回路中电动势多大？

(3) 此时Oc棒受到的对O点磁力矩多大.方向如何？



⇒思考：感应电场为何那样分布？

(1) $\varepsilon_{Oc}=\varepsilon_{Oa}=0$. $\varepsilon_{ca}=\int \vec{E}_i\cdot d\vec{l}=\oint \frac{\partial B}{\partial t}d\vec{S}=\frac{d\Phi}{dt}$ (注意方向)

$\Phi=BS=kt\cdot\frac{\pi r^2}{4}$ ⇒ $\varepsilon_{ca}=\frac{1}{4}k\pi r^2$.

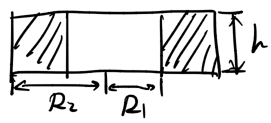
(2) 此时 $B=kt=k\cdot\frac{\pi}{2\omega}=\frac{k\pi}{2\omega}$.

⇒ $\varepsilon=\varepsilon_1+\varepsilon_2=\int \vec{E}_i\cdot d\vec{l}+\int(\vec{v}\times\vec{B})\cdot d\vec{l}$, 其中 $\varepsilon_1=\frac{1}{4}k\pi r^2$. $\varepsilon_2=Bvr=\frac{k\pi}{2\omega}\cdot\frac{1}{2}\omega r\cdot r=\frac{1}{4}k\pi r^2$.

∴ $\varepsilon=\frac{1}{2}k\pi r^2$.

(3) $I=\frac{\varepsilon}{R}=\frac{\frac{1}{2}k\pi r^2}{\frac{\pi R}{2}\rho}=\frac{kr^2}{R\rho}$. 则 $M=\int_0^r \frac{k\pi}{2\omega}\cdot\frac{kr^2}{R\rho}\cdot x\,dx=\frac{k^2\pi r^2}{4\omega R\rho}$. 方向向上.

○ 求N匝螺线管的自感



⇒ 设螺线管通有电流I、则通过其截面的磁通量：

$$\Phi=\int_{R_1}^{R_2}\frac{\mu_0 NI}{2\pi r}\cdot h\,dr=\frac{\mu_0 NI}{2\pi}h\ln\frac{R_2}{R_1} \Rightarrow L=\frac{\Psi}{I}=\frac{N\Phi}{I}=\frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

△注意理解自感定义式中的"Ψ".该题目中磁通量Φ要乘N.

○ 一纸筒长30cm.直径为3.0cm.上面绕有500匝线圈 (1) 求自感L_0. (2) 在线圈内放入$\mu_r=5000$的铁芯后求此时的自感L.

⇒ (1) $L_0=\mu_0 n^2 V=\mu_0\left(\frac{N}{l}\right)^2 V=4\pi\times10^{-7}\times\frac{500^2}{30\times10^{-2}}\times\pi\times\left(\frac{3.0\times10^{-2}}{2}\right)^2=7.4\times10^{-4}(H)$

(2) $L=\mu_r L_0=5000\times7.4\times10^{-4}=3.7(H)$

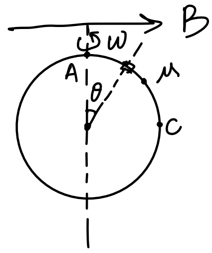
△ 和公式 $C=\varepsilon_r C_0$ 相同.

[错题：14-8]

① 半径为R的圆形均匀刚性线圈在匀强磁场B中以角速度ω做匀角速转动. 转轴垂直于B，轴与线圈交于点A. 弧AC占¼周长. M为AC中点. 线圈自感可忽略. 当线圈转至与B平行时.

(1) 求动生电动势 ε_{AM} 及 ε_{AC}

(2) A.C中哪点电势高？A.M中哪点电势高？



⇒ (1) 取环元 $dl=Rd\theta$. 由动生电动势 $\varepsilon=\int(\vec{v}\times\vec{B})\cdot d\vec{l}$ 得：

$$\varepsilon=\int_{\theta_1}^{\theta_2}(R\omega\sin\theta)B\cdot\sin\theta R d\theta=\omega R^2B\int_{\theta_1}^{\theta_2}\sin^2\theta d\theta.$$

所以 $\varepsilon_{AM}=\omega R^2B\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2\theta d\theta=(\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4})\omega R^2B$. $\varepsilon_{AC}=\omega R^2B\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta d\theta=\frac{\pi}{4}\omega R^2B$

(2) 整个线圈的动生电动势为 $\varepsilon_0=\omega R^2B\int_0^{2\pi}\sin^2\theta d\theta=\pi\omega R^2B$.

所以 $U_{CA}=\varepsilon_{AC}-\frac{1}{4}\varepsilon_0=0$, $U_{MA}=\varepsilon_{AM}-\frac{1}{8}\varepsilon_0=-\frac{1}{4}\omega R^2B<0$. 所以A、C电势一样高, A、M中A高.

△ ① $\varepsilon=\int_{\theta_1}^{\theta_2}(R\omega\sin\theta)B\cdot\cos\theta R d\theta$, $\vec{v}\times\vec{B}$ 的方向为竖直向下. 则此时环元：

⇒ $\sin\theta d\theta$. 而不是 $\cos\theta R d\theta$.

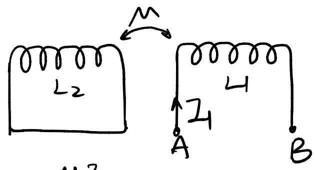
② 电势的高低需考虑电阻的压降. 产生的电动势不直接等于"电源两端电压"，有内阻.

第二问可设线圈电阻为R_0. 则电流为 $I=\frac{\varepsilon_0}{R_0}=\frac{\pi\omega R^2B}{R_0}$.

那么CA段的压降为 $\frac{R_0}{4}I=\frac{\varepsilon_0}{4}$. AC间动生电动势为$\varepsilon_{AC}$ (C为正A为负). 所以 $U_{CA}=U_C-U_A=\varepsilon_{AC}-\frac{\varepsilon_0}{4}$.

(基尔霍夫定律)

O 两只绕向方向相同的线圈，互感系数为M，自感系数分别为L_1、L_2，两线圈电阻不计。若在L_1中通有$I_1=kt$的随时间均匀增长的变化电流，求L_1线圈两端电势差U_A-U_B.



⇒ L_1中AB电动势来自于自身电流变化产生的自感电动势ε_1（无外加磁场），和来自线圈L_2电流变化产生的互感电动势。

先求出线圈L_2中产生的电流： Δ基尔霍夫定律

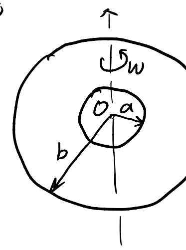
对L_2回路有：$\varepsilon=-L_2\frac{dI_2}{dt}-M\frac{dI_1}{dt}=I_2R\approx 0$ 即 $-\frac{d}{dt}(L_2I_2+MI_1)=0 \Rightarrow I_2=-\frac{MI_1}{L_2}$

对L_1回路有：$U_B-U_A=\varepsilon=\pm\frac{d}{dt}(L_1I_1+MI_2)=\pm\frac{d}{dt}[(L_1-\frac{M^2}{L_2})I_1]=\pm(L_1-\frac{M^2}{L_2})k$

因L_1为顺向绕线圈，所以取"−"号。

※

O 一半径为a的圆环，绕其轴做匀速转动，角速度大小为ω，另有一大圆环($b\gg a$)固定不动，通有不变电流I，小环大环共心，$t=0$时两环共面，设小圆环电阻为R，自感不计，求t时刻大环中电动势。



⇒ ① 小圆环中的电动势：$\varepsilon_a=\int(-\frac{\partial B}{\partial t})d\vec{S}=-\frac{d\Phi}{dt}=-\frac{d}{dt}(B\pi a^2\cos\omega t)=B\omega\pi a^2\sin\omega t$

（也可由动生电动势求出：$\varepsilon_a=\int(\vec{v}\times\vec{B})\sin\theta\, a\, d\theta\cdot\sin\omega t=2a^2\omega B\int_0^{\pi}\sin^2\theta\, d\theta\cdot\sin\omega t=B\omega\pi a^2\sin\omega t$）

其中电流 $I_a=\frac{\varepsilon_a}{R}=\frac{B\omega\pi a^2}{R}\sin\omega t$.

② 大小圆环之间的互感：$M=\frac{\Phi}{I}=\frac{B\pi a^2\cos\omega t}{I}=\frac{\frac{\mu_0 I}{2b}\cdot\pi a^2\cos\omega t}{I}=\frac{\mu_0\pi a^2\cos\omega t}{2b}$ (互感随时间变化)

③ 大圆环中电动势：$\varepsilon_b=-M\frac{dI_a}{dt}=-\frac{\mu_0\pi a^2}{2b}\cdot\frac{\mu_0 I\omega^2\pi a^2}{2bR}\cos\omega t=-\frac{\mu_0^2 I\omega^2\pi^2 a^2}{4b^2R}\cos\omega t$ (×)

$\Rightarrow \varepsilon_b=-\frac{d\Phi}{dt}=-\frac{d}{dt}(MI_a)=-\frac{d}{dt}(\frac{\mu_0^2 I\omega\pi^2 a^4}{4Rb^2}\sin\omega t\cos\omega t)=-\frac{\mu_0^2 I\omega^2\pi^2 a^4}{4Rb^2}\cos 2\omega t$

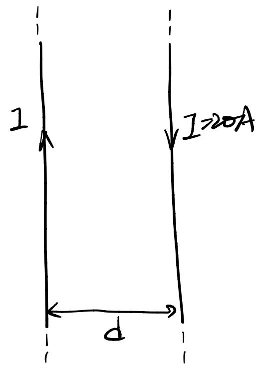
(加深理解)

O 两根足够长的平行导线间距离为20cm，其保持一大小20A方向相反的电流。

(1) 求两导线间每单位长度的自感系数，设导线半径为1.0cm.

(2) 若将导线分开到相距40cm，求磁场对单位长度导线所做功。

(3) 位移时单位长度的磁能改变了多少？说明能量的来源。



⇒ (1) 在导线之间区域形成了无限长的矩形回路

单根导线的磁通量 $\Phi_1=\Phi_2=\int_a^{d-a}\frac{\mu_0 I}{2\pi x}l\,dx=\frac{\mu_0 Il}{2\pi}\ln\frac{d-a}{a}$，总磁通 $\Phi=\frac{\mu_0 Il}{\pi}\ln\frac{d-a}{a}$

则单位长度自感系数为 $L=\frac{1}{l}\cdot\frac{\Phi}{I}=\frac{\mu_0}{\pi}\ln\frac{d-a}{a}=1.2\times10^{-6}H$.

(2) $F=BIl=\frac{\mu_0 I^2}{2\pi x}\cdot l \Rightarrow A=\int_d^{d'}\frac{\mu_0 I^2 l}{2\pi}\cdot\frac{1}{x}dx=\frac{\mu_0 I^2 l}{2\pi}\ln 2 \Rightarrow A'=\frac{\mu_0 I^2}{2\pi}\ln 2=4.41\times10^{-6}J$.

(3) 位移前磁能：$W_1=\frac{1}{2}L_1I^2=2.4\times10^{-4}J$. 位移后磁能：$W_2=\frac{1}{2}L_2I^2=\frac{1}{2}\times1.465\times10^{-6}\times20^2=2.93\times10^{-4}J$.

单位长度改变磁能：$\Delta W=\frac{W_2-W_1}{d'-d}=2.65\times10^{-6}J/cm$.

$\Delta W=W_2-W_1=\frac{1}{2}(L'-L)I^2=\frac{\mu_0 I^2}{2\pi}\ln\frac{d'-a}{d-a}\approx\frac{\mu_0 I^2}{2\pi}\ln\frac{d'}{d}\approx A'$，此能量来自于电源为保持I不变克服自感电动势所做功 ⇒ $\varepsilon=-\frac{d\Phi}{dt}=-I\frac{dL}{dt}$，克服做功为 $A_总=-\int_d^{d'}\varepsilon I\,dt=\int_d^{d'}I^2dL=I^2(L'-L)$

$\Rightarrow A_总=\frac{1}{2}(L'-L)I^2+\frac{1}{2}(L'-L)I^2=A'+\Delta W$

○ 一宽度很小的永磁体圆环，其截面积为A，气隙中的磁感应强度为B，假定圆环的周长远大于气隙宽度，并且远大于环的截面半径$\sqrt{\frac{A}{\pi}}$，求气隙两边磁性相反的两个磁极之间的相互吸引力。

⇒ 假设上下表面分布均匀的磁荷，面密度为σ，由题知上下表面相当于无穷大平面。

由高斯定理知上表面磁荷在下表面产生的磁场强度为：$H = \frac{\sigma}{2\mu_0}$

下表面磁荷受到作用力 $F = Hq_m = \frac{\sigma}{2\mu_0} \cdot \sigma A = \frac{\sigma^2 A}{2\mu_0} = \frac{(2\mu_0 H)^2 A}{2\mu_0} = 2\mu_0 H^2 A$

又上下表面产生的磁感 $B = 2\mu_0 H \Rightarrow F = \frac{B^2 A}{2\mu_0}$（或者有 $\sigma = B\cos\theta = B$）。

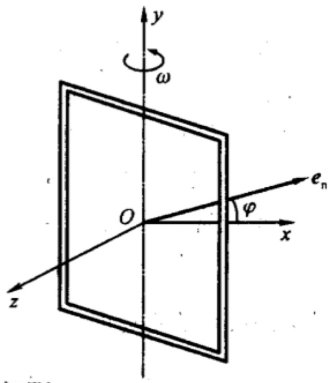
（能量法）

(基尔霍夫定律)→电阻很小可忽略不计

① 自感L，边长l的正方形铜圈，电阻很小可忽略不计，铜圈保持匀角速ω绕y轴转动，磁感为B，方向沿x正向

(1) 开始时 $\varphi_0=\frac{\pi}{2}$ 铜圈中电流为零，求任一时刻铜圈中电流$I(t)$

(2) 求铜圈的法线方向从$\varphi_0=\frac{\pi}{2}$转到$\varphi_1=\pi$中磁力所作功



远小于它横截面半径，则耦合系数趋向于1.

【例 16－11】 如图16－17所示，自感为 L，边长为 l 的正方形铜圈，电阻很小，可忽略不计，铜圈保持以匀角速 ω 绕 y 轴匀速转动，铜圈所在处的磁感应强度均匀为 B，方向沿 x 轴正向.

(1) 开始时 $\varphi_0=\frac{\pi}{2}$，铜圈中的电流为零，求铜圈中中任一时刻的电流 $I(t)$；

(2) 求铜圈的法线方向从 $\varphi_0=\frac{\pi}{2}$ 转到 $\varphi_1=\pi$ 的过程中磁力的功.

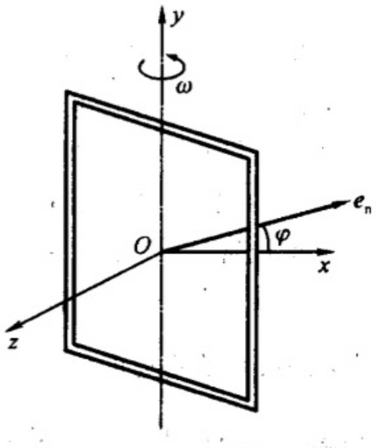


图 16－17

【解】 (1) 方法一，在铜环回路内应用基尔霍夫定律：

$$\mathscr{E}_i+\mathscr{E}_L=IR,$$

式中感应电动势 $\mathscr{E}_i=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(BS\cos\varphi)=\omega BS\sin\varphi$，自感电动势 $\mathscr{E}_L=-L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$. 由题设，铜圈电阻很小，可忽略不计，即 $IR=0$. 因此上式可写成

$$\omega BS\sin\varphi=L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}.$$

$$I=\int_0^t\frac{\omega BS}{L}\sin\varphi\cdot\mathrm{d}t=\int_0^t\frac{\omega BS}{L}\sin(\varphi_0+\omega t)\cdot\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^t\frac{\omega BS}{L}\sin\left(\frac{\pi}{2}+\omega t\right)\cdot\mathrm{d}t=\frac{BS}{L}\int_0^t\cos\omega t\cdot\mathrm{d}(\omega t)=\frac{Bl^2}{L}\sin\omega t.$$

方法二，铜圈内的总磁通量

$$\Phi=BS\cos\varphi+IL,$$

铜圈环路内总的感应电动势

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(BS\cos\varphi+IL)=IR=0,$$

即

$$BS\cos\varphi+IL=\text{恒量}.$$

将初始条件 $\varphi_0=\frac{\pi}{2}$，$I_0=0$ 代入上式，得恒量为零，即

$$BS\cos\varphi+IL=0,$$

得

$$I=-\frac{BS\cos\varphi}{L}=\frac{BS\cos\left(\frac{\pi}{2}+\omega t\right)}{L}=\frac{Bl^2\sin\omega t}{L}$$

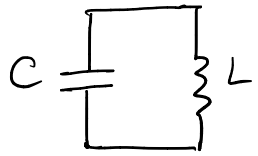
§5 电磁场与电磁波

(加深理解)

① 求LC振荡电路中的 I_d. I_c.

⇒ 直接代入公式：$I_d=\oiint j_d dS=\oiint \frac{\partial D}{\partial t}dS=\oiint \frac{\partial}{\partial t}(\frac{q}{S})dS=\frac{dq}{dt}$.

$I_c=\frac{dq}{dt}$. 由此可见：$I_c=I_d$.



(圆板电容器的充放电过程中的磁场分布.

① (充电)圆板电容器，$d\ll R$. 充电时电动势为 ε. 求磁场分布 $B(t)$.

⇒ 回路方程：$\varepsilon-\varepsilon_c=0$.　$\varepsilon_c=$

$Q=CU$.

案答要

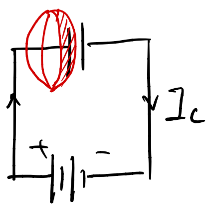
① 设电荷在半径为R的圆形平行板电容器极板上均匀分布. 且忽略边缘效应. 把电容器接在角频率为 ω 的简谐交流电路中. 电路中的传导电流峰值为 I. 求电容器极板间磁场分布.

⇒ 回路中的电流方程为 $I_c=I_0\sin\omega t$.

作如图所示高斯面后可得：$I_c=I_d$.

(即电路中的传导电流和电容器中的位移电流相同)

则由 $\oint H dl=\oiint j_d dS=\oiint \frac{I_d}{\pi R^2}dS$ 可得磁场分布.



△错误：

> △另一种方式证明 $I_c=I_d$.　电容器中的E与位移电流 I_d 的关系勿与导体中的混淆.
>
> 对电容器有：$i_c=C\frac{du_c}{dt}$ 且 $i_c=I_0\sin\omega t$ ⇒ $\frac{du_c}{dt}=\frac{I_0}{C}\sin\omega t$.
>
> 又 $u_c=\frac{Q}{C}$ ⇒ $\frac{du}{dt}=\frac{1}{C}\frac{dQ}{dt}$. 则 $\frac{\partial D}{\partial t}=\frac{\partial \sigma}{\partial t}=\frac{1}{\pi R^2}\frac{dQ}{dt}=\frac{C\frac{du_c}{dt}}{\pi R^2}=\frac{i_c}{\pi R^2}=\frac{I_c}{\pi R^2}$.

(用 $j_d=\gamma E$ 计算大错而特错. j_d 只是一个符号. 本质上是 $\frac{\partial D}{\partial t}$. 而 $\frac{\partial D}{\partial t}$ 和E之间的关系是 $\frac{\partial D}{\partial t}=\varepsilon\frac{\partial E}{\partial t}$)

O 证明：当导线中有交流电流时，其中传导电流密度 j_c 与位移电流密度 j_d 之间的关系为 $\frac{I_{dm}}{I_{cm}}=\rho\varepsilon_0\omega$.

⇒ 欧姆定律的微分形式：$j_c=\gamma E$，而 $j_d=\frac{\partial D}{\partial t}=\varepsilon_0\frac{\partial E}{\partial t}$.

设 $I_c=I_0\sin\omega t$，那么 $E=\rho I_0\sin\omega t$. ⇒ $I_d=\rho\omega\varepsilon_0 I_0\cos\omega t$.

振幅比：$\frac{I_{dm}}{I_{cm}}=\rho\omega\varepsilon_0$.

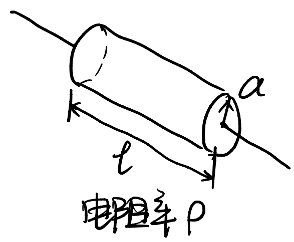
O 证明圆柱形电阻通电流 I 时，其输出的坡印廷矢量等于 I^2R.

⇒ 侧面表面积：$A=2\pi a l$. 导体内电场 E 满足 $j=\gamma E\Rightarrow E=\rho j$.

作环路后得激发的磁场：$H=\frac{I}{2\pi a}$. 且 $j=\frac{I}{\pi a^2}$

$S=EH=\rho j\cdot\frac{I}{2\pi a}=\rho\cdot\frac{I}{\pi a^2}\cdot\frac{I}{2\pi a}=I^2\frac{\rho l}{\pi a^2}\cdot\frac{1}{2\pi a l}=\frac{I^2R}{A}$

又有 $-\frac{d}{dt}\iiint w\,dV=\oint\vec{S}\cdot d\vec{A}\Rightarrow P=\frac{dW}{dt}=\frac{d}{dt}\iiint w\,dV=SA=I^2R$.



Δ 题型：电磁波为球面波，已知 P 求 $E_m(B_m)$，或已知 E_m 求 P.

$$\underset{\sin}{I_c}\rightarrow\underset{\cos}{\overset{\text{极板}}{Q}}\rightarrow\underset{\cos}{U}\rightarrow\underset{\sin}{I_d}$$

$$U=Ed=\frac{D}{\varepsilon_0}d=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}d=\frac{Qd}{\varepsilon_0 S}$$

15.机械波

①(加深理解). 已知波动方程 $y=A\cos(bt+cx)$, b和c均大于零.

(1)求该波的周期T. 波长λ. 波速u.

⇒(1) 法一(比较系数法): 标准波动方程 $y=A\cos(\omega t-kx+\varphi_0)=A\cos[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi_0]$.

与所给方程 $y=A\cos(bt+cx)=A\cos b(t+\frac{x}{\frac{b}{c}})$ 比较可得: $\omega=b$. $k=c=\frac{2\pi}{\lambda}$, $u=-\frac{b}{c}$.

那么 $T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{b}$, $\lambda=\frac{2\pi}{c}$.

法二(用物理意义求解): 波长⇒ $(bt+cx_1)-(bt+cx_2)=2\pi$(相位差), 其中 $x_1-x_2=\lambda$, 则 $\lambda=\frac{2\pi}{c}$

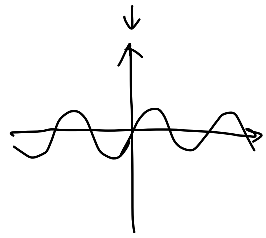
周期⇒ $(bt_1+cx)-(bt_2+cx)=2\pi$(相位差). 其中 $T=t_1-t_2=\frac{2\pi}{b}$.

波速⇒ $bt_1+cx_1=bt_2+cx_2$, 其中 $u=\frac{x_2-x_1}{t_2-t_1}=-\frac{b}{c}$.

(2)画出 $t=\frac{T}{4}$ 时刻的波形.

法一: 将 $t=\frac{T}{4}$ 代入波动方程有: $y=A\cos(\frac{T}{4}\cdot b+cx)=A\cos(\frac{\pi}{2}+cx)=A\sin cx$.

法二: 先画出 $t=0$ 时刻波形



✓ ②(加深理解). 一平面波沿x轴正向传播. 距坐标原点O为x_1处P点的振动表达式为 $y=A\cos(\omega t+\varphi)$. 波速为u. 求平面波的表达式.

法一: 设波动式为 $y=A\cos(\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi_0)$.

那么x_1处有: $y=A\cos(\omega(t-\frac{x_1}{u})+\varphi_0)=A\cos(\omega t-\frac{\omega}{u}x_1+\varphi_0)$.

与 $y=A\cos(\omega t+\varphi)$ 比较可得: $\varphi_0=\varphi+\frac{\omega}{u}x_1$.

所以波动式为 $y=A\cos(\omega(t-\frac{x}{u})+\frac{\omega}{u}x_1+\varphi_0)$.

法二: 易知原点O处的振动表达式为 $y=A\cos(\omega(t+\frac{x_1}{u})+\varphi)=A\cos(\omega t+\frac{\omega}{u}x_1+\varphi)$.

所以波动式为 $y=A\cos(\omega(t-\frac{x}{u})+\frac{\omega}{u}x_1+\varphi)$.

○ 一列横波沿x轴传播.在$t_1=0$. $t_2=0.005s$时波形曲线如图.
(1)设周期大于t_2-t_1 求波速.
(2)若周期小于t_2-t_1. 且波速为6000m/s. 求传播方向.

(1) $T>t_2-t_1$. 传过了 $\frac{uT}{4}=\frac{\lambda}{4}=2m$. $u=\frac{2m}{0.005s}=400m/s$.

$5\times\frac{uT}{4}=10m \Rightarrow \lambda=8m$

(2) $\Delta x=u\Delta t=6000m/s\times 0.005s=30m$.

$\frac{\Delta x}{\lambda}=\frac{30}{8}=3+\frac{3}{4}$. $\frac{3}{4}\times 8=6m$. 向左.

○ 一平面简谐波以$u=0.8m/s$沿x负方向传播. 原点振动曲线如图.
求:(1)原点振动表达式 (2)波动式 (3)同时刻相距1m两点之间的相位差.

(1). 由图可知: $A=0.5cm.=0.005m$.
设 $y=A\cos(\omega t+\varphi_0)$
$t=0$: 由 $\cos\varphi_0=\frac{1}{2}$, $v>0$ 知 $\varphi_0=-\frac{\pi}{3}$
$t=1$: 由 $\cos(\omega+\varphi_0)=0$, $v<0$ 知 $\omega=\frac{5\pi}{6}$
$\Rightarrow y=0.005\cos(\frac{5\pi}{6}t-\frac{\pi}{3})$

(2) $\Rightarrow$
$y=0.005\cos(\frac{2\pi}{3}t+\frac{25\pi}{24}x+\frac{\pi}{3})$.
$k=\frac{2\pi}{\lambda}=\frac{2\pi}{uT}=\frac{\omega}{u}=\frac{\frac{5\pi}{6}}{\frac{4}{5}}=\frac{25\pi}{24}$

(3) $\Delta\varphi=(\frac{25\pi}{24}x_1+\frac{\pi}{3})-(\frac{25\pi}{24}x_2+\frac{\pi}{3})$
$=\frac{25}{24}\pi$

○ (加深理解). S_1和S_2为左右两个振幅相等的相干平面简谐波源. 其间距为$d=\frac{5}{4}\lambda$.
S_2点振动比S_2超前$\frac{\pi}{2}$. 设S_2振动方程为$y_{10}=A\cos\frac{2\pi}{T}t$. 且介质无吸收.
(1)求S_1.S_2之间合成波表达式. (2) S_1左侧. S_2右侧.

$\Rightarrow$ (1) 由题意可得: $y_{20}=A\cos(\frac{2\pi}{T}t+\frac{\pi}{2})$
则在S_1.S_2之间距S_1为x的任意点S_1波动式: $y_1=A\cos(\frac{2\pi}{T}t-\frac{2\pi}{\lambda}x)$.
S_2波动式: $y_2=A\cos(\frac{2\pi}{T}t+\frac{\pi}{2}-\frac{2\pi}{\lambda}(\frac{5\lambda}{4}-x))=A\cos(\frac{2\pi}{T}t+\frac{2\pi}{\lambda}x)$.
合成波: $y=y_1+y_2=A\cos(\frac{2\pi}{T}t-\frac{2\pi}{\lambda}x)+A\cos(\frac{2\pi}{T}t+\frac{2\pi}{\lambda}x)=2A\cos\frac{2\pi}{T}t\cos\frac{2\pi}{\lambda}x$. (驻波).

(2) 左侧距S_1 x处: $y_1=A\cos(\frac{2\pi}{T}t-\frac{2\pi}{\lambda}x)$. $y_2=A\cos(\frac{2\pi}{T}t+\frac{\pi}{2}-\frac{2\pi}{\lambda}(x+\frac{5}{4}\lambda))=A\cos(\frac{2\pi}{T}t-\frac{2\pi}{\lambda}x)$.
合成波: $y=2A\cos(\frac{2\pi}{T}t-\frac{2\pi}{\lambda}x)$.
右侧距S_2 x处: $y_1=A\cos(\frac{2\pi}{T}t-\frac{2\pi}{\lambda}(\frac{5}{4}\lambda+x))=A\cos(\frac{2\pi}{T}t-\frac{5}{2}\pi-\frac{2\pi}{\lambda}x)=A\sin(\frac{2\pi}{T}t-\frac{2\pi}{\lambda}x)$
$y_2=A\cos(\frac{2\pi}{T}t+\frac{\pi}{2}-\frac{2\pi}{\lambda}x)=-A\sin(\frac{2\pi}{T}t-\frac{2\pi}{\lambda}x)$.
合成波 $y=0$.

Δ 频率不同的光波的干涉.（题6-12）

Δ 简谐波的能量

○ 弦线上驻波的表达式为 $y=A\cos(\frac{2\pi}{\lambda}x+\frac{\pi}{2})\cos\omega t$. 弦线的质量线密度为 ρ.

(1) 指出振动势能和动能总是为0的各点位置.

(2) 计算 $0\to\frac{\lambda}{2}$ 半个波段内振动势能、动能和总能量.

Δ 多普勒效应.

○ 一声源的频率为1080Hz，相对于地以30m/s的速度向右运动. 右方有一反射面相对于地以65m/s速率向左运动. 空气中声速为331m/s. 求

(1) 声源前方声波波长.

(2) 每秒钟到达反射面的完整波形数目.

(3) 反射波的波长.

Δ双缝衍射.

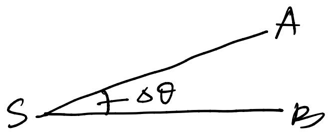
类似习题16-5.

S城与A、B进行通讯联系，SA与SB之间夹角为Δθ，当S与A通话时B无信号，当S与B通话时A无信号，为此竖立两根互相平行的天线，将其作为发射波源，频率和振幅相同，相位差为φ.

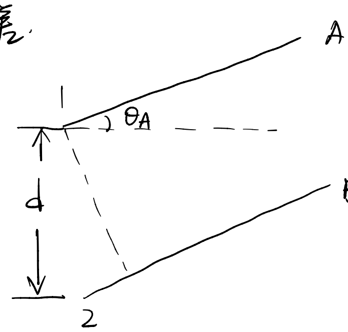
(1) 两天线最小间距为多少？

(2) 两天线的中垂线指向哪里？

(3) 两波源相位差φ为多少？



⇒ 设两天线1和2（波源）振动为：$\begin{cases} E_1 = E_0\cos\omega t \\ E_2 = E_0\cos(\omega t+\delta) \end{cases}$ δ为两波的相位差.



两列波在A的振动：$\begin{cases} E_{1A} = E_0\cos(\omega t - kr_1) \\ E_{2A} = E_0\cos(\omega t - kr_2 + \delta) \end{cases}$

两波在A的合成：$E_A = \sqrt{E_0^2 + E_0^2 + 2E_0^2\cos(r_2 - r_1 + \delta)}$

$\Rightarrow I_A = E_A^2 = 2E_0^2(1+\cos(r_2-r_1+\delta)) = 4I_0\cos^2\frac{k(r_2-r_1)+\delta}{2}$

或者可直接计算两波在A的相位差：$\Delta\varphi_A = k(r_2-r_1)+\delta$，同理 $\Delta\varphi_B = k(r_2'-r_1')+\delta$.

其中 $r_2-r_1 \approx d\sin\theta_A$. $r_2'-r_1' \approx d\sin\theta_B$. 则相位差 $\Delta\varphi_A = \frac{2\pi}{\lambda}d\sin\theta_A + \delta$. $\Delta\varphi_B = \frac{2\pi}{\lambda}d\sin\theta_B + \delta$

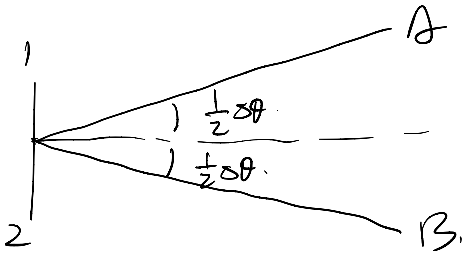
$\Delta\theta_A$、$\Delta\theta_B$ 是无线电波由S向A、B传播方向与两天线中垂线之间夹角. ⇒ $\Delta\theta = \theta_A - \theta_B$.

⇒ $\frac{2\pi}{\lambda}d\sin\theta_A - \delta = 2k\pi$. $\frac{2\pi}{\lambda}d\sin\theta_B - \delta = (2k'+1)\pi$.

两式相减：$d(\sin\theta_A - \sin\theta_B) = (k-k'-\frac{1}{2})\lambda \Rightarrow d = \frac{(k-k'-\frac{1}{2})\lambda}{\sin\theta_A - \sin\theta_B}$

$\sin\theta_A - \sin\theta_B = 2\cos\frac{\theta_A+\theta_B}{2}\sin\frac{\theta_A-\theta_B}{2} = 2\cos(\theta_A - \frac{\Delta\theta}{2})\sin\frac{\Delta\theta}{2}$

若使d最小，则分母最大. ⇒ $\theta_A = \frac{\Delta\theta}{2}$，$\theta_B = \theta_A - \Delta\theta = -\frac{\Delta\theta}{2} = -\theta_A$.



即天线1、2的中垂线为Δθ的角平分线方向.

分子最小：$k-k'=1$.

则 $d_{min} = \frac{\lambda}{4\sin\theta_A} = \frac{\lambda}{4\sin\frac{\Delta\theta}{2}}$.

$\delta = \frac{2\pi}{\lambda}d\sin\theta_A - 2k\pi = \frac{2\pi}{\lambda}\cdot\frac{\lambda}{4\sin\frac{\Delta\theta}{2}}\sin\theta_A - 2k\pi = \frac{\pi}{2} - 2k\pi$. $k\in Z$.

Δ 三缝干涉和光强分布

以波长为λ的单色平行光垂直入射到相邻狭缝间距为d的三缝上. 证明观察屏上干涉光强分布函数为 $I=I_0(1+2\cos\Delta\varphi)^2$. 其中 $\Delta\varphi=\frac{2\pi}{\lambda}d\sin\theta$.

$$E_1=E_0\cos(\omega t-kr_1)$$

$$E_2=E_0\cos(\omega t-kr_2)$$

$$E_3=E_0\cos(\omega t-kr_3)$$

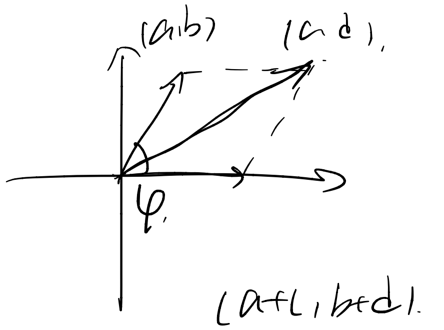
$$E_{12}=\sqrt{E_0^2+E_0^2+2E_0^2\cos k(r_2-r_1)}\cdot\cos\left(\omega t-\frac{k}{2}(r_2-r_1)\right)$$

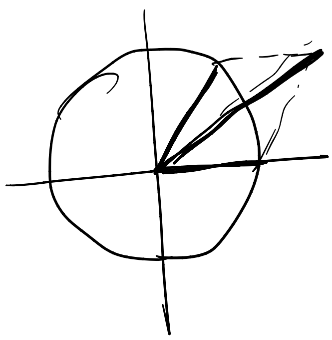
$$E_{123}=\sqrt{E_{12}^2+E_0^2+2E_{12}E_0\cos k\left(r_3-\frac{1}{2}(r_2-r_1)\right)}$$

$$I=2E_0^2(1+\cos k(r_2-r_1))+E_0^2+2E_0^2\cdot\sqrt{2+2\cos k(r_2-r_1)}\cdot\cos k\left(r_3-\frac{1}{2}(r_2-r_1)\right)$$

$$=2E_0^2(1+\cos\Delta\varphi)+E_0^2+2E_0^2\sqrt{2+2\cos\Delta\varphi}\cdot\cos\Delta\varphi$$

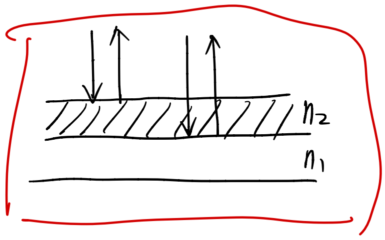
$$=E_0^2\left(2+2\cos\Delta\varphi+4\cos\frac{\Delta\varphi}{2}\right.$$





A 薄膜干涉－等倾干涉

○ 在玻璃板上 ($n_1=1.50$) 有一层油膜 ($n_2=1.30$)，已知用光源波长连续变化，垂直照射在油膜上，观察到 500nm 和 700nm 波长的光在反射中消失，求油膜厚度。



如图所示的两列反射波干涉相消。

$2n_2e=\pm(2m-1)\lambda_1$.　　$2n_2e=\pm(2(m-1)-1)\lambda_2$.

(光程差为奇数倍时干涉相消)

$\Rightarrow (2m-1)\lambda_1=(2m-3)\lambda_2$　代入 $\lambda_1=500nm$. $\lambda_2=700nm$. 得：$m=3$.

$\therefore e=\dfrac{5\lambda_1}{2n_2}=6.73\times10^{-4}mm$.

○ 在玻璃板 (折射率为1.50) 上有一层油膜 (折射率为1.30)，已知对于波长为500nm 和700nm 的垂直入射光都发生反射相消，这两波长之间没有别的波长的光反射相消，求此油膜的厚度。(16-9)

$\Rightarrow \lambda_1=500nm$, $\lambda_2=700nm$. 干涉相消条件：$2ne=(2m-1)\dfrac{\lambda}{2}$, $m=1,2,\cdots$

那么对于 λ_1, λ_2 有：$2ne=(2m_1-1)\dfrac{\lambda_1}{2}$, $2ne=(2m_2-1)\dfrac{\lambda_2}{2}$, $\Rightarrow \dfrac{2m_1-1}{2m_2-1}=\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}=\dfrac{7}{5}$

又 λ_1, λ_2 之间没有相消波长，即 $m_1=4$, $m_2=3$，所以 $e=\dfrac{(2m_1-1)\frac{\lambda_1}{2}}{2n}=673.08nm$.

○ 人造水晶玻璃 (折射率1.50) 为基底材料，表面镀一层氧化硅 (折射率为2.0) 以增强反射，为增强 $\lambda=560nm$ 的光垂直入射，镀膜厚度应为多少？(16-11)

$\Rightarrow$ 干涉增强条件：$2ne+\dfrac{\lambda}{2}=m\lambda$, $m=0,1,\cdots$

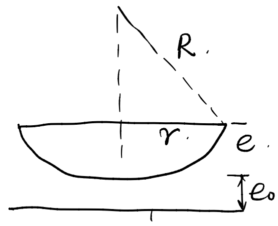
则 $e=\dfrac{(2m-1)\lambda}{4n}=(m-\frac{1}{2})\times140nm$.　$m=1$时. $e_{min}=70nm$.

↳ 注意该类型题目中两种介质的折射率!!! 光从光疏介质进入光密介质时才存在半波损失，反过来则不存在。(16-9) 题中两次反射均存在半波损失，因此光程差中不包括半波损失。

Δ牛顿环

○ 牛顿环装置中平凸透镜与平板玻璃之间有空隙，所用单色光波长为 λ，凸透镜曲率半径为 R.

光程差：$2n(e+e_0)+\frac{\lambda}{2}=2(e+e_0)+\frac{\lambda}{2}$



$\Rightarrow 2(e+e_0)+\frac{\lambda}{2}=\begin{cases}\pm m\lambda & 明纹\\ \pm(2m+1)\lambda & 暗纹\end{cases}$

条纹半径：$r^2=R^2-(R-e)^2=2Re-e^2\approx 2eR\Rightarrow e=\frac{r^2}{2R}$.

$2(e+e_0)+\frac{\lambda}{2}=m\lambda\Rightarrow 2e+2e_0+\frac{\lambda}{2}=m\lambda\Rightarrow 2e=\frac{(2m-1)}{2}\lambda-2e_0\Rightarrow r=\sqrt{\frac{(2m-1)}{2}R\lambda-2e_0R}$

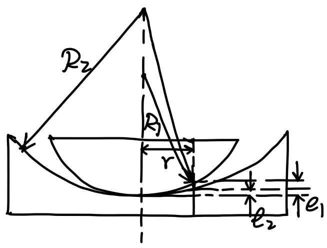
同理：暗条纹半径 $r=\sqrt{mR\lambda-2e_0R}=\sqrt{(m\lambda-2e_0)R}$，$m>\frac{2e_0}{\lambda}$

○ 凸球面曲率半径为 R_1，小于凹球面曲率半径 R_2，用波长为 λ 的单色光入射，求第 m 级明、暗干涉条纹半径表达式。(16-18)

$\Rightarrow$ 仿照书上的证明过程，$\Delta e=e_1-e_2$

对凸面镜有：$r^2=R_1^2-(R_1-e_1)^2=2R_1e_1+e_1^2\approx 2R_1e_1$

对凹面镜有：$r^2=R_2^2-(R_2-e_2)^2=2R_2e_2+e_2^2\approx 2R_2e_2$



那么光程差 $\Delta\delta=2\Delta e+\frac{\lambda}{2}$，$\Delta e=e_1-e_2=\frac{r^2}{2R_1}-\frac{r^2}{2R_2}=\frac{r^2}{2}\cdot\frac{R_2-R_1}{R_1R_2}$

当 $\Delta\delta=(2m+1)\frac{\lambda}{2}$ 时为暗纹：$r^2\cdot\frac{R_2-R_1}{R_1R_2}=m\lambda$，即 $r_m=\sqrt{\frac{mR_1R_2\lambda}{R_2-R_1}}$

Δ公式 ($r_{k+m}^2-r_k^2=mR\lambda$) 的应用（公式的推导!!!）

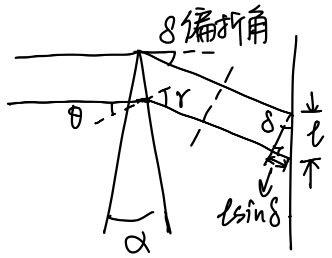
○ 照射波长为 $\lambda=632.8nm$，测得牛顿环相邻两个暗环半径分别为 0.7mm 和 1.7mm，求透镜的曲率半径。

Δ 迈克耳孙干涉仪

如图. 迈克耳孙干涉仪光源波长为λ. 先将反射镜 M_1 M_2 调到严格垂直. 然后在干涉仪的一臂上放一折射率为n的劈形透明介质. 此时出现间距为l的干涉条纹. 求劈形介质的劈角.

⇒

①

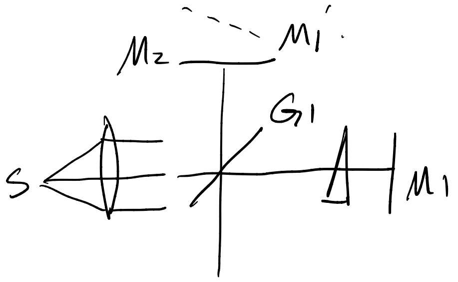


⇒ 折射定律:

$n\cdot\sin\theta = 1\cdot\sin r$

由于 α·r 极小 则 $r \approx n\theta$.

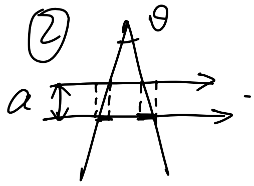
⇒ $\delta = r - \theta = (n-1)\theta$.



$\Delta e = 2l\sin\delta \approx 2l\delta = 2(n-1)\theta l$. (光程差)

又因为 $\Delta e = \lambda$. 所以 $\lambda = 2(n-1)\theta l \Rightarrow \theta = \frac{\lambda}{2(n-1)l}$???

②



⇒ 此两列波光程差为 $\Delta\delta \approx 2a\theta(n-1)$, 注意下面一列波的 $\Delta e = 2a\theta$ 部分在介质中 而上面一列波在空气中.

当 $a = l$ 时. 即此两列波的位置均发生干涉时.

有 $\Delta\delta = 2(n-1)\theta l$. 注意这里的 $\Delta\delta$ 的含义变为了相邻干涉条纹之间光程差的差值. 而 $\Delta\delta = \lambda$ 即 $\lambda = 2(n-1)\theta l$.

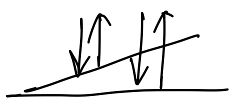
或者美lc书上的写法:

依据等厚干涉的推导. 该题中等厚干涉条纹光程差为 $\Delta\delta = 2(n-1)e$.

⇒ $2(n-1)e + \frac{\lambda}{2} = k\cdot\frac{\lambda}{2}$, 而不是 $\Delta\delta = 2ne$. 那么相邻干涉条纹之间光程差相差为λ

即 $\Delta e = \frac{\lambda}{2(n-1)}$. 相邻条纹间距 $\Delta l = \frac{\Delta e}{\sin\alpha} \approx \frac{\Delta e}{\alpha} = \frac{\lambda}{2(n-1)\alpha}$.

注意, 和下图中的光程差不同.



⇒ $\Delta\delta = 2ne$. 另列波没有经过 $2e$ 的介质
而该题中是经过了空气.

$$\begin{cases} 2(n-1)e_1 + \frac{\lambda}{2} = m\lambda & (明) \\ 2(n-1)e_2 + \frac{\lambda}{2} = (2m-1)\frac{\lambda}{2} & (暗). \end{cases}$$

明/暗条纹之间光程差相差λ.

这里的 Δe 是厚度. 上面那种写法中 $\Delta\delta$ 相当于 $\underbrace{[2(n-1)e_1 + \frac{\lambda}{2}] - [2(n-1)e_2 + \frac{\lambda}{2}]}_{=\lambda}$

公式：$2d=N\lambda$

Δ 结论应用：当干涉条纹移过N条时，M_2 移过的距离为 $d=N\frac{\lambda}{2}$，光程差变化量为 $2d=N\lambda$.

0 利用迈克逊干涉测单色光的波长，当平面镜 M_2 移动距离为0.20mm时，干涉条纹移过800条，求该单色光波长.

⇒ 光程差的改变量：$800\lambda=0.4mm$，所以 $\lambda=\frac{0.4mm}{800}=500nm$

公式：$(2(n-1)d=N\lambda)$ 的应用（熟练运用公式）.

0 当把折射率为 $n=1.40$ 的薄膜放入迈克尔逊干涉仪的一臂时，产生了条条纹的移动，求薄膜厚度.（$\lambda=589.3nm$）

⇒ 光程差的变化量：$2(n-1)e=N\lambda \Rightarrow e=\frac{N\lambda}{2(n-1)}=\frac{7\times589.3nm}{2\times(1.40-1)}=5156nm$.

Δ 不同波长的光的干涉.

0 用钠灯（$\lambda_1=589.0nm$，$\lambda_2=589.6nm$）作为迈…的光源，首先调整得到最清晰条纹，移动反射镜 M_1，条纹逐渐模糊，至干涉现象第一次消失时，M_1 移动了多少距离.

⇒ 条纹最清晰时，两组相干光均满足 $2nd=m\lambda$，即光程差为波长的整数倍.
M_1 移动后，当两组相干光均满足 $2nd'=(2m+1)\frac{\lambda}{2}$ 时，干涉条纹消失.

由 $\Delta\delta=2nd=m\lambda$ 得干涉相长时相干光的相位差 $\Delta\varphi=\frac{2\pi}{\lambda}\cdot m\lambda=2m\cdot\pi$

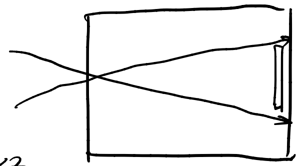
$\Delta\delta'=2nd'=(2m+1)\frac{\lambda}{2}$ 得干涉相消时相干光的相位差 $\Delta\varphi'=\frac{2\pi}{\lambda}\cdot(2m+1)\frac{\lambda}{2}=(2m+1)\pi$

当两组相干光的相位差相差 π 时，条纹消失.

$\Delta\varphi_1-\Delta\varphi_2=\frac{2\pi}{\lambda_1}\cdot2d-\frac{2\pi}{\lambda_2}\cdot2d=\pi \Rightarrow d=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\lambda_1}-\frac{1}{\lambda_2}\right)^{-1}=0.145mm$.

Δ圆孔夫琅禾费衍射.

如图. 针孔相机由一个带针孔(无透镜)的长为10cm的暗盒构成. 为得到最清晰的像. 小孔直径应为多少?



由于几何成像. 物体上的每一点发出的光经针孔所成的像大小与针孔一样. 像对针孔的张角为 $\Delta\theta=\frac{d}{D}$, D为像平面到针孔距离, d为针孔直径.
孔越小, 光斑越小, 几何像斑越清晰.

另由于衍射. 物体上每一点经小孔衍射形成艾里斑. 其角直径为 $\Delta\theta_0=1.22\frac{\lambda}{d}$.
孔越大, 光斑越小. 衍射像斑越清晰.

$\Rightarrow \frac{d}{D}=1.22\frac{\lambda}{d} \Rightarrow d=\sqrt{1.22\lambda D}$

Δ 光栅衍射.

o 波长 600 nm 的单色光垂直入射在光栅上，第二级明条纹出现在 $\sin\theta=0.20$ 处. 第四级缺级.

(1) 光栅常数 d.

(2) 缝的最小宽度.

(3) 按上述 a.b 值. 光屏上能观察到的全部明条级纹数是多少?

(1) 光栅方程：$d\sin\theta=(a+b)\sin\theta=k\lambda$.

$\Rightarrow d\times0.2=2\lambda \Rightarrow d=10\lambda=6000nm$.

(2) 缺级条件：$\begin{cases}(a+b)\sin\theta=k\lambda\\ a\sin\theta=k'\lambda\end{cases} \Rightarrow \frac{a+b}{a}=\frac{k}{k'}=\frac{4}{1}=\frac{8}{2}=\cdots$

$\Rightarrow a=\frac{a+b}{4}=\frac{d}{4}=1500nm$.

(3) 光栅方程中令 $\sin\theta=1$ 可得 $k=10$ $(\theta=\frac{\pi}{2})$.

则可观察到的主极大谱线依次为 0, ±1. ±2. ±3. ±5. ±6. ±7. ±9. 其中 k=±4. ±8 缺级. 共15条.

$k=\pm10$ 因处于 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 而不可见.

↳ 本题要点：(公式) 光栅衍射主极大：$d\sin\theta=\pm k\lambda$；次极大：$d\sin\theta=\pm\frac{k'}{N}\lambda$ $(N-1个)$.

单缝衍射暗纹：$a\sin\theta=\pm k'\lambda$.

注意题目描述"垂直入射"，那最大衍射角为 $\frac{\pi}{2} \Rightarrow k_m=\frac{d}{\lambda}$ $(\sin\theta_m=1)$.

o 波长 400 nm 到 750 nm 的白光垂直照射到某光栅上. 在离光栅 0.50 m 处的屏上测得第一级光谱离中央明条纹中心最近的距离为 4.0 cm. 求：

(1) 第一级光谱的宽度.

(2) 第三级光谱中哪些波长的光与第二级光谱的光相重合.

(1) 光栅方程 $d\sin\theta=d\cdot\frac{x}{D}=k\lambda$. 离中央条纹最近的是 400nm 的明纹. $\Rightarrow d\cdot\frac{40\times10^6}{500\times10^6}=400 \Rightarrow d=5000nm$

一级光谱中最远的明纹 (750nm)：$d\cdot\frac{x}{D}=\lambda \Rightarrow x=\frac{D\lambda}{d}=\frac{500\times10^6}{5000}\times750=7.5cm$

$\Rightarrow$ 一级光谱宽度：$\Delta x=7.5cm-4cm=3.5cm$.

(2). 设波长为 λ' 的光产生的三级明纹 恰好在二级光谱边界上.

$\begin{cases}d\cdot\frac{x'}{D}=3\lambda'\\ d\cdot\frac{x'}{D}=2\times750\end{cases} \Rightarrow 3\lambda'=2\times750 \Rightarrow \lambda'=500nm$. 即 400-500nm 的光发生重合

Δ 光栅分光本领

○ 钠光由波长为589.0nm和589.6nm两条谱线组成. 为要在第二级光谱中分辨出来. 光栅应最少有多少条缝?

⇒ 第k级主极大: $(a+b)\sin\theta = k\lambda$

相邻极小位置: $(a+b)\sin\theta = (k+\frac{1}{N})\lambda$

又有: $(a+b)\sin\theta = k(\lambda+\Delta\lambda)$.

⇒ $(k+\frac{1}{N})\lambda = k(\lambda+\Delta\lambda)$

$$N = \frac{\lambda}{\Delta\lambda \cdot k} = \frac{589.0}{2\times(589.6-589.0)} = 499.15 \to 500.$$

○ 运用光栅分辨本领公式:

$$\begin{cases} R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = mN-1 \approx \underline{\underline{mN}}. \\ N = \frac{\lambda}{m\Delta\lambda}. \end{cases}$$

则 $N = \frac{589}{2\times 0.6} = 490.8$

○ [例20-5]. 波长为600nm的光垂直照射到平面光栅上, 与光栅平面法线成30°角的方向上观察到第二级主极大谱线. 试问若要在该处能分辨600.0和600.1nm这两条谱线. 光栅宽度应至少为多少? 此时光栅能否分辨600.0nm和600.04nm这两根谱线.

⇒ 光栅主极大方程: $d\sin\theta = m\lambda$. 则光栅常数 $d = \frac{2\times600}{\sin30°} = 2400\,nm$.

由光栅的分辨本领: $R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = mN$ 得所需光栅条数:

$$N = \frac{\lambda}{m\Delta\lambda} = \frac{600}{2\times(600.1-600)} = 3000\text{条}.$$ 则所需宽度 $D = Nd = 7.2\,mm$

要区分600.00和600.04. 那么所需级次: $m = \frac{\lambda}{N\Delta\lambda} = \frac{600}{3000(600.04-600)} = 5$

若垂直入射. 则能观察到的最大级次: $k_m = \frac{d}{\lambda} = \frac{2400\,nm}{600\,nm} = 4 < 5$

所以垂直入射不能分辨.

5. 偏振.

o (题17-15). 两偏振化方向正交的偏振片 P_1 和 P_2 平行放置. 以光强为 I_0 的单色自然光正入射. 若在两偏振片中间平行插入一块四分之一波片. 其光轴与第一块偏振片的偏振化方向成 30° 角. 则通过第二块偏振片后的透射光强为多少?

o (题17-12). 由钠灯射出的波长为 589.0 nm 的平行光束以 50° 角入射到方解石制成的晶片上, 晶片光轴垂直于入射面且平行于晶片表面. 已知折射率 $n_o=1.65$, $n_e=1.486$. 求:

(1) 在晶片内 o 光和 e 光的波长.

(2) o 光与 e 光两光束间夹角.

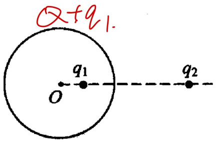
o 在单轴晶体中 e 光主折射率为 n_e. o 光折射率为 n_o. 真空中光速为 c. 则沿光轴方向. e 光的传播速度大小为 $v_e=\frac{c}{n_o}$.

2021.1.11.

9、（本小题 3+1 分）如图所示，一均匀带正电的球面带电量为 Q，沿球面直径及其延长线上有两个带正电的点电荷 q_1、q_2，q_1 在球面内，q_2 在球面外与球心的距离为 r。球面受到的电力大小 F=__________，方向向__~~右~~__左（填："左"或"右"）。

$$\cancel{F=\frac{(Q+q_1)q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}}$$

$Q+q_1$.

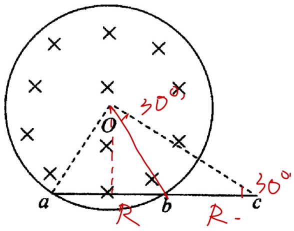


10、（本小题 3+1 分）如图所示，磁感应强度为 B 的均强磁场分布在一半径为 R 的圆柱形区域内，其方向与圆柱的对称轴平行。一金属直杆 abc 放在图示位置（a、b 两点在圆周上），杆长为 $2R$，其中一半位于磁场内、另一半在磁场外。当 $\frac{dB}{dt}>0$ 时，则杆两端感应电动势的大小为__________________，方向为__b 指向 a__。

$$\varepsilon=\oiint\frac{\partial B}{\partial t}dS=\frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

$$=\frac{\partial B}{\partial t}\cdot\pi R^2\cdot\frac{1}{4}=\cancel{\frac{\pi R^2}{4}\frac{\partial B}{\partial t}}$$

$S_{扇}-S_{\triangle}$.



11、（本小题 3 分）A，B 为两导体大平板，面积均为 S，平行放置，A 板带电荷 $+Q_1$，B 板带电荷 $+Q_2$。如果使 B 板接地，则 AB 间电场强度的大小为__$\cancel{\frac{(Q_1-Q_2)}{2\varepsilon_0 S}}$__。

$-Q$.

$=\varepsilon_r\varepsilon_0E'-\varepsilon_0E'$

7、（本题 6 分）平行板电容器极板面积为 S，间距为 d。中间有一厚度为 δ，相对介电常数为 ε_r 的介质板，介质板与电容器极板平行，面积也为 S，且各端面与电容器极板各端面对齐。设两极板带电 $\pm Q$，则介质板表面极化电荷面密度为__$(1-\frac{1}{\varepsilon_r})\frac{Q}{S}$__，介质板内电场强度大小为____________，此电容器的电容为________________（忽略边缘效应）。

$$E'=\frac{Q}{\varepsilon_r\varepsilon_0 S}\qquad C=\frac{U}{Q}=\frac{E(d-\delta)+E'\delta}{Q}=\frac{d-\delta}{\varepsilon_0 S}+\frac{\delta}{\varepsilon_r\varepsilon_0 S}\Rightarrow\frac{\varepsilon_r\varepsilon_0 S}{(d-\delta)\varepsilon_r+\delta}$$