大学物理

分 第十章 静电场

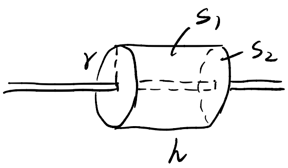
Δ 高斯定理：求高对称电荷分布的电场空间分布

思路：① 选取适当的封闭曲面

② 高斯定理：$\phi = \frac{1}{\varepsilon_0}\iiint \rho\, dV = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum q_i$

③ 电通量定理：$\phi = \oint \vec{E}\cdot d\vec{S}$ (注意$\vec{E}$和$\vec{S}$方向) $= \oint E\cos\theta\, dS$

Δ 求无限长带电直线的场强分布，线密度为λ.

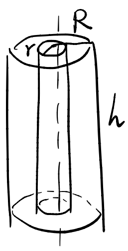


取如图圆柱面为高斯面. 电通量 $\phi = \frac{q}{\varepsilon_0} = \frac{h\lambda}{\varepsilon_0}$

又由 $\phi = \oint \vec{E}\cdot d\vec{S} = \iint_{S_1} E\,dS + \iint_{S_2} E\,dS = \iint_{S_1} E\,dS = E\cdot 2\pi r h$

即 $2\pi r h E = \frac{h\lambda}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\lambda}{2\pi r \varepsilon_0}$ (方向垂直于线向外)

Δ 求半径为R. 无限长带电圆柱体的场强分布 (r<R) 已知 $\rho = \rho_0(\frac{1}{2} - \frac{r^2}{a^2})$ 并求场强最大值.

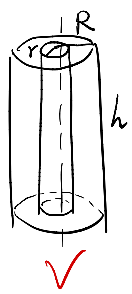


取圆柱面为高斯面. 电通量 $\phi = \frac{q}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0}\iiint \rho\, dV = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\int_0^h dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^r (\frac{1}{2} - \frac{x^2}{a^2}) x\, dx$

$$= \frac{2\pi h \rho_0}{\varepsilon_0}(\frac{1}{4}r^2 - \frac{r^4}{4a^2})$$

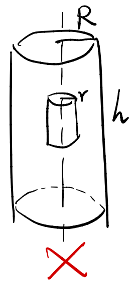
又由 $\phi = \oint \vec{E}\cdot d\vec{S} = \iint_{S_1} E\,dS = E\cdot 2\pi r h$

$\Rightarrow 2\pi r h E = \frac{2\pi h \rho_0}{\varepsilon_0}(\frac{r^2}{4} - \frac{r^4}{4a^2}) \Rightarrow E = \frac{\rho_0}{4\varepsilon_0}(r - \frac{r^3}{a^3})$



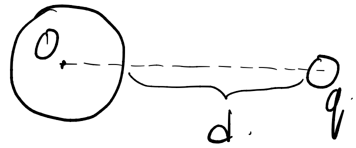
注意高斯面不能选取为：

此时高斯定理仍然成立，但此处的场强不仅由高斯面内部电荷产生、还有外部电荷，因此要求场强则需包括所有的电荷。



Δ计算电势 (11.27) ✗

Δ一半径为R的不带电导体球，距球心a处有一点电荷q. 求导体球心O点电势.



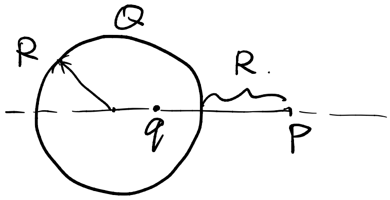
导体球面的感应电荷密度为σ. 则球心处电势为：

$$V_0=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 d}+\iint\frac{\sigma dS}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

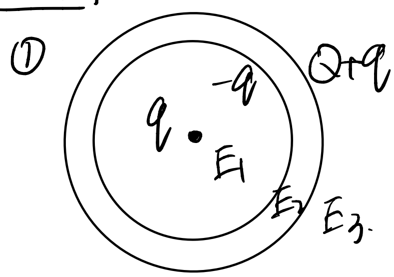
其中$\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 d}$为点电荷q对导体球处产生的电势　$\iint\frac{\sigma dS}{4\pi\varepsilon_0 R}$为感应电荷在球心处产生的电势

由电荷守恒知$\iint\sigma dS=0$. 则 $V_0=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 d}$.

○ 一均匀带电金属薄球壳. 半径为R. 带电量为Q. 在距球心$\frac{R}{2}$处有一点电荷. 球外P点到球心的距离为2R. 求P点电势.



注意：



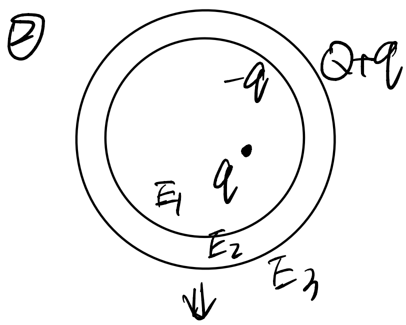
⇓

空腔导体内部电荷在球心

导体内外表面电荷分布均匀

E_1. E_2. E_3为均匀场.

其中 $E_2=0$.



⇓

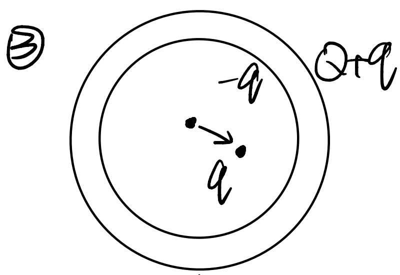
电荷偏心

导体内表面电荷分布不均

外表面电荷分布均匀

E_2. E_3为均匀场. E_1不均匀

其中$E_2=0$

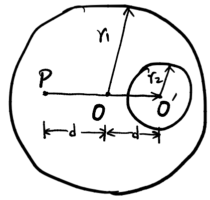


⇓

将电荷移至偏心.

导体球壳电势不变.

4 电荷体密度为ρ的球体内有一球形空腔，两球心距为a.



(1) 求腔内任一点场强

(2) 求P点场强

(1) 以点O'为原心建立坐标轴，设腔内任一点为(r,θ)，$(r<r_2)$.

则 $\Phi_+ = \frac{1}{\varepsilon_0}\int \rho dV = \frac{4\pi R_1^3 \rho}{3\varepsilon_0}$，$R_1 = d + r\cos\theta$.

又 $\Phi_+ = \int \vec{E}_+ d\vec{s} = 4\pi R_1^2 E_+ \Rightarrow E_+ = \frac{R_1 \rho}{3\varepsilon_0} = \frac{(d+r\cos\theta)\rho}{3\varepsilon_0}$ 方向指离点O

$\Phi_- = \frac{1}{\varepsilon_0}\int \rho dV = \frac{4\pi R_2^3 \rho}{3\varepsilon_0}$，$R_2 = r$

又 $\Phi_- = \int \vec{E}_- d\vec{s} = 4\pi R_2^2 E_- \Rightarrow E_- = \frac{r\rho}{3\varepsilon_0}$ 方向指向点O'

则 $\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_-$ O'点：$r=\theta=0 \Rightarrow \vec{E} = \frac{d\rho}{3\varepsilon_0}(\vec{i}+\vec{j})$ 方向指离点O.

(2) 当$r>r_2$时

$E_+ = \frac{(d+r\cos\theta)\rho}{3\varepsilon_0}$，方向指离点O.

$\Phi_- = \frac{1}{\varepsilon_0}\int \rho dV = \frac{4\pi r_2^3 \rho}{3\varepsilon_0}$.

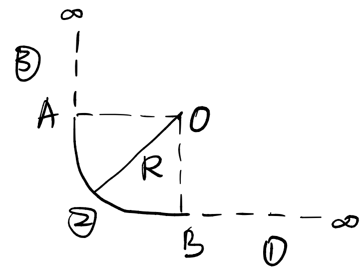
又 $\Phi_- = \int \vec{E}_- d\vec{s} = 4\pi r^2 E_- \Rightarrow E_- = \frac{r_2^3 \rho}{3\varepsilon_0 r^2}$，方向指向点O'.

则 $\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_-$.

P点：$r = 2d$，$\theta = \pi$

∴ $\vec{E}_P = \frac{16(d^3 - r_2^3)\rho}{48 d^2 \varepsilon_0}$，方向指离点O.

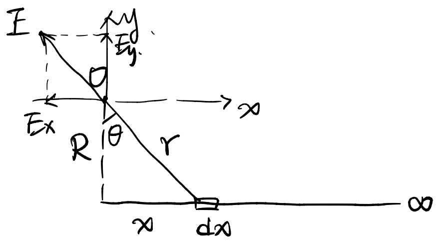
Δ将一"无限长"带电细线弯成题图所示形状. 电荷均匀分布. 电荷线密度为λ 四分之一圆弧AB半径为R. 求圆心O点的电场强度.



对①分析:

$E=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$, $dq=\lambda dx \Rightarrow dE_x=\frac{\lambda dx}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\sin\theta$, $dE_y=\frac{\lambda dx}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cos\theta$

~~且~~有 $\cos\theta=\frac{R}{r} \Rightarrow r=\frac{R}{\cos\theta}$ $\tan\theta=\frac{x}{R} \Rightarrow dx=R\sec^2\theta d\theta$

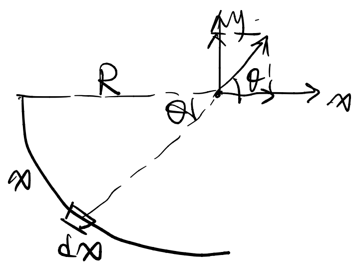


$$E_x=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\theta}{R}d\theta=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

$$E_y=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\theta}{R}d\theta=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

对③同理. 则①③抵消.

对②: $E=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$. $dq=\lambda dx$ $\theta=\frac{x}{R}$.



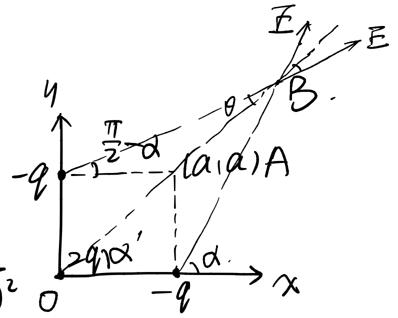
$$E_x=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\int_0^{\frac{\pi R}{2}}\cos\frac{x}{R}dx=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

$$E_y=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\int_0^{\frac{\pi R}{2}}\sin\frac{x}{R}dx=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

则 $\vec{E}=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}(\vec{i}+\vec{j})$.

△ 无穷小量在近似时的处理.

Oxy平面上有三处点电荷. 位置如图. 在B(na, na)处, 以$n>>1$的条件下, 求三电荷在B处产生的场强.



先平移后近似:

$-q$: $\vec{E_1}=\dfrac{-q}{4\pi\varepsilon_0 r_1^2}(\vec{i}+\vec{j})$ $\quad r_1^2=(na)^2+(na-a)^2=[n^2+(n-1)^2]a^2$

$2q$: $\vec{E_2}=\dfrac{2q}{4\pi\varepsilon_0 r_2^2}(\vec{i}+\vec{j})$ $\quad r_2^2=(na)^2+(na)^2=2n^2a^2$.

由 $\tan\alpha=\dfrac{na}{(n-1)a}=\dfrac{n}{n-1}$ 和 $\sin\alpha=\dfrac{n}{\sqrt{n^2+(n-1)^2}}$, $\cos\alpha=\dfrac{n-1}{\sqrt{n^2+(n-1)^2}}$

则 $\vec{E}_x=\vec{E}_1(\sin\alpha+\cos\alpha)+\vec{E}_2\cdot\cos\frac{\pi}{4}$

$$=\frac{-q}{4\pi\varepsilon_0[n^2+(n-1)^2]a^2}\cdot\frac{2n-1}{\sqrt{n^2+(n-1)^2}}+\frac{2q}{4\pi\varepsilon_0\cdot 2n^2a^2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a^2}\left[\frac{1}{\sqrt{2}n^2}-\frac{2n-1}{[n^2+(n-1)^2]^{\frac{3}{2}}}\right]$$

其中 $\dfrac{2n-1}{[n^2+(n-1)^2]^{\frac{3}{2}}}=\dfrac{2n-1}{(2n^2-2n+1)^{\frac{3}{2}}}=\dfrac{\frac{2}{n^2}-\frac{1}{n^3}}{(2-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2})^{\frac{3}{2}}}$. 令$x=\frac{1}{n}$. 则 $x\to 0$.

$$f(x)=\frac{2x^2-x^3}{(2-2x+x^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{(2x^2-x^3)}{2\sqrt{2}}\left[1-x+\frac{x^2}{2}\right]^{-\frac{3}{2}}=\left(\frac{x^2}{\sqrt{2}}-\frac{x^3}{2\sqrt{2}}\right)\left[1+\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-x+\frac{x^2}{2}\right)+\cdots\right]$$

$$=\left(\frac{x^2}{\sqrt{2}}-\frac{x^3}{2\sqrt{2}}\right)\left(1+\frac{3}{2}x-\frac{3}{4}x^2+\cdots\right)=\underline{\frac{x^2}{\sqrt{2}}}+\underline{\frac{3x^3}{2\sqrt{2}}}-\frac{3x^4}{4\sqrt{2}}-\underline{\frac{x^3}{2\sqrt{2}}}-\frac{3x^4}{4\sqrt{2}}+\frac{3}{8\sqrt{2}}x^5+\cdots$$

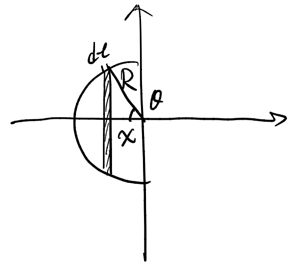
$$\approx\frac{x^2}{\sqrt{2}}+\frac{x^3}{\sqrt{2}}+o(x^3)$$ (将高于x^3的项舍去)

即 $\vec{E}_x=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 a^2}\left[\dfrac{1}{\sqrt{2}n^2}-\dfrac{1}{\sqrt{2}n^2}-\dfrac{1}{\sqrt{2}n^3}\right]=\dfrac{-q}{4\sqrt{2}\pi\varepsilon_0 a^2}\cdot\dfrac{1}{n^3}$

同理可得 $\vec{E}_y$.

Δ 一半径为R的半球面，均匀地带有电荷，电荷面密度为σ，求球心O处的电场强度.

⇒ 把球面分割成许多球带，球带所带电荷 $dq=2\pi r\sigma dl$

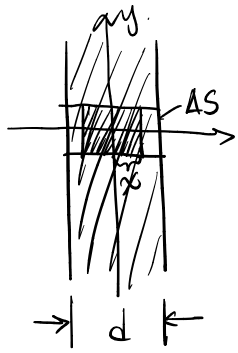


圆环：$E=\frac{xQ}{4\pi\varepsilon_0(x^2+r^2)^{\frac{3}{2}}}$，则 $dE=\frac{x\,dq}{4\pi\varepsilon_0(x^2+r^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{2\pi r x\,dl}{4\pi\varepsilon_0(x^2+r^2)^{\frac{3}{2}}}$

其中 $x=R\cos\theta$，$r=R\sin\theta$，$dl=Rd\theta$

$$\Rightarrow \vec{E}=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}\sin2\theta\,d\theta=\frac{\sigma}{4\varepsilon_0}\vec{i}$$

Δ 一厚度为d的"无限大"均匀带电平板，电荷体密度为ρ，求板内、板外的电场强度分布.



内部：选取如图所示闭合圆柱曲面为高斯面

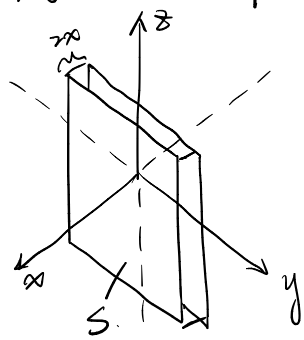
则电通量 $\Phi=\iint\vec{E}\cdot d\vec{S}=2E\Delta S$

又 $\sum q=2\rho x\Delta S$ 则 $\Phi=\frac{\sum q}{\varepsilon_0}=\frac{2\rho x\Delta S}{\varepsilon_0}$

$\Rightarrow \frac{2\rho x\Delta S}{\varepsilon_0}=2E\Delta S \Rightarrow E=\frac{\rho x}{\varepsilon_0}\ (|x|<\frac{d}{2})$

外部：$\Phi=2E\Delta S$，$\sum q=\rho d\Delta S$ $\Rightarrow$ $E=\frac{\rho d}{2\varepsilon_0}\ (|x|>d)$

Δ 设电荷体密度沿x轴方向按余弦规律 $\rho=\rho_0\cos x$ 分布在整个空间，求空间的场强分布.



过±x处作垂直平面作为高斯面

则 $\oint\vec{E}\cdot d\vec{S}=2ES$（场强沿x轴方向）

又 $\Phi=\frac{1}{\varepsilon_0}\int\rho dV=\frac{1}{\varepsilon_0}\iiint\rho_0\cos x\,d\sigma=\frac{1}{\varepsilon_0}\int_{-y_0}^{+y_0}dy\int_{-z_0}^{+z_0}dz\int_{-x}^{+x}\rho_0\cos x\,dx$

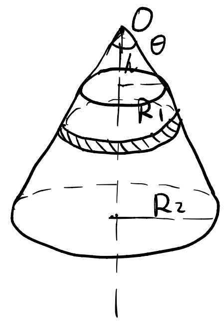
$=\frac{S}{\varepsilon_0}\cdot2\rho_0\sin x$

∴ $E=\frac{\rho_0\sin x}{\varepsilon_0}$

② $\iint\vec{E}\cdot d\vec{S}=2E\Delta S=\frac{q}{\varepsilon_0}$，$q=2\int_0^{x}\rho_0\cos x\,\Delta S\,dx=2\rho_0\sin x\,\Delta S$

$\Rightarrow E=\frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\sin x$.

△ 一锥顶角为θ的圆台，上下底面半径分别为 R_1、R_2，其侧面均匀带电，电荷面密度为σ，求顶点O的电势（无穷远处为电势零点）



中轴线上的电场强度 E 为：以O点为圆点

① 圆环：$E=\dfrac{x\,dq}{4\pi\varepsilon_0(x^2+r^2)^{\frac{3}{2}}}$，$h_1=\dfrac{R_1}{\tan\frac{\theta}{2}}$，$h_2=\dfrac{R_2}{\tan\frac{\theta}{2}}$，$dq=2\pi r\sigma dr$

$$\Rightarrow E(x)=\frac{x\sigma}{2\varepsilon_0}\int_{R_1}^{R_2}\frac{r\,dr}{(x^2+r^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{x\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+R_1^2}}-\frac{1}{\sqrt{x^2+R_2^2}}\right)$$

$$V(x)=\int_x^{\infty}\vec{E}\,d\vec{l}=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\int_x^{\infty}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+R_1^2}}-\frac{x}{\sqrt{x^2+R_2^2}}\right)dx=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\cdot\frac{R_2^2-R_1^2}{\sqrt{x^2+R_1^2}+\sqrt{x^2+R_2^2}}$$

?

$$\Rightarrow V(0)=\frac{1}{2\varepsilon_0}(R_2-R_1)$$

② 在侧面上取面元：$dS=R\,d\varphi\cdot\dfrac{dx}{\cos\frac{\theta}{2}}$ → 点电荷

$$\Rightarrow dU=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}=\frac{\sigma dS}{4\pi\varepsilon_0 r},\quad R=x\tan\frac{\theta}{2},\quad r=\frac{x}{\cos\frac{\theta}{2}}$$

$$dU=\frac{\sigma\cos\frac{\theta}{2}}{4\pi\varepsilon_0 x}\cdot x\tan\frac{\theta}{2}d\varphi\cdot\frac{dx}{\cos\frac{\theta}{2}}=\frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\tan\frac{\theta}{2}\,d\varphi\,dx$$

—— 类似做法

$$U=\frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\tan\frac{\theta}{2}\cdot\int_0^{2\pi}d\varphi\int_{\frac{R_1}{\tan\frac{\theta}{2}}}^{\frac{R_2}{\tan\frac{\theta}{2}}}dx=\frac{1}{2\varepsilon_0}(R_2-R_1)$$

③ 圆台侧面上垂直距O点h处取一圆环，宽度为 dl，此时圆环半径为 $R=h\tan\frac{\alpha}{2}$

圆环上一微元 $dx=Rd\theta$ 在O点的电势：$dV=\dfrac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r}$，其中 $dq=R\sigma d\theta dl$，$r=\dfrac{h}{\cos\frac{\alpha}{2}}$

$$\therefore dV=\frac{R\sigma d\theta dl}{4\pi\varepsilon_0\frac{h}{\cos\frac{\alpha}{2}}}=\frac{h\tan\frac{\alpha}{2}\sigma d\theta dl}{4\pi\varepsilon_0\frac{h}{\cos\frac{\alpha}{2}}}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}\sigma d\theta dl}{4\pi\varepsilon_0}$$

又圆台侧边长度为 $L=\dfrac{R_2-R_1}{\sin\frac{\alpha}{2}}$

⇒ 顶角为α

$$\therefore V=\int_{\frac{R_1}{\sin\frac{\alpha}{2}}}^{\frac{R_2}{\sin\frac{\alpha}{2}}}\int_0^{2\pi}\frac{\sin\frac{\alpha}{2}\sigma}{4\pi\varepsilon_0}d\theta dl=\frac{(R_2-R_1)\sigma}{2\varepsilon_0}$$

A 电势与电场强度的关系

已知某空间区域电势函数为 $V=x^2+xy$，求电场强度分布

$$\Rightarrow E(x)=V_x=2x+y,\quad E(y)=V_y=x$$

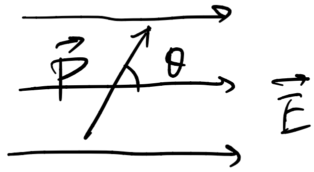
$$\therefore \vec{E}(x,y)=(2x+y)\vec{i}+x\vec{j}$$

Δ 由力矩计算功.

一电偶极子电矩为 $\vec{p}$. 放在电场强度为 $\vec{E}$ 的匀强电场中. $\vec{p}$ 与 $\vec{E}$ 之间夹角为 θ. 将此电偶极子绕通过其中心且垂直于 $\vec{p}$. $\vec{E}$ 平面的轴转 180°. 外力需作功多少?

$$\vec{M} = \vec{p}\times\vec{E} = pE\sin\theta.$$

$$W = \int_{\theta}^{\theta+\pi} \vec{M}\,d\theta = \int_{\theta}^{\theta+\pi} pE\sin\theta\,d\theta = 2pE\cos\theta.$$

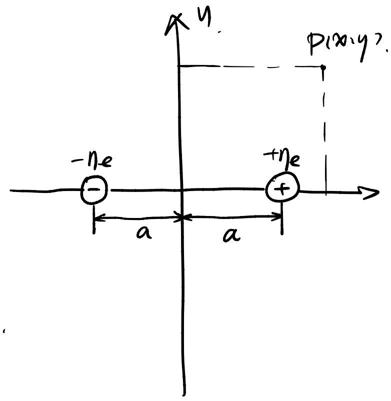


Δ 两条均匀带电的无限长平行直线. 电荷线密度为 $\pm\eta_e$. 相距 2a.

(1) 求空间任一点 $p(x,y)$ 处电势

(2) 证明电势为 U 的等势面为半径为 $r=\frac{2ka}{k^2-1}$ 的圆柱面. 轴线与两直线共面. 位置在 $x=\frac{k^2+1}{k^2-1}a$ 处. $k=e^{\frac{2\pi\varepsilon_0 U}{\eta_e}}$

(3) U=0 的等势面?



(1) 选取 x=0, y=0 的点作为系统零势能点, 则对点 $p(x,y)$

$$U = U_+ + U_- = \frac{\mu_e}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{a}{\sqrt{(x-a)^2+y^2}} - \frac{\mu_e}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{a}{\sqrt{(x+a)^2+y^2}} = \frac{\mu_e}{4\pi\varepsilon_0}\ln\frac{(x+a)^2+y^2}{(x-a)^2+y^2}.$$

令 $k = e^{\frac{2\pi\varepsilon_0 U}{\eta_e}}$. 则:

$$k^2 = \frac{(x+a)^2+y^2}{(x-a)^2+y^2} \Rightarrow (1-k^2)x^2+2a(1+k^2)x+(1-k^2)a^2+(1-k^2)y^2=0$$

$$\Rightarrow \left(x-\frac{k^2+1}{k^2-1}a\right)^2+y^2 = \left(\frac{2ka}{k^2-1}\right)^2.$$

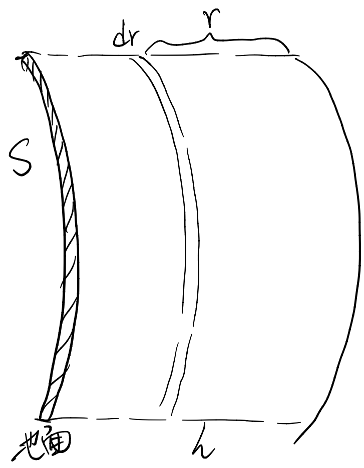
⇒ 轴线为 $x=\frac{k^2+1}{k^2-1}a$. 半径 $r=\left|\frac{2ka}{k^2-1}\right|$.

(3) U=0 时 x=0. y 为任意值. ⇒ 平面 $\underline{\underline{x=0}}$.

A 在靠近地面有很强的电场，电场强度为 $\vec{E}$，垂直地面向下，大小约为 130V/m，在离地面 1.5km 的高空的电场强度也垂直向下，大小约为 25V/m.

(1) 估算地面上的面电荷密度（设地面为无限大导体平面）.

(2) 计算从地面到 1.5km 高空中的平均电荷密度.



(1) $E=\frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0} = -130V/m \Rightarrow \sigma_1 = -260\varepsilon_0 = \cdots$

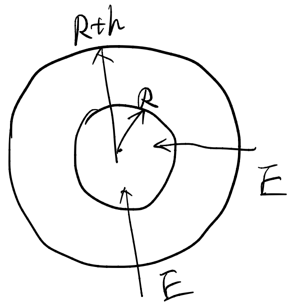
(2) ① 地面到 1.5km 这部分空气为连续带电体.

设地面为零势点，其在 1.5km 处产生的电势为 $-25-(-130) = 105V$.

$$V=\int\frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \int_R^{R+h}\frac{\sigma_2 \cdot S\,dr}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \int_R^{R+h}\frac{\sigma_2\cdot 4\pi r^2\,dr}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{\sigma_2 h}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow \sigma_2 = \frac{\varepsilon_0 V}{h} = \frac{8.85\times10^{-12}\times105}{1.5\times10^3} = 6.2\times10^{-13}\ C/m^3$$

② 取从地面到 1.5km 处的空间为高斯面.



则 $\oiint \vec{E}\cdot d\vec{s} = \oiint \vec{E}_1 \cdot d\vec{s}_1 + \oiint \vec{E}_2\cdot d\vec{s}_2 = E_1S_1 - E_2S_2$

$$= 130\times4\pi R^2 - 25\times 4\pi(R+h)^2$$

又 $\oiint \vec{E}\cdot d\vec{s} = \frac{Q}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma_2 V}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma_2\left[\frac{4}{3}\pi(R+h)^3 - \frac{4}{3}\pi R^3\right]}{\varepsilon_0}$

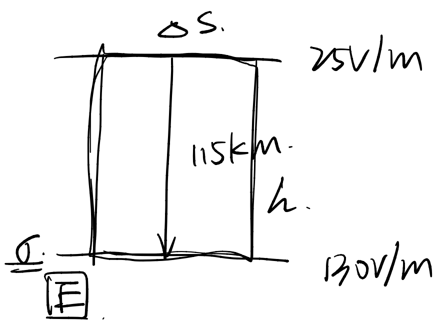
$$\Rightarrow \sigma_2 = \varepsilon_0\cdot\frac{130\times4\pi R^2 - 25\times4\pi(R+h)^2}{\frac{4\pi}{3}(3Rh^2+3R^2h+h^3)} = \varepsilon_0\cdot\left[\frac{130}{\frac{h^2}{R}+h+\frac{h^3}{3R^2}} - \frac{25}{\frac{Rh^2}{(R+h)^2}+\frac{R^2h}{(R+h)^2}+\frac{h^3}{3(R+h)^2}}\right]$$

$R \gg h$

其中 $\frac{130}{\frac{h^2}{R}+h+\frac{h^3}{3R^2}} \approx \frac{130}{h}$，$\frac{25}{\frac{Rh^2}{(R+h)^2}+\frac{R^2h}{(R+h)^2}+\frac{h^3}{3(R+h)^2}} = \frac{25}{\frac{h^2}{R+2h+\frac{h^2}{R}} + \frac{h}{(1+\frac{h}{R})^2} + \frac{h^3}{3(R+h)^2}} \approx \frac{25}{h}$

则 $\sigma_2 = \varepsilon_0\cdot\frac{130-25}{h}$ [可直接将地面看作平面来做]

③ 取高斯面，则：



$\oiint \vec{E}\cdot d\vec{S} = -25\Delta S + 130\Delta S = 105\Delta S$.

又 $\oiint \vec{E}\cdot d\vec{s} = \frac{1}{\varepsilon_0}q = \frac{1}{\varepsilon_0}\cdot\sigma\Delta V = \frac{1}{\varepsilon_0}\sigma\cdot\Delta S\cdot h$

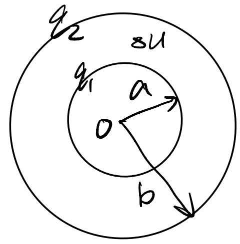
$\Rightarrow 105\Delta S = \frac{1}{\varepsilon_0}\sigma\Delta S h \Rightarrow \sigma = \frac{105\varepsilon_0}{h}$

Δ 同轴传输线由两个很长且彼此绝缘的同轴金属圆柱和圆筒构成. 设圆柱半径为R_1. 电势为V_1. 圆筒内径为R_2 电势为V_2. 求其离轴r处($R_1<r<R_2$)电势

$$\Delta V = V_1 - V_2 = \int \vec{E}\,d\vec{l} = \int_{R_2}^{R_1} \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}dr = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{R_1}{R_2} \Rightarrow \lambda = \frac{2\pi\varepsilon_0(V_1-V_2)}{\ln\frac{R_1}{R_2}}$$

$$\Delta V' = V_1 - V_r = \int_r^{R_1}\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}dr = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{R_1}{r} \Rightarrow V_r = V_1 - \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{R_1}{r} = V_1 - (V_1-V_2)\frac{\ln\frac{R_1}{r}}{\ln\frac{R_1}{R_2}}$$

Δ 球形电容器, 外球壳半径b和内外导体之间电势差U恒定. 当内球半径a为多大时, 使内球表面附近电场强度最小? 求出最小值.



分析: 电势差U由a,b之间电场强度决定. E由a球所带电量决定.
则维持U恒定是由变量q_a和半径a共同决定.

设a球电量为q_1. 则a-b之间电场强度为 $E=\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$ ($a<r<b$).

$$\Delta U = \int\vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_a^b \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right) \Rightarrow q_1 = \frac{4\pi\varepsilon_0\Delta U ab}{b-a}$$

$$E = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 a^2} = \frac{\Delta U b}{a(b-a)}$$. ΔU, b恒定 当$a=\frac{b}{2}$时E最小.

$$E_{min} = \frac{\Delta U b}{\frac{b^2}{4}} = \frac{4\Delta U}{b}$$

Δ 半径为R_1的导体球带有电荷q. 球外有一个内外半径为R_2、R_3的同心导体球壳,其带电荷Q.
两者电势为$U_内$ $U_外$. 电势差为ΔU.

(1) 用导体将球和壳相连. $U_内$ $U_外$ ΔU分别为多少.

(2) 若外球接地. 则$U_内$ $U_外$. ΔU 为多少.

(3) 设外球离地面很远. 若内球接地. 情况如何?

$$U_1=\frac{Q+q}{4\pi\varepsilon_0 r}\ (r>R_3).\qquad U_2=\frac{Q+q}{4\pi\varepsilon_0 R_3}\ (R_2<r<R_3).$$

$$U_3=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}-\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_2}+\frac{Q+q}{4\pi\varepsilon_0 R_3}\ (R_1<r<R_2)$$

$$U_4=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_1}-\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_2}+\frac{Q+q}{4\pi\varepsilon_0 R_3}\ (0<r<R_1).$$

(1) $U_内=U_外=\dfrac{Q+q}{4\pi\varepsilon_0 R_3}$, $\Delta U=0$

(内球q和外球壳内表面$-q$中和, 球和壳为等势体)

电势为自身电荷所决定. 电势为0则电荷也为0.

(2) 接地后, 球壳外表面电荷为0. $U_1=\dfrac{-q}{4\pi\varepsilon_0 r}\ (r>R_3)$? $\rightarrow$ $=0$? $U_2=U_外=0$

$$U_内=U_4=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_1}-\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_2}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)$$

(3) 内球接地. $U_4=U_内=0$.

无限远处电势也为0, 则内球电荷不能为0. 外球壳所带电量在内外表面上重新分配.

→ 内球电势为0为叠加所得. 内球所带电荷不为0.

设内球带电q'. 球壳内外表面为$-q'$, $Q+q'$. 则

$U_2=U_外=\dfrac{Q+q'}{4\pi\varepsilon_0 R_3}\ (R_2<r<R_3)$. 球与球壳电势差为 $\Delta U=\dfrac{q'}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{R_1}-\dfrac{1}{R_2}\right)$

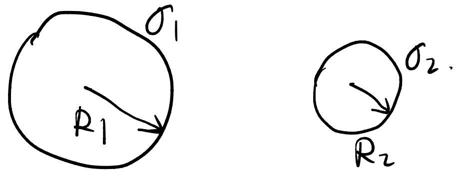
$$则\ U_内=U_外+\Delta U=\frac{Q+q'}{4\pi\varepsilon_0 R_3}+\frac{q'}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)=0.$$

$$\Rightarrow q'=\frac{R_1R_2}{R_1R_3-R_1R_2-R_2R_3}Q\qquad \Rightarrow U_内=\frac{R_1R_2Q}{4\pi\varepsilon_0(R_2R_3-R_1R_3+R_1R_2)}$$

§5 第十一章 电场与物质相互作用

△ 孤立导体电势

有一大球带电面密度 σ_1. 小球带电面密度 σ_2. =



大球电势为 $V_1 = \dfrac{4\pi R_1^2\sigma_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1} = \dfrac{R_1\sigma_1}{\varepsilon_0}$.

小球电势为 $V_2 = \dfrac{4\pi R_2^2\sigma_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2} = \dfrac{R_2\sigma_2}{\varepsilon_0}$.

将两球用导线相连. 则 $V_1 = V_2$. $\Rightarrow$ $R_1\sigma_1' = R_2\sigma_2'$.

即电荷将重新分布.

△ 极化电荷

○ 均匀带电导体球 (r, Q) 包围均匀无限大各向同性介质 (χ_e). 求球面的束缚电荷.

$\Rightarrow$ 设为 q'. 则球表面电场强度为 $E = \dfrac{(Q+q')}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$

又有 $\sigma = \dfrac{q'}{4\pi r^2} = -P$. 及 $P = \chi_e\varepsilon_0 E$

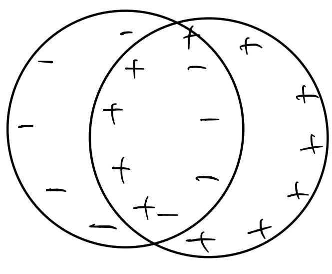
解出 $q' = -\dfrac{\chi_e}{1+\chi_e}Q = \dfrac{1-\varepsilon_r}{\varepsilon_r}Q$

或者 $\Rightarrow$ $4\pi r^2 D = Q$, $D = \varepsilon_0 E + P = \dfrac{1}{\chi_e}P + P = \dfrac{1+\chi_e}{\chi_e}P = \dfrac{Q}{4\pi r^2} \Rightarrow P = \dfrac{\chi_e}{1+\chi_e}Q\cdot\dfrac{1}{4\pi r^2}$

$\sigma = -P \Rightarrow q' = \oiint \sigma dS = 4\pi r^2\sigma = \dfrac{\chi_e}{1+\chi_e}Q$.

○ 一均匀介质球发生均匀极化 $(\vec{P}, R)$. 求极化电荷在介质球内任一点产生的附加电场

$E_+ = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \dfrac{\frac{4}{3}\pi r^3\cdot\sigma_+}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \dfrac{\sigma_+}{3\varepsilon_0}r \Rightarrow \vec{E}_+ = \dfrac{\sigma_+}{3\varepsilon_0}\vec{r}_+$

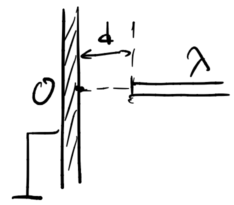


同理: $\vec{E}_- = \dfrac{\sigma_-}{3\varepsilon_0}\vec{r}_-$ 则 $\vec{E} = \vec{E}_+ - \vec{E}_- = \dfrac{\sigma}{3\varepsilon_0}(\vec{r}_+ - \vec{r}_-)$

$= \dfrac{\sigma}{3\varepsilon_0}\vec{l} = \dfrac{\vec{P}}{3\varepsilon_0}$.

Δ 一接地的无限大厚导体板. 一侧为半无限长的均匀带电垂直于导体放置. 带电直线一端与板相距d. 其电荷线密度为λ. 求板上O点处的感应电荷面密度.

$E_1=\int\frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 x^2}=\int_d^{\infty}\frac{\lambda dx}{4\pi\varepsilon_0 x^2}=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 d}$ 为带电导体在O点产生的场强



导体板内部O点附近总场强 $E=0$

感应电荷在附近产生的场强为 $E_2=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ 则 $\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 d}+\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}=0 \Rightarrow \sigma=-\frac{\lambda}{2\pi d}$

Δ 平板电容器. 极面积为S. 带电量为±Q. 两极板间充满介质后, 电场强度为E. 求

(1) 介质的相对介电常数 ε_r.

(2) 介质表面上的极化电荷密度.

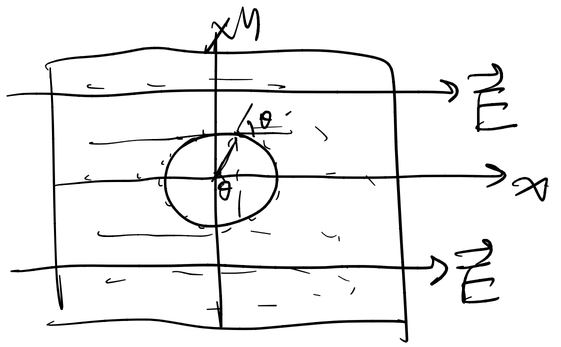
$\Rightarrow$ 真空时 $E=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$. 有介质时 $E_r=\frac{E_0}{\varepsilon_r}=\frac{\sigma}{\varepsilon_r\varepsilon_0}=\frac{\sigma}{\varepsilon}$

$\Rightarrow$(1) $E=\frac{\sigma}{\varepsilon}=\frac{Q}{\varepsilon_0\varepsilon_r S}\Rightarrow\varepsilon_r=\frac{Q}{\varepsilon_0 SE}$

(2) $\sigma'=P=D-\varepsilon_0E=\underbrace{\varepsilon_0\varepsilon_rE}_{\sigma_0}-\varepsilon_0E=(\varepsilon_r-1)\varepsilon_0E$

$\Rightarrow\sigma'=\sigma_0-\varepsilon_0E$

Δ 相对介电常量为 ε_r 的均匀电介质内有一球形空腔(腔内为空气). 电介质中有匀强电场. 求球面上的极化电荷在球心激发的电场强度 E'.



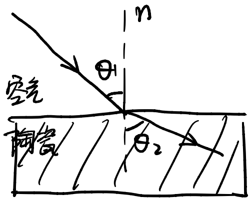
$\vec{P}=\vec{D}-\varepsilon_0\vec{E}=(\varepsilon_r-1)\varepsilon_0\vec{E}$

$-\frac{P}{3\varepsilon_0}=\boxed{\frac{(1-\varepsilon_r)\vec{E}}{3}}$

A 电场线的折射.

○ 陶瓷片 $\varepsilon_r=6.5$、陶瓷片外 $E_1=\theta_1=30^\circ$. $E_1=2.0\times10^4\,V/m$. 求(1) E_2的大小和方向.

(2) 极化电荷面密度.



⇒ 由折射关系: $\tan\theta_2=\dfrac{\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1}}\tan\theta_1=3.753.$

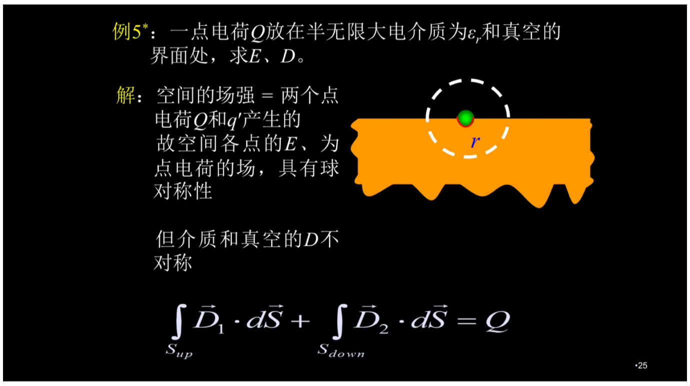
$\Rightarrow \theta_2\approx 75.1^\circ$

由 $D_1\cos\theta_1=D_2\cos\theta_2$ 得: $D_2=D_1\dfrac{\cos\theta_1}{\cos\theta_2}=\varepsilon_0E_1\dfrac{\cos\theta_1}{\cos\theta_2}=5.95\times10^{-7}\,C/m^2$

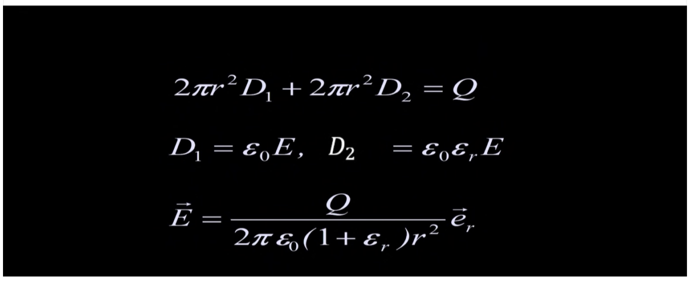
则 $E_2=\dfrac{D_2}{\varepsilon_2}=1.03\times10^4\,V/m.$

极化电荷只分布于靠介质的一侧 ⇒ $\sigma_2'=-\chi_{e2}\varepsilon_0E_2\cos\theta_2=-\varepsilon_0(\varepsilon_{r2}-1)E_2\cos75.1^\circ=-1.27\times10^{-7}\,C/m^2.$

A 电场的边值关系的应用.



$$V=\frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0 r\varepsilon_r}$$



△导体和电介质

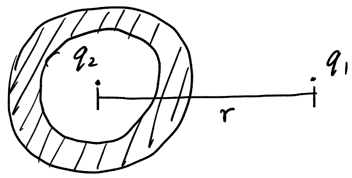
○ 电荷量分别为 q_1、q_2 的两个静止点电荷，相距为 r，试求下列情况下之间的相互作用力，即 q_1 作用在 q_2 上的力 $\vec{F}_{21}$ 和 q_2 作用在 q_1 上的力 $\vec{F}_{12}$。(1) q_1、q_2 均在真空中 (2) q_1、q_2 均在均匀介质中 (3) q_2 在导体空腔内，q_1 在导体外。

⇒ 由库仑定律知，三种情况下 q_1 作用在 q_2 上的力都是 $\vec{F}_{21}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q_1q_2}{r^2}\vec{e}_{12}$，

q_2 作用在 q_1 上的力都是 $\vec{F}_{12}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q_1q_2}{r^2}\vec{e}_{21}$。

注意：q_1 作用在 q_2 上的力并不完全等同于 q_2 所受到的力 F_2。上述三种情况中：(1) 两力相同 (2) q_2 除受到 q_1 的作用力外，还受到电荷外层极化电荷作用在 q_2 上的力。(3) q_2 除受 q_1 的作用力外，还受到导体壳上电荷作用在 q_2 上的力。

○ 一球形空腔导体中有一点电荷 q_2，球外离球心 r 处有一点电荷 q_1，已知球壳上所有电荷量代数和为 0，求 q_2 受到的力。



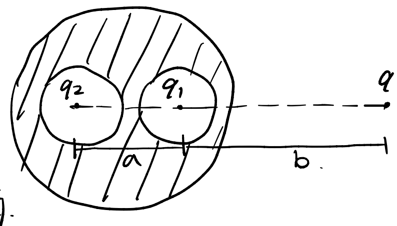
⇒ q_2 所受力包括三部分：(1) q_1 作用在 q_2 上的力，由库仑定律知该力大小为 $F_{12}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q_1q_2}{r^2}$。(2) 导体球壳内表面感应电荷作用在 q_2 上的力，由其均匀分布知该力 $F'=0$。 (3) 导体球壳外表面电荷作用在 q_2 上的力。

该力又分为两部分：① F_1'' 是由于内表面产生感应电荷而出现的电荷，其均匀分布，故 $F_1''=0$

② 由 q_1 在外表面上引起的感应电荷 F_2''，其分布不均匀，故 $F_2''\neq0$，但有 $F_2''=-F_{12}$

综上：$F_2=F_{12}+F'+F_1''+F_2''=0$

○ 一金属球内有两个球形空腔，中心相距 a，两腔中心各有一点电荷 q_1、q_2，球外有一点电荷 q，金属球原先不带电，求金属球壳上的电荷作用在 q_2 上的力和 q_2 所受力。



金属球上的电荷分为三部分：

(1) q_2 腔内表面感应电荷 $(-q_2)$，其均匀分布，则 $F_1=0$

(2) q_1 腔内表面感应电荷 $(-q_1)$，其均匀分布，则 $F_2=-\frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0a^2}$

(3) 金属球外表面电荷：

① (q_1+q_2) 均匀分布，故 $F_3=0$。② 由 q 引起的感应电荷，其分布不均匀，

但有 $F_4=-\frac{qq_2}{4\pi\varepsilon_0(a+b)^2}$

综上：$F'=F_1+F_2+F_3+F_4=-\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q_1}{a^2}+\frac{q_2}{(a+b)^2}\right]$

q_2 所受力 $F_2=0$

4 两个带等量异号电荷的平行金属板内充满均匀介质后，若两板自由电荷与极化电荷的面密度为 σ_0、σ'（绝对值）. 求：

(1) 电介质内的电场强度 E.

(2) 相对介电常数 ε_r. → 极板上的自由电荷与其附近的极化电荷的极性相反.

(1) $\oint \vec{E}\cdot d\vec{S} = ES = \dfrac{(\sigma_0-\sigma')S}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \dfrac{\sigma_0-\sigma'}{\varepsilon_0}$ ⇒ 直接运用真空中的高斯定理

$E = \dfrac{\sigma_0}{\varepsilon_0}$ 为真空中金属板上自由电荷产生的场强 ①

$E' = \dfrac{\sigma'}{\varepsilon_0}$ 为极化电荷产生的场强 ②

$$\begin{array}{ccc} P & & D \\ \uparrow & & \uparrow \\ \sigma' & \doteq & \sigma_0 - \varepsilon_0 E \end{array}$$

(2) $E = \dfrac{\sigma_0}{\varepsilon} = \dfrac{\sigma_0}{\varepsilon_0\varepsilon_r} = \dfrac{\sigma_0-\sigma'}{\varepsilon_0} \Rightarrow \varepsilon_r = \dfrac{\sigma_0}{\sigma_0-\sigma'}$

① 介质中的高斯定理：$E = \dfrac{E_0}{\varepsilon_r}$

② $\sigma' = P = D - \varepsilon_0 E = \varepsilon_0\varepsilon_r E - \varepsilon_0 E = (\varepsilon_r - 1)\varepsilon_0 E$

平板中加入电介质后：$E = \dfrac{E_0}{\varepsilon_r} = \dfrac{\sigma_0}{\varepsilon_0\varepsilon_r} \Rightarrow \varepsilon_0\varepsilon_r E = \sigma_0$

$\Rightarrow \sigma' = \varepsilon_0\varepsilon_r E - \varepsilon_0 E = \sigma_0 - \varepsilon_0 E \Rightarrow E = \dfrac{\sigma_0-\sigma'}{\varepsilon_0}$.

③ 介质中的高斯定理：$\oint \vec{D}\cdot d\vec{S} = q = \sigma_0 S \Rightarrow D = \sigma_0$

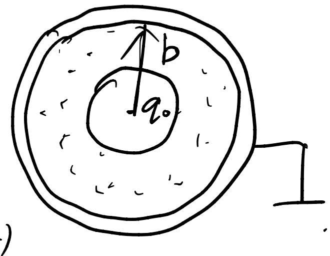
$D = P + \varepsilon_0 E$，而 $P = \sigma'\cos\theta = \sigma'$

$\Rightarrow \sigma_0 = \sigma' + \varepsilon_0 E$.

加深理解：

Δ 一金属球带电荷 q_0，球外有一内半径为 b 的同心接地金属球壳，球、壳之间充满电介质，相对介电常数与到球心距离 r 关系为 $\varepsilon_r=\frac{k+r}{r}$，k 为常量。求电介质中距球心 r 处电势。

加介质前后：Q 不变，C↑，U↓，W↓

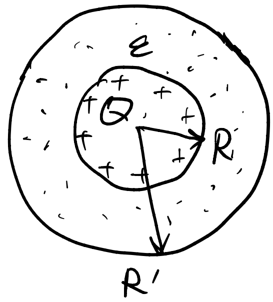


$\Rightarrow$ 未加电介质前：$E_0(r)=\frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$

加电介质后：$E(r)=\frac{E_0}{\varepsilon_r}=\frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cdot\frac{r}{k+r}=\frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0 r(k+r)}$

$V=\int_r^b E(x)dx=\frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0}\int_r^b\frac{1}{x(k+x)}dx=\frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0 k}\ln\frac{b(r+k)}{r(b+k)}$

Δ 半径为 R 的金属球外有外半径为 R' 的电介质层，介电常数为 ε，金属球带电量为 Q，求各部分电场强度分布。



$r<R$ 时，易知 $E_1=0$

$R<r<R'$ 时，由电介质中的高斯定理：

$$\begin{cases}\oint\vec{D}\cdot d\vec{s}=4\pi r^2\cdot D=Q\\ D=\varepsilon E_2\end{cases}\Rightarrow E_2=\frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2}$$

$r>R'$ 时，由电介质中的高斯定理：

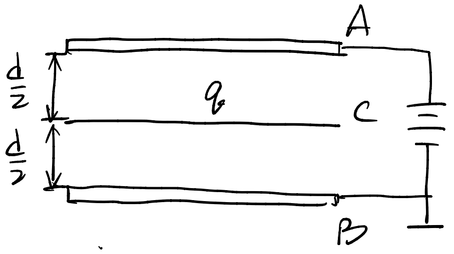
$$\begin{cases}\oint\vec{D}\cdot d\vec{s}=4\pi r^2 D=Q\\ D=\varepsilon_0 E_3\end{cases}\Rightarrow E_3=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

或者由 D 在介质交界垂直方向连续：

$D=\varepsilon E_2=\varepsilon_0 E_3$，则 $E_3=\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}E_2=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$

Δ 平板电容器.

○ 空气平板电容器.极板A、B面积为S.间距为d.接通电源后A板电势$U_A=V$.$U_B=0$.将一带电荷q.面积为S.厚度可忽略的导体片C平行插在两极板中间位置.求导体片C电势



(1) 插入C前后.A、B板电量发生变化.电势差U不变.

设A板带电为Q.则C板上表面带电为−Q.下表面为(Q+q).

B板上表面为−(Q+q).A C、CB分别组成电容器

由于平板电容器$C=\frac{\varepsilon S}{d}$.则$C_{AC}=C_{CB}=C=\frac{\varepsilon S}{2d}$

$\Rightarrow U_{AC}+U_{CB}=\frac{Q}{C}+\frac{Q+q}{C}=V$ 解出$Q=\frac{1}{2}(CV-q)$

则C板电势$V_C=V_B+U_{CB}=\frac{Q+q}{C}=\frac{1}{2}(V+\frac{q}{C})=\frac{1}{2}(V+\frac{qd}{2\varepsilon S})$

或设A带电Q_A.C板上表面带电$-Q_A$.下表面带电Q_B.B板带电$-Q_B$.

$\Rightarrow \begin{cases}\frac{Q_A}{C_A}+\frac{Q_B}{C_B}=V\\ -Q_A+Q_B=q\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}Q_A=\frac{\varepsilon S}{d}V-\frac{q}{2}\\ Q_B=\frac{\varepsilon S}{d}V+\frac{q}{2}\end{cases}$

(2) A−C间电场$E_{AC}=\frac{V}{d}-\frac{q}{2\varepsilon S}$.CB间电场$E_{CB}=\frac{V}{d}+\frac{q}{2\varepsilon S}$

AB在C产生电场$=E=E_{AC}+E_{CB}=\frac{V}{d}\Rightarrow$ C板受力$F=qE=\frac{Vq}{d}$.

○ 面积为S的平板电容器、间距为d.

(1) 插入厚度为$\frac{d}{3}$、相对介电常数为ε_r的电介质平板.其电容量变为多少倍?

(2) 将电介质平板换为金属导体平板?

(1) 插入之前:$C_0=\frac{Q}{U_0}=\frac{\varepsilon_0 S}{d}$.插入之后A板下表面为Q.则电介质上、下表面带电量为−Q、Q、B板为−Q、电介质以外的部分$E_1=\frac{Q}{\varepsilon_0 S}$.电介质内部$E_2=\frac{Q}{\varepsilon_0\varepsilon_r S}$

(可由高斯定理证明.也可将电介质上下表面看作电容器极板得到)

$U=E_1\frac{2d}{3}+E_2\frac{d}{3}=\frac{Q}{\varepsilon_0 S}\cdot\frac{2d}{3}+\frac{Q}{\varepsilon_0\varepsilon_r S}\cdot\frac{d}{3}=\frac{Qd(2\varepsilon_r+1)}{3\varepsilon_0\varepsilon_r S}$

$C=\frac{Q}{U}=\frac{3\varepsilon_0\varepsilon_r S}{d(2\varepsilon_r+1)}=\frac{3\varepsilon_r}{2\varepsilon_r+1}C_0$.

(2) 金属导体不存储电荷.可认为其将原电容分割为相同的两部分再串联

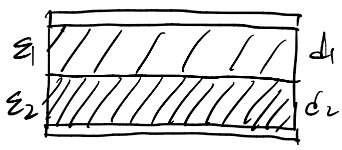
$U=E_0 d=E_0\cdot\frac{2d}{3}\Rightarrow U=\frac{2}{3}U_0\Rightarrow C=\frac{Q}{U}=\frac{3}{2}\cdot\frac{Q}{U_0}=\frac{3}{2}C_0$.

(等价于将原电容极板间距缩小)

0 平板电容器(极板面积为S，间距为d)中间有两层厚度d_1、d_2($d_1+d_2=d$)、介电常数为ε_1、ε_2的电介质层.求

(1) 电容C.

(2) 当金属板上带电密度为$\pm\sigma_e$时，两介质层分界面极化电荷密度.

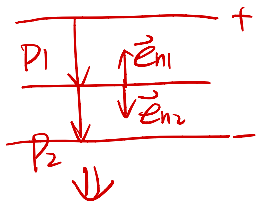


(1). 由高斯定理：$\oiint \vec{D}\cdot d\vec{S} = q = \iint \sigma dS \Rightarrow D = \sigma = \frac{Q}{S}$.

由边值定理：D处处连续且相等. $D_1 = D_2 = D = \sigma = \frac{Q}{S}$.

因 $D_1 = \varepsilon E_1 = \varepsilon_0\varepsilon_1 E_1$，$D_2 = \varepsilon E_2 = \varepsilon_0\varepsilon_2 E_2 \Rightarrow E_1 = \frac{Q}{\varepsilon_0\varepsilon_1 S}$ $E_2 = \frac{Q}{\varepsilon_0\varepsilon_2 S}$

$U = E_1 d_1 + E_2 d_2 = \frac{Qd_1}{\varepsilon_0\varepsilon_1 S} + \frac{Qd_2}{\varepsilon_0\varepsilon_2 S} \Rightarrow C = \frac{Q}{U} = \frac{\varepsilon_0 S}{\frac{d_1}{\varepsilon_1} + \frac{d_2}{\varepsilon_2}}$.



(2) 相应极板附近的电场强度为 $E_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{\sigma_e}{\varepsilon_0\varepsilon_1}$，$E_2 = \frac{\sigma_e}{\varepsilon_0\varepsilon_2}$

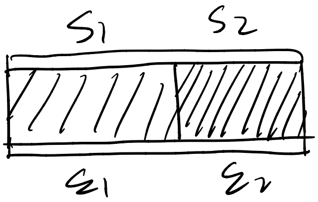
又因为 $D_1 = D_2 = \sigma_e$. $D_1 = P_1 + \varepsilon_0 E_1$ $D_2 = P_2 + \varepsilon_0 E_2$.

所以 $P_1 = D_1 - \varepsilon_0 E_1 = (\varepsilon_r - 1)\varepsilon_0 E_1 = \frac{\varepsilon_1 - 1}{\varepsilon_1}\sigma_e$，$P_2 = \frac{\varepsilon_2 - 1}{\varepsilon_2}\sigma_e$.

介质交界面：$\sigma = P_1\cos\theta - P_2\cos\theta = P_1 - P_2 = (\frac{1}{\varepsilon_1} - \frac{1}{\varepsilon_2})\sigma_e$.

$\begin{cases} \sigma_1 = -P_1 \\ \sigma_2 = P_2 \end{cases}$

还可考虑：



0 一平板电容器板面积为S 间距为d. 板间充满相对介电常数为ε_r的均匀介质. 求出下列情况中外力所作的功.

(1) 维持极板上面电荷密度σ_0不变把介质取出.

(2) 维持电压U不变将介质取出.

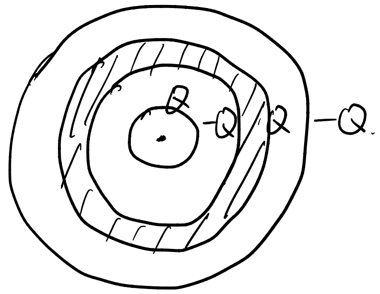
Δ 球形电容器（加深理解）

o 一球形电容器内外半径为 R_1、R_4. 在中间加入半径分别为 R_2、R_3 的同心导体球壳. 内壳(R_1)带电量为 Q. 求以 R_1、R_4 为两极的电容.

$R_1 \sim R_2$: $U_1 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$.

$R_2 \sim R_3$: $E = 0 \Rightarrow U = 0$ $\qquad \Rightarrow U = U_1 + U_2$. $C = \frac{Q}{U}$.

$R_3 \sim R_4$: $U_2 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_4}\right)$.



o 半径为 R 的导体外壳套有一个与它同心的导体球壳. 内外半径为 R_1、R_2. 当内球带电量为 Q 时. 求系统储存的静电能. 用导线将球与壳相连后静电能变化了多少?

(1) 内球与内球壳构成电容器 $\Rightarrow W_1 = \frac{1}{2}\int V_1 dq_1 + \frac{1}{2}\int V_2 dq_2 = \frac{1}{2}V_1\int dq_1 + \frac{1}{2}V_2\int dq_2 = \frac{1}{2}V_1 Q - \frac{1}{2}V_2 Q$

$$= \frac{1}{2}Q(V_1 - V_2) = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_1}\right).$$

(或者用电场能量计算: $W = \frac{1}{2}\iiint \varepsilon E^2 dV = \frac{1}{2}\int_R^{R_1} \varepsilon\left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\right)^2 \cdot 4\pi r^2 dr = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_1}\right)$

外球壳带电 Q. 则其外部空间电场能量 $W_2 = \frac{1}{2}\iiint \varepsilon_0 E'^2 dV = \frac{1}{2}\int_{R_2}^{\infty} \varepsilon_0\left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\right)^2 \cdot 4\pi r^2 dr = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R_2}$.

$\therefore W = W_1 + W_2 = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$.

(2) 相连后. 内球与内球壳中和. 不带电. 只剩下外球壳. $W' = W_2 = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R_2}$.

△ 柱形电容器

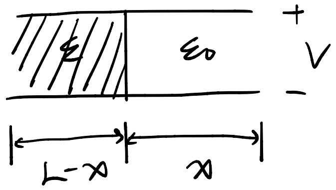
✓ ○ 一圆柱形电容器，外柱面直径为4cm，内柱面直径不定，其间充满各向同性的电介质，该介质的击穿电场强度 $E_0=200kV/cm$，求该电容器能承受的最高电压

$$E=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon r}\Rightarrow \lambda=2\pi\varepsilon r E,\quad U=\int_r^R E\,dr=\int_r^R\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon r}dr=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{R}{r}.$$

代入 $\lambda=2\pi\varepsilon r E_0\Rightarrow U=E_0\cdot r\ln\frac{R}{r}$. $\frac{dU}{dr}=0\Rightarrow r=\frac{R}{e}$

$$\Rightarrow U_{max}=E_0\cdot\frac{R}{e}\ln e=\frac{R}{e}E_0.$$

○ 一长为L的圆筒形电容器由一半径为a的内芯与一半径为b的外部薄导体壳构成($L\gg a$和b)，内外层之间充满介电常数为ε的绝缘材料，在电容器两端加上恒定的电压V，同时将电介质无限缓慢拉出电容器，需要多大的力？



$$\Rightarrow \vec{E}=\frac{Q}{2\pi\varepsilon L r}\vec{e}_r,\quad C=\frac{2\pi\varepsilon L}{\ln(\frac{b}{a})}.$$

$$C'=\frac{2\pi\varepsilon_0 x}{\ln(\frac{b}{a})}+\frac{2\pi\varepsilon(L-x)}{\ln(\frac{b}{a})}=\frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln(\frac{b}{a})}\left[\frac{\varepsilon L}{\varepsilon_0}+(1-\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0})x\right].$$

电介质抽出使储能发生变化，能量变化来自外力做功，由功能原理：

$$Fdx=VdQ-\frac{1}{2}V^2dC.$$

V恒定：$dQ=dVC=VdC\Rightarrow Fdx=\frac{1}{2}V^2dC=\frac{\pi\varepsilon_0V^2}{\ln(\frac{b}{a})}(1-\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0})dx$

$$\therefore F=\frac{\pi\varepsilon_0V^2}{\ln(\frac{b}{a})}(1-\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}).$$

$$Fdx+\frac{1}{2}V^2dC=VdQ.$$

其中Fdx为外力做功，$dW=\frac{1}{2}V^2dC$为电容值变化电池充电所增加能量。

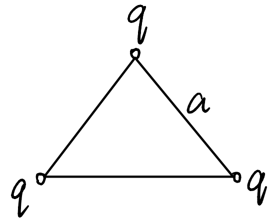
VdQ为总的能量变化？

Δ 自能和互能

注意自能和互能的概念. 系统静电能 = 自能 + 互能.

点电荷系没有自能. 连续带电体有自能

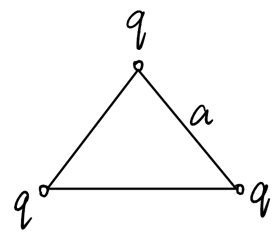
○ 边长为a的正三角形的三个顶端分别固定有电量为q的三个点电荷. 求该带电系统的静电能.



各个电荷所处位置电势均为 $\varphi = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 a}$

则系统静电能为 $W = \sum \frac{1}{2} q_i \varphi_i = \frac{3q^2}{4\pi\varepsilon_0 a}$

○ 3个半径r很小的带电球, 电量均为q, 放在一边长为a的等边三角形三个顶点上. 求自能互能和静电能



⇒ 对于半径为r的球体, 其本身具有的静电场能(自能):

$$W_1 = 3\times\frac{1}{2}\int dq\,U = 3\times\frac{1}{2}\times\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cdot q = \frac{3q^2}{8\pi\varepsilon_0 r^2}$$

各带电体之间的相互作用能(互能):

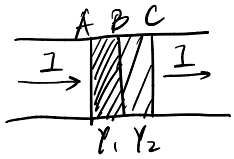
$$W_2 = \frac{1}{2}\sum q_i\varphi_i = \frac{1}{2}\times 3\times q\times\frac{q}{2\pi\varepsilon_0 a} = \frac{3q^2}{4\pi\varepsilon_0 a}$$

带电系统的静电能: $W = W_1 + W_2 = \frac{9q^2}{8\pi\varepsilon_0 a}$

分 第十二章 电流与磁场

Δ $\vec{j}$和I、$\vec{E}$之间的联系

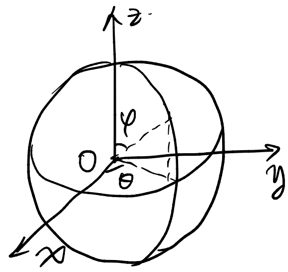
○两边为电导率很大的导体，中间为两层电导率分别为γ_1、γ_2的均匀介质，其厚度分别为d_1、d_2，导体截面积为S，通过导体的恒定电流为I，求每介质中电场强度的大小。



⇒ $\vec{j}=\gamma\vec{E}$，$I=\int\vec{j}d\vec{S}=jS$

∴ $E_1=\frac{I}{\gamma_1 S}$，$E_2=\frac{I}{\gamma_2 S}$

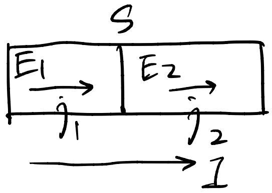
○如图，恒定电流场$\vec{j}=j\vec{j}$中有半径为R的球面，用积分求出$x>0$半球面上的$\vec{j}$的通量I。



⇒ $dI=\vec{j}d\vec{S}=j\cdot Rd\theta\cdot Rd\varphi\cdot\cos\theta\sin\varphi=R^2j\cos\theta\sin\varphi d\theta d\varphi$

∴ $I=4R^2j\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta d\theta=4R^2j$

○给定一恒定电流，两导体相接，已知j_1，试求E_1、E_2、j_2

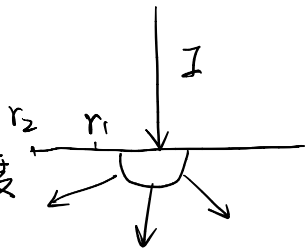


⇒ 由稳恒电场条件：$\oint\vec{j}\cdot d\vec{S}=-j_1S+j_2S=0$ ⇒ $j_2=j_1$（I是连续的）

由欧姆定律微分形式：$E_1=j_1\gamma_1$，$E_2=j_2\gamma_2$。

⇒ 电场在界面上不连续（因为有电荷积累），电流强度连续

○大地电导率为γ，杆子闪电电流为I，求r外$r_1\to r_2$之间的电压。



⇒ 电流强度I流入大地后向四周平均分布。

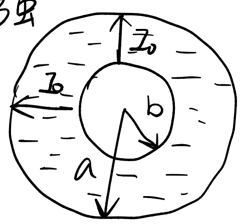
则r处的电流密度为$j=\frac{I}{2\pi r^2}$，进而由欧姆定律可知电场强度

$E=\frac{I}{\gamma}=\frac{I}{2\pi\gamma r^2}$ ⇒ $V_2-V_1=\int_{r_1}^{r_2}E(r)dr=\frac{1}{\gamma 2\pi}(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2})$

Δ 微分形式的欧姆定律和焦耳定律。

○同心金属球壳a、b（a>b），充满电导率$\gamma=kE$的材料，若漏电电流为I_0，求材料的热功率。

⇒ 热功率为热功率密度对体积的积分，需求出电流密度再由欧姆定律求场强



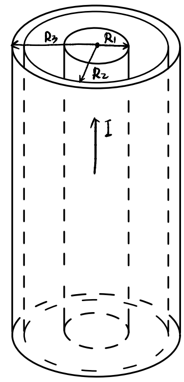
电流密度：$j(r)=\frac{I_0}{4\pi r^2}$ ⇒ 由欧姆定律：$E(r)=\frac{j}{\gamma}=\frac{I_0}{4\pi\gamma r^2}$

又由$\gamma=kE$，即$E(r)=\frac{1}{r}\sqrt{\frac{I_0}{4\pi k}}$，则热功率密度：$w(r)=\gamma E^2=kE^3=\frac{1}{r^2}(\frac{I_0}{4\pi k})^{\frac{3}{2}}$

⇒ $W=\int_b^a w(r)dr=\int_b^a\frac{1}{r^2}(\frac{I_0}{4\pi k})^{\frac{3}{2}}dr=(\frac{I_0}{4\pi k})^{\frac{3}{2}}(\frac{1}{b}-\frac{1}{a})$

Δ 同轴电缆的磁场

同轴电缆内导体圆柱半径为R_1，外导体圆筒内外径为R_2、R_3，电缆载有工作电流I，求各空间部分磁场。



1°. 当$r<R_1$时，选取安培环路。

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 \Sigma I = \mu_0 \cdot \frac{I}{\pi R_1^2}\cdot \pi r^2 = \frac{\mu_0 I r^2}{R_1^2}$$

$$2\pi r B = \frac{\mu_0 I r^2}{R_1^2} \Rightarrow B = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R_1^2} \quad (r<R_1)$$

2°. 当$R_1<r<R_2$时

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I \Rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad (R_1<r<R_2)$$

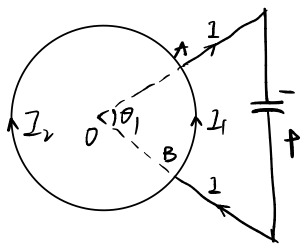
3°. 当$R_2<r<R_3$时

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 \Sigma I = \mu_0 \left[I - \frac{I\pi(r^2-R_2^2)}{\pi(R_3^2-R_2^2)}\right] \Rightarrow B = \frac{\mu_0 I (R_3^2-r^2)}{2\pi r(R_3^2-R_2^2)} \quad (R_2<r<R_3)$$

4°. 当$r>R_3$时

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I = 0 \Rightarrow B = 0$$

Δ 两长直导线沿半径方向引到导体环上A、B两点，并与很远处电源相连，求环中心O点磁感应强度B



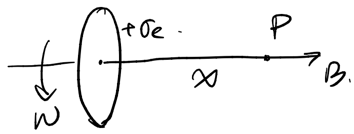
$$I_1 = \frac{U}{R_1} = \frac{U}{\rho \cdot \frac{L_1}{S}},\quad I_2 = \frac{U}{\rho\frac{L_2}{S}} \quad 则\ I_1L_1 = I_2L_2$$

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi}\int_{L_1}\frac{dL}{r^2} = \frac{\mu_0 I_1 L_1}{4\pi r^2} \quad B_2 = \frac{\mu_0 I_2 L_2}{4\pi r^2} \Rightarrow B_0 = 0$$

或者：$U = I_1R_1 = I_2R_2 \Rightarrow I_1\theta_1 = I_2\theta_2$

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi R}\theta_1,\quad B_2 = \frac{\mu_0 I_2}{4\pi R}\theta_2 \Rightarrow |B_1| = |B_2|,\quad B = B_1 - B_2 = 0$$

○ 如图，半径为R的圆片上均匀带电，电荷面密度为σ_e，令该片以角速度绕中心轴旋转，求轴线上x处磁场。

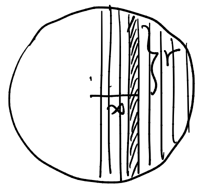


⇒ 圆片上半径r处的等效电流为：$dI=\frac{dq}{T}=\frac{2\pi r dr\cdot\sigma_e}{\frac{2\pi}{\omega}}=\omega r\sigma_e dr$

$$B_x=\int_0^R dB(r)=\int_0^R\frac{\mu_0\omega r\sigma_e\cdot r^2dr}{2(r^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{\mu_0\omega\sigma_e}{2}\int_0^R\frac{r^3dr}{(r^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{\mu_0\sigma_e\omega}{2}\left[\frac{R^2+2x^2}{\sqrt{R^2+x^2}}-2x\right]$$

○ 在半径为R的木球上紧密地绕有细导线，相邻线圈可以看作相互平行，以单层盖住半个球面，如图所示。导线中通有电流I，线圈总匝数为N，试按以下两种情况求球心处磁感应强度。

(1) 线圈沿球半径均匀分布 (2) 沿球面均匀分布。



⇒ $B=\frac{\mu_0 I r^2}{2(r^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}$，$r^2+x^2=R^2$，$n=\frac{N}{R}$

半径为r处线圈共有$n\,dx=\frac{N}{R}dx$匝，产生的磁场为$dB=\frac{\mu_0 I r^2\cdot\frac{N}{R}}{2R^3}dx$ ⇒ $r^2=R^2-x^2$

$$\Rightarrow B=\int_0^R\frac{\mu_0 I(R^2-x^2)\cdot\frac{N}{R}}{2R^3}dx=\frac{\mu_0 NI}{2R^4}\int_0^R(R^2-x^2)dx=\frac{\mu_0 NI}{3R}$$

(2) $B=\frac{\mu_0 I r^2}{2(r^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}$，$r^2+x^2=R^2$，$n=\frac{2N}{\pi R}$

半径为r处线圈共有$R\,d\theta\cdot n=\frac{N}{\pi}d\theta$匝，产生磁场大小为$dB=\frac{\mu_0 I r^2\cdot\frac{2N}{\pi}}{2R^3}d\theta$ ⇒ $r^2=(R\cos\theta)^2$

$$\Rightarrow B=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mu_0 I\cdot(R\cos\theta)^2\cdot\frac{N}{\pi}}{R^3}d\theta=\frac{\mu_0 NI}{\pi R}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta d\theta=\frac{\mu_0 NI}{4R}$$

类似分割求极限。

另种做法：

(1) $B=\sum\frac{\mu_0\Delta I r^2}{2(r^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}=\sum\frac{\mu_0\Delta I(R^2-x^2)}{2R^3}$，$\Delta I=\frac{\Delta x}{R}\cdot NI$，$\Delta x=\frac{R}{n}$，$x=\frac{iR}{n}$

$$\Rightarrow B=\frac{\mu NI}{2R^2}\sum\Delta x-\frac{\mu_0 NI}{2R}\sum\frac{i^3}{n^3}=\frac{\mu_0 NI}{2R}-\frac{\mu_0 NI}{2R}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}=\frac{\mu_0 NI}{2R}\left(1-\frac{1}{3}-\frac{1}{2n}-\frac{1}{6n^2}\right)$$

$n\to\infty$，$B\to\frac{\mu_0 NI}{3R}$

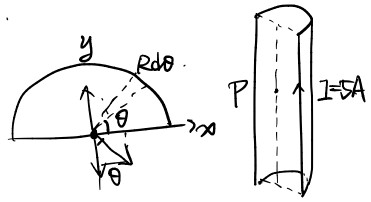
(2) 每匝线圈与球心连线与轴线之间夹角为：$0,\ \Delta\theta,\ 2\Delta\theta,\ \cdots\frac{\pi}{2}-\Delta\theta,\ \frac{\pi}{2}$

每匝线圈在球心处产生磁场：$B_i=\frac{\mu_0 I r^2}{2(r^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{\mu_0 I R^2\sin^2\theta}{2R^3}=\frac{\mu_0 I}{2R}\sin^2\theta$

$$B=\sum B_i=\sum\frac{\mu_0 I}{2R}\sin^2\theta=\frac{\mu_0 I}{2R}\sum\sin^2\theta=\frac{\mu_0 I}{2R}\left[\sin^2 0+\sin^2\Delta\theta+\sin^2 2\Delta\theta+\cdots+\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-\Delta\theta\right)+\sin^2\frac{\pi}{2}\right]$$

$$=\frac{\mu_0 I}{2R}\cdot\frac{N}{2}=\frac{\mu_0 NI}{4R}$$

0 半径为R的无限长半圆柱形金属片中，有电流I=5A自下而上通过，求轴线上一点P磁感应强度大小



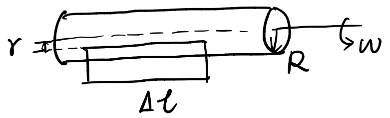
⇒ 无限长直线：$B=\frac{\mu_0 I}{2\pi d}$，夹角为θ处的直线电流元 $dI=\frac{I}{\pi R}\cdot Rd\theta=\frac{I}{\pi}d\theta$

⇒ $B_x=\int B\sin\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mu_0\cdot\frac{I}{\pi}\sin\theta}{2\pi R}d\theta=\frac{\mu_0 I}{\pi^2 R}$，$B_y=\int B\cos\theta=0$.

0 一均匀带电长直圆柱体，电荷体密度为ρ，半径R，若圆柱绕其轴线高速旋转，角速度为ω，求

(1) 圆柱体内距轴线r处的磁感应强度大小。

(2) 两端面中心的磁感应强度大小。



取如图所示安培环路，则 $\oint \vec{B}\cdot d\vec{l}=B\cdot\Delta l=\mu_0\Delta I$

因 $dI=\frac{dq}{T}=\frac{\omega}{2\pi}dq=\frac{\omega}{2\pi}\rho dV=\frac{\omega}{2\pi}\rho\cdot S dl=\frac{\omega}{2\pi}\rho\cdot\pi(R^2-r^2)dl$

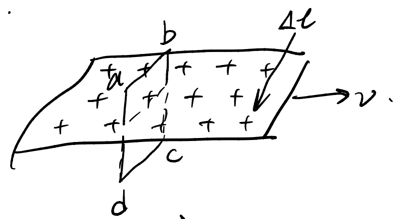
⇒ $B=\mu_0\frac{\Delta I}{\Delta l}=\frac{1}{2}\mu_0\omega\rho(R^2-r^2)$

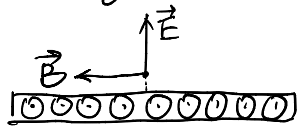
r=0时（轴心）：$B_0=\frac{1}{2}\mu_0\omega\rho R^2$，端面中心为轴心一半 ⇒ $B_0'=\frac{1}{4}\mu_0\omega\rho R^2$.

0 一橡皮传输带以速度v匀速向右运动，如图，橡皮带上均匀带有电荷，电荷面密度为σ.

(1) 求橡皮带中部上方表面一点处的磁感应强度

(2) 证明非相对论情形下，运动电荷速度 $\vec{v}$ 及它产生的磁场 $\vec{B}$ 和电场 $\vec{E}$ 之间的联系：$\vec{B}=\frac{1}{c^2}\vec{v}\times\vec{E}$（$c=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$）.





⇒(1) 垂直于运动方向作闭合回路，⇒ $B=\frac{\mu_0\alpha}{2}$（α为电流线密度）

$$\alpha=\frac{\Delta I}{\Delta l}=\frac{j\Delta S}{\Delta l_{\perp(\Delta S)}}=\frac{(nq)v\Delta l}{\Delta l}=\sigma v \Rightarrow B=\frac{\mu_0\sigma v}{2}$$

(2) $E=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ ⇒ $\vec{B}=\mu_0\cdot\frac{2\varepsilon_0 E}{2}v=\mu_0\varepsilon_0\cdot\vec{E}\times\vec{v}$

(2) 匀速运动的点电荷产生的磁场和电场分别为

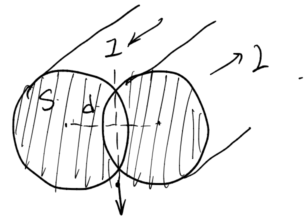
$$B=\frac{\mu_0 qv(1-\frac{v^2}{c^2})\sin\theta}{4\pi r^2(1-\frac{v^2\sin^2\theta}{c^2})^{3/2}} \qquad \boldsymbol{E}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1-\frac{v^2}{c^2}}{(1-\frac{v^2\sin^2\theta}{c^2})^{3/2}}\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}$$

$$\left|\frac{1}{c^2}\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{E}\right|=\frac{vE\sin\theta}{c^2}=\varepsilon_0\mu_0 v\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1-\frac{v^2}{c^2}}{(1-\frac{v^2\sin^2\theta}{c^2})^{3/2}}\cdot\frac{1}{r^2}\cdot\sin\theta$$

$$=\frac{\mu_0 qv(1-\frac{v^2}{c^2})\sin\theta}{4\pi r^2(1-\frac{v^2\sin^2\theta}{c^2})^{3/2}}=B$$

所以 $\boldsymbol{B}=\frac{1}{c^2}\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{E}$

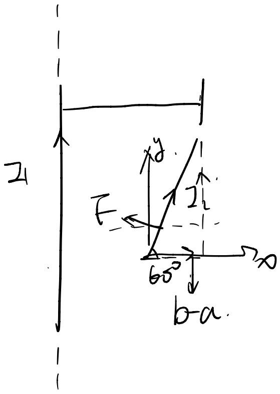
0 两无限长平行圆柱形导体内通过等值,反向电流I. 电流在两个阴影所示的横截面积均为S. 圆柱轴线为d. 求两导体中部真空部分磁感应强度.



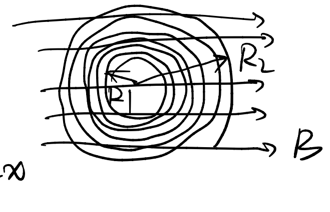
① 补偿法. 两阴影部分产生的磁场分别为B_1. B_2. 则 $B=B_1+B_2$.
中空部分产生的磁场大小(不含方向)为B_0.
对左侧阴影部分来说,真空部分相当于反向电流(向里)与圆柱体叠加: $B_1=\frac{\mu_0\frac{I}{S}\pi r^2}{2\pi r}-B_0$ (B_0向里).
对右侧阴影部分来说: $B_2=\frac{\mu_0\cdot\frac{I}{S}\cdot\pi r'^2}{2\pi r'}-(-B_0)=\frac{\mu_0\cdot\frac{I}{S}\pi(d-r)^2}{2\pi(d-r)}+B_0$
$\Rightarrow B=B_1+B_2=\frac{\mu_0 I d}{2S}$.

① 思路: 中部真空部分是由左右两侧反向的电流叠加而成. 而磁感应强度也由叠加而成.
因此直接将两完整圆柱体产生的磁场相加即可. $B_1'=\frac{\mu_0\frac{I}{S}\pi r^2}{2\pi r}=\frac{\mu_0 I r}{2S}$, $B_2'=\frac{\mu_0 I r'}{2S}$. $B=B_1+B_2=\frac{\mu_0 I(r+r')}{2S}$
$=\frac{\mu_0 I d}{2S}$

✓
0 无限长直电流I_1. 和一段线段电流I_2. 求I_2受到的力.
$dF=BIdl$. $B=\frac{\mu_0 I_1}{2\pi(x+a)}$. 由 $l=\frac{x}{\cos60^\circ}=2x\Rightarrow dl=2dx$
$\Rightarrow F=\int dF=\int_0^{b-a}\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi(x+a)}\cdot 2dx=\frac{\mu_0 I_1 I_2}{\pi}\ln\frac{b}{a}$.

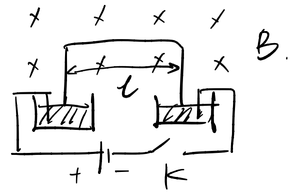


0 总匝数为N的均匀密绕平面圆线圈. 半径由R_1绕至R_2. 通有电流I. 置于磁场中.
求(1) 平面线圈的磁矩. (2) 转至平衡位置磁力矩所作功.
(1) $m=IS$. $\Rightarrow m=\sum m_i=I\sum S_i$. 因是均匀密绕. 则每匝的间距 $\Delta x=\frac{R_2-R_1}{N}$
$\Rightarrow x_1=R_1$. $x_2=R_1+\Delta x$. $x_3=R_1+2\Delta x$. $\cdots$ $x_{n-1}=R_2-\Delta x$. $x_n=R_2$.
∴ $m=I\sum S_i=\pi I\sum x_i^2=\pi I(R_1^2+(R_1+\Delta x)^2+(R_1+2\Delta x)^2+\cdots+R_2^2)$.
$\Rightarrow \pi I\sum x_i^2=\pi I(\frac{1}{\Delta x}\cdot\Delta x\cdot\sum x_i^2)=\pi I\cdot\frac{1}{\Delta x}\cdot(\sum x_i^2\cdot\Delta x)=\pi I\cdot\frac{1}{\Delta x}\cdot\int_{R_1}^{R_2}x^2dx$
$=\pi I\cdot\frac{N}{R_2-R_1}\cdot\frac{1}{3}(R_2^3-R_1^3)=\frac{1}{3}\pi NI(R_1^2+R_1R_2+R_2^2)$.



(2) $M=\vec{m}\times\vec{B}=mB\sin\theta$, $dW=Md\theta=mB\sin\theta d\theta\Rightarrow W=\int_0^{\frac{\pi}{2}}mB\sin\theta d\theta=mB$
或者计算磁通量. $W=I\Delta\Phi_m=IBS\cos\varphi=\frac{BIS}{m}=mB$.

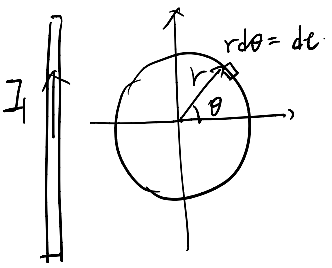
ŏ 一导线质量为m. 处在均强磁场B中. 开闭K接通时. 导线跳起的高度为h. 求通过导线的电量q.



⇒ 时间t未知. 考虑到 $P=Ft$. $I=\frac{q}{t}$. 则:

$$\begin{cases} P=Ft=mv \\ I=\frac{q}{t} \end{cases} \Rightarrow F\cdot\frac{q}{I}=mv \Rightarrow q=\frac{mvI}{F}=\frac{mvI}{BIl}=\frac{mv}{Bl}=\frac{m\sqrt{2gh}}{Bl}$$

ŏ 载有电流I_1的长直导线旁边有一平面圆形线圈. 半径为r. 中心到直线距离为l. 求I_1作用在圆形线圈上的力.



$$dF = BI_2\,dl$$

$$dF_x = BI_2\,dl\cos\theta = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi(l+r\cos\theta)}\cdot I_2\cos\theta\,dl$$

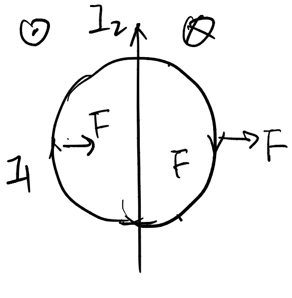
$$= \frac{\mu_0 I_1}{2\pi(l+r\cos\theta)}\cdot I_2\cos\theta\cdot r\,d\theta$$

$$F_x=\int_0^{2\pi}dF_x = \frac{\mu_0 I_1 I_2 r}{2\pi}\cdot\int_0^{2\pi}\frac{\cos\theta}{l+r\cos\theta}d\theta = \frac{\mu_0 I_1 I_2 r}{2\pi}\cdot\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r(l+r\cos\theta)}\right)d\theta$$

$$= \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}\cdot\int_0^{2\pi}\left(1-\frac{1}{l+r\cos\theta}\right)d\theta = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}\left[\theta-\frac{2l}{\sqrt{l^2-r^2}}\arctan\left(\frac{\sqrt{l^2-r^2}}{l+r}\tan\frac{\theta}{2}\right)\right]\Big|_0^{2\pi} \quad ?$$

$$= \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}\left(2\pi-\frac{2\pi l}{\sqrt{l^2-r^2}}\right) = \mu_0 I_1 I_2\left(1-\frac{l}{\sqrt{l^2-r^2}}\right)$$

$$F_y=\int_0^{2\pi}\frac{\sin\theta}{l+r\cos\theta}d\theta = 0$$



若将电流I_1位置变化, 那等同于l变化.

$l=0$时. $F_x=\mu_0 I_1 I_2$. $F_y=0$.

○ 在题图a和b中各有一半径相同的圆形回路l_1、l_2，圆周内有电流I_1、I_2，其空间分布相同，且均在真空中，在图b中l_2外有电流I_3，P_1、P_2为两圆形回路上的对应点，则（ ）. C

A. $\oint_{l_1}\vec{B}d\vec{l} = \oint_{l_2}\vec{B}d\vec{l}$ $\quad \vec{B}_{P_1} = \vec{B}_{P_2}$

B. $\oint_{l_1}\vec{B}d\vec{l} \neq \oint_{l_2}\vec{B}d\vec{l}$ $\quad \vec{B}_{P_1} = \vec{B}_{P_2}$

C. $\oint_{l_1}\vec{B}d\vec{l} = \oint_{l_2}\vec{B}d\vec{l}$ $\quad \vec{B}_{P_1} \neq \vec{B}_{P_2}$

D. $\oint_{l_1}\vec{B}d\vec{l} \neq \oint_{l_2}\vec{B}d\vec{l}$ $\quad \vec{B}_{P_1} \neq \vec{B}_{P_2}$