# 导数及其运算

Δ曲率半径公式 $K=\left|\dfrac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}\right| = \left|\dfrac{x'(t)y''(t)-x''(t)y'(t)}{(x'^2(t)+y'^2(t))^{\frac{3}{2}}}\right|$

1. 命题：设函数 $y=f(x)$ 在 $x_0$ 的某邻域内有定义，$\Delta x$ 是变量 $x$ 在 $x_0$ 处的增量，若将 (1) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0-\Delta x)}{2\Delta x}$，(2) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0)-f(x_0-\Delta x)}{\Delta x}$ 分别作为函数 $y=f(x)$ 在 $x_0$ 处的导数定义，其是否与 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ 等价？

(1) 不等价，$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0-\Delta x)}{\Delta x}$ 是否存在跟 $x_0$ 处的函数值无关，即 $f(x)$ 在 $x_0$ 不连续，该极限也有可能存在。例如 $f(x)=\begin{cases}\cos\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处不连续，但有 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(0+\Delta x)-f(0-\Delta x)}{2\Delta x}$ $=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\cos\frac{1}{\Delta x}-\cos\frac{1}{\Delta x}}{2\Delta x}=0$，实际上，对于任何偶函数，该极限存在且为0.

(2) 导数定义中的自变量是双侧的

2. 符号 $f'_+(x_0)$ 和 $f'_+(x_0+0)$ 有何不同？

$f'_+(x_0)$ 表示 $f(x)$ 在点 $x_0$ 的右导数，即 $f'_+(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$，而 $f'_+(x_0+0)$ 表示导函数 $f'(x)$ 在点 $x_0$ 处的右极限，即 $f'_+(x_0+0)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f'(x)$，$f'_+(x_0+0)$ 隐含了 $f(x)$ 在点 $x_0$ 的一个右邻域 $(x_0, x_0+\delta)$ 内每一点可导

3. 若函数 $f(x)$ 在 $x_0$ 处可导，则是否存在 $x_0$ 的一个邻域，在此邻域内 $f(x)$ 也可导 (不一定)

考虑函数 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\in Q^c\\ 0, & x\in Q\end{cases}$ 在 $x=0$ 处可导 $\Rightarrow 0\le\left|\dfrac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}\right|\le\left|\dfrac{(\Delta x)^2}{\Delta x}\right|\to 0\ (\Delta x\to 0)$，因此 $f'(0)=0$

但该函数只在 $x=0$ 连续，其他各点均不连续，且只在 $x=0$ 可导，其他各点均不可导，因此在 $x=0$ 的邻域内不可导

4. 若函数 $f(x)$ 在点 $x_0$ 处可导，那么 $f(x)$ 在 $x_0$ 处必连续，则 $f(x)$ 在 $x_0$ 的充分小邻域内是否也连续？(不一定)

考虑函数 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\in Q\\ -x^2, & x\in Q^c\end{cases}$.

Δ 函数在某点可导，仅反映函数在该点的性质.

5. 设 $f(x)$ 在 $x_0$ 可导，则极限

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h}\xlongequal{x=x_0-h}\lim_{h\to 0}\frac{f(x+2h)-f(x)}{h}=2\lim_{h\to 0}\frac{f(x+2h)-f(x)}{2h}=2\lim_{h\to 0}f'(x)=2\lim_{h\to 0}f'(x_0-h)=2f'(x_0)$$

是否正确？

$\Rightarrow$ 倒数第三个等号错误：$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+2h)-f(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}f'(x)$，需要 $f(x)$ 在点 $x=x_0-h$ 可导才成立.

最后一个等号错误：$\lim\limits_{h\to 0}f'(x_0-h)=2f'(x_0)$，需要在 $f'(x)$ 在点 $x=x_0$ 处连续才成立.

$\Rightarrow$ 正确的做法：原式 $=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{[f(x_0+h)-f(x_0)]-[f(x_0-h)-f(x_0)]}{h}=2f'(x_0)$

6. 对数求导无需考虑因子可能为负值的情况，不影响导数的最终结果 (√)

7. 求分段函数的导数不可直接分段求导，函数在分段点的导数需用定义(充要条件)确定.

例如 $f(x)=\begin{cases}x^3, & x\le 0\\ x^2\sin\frac{1}{x}, & x>0\end{cases}$

8. 函数在$x=0$连续. 下列命题错误的是( ).

A. 若$\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}$存在. 则$f(0)=0$

B. 若$\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)+f(-x)}{x}$存在, 则$f(0)=0$.

C. 若$\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}$存在, 则$f'(0)$存在

D. 若$\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(-x)}{x}$存在. 则$f'(0)$存在.

$\Rightarrow$ A. C 显然正确.

B: 由$\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(-x)}{x}$存在. $f(x)$在$x=0$处连续得 $\lim\limits_{x\to0}[f(x)-f(-x)]=0=2f(0)$

D: 举反例.(偶函数)、例如 $f(x)=|x|+1$.

极限$\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(-x)}{x}$的存在与$f(x)$在$x=0$处的性质无关.

9. $f(0)=0$. $f(x)$在$x=0$可导的充分必要条件是( ).

A. $\lim\limits_{h\to0}\frac{1}{h^2}f(1-\cos h)$存在.

B. $\lim\limits_{h\to0}\frac{1}{h}f(1-e^h)$存在.

C. $\lim\limits_{h\to0}\frac{1}{h^2}f(1-\sin h)$存在.

D. $\lim\limits_{h\to0}\frac{1}{h}[f(2h)-f(h)]$存在

10. 试确定常数$a$的值. 使曲线$y=ax^2$和$y=\ln x$相切.

$\Rightarrow$ 设切点为$(x_0,y_0)$, 则可列方程: $\begin{cases}2ax_0=\frac{1}{x_0}\\ ax_0^2=\ln x_0\end{cases}$ 解得: $x_0=\sqrt{e}$ $\Rightarrow a=\frac{1}{2e}$

11. 设函数$y=f(x)$由方程$y-x=e^{x(1-y)}$所确定. 求$\lim\limits_{n\to\infty}n[f(\frac{1}{n})-1]$.

12. 设函数由方程$\sqrt{x^2+y^2}=2e^{\arctan\frac{y}{x}}$确定. 求$\frac{dy}{dx}$. $\frac{d^2y}{dx^2}$.

$\Rightarrow$ 对数求导法.

13. 已知曲线极坐标方程为$r=1-\cos\theta$. 求该曲线上对应于$\theta=\frac{\pi}{6}$的切线. 法线直角坐标方程.

$\Rightarrow$ 由曲线的极坐标方程$r=1-\cos\theta$可写出参数方程: $\begin{cases}x=(1-\cos\theta)\cos\theta\\ y=(1-\cos\theta)\sin\theta\end{cases}$

14. 设函数$f(x)$在$x=0$某邻域内有一阶连续导数. 且$f(0)\neq0$. $f'(0)\neq0$. 若$af(h)+bf(2h)-f(0)$在$h\to0$时是$h$的高阶无穷小. 求$a$. $b$值.

① $\Rightarrow \lim\limits_{h\to0}\frac{af(h)+bf(2h)-f(0)}{h}=0$ 则有 $\lim\limits_{h\to0}[af(h)+bf(2h)-f(0)]=(a+b-1)f(0)=0$

及 $\lim\limits_{h\to0}\frac{af'(h)+2bf'(2h)}{1}=(a+2b)f'(0)=0$

② $\Rightarrow f(h)=f(0)+f'(0)h+o(h)$. $f(2h)=f(0)+2f'(0)h+o(h)$. 则 $af(h)+bf(2h)-f(0)=$

$(a+b-1)f(0)+(a+2b)f'(0)h+o(h)$, 则 $a+b-1=0$. $a+2b=0$ 时. $af(h)+bf(2h)-f(0)=o(h)$.

③ $\lim\limits_{h\to0}\frac{af(h)+bf(2h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to0}\frac{a[f(h)-f(0)]}{h}+\frac{b[f(2h)-f(0)]}{h}+\frac{(a+b-1)f(0)}{h}=0$

15. 已知f(x)为周期为5的函数. 在x=0的某邻域内满足关系式 $f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)=8x+o(x)$.
其中o(x)是当x→0时比x高阶的无穷小. 且f(x)在x=1处可导, 求曲线 $y=f(x)$ 在 $(6, f(6))$ 的切线方程

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to0}[f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)] = f(1)-3f(1)=0 \Rightarrow f(1)=0.$

$$\lim_{x\to0}\frac{f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)}{\sin x} = \lim_{\sin x\to0}\frac{f(1+\sin x)-f(1)}{\sin x}+\frac{3f(1)-f(1-\sin x)}{\sin x} = 4f'(1)=8. \Rightarrow f'(1)=2$$

16. 若函数在(−a, a)内有定义. 且f(0)=0. f'(0)=1. 当|x|<a. |x+y|<a时. 有 $f(x+y)=\dfrac{f(x)+f(y)}{1-f(x)f(y)}$ 成立. 讨论f(x)的连续性并求f'(x).

$$\Rightarrow f'(x)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{\frac{f(x)+f(\Delta x)}{1-f(x)f(\Delta x)}-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(x)+f(\Delta x)-f(x)-f^2(x)f(\Delta x)}{\Delta x(1-f(x)f(\Delta x))}$$

$$=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(\Delta x)-f^2(x)f(\Delta x)}{\Delta x(1-f(x)f(\Delta x))}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(\Delta x)}{\Delta x}\left[\frac{1+f^2(x)}{1-f(x)f(\Delta x)}\right]=f'(0)[1+f^2(x)]=1+f^2(x)$$

17. 如果函数f(x)在x=x₀处导数f'(x₀)>0. 那么是否在x=x₀的某邻域内单调递增?

⇒ 错误. 应当在某区间内导数恒正. 才能得出单调递增.

若要构造反例. 如果考虑使$x_0$附近点的导数值全为负. 只在$x_0$为正. 则违背达布定理(导函数不存在第一类间断点).

反例: $f(x)=\frac{x}{2}+x^2\sin\frac{1}{x}$. $f'(0)=\frac{1}{2}$. $f'(x)=\frac{1}{2}+2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}$.

18. (导数极限定理)

① 考虑函数 $f(x)=\begin{cases}x^2\sin\frac{1}{x}, & x\neq0\\ 0, & x=0\end{cases}$ 得其导函数 $f'(x)=2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}$, 在x=0处极限不存在.

此时无法判断其x=0处导数是否存在, 运用定义求解得 $f'(0)=0$ 存在.

② 考虑函数 $f(x)=\begin{cases}2x+1, & x\le0\\ \cos x, & x>0\end{cases}$. 得其导函数分别为 $y=2$, $y=-\sin x$, 在x=0处极限分别为 2, 0.

则可知其在x=0处左右导数不相等. 在该点不可导. (其中导函数的极限与该点左右导数相等由导数的极限定理保证).

19. 设f(x)在点x=x₀可导. 且f(x₀)=0; g(x)在x=x₀的某个邻域中有定义. 且 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=a$.
则f(x)g(x)在点x=x₀处是否可导?

$$\Rightarrow \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)g(x)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}g(x)\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=af'(x_0).$$

则f(x)g(x)在点x=x₀可导.

20.

21. 设 $n\in Z_+$，$C$ 是非零常数，且 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^n}=C$，求 $|f(x)|$ 在 $x=x_0$ 是否可导？

由题述条件易知 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$ 且 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 可导。

① 当 $f(x_0)\neq 0$ 时，由极限保号性可知在 $x=x_0$ 的某邻域 $U(x_0,\delta)$ 中 $f(x)$ 与 $f(x_0)$ 同号，即总有 $f(x)=|f(x)|$ 或 $f(x)=-|f(x)|$，此时 $|f(x)|$ 在 $x=x_0$ 的可导性等同于 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 的可导性。

② 当 $f(x_0)=0$ 时，有 $\dfrac{|f(x)|-|f(x_0)|}{x-x_0}=\dfrac{|f(x)|}{x-x_0}=\dfrac{|x-x_0|}{x-x_0}\cdot\left|\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right|$，其中 $\dfrac{|x-x_0|}{x-x_0}$ 有界。

当 $n\geq 2$ 时，由 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^n}=C$ 可知 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=0$，则有：

$$|f(x)|'_{x=x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{|f(x)|-|f(x_0)|}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{|x-x_0|}{x-x_0}\cdot\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right|=0$$ 即 $|f(x)|$ 在 $x=x_0$ 可导。

当 $n=1$ 时，由 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=C$ 有：

$$\lim_{x\to x_0^+}\frac{|f(x)|-|f(x_0)|}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0^+}\frac{|x-x_0|}{x-x_0}\cdot\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right|=|C|$$

$$\lim_{x\to x_0^-}\frac{|f(x)|-|f(x_0)|}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0^-}\frac{|x-x_0|}{x-x_0}\cdot\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right|=-|C|$$

因此 $|f(x)|$ 在 $x=x_0$ 不可导

综上所述：当 $f(x_0)\neq 0$ 或 $f(x_0)=0$ 且 $n\geq 2$ 时可导，当 $f(x_0)=0$ 且 $n=1$ 时不可导。

22. 已知 $y=f\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$，其中 $f(x)$ 可导，且 $f'(-1)=-\dfrac{\pi}{4}$，求 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0}$

已知 $y=f\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$，其中 $f(x)$ 可导，$f'(x)=\arctan x$，求 $\dfrac{dy}{dx}$ 和 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0}$

$y=f(\varphi(x))$，$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{d\varphi}\cdot\dfrac{d\varphi}{dx}$

23. 设 $f(x)=x(x-1)(x-2)\cdots(x-100)$，求 $f'(x)$ 和 $f'(0)$。对数求导

$f'(x)=x(x-1)(x-2)\cdots(x-100)\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x-1}+\cdots+\dfrac{1}{x-100}\right)$，$f'(0)=100!$

$f(x)=x(x+1)(x-2)\cdots(x+100)$，求 $f'(0)$。

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=100!$（定义求导！）

24. 设 $f(x)=\sqrt{\sin x+\sqrt{\sin x+\cdots}}$，$(0<x\leq\frac{\pi}{2})$，求 $f'(x)$。

$\Rightarrow$ 严格上说，应先说明 $f(x)$ 定义的合理性且 $f(x)$ 是可导的

设 $0<x_0\leq\frac{\pi}{2}$，记 $a=\sin x_0$，$a_1=\sqrt{a}$，$a_{n+1}=\sqrt{a+a_n}$，$(0<a\leq 1)$，则有：

$$a_2-a_1=\sqrt{a+\sqrt{a}}-\sqrt{a}>0$$

且当 $a_n>a_{n-1}$ 时，有 $a_{n+1}-a_n=\sqrt{a+a_n}-\sqrt{a+a_{n-1}}=\dfrac{a_n-a_{n-1}}{\sqrt{a+a_n}+\sqrt{a+a_{n-1}}}>0$，则 $a_n$ 单调递增。

另外，有 $a_1<2$，且当 $a_{n-1}<2$ 时，有 $a_n<\sqrt{a+2}<2$，则 $a_n<2$，有上界

这表明 $f(x_0)=\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 是有定义的，由于 $f(x)=\sqrt{\sin x+f(x)}$，因此 $f(x)=\dfrac{1+\sqrt{1+4\sin x}}{2}$ 可导。

$\Rightarrow f'(x)=\dfrac{\cos x}{\sqrt{1+4\sin x}}$，另外，若假设 $f(x)$ 可导的情况下，可直接从 $f(x)=\sqrt{\sin x+f(x)}$ 求导：

$$f'(x)=\frac{\cos x}{2f(x)-1}$$

[题型:变换方程]

25. 令 $y=\tan z$. 试变换方程 $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{2(1+y)}{1+y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$.

[题型:推导高阶导数的递推公式].

26. 设 $y=\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$. 求 $y^{(n)}(0)$.

由题有: $\sqrt{1-x^2}\,y=\arcsin x \Rightarrow -\frac{xy}{\sqrt{1-x^2}}+\sqrt{1-x^2}\,y'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow (1-x^2)y'=1+xy$.

两边求n阶导: $(1-x^2)y^{(n+1)}-2nxy^{(n)}-n(n-1)y^{(n-1)}=xy^{(n)}+ny^{(n-1)}$

即: $(1-x^2)y^{(n+1)}-(2n+1)xy^{(n)}-n^2y^{(n-1)}=0$. ⇒ 递推公式

代入 $x=0$ 得: $y^{(n+1)}(0)=n^2y^{(n-1)} \Rightarrow y^{(n)}(0)=(n-1)^2y^{(n-2)}$.

又有 $y(0)=0$. $y'(0)=1$. $y''(0)=0$. 则:

$$y^{(n)}(0)=\begin{cases}0, & n=2k\\ [(2k-2)!!]^2, & n=2k-1.\end{cases}$$

27. 证明 $\frac{d^n}{dx^n}\left(x^{n-1}e^{\frac{1}{x}}\right)=(-1)^n\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^{n+1}}$. [数学归纳法]

[题型:利用幂级数展开求高阶导数]

28. 设 $y=\begin{cases}\frac{\sin x}{x}, & x\neq 0\\ 1, & x=0.\end{cases}$ 求 $y^{(n)}(0)$.

⇒ 当 $x\neq0$ 时. $y=\frac{\sin x}{x}=\frac{\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}}{x}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-2}}{(2n-1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n}$.

当 $x=0$ 时. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n}\Big|_{x=0}=1$

因此对任意 $x\in(-\infty,+\infty)$ 都有 $y=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n}$. 另由泰勒级数: $y=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{y^{(n)}(0)}{n!}x^n$.

比较系数可得: $y^{(n)}(0)=\begin{cases}0, & n=2k-1\\ \frac{(-1)^k}{2k+1}, & n=2k.\end{cases}$

29. 设 $f(x)=(x^2-1)^n$. 计算 $f^{(k)}(1)$.

由于 $x^2-1=(x-1)^2+2(x-1)$. 因此 $f(x)=\sum_{k=0}^{n}C_n^k[(x-1)^2]^k[2(x-1)]^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}2^{n-k}C_n^k(x-1)^{n+k}$

另外有: $f(x)=\sum_{i=0}^{2n}\frac{f^{(i)}(1)}{i!}(x-1)^i$, 则当 $n\le k\le 2n$ 时. $f^{(k)}(1)=k!\cdot 2^{2n-k}C_n^{k-n}$. 其余情况时 $f^{(k)}(1)=0$.

[新题型]

30. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义. 在区间 $[0,2]$ 上, $f(x)=x(x^2-4)$. 若对任意 $x$ 都满足 $f(x)=kf(x+2)$. 其中 $k$ 为常数.

(1) 写出 $f(x)$ 在 $[-2,0]$ 上的表达式.

(2) 问 $k$ 为何值时 $f(x)$ 在 $x=0$ 可导?

[没见过]

31. 函数 $f(x)=(x^2-x-2)|x^2-x|$ 的不可导点的个数为 ___2___.

32. 设 $f(x)$ 可导. $F(x)=f(x)(1+|\sin x|)$. 则 $f(0)=0$ 是 $F(x)$ 在 $x=0$ 处可导的什么条件?

$\Rightarrow F'_-(0)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{F(x)-F(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{f(x)(1-\sin x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}-\lim\limits_{x\to0^-}f(x)\cdot\dfrac{\sin x}{x}$

$F'_+(0)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{F(x)-F(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)(1+\sin x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}+\lim\limits_{x\to0^+}f(x)\cdot\dfrac{\sin x}{x}$

若使 $F(x)$ 在 $x=0$ 处可导. 则 $F'_-(0)=F'_+(0)$. 则 $f(0)=0$. 因此为充分必要条件.

[和32同一题型]

33. 设函数 $f(x)=|x^2-1|\varphi(x)$, 其中 $\varphi(x)$ 在 $x=1$ 处连续, 则 $\varphi(1)=0$ 是 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导的什么条件?

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=2\varphi(1)$. $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=-2\varphi(1)$

34. 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续. 且 $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(h^2)}{h^2}=1$. 则 ______.

A. $f(0)=0$ 且 $f'_-(0)$ 存在　　B. $f(0)=1$. 且 $f'_-(0)$ 存在

C. $f(0)=0$ 且 $f'_+(0)$ 存在　　D. $f(0)=1$ 且 $f'_+(0)$ 存在.

$\Rightarrow \lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(h^2)}{h^2}$ 等价于 $\lim\limits_{h\to0^+}\dfrac{f(h)}{h}$ $(h^2>0)$.

35. 当 $h\to0$ 时. $f(x_0-3h)-f(x_0)+2h$ 是 $h$ 的高阶无穷小量. 则 $f'(x_0)=$ ______.

36. 设 $f'(0)=2$. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(3\sin x)-f(2\arctan x)}{x}=$ ______ $3f'(0)-2f'(0)=2$.

[新题型].

37. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义, 对任意 $x,y\in(-\infty,+\infty)$ 有 $f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy$. 且 $f'(0)$ 存在. 求 $f(x)$.

$\Rightarrow$ 由 $f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy$ 得 $f(0)=0$.

则 $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\dfrac{f(x)+f(\Delta x)+2x\Delta x-f(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{f(\Delta x)}{\Delta x}+2x$

$=f'(0)+2x$

所以 $f(x)=f'(0)x+x^2+C$. 再由 $f(0)=0$ 得 $C=0\Rightarrow f(x)=f'(0)x+x^2$

[看题目]

38. 设 $f(x+1)=af(x)$ 总成立. 且 $f'(0)=b$. 则 $f(x)$ 在 $x=1$ 处 ______.

A. 不可导.　　B. 可导且 $f'(1)=a$.　　C. 可导且 $f'(1)=b$.　　D. 可导且 $f'(1)=ab$.

[看题目]

38. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 有定义. 在此定义域上恒有 $f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$. 且 $f(x)=1+xg(x)$. 其中 $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=1$. 证明函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 可导.

39. 设 $y=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$, 求 $y^{(n)}$.

$\Rightarrow (x^2-1)y=x^2+1$, $\Rightarrow C_n^0(x^2-1)^{(0)}y^{(n)}+C_n^1(x^2-1)^{(1)}y^{(n-1)}+C_n^2(x^2-1)^{(2)}y^{(n-2)}=C_n^0(x^2+1)+C_n^1(2x)+C_n^2\cdot 2$

$(x^2-1)y^{(n)}+2nxy^{(n-1)}+n(n-1)y^{(n-2)}=x^2+1+2nx+n(n-1)$ $\Rightarrow$ 无法解出!

$\Rightarrow y=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}=1+\dfrac{2}{x^2-1}=1+\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}$, $\Rightarrow y^{(n)}=(-1)^n\dfrac{n!}{(x-1)^n}+(-1)^{n+1}\dfrac{n!}{(x+1)^n}=(-1)^n n!\left[\dfrac{1}{(x-1)^n}-\dfrac{1}{(x+1)^n}\right]$

[新题型]

40. 设函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$. 且在 $x=0$ 处可导. 又 $f(x+h)=f(x)g(h)+f(h)g(x)$. 试证 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导

$\Rightarrow$ 由 $f(x+h)=f(x)g(h)+f(h)g(x)$ 可得: $f(x)=f(x)g(0)+f(0)g(x)$ 即 $g(0)=1$. $f(0)=0$

因此. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x)g(\Delta x)+f(\Delta x)g(x)-f(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}f(x)\dfrac{g(\Delta x)-1}{\Delta x}+g(x)\dfrac{f(\Delta x)}{\Delta x}$

$=f(x)\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{g(\Delta x)-g(0)}{\Delta x}+g(x)\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=f(x)g'(0)+g(x)f'(0)$. $\Rightarrow$ 导数存在.

41. 用导数定义求极限.

(1) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^a-a^a}{x-a}$ (2) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{a^x-x^a}{x-a}$ (3) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\tan x-\tan a}{x^a-a^a}$.

42. 已知 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内可导. $f(x)>0$. $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$. 且满足 $\lim\limits_{h\to 0}\left[\dfrac{f(x+hx)}{f(x)}\right]^{\frac{1}{h}}=e^{\frac{1}{x}}$, 求 $f(x)$.

$\Rightarrow \lim\limits_{h\to 0}\left[\dfrac{f(x+hx)}{f(x)}\right]^{\frac{1}{h}}=e^{\frac{1}{x}}$ 取对数有 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h}\ln\dfrac{f(x+hx)}{f(x)}=\dfrac{1}{x}$ $\Rightarrow \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\ln f(x+hx)-\ln f(x)}{h}=[x\ln f(x)]'=\dfrac{1}{x}$

可解 $f(x)=Ce^{-\frac{1}{x}}=e^{-\frac{1}{x}}$.

43. 设 $f(x)$ 可导. $F(x)=f(x)(1+|\sin x|)$ 若使 $F(x)$ 在 $x=0$ 处可导. 则必有: ______. [32]

A. $F(0)=0$. B. $F'(0)=0$. C. $F(0)+F'(0)=0$. D. $F(0)-F'(0)=0$

44. 设函数在区间 $(-\delta,\delta)$ 有定义, 若当 $x\in(-\delta,\delta)$ 时. 恒有 $|f(x)|\le x^2$. 则 $x=0$ 是 $f(x)$ 的?

A. 间断点. B. 连续不可导点. C. 可导点且 $f'(0)=0$. D. 可导点且 $f'(0)\ne 0$

由 $0\le\lim\limits_{x\to 0^+}|f(x)|\le\lim\limits_{x\to 0^+}x^2=0$ 得 $\lim\limits_{x\to 0^+}|f(x)|=0$, 即 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=0$. 同理有 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=0$

由 $\lim\limits_{x\to 0^+}(-x)\le\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{x}\le\lim\limits_{x\to 0^+}x$. 得 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)}{x}=0$ $\Rightarrow f'(0)=0$.

45. 设函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 点可导，则 $|f(x)|$ 在 $x=a$ 点不可导的充分条件为：

A. $f(a)=0$ 且 $f'(a)=0$　　B. $f(a)=0$ 且 $f'(a)>0$　　C. $f(a)>0$ 且 $f'(a)>0$　　D. $f(a)<0$ 且 $f'(a)<0$

46. 设函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+|x|^{3n}}$，则 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内不可导点的个数为____.

$\Rightarrow f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+(|x|^3)^n}$，当 $x>0$ 时：由 $|x|=x$ 知 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+(x^3)^n}=\begin{cases}1, & 0<x\le 1\\ x^3, & x>1\end{cases}$

当 $x<0$ 时：由 $|x|=-x$ 知 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+(-x^3)^n}=\begin{cases}1, & -1\le x<0\\ -x^3, & x<-1\end{cases}$，另有 $f(0)=1$.

综上有：$f(x)=\begin{cases}-x^3, & x<-1\\ 1, & -1\le x\le 1\\ x^3, & x>1\end{cases}$，考虑分段点：

$\lim\limits_{x\to-1^-}\dfrac{f(x)-1}{x+1}=\lim\limits_{x\to-1^-}\dfrac{-x^3-1}{x+1}=-3$；$\lim\limits_{x\to-1^+}\dfrac{f(x)-1}{x+1}=\lim\limits_{x\to-1^+}\dfrac{1-1}{x+1}=-\infty$

$\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{f(x)-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{1-1}{x-1}=0$. $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{f(x)-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x^3-1}{x-1}=3$

$\Rightarrow$ 因此在 $x=\pm1$ 不可导.

(或者：$|x|<1$ 有 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+|x|^{3n}}=1$. $|x|=1\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+|x|^{3n}}=1$　$|x|>1\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+|x|^{3n}}=|x|^3$).

47. 设 $f(x)$ 具有连续一阶导数，且 $f''(0)$ 存在，$f(0)=0$. 试证明函数

$F(x)=\begin{cases}f'(0), & x=0\\ \dfrac{f(x)}{x}, & x\ne0\end{cases}$　是连续的且具有连续一阶导数.

48. (2014 期中). 已知 $y=(x^2+x)e^x$. 求 $y^{(k)}(0)$. 再求 $\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^k k^2 2^{n-k}$. $n\in Z^+$.

49. (2014 期中). 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内二阶可导，且 $f(0)=f(1)=0$，$f''(x)<0$，$x\in(0,1)$. 若 $M=\max\limits_{0\le x\le1}f(x)>0$. 求证：对于任意 $n\in Z^+$.

(1) 存在唯一 $x_n\in(0,1)$. 使 $f'(x_n)=\dfrac{M}{n}$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，且 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=M$.

50. 设函数 $f(x)=\begin{cases}x^{2x}, & x>0\\ x+1, & x\le0\end{cases}$，求 $f'(x)$. $f(x)$ 的极值.

50.（2014·期中）设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $U(x_0,\delta)$ 内可导，且 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=1$，则（　）

① 当 $g(x)$ 在 $\mathring{U}(x_0,\delta)$ 非零时，$f(x_0)=g(x_0)\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=1$.

② 当 $x_0=0$ 且 $g(x)=\begin{cases}x^2\sin\frac{1}{x}+2x, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$ 时，$f'(0)=2$.

A. 仅①正确　　B. 仅②正确　　C. ①②均正确　　D. ①②均错误

1. 设函数 $f(u)$ 可导，$y=f(x^2)$，当自变量 $x=-1$ 处取得增量 $\Delta x=-0.1$ 时，相应的函数增量 $\Delta y$ 的线性主部为 $0.1$，则 $f'(1)=$______.

A. $-1$　　B. $0.1$　　C. $1$　　D. $0.5$

$\Rightarrow$ 由 $y=f(x^2)$ 得 $dy=2xf'(x^2)dx$，线性主部为 $2xf'(x)dx$，则 $dx=-0.1$，$x=-1$ 时

有 $-2f'(1)\times(-0.1)=0.1 \Rightarrow f'(1)=\frac{1}{2}$.

2. 若 $f(x)$ 为可导的奇函数，且 $f'(x_0)=3$，则 $f'(-x_0)=$______.

3. 设函数 $f(y)$ 的反函数 $f^{-1}(x)$ 以及 $f'[f^{-1}(x)]$，$f''[f^{-1}(x)]$ 都存在，且 $f'[f^{-1}(x)]\neq 0$，

证明 $\dfrac{d^2f^{-1}(x)}{dx^2}=\dfrac{-f''[f^{-1}(x)]}{[f'[f^{-1}(x)]]^3}$

$\Rightarrow$ 令 $x=f(y)$，$y=f^{-1}(x)$，则 $1=f'(y)\dfrac{dy}{dx} \Rightarrow \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{f'(y)}$

两边对 $x$ 求导得：$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{f'(y)}\right)=\dfrac{-f''(y)}{[f'(y)]^2}\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{f''(y)}{[f'(y)]^3}=\dfrac{-f''[f^{-1}(x)]}{[f'(f^{-1}(x))]^3}$

1. 设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，在 $(a,b)$ 有二阶导数，且 $g''(\xi)\neq 0$，$f(a)=f(b)=g(a)=g(b)=0$，证明：
(1) 在 $(a,b)$ 上，$g(x)\neq 0$。
(2) 存在 $\xi\in(a,b)$，使 $\frac{f(\xi)}{g(\xi)}=\frac{f''(\xi)}{g''(\xi)}$。
$\Rightarrow$ (1) 使用反证法比较正式。 (2) 变换目标等式：$f(x)g''(x)-f''(x)g(x)=0$，发现缺少一阶导数项，补充 $f'(x)g'(x)$，
$\Rightarrow [f(x)g''(x)+f'(x)g'(x)]-[f'(x)g'(x)+f''(x)g(x)]=0$。

2. 已知 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续，$(0,1)$ 可导，且 $f(0)=0$，$f(1)=1$，证明：
(1) 存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f(\xi)=1-\xi$。 (2) 存在两个不同的点，使得 $f'(\eta)f'(\xi)=1$。

3. 设奇函数 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 有二阶导数，且 $f(1)=1$，证明：
(1) 存在 $\xi\in(0,1)$ 使得 $f'(\xi)=1$。 (2) 存在 $\eta\in(-1,1)$，使得 $f''(\eta)+f'(\eta)=1$

4. 设函数 $f(x)$，$g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 连续，在 $(a,b)$ 二阶可导，且存在相等的最大值，又 $f(a)=g(a)$，$f(b)=g(b)$，证明：存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f''(\xi)=g''(\xi)$
$\Rightarrow F(x)=f(x)-g(x)$。

5. 设 $y=f(x)$ 在 $(-1,1)$ 有二阶连续导数，且 $f''(x)\neq 0$，证明：
(1) 对于 $(-1,1)$ 内任一 $x\neq 0$，存在唯一的 $\theta(x)\in(0,1)$，使 $f(x)=f(0)+xf'(\theta(x)x)$ 成立。
(2) $\lim\limits_{x\to 0}\theta(x)=\frac{1}{2}$
$\Rightarrow$ (1) 由拉格朗日定理知：$f(x)=f(0)+f'(\theta(x)x)x$，其中 $\theta(x)\in(0,1)$
现证明唯一性：若存在 $\theta_1(x)$，$\theta_2(x)$ 使得 $f(x)=f(0)+xf'(\theta_1(x)x)$，$f(x)=f(0)+xf'(\theta_2(x)x)$
则有 $f'(\theta_1(x)x)=f'(\theta_2(x)x)$，由罗尔定理有 $\exists\eta$，使 $f''(\eta)=0$ 与 $f''(x)\neq 0$ 矛盾。
(2) $f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(\theta(x)x)}{2}x^2 \Rightarrow f'(\theta(x)x)=f'(0)+\frac{f''(\theta(x)x)}{2}x$
又对 $f'(\theta(x)x)$ 有：$f'(\theta(x)x)=f'(0)+\theta(x)xf''(\theta'(x)x)$，对比两式得：$\theta(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{f''(\theta(x)x)}{f''(\theta'(x)x)}$
$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\theta(x)=\frac{1}{2}$。
(证法二) $f''(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f'(\theta(x)x)-f'(0)}{\theta(x)x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)-f'(0)x}{\theta(x)x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\theta(x)}\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)-f'(0)x}{x^2}$
$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\theta(x)}\lim\limits_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{2x}=\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\theta(x)}\lim\limits_{x\to 0}f''(0)\Rightarrow\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\theta(x)}=2$。

6. 设 $x\geq 0$，证明：(1) $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\frac{1}{2\sqrt{x+\theta(x)}}$，其中 $\frac{1}{4}\leq\theta(x)\leq\frac{1}{2}$。 (2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\theta(x)=\frac{1}{2}$，$\lim\limits_{x\to 0}\theta(x)=\frac{1}{4}$
$\Rightarrow$ 任给 $x\geq 0$，由拉格朗日中值定理得：$\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\frac{1}{2\sqrt{x+\theta(x)}}$，其中 $0<\theta(x)<1$。
上式经整理后得：$\theta(x)=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}(\sqrt{x(x+1)}-x)$ 显然 $\theta(x)\geq\frac{1}{4}$
又由 $\frac{1}{4}+\frac{1}{2}(\sqrt{x(x+1)}-x)=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}[\sqrt{x(x+1)}-(x+\frac{1}{2})+\frac{1}{2}]=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cdot[\frac{-\frac{1}{4}}{\sqrt{x(x+1)}+x+\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}]$，易知 $\theta(x)\leq\frac{1}{2}$
$\lim\limits_{x\to 0}\theta(x)=\lim\limits_{x\to 0}[\frac{1}{4}+\frac{1}{2}(\sqrt{x(x+1)}-x)]=\frac{1}{4}$
$\lim\limits_{x\to+\infty}\theta(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}[\frac{1}{4}+\frac{1}{2}(\sqrt{x(x+1)}-x)]=\lim\limits_{x\to\infty}[\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{\sqrt{x(x+1)}+x}]=\lim\limits_{x\to\infty}[\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1}]=\frac{1}{2}$

Δ 皮亚诺余项 $= n$

拉格朗日余项 $= n+1$

7. 设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 可导，且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$ 存在，证明：$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x^2}=0$

⇒ 由于 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$ 存在，则 $\exists A>0\ (A>a)$ 使 $f'(x)$ 在 $[A,+\infty)$ 上有界，即 $\exists M>0$，当 $x\geq A$ 时 $|f'(x)|\leq M$.

对任意 $x>A$ 由拉格朗日：$f(x)=f(A)+f'(\xi)(x-A)$，$\xi\in(x,A)$

则 $0\leq\left|\dfrac{f(x)}{x^2}\right|\leq\left|\dfrac{f(A)}{x^2}\right|+\left|\dfrac{f'(\xi)}{x^2}\right|\left|1-\dfrac{A}{x}\right|\leq\dfrac{f(A)}{x^2}+\dfrac{M}{x}$，由夹逼知 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x^2}=0$.

8. 设 $f(x)$ 在点 $x_0$ 的某邻域连续，除 $x_0$ 外可导，且 $\lim\limits_{x\to x_0} f'(x)=A$，证明：$f(x)$ 在点 $x_0$ 可导且 $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$.

对任意 $x\in\mathring{U}(x_0)$，由拉格朗日，$\exists\xi\in(x_0,x)$ 使 $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{\xi\to x_0}f'(\xi)=A$.

9. 试确定常数 $A,B,C$ 的值，使得 $e^x(1+Bx+Cx^2)=1+Ax+o(x^3)$，其中 $o(x^3)$ 是当 $x\to0$ 时的高阶无穷小.

⇒ $e^x=1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+o(x^3)$，代入得：$1+(1+B)x+(\frac{1}{2}+B+C)x^2+(\frac{1}{6}+\frac{B}{2}+C)x^3+o(x^3)=1+Ax+o($

10. 设 $f(x)$ 在点 $x_0=0$ 的某邻域有二阶导数，且 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-x}{x^2}=2$. 求 $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$

⇒ $f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2}f''(0)x^2+o(x^2)$. 由 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-x}{x^2}=2$ 得：$\dfrac{f(x)-x}{x^2}=2+o(x)$

则 $f(x)-x=2x^2+o(x)x^2=2x^2+o(x^3)$. ⇒ $f(x)=x+2x^2+o(x^3)$

对比可得 $f(0)=0$. $f'(0)=1$. $f''(0)=4$.

⇒ 也可直接由极限求：$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-x}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f'(x)-1}{2x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f''(x)}{2}=2$ ⇒ $\lim\limits_{x\to0}[f(x)-x]=0$ 等等

11. 设 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=1$ 且 $f''(x)>0$. 证明：$f(x)\geq x$.

⇒ $f(0)=0$. $f'(0)=1$. 则 $f(x)=x+\frac{1}{2}f''(\xi)x^2\geq x$，也可以 $F(x)=f(x)-x$.

12. 已知 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 可导，$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+c}{x-c}\right)^x=\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-f(x-1)]$，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=e$.
求常数 $C$.

Δ要证结论中不含未知函数的导数，用介值定理、零值定理等. 含未知函数的导数，用罗尔、拉格朗日

[题型：罗尔定理]

13. 设 $a_0,a_1,\cdots,a_n$ 满足 $a_0+\dfrac{a_1}{2}+\dfrac{a_2}{3}+\cdots+\dfrac{a_n}{n+1}=0$ 的实数. 证明 $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$ 在 $(0,1)$ 内至少有一个零点.

√

14. 设 $y=f(x)$ 具有二阶导数，且 $f'(x)>0$. $f''(x)>0$. $\Delta x$ 为自变量 $x$ 在点 $x_0$ 处的增量，$\Delta y$ 与 $dy$ 分别为 $f(x)$ 在点 $x_0$ 处相应的增量与微分，$\Delta x>0$，则______.

A. $0<dy<\Delta y$　　B. $0<\Delta y<dy$　　C. $\Delta y<dy<0$　　D. $dy<\Delta y<0$

⇒ $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=\Delta y=f'(x_0)\Delta x+o(\Delta x)$. $dy=f'(x_0)dx$，$\Delta y>dy$.

或者 $\Delta y=f'(\xi)\Delta x$，其中 $0<\xi<x_0$，则 $f'(\xi)<f'(x_0)$

有点像数理方法，怎么用"有界"这一条件？

15. 设函数 $y=f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内有界且可导，则______. <结论>

A. 当 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$ 时，必有 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$.　B. 当 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)$ 存在时，必有 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$

C. 当 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=0$ 时，必有 $\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)=0$.　D. 当 $\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)$ 存在时，必有 $\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)=0$

⇒ 对 $y=f(x)$ 在 $(a,x)$ 上用拉格朗日：$\exists\xi\in(a,x)$，使得 $f'(\xi)=\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$

由于 $f(x)$ 有界，则 $f(x)-f(a)$ 有界，则 $\lim\limits_{\xi\to+\infty}f'(\xi)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x-a}\cdot[f(x)-f(a)]=0$.

A和C不保证 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)$、$\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)$ 极限存在.

16. 设 $f(x)$ 处处可导，则 D.

A. 当 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$，必有 $\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)=-\infty$.　B. 当 $\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)=-\infty$，必有 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$.

C. 当 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$，必有 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=+\infty$.　D. 当 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=+\infty$，必有 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

由 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=+\infty$ 知，$\forall M>0$，$\exists X$，当 $x>X$ 时，$f'(x)>M$. 在 $[X,x]$ 上用拉格朗日：

$f(x)-f(X)=f'(\xi)(x-X)$，其中 $\xi\in(x,X)$. 则 $f(x)-f(X)=f'(\xi)(x-X)>M(x-X)\to+\infty\Rightarrow f(x)\to+\infty$.

或者由 $f'(\xi)=\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$，无穷大和无穷小比较来判断.

17. 正确的是______.

A. 若 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内连续，则 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界　B. 若 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内连续，则 $f'(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界

C. 若 $f'(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界，则 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界　D. 若 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界，则 $f'(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界

⇒ 举反例：(A、B不用举也能判断错误). $f(x)=\frac{1}{x}$，排除A、B

又 $f(x)=\sqrt{x}$ 在 $(0,1)$ 内有界，但 $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ 在 $(0,1)$ 内无界，D错误 ⇒ 也可用 $f'(x)=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}$ 证.

18. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有定义，在 $(a,b)$ 内可导，则______.

A. 当 $f(a)f(b)<0$ 时，存在 $\xi\in(a,b)$，使 $f(\xi)=0$.　B. 对任何 $\xi\in(a,b)$，有 $\lim\limits_{\xi\to x}[f(x)-f(\xi)]=0$

C. 当 $f(a)=f(b)$ 时，存在 $\xi\in(a,b)$，使 $f'(\xi)=0$.　D. 存在 $\xi\in(a,b)$，使 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$

19. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足罗尔定理的条件，且 $f(x)$ 不恒等于常数. 证明：在 $(a,b)$ 内至少存在一点 $\xi$，使 $f'(\xi)>0$.

⇒ 由 $f(x)$ 不恒为常数，则 $\exists x_0$，使得 $f(x_0)\neq f(a)=f(b)$. 不妨设 $f(x_0)>f(a)=f(b)$

则在 $(a,x_0)$ 上由拉格朗日得：$\exists\xi\in(a,x_0)$ 使 $f'(\xi)=\dfrac{f(x_0)-f(a)}{x_0-a}>0$. 若 $f(x_0)<f(a)=f(b)$，亦可证.

[题型]

20. 证明不等式：$\dfrac{a-b}{a}<\ln\dfrac{a}{b}<\dfrac{a-b}{b}$，$a>b>0$.

21. 证明不等式：$\dfrac{2a}{a^2+b^2}<\dfrac{\ln b-\ln a}{b-a}<\dfrac{1}{\sqrt{ab}}$ ?

22.(求极限)设 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-(ax+bx^2)}{x^2}=2$，则 $a$、$b$ 各为多少？

$\Rightarrow \ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)$. $\Rightarrow \ln(1+x)-(ax+bx^2)=(1-a)x-(\frac{1}{2}+b)x^2+o(x^2)$.

则有 $1-a=0$，且 $-(\frac{1}{2}+b)=2 \Rightarrow a=1$. $b=-\frac{5}{2}$.

23.(求极限) (1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$. (2) $\lim\limits_{x\to+\infty}[\frac{e}{2}x+x^2[(1+\frac{1}{x})^x-e]]$

$\Rightarrow$ (1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4+o(x^4))-(1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{8}x^4+o(x^4))}{x^4}=-\frac{1}{12}$ (减)加)不行)

(2) $\Rightarrow$ 由 $(1+\frac{1}{x})^x=e^{x\ln(1+\frac{1}{x})}=e^{x[\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{3x^3}+o(\frac{1}{x^3})]}=e^{1-\frac{1}{2x}+\frac{1}{3x^2}+o(\frac{1}{x^2})}$

$=e\cdot e^{-\frac{1}{2x}}\cdot e^{\frac{1}{3x^2}}=e\cdot(1-\frac{1}{2x}+\frac{1}{8x^2}+o(\frac{1}{x^2}))(1+\frac{1}{3x^2}+o(\frac{1}{x^2}))$

$=e(1-\frac{1}{2x}+\frac{11}{24x^2}-\frac{1}{6x^3}+\frac{1}{24x^4}+o(\frac{1}{x^2}))$

则 $\lim\limits_{x\to 0}[\frac{e}{2}x+x^2((1+\frac{1}{x})^x-e)]=\lim\limits_{x\to 0}[\frac{e}{2}x+ex^2(-\frac{1}{2x}+\frac{11}{24x^2}-\frac{1}{6x^3}+\frac{1}{24x^4}+o(\frac{1}{x^2}))]$

$=\lim\limits_{x\to 0}(\frac{e}{2}x-\frac{e}{2}x+\frac{11e}{24}-\frac{e}{6x}+\frac{e}{24x^2}+o(1))=\lim\limits_{x\to 0}(\frac{e}{2}x-\frac{1}{2}x+\frac{11}{24}+o(1))=\frac{11}{24}e$

[证明不等式]

24.证明若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上存在二阶导数，且 $f'(a)=f'(b)=0$，则存在 $\xi\in(a,b)$，使 $|f''(\xi)|\geq\frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|$.

[题型：由微分中值定理证明不等式]

25.证明不等式：

(1) 当 $x>0$ 时，$\frac{x}{x+1}<\ln(1+x)<x$

(2) 当 $x>0$ 时，$1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2})>\sqrt{1+x^2}$.

(3) 当 $x>0$ 时，$\ln(1+x)\geq\frac{\arctan x}{1+x}$

(4) 当 $0<x<1$ 时，$xe^{-x}>\frac{1}{x}e^{-\frac{1}{x}}$.

(5) 设 $p>1$，则 $x^p+(1-x)^p\geq\frac{1}{2^{p-1}}$ 在 $[0,1]$ 上成立.

(6) 设 $a,b>0$，$p,q>1$ 且 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，则 $ab\leq\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}$.

$\Rightarrow$ 考察函数 $f(x)=-\ln x\ (x>0)$，因为 $f''(x)=\frac{1}{x^2}>0$，则 $f(x)$ 在 $x>0$ 时为凹函数

则 $-\ln(\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q})\leq-\frac{1}{p}\ln a^p-\frac{1}{q}\ln b^q=-\ln(ab)$ 即 $\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}\geq ab$.

26. $f(x)$ 在 $x=x_0$ 点存在二阶导数，证明：$\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)+f(x_0-h)-2f(x_0)}{2h}=f'(x_0)$.

27. 设 $f(x)$ 具有二阶连续导数，且 $f(a)=0$，又 $g(x)=\begin{cases}\frac{f(x)}{x-a}, & x\neq a\\ f'(a), & x=a.\end{cases}$ (1) 求 $g'(x)$. (2) 证明 $g'(x)$ 连续.

28.（2019 期中）已知定义在 $R$ 上可导的函数 $f(x)$ 满足：对于 $\forall x_0\in R$，存在一次函数 $g(x)$，使得 $g(x_0)=f(x_0)$，且当 $x\neq x_0$ 时，$f(x)>g(x)$.

(1) 证明：$f(x)>f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$.

(2) 若 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上有界，证明：$\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$. $\Rightarrow$ (15题结论)

$\Rightarrow$ (1) 设 $g(x)=k(x-x_0)+b$，则由 $f(x_0)=g(x_0)$，得 $b=f(x_0)$.

当 $x>x_0$ 时，$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}>k$，取极限 $x\to x_0$ 得 $f'(x_0)\geq k$，又 $x<x_0$ 时有 $f'(x_0)\leq k$

则 $k=f'(x_0)$，即 $g(x)=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$，证毕.

(2) 由(1)得：对任意 $x_0\in[0,+\infty)$，$x_0>x$，都有：$f'(x_0)<\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$，当 $x\to+\infty$ 时 $f'(x)\leq 0$

而对任意 $x_0\in[0,+\infty)$，$x_0>x$ 有 $0\geq f'(x_0)>\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 取 $x\to+\infty$，则 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x_0)=0$

29.（2018 期中）已知函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，且 $\forall x\in[a,b]$，$|f'(x)|\leq k|f(x)|$，其中 $k>0$，证明：$\forall x\in[a,b]$ $f(x)=0$ 或者 $\forall x\in[a,b]$，$f(x)\neq 0$.

易证 $g(x)=|f(x)|$ 在 $[a,b]$ 上可导，且 $g'(x)=f'(x)\cdot\mathrm{sgn}(x)$.

由 $|f'(x)|\leq k|f(x)|$ 则 $|g'(x)|\leq kg(x)\Rightarrow -kg(x)\leq g'(x)\leq kg(x)$. 令 $m(x)=e^{kx}g(x)$，$n(x)=e^{-kx}g(x)$

$\Rightarrow m'(x)=e^{kx}[kg(x)+g'(x)]\geq 0$，$n'(x)=e^{-kx}[-kg(x)+g'(x)]\leq 0$ 即 $m(x)\uparrow$，$n(x)\downarrow$

只需证明：若存在 $x_0\in[a,b]$：$f(x_0)=0$，则 $\forall x\in[a,b]$：$f(x)\equiv 0$.

假设存在 $x_0\in[a,b]$：$f(x_0)=0$，$\forall x\in[a,b]$ 有 $[m(x)-m(x_0)][n(x)-n(x_0)]\leq 0$

$\Rightarrow m(x)\cdot n(x)\leq 0\Rightarrow g^2(x)\leq 0\Rightarrow g(x)\equiv 0\Rightarrow f(x)\equiv 0$

[题型：函数的泰勒展开和麦克劳林展开]

30. 写出函数的泰勒展开

(1) $f(x)=x^2\ln x$ 在 $x_0=1$ 处的 $n$ 阶泰勒公式.

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}$$

$(x-1)^2\ln(1+(x-1))+2(x-1)\ln(1+(x-1))+\ln(1+(x-1))$.

$(x-1)^2\left((x-1)-\frac{(x-1)^2}{2}+\frac{(x-1)^3}{3}+\cdots+(-1)^n\frac{(x-1)^n}{n}\right)+2(x-1)\left((x-1)-\frac{(x-1)^2}{2}+\frac{(x-1)^3}{3}+\cdots+(-1)^n\frac{(x-1)^n}{n}\right)+\left((x-1)-\frac{(x-1)^2}{2}+\frac{(x-1)^3}{3}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{(x-1)^n}{n}\right)$

$=(x-1)+\frac{3}{2}(x-1)^2+\frac{1}{3}(x-1)^3+\cdots+\left[\frac{(-1)^{n-1}}{n}+\frac{2(-1)^{n-2}}{n-1}+\frac{(-1)^{n-3}}{n-2}\right](x-1)^n$.

(2) $f(x)=\sqrt{x}$ 在点 $x_0=4$ 处的 $n$ 阶泰勒公式

31. (2021四川大学期中压轴). 设$f(x)$在$[a,b]$上二阶可导. $f(0)=f(1)$. 证明: $\exists \xi \in (0,1)$ 使 $f''(\xi)=\dfrac{2f'(\xi)}{1-\xi}$

常用反例：

1. 绝对值函数 $y=|x|$. 取整函数 $y=[x]$. $\lceil x\rceil$ $\lfloor x\rfloor$.

2. Drichlet 函数. $D(x)=\begin{cases}1, & x\in Q\\ 0, & x\in Q^c\end{cases}$.

3. $y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$

4. 下列结论正确否？若不，举出反例.

(1) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$. 则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_{n+1}=A$. (成立)

(2) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$. 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=1$ (不成立，$A\neq0$的情况下成立，$A=0$ 如 $a_n=\frac{n!}{n^n}$ 不成立)

(3) 若对任何实数 $\alpha$ 有 $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha a_n=\alpha A$. 则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$. (成立)

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ 等价于 $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=|a|$. (不成立，$a=0$时成立，$a\neq0$时不成立)

5. 若对数列 $\{x_n\}$. $\exists N\in N_+$，当 $n>N$ 时. 有 $x_n>0$ ($x_n<0$). 且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$. 则有 $A>0$ ($A<0$).

$\Rightarrow$ 错误. 反例：$x_n=\frac{1}{n}$. 结论仍为 $A\geq0$ ($A\leq0$).

6. 函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上处处有定义，则一定存在某一点 $x_0$. 或某区间 $f(x)$ 存在极限.

$\Rightarrow$ 错误. 反例：Drichlet 函数.

7. 设对任意的 $x$. 总有 $\varphi(x)\leq f(x)\leq g(x)$，且 $\lim\limits_{x\to\infty}[g(x)-\varphi(x)]=0$. 则 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ ___D___.

A. 存在且为0. B. 存在且不一定为0. C. 一定存在 D. 不一定存在.

8. 已知 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处不可导. 则下列函数中. $x=x_0$ 一定不可导的是(　　).

A. $f^2(x)$ B. $|f(x)|$. C. $x+f(x)$. D. $f(f(x))$.

$\Rightarrow$ 举反例排除法：反例：A：$f(x)=|x|$；B：$f(x)=\begin{cases}x^2, & x\in Q\\ -x^2, & x\in Q^c\end{cases}$

或 $f(x)=\begin{cases}1, & x<0\\ -1, & x=0\\ 1, & x>0\end{cases}$；D：$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}, & x\neq0\\ 0, & x=0\end{cases}$ 或者 Driclet：$D(x)=\begin{cases}1, & x\in Q\\ 0, & x\in Q^c\end{cases}$

9. 设数列 $x_n$ 与 $y_n$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$，则下列断言正确的是____.

A. 若 $x_n$ 发散. 则 $y_n$ 必发散. B. 若 $x_n$ 无界. 则 $y_n$ 必有界 (注意不是无穷大)

C. 若 $x_n$ 有界. 则 $y_n$ 必为无穷小.? D. 若 $\frac{1}{x_n}$ 为无穷小. 则 $y_n$ 必为无穷小.

$\Rightarrow$ 举反例排除：A必错误. B：$x_n=\begin{cases}0, & n=2k\\ n, & n=2k+1\end{cases}$，$y_n=\begin{cases}n, & n=2k\\ 0, & n=2k+1\end{cases}$ $\Rightarrow x_ny_n=0$.

C. 同样地：$x_n=\begin{cases}1, & n=2k\\ 0, & n=2k+1\end{cases}$ $y_n=\begin{cases}0, & n=2k\\ n, & n=2k+1\end{cases}$ $\Rightarrow x_ny_n=0$.

D. 对比B选项. $x_n$ 为无穷大. 则 $y_n$ 必为无穷小. 正确.

10. 函数 $f(x)=\begin{cases}x^2\sin\frac{1}{x}, & x\neq0\\ 0, & x=0.\end{cases}$ 的导函数在 $x=0$ 处极限不存在，但 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的导数存在.

$\Downarrow$ $\lim\limits_{x\to0}f'(x)$ $\Downarrow$ $f'(0)$.

1. 设$f(x)\in C(-\infty,+\infty)$且$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$. 证明$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上有界且存在最值.

⇒ 由$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$得：取$\varepsilon=1$. $\exists X>0$. 当$|x|>X$时有$|f(x)-A|<\varepsilon=1 \Rightarrow |f(x)|<|1+A|$

又由$f(x)\in C[-X,X]$. 则$\exists m>0$. 当$x\in[-X,X]$时,有$|f(x)|<m$.

令$M=\max\{m,|1+A|\}$. 则$|f(x)|<M$, 因此$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上有界

若$\forall x\in(-\infty,+\infty)$, $f(x)=A$. 成立.

否则, $\exists x_0\in(-\infty,+\infty)$, $f(x_0)\neq A$. 不妨设$f(x_0)<A$. 则

令$\varepsilon=A-f(x_0)>0$. 则$\exists X>|x_0|$, 当$|x|>X$时：$|f(x)-A|<\varepsilon=A-f(x_0)$.

又由$f(x)\in C[-x_0,x_0]$. 则$\exists m$. 当$x\in[-x_0,x_0]$时. $|f(x)|<m$.

## 不定积分

1. 若 $f(x)=e^{-x}$，则 $\int\frac{f'(\ln x)}{x}dx=$ ______.

2. 已知 $f'(e^x)=xe^{-x}$，且 $f(1)=0$，则 $f(x)=$ ______.

3. 计算三角函数的积分：

(1) $\int\sin x\sin 3x\,dx=\frac12\int[\cos(2x)-\cos(4x)]dx=\frac18(2\sin 2x-\sin 4x)+C$

(2) $\int\sin^2 3x\,dx=\int\frac{1-\cos 6x}{2}dx$，(3) $\int\sin^3x\cos^2x\,dx=\int(1-\cos^2x)\cos^2x\cdot d(-\cos x)$.

(4) $\int\sin^3x\,dx$ / $\int\cos^5x\,dx$ 等等. (5) $\int\tan^3x\,dx=\int(\sec^2x-1)\tan x\,dx=\int\tan x\,d\tan x-\int\tan x\,dx$

(6) $\int\frac{1}{1+\sin x}dx=\int\frac{\sec x}{\sec x+\tan x}dx=\int\frac{1}{(\sec x+\tan x)^2}d(\sec x+\tan x)$

$=\int\frac{1-\sin x}{\cos^2x}dx=\int\sec^2x\,dx-\int\tan x\sec x\,dx$.

$=\int\frac{1}{(\cos\frac x2+\sin\frac x2)^2}dx=\int\frac{\sec^2\frac x2}{(1+\tan\frac x2)^2}dx$. △ $1+\sin x=1+2\sin\frac x2\cos\frac x2=(\sin\frac x2+\cos\frac x2)^2$.

4. 计算不定积分.

(1) $\int\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^4}dx$ (2) $\int e^{2x}(\tan x+1)^2dx$ (3) $\int\frac{\ln\sin x}{\sin^2x}dx$ (4) $\int\frac{x^3}{(x+1)^{10}}dx$ (5) $\int\frac{dx}{3+\cos x}$

(6) $\int\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx$ (7) $\int\frac{\cos x}{2\sin x+\cos x}dx$ (8) $\int\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\cdot\frac{dx}{x}$ (9) $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}$

(10) $\int x^3\sqrt{1+x^2}dx$ (11) $\int\frac{\arctan\frac1x}{1+x^2}dx$ (12) $\int\frac{dx}{\sin 2x+\sin x}$

(2) 原式 $=\int e^{2x}\sec^2x\,dx+2\int e^{2x}\tan x\,dx=\int e^{2x}d\tan x+2\int e^{2x}\tan x\,dx$

$=e^{2x}\tan x-2\int e^{2x}\tan x\,dx+2\int e^{2x}\tan x\,dx=e^{2x}\tan x+C$.

(3) 原式 $=-\int\ln\sin x\,d\cot x=-\cot x\ln\sin x+\int\cot x\cdot\frac{\cos x}{\sin x}dx=-\cot x\sin x+\int(\csc^2x-1)dx$

$=-\cot x\ln\sin x-\cot x-x+C$.

(4) 令 $x+1=t$，则 $dx=dt$. 原式 $=\int\frac{(t+1)^3}{t^{10}}dt$.

(5) 变换 $t=\tan\frac x2$. 则 $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$. $dx=\frac{2}{1+t^2}dt$. 那么 $\int\frac{dx}{3+\cos x}=\int\frac{1}{3+\frac{1-t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{2}{1+t^2}dt=\int\frac{1}{2+t^2}dt$

(6) ① $\int\frac{\sin x+\cos x}{\sin x+\cos x}dx=x+C_1$. $\int\frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}=-\ln|\sin x+\cos x|+C_2$

所以 原式 $=\frac12(x-\ln|\sin x+\cos x|)+C$. (回归法)

② 变换 $t=\tan\frac x2$. 则 $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$，$\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$. $dx=\frac{2}{1+t^2}dt$.

(9) $\int\frac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x+1)^4}}dx=\int\frac{1}{(x+1)^2\sqrt[3]{\frac{(x+1)^4}{(x+1)^4}}}dx=\int\frac{1}{x^2-1}\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}dx$，令 $t=\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}$. 原式 $=-\frac12\int\frac1t dt$ (消根号法)

(10) 令 $x=\tan t$. 则 原式 $=\int\tan^3t\sec^3t\,dt=\int\tan t\sec^5t\,dx-\int\tan t\sec^3t\,dt=\int(\sec^4t-\sec^2t)d\sec t$.

或者：原式 $=\frac12\int x^2\sqrt{1+x^2}dx^2=\frac12\int(1+x^2-1)\sqrt{1+x^2}d(1+x^2)=\frac12\int(1+x^2)^{\frac32}d(1+x^2)-\frac12\int\sqrt{1+x^2}d(1+x^2)$.

(12) $\int\frac{dx}{\sin 2x+\sin x}=\int\frac{dx}{2\sin x(\cos x+1)}=\frac14\int\frac{d(\frac x2)}{\sin\frac x2\cos^3\frac x2}=\frac14\int\frac{d(\tan\frac x2)}{\tan\frac x2\cos^2\frac x2}=\frac14\int\frac{1+\tan^2\frac x2}{\tan\frac x2}d(\tan\frac x2)$

$=\frac14\int\frac{1}{\tan\frac x2}d(\tan\frac x2)+\frac14\int\tan\frac x2\,d(\tan\frac x2)$.

(13) $\int \frac{x^2e^x}{(x+2)^2}dx$. (14) $\int \frac{xe^x}{\sqrt{e^x-2}}dx$ (15) $\int \frac{xe^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx$. (16) $\int \frac{x^2}{1+x^2}\arctan x dx$

(13) 取$u(x)=x^2e^x$. $\frac{1}{(x+2)^2}dx = d(-\frac{1}{x+2}) = dv(x)$.

原式 $=\int x^2e^x d(-\frac{1}{x+2}) = -\frac{x^2e^x}{x+2} - \int(-\frac{1}{x+2})(2xe^x+x^2e^x)dx = -\frac{x^2e^x}{x+2} + \int\frac{1}{x+2}\cdot x(x+2)e^x dx$

(15) 原式 $=\int\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}de^{\arctan x} = \frac{xe^{\arctan x}}{\sqrt{1+x^2}} - \int\frac{e^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx = \frac{xe^{\arctan x}}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{e^{\arctan x}}{\sqrt{1+x^2}} - \int\frac{xe^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx$

(16) 原式 $=\int \arctan x\, d(x-\arctan x)$.

(17) $\int\frac{x^3}{(1+x^8)^2}dx$ (18) $\int\frac{x^2+1}{x^4+1}dx$ (19) $\int\frac{\tan x}{4\sin^2x+9\cos^2x}dx$ (20) $\int\sin 5x\cos 3x dx$

(21) $\int\frac{\sin x\cos x}{\sin^4x+\cos^4x}dx$ (22) $\int\frac{dx}{\sin x\cos^4x}$ (23) $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+3x-4}}$ (24) $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(x-2)(x+1)^2}}$

5. 用积分证明极限.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{n^2}^{n^2+n}\frac{1}{\sqrt{x}}e^{-\frac{1}{x}}dx$.

$\Rightarrow$ 对于函数 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}e^{-\frac{1}{x}}dx$, $\exists\xi\in(n^2, n^2+n)$ 使 $f(\xi)\cdot n=\int_{n^2}^{n^2+n}\frac{1}{\sqrt{x}}e^{-\frac{1}{x}}dx=\frac{n}{\sqrt{\xi}}e^{-\frac{1}{\xi}}$.

则原式 $=\lim\limits_{\substack{n\to\infty\\ \xi\to\infty}}\frac{n}{\sqrt{\xi}}e^{-\frac{1}{\xi}}$, 又因为 $n^2<\xi<n^2+n$. 所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\xi=\lim\limits_{n\to\infty}n^2$. 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}e^{-\frac{1}{n^2}}=0$.

6. 函数 $f\in C[0,1]\cap D(0,1)$. 且 $3\int_0^{\frac{1}{3}}e^{1-x^2}f(x)dx=f(1)$. 证明: 至少存在一点 $\xi\in(0,1)$ 使 $f'(\xi)=2\xi f(\xi)$.

观察目标等式可知希令 $F(x)=\frac{f(x)}{e^{x^2}}$, 那么可由罗尔定理证明.

由 $3\int_0^{\frac{1}{3}}e^{1-x^2}f(x)dx=f(1)$ 可知 $\exists\xi\in(0,\frac{1}{3})\subset(0,1)$ 使 $e^{1-\xi^2}f(\xi)=3\int_0^{\frac{1}{3}}e^{1-x^2}f(x)dx=f(1)$. 即 $e\cdot\frac{f(\xi)}{e^{\xi^2}}=f(1)$

$\Rightarrow F(\xi)=\frac{f(1)}{e}$. 又因为 $F(1)=\frac{f(1)}{e}$. 所以 $F(\xi)=F(1)$. 即 $\exists\eta\in(\xi,1)\subset(0,1)$ 使 $F'(\eta)=0$.

7. 设 $f'(x^2)=\ln x\ (x>0)$, 求 $f(x)$.

令 $t=x^2$. 则 $f'(t)=\frac{1}{2}\ln t$. 那么 $f(t)=\int f'(t)dt=\frac{1}{2}\int\ln t dt=\frac{1}{2}t\ln t-\frac{1}{2}t+C$

所以 $f(x)=\frac{x}{2}(\ln x-1)+C$.

8. 设 $f(\ln x)=\frac{\ln(1+x)}{x}$. 计算 $\int f(x)dx$.

令 $t=\ln x$. $x=e^t$ 则 $f(t)=\frac{\ln(1+e^t)}{e^t}$. $\int f(t)dt=-e^{-t}\ln(1+e^t)+\int\frac{1}{1+e^t}dt$

其中 $\int\frac{1}{1+e^t}dt=\int(1-\frac{e^t}{1+e^t})dt=t-\ln(1+e^t)+C$.

9. 已知 $f(x)$ 的一个原函数为 $\ln^2x$. 则 $\int xf'(x)dx$

$\Rightarrow\int xf'(x)dx=\int xdf(x)=xf(x)-\ln^2x+C=x(\ln^2x)'-\ln^2x+C=2\ln x-\ln^2x+C$.

10. 已知 $f(x)$ 的一个原函数为 $e^{x^2}$. 求 $\int xf''(x)dx$.

$\Rightarrow\int xf''(x)dx=\int xdf'(x)=xf'(x)-\int f'(x)dx=xf'(x)-f(x)+C$.

由于 $f(x)=(e^{x^2})'=2xe^{x^2}$. $f'(x)=2e^{x^2}+4x^2e^{x^2}$. 代入上式即可.

11. [题型：求递推表达式]

(1) $I_n=\int\frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}}dx$. (2) $I_n=\int\frac{dx}{x^n\sqrt{1+x}}$ (3) $I_n=\int\frac{1}{(x^2+a^2)^n}dx$

$\Rightarrow I_n=-x^{n-1}\sqrt{1-x^2}+(n-1)\int x^{n-2}\sqrt{1-x^2}dx=-x^{n-1}\sqrt{1-x^2}+(n-1)\int\frac{x^{n-2}(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

$=-x^{n-1}\sqrt{1-x^2}+(n-1)(I_{n-2}-I_n)\Rightarrow I_n=-\frac{1}{n}x^{n-1}\sqrt{1-x^2}+\frac{n-1}{n}I_{n-2},\ n=2,3,\cdots\ I_0=\arcsin x+C,\ I_1=-\sqrt{1-x^2}+C.$

(3) $I_n=\int\frac{1}{(x^2+a^2)^n}dx=\frac{1}{a^2}\int\frac{a^2+x^2-x^2}{(x^2+a^2)^n}dx=\frac{1}{a^2}I_{n-1}-\frac{1}{a^2}\int\frac{x^2}{(x^2+a^2)^n}dx=\frac{1}{a^2}I_{n-1}-\frac{1}{2a^2(n-1)}\int x\,d(x^2+a^2)^{-(n-1)}$

$=\frac{1}{a^2}I_{n-1}+\frac{x}{2a^2(n-1)(x^2+a^2)^{(n-1)}}-\frac{1}{2a^2(n-1)}\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^{(n-1)}}$

$=\frac{2n-3}{a^2(2n-2)}I_{n-1}+\frac{x}{2a^2(n-1)(x^2+a^2)^{(n-1)}},\ (n=2,3\cdots).\quad I_1=\int\frac{1}{x^2+a^2}dx=\frac{1}{a}\arctan\frac{a}{x}+C.$

12. 求不定积分：

(1) $\int\frac{x^2}{\sqrt[3]{(3x+1)^2}}dx$ (2) $\int\frac{x+\sin x}{1+\cos x}dx$ (3) $\int(1-\frac{2}{x})^2e^xdx$. (4) $\int\frac{e^x(1+\sin x)}{1+\cos x}dx$

(1) 令 $t=3x+1$. 则 $dt=3dx$, $x=\frac{1}{3}(t-1)$.

$\int\frac{x^2}{\sqrt[3]{(3x+1)^2}}dx=\frac{1}{9}\int\frac{(t-1)^2}{t^{\frac{3}{2}}}dt=\frac{1}{9}\int(t^{\frac{1}{2}}-2t^{-\frac{1}{2}}+t^{-\frac{3}{2}})dt$

$=\frac{1}{6}t^{\frac{3}{2}}-4t^{\frac{1}{2}}-2t^{-\frac{1}{2}}+C=\frac{1}{6}(3x+1)^{\frac{3}{2}}-4(3x+1)^{\frac{1}{2}}-2(3x+1)^{-\frac{1}{2}}+C.$

(2) $\int\frac{x+\sin x}{1+\cos x}dx=\int\frac{x}{1+\cos x}dx+\int\frac{\sin x}{1+\cos x}dx$

其中 $\int\frac{x}{1+\cos x}dx=\frac{1}{2}\int x\sec^2\frac{x}{2}dx=\int x\,d\tan\frac{x}{2}=x\tan\frac{x}{2}-\int\tan\frac{x}{2}dx$

$=x\tan\frac{x}{2}-2\ln|\cos\frac{x}{2}|+C.$

$\int\frac{\sin x}{1+\cos x}dx=-\ln|1+\cos x|+C.$ 所以原式 $=x\tan\frac{x}{2}-\ln\left|\frac{C_1\cos^2\frac{x}{2}}{C_2(1+\cos x)}\right|=x\tan x+C'$.

(3) $\int(1-\frac{2}{x})^2e^xdx=\int(1-\frac{4}{x}+\frac{4}{x^2})e^xdx=\int e^xdx-4\int\frac{1}{x}e^xdx+4\int\frac{1}{x^2}e^xdx$

$=e^x-4\int\frac{1}{x}e^xdx-4\int e^xd\frac{1}{x}=e^x-4\int\frac{1}{x}e^xdx-4\frac{1}{x}e^x+4\int\frac{1}{x}e^xdx=(1-\frac{4}{x})e^x+C$

(4) $\int\frac{e^x(1+\sin x)}{1+\cos x}dx=\int\frac{e^x}{1+\cos x}dx+\int\frac{e^x\sin x}{1+\cos x}dx=\int\frac{e^x}{1+\cos x}dx+\int\frac{\sin x}{1+\cos x}de^x.$

$=\int\frac{e^x}{1+\cos x}dx+\frac{e^x\sin x}{1+\cos x}-\int e^x\cdot\frac{\cos x(1+\cos x)+\sin^2x}{(1+\cos x)^2}dx=\frac{e^x\sin x}{\cos x}+C.$

(5) $\int\frac{x^2-1}{x^4+1}dx$ (6) $\int\frac{1}{\sin x\cos^3x}dx$

(6) $\int\frac{1}{\sin x\cos^3x}dx=\int\frac{\sin^2x+\cos^2x}{\sin x\cos^3x}dx=\int\frac{\tan^2x+1}{\tan x}\sec^2x\,dx=\int(\tan x+\frac{1}{\tan x})d\tan x$

$=\frac{1}{2}\tan^2x+\ln|\tan x|+C$

或者：$\int\frac{1}{\sin x\cos^3x}dx=\int\frac{\sin^2x+\cos^2x}{\sin x\cos^3x}dx=\int\frac{\sin x}{\cos^3x}dx+\int\frac{1}{\sin x\cos x}dx$

$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\cos^2x}+\int\frac{\sec^2x}{\tan x}dx=\frac{1}{2}\sec^2x+\ln|\tan x|+C$

(7) $\int \frac{\cos x-\sin x}{\sin x+2\cos x}dx$　　(8) $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$.

令 $\int \frac{\cos x-\sin x}{\sin x+2\cos x}dx = \int \frac{A(\sin x+2\cos x)+B(\cos x-2\sin x)}{\sin x+2\cos x}dx$，得 $A=\frac{1}{5}$. $B=\frac{3}{5}$

所以原式 $=\int[\frac{1}{5}+\frac{3}{5}\frac{\cos x-2\sin x}{\sin x+2\cos x}]dx=\frac{1}{5}x+\frac{3}{5}\ln|\sin x+2\cos x|+C$.

13. 设 $f'(\cos x+2)=\sin^2x+\tan^2x$. 求 $f(x)$.

$\Rightarrow f(\cos x+2)=\int f'(\cos x+2)\,d(\cos x+2)=\int(\sin^2x+\tan^2x)\,d(\cos x+2)=-\int(\sin^3x+\frac{\sin^3x}{\cos^2x})dx$

$=-\int\sin^3x\,dx-\int\frac{\sin^3x}{\cos^2x}dx=\int(1-\cos^2x)\,d\cos x+\int\frac{1-\cos^2x}{\cos^2x}\,d\cos x$

$=\cos x-\frac{1}{3}\cos^3x-\frac{1}{\cos x}-\cos x+C=-\frac{1}{3}\cos^3x-\frac{1}{\cos x}+C$

所以 $f(x)=-\frac{1}{3}(x-2)^3-\frac{1}{x-2}+C$.

14. 设 $\int f(\frac{x}{2})dx=\sin^2x+C$. 求 $\int\frac{xf(\sqrt{2x^2-1})}{\sqrt{2x^2-1}}dx$.

令 $\frac{x}{2}=\sqrt{2t^2-1}$. 则 $\frac{1}{2}dx=\frac{2t}{\sqrt{2t^2-1}}dt$，$\int f(\frac{x}{2})dx=\int\frac{2tf(\sqrt{2t^2-1})}{\sqrt{2t^2-1}}dt=\sin(2\sqrt{2t^2-1})^2+C$

所以 $\int\frac{xf(\sqrt{2x^2-1})}{\sqrt{2x^2-1}}dx=\frac{1}{2}\sin(2\sqrt{2x^2-1})^2+C.=\frac{1}{2}\sin(8x^2-4)+C$

15. (1) 在某个区间内不连续的函数在该区间内一定无原函数，是否正确？

否. 如 $f(x)=\begin{cases}2x\cos\frac{1}{x}+\sin\frac{1}{x}, & x\neq0\\ 0, & x=0\end{cases}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有间断点 $x=0$ 但有 $F(x)=\begin{cases}x^2\cos\frac{1}{x}, & x\neq0\\ 0, & x=0\end{cases}$

$F'(x)=f(x)$. 即不连续的函数也可能存在原函数. 连续函数是一定存在.

(2) ~~任一偶函数原函数为奇函数~~. 任一奇函数原函数为偶函数.

【题型：估值不等式】

1. 证明：$\frac{1}{2} \le \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}dx \le \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\Rightarrow \frac{\sin x}{x} \ge \frac{\sin\frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{4}} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}$，$\frac{\sin x}{x} \le \frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}$. $\Rightarrow \frac{2}{\pi}(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}) \le \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}dx \le \frac{2\sqrt{2}}{\pi}(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4})$

2. 设$f(x)\cdot\int_0^2 f(x)dx = 50$. 且$f(0)=0$. $f(x)\ge 0$. 求$\int_0^2 f(x)dx$及$f(x)$.

$\Rightarrow$ 对 $f(x)\cdot\int_0^2 f(x)dx = 50$ 两端积分：$\int_0^t f(x)dx \cdot \int_0^2 f(x)dx = \int_0^t 50dx = 50t$.

即 $f(t)\int_0^2 f(x)dx = 50t$. 再对$t$积分：$\int_0^2 f(t)dt \cdot \int_0^2 f(x)dx = \int_0^2 50t\,dt = 100$

所以 $\int_0^2 f(x)dx = 10$. $f(t) = \frac{50t}{\int_0^2 f(x)dx} = 5t$.

5. 设$f(x)$是连续函数. 且$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = A$. 若$\varphi(x) = \int_0^1 f(xt)dt$. 求$\varphi'(0)$.

6. 计算定积分

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{1+\sin x}dx$ (2) $\int_0^1 \frac{x^2dx}{\sqrt{2x-x^2}}$ (3) $\int_0^a \frac{dx}{x+\sqrt{a^2-x^2}}$ (4) $\int_0^{\pi} x\sin^6 x\cos^4 x\,dx$

(5) $\int_0^{\pi}\sqrt{\sin^3 x-\sin^5 x}\,dx$ (6) $\int_0^1 t|t-x|dt$

(5) $\int_0^{\pi}\sqrt{\sin^3 x-\sin^5 x}\,dx = \int_0^{\pi}\sqrt{\sin^3 x(1-\sin^2 x)}\,dx = \int_0^{\pi}\sin x|\cos x|\sqrt{\sin x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\frac{3}{2}}x\cos x\,dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin^{\frac{3}{2}}x\cos x\,dx$.

(1)

(2) $\int_0^1 \frac{x^2dx}{\sqrt{2x-x^2}}$

(3) $\int_0^a \frac{dx}{x+\sqrt{a^2-x^2}} \xlongequal{x=a\sin\theta} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a\cos\theta\, d\theta}{a\sin\theta+a\cos\theta} = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\theta}{\sin\theta+\cos\theta}d\theta = \frac{1}{2}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\theta+\sin\theta}{\sin\theta+\cos\theta}d\theta + \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\theta-\sin\theta}{\sin\theta+\cos\theta}d\theta\right]$

(4) $\int_0^{\pi} x\sin^6 x\cos^4 x\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\sin^6 x\cos^4 x\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\sin^6 x\cdot(1-\sin^2 x)^2dx$

$= \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}(\sin^6 x - 2\sin^7 x + \sin^{10}x)dx = \pi\left(\frac{5\times3\times1}{6\times4\times2}\times\frac{\pi}{2} - 2\times\frac{6\times4\times2}{7\times5\times3} + \frac{9\times7\times5\times3}{10\times8\times6\times4\times2}\times\frac{\pi}{2}\right) =$

(6)

7. 下列积分可直接用牛顿-莱布尼茨公式计算的是( ).

A. $\int_1^5 \frac{xdx}{x^2+1}$ B. $\int_{-1}^1 \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$ C. $\int_{\frac{1}{e}}^{e}\frac{dx}{x\ln x}$ D. $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x}$ (A)

8. 设$\varphi(x)$是$x$到离$x$最近的整数的距离，求$\int_0^{100}\varphi(x)dx$.

易知其为周期函数. 且 $I = 100\int_0^1\varphi(x)dx = 100\left[\int_0^{\frac{1}{2}}x\,dx + \int_{\frac{1}{2}}^1(1-x)dx\right] = 25$

9. 设$f(x)=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$，$F(x)=\int_0^x f(t)dt$，则( ) Δ记住反例!!!

A. $F(x)$在$x=0$点不连续 B. $F(x)$在$(-\infty,+\infty)$内连续，在$x=0$点不可导

C. $F(x)$在$(-\infty,+\infty)$内可导，且满足$F'(x)=f(x)$. D. $F(x)$在$(-\infty,+\infty)$内可导，但不一定有$F'(x)=f(x)$.

$\Rightarrow F(x)=\int_0^x f(t)dt = \begin{cases}x, & x>0\\ 0, & x=0\\ -x, & x<0\end{cases} \Rightarrow F(x)=|x|$. 所以在$x=0$不可导.

10. 求 $\int_0^x f(t)g(x-t)\,dt\ (x\geq 0)$. 其中当 $x\geq 0$ 时. $f(x)=x$. 而 $g(x)=\begin{cases}\sin x, & 0\leq x<\frac{\pi}{2}\\ 0, & x\geq\frac{\pi}{2}\end{cases}$

$\Rightarrow$ 看清楚是对 $x$ 还是 $t$ 积分.

$$\int_{x-\frac{\pi}{2}}^{x} f(t)g(x-t)dt$$

法一：对 $x$ 取值讨论.

法二：换元. 令 $u=x-t$. 则 $du=-dt$.

11. 求 $\int_0^x \sin(x-t)^2 dt=$______. $\frac{d}{dx}(\int_{x^2}^0 x\cos t^2 dt)=$______. (注意看题), $\frac{d}{dt}[\int_0^x t f(x^2-t^2)dt]=$______.

12. 设 $f(x)$ 是奇函数. 除 $x=0$ 外处处连续. $x=0$ 是其第一类间断点. 则 $\int_0^x f(t)dt$ 是（ ）.

A. 连续的奇函数. B. 连续的偶函数. C. $x=0$ 间断的奇函数 D. $x=0$ 间断的偶函数

$\Rightarrow$ 令 $F(x)=\int_0^x f(t)dt$. 则 $F(0)=0$.

且 $\lim\limits_{x\to 0}F(x)=\lim\limits_{x\to 0}\int_0^x f(t)dt=\lim\limits_{x\to 0}f(\xi)x=0=F(0)$. 则 $F(x)$ 连续.

又 $F(-x)=\int_0^{-x}f(t)dt \overset{t=-u}{=\!=\!=} \int_0^x f(-u)(-du)=\int_0^x f(u)du=F(x)$. 所以是偶函数.

13. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续. 且 $F(x)=\int_0^x (x-2t)f(t)dt$. 试证：

(1) 若 $f(x)$ 为偶函数. 且 $F(x)$ 为偶函数. (2) 若 $f(x)$ 非增. 则 $F(x)$ 非减.

14. 求函数 $f(x)=\int_0^{x^2}(2-t)e^{-t}dt$ 的最值.

15. 设 $F(x)=\int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt+\int_0^{\frac{1}{x}}\frac{1}{1+t^2}dt$. 则（ ）

A. $F(x)\equiv 0$. B. $F(x)\equiv\frac{\pi}{2}$. C. $F(x)=\arctan x$ D. $F(x)=2\arctan x$.

16. 设 $F(x)=\int_x^{x+2\pi}e^{\sin t}\sin t\,dt$. 则 $F(x)=$______.

易知 $F(x)$ 恒为常数. 则 $F(x)=\int_0^{2\pi}e^{\sin t}\sin t\,dt=\int_0^{\pi}e^{\sin t}\sin t\,dt+\int_{\pi}^{2\pi}e^{\sin t}\sin t\,dt$

$=\int_0^{\pi}(e^{\sin t}-e^{-\sin t})\sin t\,dt>0$. 所以 $F(x)$ 恒为正常数.

17. (1) 设 $\int_0^y e^{t^2}dt=\int_0^{2x^2}\ln\sqrt{t+x^2}\,dt\ (x>0)$, 求 $\frac{dy}{dx}$.

(2) $\begin{cases}x=\int_0^t f(u^2)du\\ y=[f(t^2)]^2\end{cases}$ 其中 $f(u)$ 具有二阶导数, 且 $f(u)\neq 0$. 求 $\frac{d^2y}{dx^2}$.

18. 设 $f(x)$ 连续. 且 $f(0)\neq 0$. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x(x-t)f(t)dt}{x\int_0^x f(x-t)dt}$

19. 设 $f(x)$ 有导数. 且 $f(0)=0$. $F(x)=\int_0^x t^{n-1}f(x^n-t^n)dt$. 证明：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{F(x)}{x^{2n}}=\frac{1}{2n}f'(0)$.

$=\frac{1}{n}\int_0^x f(x^n-t^n)dt^n$

20. $x\to0^+$时的无穷小量 $\alpha=\int_0^x \cos t^2 dx$. $\beta=\int_0^{x^2}\tan\sqrt{t}\,dt$、$\gamma=\int_0^{\sqrt{x}}\sin t^3 dt$ 正确的排序是.

A. $\alpha<\beta<\gamma$.　　B. $\alpha<\gamma<\beta$.　　C. $\beta<\alpha<\gamma$.　　D. $\beta<\gamma<\alpha$.

$\Rightarrow \lim_{x\to0^+}\frac{\int_0^x \cos t^2 dt}{\int_0^{x^2}\tan\sqrt{t}\,dt}=\lim_{x\to0^+}\frac{\cos x^2}{2x\tan x}=+\infty$，则 $\beta$ 是比 $\alpha$ 高阶的无穷小.

$\lim_{x\to0^+}\frac{\int_0^x \cos t^2 dt}{\int_0^{\sqrt{x}}\sin t^3 dt}=\lim_{x\to0^+}\frac{\cos x^2}{\frac{1}{2\sqrt{x}}\sin x^{\frac{3}{2}}}=+\infty$. 则 $\gamma$ 是比 $\alpha$ 高阶的无穷小 $\Rightarrow \beta>\gamma>\alpha$.

$\lim_{x\to0^+}\frac{\int_0^{x^2}\tan\sqrt{t}\,dt}{\int_0^{\sqrt{x}}\sin t^3 dt}=\lim_{x\to0^+}\frac{2x\tan x}{\frac{1}{2\sqrt{x}}\sin x^{\frac{3}{2}}}=0$. 则 $\beta$ 是比 $\gamma$ 高阶的无穷小.

有关极限:

[题型:定积分定义]

21. (1) $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{(1+\frac{1}{n})^2(1+\frac{2}{n})^2\cdots(1+\frac{n}{n})^2}$　　(2) $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\frac{\sin\pi}{n+\frac{1}{n}}\right]$　　(3) $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{2^{\frac{i}{n}}}{n+\frac{1}{i}}$

$\Rightarrow$ 原式 $=\exp\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}[\ln(1+\frac{1}{n})+\ln(1+\frac{2}{n})+\cdots+\ln(1+\frac{n}{n})]=\exp 2\int_0^1\ln(1+x)dx=1$

22. 已知 $\int_0^x f(t)dt=xf(ux)$. 且 $f(x)=e^x$. 则 $\lim_{x\to0}u=$

$\Rightarrow e^x-1=xf(ux)$ 可得 $u=\frac{\ln(e^x-1)-\ln x}{x}$. 则 $\lim_{x\to0}u=\lim_{x\to0}(\frac{e^x}{e^x-1}-\frac{1}{x})=\frac{1}{2}$

(简单).

23. 已知两曲线 $y=f(x)$ 与 $y=\int_0^{\arctan x}e^{-t^2}dt$ 在点 $(0,0)$ 处切线相同. 求切线方程并求 $\lim_{n\to\infty}nf(\frac{2}{n})$.

$\Rightarrow \frac{d}{dt}\int_0^{\arctan x}e^{-t^2}dt=\frac{1}{1+x^2}e^{-x^2}$，则 $x=0$ 时 $y'=1$. 切线方程: $y=x$.

$\lim_{n\to\infty}nf(\frac{2}{n})=\lim_{n\to\infty}\frac{f(\frac{2}{n})}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{-\frac{2}{n^2}f'(\frac{2}{n})}{-\frac{1}{n^2}}=2f'(0)=2$

24. 设 $S(x)=\int_0^x|\cos t|dt$.

(1) $n$ 为正整数时. 且 $n\pi\leq x<(n+1)\pi$ 时. 证明 $2n\leq S(x)<2(n+1)$.

(2) 求 $\lim_{x\to+\infty}\frac{S(x)}{x}$.

$\Rightarrow$ (1) $|\cos t|$ 的周期为 $\pi$. 则 $S(x)=\int_0^x|\cos t|dt$ 有: $\int_0^{n\pi}|\cos t|dt\leq S(x)<\int_0^{(n+1)\pi}|\cos t|dt$

其中 $\int_0^{n\pi}|\cos t|dt=n\int_0^{\pi}|\cos t|dt=2n$.　$\int_0^{(n+1)\pi}|\cos t|dt=(n+1)\int_0^{\pi}|\cos t|dt=2(n+1)$.

(2) $\lim_{x\to+\infty}\frac{S(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x|\cos t|dt}{x}\geq\lim_{\substack{x\to+\infty\\(n\to+\infty)}}\frac{2n}{x}\to\frac{2}{\pi}$　$(n\pi\leq x<(n+1)\pi)$.

$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x|\cos t|dt}{x}<\lim_{\substack{x\to+\infty\\n\to\infty}}\frac{2(n+1)}{x}\to\frac{2}{\pi}$，所以 $\lim_{x\to+\infty}\frac{S(x)}{x}=\frac{2}{\pi}$.

25. 若f(x)在[a,b]上连续，试证：$\lim\limits_{h\to0}\frac{1}{h}\int_a^x[f(t+h)-f(t)]dt=f(x)-f(a)$，其中$a<x<b$.

⇒ 对 $\int_a^x[f(t+h)-f(t)]dt=\int_a^x f(t+h)dt-\int_a^x f(t)dt=\int_{a+h}^{x+h}f(t)dt-\int_a^x f(t)dt$ 有：

$\exists\,\xi_1\in[a+h,x+h]$，$\xi_2\in(a,h)$. 使 $f(\xi_1)(x-a)=\int_{a+h}^{x+h}f(t)dt$，$f(\xi_2)(x-a)=\int_a^x f(t)dt$.

原式 $=\lim\limits_{h\to\infty}\frac{[f(\xi_1)-f(\xi_2)](x-a)}{h}=f'(x)(x-a)$

答案：设 $F(x)=\int_a^x f(t)dt$. 由f(x)连续知 $F'(x)=f(x)$ 且 $F(a)=0$.

令 $u=t+h$. 则 $\int_a^x f(t+h)dt=\int_{a+h}^{x+h}f(u)du=-\int_a^{a+h}f(u)du+\int_a^{x+h}f(u)du=F(x+h)-F(a+h)$

$$\lim_{h\to0}\frac{\int_a^x f(t+h)dt-\int_a^x f(t)dt}{h}=\lim_{h\to0}\frac{F(x+h)-F(a+h)-F(x)+F(a)}{h}=\lim_{h\to0}\left[\frac{F(x+h)-F(x)}{h}-\frac{F(a+h)-F(a)}{h}\right]$$

$=F'(x)-F'(a)=f(x)-f(a)$.

26. 设f(x)连续，则下列函数中必为偶函数的是（ ）.

A. $\int_0^x f(t^2)dt$　　B. $\int_0^x f^2(t)dt$　　C. $\int_0^x t[f(t)-f(-t)]dt$　　D. $\int_0^x t[f(t)+f(-t)]dt$

A：$F(-x)=\int_0^{-x}f(t^2)dt=\int_0^x f(t^2)(-dt)=-\int_0^x f(t^2)dt$.

B：$F(-x)=\int_0^{-x}f^2(t)dt=\int_0^x f^2(-t)(-dt)=-\int_0^x f^2(t)dt$

C：$F(-x)=\int_0^{-x}tf(t)dt-\int_0^{-x}f(-t)dt=\int_0^x(-t)f(-t)(-dt)-(-t)\int_0^x f(t)(-dt)=-\int_0^x t[f(t)-f(-t)]dt$.

27. f(x)连续，F(x)是f(x)的原函数则（A）.

A. f(x)是奇函数时，F(x)必为偶函数.　　B. f(x)是偶函数时，F(x)必为奇函数.

C. f(x)是周期函数时，F(x)必为周期函数.　　D. f(x)是单增函数时，F(x)必为单增函数.

⇒设 $F(x)=\int_a^x f(t)dt=\int_0^x f(t)dt+C$.

若f(x)为奇函数，则$f(-x)=-f(x)$. ⇒ $F(-x)=\int_0^{-x}f(t)dt=\int_0^x f(-t)(-dt)=\int_0^x f(t)dt$

所以F(x)必为偶函数.

若f(x)为偶函数，则$f(-x)=f(x)$. ⇒ $F(-x)=\int_0^{-x}f(t)dt=\int_0^x f(-t)(-dt)=-\int_0^x f(t)dt$

⇒只有C=0时F(x)才为奇函数

28. 设F(x)是连续函数f(x)的一个原函数，则A.

A. F(x)是偶函数⇔f(x)是奇函数.　　B. F(x)是奇函数⇔f(x)是偶函数.

C. F(x)是周期函数⇔f(x)是周期函数　　D. F(x)是单调函数⇔f(x)是单调函数.

⇒由(27)知选A.

或举反例：$f(x)=1$，$F(x)=x+1$，排除B,C.　$f(x)=x$，$F(x)=\frac{1}{2}x^2$，排除D.

29. (1) 设$f(x)$连续. $\varphi(x)=\int_0^1 f(xt)\,dt$. 且 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=A$. 求$\varphi'(x)$并讨论$\varphi'(x)$在$x=0$处连续性

(2) $F(x)=\begin{cases}\dfrac{\int_0^x tf(t)\,dt}{x^2}, & x\neq0\\ 0, & x=0.\end{cases}$ $f(x)$有连续导数且$f(0)=0$. 求$F'(x)$并研究在$x=0$处连续性.

(3) 对一切实数$t$. 函数$f(t)$连续的正函数且可导. 同时有$f(-t)=f(t)$. 又有:

$$g(x)=\int_{-a}^{a}|x-t|f(t)\,dt,\quad a>0,\quad x\in[-a,a].$$

① 证明$g'(x)$单调递增.

② 求出使$g(x)$取最小值的$x$值.

③ 将$g(x)$的最小值当作$a$的函数, 使其等于$f(a)-a^2-1$. 并求$f(x)$.

(3) ① $\Rightarrow g(x)=\int_{-a}^{x}(x-t)f(t)\,dt+\int_{x}^{a}(t-x)f(t)\,dt \Rightarrow g'(x)=\int_{-a}^{x}f(t)\,dt+\int_{a}^{x}f(t) \Rightarrow g''(x)=2f(x)>0$

② 令$g'(x)=0$有: $\int_{-a}^{x}f(t)\,dt+\int_{a}^{x}f(t)\,dt=0$. 且 $\int_{-a}^{x}f(t)\,dt=\int_{-x}^{a}f(t)\,dt$.

所以上式 $=\int_{-x}^{a}f(t)\,dt+\int_{a}^{x}f(t)\,dt=\int_{-x}^{x}f(t)\,dt=0$.

由于$f(x)>0$. 所以$x=0$. 又 $g''(0)=2f(0)>0$. 故 $g(0)=2\int_0^a f(t)t$ 为最小值.

③ $\Rightarrow 2\int_0^a f(t)\,dt=f(a)-a^2-1$. $\Rightarrow 2f(x)=f'(x)-2x$ 即 $f'(x)-2f(x)=2x$.

解此微分方程得: $f(x)=e^{-\int-2dx}\left(\int 2xe^{-\int 2dx}dx+C\right)=-x-1+Ce^{2x}$.

又由$f(0)=1$得: $C=2$. 即 $f(x)=2e^{2x}-x-1$.

(1) 令$u=xt$. 则 $\varphi(x)=\int_0^x \frac{1}{x}f(u)\,du=\frac{1}{x}\int_0^x f(u)\,du$, $\varphi(0)=0$

则 $\varphi'(x)=-\frac{1}{x^2}\int_0^x f(u)\,du+\frac{1}{x}f(x)$

又 $\varphi'(0)=\lim\limits_{x\to0}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\int_0^x f(u)\,du}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{2x}=\frac{A}{2}$

$\lim\limits_{x\to0}\varphi'(x)=\lim\limits_{x\to0}\left[-\frac{\int_0^x f(u)\,du}{x^2}+\frac{f(x)}{x}\right]=-\frac{A}{2}+A=\frac{A}{2}$. 所以连续,

且 $\varphi'(x)=\begin{cases}-\frac{1}{x^2}\int_0^x f(u)\,du+\frac{1}{x}f(x), & x\neq0\\ \frac{A}{2}, & x=0.\end{cases}$

[题型]. 求积分函数最值

30. 求函数$f(x)=\int_{-1}^{1}|x-t|e^{t^2}\,dt$的最小值.

解: $f(x)=\int_{-1}^{x}(x-t)e^{t^2}dt+\int_{x}^{1}(t-x)e^{t^2}dt$

$=x\int_{-1}^{x}e^{t^2}dt-\int_{-1}^{x}te^{t^2}dt+\int_{x}^{1}te^{t^2}dt-x\int_{x}^{1}e^{t^2}dt$

$\Rightarrow f'(x)=\int_{-1}^{x}e^{t^2}dt+xe^{x^2}-xe^{x^2}-xe^{x^2}-\int_{x}^{1}e^{t^2}dt+xe^{x^2}=\int_{-1}^{x}e^{t^2}dt-\int_{x}^{1}e^{t^2}dt$

$f''(x)=2e^{x^2}>0$. 且$f'(0)=0$. 所以 $x<0$ 时 $f(x)<0$. $x>0$ 时 $f(x)>0$

$x=0$时有最小值: $f(0)=\int_{-1}^{1}|t|e^{t^2}dt=e-1$.

[题型：计算弧长]

31. (1) 曲线 $\theta=\frac{1}{2}(r+\frac{1}{r})$，相应于 $1\le r\le 3$ 的一段弧.

※ ① $x=r\cos\theta(r)$，$y=r\sin\theta(r)$ $\Rightarrow x_r'=\cos\theta-\theta_r'\sin\theta$，$y_r'=\sin\theta+\theta_r'\cos\theta$.

则由 $S=\int\sqrt{(x_r')^2+(y_r')^2}\,dr=\int\sqrt{(\cos\theta-\theta_r'\sin\theta)^2+(\sin\theta-\theta_r'\cos\theta)^2}\,dr=\int\sqrt{1+r^2\cdot(\theta_r')^2}\,dr$

② $x=r(\theta)\cos\theta$，$y=r(\theta)\sin\theta$ $\Rightarrow x_\theta'=r'\cos\theta-r\sin\theta$，$y_\theta'=r'\sin\theta+r\cos\theta$.

则 $S=\int\sqrt{(x_\theta')^2+(y_\theta')^2}\,d\theta=\int\sqrt{(r'\cos\theta-r\sin\theta)^2+(r'\sin\theta+r\cos\theta)^2}\,d\theta=\int\sqrt{r^2(\theta)+[r'(\theta)]^2}\,d\theta$.

$\Rightarrow S=\int_1^3\frac{\sqrt{(r^2+1)^2}}{2r}\,dr=2+\frac{1}{2}\ln 3$.

[题型] 计算面积.

① 由方程 $\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases}$ $(\alpha \le t \le \beta)$ 表示的平面图形 $D$: $A_D=\int_{\alpha}^{\beta} y(t)x'(t)dt$.

② 极坐标下 $D=\{(r,\theta) \mid 0\le r\le r(\theta), \alpha\le\theta\le\beta\}$ 的面积: $A_D=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2(\theta)d\theta$.

[题型：反常积分]

32. (1) $\int_0^2 \frac{dx}{x^2-4x+3}$.　(2) $\int_{-1}^0 \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x}}$　(3) $\int_0^1 \ln(1-x)dx$.　(4) $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{dx}{\sqrt{|x^2-x|}}$.

$\Rightarrow$ (1) 原式 $= \frac{1}{2}\int_0^1 (\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-1})dx + \frac{1}{2}\int_1^2 (\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-1})dx = \frac{1}{2}\ln|x-3|\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\ln|x-1|\Big|_0^1 + \frac{1}{2}\ln|x-3|\Big|_1^2 - \frac{1}{2}\ln|x-1|\Big|_1^2$

$\Rightarrow$ 不收敛.

(3) 原式 $= x\ln(1-x)\Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{x}{1-x}dx = [x\ln(1-x)+x-\ln(1-x)]\Big|_0^1 = [(x-1)\ln(1-x)+x]\Big|_0^1 = 1$.

(4) 原式 $= \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}} + \int_1^{\frac{3}{2}} \frac{dx}{\sqrt{x^2-x}}$，其中 $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}} = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} \overset{x=\sin^2 t}{=\!=\!=} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\sin t\cos t}{\sin t\cos t}dt = \frac{\pi}{2}$

$\int_1^{\frac{3}{2}} \frac{dx}{\sqrt{x^2-x}} = \int_1^{\frac{3}{2}} \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)}} \overset{x=\sec^2 t}{=\!=\!=} \int_0^{\arccos\frac{\sqrt{6}}{3}} 2\sec t\,dt = 2\ln(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}) = \ln(2+\sqrt{3})$

$\therefore$ 原式 $= \frac{\pi}{2}+\ln(2+\sqrt{3})$.

33. $f(y)$ 是连续函数，且 $F(x)=\int_a^b f(y)|x-y|dy$. $a<x<b$. 求 $F''(x)$.

$\Rightarrow F(x) = \int_a^x f(y)(x-y)dy + \int_x^b f(y)(y-x)dy$

$= x\int_a^x f(y)dy - \int_a^x yf(y)dy - x\int_x^b f(y)dy + \int_x^b yf(y)dy$.

$F'(x) = \int_a^x f(y) + xf(x) - xf(x) - \int_x^b f(y)dy + xf(x) - xf(x) = \int_a^x f(y) - \int_x^b f(y)dy$

$F''(x) = 2f(x)$.

注意范围

34. $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内满足 $f(x)=f(x-\pi)+\sin x$，且 $f(x)=x$. $\underline{x\in[0,\pi)}$. 求 $\int_\pi^{3\pi} f(t)dt$.

$\Rightarrow \int_\pi^{3\pi} f(x)dx = \int_\pi^{3\pi}[f(x-\pi)+\sin x]dx = \int_\pi^{3\pi} f(x-\pi)dx \overset{t=x-\pi}{=\!=\!=} \int_0^{2\pi} f(t)dt = \int_0^\pi f(t)dt + \int_\pi^{2\pi} f(t)dt$

$= \int_0^\pi f(t)dt + \int_\pi^{2\pi}[f(t-\pi)+\sin t]dt = \frac{\pi^2}{2}-2+\int_\pi^{2\pi} f(t-\pi)dt \overset{u=t-\pi}{=\!=\!=} \frac{\pi^2}{2}-2+\int_0^\pi f(u)du = \pi^2-2$.

或者写出 $f(x)$ 在 $[\pi,2\pi)$. $[2\pi,3\pi)$ 上的表达式再积分.

35. 设$f(x)$、$g(x)$在$[-a,a]\,(a>0)$上连续，$g(x)$为偶函数，且$f(x)$满足$f(x)+f(-x)=A$.

(1) 证明：$\int_{-a}^{a} f(x)g(x)\,dx = A\int_0^a g(x)\,dx$.

(2) 计算定积分$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\sin x| \arctan e^x\,dx$.

$\Rightarrow$ (1) $\int_{-a}^{a} f(x)g(x)\,dx = \int_{-a}^{a}[A-f(-x)]g(x)\,dx = \int_{-a}^{a}[A-f(x)]g(x)\,dx$

$= A\int_{-a}^{a} g(x) - \int_{-a}^{a} f(x)g(x)\,dx \Rightarrow \int_{-a}^{a} f(x)g(x)\,dx = A\int_0^a f(x)\,dx$.

(2) $\arctan e^x + \arctan\frac{1}{e^x} = \frac{\pi}{2}$，则原式$=\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx = \frac{\pi}{2}$

36. 设$f(x)=\int_x^{x+\frac{\pi}{2}} |\sin t|\,dt$.

(1) 证明$f(x)$是以$\pi$为周期的函数.

(2) 求$f(x)$的值域.

$\Rightarrow$ (1) $f(x+\pi) = \int_x^{x+\frac{3\pi}{2}} |\sin t|\,dt \xlongequal{u=x-\pi} \int_x^{x+\frac{\pi}{2}} |\sin u|\,du = f(x)$.

(2) 只需求$[0,\pi]$上的值域. $\Rightarrow f'(x)=|\sin(x+\frac{\pi}{2})|-|\sin x| = |\cos x|-|\sin x|$.

令$f'(x)=0$得$x_1=\frac{\pi}{4}$，$x_2=\frac{3\pi}{4}$.

而$f(0)=1$. $f(\frac{\pi}{4})=\sqrt{2}$. $f(\frac{3\pi}{4})=2-\sqrt{2}$. $f(\pi)=1$，故$f(x)\in[2-\sqrt{2},\sqrt{2}]$.

37. 设连续函数满足$f(xy)=f(x)+f(y)$，试证明$I=\int_0^1 \frac{f(1+x)}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{8}f(2)$

由$f(xy)=f(x)+f(y)$可得$f(1)=0$. 令$y=\frac{1}{x}$得$f(1)=f(x)+f(\frac{1}{x}) \Rightarrow f(\frac{1}{x})=-f(x)$.

则$\int_0^1 \frac{f(1+x)}{1+x^2}\,dx \xlongequal{x=\tan\theta} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{f(1+\tan\theta)}{\sec^2\theta}\sec^2\theta\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(1+\tan\theta)\,d\theta$

$\xlongequal{\theta=\frac{\pi}{4}-t} -\int_{\frac{\pi}{4}}^{0} f(1+\frac{1-\tan t}{1+\tan t})\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\frac{2}{1+\tan t})\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}}[f(2)+f(\frac{1}{1+\tan t})]\,dt$

$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}[f(2)-f(1+\tan t)]\,dt$，则$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{f(1+x)}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{8}f(2)$

38. 证明：$\frac{1}{2} \le \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{2x^2-x+1}} \le \frac{\sqrt{14}}{7}$.

39. 求$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,dx$

①法一：令$f(x)=\frac{1}{1+x}$，$g(x)=x^n$. 由积分中值定理：

$\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,dx = \frac{1}{1+\xi_n}\int_0^1 x^n\,dx = \frac{1}{1+\xi_n}\cdot\frac{1}{1+n}$. $(\xi_n\in[0,1])$.

则$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,dx = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\xi_n}\cdot\frac{1}{1+n}=0$.

②法二：由于$0\le\frac{x^n}{1+x}\le x^n$. $(\forall x\in[0,1])$.

所以$0\le\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,dx \le \frac{1}{1+n}$.

【题型】

40. 已知 $f(t)$ 连续且 $\int_0^x tf(x-t)dt=1-\cos x$. 求 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx$ 的值.

令 $u=x-t$, 则 $\int_0^x tf(x-t)dt=\int_0^x(x-u)f(u)du=x\int_0^x f(u)du-\int_0^x uf(u)du=1-\cos x$

求导: $\int_0^x f(u)du=\sin x$. 令 $x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(u)du=1$.

41. 求由 $\int_0^y e^{t^2}dt=\frac{1}{2}(x^{\frac{1}{3}}-1)^2$ 所确定的函数 $y=y(x)$ 的极值点.

求导: $y'e^{y^2}=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}(x^{\frac{1}{3}}-1)\Rightarrow y'=e^{-y^2}\cdot\frac{x^{\frac{1}{3}}-1}{3x^{\frac{2}{3}}}$

令 $y'=0$ 得 $x=1$ 为唯一驻点. 故 $x=0$, $x=1$ 是可能的两个极值点. 由于 $x<0$ $x>0$ 时 $y'$ 不变号

故 $x=0$ 非极值点. 同理得 $x=1$ 为极小值点.

42. 当 $x\to0$ 时, 无穷小量 $\int_0^{x^2}\sqrt{1+t^4}\,dt$ 是 $x$ 的几阶无穷小?

已知 $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{\sin x-ax}\int_b^x\frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}}dt=c$ 成立. 求 $a,b,c$.

43. 计算广义积分:

(1) $\int_{-2}^{-\sqrt{2}}\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$  (2) $\int_1^{+\infty}\frac{\sqrt{x}}{(1+x)^2}dx$  (3) $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$  (4) $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x(1+x^2)}$

(1) 奇点 $x=-1$. 令 $x=\sec t$. 则 $\int_{-2}^{-\sqrt{2}}\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}=\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{3\pi}{4}}\frac{\sec t\cdot\tan t}{\sec t\cdot|\tan t|}dt=-\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{3\pi}{4}}dt=-\frac{\pi}{12}$.

(2) 令 $\sqrt{x}=t$. 原式 $=\int_1^{+\infty}\frac{2t^2}{(1+t^2)^2}dt=\int_1^{+\infty}(-t)d(\frac{1}{1+t^2})=(-t\cdot\frac{1}{1+t^2})\Big|_1^{+\infty}+\int_1^{+\infty}\frac{1}{1+t^2}dt$

$=\frac{1}{2}+\arctan\Big|_1^{+\infty}=\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}$.

(3) 原式 $=\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}=-\int_1^{+\infty}\frac{d(\frac{1}{x})}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}=-\arcsin\frac{1}{x}\Big|_{1^+}^{+\infty}=-(0-\frac{\pi}{2})=\frac{\pi}{2}$.

(5) $\int_0^{+\infty}\frac{xe^{-x}}{(1+e^{-x})^2}dx$  (6) $\int_0^{+\infty}x^{2009}e^{-\frac{1}{2}x^2}dx$  (8) $\int_0^{\pi}\frac{dx}{a^2\sin^2x+b^2\cos^2x}$

(5) 原式 $=\int_0^{+\infty}x\,d\frac{1}{1+e^x}=\frac{x}{1+e^x}\Big|_0^{+\infty}-\ln|e^x+1|\Big|_0^{+\infty}=\lim\limits_{x\to+\infty}[\frac{x}{1+e^{-x}}-\ln|e^x+1|]+\ln2$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{xe^x-(1+e^x)\ln(e^x+1)}{1+e^x}+\ln2=\lim\limits_{x\to+\infty}(x-\ln|e^x+1|)+\ln2=\ln2$

(6) 令 $I_n=\int x^ne^{-\frac{1}{2}x^2}dx$, 则 $I_n=-\int x^{n-1}de^{-\frac{1}{2}x^2}=-x^ne^{-\frac{1}{2}x^2}+(n-1)I_{n-2}$.

那么 $I_n'=\int_0^{+\infty}x^ne^{-\frac{1}{2}x^2}dx=-x^ne^{-\frac{1}{2}x^2}\Big|_0^{+\infty}+(n-1)I_{n-2}=(n-1)I_{n-2}$

则 $I_n'=(n-1)I_{n-2}=(n-1)(n-3)\cdots2I_1=(n-1)!!$ 原式 $=2008!!$.

(7) $\int_0^{\pi}\frac{dx}{a^2\sin^2x+b^2\cos^2x}=\int_0^{\pi}\frac{\sec^2x}{a^2\tan^2x+b^2}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sec^2x}{a^2\tan^2x+b^2}dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\sec^2x}{a^2\tan^2x+b^2}dx$

$=\frac{1}{ab}\arctan(\frac{a}{b}\tan x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}^-}+\frac{1}{ab}\arctan(\frac{a}{b}\tan x)\Big|_{\frac{\pi}{2}^+}^{\pi}=\frac{1}{ab}\arctan(+\infty)-\frac{1}{ab}\arctan(-\infty)=\frac{\pi}{ab}$

44. 计算定积分

(1) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}[(\sqrt{1+\cos 2x})^5+x^4\sin x]\,dx$　　(2) $\int_0^{2\pi}(\sin^3x\, e^{\cos x}+5\sin^4\frac{x}{2})\,dx$

(1) 原式 $=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}2^{\frac{5}{2}}|\cos x|^5dx=2^{\frac{7}{2}}\times\frac{4\times 2}{5\times 3\times 1}=\frac{8}{15}\times 2^{\frac{7}{2}}=\frac{64}{15}\sqrt{2}$.

(2) 原式 $=\int_{-\pi}^{\pi}(\sin^3x\, e^{\cos x}+5\sin^4\frac{x}{2})\,dx=10\int_0^{\pi}\sin^4\frac{x}{2}dx=20\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4t\,dt=\frac{15\pi}{4}$.

(任意周期长度上积分相等)

(3) $I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1+\tan^5x}$.　(4) $I_2=\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2x}dx$ 〈方法〉 (5) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}5\cos x\cdot\arctan e^x dx$

(3) $I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^5x}{\sin^5x+\cos^5x}dx$，令 $t=\frac{\pi}{2}-x$. 则 $I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^5t}{\sin^5t+\cos^5t}dt$

所以 $2I_1=\frac{\pi}{2}\Rightarrow I_1=\frac{\pi}{4}$.

(4) $I_2=\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2x}dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{1+\cos^2x}dx=-\frac{\pi}{2}\arctan(\cos x)\Big|_0^{\pi}=\frac{\pi^2}{8}$

或者：令 $t=\pi-x$. 则 $I_2=\int_0^{\pi}\frac{(\pi-t)\sin t}{1+\cos^2t}dt$，那么 $2I_2=\int_0^{\pi}\frac{\pi\sin t}{1+\cos^2t}dt=\frac{\pi^2}{4}\Rightarrow I_2=\frac{\pi^2}{8}$.

(5) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1+\sin x}$.

(5) 作 $t=\tan\frac{x}{2}$. 则 $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}dt$. $dx=\frac{2dt}{1+t^2}$

原式 $=\int_0^1\frac{\frac{2}{1+t^2}}{1+\frac{2t}{1+t^2}}dt=\int_0^1\frac{2}{1+t^2+2t}dt=\int_0^1\frac{2}{(1+t)^2}dt=-\frac{2}{1+t}\Big|_0^1=1$

或者：$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1+\sin x}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2})^2}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}{(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2})^2}dx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sec^2\frac{x}{2}dx}{(1+\tan\frac{x}{2})^2}=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d(1+\tan\frac{x}{2})}{(1+\tan\frac{x}{2})^2}=-\frac{2}{1+\tan\frac{x}{2}}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=1$.

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1+\sin x}\overset{x=\frac{\pi}{2}-u}{=\!=\!=}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{du}{1+\cos u}=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{du}{\cos^2\frac{u}{2}}=\tan(\frac{u}{2})\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=1$.

45. 计算积分：$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}5\cos\arctan e^x dx$.

原式 $=5\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos x(\arctan e^x+\arctan\frac{1}{e^x})\,dx=\frac{5\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos x\,dx=\frac{5\sqrt{2}\pi}{4}$.

47. 求证：$\lim_{n\to\infty}(n\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^nx\,dx)=\frac{1}{2}$

令 $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^nx\,dx$. 易得 $I_n=\frac{1}{n-1}-I_{n-2}$. 即 $I_n+I_{n-2}=\frac{1}{n-1}$.

因为 $x\in[0,\frac{\pi}{4}]$ 时. $\tan^{n+2}x\le\tan^nx\le\tan^{n-2}x$ 所以 $f(n+2)\le f(n)\le f(n-2)$

那么 $f(n)+f(n+2)=\frac{1}{n+1}\le 2f(n)$. $f(n)+f(n-1)=\frac{1}{n-1}\ge 2f(n)$.

$\Rightarrow\frac{1}{2(n+1)}\le f(n)\le\frac{1}{2(n-1)}$　$\lim_{n\to\infty}nf(n)=\frac{1}{2}$

48. 设$\vec{u}$和$\vec{v}$是两个长度为2的向量，记$f(t)=|\vec{u}+t\vec{v}|$，若$f'(0)=\frac{1}{3}$，则$\vec{u}$和$\vec{v}$之间夹角$\theta=$______。(2014期末)

49. 微分方程$xdy+[(y+x)^2+x]dx=0$的通解为______。(2014期末)

50. 计算广义积分：$\int_0^{+\infty}\frac{xe^{-3x}}{(1+e^{-3x})^2}dx$ (2014期末)

51. 设二阶常系数线性微分方程$y''(x)+py'(x)+qy(x)=\varphi(x)$的解均满足$y(x)=y(x+2\pi)$，且$\varphi(x)$也是该方程的解，若$\varphi(0)=6$，求$\varphi(x)$及该微分方程的通解。(2014)期末

52. 记$a_n=\int_n^{n^2}\frac{\sin(\pi x)}{x^2}dx$，其中$n$是正整数，证明：(2014期末)

(1) $0<a_{2n}<\frac{1}{2n}$.　(2) 当$n\to\infty$时，$a_n=O(\frac{1}{n})$.

53. 设$f(x)$具有二阶导数，且$f(x)+f'(\pi-x)=\sin x$，$f(\frac{\pi}{2})=0$，求$f(x)$表达式。

54. 计算积分 (1) $\int\frac{1}{2}(1+\tan x)^{2017}dx$ (2) $\int_0^{\pi}\frac{x}{1+|\cos x|}dx$.

55. 设$\vec{OA}=\vec{a}$和$\vec{OB}=\vec{b}$为两个不共线向量，$\angle AOB$为$\vec{a}$、$\vec{b}$夹角，则$\angle AOB$角平分线上的单位向量为( )。

A. $\frac{|\vec{a}|}{||\vec{a}|\vec{a}-|\vec{b}|\vec{b}|}\vec{a}-\frac{|\vec{b}|}{||\vec{a}|\vec{a}-|\vec{b}|\vec{b}|}\vec{b}$.　B. $\frac{|\vec{a}|}{||\vec{a}|\vec{a}+|\vec{b}|\vec{b}|}\vec{a}+\frac{|\vec{b}|}{||\vec{a}|\vec{a}+|\vec{b}|\vec{b}|}\vec{b}$.

C. $\frac{|\vec{b}|}{||\vec{b}|\vec{a}-|\vec{a}|\vec{b}|}\vec{a}-\frac{|\vec{a}|}{||\vec{b}|\vec{a}-|\vec{a}|\vec{b}|}\vec{b}$.　D. $\frac{|\vec{b}|}{||\vec{b}|\vec{a}+|\vec{a}|\vec{b}|}\vec{a}+\frac{|\vec{a}|}{||\vec{b}|\vec{a}+|\vec{a}|\vec{b}|}\vec{b}$.

56. 设函数$f(x)$在闭区间$[0,1]$上具有连续导数，且$f(0)=f(1)=0$，求证：

$$\left(\int_0^1 xf(x)dx\right)^2\le\frac{1}{45}\int_0^1(f'(x))^2dx.$$

等号当且仅当$f(x)=A(x^2-x)$时成立，$A$为常数。

- 一阶微分方程
  - 可分离变量的微分方程.
  - 齐次微分方程和其他可化为可分离变量形式的方程
  - 一阶线性微分方程
- 某些可降阶的高阶微分方程
- 线性微分方程的结构
- 常系数线性微分方程
  - 常系数线性齐次
  - 常系数线性非齐次
  - 欧拉方程.

一、可分离变量的微分方程.

二、齐次微分方程和可化为齐次方程的微分方程.

$$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{y}{x}\right)\Rightarrow 令u=\frac{y}{x}.\ 则\ \frac{dy}{dx}=\frac{d(ux)}{dx}=u+x\frac{du}{dx}.\Rightarrow u+x\frac{du}{dx}=f(u).$$

$$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)\Rightarrow \begin{cases}令\ x=X+h,\ y=Y+k\Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{dY}{dX}=f\left[\frac{a_1+b_1\frac{Y}{X}}{a_2+b_2\frac{Y}{X}}\right]=g\left(\frac{Y}{X}\right).\\ 令\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=k.\ u=a_1x+b_2y\Rightarrow \frac{du}{dx}=a_1+\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{ku+c_1}{u+c_2}\right)=g(u)\end{cases}$$

三、一阶线性微分方程. $\Rightarrow y'+P(x)y=Q(x)\begin{cases}Q(x)=0\ 齐次\\ Q(x)\neq 0\ 非齐次.\end{cases}$

通解: $y=e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C\right).$

$\Delta$ 伯努利方程: $y'+P(x)y=Q(x)y^{\alpha}.\ (\alpha\neq 0,1).\Rightarrow z=y^{1-\alpha}\Rightarrow z'+(1-\alpha)P(x)z=(1-\alpha)Q(x).$

## (四)、某些可降阶微分方程.

线性微分方程解的结构

刘维尔公式：$y_2 = y_1 \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p(x)dx} dx$

○ 判断下列函数组在定义区间内的相关性

(1) $e^{-2x}$，$3e^{-2x}$  (2) $e^{2x}\cos 5x$，$e^{2x}\sin 5x$  (3) $\ln x$，$x\ln x$.  (4) $\sin x$，$\sin x\cos x$.

五、常系数线性齐次方程 $\Rightarrow y''+py'+qy=0$.

$$r^2+pr+q=0 \Rightarrow r_1, r_2 \Rightarrow \begin{cases} y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}. \\ y=C_1e^{rx}+C_2xe^{rx} \\ y=C_1e^{\alpha x}\cos\beta x+C_2e^{\alpha x}\sin\beta x. \end{cases}$$

六、常系数线性非齐次微分方程 $\Rightarrow y''+py'+qy=f(x)$.

1. $f(x)=(b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_{m-1}x+b_m)e^{\lambda x}$. $\lambda$为$r^2+pr+q=0$ k重根

设特解为 $y=x^k(a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_{m-1}x+a_m)e^{\lambda x}$. 解出待定系数

2. $f(x)=[P(x)\cos\beta x+Q(x)\sin\beta x]e^{\alpha x}$. $\alpha+i\beta$为$r^2+pr+q=0$ k重根

设特解为 $y=x^k[A(x)\cos\beta x+B(x)\sin\beta x]e^{\alpha x}$, $A(x)$、$B(x)$次数和$P(x)$、$Q(x)$最高次数相同

k重根只决定 $x^k$. 其他均与原方程一致

七. 欧拉方程. $\Rightarrow$ $x^2y''+pxy'+qy=0$.

令 $x=e^t$ $\Rightarrow$ $[D(D-1)+pD+q]y=0$. $\Rightarrow$ $r(r-1)+pr+q=0$.

0 求解微分方程 [注意判别类型]

(1) $y'=\sin(x+y+4)$.

令 $u=x+y+4$. 则 $\frac{du}{dx}=1+\frac{dy}{dx} \Rightarrow y'=u'-1=\sin u \Rightarrow \frac{du}{dx}=\sin u+1 \Rightarrow \frac{du}{\sin u+1}=dx$

积分: $\frac{du}{\sin u+1}=\frac{1-\sin u}{1-\sin^2 u}du=(\sec^2 u-\tan u\sec u)du \Rightarrow (\tan u-\sec u)=x+C$.

则通解: $\tan(x+y+4)-\sec(x+y+4)=x+C$ $(\sin u\neq -1)$.

(2) $y'=\frac{y}{2x}+\frac{1}{2y}\tan\frac{y^2}{x}$

$\Rightarrow 2yy'=\frac{y^2}{x}+\tan\frac{y^2}{x} \Rightarrow (y^2)'=\frac{y^2}{x}+\tan\frac{y^2}{x}$, 则令 $u=\frac{y^2}{x}$. $\Rightarrow y^2=ux \Rightarrow \frac{d}{dx}y^2=x\frac{du}{dx}+u$

则 $u+x\frac{du}{dx}=u+\tan u \Rightarrow x\frac{du}{dx}=\tan u \Rightarrow \frac{du}{\tan u}=\frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|\sin u|=\ln|x|+C_1 \Rightarrow \sin u=C_1x$

即 $\sin\frac{y^2}{x}=C_1x \Rightarrow y^2=x\arcsin C_1x$.

(3) $\frac{dy}{dx}=\frac{y^2+1}{y^4-2xy}$.

$\Rightarrow \frac{dx}{dy}=\frac{y^4-2xy}{y^2+1}=-\frac{2y}{y^2+1}x+\frac{y^4}{y^2+1} \Rightarrow \frac{dx}{dy}+\frac{2y}{y^2+1}x=\frac{y^4}{y^2+1}$

则 $x=e^{-\int\frac{2y}{y^2+1}dy}\left(\int\frac{y^4}{y^2+1}e^{\int\frac{2y}{y^2+1}dy}dy+C\right)=\frac{1}{y^2+1}\left(\frac{1}{5}y^5+C\right)=\frac{y^5}{5(y^2+1)}+\frac{C}{y^2+1}$

$\Rightarrow$ 通解: $5x(1+y^2)-y^5=C$.

(4) 求微分方程 $y^3dx+2(x^2-xy^2)dy=0$ 通解.

$\Rightarrow$ 将其化为齐次方程: 令 $x=u^2$. 则 $dx=2udu$. 原方程: $y^3u\,du+(u^4-u^2y^2)dy=0$.

即 $(\frac{y}{u})^3du+[1-(\frac{y}{u})^2]dy=0$, 令 $z=\frac{y}{u}$ 解得: $z^2=\ln(zu)^2+C \Rightarrow y^2=x(\ln y^2+C)$.

(5) 求微分方程 $(y^4-3x^2)dy+xydx=0$ 通解.

令 $x=u^2$. 则 $dx=2udu$. $\Rightarrow (y^4-3u^4)dy+2u^3y\,du=0$.

(6) $(x^2y^2-1)dy+xy^3dx=0$.

$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{xy^3}{x^2y^2-1}$ 非齐次. 令 $y=z^\alpha$. 待定 $\alpha$ 值. 则 $dy=\alpha z^{\alpha-1}dz$. 代入有:

$(x^2z^{2\alpha}-1)\alpha z^{\alpha-1}dz+2xz^{3\alpha}dx=0 \Rightarrow \alpha(x^2z^{3\alpha-1}-z^{\alpha-1})dz+2xz^{3\alpha}dx=0$.

要使其齐次. 则 $3\alpha+1=\alpha-1$, 故 $\alpha=-1$. 令 $y=z^{-1}$. 方程化为 $(z^{-2}-x^2z^{-4})dz+2xz^{-3}dx=0$.

$\Rightarrow \frac{dz}{dx}=\frac{2xz}{x^2-z^2}=\frac{2\frac{z}{x}}{1-(\frac{z}{x})^2}$. 令 $u=\frac{z}{x}$. 则 $z=ux$, $\frac{dz}{dx}=x\frac{du}{dx}+u$

$\Rightarrow u+x\frac{du}{dx}=\frac{2u}{1-u^2} \Rightarrow x\frac{du}{dx}=\frac{u+u^3}{1-u} \Rightarrow (\frac{1}{u}-\frac{2u}{1+u^2})du=\frac{1}{x}dx \Rightarrow \ln|u|-\ln|1+u^2|=\ln|x|+C$.

$\Rightarrow x=\frac{Cu}{1+u^2}=\frac{C\frac{z}{x}}{1+(\frac{z}{x})^2}=\frac{C\frac{1}{xy}}{1+(\frac{1}{xy})^2} \Rightarrow x^2y^2+1=Cy$.

(7) $2(y^2-x^2y)dx+x^3dy=0$. (和(4)(5)有区别).

$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{2(x^2y-y^2)}{x^3}=\frac{2}{x}y-\frac{2y^2}{x^3}$ 即 $\frac{dy}{dx}-\frac{2}{x}y=\frac{-2y^2}{x^3}$ (伯努利).

令 $z=y^{-1}$. 则 $\frac{dy}{dx}=-y^2\frac{dz}{dx}$, 原方程化为 $\frac{dz}{dx}+\frac{2}{x}z=\frac{2}{x^3}$

$\Rightarrow z=y^{-1}=e^{-\int\frac{2}{x}dx}\left(\int\frac{2}{x^3}e^{\int\frac{2}{x}dx}dx+C\right)=\frac{1}{x^2}(\ln x^2+C). \Rightarrow x^2=y(\ln x^2+C)$

(8) $xy''=y'\ln\frac{y'}{x}$

$\Rightarrow$ 令 $p(x)=y'$ 则 $y''=p'$. $\Rightarrow xp'=p\ln\frac{p}{x} \Rightarrow \frac{dp}{dx}=\frac{p}{x}\ln\frac{p}{x}$. 令 $u=\frac{p}{x}$. $\Rightarrow \frac{dp}{dx}=u+x\frac{du}{dx}=u\ln u$.

$\Rightarrow \frac{1}{u(\ln u-1)}du=\frac{1}{x}dx \Rightarrow \ln(\ln u-1)=\ln x+C_1 \Rightarrow \ln u-1=C_2x \Rightarrow u=\frac{p}{x}=e^{C_2x+1}=e\cdot e^{C_2x}$

$\Rightarrow p=y'=e\cdot xe^{C_2x} \Rightarrow y=\frac{e}{C_2}(xe^{C_2x}-\frac{1}{C_2}e^{C_2x})+C_3$.

(9) 求方程 $(1+2x-x^2)y''+(x^2-3)y'+(2-2x)y=0$ 的通解. (二阶变系数齐次方程)

$\Rightarrow$ 方程变形为 $y''+\frac{x^2-3}{1+2x-x^2}y'+\frac{2-2x}{1+2x-x^2}y=0$. 由于 $1+p(x)+q(x)=0$. 方程有特解 $y_1(x)=e^x$.

由刘维尔公式，另一个与 $y_1(x)$ 线性无关的解：

$$y_2(x)=y_1(x)\cdot\int\frac{1}{y_1^2(x)}\cdot e^{-\int p(x)dx}dx=e^x\int e^{-2x}\cdot e^{-\int\frac{x^2-3}{1+2x-x^2}dx}dx=1-x^2$$

所以方程通解为 $y=C_1e^x+C_2(1-x^2)$.

(10) 求 $y''-8y'+16y=(x+2)(e^{-4x}+e^{4x})$ 的通解.

$\Rightarrow$ 特征方程：$r^2-8r+16=0$ 得 $r_{1,2}=4$. 则 $\bar{y}=C_1e^{4x}+C_2xe^{4x}$.

又∵ $y''-8y'+16y=(x+2)e^{-4x}$ 的特解为 $y_1^*=(ax+b)e^{-4x}$，代入解得 $a=-\frac{1}{16}$ $b=-\frac{1}{16}$，那 $y_1^*=-(\frac{x}{16}+\frac{1}{16})e^{-4x}$

$y''-8y'+16y=(x+2)e^{4x}$ 的特解为 $y_2^*=x^2(cx+d)e^{4x}$，代入解得 $c=\frac{1}{6}$ $d=1$. 那 $y_2^*=(\frac{1}{6}x^3+x^2)e^{4x}$.

所以方程通解为 $y=\bar{y}+y^*=\bar{y}+y_1^*+y_2^*$.

(11) 求 $y''-2y'+y=\frac{1}{x}e^x$ 的通解. (二阶线性非齐次方程). 必

$\Rightarrow$ 特征方程 $r^2-2r+1=0$ 得 $r_{1,2}=1$. 则 $\bar{y}=C_1e^x+C_2xe^x$.

设 $y^*=C_1(x)e^x+C_2(x)xe^x$，那么有：

$$\begin{cases}C_1'(x)e^x+C_2'(x)xe^x=0\\C_1'(x)e^x+C_2'(x)(e^x+xe^x)=\frac{1}{x}e^x\end{cases} \Rightarrow W(y_1,y_2)=\begin{vmatrix}e^x & xe^x\\e^x & e^x+xe^x\end{vmatrix}=e^{2x}\neq0$$

$$\Rightarrow C_1(x)=\int\frac{-\frac{1}{x}xe^{2x}}{W(y_1,y_2)}dx=-x.\quad C_2(x)=\int\frac{e^x\cdot\frac{1}{x}\cdot e^x}{W(y_1,y_2)}dx=\ln|x|.$$

所以 $y^*=-xe^x+\ln|x|xe^x$. $\Rightarrow y=\bar{y}+y^*$. <常数变易>.

(12) 求解微分方程：$y''+9y=\cos(2x+5)$.

$\Rightarrow$ 令 $2x+5=t$. 则 $dt=2dx$. $\Rightarrow \frac{dy}{dx}=2\frac{dy}{dt}$. $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}(\frac{dy}{dx})=\frac{d}{dt}(\frac{dy}{dx})\cdot\frac{dt}{dx}=4\frac{d^2y}{dt^2}$.

则原方程变为 $4\frac{d^2y}{dt^2}+9\frac{dy}{dt}=\cos t$. 特征方程为 $4r^2+9r=0 \Rightarrow r_{1,2}=\pm\frac{3}{2}i$.

则 $\bar{y}=C_1\cos\frac{3}{2}t+C_2\sin\frac{3}{2}t$. 设特解为 $y^*=A\cos t+B\sin t$. 代入解得 $A=\frac{1}{5}$. $B=0$

∴ $y=\bar{y}+y^*=C_1\cos\frac{3}{2}t+C_2\sin\frac{3}{2}t+\frac{1}{5}\cos t$

(13) 求解微分方程 $y'''-3y''+9y'+13y=e^{2x}\sin 3x$.

$\Rightarrow$ 特征方程 $r^3-3r^2+9r+13=0$ 得 $r_1=-1$. $r_{2,3}=2\pm 3i$，则 $\bar{y}=C_1e^{-x}+e^{2x}(C_2\cos 3x+C_3\sin 3x)$

设其特解 $y^*=xe^{2x}(A\cos 3x+B\sin 3x)$. 代入解得 $A=-\frac{1}{36}$. $B=-\frac{1}{36}$.

所以 $y=\bar{y}+y^*=C_1e^{-x}+e^{2x}[(C_2-\frac{1}{36}x)\cos 3x+(C_3-\frac{1}{36}x)\sin 3x]$.

(14) 求 $y''-4y'+4y=e^{2x}+2\cos^2 x$.

$\Rightarrow$ 特征方程：$r^2-4r+4=0$ 得 $r_{1,2}=2$. 则 $\bar{y}=C_1e^{2x}+C_2xe^{2x}$.

原方程化为 $y''-4y'+4y=e^{2x}+\cos 2x+1$. (由叠加定理可解).

(15) 求解微分方程组：

$$\begin{cases}\frac{dx}{dt}+\frac{dy}{dt}+2x+6y=2e^t & \cdots ① \\ 2\frac{dx}{dt}+3\frac{dy}{dt}+3x+8y=-1. & \cdots ②\end{cases}$$

$\Rightarrow$ ②$-$①$\times 2$得：$\frac{dy}{dt}-x-4y=-1-4e^t$. $\Rightarrow x=\frac{dy}{dt}-4y+4e^t+1$.

②$\times 2-$①$\times 3$得：$\frac{dx}{dt}+3\frac{dy}{dt}+6y=-2-6e^t$，代入 $\frac{dx}{dt}=\frac{d^2y}{dt^2}-4\frac{dy}{dt}+4e^t$ 得：

$\frac{d^2y}{dt^2}-4\frac{dy}{dt}+4e^t+3\frac{dy}{dt}+6y=-2-6e^t \Rightarrow \frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}+6y=-2e^t-2$. 解此方程.

求解方程 $x^3y'''+x^2y''-4xy'=3x^2$. (三阶欧拉方程)

$\Rightarrow$ 令 $x=e^t$. $D(D-1)(D-2)y+D(D-1)y-4Dy=3e^{2t}$ 即：$D^3y-2D^2y-3Dy=3e^{2t}$.

特征方程 $r^3-2r^2-3r=0$，得 $r_1=0$. $r_2=-1$. $r_3=3$. 齐次方程通解 $\bar{y}=C_1+C_2e^{-t}+C_3e^{3t}$

令 $y^*(t)=Ae^{2t}$. 代入得 $A=-\frac{1}{2}$. 则

$$y=C_1+C_2e^{-t}+C_3e^{3t}-\frac{1}{2}e^{2t}=C_1+\frac{C_2}{x}+C_3x^3-\frac{1}{2}x^2.$$

① 求解下列初值问题.

(1) $y^3y''+1=0$, $y(1)=1$, $y'(1)=0$.

$\Rightarrow$ 令 $p(y)=y'$. 则 $y''=\frac{dp}{dx}=p\frac{dp}{dy}$. 原方程化为 $p\frac{dp}{dy}=-\frac{1}{y^3}$ $\Rightarrow$ $p\,dp=-\frac{1}{y^3}dy$.

$\Rightarrow p^2=y^{-2}+C$, 由 $y'(1)=0$, $y(1)=1$ 可知 $C=-1$. 即 $(y')^2=y^{-2}-1$. $\Rightarrow y'=\pm\sqrt{y^{-2}-1}=\frac{dy}{dx}$

$\frac{dy}{\sqrt{y^{-2}-1}}=\pm dx \Rightarrow \frac{y\,dy}{\sqrt{1-y^2}}=\pm dx \Rightarrow \sqrt{1-y^2}=\mp 2x+C'$, 由 $y(1)=1$ 知 $C'=\pm 2$.

所以 $\sqrt{1-y^2}=\mp 2(x-1)$. $\Rightarrow y=\sqrt{1-4(x-1)^2}$

(2) $xy''+x(y')^2-y'=0$. $y(2)=2$. $y'(2)=1$.

令 $p(x)=y'$. 则 $y''=p'$ $\Rightarrow$ $xp'+xp^2-p=0$ $\Rightarrow$ $p'-\frac{1}{x}p=-p^2$ (伯努利方程)

令 $z=p^{-1}$ 原方程化为 $z'+\frac{1}{x}z=1$. $\Rightarrow z=e^{-\int\frac{1}{x}dx}\left(\int e^{\int\frac{1}{x}dx}dx+C_1\right)=\frac{1}{x}\left(\frac{1}{2}x^2+C_1\right)=\frac{x^2+2C_1}{2x}$

由 $y'(2)=1$ 得 $C_1=0$ 即 $z=\frac{1}{y'}=\frac{x}{2} \Rightarrow y'=\frac{2}{x}$, 则 $y=2\ln x+C_2$.

(3) $\frac{dy}{dx}=\frac{e^xy}{e^x+2y}$, $y(0)=1$.

$\Rightarrow \frac{dx}{dy}=\frac{e^x+2y}{e^xy}=\frac{1}{y}+\frac{2}{e^x}$ 即 $\frac{de^x}{dy}-\frac{1}{y}e^x=2$ 令 $u=e^x$ 则 $\frac{du}{dy}-\frac{1}{y}u=2$.

$\Rightarrow u=e^{\int\frac{1}{y}dy}\left(\int 2e^{-\int\frac{1}{y}dy}+C\right)=y(2\ln y+C)=2y\ln y+Cy=e^x$.

代入 $y(0)=1$ 得 $C=1$, 因此 $e^x=2y\ln y+y$.

(4) $y''(x+y'^2)=y'$. $y(1)=y'(1)=1$.

$\Rightarrow$ 令 $p(x)=y'$, 则 $y''=p'$. $\Rightarrow p'(x+p^2)=p$. 即 $\frac{dx}{dp}-\frac{1}{p}x=p$. $\Rightarrow x=p(p+C_1)$.

由 $p(1)=y'(1)=1$ 得 $C_1=0$, 即 $y'=p=\pm\sqrt{x}$. $\Rightarrow y=\pm\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C_2$.

由 $y(1)=1$ 得 $C_2=\frac{1}{3}$. 故 $y=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{3}$.

(5)

0 求一曲线族，它与抛物线族 $y^2=2ax$ 的交角都是 $\frac{\pi}{4}$.

⇒ 设曲线族与 $y^2=2ax$ 在交点 $(x,y)$ 处切线倾角为 $\alpha$，而 $y^2=2ax$ 在 $(x,y)$ 处切线倾角为 $\theta$，则

$\frac{dy}{dx}=\tan\alpha$，$\theta=\alpha+\frac{\pi}{4}$. 又有 $\tan\alpha=\tan(\theta-\frac{\pi}{4})=\frac{\tan\theta-1}{1+\tan\theta}$.

对 $y^2=2ax$ 求导得 $\frac{dy}{dx}=\frac{a}{y}=\frac{y}{2x}$，$\tan\theta=\frac{y}{2x}$，则有 $\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{y}{2x}-1}{1+\frac{y}{2x}}$

令 $u=\frac{y}{2x}$，则 $y=2ux$，$\frac{dy}{dx}=2x\frac{du}{dx}+2u$ ⇒ $2u+2x\frac{du}{dx}=\frac{u-1}{1+u}$，解方程即可.

4. 下列选项中，肯定不是某个二阶常系数线性微分方程的一组解的是（　　）

A. $e^{x}+x,\ x-2e^{-2x},\ e^{-2x}+x$　　B. $e^{x}+xe^{-x},\ 2xe^{x}+xe^{-x},\ xe^{x}+xe^{-x}$

C. $e^{x}-x+1,\ 2-x,\ e^{x}-x$　　D. $x(e^{x}+1),\ xe^{x}-2e^{-x},\ xe^{x}+2x+2e^{-x}$

1. (1) 求平行于Oy轴且过点$(1,-5,1)$和$(3,2,-2)$的平面方程.

法一：平面法向量$\vec{n}$垂直于Oy轴. 不妨设为$\vec{n}=(a,0,1)$. 由$\vec{n}\perp\vec{AC}$可解得$\vec{n}=(3,0,2)$.

法二：平行于Oy轴的平面方程为$Ax+Cz+D=0$. 代入$(1,-5,1)$,$(3,2,-2)$得$A=-\frac{3}{5}D$. $C=-\frac{2}{5}D$.

取$D=-5$, 得$A=3$, $C=2$.

(2) 求过点$M_1(2,1,-3)$, $M_2(5,-1,4)$和$M_3(2,-2,4)$的平面方程.

直接写：
$$\begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z+3 \\ 3 & -2 & 7 \\ 0 & -3 & 7 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow 7x-21y-9z=20. \qquad \begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0.$$

(3) 求过两点$(8,-3,1)$和$(4,7,2)$, 且垂直于平面$3x+5y-z-21=0$的平面方程.

(4) 设平面过点$M_0(-1,2,-3)$, 且分别与两平面$2x-3y+z-4=0$和$2x+y-2z+3=0$垂直, 求平面方程.

向量$\vec{M_0M}$, $\vec{n_1}$, $\vec{n_2}$共面：
$$[\vec{M_0M},\vec{n_1},\vec{n_2}]=\begin{vmatrix} x+1 & y-2 & z+3 \\ 2 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix}=0.$$

2. (1) 求过点$(-3,2,5)$且与坐标轴所成夹角依次为$\frac{\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{\pi}{4}$的直线方程.

方向向量$\vec{s}=(\cos\frac{\pi}{3},\cos\frac{2\pi}{3},\cos\frac{\pi}{4})=(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{1}{2}) \Rightarrow \frac{x-3}{1}=\frac{y-4}{\sqrt{2}}=\frac{z+4}{-1}$.

(2) 求过点$(1,2,3)$并与直线$\frac{x}{4}=\frac{y}{5}=\frac{z}{6}$垂直, 与平面$7x+8y+9z=10$平行的直线方程

(3) 求过点$(-1,2,1)$且平行于直线$\begin{cases} x+y-2z-1=0 \\ x+2y-z+1=0 \end{cases}$的直线方程.

(4) 求过点$P(-1,0,2)$的直线$L'$, 使其与直线$L:\frac{x+1}{-1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z}{2}$相交, 与平面$3x-2y+z-5=0$平行.

(4) ① 先求过点$P$和直线$L$的平面$\Pi_1$. 设为$2y-4-z+\lambda(x+y-1)=0$. (平面束方程).

代入点$P(-1,0,2)$得：$-4-2+\lambda(-1-1)=0 \Rightarrow \lambda=-3$ 即$\Pi_1: 3x+y+z+1=0$

也可用此方法：设任意点$M(x,y,z)$. 由$\vec{M_0M}$, $\vec{s}$, $\vec{M_0P}$共面得：$[\vec{M_0M},\vec{s},\vec{M_0P}]=0$.

② 过点$P$且与平面$3x-2y+z-5=0$平行的平面：$\vec{n}=(3,-2,1)$. $\Rightarrow 3(x+1)-2(y-0)+(z-2)=0$

$\Rightarrow 3x-2y+z+1=0$.

③ 则所求直线为$\begin{cases} 3x+y+z+1=0 \\ 3x-2y+z+1=0. \end{cases}$

(5) 设直线$L$通过点$P(0,0,1)$且和两条直线$L_1:\frac{x}{1}=\frac{y-1}{-1}=z+1$. $L_2:\frac{x+2}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z-1}{-1}$相交. 试求该直线方程.

$\Rightarrow$设$L$的方程为$\frac{x}{m}=\frac{y}{n}=\frac{z-1}{p}$. 由与$L_1$, $L_2$相交得$L$, $L_1$, $L_2$共面.

$M_1(0,1,-1)\in L_1$, $M_2(-2,0,1)\in L_2$. $\vec{s_1}=(1,-1,1)$ $\vec{s_2}=(1,2,-1)$ $\vec{s}=(m,n,p)$.

由$L$, $L_1$相交：
$$[\vec{s},\vec{s_1},\vec{M_1P}]=\begin{vmatrix} m & n & p \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}=0$$
$\Rightarrow m+2n+p=0$

由$L$, $L_2$相交：
$$[\vec{s},\vec{s_2},\vec{M_2P}]=\begin{vmatrix} m & n & p \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}=0.$$
$\Rightarrow n+2p=0$.

令$p=1$, 得$n=-2$, $m=3$.

则$L:\frac{x}{3}=\frac{y}{-2}=\frac{z-1}{1}$.

3. 将直线 $L:\begin{cases}2x-4y+z=0\\3x-y-2z+9=0\end{cases}$ 化为标准式方程.

$\Rightarrow$ 由 $\begin{cases}2x-4y+z=0\\3x-y-2z+9=0\end{cases}$ 解得: $\begin{cases}x=\frac{1}{10}(9z-36)\\y=\frac{1}{10}(7z-18)\end{cases}$ 令 $z=4$ 得 $(0,1,4)$.

又由 $\vec{n}_1=(2,-4,1)$ $\vec{n}_2=(3,-1,-2)$ 得 $\vec{n}=(9,7,10)$, 所以 $\frac{x}{9}=\frac{y-1}{7}=\frac{z-4}{10}$.

法二: 令 $x=t$. 则 $\begin{cases}-4y+z=-2t\\-y-2z+9=-3t\end{cases}$ 解得: $y=1+\frac{7}{9}t$, $z=4+\frac{10}{9}t$. 所以参数方程: $x=t$, $y=1+\frac{7}{9}t$, $z=4+\frac{10}{9}t$.

$\Rightarrow \frac{x}{1}=\frac{y-1}{\frac{7}{9}}=\frac{z-4}{\frac{10}{9}} \Rightarrow \frac{x}{9}=\frac{y-1}{7}=\frac{z-4}{10}$.

4. 求过直线 $L_1:\begin{cases}x-2z-4=0\\3y-z+8=0\end{cases}$ 且与直线 $L_2:\begin{cases}x-y-4=0\\z-y+6=0\end{cases}$ 平行的平面.

$\Rightarrow$ 设为 $x-2z-4+\lambda(3y-z+8)=0$ 得其法向量 $\vec{n}=(1,3\lambda,-2-\lambda)$.

又 $\vec{n}'=(1,-1,0)\times(0,-1,1)=(-1,1,-1)$, 由 $\vec{n}\perp\vec{n}'$ 得: $\lambda=\frac{1}{2}$

5. 求点 $(2,2,1)$ 到直线 $\frac{x+1}{1}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z}{2}$ 的距离.

法一: $M_0(-1,2,0)$. $\vec{s}=(1,-1,2)$. $P(2,2,1)$

$d(P,L)=\frac{|\vec{s}\times\overrightarrow{M_0P}|}{|\vec{s}|}=\frac{1}{\sqrt{6}}\left\|\begin{matrix}i&j&k\\1&-1&2\\3&0&1\end{matrix}\right\|=\sqrt{\frac{35}{6}}$.

法二: 过点 $P$ 垂直于 $L$ 的平面为: $(x-2)-(y-2)+2(z-1)=0$.

将 $L$ 参数化后: $x=t-1$. $y=-t+2$. $z=2t$ 代入平面方程得 $t=\frac{5}{6}$. 代回直线方程得 $Q=(-\frac{1}{6},\frac{7}{6},\frac{5}{3})$. $d(P,L)=|\overrightarrow{PQ}|=\sqrt{\frac{35}{6}}$

法三: 参数化: $x=t-1$. $y=-t+2$, $z=2t$. 设垂足 $Q(t-1,-t+2,2t)$. 由 $\overrightarrow{PQ}\perp\vec{s}$ 得 $t=\frac{5}{6}$.

6. 二直线方程: $L_1: x+1=y+1=\frac{z+1}{-1}$. $L_2: x=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+2}{2}$.

(1) 验证 $L_1$, $L_2$ 异面直线.

(2) 求 $L_1$. $L_2$ 夹角 和 $L_1$、$L_2$ 之间距离

(1) $M_1(-1,-1,-1)$. $M_2(0,1,-2)$. 则 $\overrightarrow{M_1M_2}=(1,2,-1)$. $\vec{s}_1=(1,1,-1)$. $\vec{s}_2=(1,-1,2)$

由 $[\overrightarrow{M_1M_2},\vec{s}_1,\vec{s}_2]=\begin{vmatrix}1&2&-1\\1&1&-1\\1&-1&2\end{vmatrix}=-3\neq0$. 则其不共面.

(2) $\cos\varphi=\frac{|\vec{s}_1\cdot\vec{s}_2|}{|\vec{s}_1||\vec{s}_2|}=\frac{\sqrt{2}}{5}\Rightarrow\varphi=\arccos\frac{\sqrt{2}}{3}$.

(3) 法一: 异面直线距离公式 $d(L_1,L_2)=\frac{|(\vec{s}_1\times\vec{s}_2)\cdot\overrightarrow{M_1M_2}|}{|\vec{s}_1\times\vec{s}_2|}$, 代入得 $d=\frac{3}{\sqrt{14}}$.

法二: 设公垂线 $L$ 与 $L_1$, $L_2$ 交于点 $P_1$. $P_2$. 设 $P_1(t_1-1,t_1-1,-t_1-1)$. $P_2(t_2,-t_2+1,2t_2-2)$.

由 $\overrightarrow{P_1P_2}\perp\vec{s}_1$. $\overrightarrow{P_1P_2}\perp\vec{s}_2$ 可解得 $t_1=\frac{9}{7}$. $t_2=\frac{1}{14}$. 则 $P_1(\frac{2}{7},\frac{2}{7},-\frac{16}{7})$. $P_2(\frac{1}{14},\frac{13}{14},-\frac{26}{14})$.

$\Rightarrow d(L_1,L_2)=d(P_1,P_2)=\frac{3\sqrt{14}}{14}$. 还能得到公垂线方程.

7. 求直线 $\frac{x-2}{0}=\frac{y}{-1}=\frac{z+1}{1}$ 与平面 $2x-y+2z-1=0$ 的交点、夹角以及投影直线.

设过直线 $l$ 且垂直于该平面的平面为 $\Pi$. 则两平面的交线就是所求投影直线.

设其为：$y+z+1+\lambda(x-2)=0$.（过直线 $\frac{x-2}{0}=\frac{y}{-1}=\frac{z+1}{1}$ 的平面束方程）.

由 $\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2=(\lambda,1,1)\cdot(2,-1,2)=0$ 得 $\lambda=-\frac{1}{2}$. 即：$x-2y-2z-4=0$.

所求直线为 $\begin{cases}2x-y+2z-1=0\\x-2y-2z-4=0.\end{cases}$