信号与系统

§ 第一章 信号与系统 (Signals and Systems).

1. 自变量的变换：时移(time shift)，时间反转(time reversal)，时间尺度变换(time scaling).

变换的原则：时间轴只认识"t"

(1) $f(t) \rightarrow f(2t) \rightarrow f[2(t+1)] = f(2t+2)$.] 注意二者区别. 时移和尺度变换的顺序

$f(t) \rightarrow f(t+2) \rightarrow f(2t+2)$

2. 单位冲激函数和单位阶跃函数.

单位冲激信号性质：采样、尺度变换 $\delta(at) = \frac{1}{|a|}\delta(t)$.

单位阶跃序列 $u(n)$ 在 $n=0$ 处为1 $\boxed{u(n) \longleftrightarrow u(-n-1)}$ 离散单位阶跃序列. $\boxed{u(t) \longleftrightarrow u(-t)}$ 连续

3. 基本系统性质.

(1) 时不变性 (time-invariant).

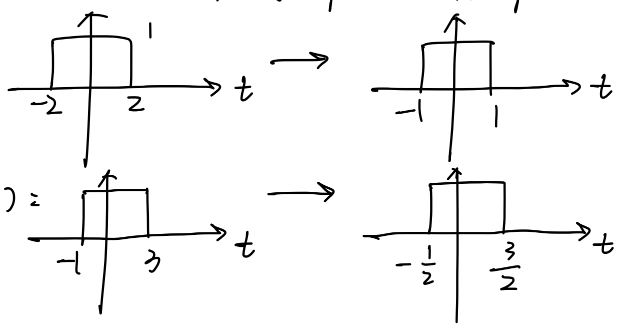
在输入信号上加一个时移，输出产生相同的时移.

即：$x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t)$. $\Rightarrow x(t-t_0) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t-t_0)$.

o 考察系统：$y(t) = x(2t)$. ⇒ 任何输入的时移都会受到压缩因子2的压缩. 所以是时变.

例如：$x(t) =$ → $y(t) = x(2t)$

$x(t-1) =$ → $y(t) = x[2(t-\frac{1}{2})] = x(2t-1)$. 时移被压缩.



Δ 对于系统 $y(t) = x(at)$, 有 $x(t) \rightarrow y(t) = x(at)$. $x(t-b) \rightarrow y(t) = x(at-b)$. 只考虑t

o 考察系统：$y(t) = T[x(t)] = \begin{cases} 0, & t<0 \\ x(t)+x(t-100), & t\geq 0 \end{cases}$ → 此处的t是y(t)里的坐标t.

⇒ 输入为 $x_1(t-\tau)$ 时 $y_1(t) = \begin{cases} 0, & t<0 \\ x(t-\tau)+x(t-\tau-100), & t\geq 0. \end{cases}$

而 $y(t-\tau) = \begin{cases} 0, & t-\tau<0 \\ x(t-\tau)+x(t-\tau-100), & t-\tau \geq 0. \end{cases}$ 因此该系统是时变系统.

考察系统：$y(t) = T[x(t)] = \begin{cases} 0, & x(t)<0 \\ x(t)+x(t-100), & x(t)\geq 0. \end{cases}$

⇒ 输入为 $x(t-\tau)$ 时，$y(t) = \begin{cases} 0, & x(t-\tau)<0 \\ x(t-\tau)+x(t-\tau-100), & x(t-\tau)\geq 0. \end{cases}$

而 $y(t-\tau) = \begin{cases} 0, & x(t-\tau)<0 \\ x(t-\tau)+x(t-\tau-100), & x(t-\tau)\geq 0. \end{cases}$ 因此是时不变系统.

o 考察系统：$y(t) = T[x(t)] = x(t-1) - x(1-t)$

(2) 线性(linear) ⇒ 叠加性质(可加性和齐次性)

⇒ 可加性：$x_1(t)+x_2(t) \to y_1(t)+y_2(t)$

齐次性：$ax(t) \to ay(t)$.

连续：$ax_1(t)+bx_2(t) \to ay_1(t)+by_2(t)$

离散：$ax_1[n]+bx_2[n] \to ay_1[n]+by_2[n]$

o 考察系统：$y[n]=Re\{x[n]\}$.

设输入为 $x_1[n]=r[n]+js[n]$，输出为 $y_1[n]=r[n]$.

再有 $x_2[n]=jx_1[n]=-s[n]+jr[n]$. 则输出为 $y_2[n]=-s[n]$.

可见 $y_2[n]=-s[n] \neq jy_1[n]=jr[n]$. 满足可加性，违反了齐次性

o 考察系统：$y(t)=x^2(t)$. $x_1(t) \to y_1(t)=x_1^2(t)$. $x_2(t) \to y_2(t)=x_2^2(t)$.

则 $x_1(t)+x_2(t) \to [x_1(t)+x_2(t)]^2 \neq y_1(t)+y_2(t)$. 所以不是线性系统.

o 考察系统：$y[n]=2x[n]+3$.

其不满足线性系统的零输入时零输出性质

o 考察系统：$y(t)=x(\frac{t}{2})$.

因 $x_1(t) \to y_1(t)=x_1(\frac{t}{2})$. $x_2(t) \to y_2(t)=x_2(\frac{t}{2})$.
$ax_1(t)+bx_2(t) \to ax_1(\frac{t}{2})+bx_2(\frac{t}{2})$ } ⇒ 线性.

因 $x(t-\tau) \to y'(t)=x(\frac{t}{2}-\tau) \neq y(t-\tau)=x(\frac{t-\tau}{2})$ ⇒ 时变

基本信号类型	对应理论
冲激信号 $\delta(t)$. $\delta[n]$. →	卷积
正弦信号 $A\cos(\omega_1 t+\phi)$/$e^{j\omega_1 t}$ →	傅里叶变换
连续时间复指数信号 $e^{s_1 t}$ →	拉氏变换
离散时间复指数信号 z_1^n →	Z变换

用系统对基本信号的响应表示系统.

系统对冲激信号的响应称为冲激响应.

正弦信号　　　　频率响应.

复指数信号　　　　系统函数

§ 第二章. 线性时不变系统 (LTI系统).

1. 无论在离散还是连续情况下, 单位冲激函数重要特性之一即一般信号都可表示为延迟冲激的线性组合 (延时, 加权, 叠加). 则能用线性时不变的单位冲激响应来完全表征任何一个线性时不变系统的特性. 离散→卷积和. 连续→卷积积分.

2. 离散时间LTI系统

(1) $x[n] = \cdots x[-2]\delta[n+2] + x[-1]\delta[n+1] + x[0]\delta[n] + x[1]\delta[n-1] + \cdots$

$$\Rightarrow x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\delta[n-k].$$

任意离散时间信号可表示为单位脉冲(冲激信号) $\delta[n]$ 的延时加权叠加. (筛选性质)

(2) 离散时间LTI系统的响应及卷积和.

由线性系统: 系统对 $x[n]$ 的响应就是对组成 $x[n]$ 的每个延时冲激信号的响应的加权叠加.

由时不变系统: 系统对延时冲激信号的响应就是对未延时冲激信号的响应的延时.

↳ 即一个线性时不变对任意输入的响应可用冲激信号的响应来表示. 系统的冲激响应就完全刻画了系统的特征.

$$\underset{\text{输入}}{x[n]} \longrightarrow \underset{\text{系统}}{\boxed{h[n]}} \longrightarrow \underset{\text{输出}}{y[n]} = \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k]}_{\text{卷积和}}$$

(其中: $\delta[n] \longrightarrow \underset{\text{系统}}{\boxed{}} \longrightarrow h[n].$)

Δ 离散卷积的本质.

$$x_1(n) * x_2(n) = \left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_1(k)\delta(n-k)\right] * x_2(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left[x_1(k)\delta(n-k) * x_2(n)\right] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_1(k)x_2(n-k).$$

结论:

若 $x_1[n]$ 长度为L. $x_2[n]$ 长度为P. 则 $y[n]$ 长度为 $(L+P-1)$

$x_1[n]$ 持续时间为 $n_1 \sim n_2$. $x_2[n]$ 持续时间为 $n_3 \sim n_4$. 则 $y[n]$ 持续为 $n_1+n_3 \sim n_2+n_4$.

$\delta[n] \longrightarrow h[n]$ 冲激响应

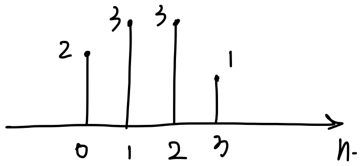
$\delta[n-k] \longrightarrow h[n-k]$ 时不变性.

$\sum \delta[n-k] \longrightarrow \sum h[n-k]$ 线性(可加性).

$\sum x_n[k]\delta[n-k] \longrightarrow \sum x_n[k]h[n-k].$

※离散信号的卷积运算.

○ 计算 $2^n[u(n)-u(n-4)]*x_2[n]$. 其中 $x_2[n]$ 为:



解: $2^n[u(n)-u(n-4)]=2^n[\delta(n)+\delta(n-1)+\delta(n-2)+\delta(n-3)]$
$=\delta(n)+2\delta(n-1)+4\delta(n-2)+8\delta(n-3)$. <抽取>

则原式 $=[\delta(n)+2\delta(n-1)+4\delta(n-2)+8\delta(n-3)]*x_2[n]$
$=x_2(n)+2x_2(n-1)+4x_2(n-2)+8x_2(n-3)$. <搬移>

↳ $x_1(n)=2^n$. $x_2(n)=u(n)-u(n-4)$.
将 $x_2(n)$ 表示为冲激信号的加权和. 再和 $x_1(n)$ 相卷.
冲激信号的强度与 $x_1(n)$ 相乘. 再对 $x_1(n)$ 进行搬移. 最后叠加

○ $u(n)*u(n)=[\delta(n)+\delta(n-1)+\delta(n-2)+\cdots]*u(n)=u(n)+u(n-1)+u(n-2)+\cdots=(n+1)u(n)$.
(连续 $u(t)*u(t)=tu(t)$).

Δ $x_1(n)*x_2(n)=y(n)=\cdots+x_1(-1)x_2(n+1)+x_1(0)x_2(n)+x_1(1)x_2(n-1)+\cdots$
若 $x_1(n)$ 是因果的, $x_2(n)$ 是因果的, 那么卷积后 $y(n)$ 也是因果的.
$x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 均不会出现负半轴上的值. 那么 $y(n)$ 也不会出现负半轴的值.

○ 计算 $2^nu(n)*3^nu(n)$
⇒ 原式 $=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}2^ku(k)\cdot3^{n-k}u(n-k)=\sum_{k=0}^{n}2^k\cdot3^{n-k}=3^n\cdot\sum_{k=0}^{n}(\frac{2}{3})^k=3^{n+1}-2^{n+1},\ n\geq0.$
即 $2^nu(n)*3^nu(n)=(3^{n+1}-2^{n+1})u(t)$.
↳ 若两个无(有)限长信号相卷得到信号也为无(有)限长.
两个因果信号相卷得到信号也为因果的.

○ $\boxed{\text{计算 } 2^{-n}u(-n)*3^{-n}u(-n).}$
⇒ 原式 $=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}2^{-k}u(-k)\cdot3^{-(n-k)}u[-(n-k)]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}2^{-k}u(-k)\cdot3^{-n+k}u(-n+k)$
$=3^{-n}\sum_{k=n}^{0}(\frac{3}{2})^k=(\frac{3}{2^n}-\frac{1}{3^n})u(-n)$.

求卷积步骤：反转、平移、叠加、求和

2 连续时间LTI系统

(1). 冲激信号：$\delta_\Delta(t)=\begin{cases}\frac{1}{\Delta}, & 0\le t<\Delta\\ 0, & 其他.\end{cases}$ $\Rightarrow x(t)=\lim\limits_{\Delta\to 0}\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty}x(k\Delta)\delta_\Delta(t-k\Delta)\Delta=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau.$ (筛选性质)

(2). 连续时间LTI系统的响应：卷积积分.

任意输入信号：$x(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$，又由系统的冲激响应：$\delta(t)\to\boxed{}\to h(t)$

得：$x(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau\longrightarrow\boxed{h(t)}\longrightarrow y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)h(t-\tau)d\tau$

$\Downarrow$

卷积

系统对冲激信号的响应刻画了系统特征.(但非线性系统不能完全表征)

3. 线性时不变系统性质.

$$\begin{cases} y[n]=\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty}x[k]h[n-k]=x[n]*h[n]. \\ y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)h(t-\tau)d\tau=x(t)*h(t). \end{cases}$$

(1) 交换律.

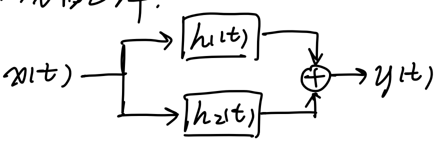
$$\begin{cases} x(t)\longrightarrow\boxed{h(t)}\longrightarrow y(t). \\ h(t)\longrightarrow\boxed{x(t)}\longrightarrow y(t). \end{cases}$$

$\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty}x[k]h[n-k]=\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty}h[k]x[n-k].$

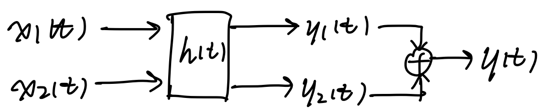
$\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)h(t-\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{+\infty}h(\tau)x(t-\tau)d\tau.$

⇒两个信号的卷积,可把其中任意一个看作线性时不变系统的冲激响应,另一个看作系统的输入信号,系统的输出则为二者的卷积结果.

(2) 分配律.



$\Leftrightarrow\ x(t)\longrightarrow\boxed{h_1(t)+h_2(t)}\longrightarrow y(t).$



$\Leftrightarrow\ x_1(t)+x_2(t)\longrightarrow\boxed{h(t)}\longrightarrow y(t).$

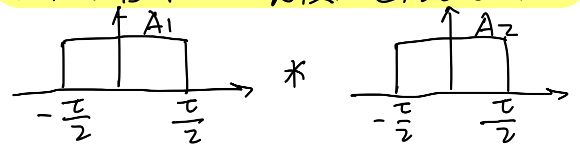
(3) 结合律. $(x(t)*h_1(t))*h_2(t)=x(t)*(h_1(t)*h_2(t)).$

$x(t)\longrightarrow\boxed{h_1(t)}\longrightarrow\boxed{h_2(t)}\longrightarrow y(t)\ \Leftrightarrow\ x(t)\longrightarrow\boxed{h_1(t)*h_2(t)}\longrightarrow y(t).$

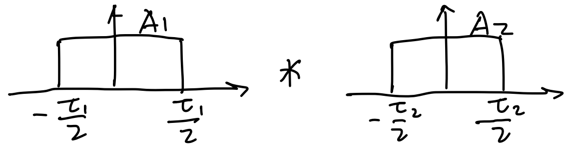
⇒两个系统级联后的冲激响应是单个冲激响应的卷积,顺序可换.

△ 一些结论.

① 相同宽度和不同宽度门函数卷积：



(1)



$(\tau_2>\tau_1)$

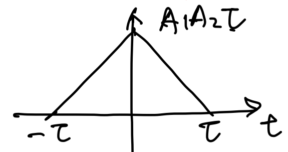
(2).

$\Rightarrow x_1(t)*x_2(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x_1(t)x_2(t-\xi)d\xi$

① $t<-\frac{\tau}{2}$, $t>\frac{\tau}{2}$ 时, $x_1(t)*x_2(t)=0$.

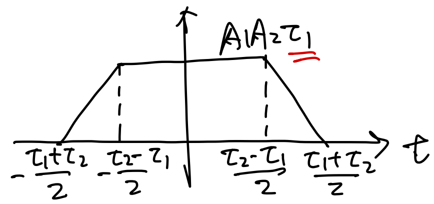
② $-\frac{\tau}{2}<t<\frac{\tau}{2}$ 时, $x_1(t)*x_2(t)=\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}}x_1(t)x_2(t-\xi)d\xi = A_1A_2\tau$. ⇒

$\boxed{A^2\tau}$ $A=A_1=A_2$



(形成三角波).

(2) $\Rightarrow x_1(t)*x_2(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x_1(t)x_2(t-\xi)d\xi$.



(形成梯形波)

⇒ 相同宽度门函数卷积为三角波.高度为门函数高度的乘积.
不同宽度门函数卷积为梯形波.高度为门函数高度乘积再乘以较短时间.

② 卷积(线性时不变系统)的性质.

$x(t)*\delta(t)=x(t)$. $x(t)*\delta(t-t_0)=x(t-t_0)$, $x(t-t_0)*\delta(t)=x(t-t_0)$. (搬移).

数学证明：$x(t)*\delta(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)\delta(\tau-t)d\tau$

$=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)\delta(\tau-t)d\tau=x(t)\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(\tau-t)d\tau=x(t)$.

由交换律可知：

$x(t)\longrightarrow\boxed{h(t)=\delta(t)}\longrightarrow y(t)$. ⇒ 输入信号$x(t)$加到一个冲激响应为$\delta(t)$的LTI系统上.

$\delta(t)\longrightarrow\boxed{h'(t)=x(t)}\longrightarrow y(t)$. ⇒ 冲激信号加到一个冲激响应为$x(t)$的LTI系统上其输出就是冲激响应$x(t)$.

→ 故其输出就是$x(t)$ 即 $x(t)*\delta(t)=x(t)$.

⇒ 卷积和延时两种运算可任意交换顺序.

$x(t)*\delta(t-t_0)=x(t-t_0)$. → $x(t)$整体时移.(搬移)

$x(t)\delta(t-t_0)=x(t_0)\delta(t-t_0)$. } 注意区分.

↳ 在$t=0$处面积为1的冲激 ⇒ 在$t=t_0$处面积为$x(t_0)$的冲激.(采样)

$x'(t)*\delta(t)=x'(t)$. 且 $x(t)*\delta'(t)=x'(t)$.

由 $x(t)\rightarrow\boxed{\text{微分器}}\xrightarrow{x'(t)}\boxed{h(t)=\delta(t)}\longrightarrow y(t)=x'(t)$.

运用交换律结合率有:

$$x(t)\rightarrow\boxed{h(t)=\delta(t)}\xrightarrow{x(t)}\boxed{\text{微分器}}\longrightarrow y(t)=x'(t)$$

$$\delta(t)\rightarrow\boxed{h(t)=x(t)}\xrightarrow{x(t)}\boxed{\text{微分器}}\longrightarrow y(t)=x'(t)$$

$$\delta(t)\rightarrow\boxed{\text{微分器}}\xrightarrow{\delta'(t)}\boxed{h(t)=x(t)}\longrightarrow y(t)=x'(t)$$

所以 $\delta'(t)*x(t)=x'(t)*\delta(t)=x'(t)$.

上述证明: 卷积, 延时, 积分, 微分可任意交换运算顺序

例如 $x_1(t)*x_2''(t)=x_1'(t)*x_2'(t)=x_1''(t)*x_2(t)=[x_1'(t)*x_2(t)]'=[\int x_1(t)*x_2(t)]'''$

$x(t)*\delta(t-t_0)=x(t)*[\delta(t)|_{t-t_0}]=[x(t)*\delta(t)]|_{t=t-t_0}=x(t-t_0)$.

$x_1(t-\tau_1)*x_2(t+\tau_2)=x_1(t)*x_2(t)|_{t=t-\tau_1+\tau_2}=[x_1(t)*x_2(t+\tau_2)]|_{t=t-\tau_1}$

$=x_1(t)*[x_2(t)|_{t=t-\tau_1+\tau_2}]=x_1(t)*x_2(t-\tau_1+\tau_2)$.

③ 无失真传输器: $x(t)*\delta(t)=x(t)$,

$$\xrightarrow{x(t)}\boxed{h(t)=\delta(t)}\xrightarrow{y(t)=x(t)}$$

微分器: $x(t)*\delta'(t)=x'(t)$

$$\xrightarrow{x(t)}\boxed{h(t)=\delta'(t)}\xrightarrow{y(t)=x'(t)}$$

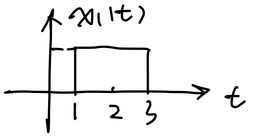
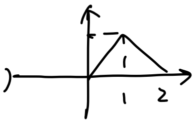
积分器: $x(t)*u(t)=\int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau$.

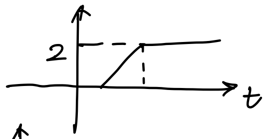
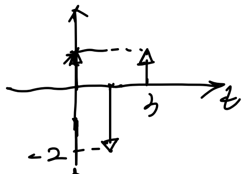
$$\xrightarrow{x(t)}\boxed{h(t)=u(t)}\xrightarrow{y(t)=\int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau}$$

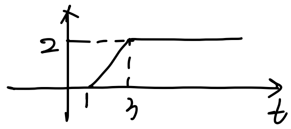
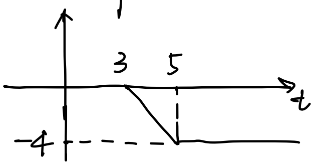
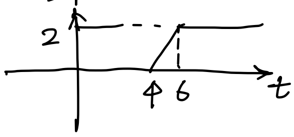
证明: $y(t)=\int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)h(t-\tau)d\tau$. 可推出 $h(t-\tau)=\begin{cases}1, & \tau<t\\ 0, & \tau>t.\end{cases}$

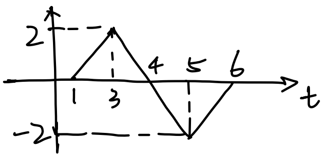
所以 $h(t)=u(t)$. 则 $y(t)=\int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau=x(t)*u(t)$.

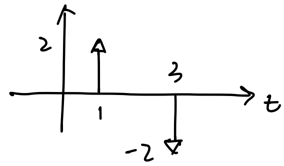
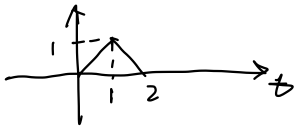
④

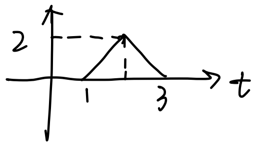
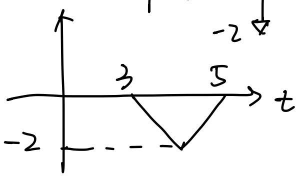
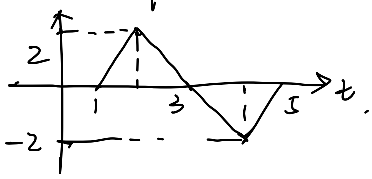
○ $x_1(t)=$  $x_2(t)=$  ，求 $h(t)$ 计算 $x_1(t)*x_2(t)$.

$\Rightarrow$ ① $x_1(t)*x_2(t)=\int_{-\infty}^{t}x_1(\tau)d\tau * x_2'(t)=$  $*$ 

$=$  $+$  $+$ 

$=$ 

② $x_1(t)*x_2(t)=x_1'(t)*\int_{-\infty}^{t}x_2(\tau)d\tau=$  $*$ 

$=$  $+$  $=$ 

③ $x_1(t)*x_2(t)$.

○ 考察一系统: $x(t)\longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t)$. 已知

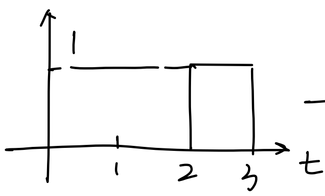
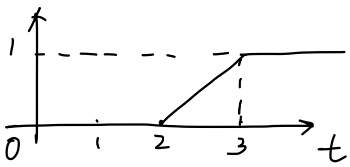
$$y(t)=\int_{-\infty}^{t}e^{-(t-\tau)}x(\tau-2)d\tau$$，求冲激响应 $h(t)$.

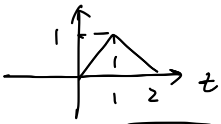
$$\Rightarrow y(t)=\int_{-\infty}^{t}e^{-(t-\tau)}x(\tau-2)d\tau=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(t-\tau)}u(t-\tau)x(\tau-2)d\tau$$

$$=e^{-t}u(t)*x(t-2).=e^{-(t-2)}u(t-2)*x(t).$$

所以 $h(t)=e^{-(t-2)}u(t-2)$.

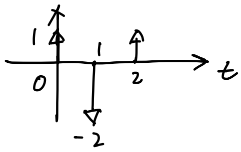
或者直接令 $x(t)=\delta(t)$. 那么 $h(t)=\int_{-\infty}^{t}e^{-(t-\tau)}\delta(\tau-2)d\tau=e^{-(t-2)}u(t-2)$.

○ 已知:  $\longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow$  求 $h(t)$.

① 已知 $x(t)=\sin t\,u(t)$，$y(t)=$  ，求 $h(t)$.

$x(t)\to\boxed{h(t)}\to y(t) \Rightarrow x'(t)\to\boxed{h(t)}\to y'(t) \Rightarrow x''(t)\to\boxed{h(t)}\to y''(t)$.

其中 $x'(t)=[\sin t\,u(t)]'=\cos t\,u(t)+\sin t\,\delta(t)=\cos t\,u(t)$.

$x''(t)=[\cos t\,u(t)]'=-\sin t\,u(t)+\delta(t)$.　$y''(t)=$ 

由 $\delta(t)\to\boxed{h(t)}\to h(t)$，$-\sin t\,u(t)\to\boxed{h(t)}\to -y(t)$

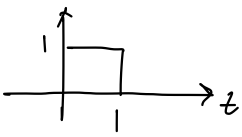
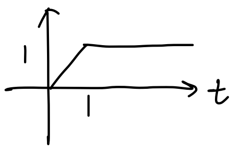
得：$x''(t)=-\sin t\,u(t)+\delta(t)\to\boxed{h(t)}\to y''(t)=h(t)-y(t)$.

所以 $h(t)=y''(t)+y(t)=\begin{cases}1-|t-1|+\delta(t)-2\delta(t-1)+\delta(t-2), & 0\le t\le 2\\ 0, & \text{otherwise}\end{cases}$

↳方法：想办法搞出冲激信号.

结论：对LTI系统，$x(t)$进行线性变化，则$y(t)$也进行相同的线性运算.

倍乘$ax(t)$，平移$x(t-t_0)$，积分$\int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau$，微分$x'(t)$均为线性运算.

② 已知： $\to\boxed{h(t)}\to$  ，求 $h(t)$.

③ 计算 $e^{-2t}u(t)*t^n u(t)*[\delta''(t)+3\delta'(t)+2\delta(t)]*e^{-t}u(t)$.

$\Rightarrow e^{-t}u(t)*[\delta''(t)+3\delta'(t)+2\delta(t)]=[e^{-t}u(t)]''+3[e^{-t}u(t)]'+2e^{-t}u(t)$.

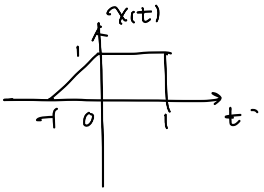
$=e^{-t}u(t)-\delta(t)+\delta'(t)+3[-e^{-t}u(t)+\delta(t)]+2e^{-t}u(t)=2\delta(t)+\delta'(t)$

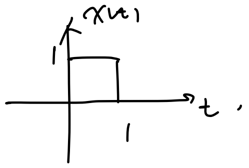
原式 $=e^{-2t}u(t)*t^n u(t)*[2\delta(t)+\delta'(t)]$

$=e^{-2t}u(t)*[2\delta(t)+\delta'(t)]*t^n u(t)$

$=\delta(t)*t^n u(t)=t^n u(t)$

$e^{-2t}u(t)*2\delta(t)=2e^{-2t}u(t)$. 注意 $x(t)*\delta(t)$ 和 $x(t)\delta(t)$ 勿混淆.

0 计算卷积: $x_1(t)=$ 

$x_2(t)=$ 

⇒ $x_1(t)=\begin{cases} t+1, & -1<t<0 \\ 1, & 0<t<1 \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$ $\quad x_2(t)=\begin{cases} 1, & 0<t<1 \\ 0, & \cdots \end{cases}$

① 用定义计算

$x_1(t)*x_2(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x_1(\tau)x_2(t-\tau)d\tau=\int_{-1}^{0}x_1(\tau)x_2(t-\tau)d\tau+\int_{0}^{1}x_1(\tau)x_2(t-\tau)d\tau$

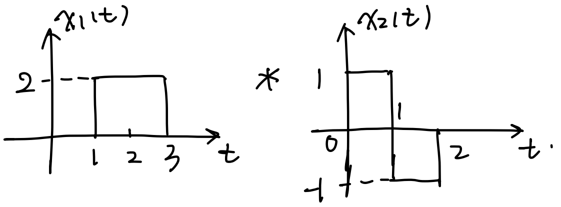
当 $0<t-\tau<1$ 即 $t-1<\tau<t$ 时 $x_2(t-\tau)=\cancel{0}\ 1$

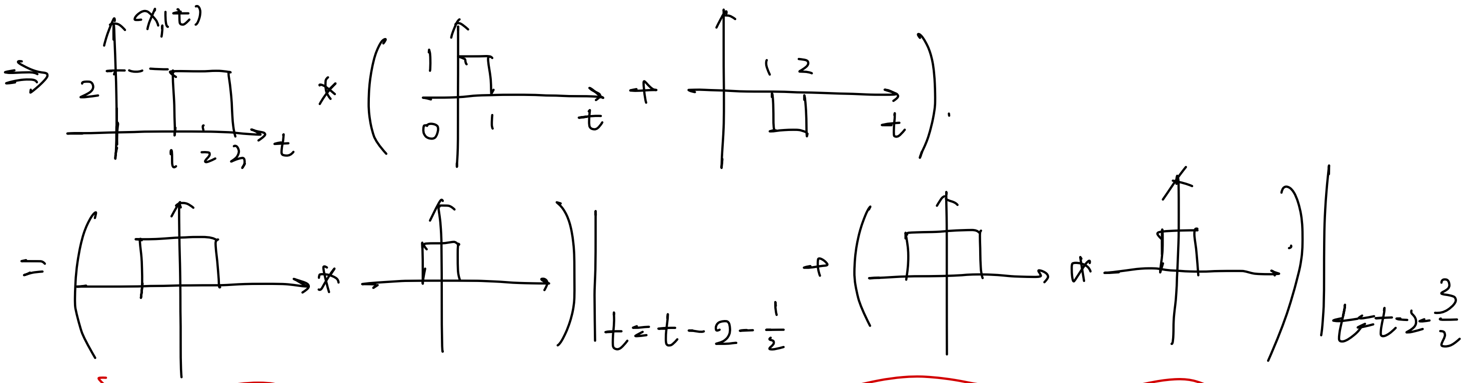
1°. $t<0$ 时. $x_1(t)*x_2(t)=0$.

2°. $-1<t<0$ 时. $x_1(t)*x_2(t)=\int_{-1}^{t}x_1(\tau)x_2(t-\tau)d\tau=\int_{-1}^{t}(\tau+1)d\tau=\frac{1}{2}t^2+t+\frac{1}{2}$

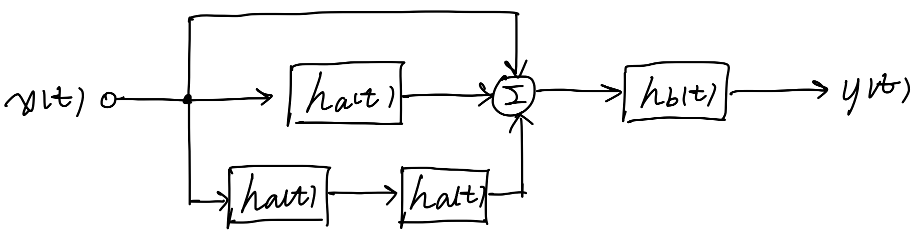
3°. $0<t<1$ 时. $x_1(t)*x_2(t)=\int_{t-1}^{0}x_1(\tau)x_2(t-\tau)d\tau+\int_{0}^{t}x_1(\tau)x_2(t-\tau)d\tau$

4°. $1<t<2$ 时. $x_1(t)*x_2(t)=\int_{t-1}^{1}x_1(\tau)x_2(t-\tau)d\tau$

0 计算卷积 



0 求系统(由几个子系统组成)的冲激响应. 其中 $h_a(t)=\delta(t-1)$, $h_b(t)=u(t)-u(t-3)$.



$h(t)=[h_a(t)*h_a(t)+h_a(t)+\delta(t)]*h_b(t)$.

(4) 因果性和稳定性.

△ 线性时不变系统的因果性和稳定性. (用其冲激响应来表示)

只存在于正半轴的信号称为因果信号. (如 $x(t)u(t)$). $h(n)u(n)$.

一个连续时间LTI系统因果 ⇔ 其冲激响应因果

一个离散时间LTI系统因果 ⇔ 其冲激响应因果.

一个连续时间LTI系统稳定 ⇔ 其冲激响应 $h(t)$ 绝对可积. 即 $\int_{-\infty}^{+\infty}|h(t)|dt<\infty$

一个离散时间LTI系统稳定 ⇔ 其冲激响应 $h(n)$ 绝对可和. 即 $\sum_{k=-\infty}^{+\infty}h(k)<\infty$.

因果信号加入到因果系统 (两个因果信号相卷积). 输出必然是因果的.

时不变）

→初始松弛条件（$t<0$时$y(t)=0$）下为因果的且为线性

4. 用微分方程和差分方程描述的因果线性时不变系统

连续时间系统：$\underset{\text{全响应}}{y(t)\ (t>0)} = \underset{\text{零状态响应}}{f_1[x(t), t>0]} + \underset{\text{零输入响应}}{f_2[y(0^-)]}$.

离散时间系统：$y(n)\ (n>0) = f_1[x(n), n\geq 0] + f_2[y(-1)]$.

全响应是因果LTI系统在$t>0$的输出，由两部分组成：

(1) $t>0$时的输入$x(t)$激励产生. (2) 由系统初始状态激励系统产生.

1. 线性常系数微分方程.

一阶微分方程：$\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t)$.

→$x(t)$为输入. $y(t)$为输出.

微分方程只是描述了系统输入和输出的约束关系（非显式）. 为完全表征系统，还需有附加条件. 即系统的初始状态（初始条件）. 因此系统的零输入响应是系统的特征. 固定不变.

1阶方程有1个初始条件：$y'(0^-)$、2阶有2个：$y'(0^-)$. $y''(0^-)$. … n阶有n个：$y'(0^-)$. $y''(0^-)$ … $y^{(n)}(0^-)$.

(1) 按照数学中的方法. 解一阶微分方程：$\underset{\text{全响应}}{\text{完全解}} = \underset{\text{强迫响应}}{\text{特解}} + \underset{\text{自由响应}}{\text{齐次解}}$.

其中齐次解需加上特解. 代入初始条件解得.

(2) 按照齐次方程$\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = 0$解出齐次解后不加特解直接代入初始条件. 解得的齐次解是零输入响应（由系统特征决定. 外界无法改变）.（将输入项$x(t)$置零）

求出零输入响应之后. 由输入信号与冲激响应相卷得到零状态响应.
也可用全响应减去零输入响应之后得到.

(3) 系统不变. 初始状态不变. 激励信号发生线性变化. 则零状态响应发生相同线性变化.
零输入响应不改变（因为系统不变）.

系统不变. 初始状态发生线性变化. 激励信号不变. 则零输入响应发生相同线性变化
零状态响应不改变.

⇒ 零输入响应线性. 零状态响应线性.

0. 求全响应：$\frac{d^2y(t)}{dt}+6\frac{dy(t)}{dt}+5y(t)=\frac{d^2x(t)}{dt}-2\frac{dx(t)}{dt}+x(t)$.

$x(t)=2e^{-2t}u(t)$. $y(0^+)=-4$. $y'(0^+)=6$.

1°. 求齐次解：由 $r^2+6r+5=0$ 得 $r_1=-1$. $r_2=-5$ 设 $y_h(t)=A_1e^{-t}+A_2e^{-5t}$.

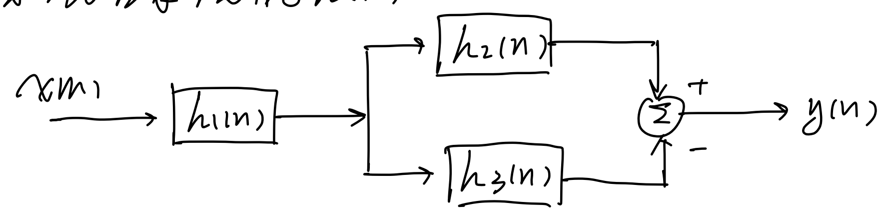
2°. 求特解：$x''(t)-2x'(t)+x(t)=2e^{-2t}u(t)$. 设 $y_p(t)=Be^{-2t}$

代入原方程解得 $B=-\frac{2}{3}$. 则 $y_p(t)=-\frac{2}{3}e^{-2t}$

$\Rightarrow y(t)=A_1e^{-t}+A_2e^{-5t}-\frac{2}{3}e^{-2t}$. 代入 $y(0^+)=-4$. $y'(0^+)=6$ 得：$A_1=-3$. $A_2=-\frac{1}{5}$

全解：$y(t)=[-3e^{-t}-\frac{1}{3}e^{-5t}-\frac{2}{3}e^{-2t}]u(t)$.

0. 求混合系统的 $h(n)$.



$h_1(n)=u(n)$. $h_2(n)=\delta(n)$. $h_3(n)=\delta(n-N)$.

2. 线性常系数差分方程.

N阶差分方程：$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{r=0}^{M} b_r x[n-r]$

$\Rightarrow a_0 y[n] + \sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{r=0}^{M} b_r x[n-r]$. $\Rightarrow y[n] = \sum_{r=0}^{M} \frac{b_r}{a_0} x[n-r] - \sum_{k=1}^{N} \frac{a_k}{b_0} y[n-k]$. (递归)

当N=0时：$y[n] = \sum_{r=0}^{M} \frac{b_r}{a_0} x[n-r]$. 无须系统的初始状态即可求解.

1阶差分方程有1个初始条件：$y(-1)$. 2阶有2个：$y(-1)$, $y(-2)$. n阶有n个：$y(-1), y(-2) \cdots y(-n)$

递归求解.

○ 差分方程为 $y(n) - ay(n-1) = x(n)$. 已知初始状态为 $n<0$ 时, $y(n)=0$. 输入 $x(n)=\delta(n)$. 求 $y(n)$.

解：$y(n) = ay(n-1) + x(n)$ 则有：$y(0) = ay(-1) + x(0) = 1$

$$y(1) = ay(0) + x(1) = a$$

$$y(2) = ay(1) + x(2) = a^2. \quad \Rightarrow y(n) = a^n u(n).$$

因果的.

$\vdots$

○ 求表示某离散时间因果LTI系统的差分方程的完全解.

$$y(n) + 3y(n-1) = x(n) - x(n-1)$$

输入信号 $x(n) = n^2 u(n)$. 起始条件 $y(-1) = -1$.

解：1°. 求齐次解. 由 $\lambda + 3 = 0$ 得 $\lambda = -3$. 所以 $y_h(n) = C(-3)^n$.

2°. 求特解：将 $x(n) = n^2$ 代入方程右边得 $x(n) - x(n-1) = n^2 - (n-1)^2 = 2n-1$.

故设特解 $y_s(n) = D_1 n + D_0$. 代入方程解得 $D_1 = \frac{1}{2}$. $D_0 = \frac{1}{8}$ 所以 $y_s(n) = \frac{1}{2}n + \frac{1}{8}$

完全解：$y(n) = C(-3)^n + \frac{1}{2}n + \frac{1}{8}$. 再由 $y(-1) = -1$ 得 $C = \frac{15}{8}$, 则 $y(n) = [\underbrace{\frac{15}{8}(-3)^n}_{\text{自由响应}} + \underbrace{\frac{1}{2}n + \frac{1}{8}}_{\text{强迫响应}}]u(n)$.

另外由 $y_h(n) = C(-3)^n$ 和 $y(-1) = -1$ 得零输入响应：$y_{cp}(n) = 3\cdot(-3)^n u(n)$

零状态响应 $y_{zs}(n) = y(n) - y_{zp}(n) = [-\frac{9}{8}(-3)^n + \frac{1}{2}n + \frac{1}{8}]u(n)$.

○ 离散LTI系统：$y(n)+3y(n-1)+2y(n-2)=x(n)$. $x(n)=u(n)$. $y(-1)=1$ $y(-2)=0$.

解：1°. 由 $\lambda^2+3\lambda+2=0$ 得 $\lambda_1=-1$. $\lambda_2=-2$. 设 $y_h(n)=C_1(-1)^n+C_2(-2)^n$.

将 $y(-1)=1$. $y(-2)=0$ 代入得：$C_1=1$ $C_2=-4$

所以零输入响应为 $y_{zi}(n)=[(-1)^n-4(-2)^n]u(n)$.

2°. 设特解为 $y_p(n)=P$. 则 $6P=1$. 所以特解为 $y_p(n)=\frac{1}{6}$.

系统全响应为 $y(n)=C_1(-1)^n+C_2(-2)^n+\frac{1}{6}$. 代入 $y(-1)=1$. $y(-2)=0$ 得：$C_1=\frac{1}{2}$ $C_2=-\frac{8}{3}$

$\Rightarrow$ $y(n)=[\frac{1}{2}(-1)^n-\frac{8}{3}(-2)^n+\frac{1}{6}]u(n)$.

零状态响应为 $y_{zs}(n)=y(n)-y_{zi}(n)=[-\frac{1}{2}(-1)^n+\frac{4}{3}(-2)^n+\frac{1}{6}]u(n)$.

另一种解法：零输入响应：$y_{zi}(n)=[(-1)^n-4(-2)^n]u(n)$. 特解为 $y_p(n)=\frac{1}{6}$.

则零状态响应可写为 $y_{zs}(n)=C_1'(-1)^n-C_2'(-2)^n+\frac{1}{6}$.

但是初始条件需使用 $t\geq0$ 时的条件：

经过迭代求解：$y_{zs}(0)=x(0)-3y_{zs}(-1)-2y_{zs}(-2)=x(0)=1$.

$y_{zs}(1)=x(1)-3y_{zs}(0)-2y_{zs}(-1)=x(1)-3y_{zs}(0)=-2$.

将 $y(0)=1$. $y(1)=-2$ 代入 y_{zs} 解得 $C_1'=-\frac{1}{2}$. $C_2'=\frac{4}{3}$.

则 $y_{zs}(n)=[-\frac{1}{2}(-1)^n+\frac{4}{3}(-2)^n+\frac{1}{6}]u(n)$. 全响应 $y(n)=y_{zs}(n)+y_{zi}(n)$.

① 离散LTI系统：$y(n)-y(n-1)-2y(n-2)=x(n)+2x(n-2)$

其中 $x(n)=u(n)$, $y(-1)=2$, $y(-2)=-\frac{1}{2}$.

特征方程：$r^2-r-2=0$ 得 $r_1=2$, $r_2=-1$

则设齐次解 $y_h(n)=C_1\cdot 2^n+C_2(-1)^n$. 由 $x(n)=u(n)$ 得 $x(n)+2x(n-2)=u(n)+2u(n-2)$

设特解为 $y_p(n)=Au(n)+Bu(n-2)$. 代入方程得：$A=-\frac{1}{2}$, $B=-1$. $(A-A-2A)-2B=1+2$

所以 $y_p(n)=-\frac{1}{2}u(n)-u(n-2)$.

将 $y_h(n)=C_1\cdot 2^n+C_2(-1)^n$ 代入 $y(-1)=2$, $y(-2)=-\frac{1}{2}$ 得：$C_1=2$, $C_2=-1$

即零输入响应为 $y_{zi}(n)=[2^{n+1}+(-1)^{n+1}]u(n)$.

① 当输入信号只有 $x(n)$ 时. 设特解为 $y_p(n)=p$. 代入方程解得 $p=-\frac{1}{2}$.

即全响应为：$y(n)=C_1\cdot 2^n+C_2(-1)^n-\frac{1}{2}$.

代入 $y(-1)=2$, $y(-2)=-\frac{1}{2}$ 得：$C_1=\frac{10}{3}$, $C_2=-\frac{5}{6}$

即 $y(n)=[\frac{10}{3}\cdot 2^n-\frac{5}{6}\cdot(-1)^n-\frac{1}{2}]u(n)$.

则此时零状态响应为 $y_{zs}(n)=y(n)-y_{zp}(n)=[\frac{4}{3}\cdot 2^n+\frac{1}{6}(-1)^n-\frac{1}{2}]u(n)$.

② 当输入信号只有 $2x(n-2)$ 时. 由线性时不变性.

其零状态响应为 $y_{zs}(n)=[\frac{8}{3}\cdot 2^{n-2}+\frac{1}{3}\cdot(-1)^{n-2}-1]u(n-2)$.

综上所述：系统的零状态响应为

$y_{zs}(n)=[\frac{4}{3}\cdot 2^n+\frac{1}{6}\cdot(-1)^n-\frac{1}{2}]u(n)+[\frac{8}{3}\cdot 2^{n-2}+\frac{1}{3}\cdot(-1)^{n-2}-1]u(n-2)$.

零输入响应为 $y_{zp}(n)=[2^{n+1}+(-1)^{n+1}]u(n)$.

例 离散LTI系统：$y(n)+2y(n-1)+y(n-2)=x(n)-x(n-1)$

其中 $y(-1)=1$. $y(-2)=-3$.

$\Rightarrow$ 特征方程：$r^2+2r+1=0$. 得 $\lambda_{1,2}=-1$. 则设 $y_{zp}(n)=(C_1n+C_2)(-1)^n$.

代入 $y(-1)=1$. $y(-2)=-3$ 得 $C_1=2$. $C_2=1$ 则 $y_{zp}(n)=[(2n+1)(-1)^n]u(n)$.

0 已知某系统的差分方程为：$y(n)-y(n-1)-2y(n-2)=x(n)$.

求单位序列响应 $h(n)$.

① 求双边z变换：$Y(z)-z^{-1}Y(z)-2z^{-2}Y(z)=X(z)$

$$\text{则 } H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{1}{1-z^{-1}-2z^{-2}}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2z^{-1}-1}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{z^{-1}+1}.$$

$$\Rightarrow h(n)=\left[\frac{2}{3}\cdot 2^n+\frac{1}{3}\cdot(-1)^n\right]u(n)$$

② 由 $h(n)$ 定义有：

$$h(n)-h(n-1)-2h(n-2)=\delta(n).\quad h(-1)=h(-2)=0$$

由递推求出初始 $h(0)=1$. $h(1)=1$.

特征方程：$r^2-r-2=0 \Rightarrow r_1=2$. $r_2=-1$.

设 $y_h(n)=C_1\cdot 2^n+C_2\cdot(-1)^n$. 代入 $h(0)=1$. $h(1)=1$ 得 $C_1=\frac{1}{3}$. $C_2=\frac{2}{3}$.

$$\text{则 } h(n)=\left[\frac{1}{3}\cdot 2^n+\frac{2}{3}\cdot(-1)^n\right]u(n).$$

若差分方程为：$y(n)-y(n-1)-2y(n-2)=x(n)-x(n-2)$.

只有 $x(n)$ 时. $h(n)=\left[\frac{1}{3}\cdot 2^n+\frac{2}{3}\cdot(-1)^n\right]u(n)$.

由线性时不变性、只有 $x(n-2)$ 时.

$$h'(n)=h(n-2)=\left[\frac{1}{3}\cdot 2^{n-2}+\frac{2}{3}\cdot(-1)^{n-2}\right]u(n-2).$$

则 $h''(n)=h(n)+h'(n)$.

§3 第三章 傅立叶变换

1、连续时间信号的傅立叶变换

(1) 连续信号 $x(t)$ 及其傅立叶变换 $X(\omega)$：

$$X(j\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt$$

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

(2) 常用信号的频谱.

① $e^{-at}u(t)\xrightarrow{\mathcal{F}}\frac{1}{a+j\omega}$.

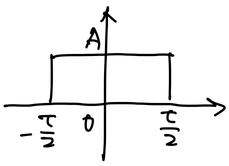
② $\delta(t)\xrightarrow{\mathcal{F}}X(j\omega)=1$. $1\xrightarrow{\mathcal{F}}2\pi\delta(\omega)$.

⇒ 冲激信号 $\delta(t)$ 的傅立叶变换是一个均匀谱(白噪声). 幅度谱和相位谱都是均匀的.

时域上无限短信号 ⟷ 频域上无限长

③ $u(t)\xrightarrow{\mathcal{F}}\pi\delta(\omega)+\frac{1}{j\omega}$.　　④ $sgn(t)\xrightarrow{\mathcal{F}}\frac{2}{j\omega}$

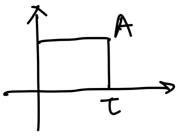
$Sa(x)=\frac{\sin x}{x}$

⑤ 

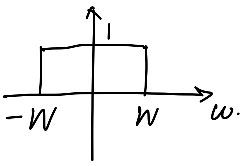
$\xrightarrow{\mathcal{F}} A\tau Sa(\frac{\omega\tau}{2})$ ⇒ 有限长信号(非因果)可通过平移转化为因果信号 ⇒ 产生线性相位

当时域上为偶函数时, 对应的傅立叶变换的相位为0

比如cos函数.

↳ 由此可得: 

$\xrightarrow{\mathcal{F}} A\tau Sa(\frac{\omega\tau}{2})\cdot e^{-j\omega\tau}$ → 线性相位.

⑥ $\frac{\sin Wt}{\pi t}\xrightarrow{\mathcal{F}}$ 

⇓

由于是无限长信号(现实中不存在), 无法通过平移转化为因果信号.

可通过加窗(乘以一个门函数)转化为有限长信号.

2. 傅里叶变换的性质

(1) 线性: $ax_1(t)+bx_2(t)\xrightarrow{\mathcal{F}}aX_1(j\omega)+bX_2(j\omega)$.

(2) 对称性: 若 $x(t)\xrightarrow{\mathcal{F}}X(j\omega)$. 则 $X(jt)\xrightarrow{\mathcal{F}}2\pi x(-\omega)$.

○ 已知 $x(t)=\frac{1}{t}$. 求 $\mathcal{F}[x(t)]$.

※ $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\omega t}{t}dt=\pi$. $\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2dt=\pi$. $\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^3dt=\frac{3\pi}{4}$　$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^4dt=\frac{2\pi}{3}$.

(3) 延时性：若 $x(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} X(j\omega)$. 则 $x(t-t_0) \xrightarrow{\mathcal{F}} e^{-j\omega t_0}X(j\omega)$

$e^{-j\omega_0 t}x(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} X(j(\omega+\omega_0))$.

⇒ 由于 $X(j\omega)=|X(j\omega)|e^{j\arg(X(j\omega))}$ (幅频和相频).

则 $x(t-t_0) \xrightarrow{\mathcal{F}} e^{-j\omega t_0}X(j\omega)=|X(j\omega)|e^{j[\arg(X(j\omega))-\omega t_0]}$

↳ 时域延时对频谱的影响只限于相频特性，幅频不改变.

而且是引入了线性变化. 斜率为 $(-t_0)$ (引入线性相位).

(4) 尺度变换：若 $x(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} X(j\omega)$，那么 $x(at) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{|a|}X(\frac{j\omega}{a})$.

⇒ 时域上进行压缩后，导致傅立叶变换扩展. 反之亦然.

时域上持续时间越长，其傅立叶变换后的频带宽度越窄.

(时域上有限长信号，其傅立叶变换无限长，例如(6)，$\delta(t)\to 1$.

时域上无限长信号，其傅立叶变换有限长. 例如(7)，$1\to 2\pi\delta(\omega)$.)

对于线性时不变系统，输出信号持续时间大于等于输入信号持续时间. ($y(t)=x(t)*h(t)$

$y(t)$ 持续时间为两信号之和). 其傅立叶变换后持续宽度变短.

(5) 微分性质：若 $x(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} X(j\omega)$. 则 $x^{(n)}(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} (j\omega)^n X(j\omega)$.

$tx(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} jX'(j\omega)$.

证明：$X'(j\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d}{d\omega}x(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{-\infty}^{+\infty}(-jt)x(t)e^{-j\omega t}dt=-j\mathcal{F}[tx(t)]$

(6) 卷积性质：若 $x_1(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} X_1(j\omega)$. $x_2(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} X_2(j\omega)$

则 $x_1(t)*x_2(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} X_1(j\omega)X_2(j\omega)$. $x_1(t)x_2(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{2\pi}[X_1(j\omega)*X_2(j\omega)]$

○ 求 $x(t)=|t|$ 的傅立叶变换.

⇒ $x(t)=|t|=t\,\mathrm{sgn}(t)$. $\xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{2\pi}[j2\pi\delta'(\omega)*\frac{2}{j\omega}]=-\frac{2}{\omega^2}$

由 $\mathrm{sgn}(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{2}{j\omega}$. $-jt\,\mathrm{sgn}(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} (\frac{2}{j\omega})'=\frac{2j}{\omega^2}$. ⇒ $t\,\mathrm{sgn}(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} -\frac{2}{\omega^2}$.

(7) 积分性质：若 $x(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} X(j\omega)$，则 $\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{j\omega}X(j\omega) + \pi X(0)\delta(\omega)$.

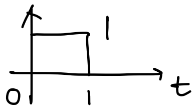
证明：$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau = x(t)*u(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} X(j\omega)[\pi\delta(\omega)+\frac{1}{j\omega}] = \pi X(0)\delta(\omega)+\frac{1}{j\omega}X(j\omega)$

⇒ 当 $X(0)=0$ 时，说明直流分量为0，即 $x(+\infty)=x(-\infty)=0$，此时 $\mathcal{F}[x(t)] = \frac{1}{j\omega}\mathcal{F}[x'(t)]$ 成立

(8) 帕斯瓦尔定理 ⇒ 能量守恒.

若 $x(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} X(j\omega)$，则 $\int_{-\infty}^{+\infty}|x(t)|^2dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|X(j\omega)|^2d\omega$.

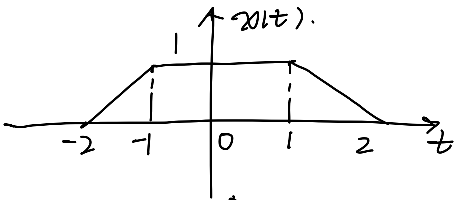
例 已知 $x(t) = \begin{cases} 0, & \text{otherwise} \\ 1-t^2, & 0<t<1 \end{cases}$ 求 $\mathcal{F}[x(t)]$.

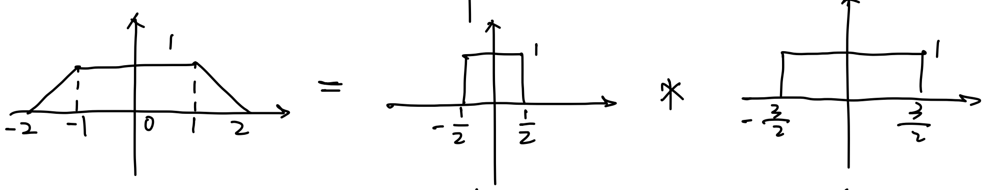
⇒ 令 $x'(t) =$ ，则 $\mathcal{F}[x(t)] = \mathcal{F}[1-t^2] * \mathcal{F}[x'(t)]$.

其中 $\mathcal{F}(1-t^2) = 2\pi\delta(\omega) - \mathcal{F}[t^2] = 2\pi\delta(\omega)+4\pi^2\delta''(\omega)$

$\mathcal{F}[x'(t)] = Sa(\frac{\omega}{2})e^{-\frac{1}{2}j\omega}$. 所以 $\mathcal{F}[x(t)] = 2\pi Sa(\frac{\omega}{2})e^{-\frac{1}{2}j\omega} + 4\pi^2[Sa(\frac{\omega}{2})e^{-\frac{1}{2}j\omega}]''$

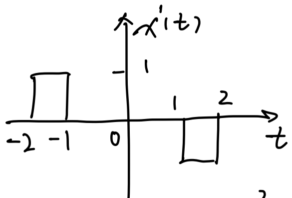
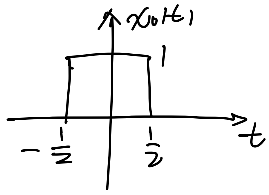
例 已知 $x(t)$ 波形，求 $\mathcal{F}[x(t)]$.



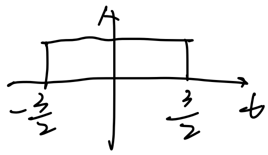
法一： （信号的加权叠加）

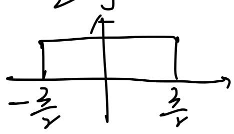
矩形波的 $\mathcal{F}$ 变换：$\mathcal{F}[x_1(t)] = Sa(\frac{\omega}{2})$，长方波的 $\mathcal{F}$ 变换：$\mathcal{F}[x_2(t)] = 3Sa(\frac{3\omega}{2})$.

则 $\mathcal{F}[x(t)] = Sa(\frac{\omega}{2})\cdot 3Sa(\frac{3\omega}{2}) = \frac{2\sin\frac{\omega}{2}}{\omega}\cdot\frac{2\sin\frac{3\omega}{2}}{\omega}$ $\left(Sa(x)=\frac{\sin x}{x}\right)$.

法二：对 $x(t)$ 进行一次微分后为：，令 $x_0(t)$ 为 

则 $x'(t) = x_0(t+\frac{3}{2}) - x_0(t-\frac{3}{2}) = x_0(t)*[\delta(x+\frac{3}{2})-\delta(x-\frac{3}{2})]$

则 $x(t) = x_0 * \int_{-\infty}^{x}[\delta(x+\frac{3}{2})-\delta(x-\frac{3}{2})]dx = x_0(t)*[$  $]$.

⇒ $\mathcal{F}[x(t)] = \mathcal{F}[x_0(t)]\cdot\mathcal{F}[$  $]$

$= Sa(\frac{\omega}{2})\cdot 3Sa(\frac{3\omega}{2})$.

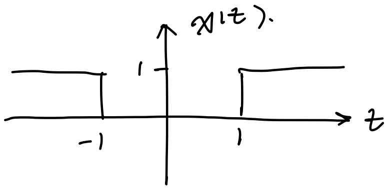
通过微分求$\mathcal{F}$变换：

(1) 若$x(t)$为有限长，则 $\mathcal{F}[x(t)] = \mathcal{F}[x'(t)]\cdot\frac{1}{j\omega}$.

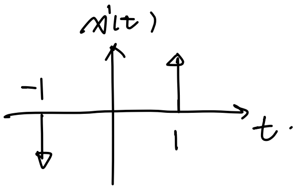
(2) 若$x(t)$为无限长，则 $\mathcal{F}[x(t)] = \mathcal{F}[x'(t)]\cdot[\pi\delta(\omega)+\frac{1}{j\omega}]$. → $u(t)$

一般地有：$\mathcal{F}[x(t)] = \frac{1}{j\omega}\mathcal{F}[x'(t)] + [x(+\infty)+x(-\infty)]\pi\delta(\omega)$.

○ 求$x(t)$的傅里叶变换：



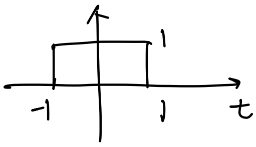
⇒ $x'(t)$为：



则 $\mathcal{F}[x'(t)] = \mathcal{F}[-\delta(t+1)+\delta(t-1)] = e^{-j\omega}-e^{j\omega}$

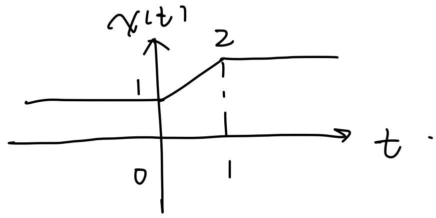
由 $x(+\infty)=x(-\infty)=1$ 得：$\mathcal{F}[x(t)] = \frac{1}{j\omega}\mathcal{F}[x'(t)] + 2\pi\delta(\omega) = 2\pi\delta(\omega) - 2Sa(\omega)$

或者：$x(t) = 1-$

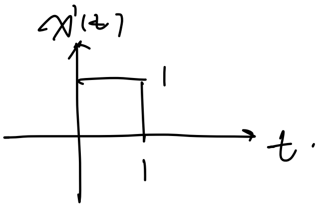


则 $\mathcal{F}[x(t)] = 2\pi\delta(\omega) - 2Sa(\omega)$.

○ 求$x(t)$的傅里叶变换：



⇒ $x'(t) =$



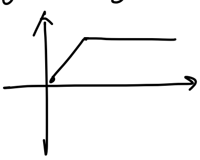
且 $\mathcal{F}[x'(t)] = Sa(\frac{\omega}{2})e^{-\frac{1}{2}j\omega}$.

由 $x(+\infty)=2$，$x(-\infty)=1$，得：

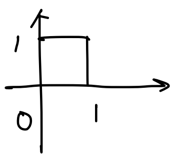
$$\mathcal{F}[x(t)] = \frac{1}{j\omega}\mathcal{F}[x'(t)] + [x(+\infty)+x(-\infty)]\pi\delta(\omega)$$

$$= \frac{1}{j\omega}Sa(\frac{\omega}{2})e^{-\frac{1}{2}j\omega} + 3\pi\delta(\omega)$$

或者：$x(t) = 1+$



$= 1+$

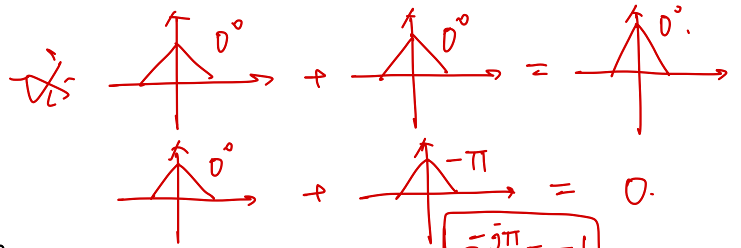


$* u(t)$.

$$\therefore \mathcal{F}[x(t)] = 2\pi\delta(\omega) + Sa(\frac{\omega}{2})e^{-\frac{1}{2}j\omega}[\pi\delta(\omega)+\frac{1}{j\omega}]$$

$$= 3\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}Sa(\frac{\omega}{2})e^{-\frac{1}{2}j\omega}.$$

$Sa(0)=1$



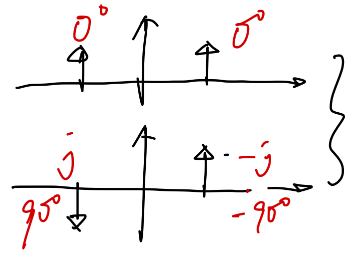
$\boxed{e^{-j\pi} = -1}$

A 结论

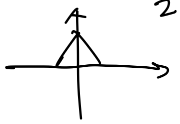
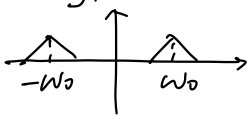
① $e^{j\omega_0 t} \xrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi\delta(\omega-\omega_0)$.

② $\cos\omega_0 t \xrightarrow{\mathcal{F}} \pi[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)]$. ⇒ 相位为 0°.

$\sin\omega_0 t \xrightarrow{\mathcal{F}} j\pi[\delta(\omega+\omega_0)-\delta(\omega-\omega_0)]$ ⇒ 相位为 $\pm 90^\circ$.



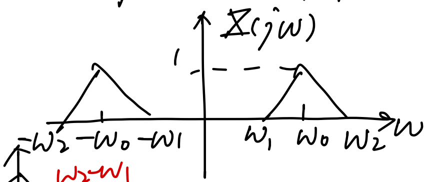
③ $x(t)\cos\omega_0 t \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{2}[X(\omega+\omega_0)+X(\omega-\omega_0)]$.
$x(t)\sin\omega_0 t \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{j}{2}[X(\omega+\omega_0)-X(\omega-\omega_0)]$.
} 调制.

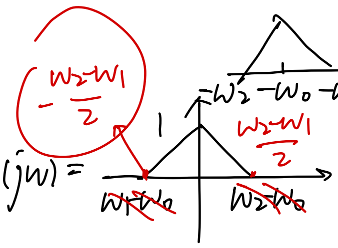
例如 $x(t)$ 为  则 $x(t)\cos\omega_0 t$ 为: 

⇒ 相当于低频转换到高频.
频谱发生移动, 高度减半.

$x(t)\sin\omega_0 t$ 频谱也发生移动, 相谱也会改变, 而 cos 不改变相谱.

例 已知 $x(t)$ 的傅立叶变换 $X(j\omega)$ 如下图所示. 求 $x(t)$.



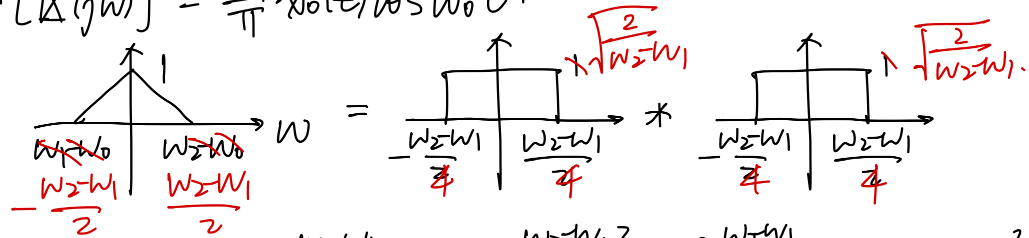
⇒ 令 $X_0(j\omega) =$ 

则 $X(j\omega) = X_0(j\omega) * [\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)]$.

其中: $\mathcal{F}^{-1}[X_0(j\omega)] = x_0(t)$. $\mathcal{F}^{-1}[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)] = \frac{1}{\pi}\cos\omega_0 t$.

则 $\mathcal{F}^{-1}[X(j\omega)] = \frac{1}{\pi}x_0(t)\cos\omega_0 t$.

又因为:



所以 $x_0(t) = \left(\frac{\sin\frac{\omega_2-\omega_1}{2}t}{\pi t}\right)^2 = \frac{\left(\frac{\omega_2-\omega_1}{2}\right)^2}{\pi^2}\cdot\left(\frac{\sin\frac{\omega_2-\omega_1}{2}t}{\frac{\omega_2-\omega_1}{2}t}\right)^2 = \frac{(\omega_2-\omega_1)^2}{4\pi^2}Sa^2\cancel{\frac{\omega_2-\omega_1}{2}}t.$

$x_0(t) = 2\pi\left[\sqrt{\frac{2}{\omega_2-\omega_1}}\cdot\frac{\omega_2-\omega_1}{2}Sa\left(\frac{t(\omega_2-\omega_1)}{4}\right)\right]^2$

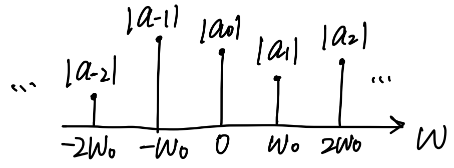
⇒ $x(t) = 2\pi(\omega_2-\omega_1)Sa^2\left[\frac{t(\omega_2-\omega_1)}{4}\right]\cdot\cos\omega_0 t$.

3. 连续时间周期信号的傅立叶变换.

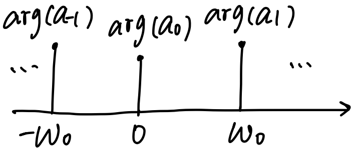
(1) 一个连续周期时间信号的傅立叶级数:

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \quad \left(=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\frac{2\pi}{T}t}\right)$$

其中 $a_k=\frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt$. a_k为复数形式. 称为傅立叶系数或频谱系数, 级数展开中每一项为一个谐波分量. $a_k=|a_k|e^{j\arg(a_k)}$. $|a_k|$度量了谐波分量的大小, $\arg(a_k)$为分量的相位.
当$k=0$时. $\omega=k\omega_0=0$. 此项为$x(t)$中的直流分量. 且 $a_0=\frac{1}{T}\int_T x(t)dt$ ⇒ 一个周期内的平均值.



幅度谱(幅频)



相位谱(相频)

$k=\pm1$时. $\omega=\pm\omega_0$ 此两项称为基波分量(或一次谐波分量); $k=\pm2$ 称为二次谐波分量.

(2) 设周期信号$x(t)$周期为T. 任取$x(t)$的一个周期构成非周期信号$x_0(t)$. 其傅立叶变换为$X_0(j\omega)$. 则周期信号$x(t)$可表示为: $x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_0(t-nT)$.
若周期信号$x(t)$满足狄里赫利条件. 则可表示为级数形式: $x(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}F_n e^{jn\omega_s t}$. $\left(\omega_s=\frac{2\pi}{T}\right)$.
由 $e^{jn\omega_s t}\xrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi\delta(\omega-n\omega_s)$ 得: $x(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}F_n e^{jn\omega_s t}\xrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi\sum_{n=-\infty}^{+\infty}F_n\delta(\omega-n\omega_s)$. ⇒ 傅立叶变换(频域).
⇒ 傅立叶变换和傅立叶级数所给出的频谱信息完全一致(对于周期信号)
频谱的位置信息: $n\omega_s$(傅立叶变换是离散的). 强度信息: $|F_n|$. $n=0$对应直流分量.

其中 $F_n=\frac{1}{T}X_0(\omega)\big|_{\omega=n\omega_s}$. 其中$X_0(\omega)$为非周期信号的F变换. 这实际上即是采样.
或者 $F_n=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}x(t)e^{-jn\omega_s t}dt$, $x(t)$为连续周期信号.

从F变换和S变换可推出

Δ结论:
对于傅立叶变换 $x(t)\longrightarrow X(\omega)$. 则 $x(t)$连续 ⟶ $X(\omega)$非周期. $x(t)$非周期 ⟶ $X(\omega)$连续;
$x(t)$离散 ⟶ $X(\omega)$周期 $x(t)$周期 ⟶ $X(\omega)$离散.

则在时域上 $x(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x_0(t-nT)$ 为对$x_0(t)$进行周期化(周期延拓)
则在频域上对$X(\omega)$进行离散化(采样). 与$\delta(\omega)$相乘.
在时域上对$x_0(t)$进行离散化(采样). 则在频域上对$X(\omega)$周期化.

Ⅰ题型：求周期信号的傅立叶级数与傅立叶变换］.

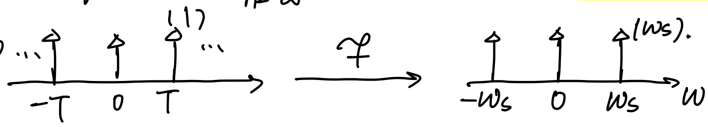
○ 求冲激串 $\delta_T(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-nT)$ 的傅立叶级数及傅立叶变换.

解：任取 $\delta_T(t)$ 的一个周期，构成非周期信号 $x_0(t)$. 令 $x_0(t)=\delta(t)$ 则 $x_0(t)\xrightarrow{\mathcal{F}}X_0(j\omega)=1$.

$$F_n=\frac{1}{T}X_0(j\omega)\Big|_{\omega=n\omega_s}=\frac{1}{T}.$$

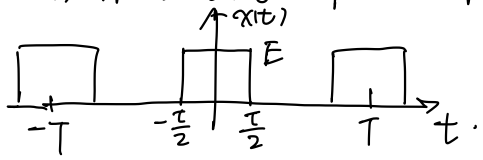
所以 $\delta_T(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}F_ne^{jn\omega_st}dt=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{T}e^{jn\omega_st}$，$\omega_s=\frac{2\pi}{T}$ 记住结论.

$$\delta_T(t)\xrightarrow{\mathcal{F}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}2\pi F_n\delta(\omega-n\omega_s)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\omega_s\delta(\omega-n\omega_s).=\omega_s\delta_{\omega_s}(\omega).$$

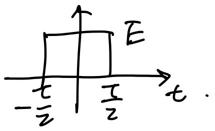
即 

冲激串的傅立叶变换是冲激串.

○ 求如图所示方波周期信号的傅立叶级数和傅立叶变换.



解：$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}F_ne^{jn\omega_st}$. $x(t)\xrightarrow{\mathcal{F}}2\pi\sum_{n=-\infty}^{+\infty}F_n\delta(\omega-n\omega_s)$. $\omega_s=\frac{2\pi}{T}$.

令 $x_0(t)$ 为：

$x_0(t)\xrightarrow{\mathcal{F}}X_0(j\omega).=E\tau Sa(\frac{\omega\tau}{2})$.

$$F_n=\frac{1}{T}X_0(j\omega)\Big|_{\omega=n\omega_s}=\frac{E\tau}{T}Sa(\frac{n\omega_s\tau}{2}).$$

所以：$x(t)=\frac{E\tau}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}Sa(\frac{n\omega_s\tau}{2})e^{jn\omega_st}$；$x(t)\xrightarrow{\mathcal{F}}\frac{2\pi E\tau}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}Sa(\frac{n\omega_s\tau}{2})\delta(\omega-n\omega_s)$.

○ 已知 $x(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a^{-|t-2n|}$ ($a>1$ 且 $a\in R$). 求 $x(t)$ 的傅立叶级数与傅立叶变换.

解：$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a^{-|t-2n|}\xlongequal{令n'=n-1}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a^{-|t-2(n'+1)|}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a^{-|t-2-2n'|}=x(t-2).$

所以 $x(t)$ 是以2为周期的信号，$\omega_s=\frac{2\pi}{T}=\pi$.

⇒ $x(t)$ 的傅立叶级数为：$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}F_ne^{jn\omega_st}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}F_ne^{jn\pi t}$.

傅立叶变换为：$x(t)\xrightarrow{\mathcal{F}}2\pi\sum_{n=-\infty}^{+\infty}F_n\delta(\omega-n\omega_s)=2\pi\sum_{n=-\infty}^{+\infty}F_n\delta(\omega-n\pi)$.

现求 F_n：$F_n=\frac{1}{T}\int_0^T x(t)e^{-jn\omega_st}dt=\frac{1}{T}\int_0^T a^{-|t-2n|}e^{-jn\omega_st}dt=\frac{1}{2}\int_0^2 a^{-|t-2n|}e^{-jn\pi t}dt.$

$$=\frac{1}{2}\int_0^2\Big[\sum_{n=-\infty}^{0}a^{-(t-2n)}+\sum_{n=1}^{\infty}a^{t-2n}\Big]e^{j n\pi t}dt.\quad=\frac{1}{2}\int_0^2\Big[\frac{a^{-t}}{1-a^{-2}}+\frac{a^{t-2}}{1-a^{-2}}\Big]e^{-jn\pi t}dt.$$

$$=\frac{\ln a}{\ln^2a+(n\pi)^2}$$

所以 $x(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{\ln a}{\ln^2a+(n\pi)^2}e^{jn\pi t}$. $X(j\omega)=2\pi\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{\ln a}{\ln^2a+(n\pi)^2}\delta(\omega-n\pi)$.

4. 采样.

冲激串

在时域进行采样：$x_p(t)=x(t)p(t)=x(t)\cdot\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-nT)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x(nT)\delta(t-nT)$.

在频域上：$P(j\omega)=\mathcal{F}[p(t)]=\omega_s\delta_{\omega_s}(\omega)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\omega_s\delta(\omega-n\omega_s)$. $\omega_s=\frac{2\pi}{T}$.

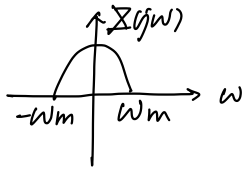
$$\Rightarrow X_p(j\omega)=\frac{1}{2\pi}\left[X(j\omega)*P(j\omega)\right]=\frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\omega_s X(j(\omega-n\omega_s))=\underbrace{\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}X(j(\omega-n\omega_s))}_{\text{周期延拓. 幅度变为}\frac{1}{T}}$$

Nyquist采样频率：$2\omega_m$，采样频率必须满足：$\omega_s>2\omega_m$，$\omega_s=\frac{2\pi}{T}$.

将冲激串采样中的采样函数 $\delta_T(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-nT)$ 换成周期矩阵脉冲 ⇒ 曲顶采样.

冲激串采样之后紧跟一个具有单位冲激响应的LTI系统 ⇒ 平顶采样

○ $x(t)$的频谱$X(j\omega)$如下图. 试确定对$x^2(t)$及$x'(t)$和$x(t)\cos\omega_0 t$采样时. 分别所需的Nyquist频率.



$\Rightarrow x^2(t)\xrightarrow{\mathcal{F}}\frac{1}{2\pi}[X(j\omega)*X(j\omega)]$.

则 $x^2(t)$ 频谱范围为 $[-2\omega_m, 2\omega_m]$.

所以所需采样频率是 $4\omega_m$.

$x'(t)\xrightarrow{\mathcal{F}}j\omega X(\omega)$.

频谱范围 $=[-\omega_m,\omega_m]$

所以是 $2\omega_m$.

$x(t)\cos\omega_0 t\xrightarrow{\mathcal{F}}\frac{1}{2\pi}X(j\omega)*\pi[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)]=\frac{1}{2}[X(\omega+\omega_0)+X(\omega-\omega_0)]$.

故所需Nyquist频率为$2(\omega_0+\omega_m)$

描述LTI系统：冲激响应、频率响应、线性常微分方程

5. 傅立叶变换的应用——滤波与调制

① 已知一LTI系统的频率响应 $H(j\omega)=\frac{1}{j\omega+2}$，输入信号 $x(t)=e^{-t}u(t)$，求系统输出。

1°. 由 $H(j\omega)=\frac{1}{j\omega+2}$ 得：$h(t)=e^{-2t}u(t)$.

则 $y(t)=x(t)*h(t)=e^{-t}u(t)*e^{-2t}u(t)=(e^{-t}-e^{-2t})u(t)$

2°. $X(j\omega)=\frac{1}{1+j\omega}$，则 $Y(j\omega)=H(j\omega)X(j\omega)=\frac{1}{(j\omega+2)(j\omega+1)}=\frac{1}{j\omega+1}-\frac{1}{j\omega+2}$

则 $y(t)=(e^{-t}-e^{-2t})u(t)$.

※ 由 $H(j\omega)$ 可写出描述系统的微分方程：

$Y(j\omega)=H(j\omega)X(j\omega)=\frac{1}{j\omega+2}X(j\omega)\Rightarrow j\omega Y(j\omega)+2Y(j\omega)=X(j\omega)$.

则 $\frac{d}{dt}y(t)+y(t)=x(t)$.

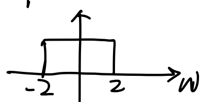
(1) 滤波.

① 设某滤波器频率响应为 $H(j\omega)=|H(j\omega)|e^{j\arg(H(j\omega))}$.

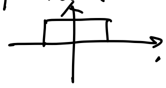
幅频特性：$|H(j\omega)|$. 相频特性：$\arg[H(j\omega)]$. ⇒ 滤波器只对幅频特性 $|H(j\omega)|$ 作限定.

② 滤波器类型：理想低通、理想带通、理想全通、理想高通、理想带阻.

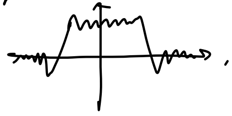
"理想"的含义：理想低通滤波器



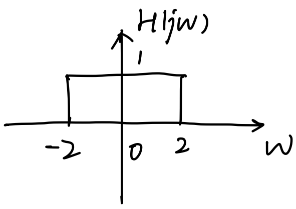
是 $\frac{\sin 2t}{\pi t}$ 的傅立叶变换，$\frac{\sin 2t}{\pi t}$ 在时域上为无限长信号、不真实存在. 现实中需加窗函数变为有限长：$\frac{\sin 2t}{\pi t}$.



则其傅立叶变换（现实中的低通滤波器）为：



① 一LTI系统频率响应如下图，$x(t)=\cos t+\cos 5t$，求系统输出 $y(t)$.



$\Rightarrow X(j\omega)=\pi[\delta(\omega+1)+\delta(\omega-1)]+\pi[\delta(\omega+5)+\delta(\omega-5)]$.

则 $Y(j\omega)=H(j\omega)X(j\omega)=\pi[\delta(\omega+1)+\delta(\omega-1)]$（低通）.

$y(t)=\cos t$.

特征输入 特征输出

Δ. 设一LTI系统：

$x(t)=e^{j\omega_i t} \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t)$. 且 $h(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} H(j\omega)$.

则 $y(t)=x(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{j\omega_i(t-\tau)}d\tau$

$=e^{j\omega_i t}\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{-j\omega_i\tau}d\tau = H(j\omega_i)e^{j\omega_i t}$.

$y(t)=H(j\omega_i)e^{j\omega_i t}=|H(j\omega_i)|e^{j[\arg H(j\omega_i)+\omega_i t]}$, $\varphi=\arg H(j\omega_i)$.

那么当 $x(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n e^{jn\omega_s t}$ 时. 有 $y(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} H(jn\omega_s)\cdot F_n e^{jn\omega_s t}$.

⇒ 输入信号为基本信号 $e^{j\omega_i t}$ 的加权和. 则输出信号为系统对基本信号的响应 $H(j\omega_i)e^{j\omega_i t}$ 的加权和.

且有：

$e^{j\omega_i t} \longrightarrow \boxed{H(j\omega)} \longrightarrow y(t)=Ae^{j(\omega_i t+\varphi)}$

$\cos\omega_i t \longrightarrow \boxed{H(j\omega)} \longrightarrow y(t)=A\cos(\omega_i t+\varphi)$

$\sin\omega_i t \longrightarrow \boxed{H(j\omega)} \longrightarrow y(t)=A\sin(\omega_i t+\varphi)$

⇒ $A=|H(j\omega_i)|$

$\varphi=\arg H(j\omega_i)$.

$Ae^{j\varphi}\cdot e^{j\omega_i t}$, 由于 $H(j\omega_i)=Ae^{j\varphi}$

则可写为 $H(j\omega_i)e^{j\omega_i t}$.

$\left(x(t)=\sum A_i e^{j\omega_i t}. \Rightarrow y(t)=\sum A_i H(j\omega_i)e^{j\omega_i t}\right)$

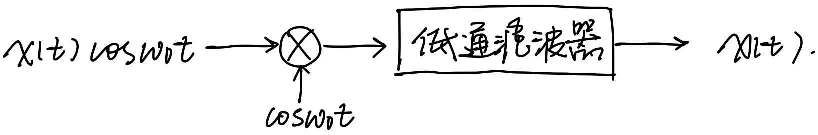
(2) 调制&解调.

①调制.

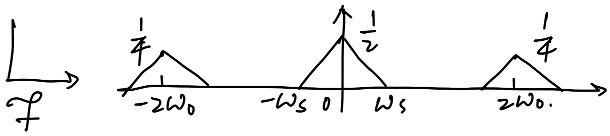
$$x(t)\cos w_0 t \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{2}\cdot[X(j(w+w_0))+X(j(w-w_0))].$$

②解调.

同步解调:



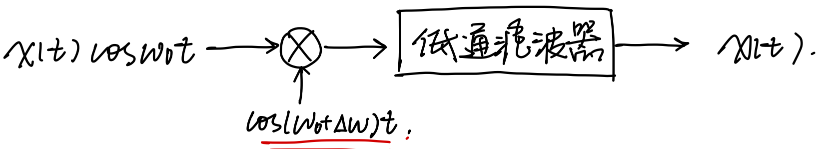
$$x(t)\cos^2 w_0 t = x(t)\left[\frac{1+\cos 2w_0 t}{2}\right] = \frac{1}{2}x(t)+\frac{1}{2}x(t)\cos 2w_0 t.$$



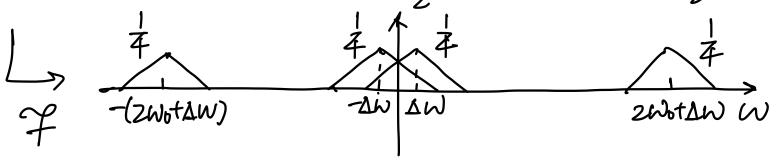
⇒再通过低通滤波器(幅度为2).

其中 $w_0 \gg w_s$. w_0为载波频率.

非同步解调: 接收端与发射端不能严格同步 假设有一微小频偏Δw.



$$\Rightarrow x(t)\cos w_0 t\cos(w_0+\Delta w)t = \frac{1}{2}x(t)\cos\Delta w t+\frac{1}{2}x(t)\cos(2w_0+\Delta w)t.$$

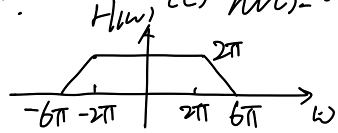


⇒低频信号发生混叠.

o 已知信号 $e(t)=\sin\pi t+\cos 3\pi t$. 求该信号经过下列LTI系统后的输出信号 $r(t)$.

(a) $h(t)=\frac{\sin 2\pi t}{\pi t}$. (b) $h(t)=\frac{(\sin 2\pi t)(\sin 4\pi t)}{\pi t^2}$. (c) $h(t)=\frac{\sin 2\pi t\cos 4\pi t}{\pi t}$.

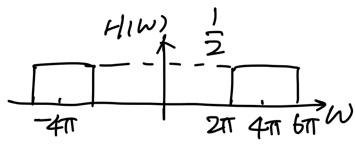
⇒(b) $h(t)=\pi\cdot\frac{\sin 2\pi t}{\pi t}\cdot\frac{\sin 4\pi t}{\pi t}$. 该系统的频响为:



(非理想低通滤波器).

则 $r(t)=2\pi\sin\pi t+\frac{3\pi}{2}\cos 3\pi t$. ⇒ 改变了输入信号中每个频率分量的幅度. 也改变了相对含量大小.

(c) $h(t)=\frac{\sin 2\pi t}{\pi t}\cdot\cos 4\pi t$. 该系统频响为:



⇒带通滤波器.

○已知一个周期信号 $e(t)$ 为：$e(t)=1+2\cos 2\pi t+3\cos 6\pi t$. 系统的单位冲激响应为 $h(t)=e^{-2t}\varepsilon(t)$. 计算输出 $r(t)$ 的傅立叶级数表达式.

$\frac{1}{2j+2}$　$\frac{2j-2}{8}$　$\frac{j-1}{4}$　$\frac{\sqrt{2}}{4}$

$$h(t)=e^{-2t}\varepsilon(t)\xrightarrow{\mathcal{F}}H(j\omega)=\frac{1}{j\omega+2}.$$

$y(t)$ 为特征输出可直接写出其形式为 $y(t)=A_1\cos(0t+\varphi_1)+2A_2\cos(2\pi+\varphi_2)+3A_3\cos(6\pi+\varphi_3)$.

其中 $H(j\omega)|_{\omega=0}=A_1\angle\varphi_1$　$H(j\omega)|_{\omega=2}=A_2\angle\varphi_2$　$H(j\omega)|_{\omega=6}=A_3\angle\varphi_3$.

也可以直用傅立叶级数形式求解.

$e(t)$ 的傅立叶级数形式为 $e(t)=1+e^{j2\pi t}+e^{-j2\pi t}+\frac{3}{2}e^{j6\pi t}+\frac{3}{2}e^{-j6\pi t}$.

$r(t)$ 的级数形式为：$r(t)=\frac{A_1}{2}e^{j\varphi_1}+\frac{A_1}{2}e^{-j\varphi_1}+A_2e^{j\varphi_2}e^{j2\pi t}+A_2e^{-j\varphi_2}e^{-j2\pi t}+\frac{3}{2}A_3e^{j\varphi_3}e^{j6\pi t}+\frac{3}{2}A_3e^{-j\varphi_3}e^{-j6\pi t}$.

其中 $A_1e^{\pm j\varphi_1}$. $A_2e^{\pm j\varphi_2}$. $A_3e^{\pm j\varphi_3}$ 为傅立叶级数系数. A 和 φ 由 $H(j\omega)$ 给出.

①将输入信号 $e(t)$ 写成级数形式：$e(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}F_ne^{jn2\pi t}$ (本例).

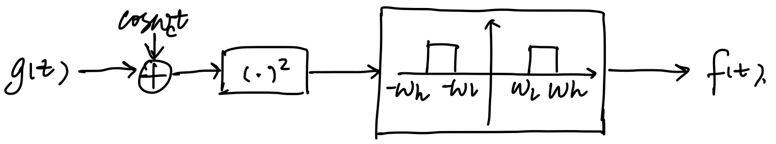
②频响为 $H(j\omega)=\frac{1}{j\omega+2}$. 则输出为 $r(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}R_ne^{jn2\pi t}$.

级数系数为 $R_n=F_n\cdot H(jn2\pi)\Rightarrow R_0=\frac{1}{2}$，$R_1=1\cdot\frac{1}{2+j2\pi}=\frac{1}{2(1+j\pi)}$

$R_{-1}=1\cdot\frac{1}{2+j(-2\pi)}=\frac{1}{2(1-j\pi)}$. $R_3=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2+j6\pi}=\frac{3}{4(1+j3\pi)}$，$R_{-3}=\cdots\cdots$

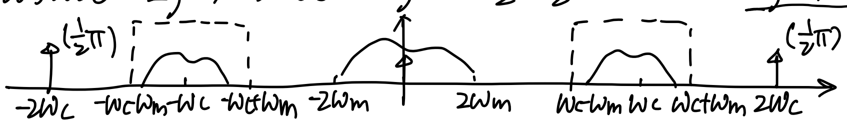
A 根据 $H(j\omega)=\frac{1}{j\omega+2}$ 可写出描述系统的微分方程.

○一个幅度调制系统. 先把调制信号 $g(t)$ 与载波之和平方. 然后通过带通滤波器获得已调信号. 若 $g(t)$ 为带限信号 即 $|\omega|>\omega_m$. 时 $G(j\omega)=0$. 试确定带通滤波器的参数 A. ω_L. ω_H. 使得 $f(t)=g(t)\cos\omega_c t$, 并给出 ω_c. ω_m 的约束.



$$\Rightarrow[g(t)+\cos\omega_c t]^2=g^2(t)+\cos^2\omega_c t+2g(t)\cos\omega_c t=g^2(t)+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2\omega_c t+2g(t)\cos\omega_c t.$$

该函数的频谱为：



则带通滤波器范围应在虚线框所示范围. 可得：$-2\omega_m<\omega_L<\omega_c-\omega_m$，$\omega_c+\omega_m<\omega_h<2\omega_c$

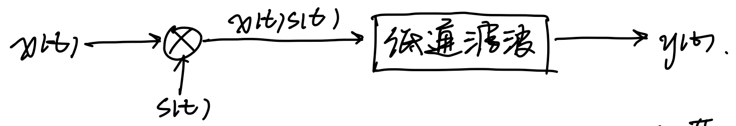
带通滤波范围内的频谱为 $2g(t)\cos\omega_c t$. 则 $A=\frac{1}{2}$

由采样定理. 为不发生混叠. 得 $2\omega_m<\omega_c-\omega_m\Rightarrow\omega_m<\frac{1}{3}\omega_c$.

(低通滤波器带相位)

系统如下图所示，且 $x(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{jnt}$，$s(t)=\cos t$，

低通滤波器的响应 $H(j\omega)=\begin{cases} e^{-j\frac{\pi}{3}\omega}, & |\omega|\le 1.5 \\ 0, & |\omega|>1.5 \end{cases}$，求系统的输出.



低通滤波器：$|H(j\omega)|=\begin{cases}1, & |\omega|\le 1.5\\ 0, & |\omega|>1.5\end{cases}$，$\arg H(j\omega)=\begin{cases}-\frac{\pi}{3}\omega, & |\omega|\le 1.5\\ 0, & |\omega|>1.5\end{cases}$

$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{jnt}$，由 $x(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n e^{jn\omega_s t}$ 得 $\omega_s=\frac{2\pi}{T}=1$. 则 $T=2\pi$.

$\hookrightarrow x(t)=1+e^{jt}+e^{-jt}+e^{j2t}+e^{-j2t}+\cdots$

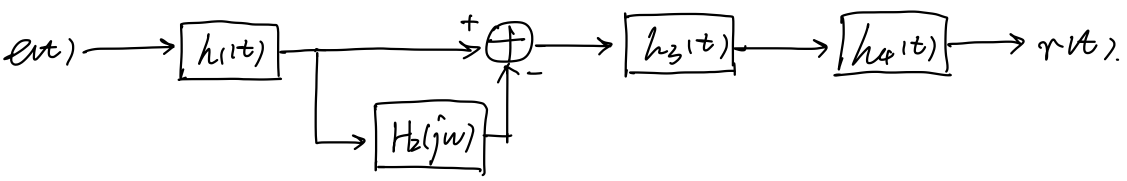
$\mathcal{F}[x(t)]=2\pi\sum_{n=-\infty}^{+\infty}F_n\delta(\omega-n\omega_s).=2\pi\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(\omega-n)$. 易得 $x(t)s(t)$ 的频谱与 $x(t)$ 相同.

则 $y(t)=1\cdot e^{j\arg H(0)}+e^{jt}\cdot e^{j\arg H(1)}+e^{-jt}\cdot e^{j\arg H(-1)}=1+e^{j(t-\frac{\pi}{3})}+e^{j(-t+\frac{\pi}{3})}=1+2\cos(t-\frac{\pi}{3})$

△低通滤波器具有非零相位.该题目中为线性相位.对时域的影响为产生频移.

已知一个系统由四个子系统组成. 其中 $h_1(t)=\frac{d}{dt}\left[\frac{\sin\omega_c t}{2\pi t}\right]$. $H_2(j\omega)=e^{-j2\pi\frac{\omega}{\omega_c}}$

$h_3(t)=\frac{\sin 3\omega_c t}{\pi t}$. $h_4(t)=\varepsilon(t)$. 若 $e(t)=\sin 2\omega_c t+\cos(\frac{\omega_c t}{2})$. 求系统输出 $r(t)$.



⇒其中 $h_3(t)$ 为截止频率为 $3\omega_c$.放大倍数为1的低通滤波器，$h_4(t)$ 为积分器

$h_1(t)$ 为微分器级联截止频率为 ω_c.放大倍数为 $\frac{1}{2}$ 的低通滤波器.

则由交换律.将 $h_1(t)$，$h_3(t)$，$h_4(t)$ 级联后成为一个截止频率为 ω_c.放大倍数为1的低通滤波器.

$e(t)\longrightarrow\boxed{h_1(t)*h_3(t)*h_4(t)}\longrightarrow e'(t)=\frac{1}{2}\cos(\frac{\omega_c t}{2})$.

$e'(t)\longrightarrow\boxed{H_2(j\omega)}\longrightarrow e''(t)=\frac{1}{2}\cos[\frac{\omega_c}{2}(t-\frac{2\pi}{\omega_c})]=\frac{1}{2}\cos[\frac{\omega_c t}{2}-\pi]=-\frac{1}{2}\cos\frac{\omega_c t}{2}$.

则 $r(t)=e'(t)-e''(t)=\cos\frac{\omega_c t}{2}$.

△什么时候不同系统之间串联时能使用交换率？

例：

○ 系统如下图，且 $x(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{jnt}$，$s(t)=\cos t$，低通滤波器的频响为 $H(j\omega)=\begin{cases} e^{-j\frac{\pi}{3}\omega}, & |\omega|\le 1.5 \\ 0, & |\omega|>1.5 \end{cases}$

求系统输出 $y(t)$.

$$x(t) \longrightarrow \bigotimes \xrightarrow{x(t)s(t)} \boxed{\text{低通滤波器}} \longrightarrow y(t).$$

（乘法器下方输入 $s(t)$）

令 $x'(t)=x(t)s(t)$，则 $X'(j\omega)=X(j\omega)*S(j\omega)$

由 $x(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{jnt}$ 可知 $X(j\omega)=2\pi\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(\omega-n)$. $\begin{cases}\text{可由 } 1\mapsto\delta(\omega) \text{ 及频移求得.} \\ \text{可由 } \omega_s=\frac{2\pi}{T}=1. \text{ 及 } 2\pi\sum_{n=-\infty}^{+\infty}F_n\delta(\omega-n\omega_s) \text{ 求得.}\end{cases}$

则 $X'(j\omega)=\frac{1}{2\pi}X(j\omega)*\pi[\delta(\omega+1)+\delta(\omega-1)]=X(j\omega)$.

由特征输入及特征输出：$y(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}R_n e^{jnt}$，其中 $R_n=1\cdot H(jn)$.

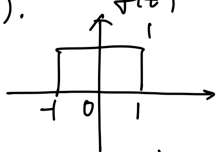
由 $H(j\omega)=\begin{cases} e^{-j\frac{\pi}{3}\omega}, & |\omega|\le 1.5 \\ 0, & |\omega|>1.5\end{cases}$ 得：$H(jn)=\begin{cases} e^{-j\frac{\pi}{3}n}, & |n|\le 1.5 \\ 0, & |n|>1.5.\end{cases}$

则 $y(t)=1+e^{j(t-\frac{\pi}{3})}+e^{j(-t+\frac{\pi}{3})}=1+2\cos(t-\frac{\pi}{3})$.（$n=\pm2, \pm3\cdots$ 被过滤掉）.

○ (例4.11).

$\Rightarrow \delta_T(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-n)$.

取一个周期 $f_0(t)$ =



t. 则 $f_0(t)\xrightarrow{\mathcal{F}}F_0(\omega)=2Sa(\omega)=\frac{2\sin\omega}{\omega}$.

信号 $f(t)$ 周期为8，则其级数形式为 $f(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}F_n e^{j\frac{n\pi}{4}t}$.

其傅立叶变换为 $F(j\omega)=2\pi\sum_{n=-\infty}^{+\infty}F_n\delta(\omega-\frac{n\pi}{4})$. 其中 $F_n=\frac{1}{8}F_0(j\omega)|_{\omega=\frac{n\pi}{4}}=\frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n\pi}$.

则 $F(j\omega)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{2\sin\frac{n\pi}{4}}{n}\delta(\omega-\frac{n\pi}{4})$. $f(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n\pi}e^{j\frac{n\pi}{4}t}$.

由特征输出可知 $y_1(t)=\sum_{n=-4}^{4}\frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n\pi}H_1(\frac{n\pi}{4})e^{j\frac{n\pi}{4}t}$

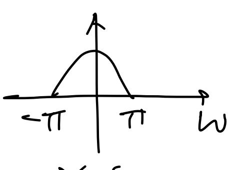
$\Rightarrow y_1(t)=\frac{\sqrt{2}}{2\pi}e^{j\frac{\pi}{4}t}+\frac{\sqrt{2}}{2\pi}e^{-j\frac{\pi}{4}t}+\frac{1}{2\pi}e^{j\frac{\pi}{2}t}+\frac{1}{2\pi}e^{-j\frac{\pi}{2}t}-\frac{\sqrt{2}}{6\pi}e^{j\frac{3\pi}{4}t}-\frac{\sqrt{2}}{6\pi}e^{-j\frac{3\pi}{4}t}$.

相应地，$Y_1(j\omega)$ 为 $F(j\omega)$ 经过低通门限信号之后的输出：$Y_1(j\omega)=\sum_{n=-4}^{4}\frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n\pi}\delta(\omega-\frac{n\pi}{4})$.

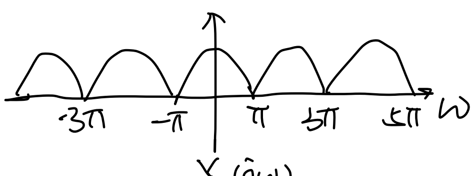
又由 $\delta_T(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-n)$ 得 $\delta_T(t)\xrightarrow{\mathcal{F}}2\pi\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(\omega-2n\pi)$.

则 $Y_2(j\omega)=\frac{1}{2\pi}Y_1(j\omega)*2\pi\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(\omega-2n\pi)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}Y_1(j(\omega-2n\pi))$.

易知 $Y_1(j\omega)$ 为低频带限信号，其 $\omega_m=\pi$，则 $Y_2(j\omega)$ 是对 $Y_1(j\omega)$ 进行抽样，且抽样频率 $\omega_s=\frac{2\pi}{T}=2\pi=2\omega_m$，则有：



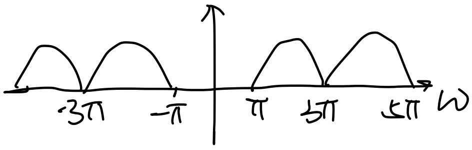
$Y_1(j\omega)$



$Y_2(j\omega)$.

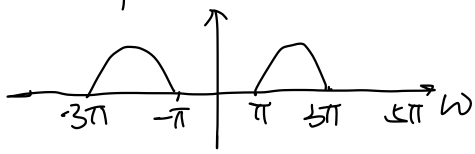
支撑函数 ($<\pi$)

$Y_3(j\omega)=Y_2(j\omega)-Y_1(j\omega)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}Y_1[j(\omega-2n\pi)]-Y_1(j\omega)$. 则 $Y_3(j\omega)$:



$Y_3(j\omega)$ 经过 $H_2(j\omega)$ 之后，高于 5π 的频率分量被滤掉.

则 $Y_3(j\omega)$ 为频率为 $\pi\sim5\pi$ 的带限信号:



↳ 本题中级联次序不可改变.

6. 傅立叶变换的奇偶虚实性.

设有 $x(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} X(j\omega)$.

1°. 若有 $x(-t)=x(t)$. 根据 $x(at) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{|a|}X(\frac{\omega}{a})$ 有 $x(-t) \xrightarrow{\mathcal{F}} X(-j\omega)$

则有 $X(-j\omega)=X(j\omega)$.

2°. $x^*(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} X(-j\omega)$, $x^*(-t) \xrightarrow{\mathcal{F}} X(j\omega)$.

推导: $\mathcal{F}[x^*(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t)e^{-j\omega t}dt = \int_{-\infty}^{+\infty}[x(t)e^{j\omega t}]^*dt = [\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j(-\omega)t}dt]^* = X^*(-j\omega)$

3°. 若 $x(t)=x^*(t)$. 则有 $X(j\omega)=X^*(-j\omega)$.

$Re[X(j\omega)]+jIm[X(j\omega)] = Re[X(-j\omega)]-jIm[X(-j\omega)]$

$$\begin{cases} Re[X(j\omega)] = Re[X(-j\omega)]. \\ Im[X(j\omega)] = -Im[X(-j\omega)] \end{cases}$$

⇒即若 $x(t)$ 为实信号, 则其傅立叶变换的实部为偶函数, 虚部为奇函数.

也可写为模和相位的形式: $|X(j\omega)|e^{j\measuredangle X(j\omega)} = |X(-j\omega)|e^{-j\measuredangle X(-j\omega)}$. (共轭).

则有: $|X(j\omega)| = |X(-j\omega)|$. $\measuredangle X(j\omega) = -\measuredangle X(-j\omega)$.

⇒即若 $x(t)$ 为实信号时, 其傅立叶变换的幅频特性为偶函数, 相频特性为奇函数.

4°. 若 $x(t)$ 为实偶函数, 则 $X(j\omega)$ 也是实偶函数.(零相位) ⇒ 零相位造成非因果.

$x(t)=x^*(t)=x(-t)$. ⇒ $X(j\omega)=X^*(-j\omega)=X(-j\omega)$.

△任意一个实信号: $x(t)=x_e(t)+x_o(t) = \frac{1}{2}(x(t)+x(-t)) + \frac{1}{2}(x(t)-x(-t))$.

其偶分量 $x_e(t)$ 的傅立叶变换是 $x(t)$ 的傅立叶变换的实部. $X_R(j\omega) \rightarrow x_e(t) \longrightarrow x(t)$

奇分量 $x_o(t)$ 的傅立叶变换是 $x(t)$ 的傅立叶变换的虚部. $X_I(j\omega) \longrightarrow x_o(t) \longrightarrow x(t)$.

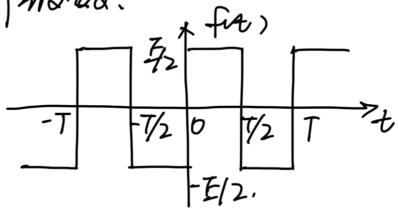
只根据傅立叶变换的实部或虚部, 可求出完整的信号 $x(t)$.

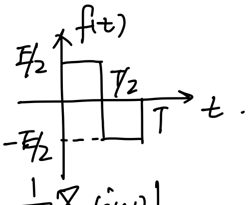
由 $x(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} X(j\omega) = |X(j\omega)|e^{j\measuredangle X(j\omega)} = Re(X(j\omega)) + Im(X(j\omega))$.

可得: $\ln[X(j\omega)] = \ln(|X(j\omega)|) + j\measuredangle X(j\omega)$.

<题目>

○ 写出下图所示周期方波的傅立叶级数.



⇒令 $x_0=$ 

则 $x_0 \xrightarrow{\mathcal{F}} X_0(j\omega)=\frac{ET}{4}Sa(\frac{\omega T}{4})e^{-j\omega\frac{T}{4}}-\frac{ET}{4}Sa(\frac{\omega T}{4})e^{-j\omega\frac{3T}{4}}$

则 $F_n=\frac{1}{T}X_0(j\omega)|_{\omega=n\omega_s}=\frac{E}{4}Sa(\frac{n\omega_s T}{4})(e^{-jn\omega_s\frac{T}{4}}-e^{-jn\omega_s\frac{3T}{4}})=\frac{E}{4}Sa(\frac{n\pi}{2})(e^{-\frac{j}{2}n\pi}-e^{-\frac{3}{2}jn\pi})$.

则周期信号的傅立叶级数为：$f(t)=\frac{E}{4}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}Sa(\frac{n\pi}{2})(e^{-\frac{j}{2}n\pi}-e^{-\frac{3}{2}jn\pi})e^{jn\frac{2\pi}{T}t}$.

○ 求下列信号的傅立叶变换.

(1) $e^{2+t}u(-t)+1$

$e^t u(-t)\xrightarrow{\mathcal F}\int_{-\infty}^{+\infty}e^t u(-t)\cdot e^{j\omega t}dt=\int_{-\infty}^{0}e^{(j\omega+1)t}dt=\frac{1}{j\omega+1}$, $1\xrightarrow{\mathcal F}2\pi\delta(\omega)$.

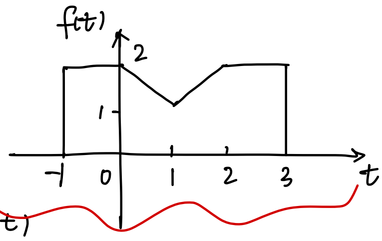
则 $e^{2+t}u(-t)+1\xrightarrow{\mathcal F}\frac{e^2}{j\omega+1}+2\pi\delta(\omega)$.

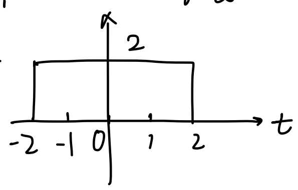
○ F(w)为下图所示信号的傅立叶变换. 见后.

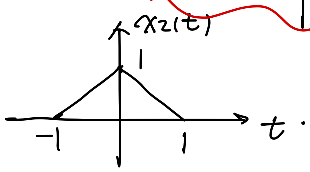
(1) $\arg F(\omega)$　(2) $Re\{F(\omega)\}$.

(3) $F(0)$　(4) $\int_{+\infty}^{\infty}F(\omega)d\omega$.

(5) $\int_{-\infty}^{\infty}|F(\omega)|^2d\omega$　(6) $\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)\frac{2\sin\omega}{\omega}e^{j2\omega}d\omega$.

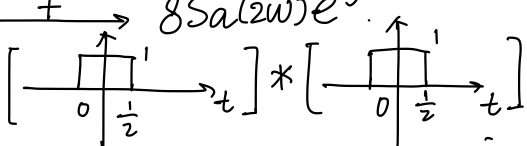


⇒令 $x_1(t)$为: 

$x_2(t)$为: 

则 $f(t)=x_1(t-1)-x_2(t-1)$

其中 $x_1(t-1)\xrightarrow{\mathcal F}8Sa(2\omega)e^{-j\omega}$

$x_2(t)=$ 

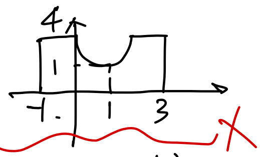
，则 $x_2(t-1)\xrightarrow{\mathcal F}(Sa)^2(\frac{\omega}{2})e^{-j\omega}$.

⇒ $f(t)\xrightarrow{\mathcal F}F(\omega)=[8Sa(2\omega)-(Sa)^2(\frac{\omega}{2})]e^{-j\omega}$.

(1) $\arg F(\omega)=-\frac{\pi}{2}$. (2) $Re\{F(\omega)\}=[8Sa(2\omega)-(Sa)^2(\frac{\omega}{2})]\cos\omega$ (3) $F(0)=(8-1)\times1=7$.

(4) $\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)d\omega=\int_{-\infty}^{\infty}[8Sa(2\omega)-(Sa)^2(\frac{\omega}{2})]e^{-j\omega}d\omega=4\int_{-\infty}^{\infty}Sa(2\omega)d(2\omega)-2\int_{-\infty}^{\infty}(Sa)^2(\frac{\omega}{2})d(\frac{\omega}{2})$

$=4\pi-2\pi=2\pi$

(5) $\int_{-\infty}^{\infty}|F(\omega)|^2d\omega=2\pi\int_{-\infty}^{\infty}f^2(t)dt$, $f^2(t)\Rightarrow$ 

则原式$=32\pi-\cancel{9\pi^2}$ $\frac{76}{3}\pi$.

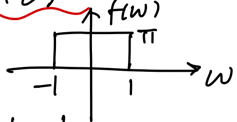
(6) $\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)\frac{2\sin\omega}{\omega}e^{j2\omega}d\omega=2\int_{-\infty}^{\infty}[8Sa(2\omega)-(Sa)^2(\frac{\omega}{2})]Sa(\omega)e^{j\omega}d\omega$

○ 利用帕斯瓦尔定理：$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|F(\omega)|^2 d\omega$.

计算：

※(1) $\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 dt$　　※(2) $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dt}{(1+t^2)^2}$

⇒(1) $\frac{\sin t}{t} = \frac{\pi \sin t}{\pi t} \xrightarrow{\mathcal{F}}$

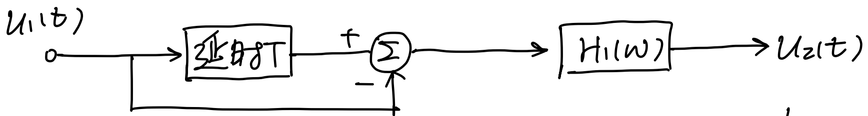


则原式 $= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|F(\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\pi^2 d\omega = \pi$

(2) 由 $\mathcal{F}[e^{-|t|}] = \frac{2}{1+\omega^2}$ 得：$\frac{1}{1+t^2} \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{2}\times 2\pi e^{-|\omega|} = \pi e^{-|\omega|}$

则原式 $= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|\pi e^{-|\omega|}|^2 d\omega = \frac{\pi\cdot\pi}{2}$　$\frac{\pi}{2}$　$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|\pi e^{-|\omega|}|^2 d\omega = \frac{\pi}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-2|\omega|}d\omega = \frac{\pi}{2}$

○ $H_1(\omega)$是理想低通滤波器，且 $H_1(\omega)=\begin{cases} e^{-j\omega t_0}, & |\omega|\le 1\\ 0, & |\omega|>1\end{cases}$



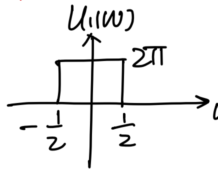
(a) $u_1(t)$为单位阶跃信号，写出$u_2(t)$.　(b) $u_1(t)=\frac{2\sin\frac{t}{2}}{t}$，写出$u_2(t)$

(a) $u_1'(t) = u(t)-u(t-T)$ 则 $\mathcal{F}[u_1'(t)] = \mathcal{F}[u(t)-u(t-T)] = TSa(\frac{\omega T}{2})e^{-j\omega\frac{T}{2}}$

则 $\mathcal{F}[u_2(t)] = TSa(\frac{\omega T}{2})e^{-j\omega\frac{T}{2}}\cdot e^{-j\omega t_0} = TSa(\frac{\omega T}{2})e^{-j\omega(\frac{T}{2}+t_0)}\cdot[u(\omega+\frac{1}{2})-u(\omega-\frac{1}{2})]$

⇒ $u_2(t) = [u(t-t_0)-u(t-t_0-T)] * \frac{\sin t}{\pi t}$. $=\frac{1}{\pi}[Si(t-t_0)-Si(t-t_0-T)]$.

(b) $u_1(t)=\frac{2\sin\frac{t}{2}}{t} = \frac{2\pi\sin\frac{t}{2}}{\pi t}$ 则 $u_1(t)\xrightarrow{\mathcal{F}}$



$=2\pi[u(\omega+\frac{1}{2})-u(\omega-\frac{1}{2})]$

且 $u_1(t-T)\xrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi[u(t+\frac{1}{2})-u(t-\frac{1}{2})]e^{-j\omega T}$.

则 $\mathcal{F}[u_2(t)] = [\mathcal{F}[u_1(t)]+\mathcal{F}[u_1(t-T)]]\cdot H_1(\omega)$

$= 2\pi[u(\omega+\frac{1}{2})-u(\omega-\frac{1}{2})][e^{-j\omega(t_0+T)}+e^{-j\omega t_0}]\cdot[u(\omega+\frac{1}{2})-u(\omega-\frac{1}{2})]$.

$=2\pi[u(\omega+\frac{1}{2})-u(\omega-\frac{1}{2})]^2[e^{-j\omega(t_0+T)}+e^{-j\omega t_0}]$.

所以 $u_2(t) = \left[\frac{2\pi\sin\frac{1}{2}t}{\pi t} * \frac{\sin\frac{1}{2}t}{\pi t}\right]\Big|_{t-(t_0+T)} + \left[\frac{2\pi\sin\frac{1}{2}t}{\pi t}*\frac{\sin\frac{1}{2}t}{\pi t}\right]\Big|_{t=t-t_0}$

○ 确定最小采样频率和Nyquist周期. ※

(1) $1+\cos(2000\pi t)+\sin(4000\pi t)$　　(2) $(Sa)^2(100t)$.

⇒(1) $\omega_m = 4000\pi$. 则 $\omega_s \geq 2\omega_m = 8000\pi$.　$T=\frac{2\pi}{\omega_s}=\frac{1}{4000}$, $f=4000$

(2) $\omega_m=200$. 则 $\omega_s\ge 2\omega_m=400$.　$T=\frac{2\pi}{\omega_s}=\frac{\pi}{200}$. $f=\frac{200}{\pi}$.

○ $y(t)=f_1(t)*f_2(t)$. 且 $F_1(w)=0$, $|w|>1000\pi$. $F_2(w)=0$, $|w|>2000\pi$. 对其进行冲激串采样得到 $y_s(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}y(nT)\delta(t-nT)$. 确定采样周期以从 $y_s(t)$ 中恢复 $y(t)$.

⇒ 易知 $F(w)=F_1(w)F_2(w)=0$, $|w|>1000\pi$. 则最低采样频率为 2000π.

则 $T\le\frac{2\pi}{2000\pi}=\frac{1}{1000}$.

○ 一LTI系统的 $y(t)$、$x(t)$ 由下式给出:

$$\frac{dy(t)}{dt}+10y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)z(t-\tau)d\tau-x(t).$$

其中 $z(t)=e^{-t}u(t)+3\delta(t)$.

(a) 求系统的频响 $H(jw)=Y(jw)/X(jw)$

(b) 求系统冲激响应.

⇒(a). 对 $\frac{dy(t)}{dt}+10y(t)=x(t)*z(t)-x(t)$ 取傅立叶变换:

$$jwY(jw)+10Y(jw)=X(jw)(Z(jw)-1).$$

则 $H(jw)=Y(jw)/X(jw)=\frac{Z(jw)-1}{jw+10}$.

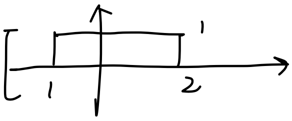
又因为 $Z(jw)=\mathcal{F}[e^{-t}u(t)]+3=\frac{1}{jw+1}+3$, 所以 $H(jw)=\frac{\frac{1}{jw+1}+2}{jw+10}=\frac{2jw+3}{(jw+2)(jw+10)}$

(b) 易知 $h(t)=\mathcal{F}^{-1}[H(jw)]=\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{jw+2}+\frac{7}{8}\cdot\frac{1}{jw+10}\right]=\left(\frac{1}{8}e^{-2t}+\frac{7}{8}e^{-10t}\right)u(t)$.

$\left[\frac{1}{9}e^{-t}+\frac{17}{9}e^{-10t}\right]u(t)$.

0 已知一LTI系统输入输出满足以下关系：

$$y(t)=\int_{-\infty}^{t} e^{-(t-\tau)}x(\tau-2)\,d\tau.$$

(a) 求 $h(t)$. (b) 当 $x(t)$ 为  时，求 $y(t)$.

$y(t)=h(t)*x(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}h(t-\tau)x(\tau)\,d\tau$

$\because y(t)=\int_{-\infty}^{t}e^{-(t-\tau)}x(\tau-2)\,d\tau=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(t-\tau)}u(t-\tau)x(\tau-2)\,d\tau=e^{-t}u(t)*x(t-2)$

$=e^{-(t-2)}u(t-2)*x(t)$. 则 $h(t)=e^{-(t-2)}u(t-2)\to H(j\omega)=\cancel{\frac{1}{j(\omega+2)+1}}$ $\frac{1}{j\omega+1}e^{-j2\omega}$.

$x'(t)=\delta(t+1)-\delta(t-2)$

则 $y(t)=h(t)*x(t)=\int_{-\infty}^{t}h(t)*x'(t)\,dt$

$h(t)*x'(t)=e^{-(t-1)}u(t-1)-e^{-(t-4)}u(t-4)$.

1°. 当 $t\le 1$ 时. $y(t)=0$.

2°. 当 $1<t\le 4$ 时. $y(t)=\int_1^t e^{-(\tau-1)}\,d\tau=1-e^{-(t-1)}$.

3°. 当 $t>4$ 时. $y(t)=\int_1^t e^{-(\tau-1)}\,d\tau+\int_4^t e^{-(\tau-4)}\,d\tau=e^{-(t-4)}-e^{-(t-1)}$.

∵ 卷积是线性运算.

① $f_1(t)=u(t)-u(t-4)$. $f_2(t)=\sin\pi t\cdot u(t)$.

$f(t)=[u(t)-u(t-4)]*[\sin\pi t\cdot u(t)]$

其中 $u(t)*\sin\pi t\,u(t)=\int_0^t\sin\pi t\,dt=\frac{1}{\pi}[1-\cos\pi t]u(t)$.

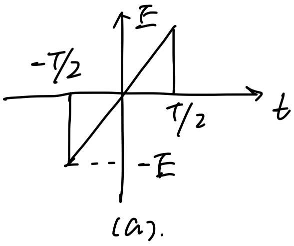
$u(t-4)*\sin\pi t\,u(t)=[u(t)*\sin\pi t\,u(t)]\big|_{t=t-4}$

$=\frac{1}{\pi}[1-\cos\pi(t-4)]u(t-4)$

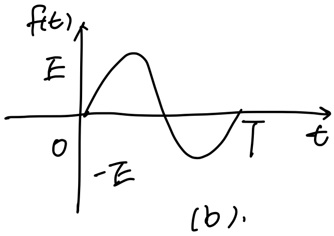
$=\frac{1}{\pi}[1-\cos\pi t]u(t-4)$.

则原式 $=\begin{cases}\frac{1}{\pi}[1-\cos\pi t], & 0\le t\le 4\\ 0, & t<0,\ t>4.\end{cases}$

○ 求下列信号的傅立叶变换：



(a).



(b).

(a). $f(t)=\begin{cases}\frac{2E}{T}t, & -\frac{T}{2}\le t\le \frac{T}{2}\\ 0, & 其他.\end{cases}$

$$\Rightarrow F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\frac{2E}{T}t\cdot e^{-j\omega t}dt$$

$$=\frac{Ej}{\omega}(e^{-j\omega\frac{T}{2}}+e^{j\omega\frac{T}{2}})+\frac{2E}{\omega^2T}(e^{-j\omega\frac{T}{2}}-e^{j\omega\frac{T}{2}}) = \frac{2Ej}{\omega}\cos\frac{T}{2}\omega + \frac{4Ej}{\omega^2T}\sin\frac{T}{2}\omega.$$

$$=\frac{2Ej}{\omega}[j\cos\frac{T}{2}\omega - Sa(\frac{\omega T}{2})].$$

<直接用定义算>.

(b) $f(t)=E\cdot\sin\frac{2\pi}{T}t\cdot[u(t)-u(t-T)]$

其中 $\sin\frac{2\pi}{T}t \xrightarrow{\mathcal{F}} j\pi[\delta(\omega+\frac{2\pi}{T})-\delta(\omega-\frac{2\pi}{T})]$.

$u(t)-u(t-T) \xrightarrow{\mathcal{F}} TSa(\frac{\omega T}{2})e^{-j\frac{T}{2}\omega}$

则 $\mathcal{F}[f(t)]=\frac{E}{2\pi}\mathcal{F}[\sin\frac{2\pi}{T}t]*\mathcal{F}[u(t)-u(t-T)]$

$$=\frac{jT}{2}ESa(\frac{\omega T}{2})e^{-j\frac{T}{2}\omega}*[\delta(\omega+\frac{2\pi}{T})-\delta(\omega-\frac{2\pi}{T})]$$

$$=\frac{jT}{2}E[Sa(\frac{\omega T}{2}-\pi)-Sa(\frac{\omega T}{2}+\pi)]e^{-j\frac{T}{2}\omega}$$

$$=\frac{jTE}{2}\cdot\frac{2\pi}{\frac{\omega^2T^2}{4}-\pi^2}\cdot e^{-j\frac{T}{2}\omega} = j\frac{2E\omega_s}{\omega_s^2-\omega^2}\sin\frac{\omega T}{2}\cdot e^{-j\frac{T}{2}\omega}.$$ 其中 $\omega_s=\frac{2\pi}{T}$

或者：$F(\omega)=\int_0^T E\sin\frac{2\pi t}{T}\cdot e^{-j\omega t}dt = \frac{E}{2j}\int_0^T(e^{j\frac{2\pi}{T}t}-e^{-j\frac{2\pi}{T}t})e^{-j\omega t}dt$

$$=\frac{E}{2j}\cdot\left[\frac{e^{-j\omega T}-1}{j(\frac{2\pi}{T}-\omega)}+\frac{e^{-j\omega T}-1}{j(\frac{2\pi}{T}+\omega)}\right] = \frac{2\pi TE(1-e^{-j\omega T})}{4\pi^2-\omega^2T^2}.$$

$$=\frac{2\pi TE}{4\pi^2-\omega^2T^2}(1-\cos\omega T-j\sin\omega T).$$

○ 求下列信号的傅立叶变换.

(1) $e^{2t}u(t)+1$. (2) $e^{-3|t|}\sin 2t$ (3) $[e^{-\alpha t}\cos\omega_0 t]u(t)$ (4) $[te^{-2t}\sin 4t]u(t)$.

(2) $f(t)=e^{-3|t|}\sin 2t$.

其中 $f_1(t)=e^{-3|t|}=e^{-3t}u(t)+e^{3t}u(-t)$, $F_1(j\omega)=\frac{1}{j\omega+3}-\frac{1}{j\omega-3}=\frac{6}{\omega^2+9}$.

$f_2(t)=\sin 2t \Rightarrow F_2(j\omega)=j\pi[\delta(\omega+2)-\delta(\omega-2)]$

则 $F(j\omega)=\frac{1}{2\pi}F_1(j\omega)*F_2(j\omega)=\frac{j}{2}\cdot\frac{6}{\omega^2+9}*[\delta(\omega+2)-\delta(\omega-2)]$

$=\frac{j}{2}\left[\frac{6}{(\omega+2)^2+9}-\frac{6}{(\omega-2)^2+9}\right]$.

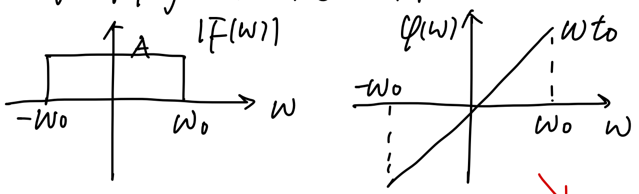
(3) $e^{-\alpha t}u(t)\xrightarrow{\mathcal{F}}\frac{1}{j\omega+\alpha}$. $\cos\omega_0 t\xrightarrow{\mathcal{F}}\pi[\delta(\omega+\omega_0)-\delta(\omega-\omega_0)]$.

则 $F(j\omega)=\frac{1}{2\pi}F_1(j\omega)*F_2(j\omega)=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\alpha+j(\omega+\omega_0)}+\frac{1}{\alpha+j(\omega-\omega_0)}\right]$.

(4) $F_1(j\omega)=\mathcal{F}[e^{-2t}\sin 4t\,u(t)]=\frac{j}{2}\left[\frac{1}{2+j(\omega+4)}-\frac{1}{2+j(\omega-4)}\right]$

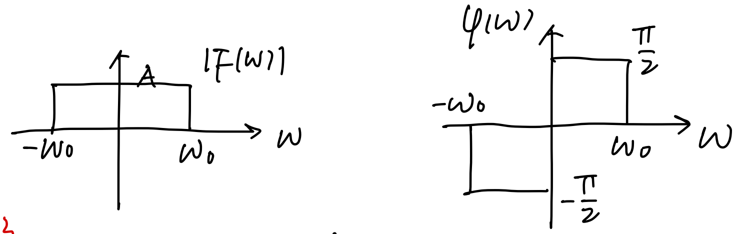
$F(j\omega)=jF_1'(j\omega)=\frac{j}{2}\left[\frac{1}{[2+j(\omega+4)]^2}-\frac{1}{[2+j(\omega-4)]^2}\right]$.

0 求下列 $F(j\omega)$ 的傅立叶反变换.



(a)

线性相位



(b)

解 (a) 法一:

由图可知: $F(j\omega)=|F(\omega)|e^{j\varphi(\omega)} = Ae^{j\omega t_0}$, $-\omega_0 \le \omega \le \omega_0$.

则 $f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_0}^{\omega_0} F(j\omega)e^{j\omega t}d\omega = \frac{A}{2\pi}\int_{-\omega_0}^{\omega_0} e^{j\omega(t+t_0)}d\omega$

$= \frac{A}{2\pi j(t+t_0)}\left[e^{j\omega_0(t+t_0)}-e^{-j\omega_0(t+t_0)}\right] = \frac{A\omega_0}{\pi}Sa[\omega_0(t+t_0)]$.

法二:

因 $f(t)\xrightarrow{\mathcal{F}}F(\omega)$. $F(t)\xrightarrow{\mathcal{F}}2\pi f(-\omega)$ 知 $f(t)=\frac{1}{2\pi}\mathcal{F}[F(t)]\big|_{\omega=-t}$.

考虑: $F'(\omega)=|F(\omega)|$ 则 $f(t)=f'(t+t_0)$

对 $F'(\omega)$ 有: $F'(t)\xrightarrow{\mathcal{F}}2A\omega_0 Sa(\omega\omega_0)$ 则 $f'(t)=\frac{A\omega_0}{\pi}Sa(\omega_0 t)$.

则 $f(t)=\frac{A\omega_0}{\pi}Sa[\omega_0(t+t_0)]$.

(b). 由图可知: $F(j\omega)=|F(\omega)|e^{j\varphi(\omega)} = \begin{cases} Aj, & 0<\omega<\omega_0 \\ -Aj, & -\omega_0<\omega<0 \end{cases}$

则 $f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(j\omega)e^{j\omega t}d\omega = \frac{Aj}{2\pi}\int_0^{\omega_0}e^{j\omega t}d\omega - \frac{Aj}{2\pi}\int_{-\omega_0}^{0}e^{j\omega t}d\omega$

$= \frac{Aj}{2\pi}\cdot\frac{e^{j\omega_0 t}+e^{-j\omega_0 t}-2}{jt} = \frac{A}{\pi t}(\cos\omega_0 t-1)$

$= -\frac{2A}{\pi t}\sin^2\frac{\omega_0 t}{2}$

○ 给定 $f(t)$ 的频谱 $F(w)$，求下列信号的频谱。

(a) $tf(2t)$.　(b) $t\frac{df(t)}{dt}$　(c) $(t-2)f(-2t)$　(d) $(1-t)f(1-t)$　(e) $f(6-2t)$.

⇒ (c) 原式 $= tf(-2t)-2f(-2t)$

由 $f(t)\xrightarrow{\mathcal{F}}F(w)$ 得：$f(-2t)\xrightarrow{\mathcal{F}}\frac{1}{2}F(-\frac{w}{2})$.

且 $tf(-2t)\xrightarrow{\mathcal{F}}j\frac{d}{dw}[\frac{1}{2}F(-\frac{w}{2})] = -\frac{j}{4}F'(-\frac{w}{2})$.

所以 $(t-2)f(-2t)\xrightarrow{\mathcal{F}}-\frac{j}{4}F'(-\frac{w}{2})-F(-\frac{w}{2})$.　答案：$\frac{j}{2}\frac{d}{dw}F(-\frac{w}{2})-F(-\frac{w}{2})$.

(e) $f(6-2t)=\underline{f[-2(t-3)]}$

由 $f(t)\xrightarrow{\mathcal{F}}F(w)$ 得 $f(-2t)\xrightarrow{\mathcal{F}}\frac{1}{2}F(-\frac{w}{2})$

则 $f(6-2t)\xrightarrow{\mathcal{F}}\frac{1}{2}F(-\frac{w}{2})e^{-j3w}$.

○ 求下列 $F(w)$ 的反变换.　$Sa(x)=\frac{\sin x}{x}$.

(a) $F(w)=\frac{2\sin[3(w-2\pi)]}{(w-2\pi)}$　(b) $F(w)=\cos(4w+\frac{\pi}{3})$.

⇒ (a) $F(w)=\frac{2\sin[3(w-2\pi)]}{(w-2\pi)} = 6Sa[3(w-2\pi)]$.

令 $F'(w)=6Sa(3w)$，则 $f(t)=f'(t)e^{j2\pi t}$.

$A=1.\ \tau=6.$

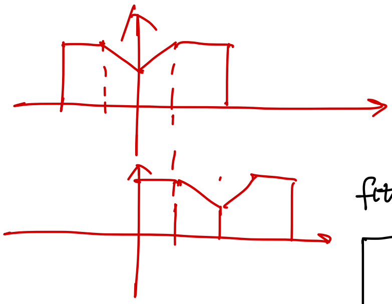
$f'(t)=\mathcal{F}^{-1}[F'(w)] = u(t+3)-u(t-3)$，则 $f(t)=[u(t+3)-u(t-3)]e^{j2\pi t}$.

即 $f(t)=\begin{cases} e^{j2\pi t}, & |t|<3 \\ 0, & |t|>3. \end{cases}$

(b) 由 $f(t)\xrightarrow{\mathcal{F}}F(w)$. $F(t)\xrightarrow{\mathcal{F}}2\pi f(-w)$. 得：$f(t)=\frac{1}{2\pi}\mathcal{F}[F(t)]|_{w=-t}$.

$\mathcal{F}[F(t)] = \mathcal{F}[\cos(4t+\frac{\pi}{3})] = \mathcal{F}[\cos 4t]e^{j\frac{\pi}{12}w} = \pi[\delta(w+4)+\delta(w-4)]e^{j\frac{\pi}{12}w}$.

则 $f(t)=\frac{1}{2}[\delta(t-4)+\delta(t+4)]\underline{e^{-j\frac{\pi}{12}t}}$　$e^{-j\frac{\pi}{3}t}$?

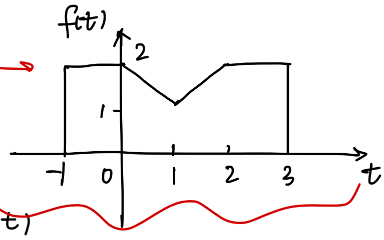


① $F(\omega)$ 为下图所示信号的傅立叶变换。

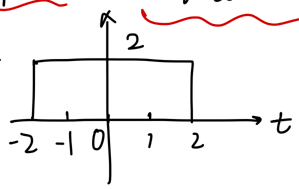
(1) $\arg F(\omega)$ (2) $Re\{F(\omega)\}$.

(3) $F(0)$ (4) $\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)\,d\omega$.

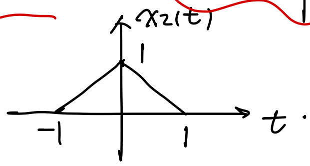
(5) $\int_{-\infty}^{\infty}|F(\omega)|^2 d\omega$ (6) $\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\frac{2\sin\omega}{\omega}e^{j2\omega}d\omega$.



⇒ 令 $x_1(t)$ 为：

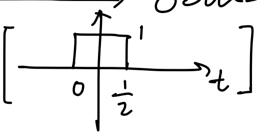
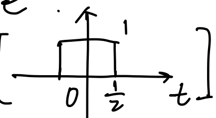


$x_2(t)$ 为：



则 $f(t) = x_1(t-1) - x_2(t-1)$

其中 $x_1(t-1) \xrightarrow{\mathcal{F}} 8Sa(2\omega)e^{-j\omega}$.

$x_2(t) = [$  $] * [$  $]$，则 $x_2(t-1) \xrightarrow{\mathcal{F}} (Sa)^2(\frac{\omega}{2})e^{-j\omega}$.

$\Rightarrow f(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} F(\omega) = [8Sa(2\omega) - (Sa)^2(\frac{\omega}{2})]e^{-j\omega}$.

(1) $\arg F(\omega) = -\frac{\pi}{2}$. (2) $Re\{F(\omega)\} = [8Sa(2\omega)-(Sa)^2(\frac{\omega}{2})]\cos\omega$ (3) $F(0) = (8-1)\times 1 = 7$.

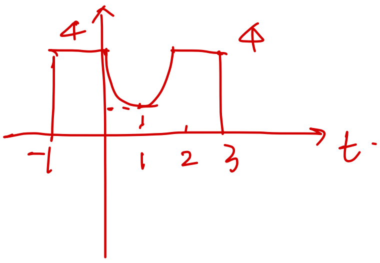
(4) $\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)d\omega = \int_{-\infty}^{\infty}[8Sa(2\omega)-(Sa)^2(\frac{\omega}{2})]e^{-j\omega}d\omega = 4\int_{-\infty}^{\infty}Sa(2\omega)d(2\omega) - 2\int_{-\infty}^{\infty}(Sa)^2(\frac{\omega}{2})d(\frac{\omega}{2})$

(1) $\arg F(\omega) = \begin{cases} -\omega, & F_0(\omega)\geq 0 \\ \pi-\omega, & F_0(\omega)<0. \end{cases}$

$F_0(\omega) = 8Sa(2\omega) - (Sa)^2(\frac{\omega}{2})$.

(4) $\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)d\omega = [\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)e^{j\omega t}d\omega]\Big|_{t=0} = [2\pi f(t)]\Big|_{t=0} = 2\pi f(0) = 4\pi$.

(5) $f^2(t) =$

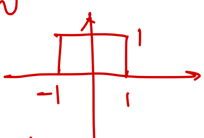


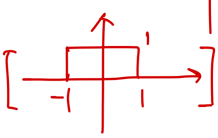
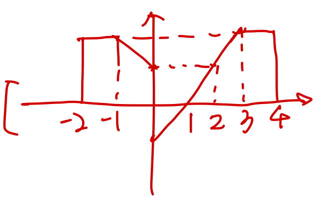
$\int_{-\infty}^{+\infty}|F(\omega)|^2 d\omega = 2\pi\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|^2 dt$

$= [\int_{-1}^{0}4\,dt + \int_0^1(2-t)^2dt + \int_1^2 t^2 dt + \int_2^3 4\,dt]2\pi$.

$= \frac{76}{3}\pi$

(6) $\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)\frac{2\sin\omega}{\omega}e^{j2\omega}d\omega = [\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)2Sa(\omega)e^{j\omega t}d\omega]\Big|_{t=2}$

$= 2\pi[f(t) *$  $]\Big|_{t=2}$

其中 $f(t) * [$  $] = \int_{-\infty}^{t} f(t)*[\delta(t+1)-\delta(t-1)]dt = \int_{-\infty}^{t}[$  $]dt$

则原式 $= 2\pi\times\frac{7}{2} = 7\pi$

○ 已知一因果LTI系统的频响为 $H(j\omega) = -2j\omega$. 求系统响应.

(a) $x(t) = e^{5t}$.　　　(b) $x(t) = \sin\omega_0 t\cdot u(t)$.

$\Rightarrow Y(\omega) = H(\omega)X(j\omega) = -2j\omega X(j\omega)$　则 $y(t) = -2x'(t)$.

(a) $y(t) = -2x'(t) = -2je^{5t}$.

(b) 由于系统及输入 $x(t)$ 均是因果的. 所以, 输出 $y(t)$ 也是因果

则 $y(t) = -2x'(t) = -2[\sin\omega_0 t\, u(t)]' = -2\omega_0(\cos\omega_0 t)u(t)$

○ 若一LTI系统频响为 $H(j\omega) = -2j\omega$. 求系统响应.

(a) $X(j\omega) = \dfrac{1}{j\omega(6+j\omega)}$.　　　(b) $X(j\omega) = \dfrac{1}{2+j\omega}$.

$Y(j\omega) = H(j\omega)X(j\omega) = -2j\omega X(j\omega)$. 则 $y(t) = -2x'(t)$.

$\Rightarrow$ (a) $Y(j\omega) = -2j\omega\cdot\dfrac{1}{j\omega(j\omega+6)} = \dfrac{-2}{j\omega+6}$ $\Rightarrow y(t) = -2e^{-6t}u(t)$.

(b) $x(t) = \mathcal{F}^{-1}[X(j\omega)] = e^{-2t}u(t)$.

$y(t) = -2x'(t) = -2[e^{-2t}u(t)]' = 4e^{-2t}u(t) - 2\delta(t)$

※ 考点：特征输入特征输出.

○ 一连续时间系统频响为 $H(j\omega) = \dfrac{j\omega}{3\pi}$, $-3\pi < \omega < 3\pi$. 求系统响应 $y(t)$.

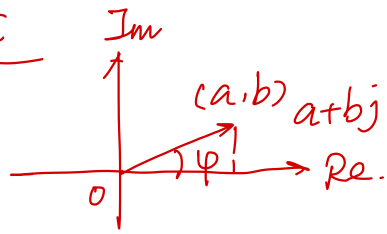
(a) $x(t) = \cos(2\pi t+\theta)$.　　　(b) $x(t) = \cos(4\pi t+\theta)$.

$\Rightarrow$ (a). $\omega_0 = 2\pi$.　$y(t) = A\cos(2\pi t+\theta+\varphi)$.

其中 $A = |H(j\omega_0)| = |\frac{2}{3}j| = \frac{2}{3}$. $\varphi = \arg H(j\omega_0) = \cancel{\frac{2}{3}}\ \frac{\pi}{2}$

则 $y(t) = \frac{2}{3}\cos(2\pi t+\theta+\frac{\pi}{2}) = -\frac{2}{3}\sin(2\pi t+\theta)$.

(b) $\omega_0 = 4\pi$.　$H(j\omega_0) = 0$. 则 $y(t) = 0$.



0 选择题.

(1) $\frac{d}{dt}[e^{-t}\delta(t-2)] =$ ______.　　(2) $x[n-2]\delta[2n] =$ ______.

(3) $x[n]=\cos[\frac{\pi}{8}n]$ 的基波周期为______.

(4) 若 $x(t)\xrightarrow{\mathcal{F}} X(j\omega)$，则 $x(t)\times\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_1)\xrightarrow{\mathcal{F}}$ ______.

(a) $\frac{1}{T_1}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-\frac{2n\pi}{T_1})$. (b) $\frac{1}{T_1}\sum_{n=-\infty}^{\infty}X(\omega-\frac{2n\pi}{T_1})$. (c) $2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}X(\omega-\frac{2n\pi}{T_1})$ (d) $2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-\frac{2n\pi}{T_1})$.

(5) $X(\omega)=\frac{1}{\omega^2}$ 的傅里叶反变换为______.

(a) $-\frac{1}{3}t$　(b) $-\frac{1}{2}t$　(c) $-\frac{1}{2}t^2$　(d) $-\frac{1}{2}|t|$.

(6) 已知 $x(t)\xrightarrow{\mathcal{F}} X(j\omega)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{2\sin k\omega_0T_1}{k}\delta(\omega-k\omega_0)$, $\omega_0=\frac{2\pi}{T}$. T为 $x(t)$ 的周期. 则 $x(t)=$ ______

(a) $x(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}e^{jn\omega_0 t}$.　(b) $x(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}[u(t+nT+T_1)-u(t+nT-T_1)]$

(c) $x(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}[u(t-nT)-u(t+nT-T_1)]$.　(d) $x(t)=\begin{cases}1. & |t|<T_1\\ 0, & T_1<|t|\le\frac{T}{2}.\end{cases}$

(7) $\frac{1}{t}\xrightarrow{\mathcal{F}}$ ______.

(a) $-j\pi\,sgn(\omega)$.　(b) $2\pi u(\omega)$　(c) $2\pi\,sgn(\omega)$.　(d) $-j\pi u(\omega)$

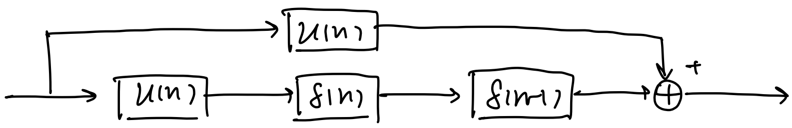
(8) 已知LTI系统频响为 $H(j\omega)$. 且 $|H(j\omega)|=\omega$. $\angle H(j\omega)=-\omega-\frac{\pi}{2}$. 则输入为 e^{-2t} 时. 输出为______

(a) e^{-2t}　(b) $-2e^{-2t}$　(c) $2e^{-2(t-1)}$　(d) te^{-2t}

(9) 已知LTI系统的频响为 $H(j\omega)=\frac{1}{1+j\omega}$. 若输入 $x(t)=\sin t$. 则输出为______.

(a) $\frac{1}{\sqrt{2}}\sin(t-\frac{\pi}{4})$.　(b) $\cos(t)$.　(c) $-\sin(t)$.　(d) $\sqrt{2}\sin(t-\frac{\pi}{4})$.

(10). 输入为 $x(n)=nu(n)$ 时. 输出 $y(n)=$ ______.



(a) $(n-1)u(n-1)$.　(b) $nu(n-1)$.　(c) $(n-1)u(n)$.　(d) $nu(n)$,

第四章 拉普拉斯变换

1. 拉普拉斯变换

(1) 设信号 $x(t)$ 的傅立叶变换为 $X(j\omega)$，则 $X(j\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt$.

$X(j\omega)$ 存在的条件：无穷积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt$ 收敛.

$\Leftrightarrow$ $x(t)$ 绝对可积：$\int_{-\infty}^{+\infty}|x(t)|dt<+\infty$ $\Leftrightarrow$ $x(t)$ 能量有限.

$\Rightarrow$ 绝对可积 限制使得某些增长信号如 e^{at} $(a>0)$ 的傅立叶变换存在.

阶跃信号 $u(t)$、周期信号的傅立叶变换中包含 $\delta(\omega)$ (实际中不存在).

$\Rightarrow$ 因此引入收敛因子 $e^{-\sigma t}$，使 $x(t)e^{-\sigma t}$ 满足绝对可积.

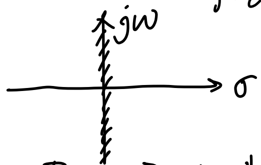
此时 $\int_{-\infty}^{+\infty}[x(t)e^{-\sigma t}]e^{-j\omega t}dt$ 收敛.

$[x(t)e^{-\sigma t}]$ 的傅立叶变换为 $\int_{-\infty}^{+\infty}[x(t)e^{-\sigma t}]e^{-j\omega t}dt=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)e^{-(\sigma+j\omega)t}dt$

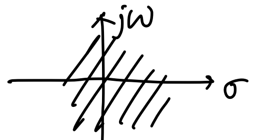
令 $s=\sigma+j\omega$，则写为 $X(s)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)e^{-st}dt$，即为拉氏变换.

① 傅立叶变换 $X(j\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt$，限定信号本身.

② 拉氏变换 $X(s)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)e^{-st}dt$，限定收敛因子 σ，对信号不作限定.



傅立叶变换(频域分析)



拉氏变换(复频域分析)

收敛因子 $\sigma=Re[s]$ 的范围称为 ROC = 收敛域.（ROC 不能漏掉）$\Rightarrow$ $X(s)$ + ROC 闭式

收敛域有4种情况：$\sigma>\sigma_0$，$\sigma<\sigma_0$，$\sigma_1<\sigma<\sigma_2$，整个复平面

(2) 有理拉氏变换式：$X(s)=\dfrac{N(s)}{D(s)}$.（只研究这一种形式）

$\hookrightarrow$ $X(s)$ 是复变量 s 的两个多项式之比.

令 $D(s)=0$ 所得根为拉氏变换 $X(s)$ 的极点 (×)，令 $N(s)=0$ 所得根为 $X(s)$ 的零点 (○).
将零点、极点在复平面中画出得到零极点图. 则用零极点图 + ROC 也能表示 $X(s)$.
由零极点图可得 $X(s)=\dfrac{\prod(s-s_0)}{\prod(s-s_x)}$，只有常数因子的差异.

(3) 收敛域 ROC.

因果：
- 一般系统：输出不可能在输入之前.
- LTI 系统：系统的冲激响应是因果信号（正半轴）

稳定：
- 一般系统：输入有界 $\Rightarrow$ 输出有界.
- LTI 系统：$\int_{-\infty}^{+\infty}|h(t)|dt<+\infty$ $\Leftrightarrow$ $H(j\omega)$ 存在.

ROC四个结论：

① 收敛域ROC以极点为界，但不包含极点、

② 因果信号的拉氏变换的收敛域在最右边极点的右侧。

③ 非因果信号的拉氏变换的收敛域在最左边极点的左侧。

④ 绝对可积信号的拉氏变换的收敛域必然包含 $j\omega$ 轴，⇒其傅立叶变换存在。

若某信号的收敛域不包含 $j\omega$ 轴则其傅立叶变换一定不存在。 Z变换不成立

⇒ 对系统先讨论拉氏变换，若有可能再讨论傅氏变换。

两种类型的拉氏变换： $X(s)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)e^{-st}dt$ (双边)． $X(s)=\int_{0^-}^{+\infty}x(t)e^{-st}dt$ (单边)．

(4) 拉氏变换的计算

① $\delta(t)\xrightarrow{\mathcal{L}}1$． 全部S．

② $u(t)\longrightarrow\frac{1}{s}$． $Re(s)>0$．

③ $-u(-t)\longrightarrow\frac{1}{s}$， $Re(s)<0$．

④ $e^{-at}u(t)\longrightarrow\frac{1}{s+\alpha}$． $Re(s)>-\alpha$．

⑤ $-e^{-\alpha t}u(-t)\longrightarrow\frac{1}{s+\alpha}$． $Re(s)<-\alpha$．

⑥ $t^n u(t)\longrightarrow\frac{n!}{s^{n+1}}$． $Re(s)>0$

⑦ $-t^n u(-t)\longrightarrow\frac{n!}{s^{n+1}}$． $Re(s)<0$

⑧ $\sin wt\cdot u(t)\longrightarrow\frac{w}{s^2+w^2}$． $Re(s)>0$

⑨ $\cos wt\cdot u(t)\longrightarrow\frac{s}{s^2+w^2}$． $Re(s)<0$．

(5) 拉氏变换的性质．

① 线性： $ax_1(t)+bx_2(t)\longrightarrow aX_1(s)+bX_2(s)$． 至少 $R_1\cap R_2$．

② 时移： $x(t\pm t_0)\longrightarrow e^{\pm st_0}X(s)$， R．

③ S域平移： $e^{s_0t}x(t)\longrightarrow X(s-s_0)$， R的平移．

④ 时域尺度变换： $x(at)\longrightarrow\frac{1}{|a|}X(\frac{s}{a})$， $\frac{R}{a}$

⑤ 共轭： $x^*(t)\longrightarrow X^*(s^*)$ R．

⑥ 卷积： $x_1(t)*x_2(t)\longrightarrow X_1(s)X_2(s)$ 至少 $R_1\cap R_2$．

⑦ 时域微分： $\frac{d}{dt}x(t)\longrightarrow sX(s)$， R．

⑧ S域微分： $-tx(t)\longleftarrow\frac{d}{ds}X(s)$． R．

⑨ 时域积分： $\int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau\longrightarrow\frac{1}{s}X(s)$． 至少 $R\cap\{Re(s)>0\}$．

△单边拉氏变换的微分性质．

Δ 其中线性性质中收敛域 = 至少 $R_1 \cap R_2$.

若 $R_1 \cap R_2 = 0$，则 $ax_1(t)+bx_2(t)$ 的拉氏变换不存在。

若 $R_1 \cap R_2 \neq 0$，则 ROC 为至少 $R_1 \cap R_2$，即有可能扩大。

当 $aX_1(s)+bX_2(s)$ 改变了 $X_1(s)$，$X_2(s)$ 原有极点分布时（零点和极点抵消），收敛域可能扩大

对卷积性质 $X_1(s)X_2(s)$ 同理。

⇒ 所得结果的收敛域均从结果的极点分布推导。

○ 求 $te^{-2t}u(t)$ 的拉氏变换。

$e^{-2t}u(t) \longrightarrow \frac{1}{s+2}$，$Re(s)>-2$。 ⇒ $te^{-2t}u(t) \longrightarrow \frac{1}{(s+2)^2}$，$Re(s)>-2$。

⇒ 先根据性质写出拉氏变换式，计算出极点分布，再由原信号的因果性确定 ROC。

○ 求 $te^{-(t-2)}u(t-1)$ 的拉氏变换。

$te^{-(t-2)}u(t-1) = e \cdot te^{-(t-1)}u(t-1)$

$e^{-(t-1)}u(t-1) \longrightarrow \frac{e^{-s}}{s+1}$，$Re(s)>-1$。 ⇒ $(-t)e^{-(t-1)}u(t-1) \longrightarrow \left(\frac{e^{-s}}{s+1}\right)' = \frac{-e^{-s}(s+2)}{(s+1)^2}$， $Re(s)>-1$

则 $e \cdot te^{-(t-1)}u(t-1) \longrightarrow \frac{e^{-(s-1)}(s+2)}{(s+1)^2}$，$Re(s)>-1$。

⇒ 注意信号的起始观察时间。

○ 求 $x(t) = t[u(t-1)-u(t-2)]$ 的拉氏变换。

$x(t) = (t-1)u(t-1) - (t-2)u(t-2) + u(t-1) - 2u(t-2)$

其中 $(t-1)u(t-1) \longrightarrow \frac{e^{-s}}{s^2}$，$Re(s)>0$。 $(t-2)u(t-2) \longrightarrow \frac{e^{-2s}}{s^2}$，$Re(s)>0$。

$u(t-1) \longrightarrow \frac{e^{-s}}{s}$，$Re(s)>0$。 $u(t-2) \longrightarrow \frac{e^{-2s}}{s}$，$Re(s)>0$。

则 $x(t) \longrightarrow \frac{e^{-s}}{s^2} + \frac{e^{-s}}{s} - \frac{e^{-2s}}{s^2} - \frac{2e^{-2s}}{s} = \frac{(1+s)e^{-s}-(1+2s)e^{-2s}}{s}$。 $Re(s)>0$

⇒ 注意和傅立叶变换的求法区别。

○ 求 $x(t)=\sin 2t\,u(t-1)$ 的拉氏变换.

$\Rightarrow x(t)=\sin[2(t-1)+2]\,u(t-1)$

○ 求 $x(t)=e^{-(t-2)}[u(t-2)-u(t-3)]$ 的拉氏变换

解: $x(t)=e^{-(t-2)}u(t-2)-e^{-1}\cdot e^{-(t-3)}u(t-3)$.

其中 $e^{-t}u(t)\xrightarrow{\mathcal{L}}\frac{1}{s+1}$. $Re\{s\}>-1$. 则: $e^{-(t-2)}u(t-2)\xrightarrow{\mathcal{L}}\frac{e^{-2s}}{s+1}$, $Re\{s\}>-1$.

$e^{-1}\cdot e^{-(t-3)}u(t-3)\xrightarrow{\mathcal{L}}e^{-1}\cdot\frac{e^{-3s}}{s+1}$. $Re\{s\}>-1$.

$x(t)\xrightarrow{\mathcal{L}}\frac{e^{-2s}-e^{-3s-1}}{s+1}$, $Re\{s\}>-1$.

$\Rightarrow$ 和的拉氏变换即是拉氏变换的和. 前提是各项拉氏变换的收敛域有交集. 若无交集. 则拉氏变换的和不存在.

2. 拉氏反变换计算.

○ 某信号拉氏变换为 $X(s)=\frac{1}{s^2+3s+2}$. 试求所有可能的反变换.

$\Rightarrow X(s)=\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s+2}$. 则有极点, $s=-1$. $s=-2$.

① 当ROC为 $Re\{s\}>-1$ 时. 则 $e^{-t}u(t)\xrightarrow{\mathcal{L}}\frac{1}{s+1}$, $Re\{s\}>-1$.

$e^{-2t}u(t)\xrightarrow{\mathcal{L}}\frac{1}{s+2}$. $Re\{s\}>-2$.

则 $x(t)=e^{-t}u(t)-e^{-2t}u(t)$.

因为ROC包含 $j\omega$ 轴. 所以 $X(j\omega)$ 存在. 且 $X(j\omega)=X(s)|_{s=j\omega}=\frac{1}{(j\omega)^2+3(j\omega)+2}$

$x(t)$ 是因果的. 绝对可积的. 若 $x(t)$ 是系统的冲激响应. 则系统是因果的. 稳定的. 系统的频响 $H(j\omega)$ 就是 $X(j\omega)$.

② 当ROC为 $-2<Re\{s\}<-1$ 时. 则有: $-e^{-t}u(-t)\xrightarrow{\mathcal{L}}\frac{1}{s+1}$. $Re\{s\}<-1$.

$e^{-2t}u(t)\xrightarrow{\mathcal{L}}\frac{1}{s+1}$ $Re\{s\}>-2$.

$x(t)=-e^{-t}u(-t)-e^{-2t}u(t)$.

由于ROC不包含 $j\omega$ 轴. 所以 $X(j\omega)$ 不存在. 信号是绝对不可积的. 若 $x(t)$ 是某系统的冲激响应. 则该系统非因果. 非稳定.

③ 当ROC为 $Re\{s\}<-2$ 时，则：$-e^{-t}u(-t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s+1}$. $Re\{s\}<-1$.

$-e^{-2t}u(-t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s+2}$. $Re\{s\}<-2$.

$x(t)=-e^{-t}u(-t)-e^{-2t}u(-t)$.

由于ROC不包含 $j\omega$ 轴. 所以 $X(j\omega)$ 不存在. 信号是绝对不可积的. 若 $x(t)$ 是某系统的冲激响应. 则该系统非因果. 非稳定.

○ 因果信号拉氏变换 $X(s)=\frac{1+e^{-2s}}{s(s^2+4)}$

拉氏变换 $X(s)$ 中有一重实数根点时 $s=-k$. 例如 $\frac{1}{s+k}$. 则其拉氏反变换为 $e^{-kt}u(t)$.

当有一对共轭根点 $s=\pm kj$. 例如 $\frac{(\cdot)}{s^2+k^2}$. 则其拉氏反变换为 $\cos kt$ 或 $\sin kt$ 中某个.

↳ 位于 $j\omega$ 轴上.

○ 因果信号拉氏变换 $X(s)=\frac{s^3}{s^2+s+1}$.

⇒ 将 $X(s)$ 化为真分式：$X(s)=s-1+\frac{1}{s^2+s+1}$.

$$\frac{1}{s^2+s+1}=\frac{1}{(s+\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{(s+\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{2}{\sqrt{3}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\,u(t)e^{-\frac{1}{2}t}.$$

则 $x(t)=-\delta(t)+\delta'(t)+\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}u(t)e^{-\frac{1}{2}t}$.

↳ 有 $\delta(t)$ 项

↳ 若因果信号拉氏变换为假分式(分子次数比分母高)，则表明在 $t=0$ 处有跳变.

当共轭根点不位于 $j\omega$ 轴上时. 使用配方法，结果中有平移项.

○ 因果信号拉氏变换 $X(s)=\frac{s+3}{(s+2)(s+1)^3}$

$$\Rightarrow X(s)=\frac{2}{(s+1)^3}-\frac{1}{(s+1)^2}+\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s+2}. \Rightarrow x(t)=t^2e^{-t}u(t)-te^{-t}u(t)+e^{-t}u(t)-e^{-2t}u(t)$$

☆ ○ 因果信号拉氏变换 $X(s)=\frac{1}{(s^2+3)^2}$.

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\sqrt{3}t\,u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s^2+3}, \quad 且 \ -\frac{t}{\sqrt{3}}\sin\sqrt{3}t\,u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{-2s}{(s^2+3)^2}.$$

则 $\int_{-\infty}^{t}\frac{\tau}{2\sqrt{3}}\sin\sqrt{3}\tau\,u(\tau)d\tau \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{(s^2+3)^2}$

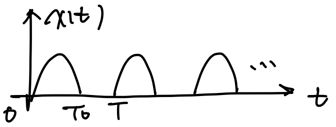
○ 因果信号 $X(s)=\frac{s}{(s+1)[(s+2)^2+9]}$

○ 因果信号拉氏变换 $X(s)=\ln\frac{s-1}{s}$. (非有理式).

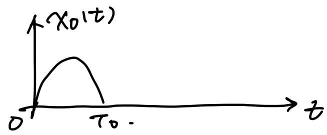
$\Rightarrow X'(s)=\frac{1}{s-1}-\frac{1}{s} \xrightarrow{\mathcal{L}} e^{t}u(t)-u(t)$. 又 $X'(s)\longrightarrow -tx(t)$.

则 $x(t)=-\frac{1}{t}[e^{t}u(t)-u(t)]$.

3. 周期信号的拉氏变换、



取其一个周期 $x_0(t)$



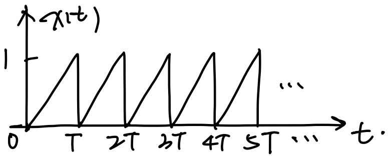
$x(t)=x_0(t)+x_0(t-T)+x_0(t-2T)+\cdots$

设 $x_0(t)\xrightarrow{\mathcal{L}}X_0(s)$　$x(t)\xrightarrow{\mathcal{L}}X(s)$.

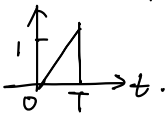
则 $X(s)=X_0(s)[1+e^{-sT}+e^{-2sT}+\cdots]=X_0(s)\dfrac{1}{1-e^{-sT}}$. $Re\{s\}>0$.

背下来.

① 周期矩齿波的拉氏变换 $X(s)$



解：令 $x_0(t)$ 为



则 $x_0(t)=\frac{t}{T}[u(t)-u(t-T)]=\frac{t}{T}u(t)-\frac{t-T}{T}u(t-T)-u(t-T)$.

$X_0(s)=\dfrac{1}{Ts^2}-\dfrac{1}{Ts^2}e^{-sT}-\dfrac{1}{s}e^{-sT}=\dfrac{1-(1+sT)e^{-sT}}{Ts^2}$, $Re\{s\}>0$.

则 $X(s)=X_0(s)\cdot\dfrac{1}{1-e^{-sT}}=\dfrac{1}{Ts^2}-\dfrac{1}{s(e^{sT}-1)}$. $Re\{s\}>0$.

※

② 因果信号拉氏变换 $X(s)=\dfrac{1}{1+e^{-2s}}$. 求 $x(t)$.　加号怎么变减号

解：e^{-2s} 出现在分母上. 考虑周期信号.

$X(s)=\dfrac{1-e^{-2s}}{(1+e^{-2s})(1-e^{-2s})}=\dfrac{1-e^{-2s}}{1-e^{-4s}}=(1-e^{-2s})\cdot\dfrac{1}{1-e^{-4s}}$.

则 $X_0(s)=1-e^{-2s}$, $\Rightarrow x_0(t)=\delta(t)-\delta(t-2)$. 将 $x_0(t)$ 以 $T=4$ 进行单边 $(t>0)$ 周期延拓即为 $x(t)$.

4. 初值定理和终值定理(对于因果信号). 背

(1) 初值定理：当 $X(s)$ 为真分式时. 有 $\lim\limits_{t\to0^+}x(t)=x(0^+)=\lim\limits_{s\to\infty}sX(s)$.

当 $X(s)$ 为假分式时. 通过长除法得到真分式 设为 $X_0(s)$.　⇒ 化为真分式!!!

则 $\lim\limits_{t\to0^+}x(t)=x(0^+)=\lim\limits_{s\to\infty}sX_0(s)$.

② 终值定理：因果信号 $x(t)$ 终值存在的条件.

注意使用条件!!!

$X(s)$ 的所有极点都在左半平面 $\Leftrightarrow$ $X(s)$ 的ROC包含 $j\omega$ 轴 $\Leftrightarrow$ $X(j\omega)$ 存在.

$\lim\limits_{t\to\infty}x(t)=\lim\limits_{s\to0}sX(s)$.

将存在终值的因果信号作为LTI系统的冲激响应. 则该系统是稳定的.

① 求$X(s)$所对应$x(t)$的初值$x(0^+)$. $X(s)=\dfrac{s^3+s^2+2s+1}{(s+1)(s+2)(s+3)}$, $Re(s)>-1$.

$\to X_0(s)=-\dfrac{5s^2+9s+5}{(s+1)(s+2)(s+3)}$

↳ 假分式 $\Rightarrow X(s)=1-\dfrac{5s^2+9s+5}{(s+1)(s+2)(s+3)}$. $x(0^+)=\lim\limits_{s\to+\infty}sX_0(s)=-5$.

② 求$X(s)$的初值与终值. $X(s)=\dfrac{3s^2+8s+1}{(s-1)(s+2)(s+3)}$. $Re(s)>1$.

↳ $x(0^+)=\lim\limits_{s\to+\infty}sX(s)=3$. $X(s)$存在极点$s=1$在右半平面, 不存在终值.

5. 连续时间LTI系统的复频域分析.

对某LTI系统: $x(t)\longrightarrow\boxed{h(t)}\longrightarrow y(t)$.

则有四种分析方法:

① 时域分析: $y(t)=x(t)*h(t)$.

② 频域分析: $y(t)=\mathcal{F}^{-1}[X(j\omega)\cdot H(j\omega)]$. 其中$H(j\omega)=\mathcal{F}[h(t)]$为系统的频响

③ 复频域分析: $y(t)=\mathcal{L}^{-1}[X(s)\cdot H(s)]$. 其中$H(s)=\mathcal{L}[h(t)]$为系统的系统函数.

④ 常系数微分方程. ↳ 假定$X(s)$与$H(s)$的ROC有交集. 若无交集, 则无输出.

(1) $\boxed{\text{特征输入}}$.

对傅氏变换: 基本信号(正弦信号) $e^{j\omega_i t}\to\boxed{h(t)}\to H(j\omega_i)e^{j\omega_i t}$. $H(j\omega_i)=H(j\omega)|_{\omega=\omega_i}$.

对拉氏变换: 基本信号(复指数信号) $e^{s_i t}\to\boxed{h(t)}\to H(s_i)e^{s_i t}$. $H(s_i)=H(s)|_{s=s_i}$.

若系统稳定, 则 $e^{j\omega_i t}\to\boxed{h(t)}\longrightarrow H(j\omega_i)e^{j\omega_i t}$ (稳态响应).

$A\cos(\omega_i t+\varphi)\longrightarrow\boxed{h(t)}\longrightarrow A|H(j\omega_i)|\cos(\omega_i t+\varphi+\arg H(j\omega_i))$

$A\sin(\omega_i t+\varphi)\to\boxed{h(t)}\longrightarrow A|H(j\omega_i)|\sin(\omega_i t+\varphi+\arg H(j\omega_i))$.

(2) $\boxed{\text{双边分析}}$.

$$Y(s)=X(s)\cdot H(s)\Rightarrow y(t)=\mathcal{L}^{-1}[Y(s)].$$

$X(s)$和$H(s)$的ROC必须有交集, 系统才有输出. 输出的ROC至少为交集.

① LTI系统, 输入信号$x(t)$的拉氏变换$X(s)=\dfrac{s+2}{s-2}$. 且$x(t)=0, t>0$. 输出$y(t)=-\frac{2}{3}e^{2t}u(-t)+\frac{1}{3}e^{-t}u(t)$. 求$h(t)$.

$\Rightarrow$ 易知$x(t)$为非因果信号, 则可得$X(s)=\dfrac{s+2}{s-2}$的ROC为$Re(s)<2$.

求出输入信号$y(t)$的拉氏变换 $Y(s)=\dfrac{s}{(s-2)(s+1)}$, $-1<Re(s)<2$.

因此可知, $H(s)$的ROC为$Re(s)>-1$. 且$H(s)=\dfrac{Y(s)}{X(s)}=\dfrac{s}{(s+1)(s+2)}$, $Re(s)>-1$.

则 $h(t)=\mathcal{L}^{-1}[H(s)]=-e^{-t}u(t)+2e^{-2t}u(t)$.

$\Rightarrow$ 注意需确定$H(s)$的ROC.

(3) $\boxed{\text{单边分析}}$（研究的是由线性常系数微分方程描述的因果LTI系统）.

某因果LTI系统：$x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t)$. $x(t)$, $h(t)$, $y(t)$ 均为因果信号.

$t<0$：历史. $t=0$ 开始观察. $t>0$. 单边分析.

单边拉氏变换的微分性质：$x(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} X(s)$.

$\Rightarrow$ $x'(t) \longrightarrow sX(s) - x(0^-)$. $x''(t) \longrightarrow s^2X(s) - sx(0^-) - x'(0^-)$.

$x'''(t) \longrightarrow s^3X(s) - s^2x(0^-) - sx'(0^-) - x''(0^-)$ ……

○ 某因果LTI系统由方程描述：$y''(t)+5y'(t)+6y(t) = x'(t)+4x(t)$.

初始条件 $y(0^-)$, $y'(0^-)$ 已知.

$\Rightarrow$ 对方程两边进行单边拉氏变换：

$$s^2Y(s) - sy(0^-) - y'(0^-) + 5[sY(s) - y(0^-)] + 6Y(s) = sX(s) - x(0^-) + 4X(s)$$

其中 $x(t), t>0 \longrightarrow X(s)$. $y(t), t>0 \longrightarrow Y(s)$

$y(0^-)$, $y'(0^-)$ 代表系统的历史. $x(0^-)$ 对系统的作用已包含在 $y(0^-)$, $y'(0^-)$ 中. 因此 $x(0^-)=0$.

整理得：$Y(s) = \dfrac{s+4}{s^2+5s+6}X(s) + \dfrac{sy(0^-)+y'(0^-)+5y(0^-)}{s^2+5s+6}$.

$y_{zs}(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{s+4}{s^2+5s+6}X(s)\right]$ 为系统的零状态响应. 且 $H(s) = \dfrac{s+4}{s^2+5s+6}$, 即 $Y_{zs}(s) = H(s)X(s)$.

$y_{zi}(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{sy(0^-)+y'(0^-)+5y(0^-)}{s^2+5s+6}\right]$ 为系统的零输入响应. 其只与初始条件有关, 与输入无关.

对零输入响应：令 $s^2+5s+6=0$ 得 $s=-2,-3$. 该部分与初始条件和输入均无关, 反映的是系统本身特有的固有极点(或固有频率).

零输入响应的复频域求解：$Y_{zi}(s) = \dfrac{sy(0^-)+y'(0^-)+5y(0^-)}{s^2+5s+6} = \dfrac{A}{s+3} + \dfrac{B}{s+2} \Rightarrow y_{zi}(t) = Ae^{-3t}u(t) + Be^{-2t}u(t)$

零状态响应的复频域求解：

$\Downarrow$

可见零状态响应中也包含了固有极点.

$\Rightarrow$ 零输入响应的时域求解：

① 根据微分方程求出特征根(系统固有极点) 为 $s=-3,-2$.

② 令 $y_{zi}(t) = C_1e^{-3t}u(t) + C_2e^{-2t}u(t)$. 将初始条件 $y(0^-)$, $y'(0^-)$ 代入可解.

$\Downarrow$

没有加特解时解得的齐次解即为零输入响应.

$\Rightarrow$ 零状态响应的复频域求解：$Y_{zs}(s) = H(s)X(s)$

$\Downarrow$

既包含了系统固有极点($H(s)$) 也包含输入信号极点 ($X(s)$)

这种方法的前提：$x(t)$因果、系统因果（$h(t)$因果）

⇒ 全响应：

$y(t) = y_{zi}(t) + y_{zs}(t) =$ 零输入响应 + 零状态响应

= 自由响应 + 强迫响应.

自由响应是全响应中与系统固有极点有关的响应（全部零输入响应+部分零状态响应）

强迫响应是与输入信号极点有关的响应.

⇒ 求出全响应后，令$t\to\infty$，消失的那部分是暂态响应，留下来的是稳态响应.

$$e^{j\omega_i t} \longrightarrow \boxed{H(j\omega)} \longrightarrow H(j\omega_i)e^{j\omega_i t}$$

⇓ 正弦稳态响应

○某LTI系统在下述$e_1(t)$、$e_2(t)$、$e_3(t)$三种输入下，初始状态均相同.

(a) $e_1(t)=\delta(t)$时，系统全响应$y_1(t)=3e^{-2t}u(t)$，$e_2(t)=u(t)$时，全响应$y_2(t)=2e^{-t}u(t)$.

求系统的单位冲激响应和描述该系统的微分方程.

(b) 在(a)的前提下，$e_3(t)=\begin{cases}0, & t\le 0\\ t, & 0<t\le 1\\ 1, & t>1\end{cases}$，求系统全响应

⇒ (a) $e_1(t)=\delta(t)$时，$X_1(s)=1$. $Y_1(s)=Y_{zi}(s)+Y_{zs_1}(s)=\frac{3}{s+2}$, $s>-2$.

$e_2(t)=u(t)$时，$X_2(s)=\frac{1}{s}$. $Y_2(s)=Y_{zi}(s)+Y_{zs_2}(s)=\frac{2}{s+1}$, $s>-1$. （线性性质）

由$Y_{zs_2}(s)=\frac{1}{s}\cdot Y_{zs_1}(s)$可解得：$Y_{zs_1}(s)=\frac{s}{(s+1)(s+2)}=\frac{2}{s+2}-\frac{1}{s+1}$, $s>-1$

则$H(s)=Y_{zs_1}(s)=\frac{2}{s+2}-\frac{1}{s+1}$, $s>-1$. 即$h(t)=2e^{-2t}u(t)-e^{-t}u(t)$.

描述系统的微分方程：由$Y(s)=H(s)X(s)=\frac{s}{s^2+3s+2}X(s)$得，

$$y''(t)+3y'(t)+2y(t)=x'(t)$$

另一种解法：以$e_1(t)-e_2(t)$为激励时，全响应 = 零状态响应 = $y_1(t)-y_2(t)$.

且$e_1(t)-e_2(t)=\delta(t)-\varepsilon(t)\longrightarrow\frac{s-1}{s}$.

$y_1(t)-y_2(t)=3e^{-2t}u(t)-2e^{-t}u(t)\longrightarrow\frac{s-1}{(s+1)(s+2)}$.

则$H(s)=\frac{\mathcal{L}[y_1(t)-y_2(t)]}{\mathcal{L}[e_1(t)-e_2(t)]}=\frac{s}{(s+1)(s+2)}$ ⇒ 此方法更通用.

(b) $e_3(t)=t[u(t)-u(t-1)]+u(t-1)$ ⇒ $X_3(s)=\frac{1-e^{-s}}{s^2}$

则零状态响应$Y_{zs}(s)=H(s)X_3(s)=\frac{s}{(s+1)(s+2)}\cdot\frac{1-e^{-s}}{s^2}=\frac{1-e^{-s}}{s(s+1)(s+2)}$, $s>0$.

零输入响应$Y_{zi}(s)=Y_1(s)-Y_{zs_1}(s)=\frac{1}{s+1}+\frac{1}{s+2}$, $s>-1$.

则$Y(s)=\frac{1}{s+1}+\frac{1}{s+2}+\frac{1-e^{-s}}{s(s+1)(s+2)}$, $s>0$. ⇒ $y(t)=$

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}e^{-2t}\right)u(t)+\left[-\frac{1}{2}+e^{-(t-1)}-\frac{1}{2}e^{-2(t-1)}\right]u(t-1)$$

(2) 求系统的起始状态 $y(0^-)$ 和 $y'(0^-)$ 使零输入响应等于冲激响应.

系统的固有极点为 $s=-1$, $s=-2$. 故设零输入响应为: $y(t)=C_1e^{-t}+C_2e^{-2t}$.

设 $y(0^-)=A$, $y'(0^-)=B$. 代入得: $\begin{cases}C_1=2A+B\\C_2=-(A+B)\end{cases}$ 由 $y(t)=h(t)$ 知 $\begin{cases}C_1=-1\\C_2=2\end{cases}$.

即 $\begin{cases}2A+B=-1\\-(A+B)=2\end{cases}$ 解得: $\begin{cases}A=y(0^-)=1\\B=y'(0^-)=-3\end{cases}$

另一种解法: 对系统方程单边变换:

$$s^2Y(s)-sy(0^-)-y'(0^-)+3[sY(s)-y(0^-)]+2Y(s)=sX(s).$$

$$\Rightarrow Y(s)=\frac{s}{(s+1)(s+2)}X(s)+\frac{(s+3)y(0^-)+y'(0^-)}{(s+1)(s+2)}$$

则零输入响应为: $Y_{zi}(s)=\frac{(s+3)y(0^-)+y'(0^-)}{(s+1)(s+2)}$, 要使 $Y_{zi}(s)=H(s)=\frac{s}{(s+1)(s+2)}$

得 $y(0^-)=1$, $y'(0^-)=-3$.

6. $\boxed{\text{系统函数 } H(s) \text{ 与系统频响 } H(j\omega) \text{ 的关系.}}$

⇒ $H(s)$ 的 ROC 包 $j\omega$ 轴时, $H(j\omega)=H(s)|_{s=j\omega}$.

$$H(j\omega)=H(s)|_{s=j\omega}=k\frac{\prod(s-z_j)}{\prod(s-p_i)}\Big|_{s=j\omega}=k\frac{\prod(j\omega-z_j)}{\prod(j\omega-p_i)}.$$

z_j ⇒ 零点, p_i ⇒ 极点.

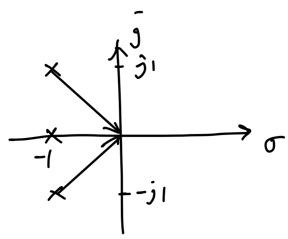
令 $j\omega-z_j=N_je^{j\psi_j}$, $j\omega-p_i=M_ie^{j\theta_i}$. 则 $H(j\omega)=k\frac{N_1N_2\cdots N_m e^{j(\psi_1+\psi_2+\cdots+\psi_m)}}{M_1M_2\cdots M_n e^{j(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n)}}=|H(j\omega)|e^{j\varphi(\omega)}$.

幅频　相频

ω 沿虚轴从 $-\infty\to+\infty$, 即得到 $|H(j\omega)|$ 和 $\varphi(\omega)$.

6. 已知系统函数 $H(s)=\frac{1}{s^3+3s^2+4s+2}$, 试求 $\omega=0, 1$ 的振幅响应 $|H(j0)|$, $|H(j1)|$. 及相位响应 $\varphi(0)$, $\varphi(1)$

⇒ $H(s)=\frac{1}{(s^2+2s+2)(s+1)}$, 可得极点: $p_1=-1$, $p_2=-1\pm j1$.



① $\omega=0$ 时. 各极点向 $j0$ 点构成矢量. 矢量的模以及偏角 -

极点 -1: $|M_1|=1$, $\theta_1=0°$

极点 $-1-j$: $|M_2|=\sqrt{2}$, $\theta_2=45°$

极点 $-1+j$: $|M_3|=\sqrt{2}$, $\theta_3=-45°$

则 $|H(j0)|=\frac{1}{M_1M_2M_3}=\frac{1}{2}$　$\varphi(0)=-(\theta_1+\theta_2+\theta_3)=-(0°-45°+45°)=0°$.

极点的分母
零点的分子.

极点为负
零点为正.

由此可画出系统的幅频曲线, 相频曲线.

② $\omega=1$ 同理.

7. 系统的稳定性

对于一般系统，有界输入产生有界输出(BIBO)，则系统稳定。

对于LTI系统：系统稳定 $\Leftrightarrow$ 系统冲激响应$h(t)$可积，即$\int_{-\infty}^{+\infty}|h(t)|dt<\infty$。

$\Leftrightarrow$ $H(s)$的ROC包含$j\omega$轴 $\Leftrightarrow$ $H(j\omega)$存在，且$H(j\omega)=H(s)|_{s=j\omega}$。

系统因果稳定 $\Leftrightarrow$ $H(s)$的极点均在左半平面。⇒ 存在终值

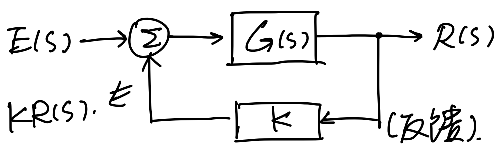
$\Leftrightarrow$ $H(s)$极点的实部均小于0。

若$H(s)$为一阶或二阶多项式：$H(s)=h_0+h_1s+h_2s^2$。若$h_0\geq0$，$h_1\geq0$，$h_2\geq0$则该系统稳定。

o 某系统如图所示，子系统的系统函数$G(s)=\frac{s}{s^2+5s+6}$，

(a) 为使系统稳定，实系数k应满足什么条件？

(b) 若系统为临界稳定，求k及单位冲激响应h。



$\Rightarrow [E(s)+kR(s)]G(s)=R(s)$. $\Rightarrow$ $E(s)G(s)=(1-kG(s))R(s)$.

系统的系统函数 $H(s)=\frac{R(s)}{E(s)}=\frac{G(s)}{1-kG(s)}=\frac{s}{s^2+(5-k)s+6}$。

(a) 为使系统稳定，则$H(s)$的极点需均在虚轴左侧，即$s^2+(5-k)s+6=0$的根$s_1, s_2<0$。

则有 $5-k>0$，得 $k<5$

(b) 为使系统临界稳定，有$k=5$，此时$H(s)=\frac{s}{s^2+6}$. $\Rightarrow$ $h(t)=\cos\sqrt{6}t\,u(t)$。

~~o~~ 某因果LTI系统，当激励为$e_1(t)$时，零状态响应$r_{zs1}(t)=(8e^{-4t}-9e^{-3t}+e^{-t})\varepsilon(t)$。

当激励为$e_2(t)$时，相应的零状态响应$r_{zs2}(t)=(e^{-4t}-4e^{-3t}+3e^{-2t})\varepsilon(t)$，

其中$e_1(t)\neq e_2(t)$，且$e_1(t)$和$e_2(t)$均为指数单调衰减的有始函数。若已知$r(0^-)=7$，

$r'(0^-)=-25$，求系统的零输入响应。

$\Rightarrow$ 设系统的响应为 $r(t)=\sum_{i=1}^{n}k_ie^{p_it}+\sum_{k=1}^{m}k_ke^{p_kt}$。$p_i$为$H(s)$的极点，$p_k$为$E(s)$的极点。

则 $R_{zs1}(s)=E_1(s)\cdot H(s)=\frac{8}{s+4}-\frac{9}{s+3}+\frac{1}{s+1}$. $R_{zs2}(s)=E_2(s)\cdot H(s)=\frac{1}{s+4}-\frac{4}{s+3}+\frac{3}{s+2}$，

$R_{zs1}(s)$和$R_{zs2}(s)$的公共极点为系统的固有极点，则$H(s)$具有极点，$s_{p1}=-4$，$s_{p2}=-3$。

则设系统的零输入响应为 $r_{zp}(t)=(C_1e^{-4t}+C_2e^{-3t})u(t)$。

代入条件 $r(0)=C_1+C_2=7$. $r'(0^-)=-4C_1-3C_2=-25$ 解得 $C_1=4$. $C_2=3$.

所以 $r_{zp}(t)=(4e^{-4t}+3e^{-3t})u(t)$.

△ 若$H(s)$与$E(s)$没有共同极点且没有对消零极点，

则系统响应为：$y(t)=\sum k_ie^{p_it}+\sum k_je^{p_jt}$，第一项为自由响应，只与系统固有极点有关

第二项为强迫响应，只与输入极点有关。

零输入响应只与系统固有极点有关

→ 系统有两个固有极点

① 已知某因果线性非时变系统可用二阶常系数微分方程来描述，且：

(1) 若激励 $e(t)=1$，则零状态响应 $r(t)=-1$。???

(2) 系统函数 $H(s)$ 在有限 s 平面内有一极点 $s=-1$ 和一零点 $s=1$。

(3) 系统单位冲激响应 $h(t)$ 的初始值为 2 且不含冲激。→ $H(s)$ 为真分式，分母二次，则分子为一次。

试求微分方程。

⇒ 由于系统能用常系数微分方程描述，所以有理。

设 $H(s)=\dfrac{q(s)(s-1)}{(s+1)(s+p)}$，激励为 $e(t)=1$ 时，$e(t)=1=e^{at}|_{a=0}$，则 $r(t)=H(0)e^{0t}=H(0)=-1$。

由初值定理，$\lim\limits_{t\to0^+}h(t)=\lim\limits_{s\to\infty}sH(s)=\lim\limits_{s\to\infty}\dfrac{sq(s)(s-1)}{(s+1)(s+p)}=2$，

易求得 $q(s)=2$。又由 $H(0)=-1$ 可得 $p=q(s)=2$。

所以 $H(s)=\dfrac{2(s-1)}{(s+1)(s+2)}=\dfrac{2s-2}{s^2+3s+2}$ ⇒ $\dfrac{d^2}{dt^2}y(t)+3\dfrac{d}{dt}y(t)+2y(t)=2\dfrac{d}{dt}x(t)-2x(t)$。

① 已知某因果 LTI 系统的系统函数 $H(s)$（电压传输比）的零极点图，且 $H(\infty)=1$，求：

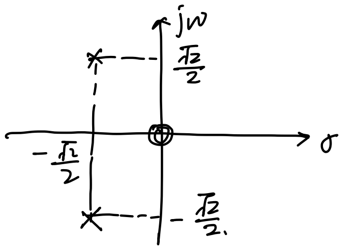
(a) 系统函数 $H(s)$ 及冲激响应 $h(t)$。

(b) 已知系统稳定，求 $H(j\omega)$。当激励为 $3\cos t\,u(t)$ 时，求系统稳态响应。

(c) 画出与 $H(s)$ 相应的电路，标出 R、L、C 之值。

(d) 画出幅频和相频曲线。

$\boxed{\begin{cases}3\cos t\,u(t)\\3\cos t\end{cases}}$



(a) 由零极点图可知：零点为二重 $\begin{cases}s_1=0\\s_2=0\end{cases}$ 极点为二重共轭 $\begin{cases}p_1=-\frac{\sqrt2}{2}+\frac{\sqrt2}{2}j\\p_2=-\frac{\sqrt2}{2}-\frac{\sqrt2}{2}j\end{cases}$

则可设 $H(s)=k\cdot\dfrac{s^2}{(s-p_1)(s-p_2)}$ ⇒ 假分式，说明 $h(t)$ 包含冲激。

由 $H(\infty)=1$ 可得 $k=1$，则 $H(s)=\dfrac{s^2}{s^2+\sqrt2s+1}$。且 $H(s)=1-\dfrac{\sqrt2s+1}{s^2+\sqrt2s+1}=1-\dfrac{\sqrt2(s+\frac{\sqrt2}{2})}{(s+\frac{\sqrt2}{2})^2+(\frac{\sqrt2}{2})^2}$

⇒ $h(t)=\mathcal{L}^{-1}[H(s)]=\delta(t)-\sqrt2e^{-\frac{\sqrt2}{2}t}\cos\frac{\sqrt2}{2}t\,u(t)$。

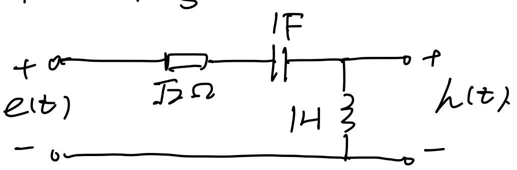
求稳态响应必须令 $t\to\infty$ 我保留下来的那部分。

(b) △ 注意和输入为 $3\cos t$ 时，求系统稳态响应的方法区别。

$\begin{cases}\text{当输入为 } 3\cos t\,u(t) \text{ 时，其稳态响应为 } \lim\limits_{t\to\infty}\mathcal{L}^{-1}[X(s)H(s)]\text{，其中 } X(s)=\mathcal{L}[x(t)]。\\ \text{当输入为 } 3\cos t \text{ 时，其稳态响应为 } A\cos(t+\varphi)\text{，其中 } A=|H(j1)|，\varphi=\arg H(1j)\end{cases}$

(c) $H(s)=\dfrac{s^2}{s^2+\sqrt2s+1}=\dfrac{s}{s+\sqrt2+\frac1s}$，分母为一个电容、电阻、电感串联。$H(s)$ 为分压表达式。

则电路为：

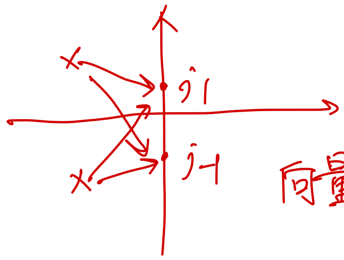


$\sqrt2$：电阻 $(\sqrt2\Omega)$

$\frac1s$：电容 (1F)

s：电感 (1H)。

(d). ⇒ 描点法 $H(j\omega)$. 向量的模以及相位.

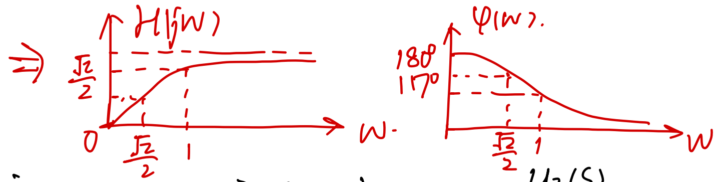


($H(j\omega)$ 和 $H(s)$ 的关系)

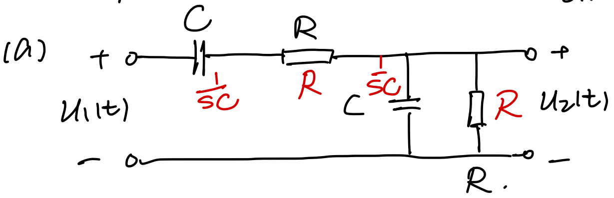
各零极点向 $j1$ 时. $|H(j1)| = \dfrac{1^2}{\sqrt{(\frac{\sqrt2}{2})^2+(\frac{\sqrt2}{2}-1)^2}\cdot\sqrt{(\frac{\sqrt2}{2})^2+(\frac{\sqrt2}{2}+1)^2}} = \dfrac{\sqrt2}{2}$. $\varphi(1)=90^\circ$.

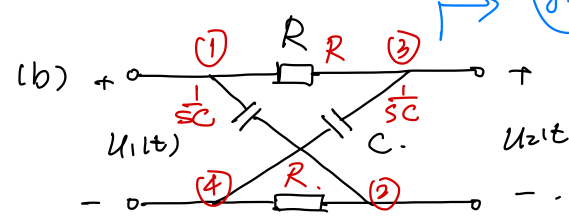
各零极点向 $j\frac{\sqrt2}{2}$ 时. $|H(j\frac{\sqrt2}{2})| = \frac{\sqrt{10}}{5}$. $\varphi(\frac{\sqrt2}{2}) = 117^\circ$.

⇒



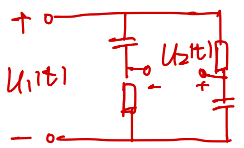
0. 求下列系统的系统函数 $H(s)=\dfrac{U_2(s)}{U_1(s)}$. 抄





⇒ (a) $H(s)=\dfrac{U_2(s)}{U_1(s)} = \dfrac{\frac{1}{sC+\frac1R}}{\frac{1}{sC+\frac1R}+R+\frac{1}{sC}} = \dfrac{sRC}{s^2R^2C^2+3sRC+1} = \dfrac{s}{RC(s^2+\frac{3}{RC}s+\frac{1}{R^2C^2})}$

(b) 原电路变为:



⇒ $H(s)=\dfrac{U_2(s)}{U_1(s)} = \dfrac{\frac{1}{sC}}{R+\frac{1}{sC}} - \dfrac{R}{R+\frac{1}{sC}}$

$= \dfrac{1-sCR}{sCR+1} = -\dfrac{s-\frac{1}{RC}}{s+\frac{1}{RC}}$

0 一LTI系统, 当激励为 $x_1(t)=\delta(t)$ 时. 输出为 $y_1(t)=\delta(t)+e^{-t}u(t)$.

当激励为 $x_2(t)=u(t)$ 时. 输出为 $y_2(t)=3e^{-t}u(t)$.

(a) 当输入为 $x_3(t)=e^{-2t}u(t)$. 求输出

(b) 当输入为 $x_4(t)=2u(t-1)$. 求输出.

⇒ $y_1(t) = y_{zi}(t)+h(t)*x_1(t)$. $y_2(t)=y_{zi}(t)+h(t)*x_2(t)$.

$y_2(t)-y_1(t) = h(t)*(x_2(t)-x_1(t)) = h(t)*(u(t)-\delta(t))$.

$\mathcal{L}[y_2(t)-y_1(t)] = \dfrac{3}{s+1}-1-\dfrac{1}{s+1}$. $\mathcal{L}[h(t)*(u(t)-\delta(t))] = H(s)[\frac1s-1]$.

则由 $\dfrac{2}{s+1}-1 = H(s)\dfrac{1-s}{s}$ 得 $H(s)=\dfrac{s}{1+s}$ ⇒ $h(t)=\delta(t)-e^{-t}u(t)$.

$y_{zi}(t) = y_1(t)-h(t) = 2e^{-t}u(t)$. ⇒ $Y_{zi}(s)=\dfrac{2}{s+1}$.

(a) $Y_3(s) = \dfrac{2}{s+1}+\dfrac{1}{s+2}\cdot\dfrac{s}{s+1} = \dfrac{2}{s+2}-\dfrac{1}{s+1}$ ⇒ $y_3(t) = 2e^{-2t}u(t)-e^{-t}u(t)$.

(b) $Y_4(s) = \dfrac{2}{s+1}+\dfrac{2e^{-s}}{s}\cdot\dfrac{s}{s+1} = \dfrac{2}{s+1}+\dfrac{2e^{-s}}{s+1}$ ⇒ $y_4(t) = 2e^{-t}u(t)+2e^{-(t-1)}u(t-1)$

0.(4-11). 系统函数为 $H(s) = \dfrac{s}{s^2+3s+2}$.

(a) 当输入为 $x(t)=10u(t)$ 时，求系统响应，并求自然响应和强迫响应。

(b) 当输入为 $x(t)=10\sin t\cdot u(t)$ 时，求系统响应，并求自然响应和强迫响应。

⇒ (a). $y(t) = 10(e^{-t}-e^{-2t})u(t)$. 全响应都为自由响应，强迫响应为0.

(b) $y(t) = [\underbrace{4e^{-2t}-5e^{-t}}_{\text{自由响应}}+\underbrace{\cos t+3\sin t}_{\text{强迫响应}}]u(t)$.

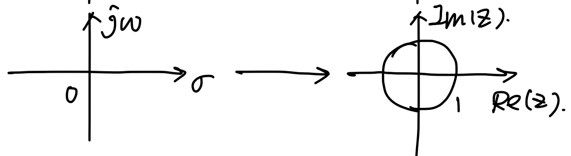
第五章 Z变换（离散时间系统的复频域分析）

1、Z变换.

(1) 定义：

$$\begin{array}{ccc} x(t) & \xrightarrow{\boxed{ADC}} & x(n) \\ \downarrow L & & \downarrow Z \\ X(s) & & X(z) \end{array}$$

S平面 $\xrightarrow{\text{映射}}$ Z平面



$S=\sigma+j\omega$.　　$z=|z|e^{j\arg z}$.

映射关系：jω轴 → 单位圆.
右半平面 → 单位圆外.
左半平面 → 单位圆内.
带状ROC → 环状ROC.

→ 最根本的公式.

一个离散时间信号 $x(n)$ 的变换为：$\boxed{X(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x(n)z^{-n}}$，若存在一个z值范围(ROC)，使无穷级数收敛到 $X(z)$，则 $X(z)$ 称为 $x(n)$ 的z变换.

(2) 有理式类型的z变换(只讨论有理式型)：$X(z)=\frac{A(z)}{B(z)}$.

其中 $A(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots+a_mz^m$.　$B(z)=b_0+b_1z+b_2z^2+\cdots+b_mz^m$.

由 $A(z)=0$ 和 $B(z)=0$ 可得m个零点和n个极点，⇒ 零极点图.

描述z变换的两种方法：① $X(z)$, ROC. ② 零极点图, ROC.

因果：{ 一般离散系统：某时刻输出只和当前时刻和之前时刻的输入有关.
离线LTI系统：系统的冲激响应 $h(n)$ 为因果信号，即 $h(n)=0,\ n\le -1$.

稳定：{ 一般离散系统：有界输入产生有界输出(BIBO).
离散LTI系统：系统的冲激响应绝对可和. 即 $\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|h(n)|<\infty$ ⇒ 能量有限.

⇒ 任意离散信号 $h(n)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}h(k)\delta(n-k)$ 只要是 $h(n)$ 有限长. 即 $h(n)=\sum_{k=N_1}^{N_2}h(k)\delta(n-k)$.
则 $h(n)$ 必然是能量有限的. 即系统是稳定的

(3) ROC.

z变换ROC四个结论：

① z变换的收敛域以极点为界但不包含极点.
② 因果信号的z变换的收敛域在最外面极点的外面.
③ 非因果信号的z变换的收敛域在最里面极点的里面.
④ 绝对可和信号的z变换的收敛域包含单位圆.
↳稳定

要使离散信号 $x(n)$ 的傅立叶变换存在，则其z变换的收敛域要包含单位圆.

则若一离散信号为有限长，则其傅立叶变换存在.(能量有限和系统稳定).

因果稳定 ⇒ 所有极点均在单位圆内(z变换).
　　　　　　左半平面(S变换).

(4). Z变换计算.

$\sum_{n=0}^{+\infty} a^n = \frac{1}{1-a}, |a|<1$. $\sum_{n=n_1}^{+\infty} a^n = \frac{a^{n_1}}{1-a}, |a|<1$. $\sum_{n=n_1}^{n_2} a^n = \begin{cases} \frac{a^{n_1}-a^{n_2+1}}{1-a}, & a\neq 1 \\ n_2-n_1+1, & a=1. \end{cases}$

常用信号的Z变换:

$\delta(n) \longrightarrow 1$, all z.

$u(n) \longrightarrow \frac{1}{1-z^{-1}}, |z|>1$

$-u(-n-1) \longrightarrow \frac{1}{1-z^{-1}}, |z|<1$

$a^n u(n) \longrightarrow \frac{1}{1-az^{-1}}, |z|>|a|$.

$-a^n u(-n-1) \longrightarrow \frac{1}{1-az^{-1}}, |z|<|a|$.

$[\cos w_0 n]\cdot u(n) \longrightarrow \frac{1-[\cos w_0]z^{-1}}{1-2[\cos w_0]z^{-1}+z^{-2}}, |z|>1$. 抄

$[\sin w_0 n]\cdot u(n) \longrightarrow \frac{[\sin w_0]z^{-1}}{1-2[\cos w_0]z^{-1}+z^{-2}}, |z|>1$.

$[r^n \cos w_0 n]\cdot u(n) \longrightarrow \frac{1-[r\cos w_0]z^{-1}}{1-[2r\cos w_0]z^{-1}+r^2z^{-2}}, |z|>r$.

$[r^n \sin w_0 n]\cdot u(n) \longrightarrow \frac{[r\sin w_0]z^{-1}}{1-[2r\cos w_0]z^{-1}+r^2z^{-2}}, |z|>r$.

$n a^n u(n) \longrightarrow \frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}, |z|>|a|$.

$-n a^n u(-n-1) \longrightarrow \frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}, |z|<|a|$.

(5) Z变换的性质.

① 线性性质: $a x_1(n)+b x_2(n) \longrightarrow aX_1(z)+bX_2(z)$.

② 时移: $x(n-n_0) \longrightarrow z^{-n_0}X(z)$

③ 尺度变换: $e^{jw_0 n}x(n) \longrightarrow X(e^{-jw_0}z)$, $z_0^n x(n) \longrightarrow X(\frac{z}{z_0})$. $a^n x(n) \longrightarrow X(\frac{z}{a})$. 抄

↳ 有z_0^n因子时考虑此性质!!!

④ Z域微分: $n x[n] \longrightarrow -z\frac{dX(z)}{dz}$ → 抄

⑤ $x[-n] \longrightarrow X(z^{-1})$

○ 求$x(n)=2^n u(n)$的Z变换.

$\Rightarrow X(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} 2^n u(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^n\cdot z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{z}\right)^n = \frac{1}{1-2z^{-1}}, |2z^{-1}|<1$.

则$X(z)=\frac{1}{1-2z^{-1}}, |z|>2$. 其ROC不包括单位圆. $x(n)$非绝对可和. 则$X(e^{jw})$不存在.

同理: $x(n)=(\frac{1}{2})^n u(n)$的Z变换为$X(z)=\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}, |z|>\frac{1}{2}$. 其$X(e^{jw})=X(z)|_{z=e^{jw}} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-jw}}$

⇓ DTFT

↱ 形如此类有限冲激信号的系统必然是稳定的.

○ 求$x(n)=(\frac{1}{2})^n[u(n)-u(n-10)]$的Z变换.

1°. $x(n)=\delta(n)+\frac{1}{2}\delta(n-1)+(\frac{1}{2})^2\delta(n-2)+\cdots+(\frac{1}{2})^9\delta(n-9)$. ⇒有限长.

而 $(\frac{1}{2})^k\delta(n-k) \longrightarrow (\frac{1}{2})^k\cdot z^{-k}, |z|>0$.

则 $X(z)=1+\frac{1}{2}\cdot z^{-1}+(\frac{1}{2})^2 z^{-2}+\cdots+(\frac{1}{2})^9\cdot z^{-9} = \frac{1-(\frac{1}{2}z^{-1})^{10}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}, |z|>0$.

↳ $X(z)=\frac{z^{10}-(\frac{1}{2})^{10}}{z^{10}-\frac{1}{2}z^9}$ ⇒ 极点: 9重$z=0$. 1重$z=\frac{1}{2}$; 零点: 10个零点,均匀分布在半径为$\frac{1}{2}$的圆上.

则 $z=\frac{1}{2}$的极点,零点相互抵消. 最终$X(z)$有$z=0$的9重极点.

2°. $(\frac{1}{2})^n u(n) \longrightarrow \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}, |z|>\frac{1}{2}$.

$(\frac{1}{2})^{n-10}u(n-10) \longrightarrow \frac{z^{-10}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}, |z|>\frac{1}{2}$.

(无限长)

$\Rightarrow X(z)=\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} - \frac{(\frac{1}{2}z^{-1})^{10}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} = \frac{1-(\frac{1}{2}z^{-1})^{10}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}, |z|>0$.

⇓ ROC扩大

↑ 双边.

○ 求 $x(n)=|n|(\frac{1}{3})^{|n|}$ 的z变换.

$\Rightarrow x(n)=n(\frac{1}{3})^n u(n)+(-n)(\frac{1}{3})^{-n}u(-n-1)$

其中 $(\frac{1}{3})^n u(n)\longrightarrow \frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}=\frac{z}{z-\frac{1}{3}}$. $|\frac{1}{3}z^{-1}|<1\Rightarrow |z|>\frac{1}{3}\Rightarrow n(\frac{1}{3})^n u(n)\longrightarrow -z\frac{d}{dz}(\frac{z}{z-\frac{1}{3}})=\frac{\frac{1}{3}z}{(z-\frac{1}{3})^2}$. $|z|>\frac{1}{3}$.

公式!!!

$-3^n u(-n-1)\longrightarrow \frac{1}{1-3z^{-1}}=\frac{z}{z-3}$. $|3z^{-1}|>1\Rightarrow |z|<3$. $\Rightarrow -n3^n u(-n-1)\longrightarrow -z\frac{d}{dz}(\frac{z}{z-3})=\frac{3z}{(z-3)^2}$. $|z|<3$.

故 $X(z)=\frac{\frac{1}{3}z}{(z-\frac{1}{3})^2}+\frac{3z}{(z-3)^2}$, $\frac{1}{3}<|z|<3$. (环状ROC).

○ 求 $x(n)=2^n\cos\frac{\pi}{4}n\,u(n)$ 的z变换.

$\Rightarrow$ 令 $x_1(n)=\cos\frac{\pi}{4}n\,u(n)$. 则 $X_1(z)=\frac{z^2-[\cos\frac{\pi}{4}]z}{z^2-[2\cos\frac{\pi}{4}]z+1}=\frac{z^2-\frac{\sqrt{2}}{2}z}{z^2-\sqrt{2}z+1}$. $|z|>1$.

由 $x(n)=2^n x_1(n)$. 得: $X(z)=X_1(\frac{z}{2})=\frac{z^2-\sqrt{2}z}{z^2-2\sqrt{2}z+4}$. $|\frac{z}{2}|>1\Rightarrow |z|>2$.

(尺度变换).

(6) z反变换.

○ 求 $X(z)=\frac{1-\frac{1}{3}z^{-1}}{1+z^{-1}-2z^{-2}}$. $|z|>2$. 求反变换.

1°. $X(z)=\frac{z(z-\frac{1}{3})}{(z-1)(z+2)}$. $\Rightarrow \frac{X(z)}{z}=\frac{A}{z-1}+\frac{B}{z+2}$ 求得A、B后有: $X(z)=\frac{\frac{2}{9}z}{z-1}+\frac{\frac{7}{9}z}{z+2}$.

由ROC为 $|z|>2$. 则 $x(n)$ 是因果的. 则 $x(n)=\frac{1}{9}[2+7\cdot(-2)^n]u(n)$.

2°. $X(z)=\frac{1}{1+z^{-1}-2z^{-2}}-\frac{1}{3}\cdot\frac{z^{-1}}{1+z^{-1}-2z^{-2}}$. $|z|>2$. (用 z^{-1} 进行计算).

令 $X_1(z)=\frac{1}{1+z^{-1}-2z^{-2}}=\frac{z^2}{z^2+z-2}=\frac{\frac{1}{3}z}{z-1}+\frac{\frac{2}{3}z}{z+2}$, $|z|>2$. 则 $x_1(n)=\frac{1}{3}u(n)+\frac{2}{3}\cdot(-2)^n u(n)$.

$\therefore x(n)=x_1(n)-\frac{1}{3}x_1(n-1)$

○ 求 $X(z)=\frac{z^2}{z^2-1.5z+0.5}$ 在不同收敛域时的z反变换. $\rightarrow \frac{2}{1-z^{-1}}-\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$.

$\Rightarrow X(z)=\frac{z^2}{(z-1)(z-\frac{1}{2})}=\frac{2z}{z-1}-\frac{z}{z-0.5}$, 其ROC有三种情况. $|z|>1$. $\frac{1}{2}<|z|<1$. $|z|<\frac{1}{2}$.

① 当 $|z|>1$ 时. $x(n)=(2-\frac{1}{2^n})u(n)$.

② 当 $\frac{1}{2}<|z|<1$ 时. $x(n)=-2u(-n-1)-\frac{1}{2^n}u(n)$.

③ 当 $|z|<\frac{1}{2}$ 时. $x(n)=(\frac{1}{2^{-n}}-2)u(-n-1)$.

○ 已知 $X(z)=\frac{z^{-2}}{1+z^{-2}}$, $|z|>1$. 求 $x(n)$.

$\Rightarrow X(z)=\frac{1}{1+z^2}=\frac{[\sin\frac{\pi}{2}]z}{z^2-[2\cos\frac{\pi}{2}]z+1}\,z^{-1}$. $|z|>1$. 则 $x(n)=[\sin\frac{\pi}{2}(n-1)]\,u(n-1)$.

$n=n-1$

-8分

○ 求z反变换

(a) $X(z)=\frac{z^{-1}}{(1-6z^{-1})^2}$, $|z|>6$. (b) $X(z)=\frac{1+z^{-1}}{1-2z^{-1}\cos w+z^{-2}}$, $|z|>1$.

$\Rightarrow$ (a) $X(z)=\frac{1}{6}\cdot\frac{6z^{-1}}{(1-6z^{-1})^2}\Rightarrow x(n)=n6^{n-1}u(n)$.

(b) $X(z)=\frac{1-\cos w z^{-1}}{1-2z^{-1}\cos w+z^{-2}}+\frac{\cos w+1}{\sin w}\cdot\frac{\sin w z^{-1}}{1-2z^{-1}\cos w+z^{-2}}$.

$x(n)=[\cos wn+\frac{\cos w+1}{\sin w}\sin wn]\,u(n)$.

※

(7) 初值定理和终值定理.

和s变换不同

① 若 $x(n)$ 为因果序列, 其z变换为 $X(z)$, 则 $x(0)=\lim\limits_{z\to\infty}X(z)$. $\rightarrow$ 初值

非因果序列 $\Rightarrow x(0)=\lim\limits_{z\to 0}X(z)$

② 若 $x(n)$ 为因果序列, 其z变换为 $X(z)$, 则 $x(\infty)=\lim\limits_{z\to 1}(z-1)X(z)$. $\rightarrow$ 终值.

※

○ 求 $X(z)=\frac{\frac{5}{6}-\frac{7}{6}z^{-1}}{1-\frac{5}{2}z^{-1}+z^{-2}}$, 用初值定理求 $x(0)$. <根据因果性求解>.

$\Rightarrow$ 部分分式展开: $X(z)=\frac{\frac{1}{2}z}{z-\frac{1}{2}}+\frac{\frac{1}{3}z}{z-2}$. 极点为 $z=\frac{1}{2}, 2$. 分收敛域讨论:

① $|z|<\frac{1}{2}$时. $x(n)$为非因果序列. $x(0)=\lim\limits_{z\to 0}X(z)=\lim\limits_{z\to 0}\frac{\frac{5}{6}z^2-\frac{7}{6}z}{z^2-\frac{5}{2}z+1}=0$.

② $|z|>2$时. $x(n)$为因果序列. $x(0)=\lim\limits_{z\to\infty}X(z)=\frac{5}{6}$

③ $\frac{1}{2}<|z|<2$时, $x(n)$为双边序列. $x(0)=\lim\limits_{z\to\infty}\frac{\frac{1}{2}z}{z-\frac{1}{2}}+\lim\limits_{z\to 0}\frac{\frac{1}{3}z}{z-2}=\frac{1}{2}$.

△ 离散时间系统的复频域分析.

$y(n)=\mathcal{Z}^{-1}[X(z)H(z)]=\mathcal{F}^{-1}[X(e^{jw})H(e^{jw})]$.

→ 简单说为系统的历史存储在 $y(-1)$, $y(-2)$ 等存储中.

(8) 离散时间因果LTI系统的单边Z变换分析.

○ 在复频域分析中. 输入信号为 $x(t)=e^{s_i t}$ 称为特征输入

其产生特征输出 $y(t)=H(s_i)e^{s_i t}$. $H(s_i)=H(s)|_{s=s_i}$.

当系统稳定时. 傅里叶变换存在且为虚轴上的系统函数. $H(j\omega)=H(s)|_{s=j\omega}$

在Z变换中系统稳定时. 傅里叶变换为单位圆上的系统函数. $H(e^{j\omega})=H(z)|_{z=e^{j\omega}}$.

○ 在频域分析中. 当系统稳定时.

稳态响应: 输入信号为 $x(t)=e^{j\omega_i t}$ / $\cos\omega_i t$ / $\sin\omega_i t$ 时.

输出信号是同频率的正弦信号 $y(t)=Ae^{j(\omega_i t+\varphi)}$ / $A\cos(\omega_i t+\varphi)$ / $A\sin(\omega_i t+\varphi)$.

A为频响在该点的模. φ 为频响在该点的相位.

一 离散时间因果LTI系统:

$$x(n)\longrightarrow \boxed{h(n)} \longrightarrow y(n).$$

单边分析

⇓

$n<0$ 时. 系统的历史存储在 $y(-1)$ $y(-2)$ 等存储器中. 存储器个数由差分方程阶数决定

$n\geq 0$ 时. 加入因果信号 $x(n)$ 开始激活.

$\Rightarrow y(n), n\geq 0 = f_1[x(n), n\geq 0]+f_2[y(-1), y(-2), \cdots]$.

双边Z变换: $X(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x(n)z^{-n}$. 单边Z变换: $X(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}x(n)z^{-n}$.

⇒ 除非 $x(n)$ 是因果的. 否则单边Z变换丢掉了 $x(n)$ 在负半轴的信息. 用 $x(-1)$, $x(-2)$ 等表示.

单边Z变换性质:

$$\begin{cases} x(n+1)u(n)\longrightarrow zX(z)-zx(0). \\ x(n-1)u(n)\longrightarrow z^{-1}X(z)+x(-1) \end{cases}$$

⇒ 超前

$$\begin{cases} x(n+2)u(n)\longrightarrow z^2X(z)-z^2x(0)-zx(1) \\ x(n-2)u(n)\longrightarrow z^{-2}X(z)+z^{-1}x(-1)+x(-2) \end{cases}$$

⋮

$$\boxed{\begin{cases} x(n+m)u(n)\longrightarrow z^{m}\left[X(z)-\sum_{k=0}^{m-1}x(k)z^{-k}\right]. \\ x(n-m)u(n)\longrightarrow z^{-m}\left[X(z)+\sum_{k=-m}^{-1}x(k)z^{-k}\right]. \end{cases}}$$

10、利用z变换求解差分方程：$y(n+2)+y(n+1)-6y(n)=x(n+1)$，

且 $y(0)=0$、$y(1)=1$、$x(n)=4^n u(n)$ → $x(n)$ 在 $n=0$ 时加入

⇒ 1°. 使用单边z变换.

$$z^2[Y(z)-y(0)-y(1)z^{-1}]+z[Y(z)-y(0)]-6Y(z)=z[X(z)-x(0)]$$

代入初始值后有：$z^2[Y(z)-z^{-1}]+zY(z)-6Y(z)=zX(z)-z$.

⇒ $(z^2+z-6)Y(z)=z\cdot X(z)$，由 $x(n)=4^n u(n)$ 得 $X(z)=\frac{1}{1-4z^{-1}}$，$|z|>4$.

则 $Y(z)=\frac{z}{z^2+z-6}\cdot\frac{z}{z-4}=\frac{z^2}{(z-2)(z+3)(z-4)}$

进行因式分解后：$Y(z)=\frac{-\frac{1}{5}z}{z-2}+\frac{-\frac{3}{35}z}{z+3}+\frac{\frac{2}{7}z}{z-4}$，$|z|>4$.

⇒ $y(n)=[-\frac{1}{5}\cdot 2^n-\frac{3}{35}(-3)^n+\frac{2}{7}\cdot 4^n]u(n)$.

（因式分解的方法：$\frac{Y(z)}{z}=\frac{C_1}{z-2}+\frac{C_2}{z+3}+\frac{C_3}{z-4}$.

则 $C_1=\left[\frac{Y(z)}{z}\cdot(z-2)\right]_{z=2}$，$C_2=\left[\frac{Y(z)}{z}\cdot(z+3)\right]_{z=-3}$，$C_3=\left[\frac{Y(z)}{z}\cdot(z-4)\right]_{z=4}$）

打

2°. 利用系统函数求解.

由系统方程 $y(n+2)+y(n+1)-6y(n)=x(n+1)$，进行双边z变换（或零状态条件下单边z变换）

得 $z^2Y(z)+zY(z)-6Y(z)=zX(z)$ 解得：$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{z}{z^2+z-6}=\frac{z}{(z-2)(z+3)}$

$H(z)$ 两个极点 $z=2$、$z=-3$ 为系统差分方程的特征根，则

零输入响应可设为 $y_{zp}(n)=C_1 2^n+C_2(-3)^n$. C_1、C_2 由起始状态求出.

而 $y(0)=0$、$y(1)=1$ 是初始状态，不是起始状态.

在求起始状态时，若系统为k阶，$x(n)$ 在 $n=n_0$ 时加入，则起始状态为 $y(n_0-1)$、$y_0(n-2)$ … $y(n_0-k)$.

本题中 $x(n)=4^n u(n)$，即在 $n=0$ 时加入，系统的起始状态为 $y(-1)$、$y(-2)$

用递代法求出 $y(-1)=y(-2)=0$，即 $y_{zp}(n)=0$. 则 $y(n)=y_{zs}(n)$

零状态响应：$Y_{zs}(z)=H(z)X(z)$，$y_{zs}(n)=\mathcal{Z}^{-1}[Y_{zs}(z)]$.

△把"+"全部通过平移换成"-"

3. 向右平移 $n=n-2$. 则 $y(n)+y(n-1)-6y(n-2)=x(n-1)$. $x(n)=4^n u(n)$

可得：$y(-1)=\frac{1}{6}[y(1)-y(0)-x(0)]=0$. $y(-2)=\frac{1}{6}[y(0)+y(-1)-x(-1)]=0$
$\hookrightarrow n=1$. $\hookrightarrow n=0$.

再进行单边Z变换：$Y(z)+z^{-1}Y(z)+y(-1)-6[z^{-2}Y(z)+z^{-1}y(-1)+y(-2)]=z^{-1}X(z)+x(-1)$.

$$\Rightarrow Y(z)=\underbrace{\frac{z^{-1}}{1+z^{-1}-6z^{-2}}X(z)}_{\text{零状态响应}}+\underbrace{\frac{6[z^{-1}y(-1)+y(-2)]-y(-1)}{1+z^{-1}-6z^{-2}}}_{\text{零输入响应}}$$

$\Rightarrow z^{-1}$.
Z变换中没有假分式

$\Rightarrow$ 输入信号 $X(z)=\frac{1}{1-4z^{-1}}$ 有极点 $z=4$. 系统固有极点 $z=2$. $z=-3$.
将全响应中与极点 $z=4$ 的项放在一起为强迫响应.
将全响应中与极点 $z=2, -3$ 的项放在一起为自由响应.

△当系统因果. 输入信号因果时. 求零状态响应：
时域：$y(n)=x(n)*h(n)$
复频域：$y(n)=Z^{-1}[H(z)X(z)]$.

(9) 离散时间LTI系统的z域分析

① 特征输入

一离散时间LTI系统： $x(n) \longrightarrow \boxed{h(n)} \longrightarrow y(n)$.

当 $x(n)=z_i^n$ 时为特征输入.

特征输出为 $y(n)=x(n)*h(n)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}x(m)h(n-m)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}h(m)z_i^{n-m}=z_i^n\sum_{m=-\infty}^{\infty}h(m)z_i^{-m}$.

又有 $H(z)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}h(m)z^{-m}$. 即 $y(n)=H(z_i)z_i^n$. $\Rightarrow$ $z_i^n \longrightarrow \boxed{h(n)} \longrightarrow H(z_i)z_i^n$.

② 系统稳定性

离散时间LTI系统稳定 $\Leftrightarrow$ 系统冲激响应绝对可和，即 $\sum|h(n)|<\infty$.

$\Leftrightarrow$ 系统函数 $H(z)$ 的ROC包含单位圆

$\Leftrightarrow$ 系统存在频率响应 $H(e^{j\omega})$.

考虑系统： $x(n) \longrightarrow \boxed{\delta(n)} \longrightarrow x(n)$ $\Rightarrow H(z)=1$.

$x(n) \longrightarrow \boxed{h_1(n)} \longrightarrow \boxed{h_2(n)} \longrightarrow x(n)$.

$\Rightarrow$ $h_1(n)*h_2(n)=\delta(n)$ 则 $H_1(z)\cdot H_2(z)=1$. $\Rightarrow$ $H_1(z)=\frac{1}{H_2(z)}$.

$H_1(z)$, $H_2(z)$ 的零极点均在单位圆内 $\Rightarrow$ 最小相位系统.

相应地，零极点均在单位圆内的信号为最小相位信号.

离散时间LTI系统因果稳定 $\Leftrightarrow$ 系统函数 $H(z)$ 的极点均在单位圆内.

① 系统：$y(n)+0.2y(n-1)-0.24y(n-2)=x(n)+x(n-1)$.

(a) 求系统函数 $H(z)$，并说明其收敛域与因果性.

(b) 求单位样值响应. ⇒ 系统函数反变换

(c) 当激励 $x(n)$ 为单位阶跃序列 $u(n)$ 时，求因果系统的零状态响应 $y_{zs}(n)$

→ 求系统函数时，进行双边Z变换(零状态下的单边Z变换)，与起始状态无关.

(a) 进行Z变换：$Y(z)+0.2z^{-1}Y(z)-0.24z^{-2}Y(z)=X(z)+z^{-1}X(z)$.

则 $H(z)=\dfrac{Y(z)}{H(z)}=\dfrac{1+z^{-1}}{1+0.2z^{-1}-0.24z^{-2}}=\dfrac{z(z+1)}{(z-0.4)(z+0.6)}$.

其有一阶极点 $p_1=0.4$，$p_2=-0.6$，一阶零点 $z_1=0$，$z_2=-1$. 其ROC有三种情况：

1°. $|z|>0.6$ 时：此时ROC在最外侧极点外侧，故为因果. ROC包含单位圆，故为稳定.

2°. $0.4<|z|<0.6$ 时：系统不因果，不稳定.

3°. $|z|<0.4$ 时，系统不因果，不稳定.

(b) $H(z)=\dfrac{1.4z}{z-0.4}-\dfrac{0.4z}{z+0.6}$，其Z反变换为：

1°. $|z|>0.6$ 时：$h(n)=[1.4\cdot(0.4)^n-0.4\cdot(-0.6)^n]u(n)$.

2°. $0.4<|z|<0.6$ 时：$h(n)=1.4\cdot(0.4)^n u(n)+0.4(-0.6)^n u(-n-1)$.

3°. $|z|<0.4$ 时：$h(n)=[-1.4\cdot(0.4)^n+0.4\cdot(-0.6)^n]u(-n-1)$.

→ 系统因果，输入因果，则输出因果. $Y_{zs}(z)=H(z)X(z)$.

(c) 由于是因果系统，则 $H(z)$ 的ROC为 $|z|>0.6$.

$Y_{zs}(z)=H(z)X(z)=\dfrac{z(z+1)}{(z-0.4)(z+0.6)}\cdot\dfrac{1}{1-z^{-1}}=\dfrac{z^2(z+1)}{(z-1)(z-0.4)(z+0.6)}$，$|z|>1$. → 取交集.

$=\dfrac{2.08z}{z-1}-\dfrac{0.93z}{z-0.4}-\dfrac{0.15z}{z+0.6}$，$|z|>1$.

$\Rightarrow y_{zs}(z)=[\underbrace{2.08}_{\text{强迫响应}}-\underbrace{0.93(0.4)^n-0.15(-0.6)^n}_{\text{加上零输入响应之后为自由响应}}]u(n)$.

0) 已知系统：(1) 若对所有 n，$x(n)=(\frac{1}{6})^n\varepsilon(n)$，则对所有 n，$y(n)=[b(\frac{1}{2})^n+10(\frac{1}{3})^n]\varepsilon(n)$

(2) 若对所有 n，$x(n)=(-1)^n$，则对所有的 n，$y(n)=\frac{7}{4}(-1)^n$.

(a) 求系统函数 $H(z)$，并求常数 b.

(b) 写出描述该系统的差分方程.

(c) 若对于所有的 n，$x(n)=2^n$，求响应 $y(n)$.

⇒ (a). $x(n)=(-1)^n$ 为特征输入，其对应特征输出 $y(n)=H(-1)\cdot(-1)^n$.

由 $y(n)=\frac{7}{4}(-1)^n$ 得：$H(-1)=\frac{7}{4}$.

由 $x(n)=(\frac{1}{6})^n u(n)$ 有：$X(z)=\frac{1}{1-\frac{1}{6}z^{-1}}=\frac{z}{z-\frac{1}{6}}$. $|z|>\frac{1}{6}$.

$y(n)=[b(\frac{1}{2})^n+10(\frac{1}{3})^n]u(n) \Rightarrow Y(z)=\frac{bz}{z-\frac{1}{2}}+\frac{10z}{z-\frac{1}{3}}$. $|z|>\frac{1}{2}$.

则 $H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{b(z-\frac{1}{6})}{z-\frac{1}{2}}+\frac{10(z-\frac{1}{6})}{z-\frac{1}{3}}$. $|z|>\frac{1}{2}$. ⇒ 交集

代入 $H(-1)=\frac{7}{4}$ 得：$b=-9$，$\Rightarrow H(z)=-\frac{9(z-\frac{1}{6})}{z-\frac{1}{2}}+\frac{10(z-\frac{1}{6})}{z-\frac{1}{3}}$. $|z|>\frac{1}{2}$.

(b) $Y(z)=H(z)X(z)$，由 $H(z)=\frac{1-\frac{13}{6}z^{-1}+\frac{1}{3}z^{-2}}{1-\frac{5}{6}z^{-1}+\frac{1}{6}z^{-2}}$ 得：

用 z^{-1} 表示

$(1-\frac{5}{6}z^{-1}+\frac{1}{6}z^{-2})Y(z)=X(z)(1-\frac{13}{6}z^{-1}+\frac{1}{3}z^{-2})$

则有：$y(n)-\frac{5}{6}y(n-1)+\frac{1}{6}y(n-2)=x(n)-\frac{13}{6}x(n-1)+\frac{1}{3}x(n-2)$.

(c) 特征输入 $x(n)=z_i^n$，$z_i=2$，则特征输出 $y(n)=H(2)2^n=0$.

① 已知一LTI系统：$y(n-1)-\frac{5}{2}y(n)+y(n+1)=x(n)$.

(a) 求系统函数，并画出零极点图.

(b) 求系统可能的单位抽样响应 $h(n)$. 并写出其因果、稳定性.

⇒ (a) 进行Z变换：$z^{-1}Y(z)-\frac{5}{2}Y(z)+zY(z)=X(z)$.

则 $H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{1}{z^{-1}-\frac{5}{2}+z}=\frac{z^{-1}}{z^{-2}-\frac{5}{2}z^{-1}+1}$. ⇒ 零点：$z=0$. 极点：$z=1, 2$.

单位圆上的Z变换

(10) $H(z)$和$H(e^{j\omega})$的关系.

① 当系统函数$H(z)$的ROC包含单位圆时，$H(e^{j\omega})=H(z)\big|_{z=e^{j\omega}}$.

② 根据系统函数$H(z)$的零极点分布，由几何方法可确定系统的频率响应.

设系统函数为$H(z)=\dfrac{\prod_{r=1}^{M}(z-z_r)}{\prod_{k=1}^{N}(z-p_k)}$，$z_r$为零点，$p_k$为极点.

当$H(z)$的ROC包含单位圆时，将$z=e^{j\omega}$代入：

$$H(e^{j\omega})=\frac{\prod_{r=1}^{M}(e^{j\omega}-z_r)}{\prod_{k=1}^{N}(e^{j\omega}-p_k)}=|H(e^{j\omega})|e^{j\varphi(\omega)}$$

零点相角为正，极点相角为负

零点分子，极点分母

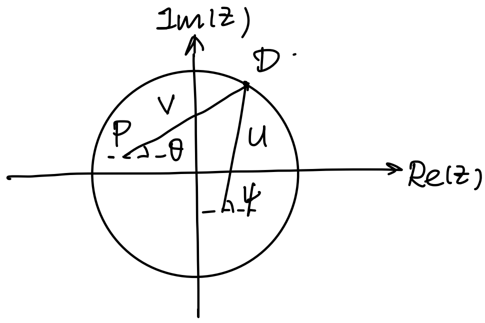
令$e^{j\omega}-z_r=U_r e^{j\psi(r)}$，$e^{j\omega}-p_k=V_k e^{j\theta_k}$，则

$$\begin{cases}|H(e^{j\omega})|=\dfrac{\prod_{r=1}^{M}U_r}{\prod_{k=1}^{N}V_k} & \text{(幅度)}\\ \varphi(\omega)=\sum_{r=1}^{M}\psi_r-\sum_{k=1}^{N}\theta_k & \text{(相位)}\end{cases}$$

其中[U_r, $\psi(r)$]表示零点至单位圆上某点$e^{j\omega}$的矢量$(e^{j\omega}-z_r)$的幅度与相角，[V_k, θ_k]同理.

单位圆上的D点由0到π再到2π转一圈，就可求出幅频响应与相频响应，频率响应由零极点分布决定.

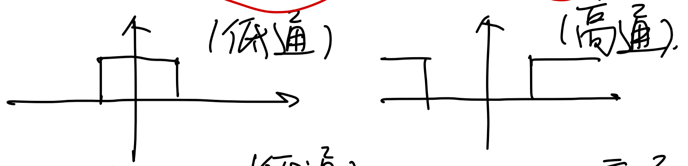
描点法画出$|H(e^{j\omega})|$和$\varphi(\omega)$随ω的变化图像.



不同的是，在复频域分析中，系统函数的ROC包含$j\omega$轴时，傅立叶变换为虚轴上的S变换：$H(j\omega)=H(s)\big|_{s=j\omega}$，此时$j\omega$的变化为$-\infty\to+\infty$.

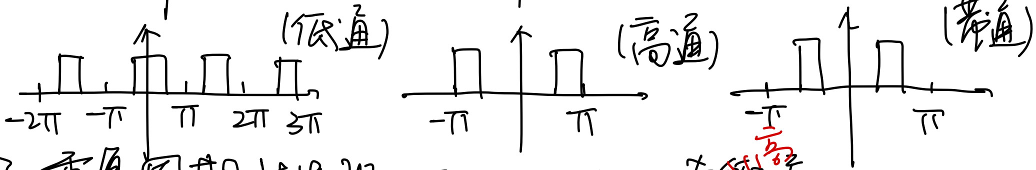
因此，离散的傅立叶变换$H(e^{j\omega})$具有周期性且周期为2π(每2π转一圈)，连续的$H(j\omega)$没有周期性

连续信号的高通、低通：



是相对的.

离散信号的高通、低通：



↳ 与连续不同，重复周期性出现，±π, ±3π, ±5π…为~~低~~高通.

0, ±2π, ±4π…为~~高~~低通.

离散信号傅氏变换⇒DTFT.   离散傅氏变换⇒DFT.

2. 离散时间LTI系统的频谱分析——DTFT变换.

(1) 设$x(n)$的傅氏变换$X(e^{j\omega})$. 则$X(e^{j\omega})$为离散时间傅里叶变换.

$$X(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x(n)e^{-j\omega n},\quad x(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega.$$ ⇒ 基本公式.

↳ 取主周期 $\int_{-\pi}^{\pi}$.

$x(n)$= 离散非周期. $X(e^{j\omega})$= 连续周期

↳ 离散对应周期. 连续对应非周期.

⇒ 由$H(s)$与$H(e^{j\omega})$的关系可知: 离散时间傅里叶变换$X(e^{j\omega})$是以2π为周期的连续周期谱, 且$0, 2\pi, 4\pi\cdots$附近为低频. $\pi, 3\pi, 5\pi\cdots$附近为高频.

① $x(n)=\delta(n)$. ⇒ $X(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(n)e^{-j\omega n}=1$

$x(n)=\delta(n-n_0)$ ⇒ $X(e^{j\omega})=e^{-j\omega n_0}$.

② 矩形序列: $x(n)=\begin{cases}1, & |n|\le N_1\\ 0, & |n|>N_1\end{cases}$ $X(e^{j\omega})=\sum_{n=-N_1}^{N_1}e^{-j\omega n}=\dfrac{\sin\omega(N_1+\frac{1}{2})}{\sin\frac{\omega}{2}}$?

③ $x(n)=a^nu(n)$. $|a|<1$.

⇒ $X(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a^nu(n)e^{-j\omega n}=\sum_{n=0}^{+\infty}a^ne^{-j\omega n}=\dfrac{1}{1-ae^{-j\omega}}$.

△ $x(n)=(n+1)a^nu(n)$. $|a|<1$

⇒ $X(e^{j\omega})=\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a^ne^{-j\omega n}=\lim_{n\to\infty}\frac{d}{d\omega}\sum a^{n+1}e^{-j\omega(n+1)}=\dfrac{1}{(1-ae^{-j\omega})^2}$??? 推

$\boxed{x(n)=a^nu(-n).\ |a|>1.}$ → $(\frac{1}{a})^{-n}u(-n)$

⇒ $X(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{0}a^ne^{-j\omega n}=\dfrac{1}{1-\frac{1}{a}e^{j\omega}}$ 对比: $-a^nu(-n-1)$ → $\dfrac{1}{1-ae^{-j\omega}}$. $|a|>1$.

④ 已知 $x(n)=(\frac{1}{2})^n[u(n+3)-u(n-2)]$, 求$X(e^{j\omega})$

⇒ $x(n)=8\cdot(\frac{1}{2})^{n+3}u(n+3)-\frac{1}{4}\cdot(\frac{1}{2})^{n-2}u(n-2)$.

则 $X(e^{j\omega})=8\cdot\dfrac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}\cdot e^{j3\omega}-\frac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}\cdot e^{-j2\omega}=\dfrac{8e^{j3\omega}-\frac{1}{4}e^{-j2\omega}}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}$.

或者: $X(e^{j\omega})=\sum_{n=-3}^{1}(\frac{1}{2})^ne^{-j\omega n}=\dfrac{8e^{j3\omega}-\frac{1}{4}e^{-j2\omega}}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}$.

↳ 求$x(n)$DTFT时. 若为有限长序列. 直接按公式求和.
若为无限长序列. 将序列分为$(-\infty,-1]$, $[0,+\infty)$两部分. 分别求和再相加

⑧ $x(n)=\dfrac{\sin Wn}{\pi n}$. 其z变换无法求得. 但傅里叶变换存在.

o 已知 $x(n)=(\frac{1}{2})^n[u(n+3)-u(n-2)]$，求 $X(e^{j\omega})$.

$\Rightarrow x(n)=(\frac{1}{2})^n[\delta(n+3)+\delta(n+2)+\delta(n+1)+\delta(n)+\delta(n-1)]$

$=(\frac{1}{2})^{-3}\delta(n+3)+(\frac{1}{2})^{-2}\delta(n+2)+(\frac{1}{2})^{-1}\delta(n+1)+\delta(n)+(\frac{1}{2})\delta(n-1)$

$\xrightarrow{Z}(\frac{1}{2})^{-3}z^3+(\frac{1}{2})^{-2}z^2+(\frac{1}{2})^{-1}z+1+\frac{1}{2}z^{-1}$. ROC为 $0<|z|<\infty$，包含单位圆.

且 $X(e^{j\omega})=8e^{j3\omega}+4e^{j2\omega}+2e^{j\omega}+1+\frac{1}{2}e^{j(-\omega)}$.

↳ 求序列 $x(n)$ 的DTFT时，若 $x(n)$ 为有限长序列，则直接按公式求和.

这实际上就是 $\sum_{n=-3}^{2}(\frac{1}{2})^n e^{-j\omega n}$.

o 已知 $x(n)=(\frac{1}{4})^n u(n+2)$ 求 $X(e^{j\omega})$

$\Rightarrow x(n)=(\frac{1}{4})^n u(n)+4\delta(n+1)+16\delta(n+2)$

$\xrightarrow{Z}\frac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}+4z+16z^2$，其ROC为 $|\frac{1}{4}|<z<\infty$. 包含单位圆

则 $X(e^{j\omega})=X(z)\big|_{z=e^{j\omega}}=\frac{1}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}}+4e^{j\omega}+16e^{j2\omega}=\frac{16e^{j2\omega}}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}}$.

o 若 $x(n)=n(\frac{1}{2})^{|n|}$，求 $X(e^{j\omega})$.

$\rightarrow 2^n u(-n-1)$

$\Rightarrow$ 令 $x_1(n)=(\frac{1}{2})^{|n|}=(\frac{1}{2})^n u(n)+(\frac{1}{2})^{-n}u(-n-1)$

$\xrightarrow{Z}\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}+\frac{-1}{1-2z^{-1}}$，其ROC为 $|\frac{1}{2}|<z<|2|$.

则 $X_1(e^{j\omega})=\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}-\frac{1}{1-2e^{-j\omega}}$.

$X(e^{j\omega})=j\frac{d}{d\omega}X_1(e^{j\omega})=-j\frac{\frac{3}{4}\sin\omega}{(\frac{5}{4}\cos\omega)^2}$.

$X(z)=-z\frac{d}{dz}X_1(z)$

$X(e^{j\omega})=X(z)\big|_{z=e^{j\omega}}$

o 已知 $x(n)=\delta(n+3)+\delta(n-3)$，求 $X(e^{j\omega})$ ⇒ 有限长信号，必定稳定（绝对可和）.

$\Rightarrow X(z)=z^3+z^{-3}$，其ROC为 $-\infty<|z|<+\infty$.

则 $X(e^{j\omega})=e^{j3\omega}+e^{j(-3\omega)}=2\cos3\omega$.

或者：$DTFT[\delta(n)]=1$. 则由时移性：$DTFT[\delta(n+3)]=e^{j3\omega}$.

④ $x(n)=a^{|n|}$. $|a|<1$.

$\Rightarrow x(n)=a^n u(n)+a^{-n}u(-n-1)$. 则 $X(z)=\frac{1}{1-az^{-1}}+\frac{-1}{1-\frac{1}{a}z^{-1}}$, $|a|<z<|\frac{1}{a}|$. 包含单位圆.

$X(e^{jw})=X(z)|_{z=e^{jw}}=\frac{1}{1-ae^{-jw}}-\frac{1}{1-\frac{1}{a}e^{-jw}}=\frac{1}{1-ae^{-jw}}+\frac{1}{1-ae^{jw}}-1=\frac{1-a^2}{1-2a\cos w+a^2}$.

⑤ $x(n)=1$. $-\infty<n<+\infty$. $\Rightarrow$ $X(e^{jw})=2\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(w-2k\pi)$. 记住 (打)

⑥ $x(n)=u(n)$. $\Rightarrow X(e^{jw})=\frac{1}{1-e^{-jw}}+\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(w-2k\pi)$ 记住 (打)

⑦ $x(n)=\frac{\sin Wn}{\pi n}$ $\Rightarrow$ $X(e^{jw})=\begin{cases}1, & |w|\le W\\ 0, & W<|w|\le\pi\end{cases}$. $X(e^{jw})$ 连续周期.

(2) DTFT 性质.

① 周期性. $X(e^{j(w+2k\pi)})=X(e^{jw})$

② 线性.

③ 对称性. (打) $x(n)\to X(e^{jw})$. $x(-n)\to X(e^{-jw})$.

$Re[x(n)]\longrightarrow X_e(e^{jw})$. $jIm[x(n)]\longrightarrow X_o(e^{jw})$.

$x_e(n)\longrightarrow Re[X(e^{jw})]$. $x_o(n)\longrightarrow jIm[X(e^{jw})]$.

$X(e^{jw})=X_e(e^{jw})+X_o(e^{jw})$ 偶部 奇部.

$\hookrightarrow X_e(e^{jw})=\frac{1}{2}[X(e^{jw})+X(e^{-jw})]$. $X_o(e^{jw})=\frac{1}{2}[X(e^{jw})-X(e^{-jw})]$.

$x(n)=x_e(n)+x_o(n)$ 同理.

④ 时移性. $x(n)\longrightarrow X(e^{jw})$ 则 $x(n-n_0)\longrightarrow X(e^{jw})e^{-jwn_0}$.

频移性 $e^{jw_0n}x(n)\longrightarrow X(e^{j(w-w_0)})$.

⑤ 微分性质: $x(n)\to X(e^{jw})$. 则 $nx(n)\longrightarrow j\frac{dX(e^{jw})}{dw}$. (打)

$\hookrightarrow$ $-jnx(n)\longrightarrow\frac{dX(e^{jw})}{dw}$

$-jt\,x(t)\longrightarrow\frac{dX(jw)}{dt}$

⑥ 卷积: $x_1(n)\to X_1(e^{jw})$. $x_2(n)\to X_2(e^{jw})$.

则 $DTFT[x_1(n)\cdot x_2(n)]=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}X_1(e^{j\theta})X_2(e^{j(w-\theta)})d\theta$

$=\frac{1}{2\pi}X_1(e^{jw})*X_2(e^{jw})$.

o 若 $x(n)=(\frac{1}{3})^{n-2}u(n-2)$. 求 $X(e^{jw})$

$\Rightarrow$ 令 $x'(n)=(\frac{1}{3})^{n}u(n)$. 则 $x(n)=x'(n-2)$.

$X'(z)=\frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}$. 其ROC为 $|z|>\frac{1}{3}$. $\Rightarrow X(z)=\frac{z^{-2}}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}$.

o 若 $x(n)=\left[(\frac{1}{3})^{|n|}u(-n-2)\right]$ 求 $X(e^{jw})$.

$\Rightarrow x(n)=(\frac{1}{3})^{-n}u(-n)-\delta(n)-\frac{1}{3}\delta(n+1)=3^{n}u(-n)-\delta(n)-\frac{1}{3}\delta(n+1)$

$\xrightarrow{Z}\frac{-1}{1-3z^{-1}}-1-\frac{1}{3}z$. $|z|<3$. 则 $X(e^{jw})=\frac{-1}{1-3e^{-jw}}-1-\frac{1}{3}e^{jw}$.

o 求 $x(n)=(a^{n}\sin w_0 n)u(n)$. $|a|<1$ 的傅立叶变换.

令 $x_1(n)=\sin w_0 n\,u(n)$, 则 $X_1(z)=\frac{[\sin w_0]z^{-1}}{1-[2\cos w_0]z^{-1}+z^{-2}}$. $|z|>1$.

则 $x(n)=a^{n}x_1(n)\Rightarrow X(z)=X_1(\frac{z}{a})=\frac{a[\sin w_0]z^{-1}}{1-a[2\cos w_0]z^{-1}+a^{2}z^{-2}}$. $|z|>a$. 包含单位圆.

$X(e^{jw})=\frac{a[\sin w_0]e^{-jw}}{1-a[2\cos w_0]e^{-jw}+a^{2}e^{-2jw}}$.

或者: $x(n)=a^{n}u(n)\cdot\sin(w_0 n)=x_1(n)\cdot\frac{1}{2j}[e^{jw_0 n}-e^{-jw_0 n}]=\frac{1}{2j}[x_1(n)e^{jw_0 n}-x_1(n)e^{-jw_0 n}]$

由 $X_1(e^{jw})=\frac{1}{1-ae^{-jw}}$. 则 $X(e^{jw})=\frac{1}{2j}[X_1(e^{j(w-w_0)})-X_1(e^{j(w+w_0)})]$.

$=\frac{1}{2j}\left[\frac{1}{1-ae^{-j(w-w_0)}}-\frac{1}{1-ae^{-j(w+w_0)}}\right]$

$(n-1)$ 因子相当于 $j\frac{d}{dw}X_0(e^{jw})-X_0(e^{jw})$.

o 若 $x(n)=(n-1)(\frac{1}{2})^{|n|}$. 求 $X(e^{jw})$.

$\Rightarrow x(n)=n(\frac{1}{2})^{|n|}-(\frac{1}{2})^{|n|}$. 令 $x_1(n)=n(\frac{1}{2})^{|n|}$. $x_2(n)=(\frac{1}{2})^{|n|}$

$x_2(n)=(\frac{1}{2})^{n}u(n)+(\frac{1}{2})^{-n}u(-n-1)\rightarrow X_2(e^{jw})=\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-jw}}-\frac{1}{1-2e^{-jw}}$.

则 $X_1(e^{jw})=j\frac{d}{dw}X_2(e^{jw})$

$X(e^{jw})=X_1(e^{jw})-X_2(e^{jw})$.

(3) 离散时间傅里叶变换.

0. 若 $X(e^{jw}) = \cos^2 w + \sin^2 3w$. 求 $x(n)$.

$\Rightarrow X(e^{jw}) = \cos^2 w + \sin^2 3w = \frac{1+\cos 2w}{2} + \frac{1-\cos 6w}{2} = 1 + \frac{1}{4}(e^{j2w} + e^{-j2w}) - \frac{1}{4}(e^{j6w} + e^{-j6w})$.

$x(n) = \delta(n) + \frac{1}{4}[\delta(n+2) + \delta(n-2)] - \frac{1}{4}[\delta(n+6) + \delta(n-6)]$.

0. 若 $X(e^{jw}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k \delta(w - \frac{\pi}{2}k)$. 求 $x(n)$.

$\Rightarrow$ 由于 $X(e^{jw})$ 是以 2π 为周期的函数. 在 $-\pi < w \leq \pi$ 范围内.

$X(e^{jw}) = \delta(w+\pi) - \delta(w+\frac{\pi}{2}) + \delta(w) - \delta(w-\frac{\pi}{2})$. $(k=-2,-1,0,1)$.

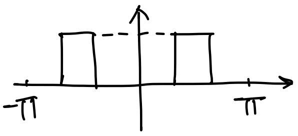
$\boxed{x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{jw}) e^{jwn}} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} [\delta(w+\pi) - \delta(w+\frac{\pi}{2}) + \delta(w) - \delta(w-\frac{\pi}{2})] e^{jwn} dw$.

$= \frac{1}{2\pi}(e^{-j\pi n} - e^{-j\frac{\pi}{2}n} + 1 - e^{j\frac{\pi}{2}n}) = \frac{1}{2\pi}[1 + (-1)^n + \cos\frac{\pi}{2}n]$.

基本公式

0. $X(e^{jw}) = \begin{cases} 1 & \frac{\pi}{3} \leq |w| \leq \frac{2\pi}{3} \\ 0. & 0 \leq |w| < \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3} < |w| \leq \pi \end{cases}$ 注意: $X(e^{jw})$ 是以 2π 为周期的!!!

$\Rightarrow X(e^{jw}) =$



则这是一个带通滤波器.

$\Rightarrow$ 按定义计算.

这个是单位圆上的z变换, 则按定义算. 若是单位圆上的z变换, 则结果为z变换. 此时ROC包含单位圆.

$\boxed{x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{jw}) e^{jwn} dw} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{2\pi}{3}}^{-\frac{\pi}{3}} 1 \cdot e^{jwn} dw + \frac{1}{2\pi}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} 1 \cdot e^{jwn} dw$

$= \frac{1}{2\pi jn}(e^{-j\frac{\pi}{3}n} - e^{-j\frac{2\pi}{3}n}) + \frac{1}{2\pi jn}(e^{j\frac{2\pi}{3}n} - e^{j\frac{\pi}{3}n}) = \frac{1}{\pi n}(\sin\frac{2\pi}{3}n - \sin\frac{\pi}{3}n)$.

Δ 连续信号: $x(t) \longrightarrow X(s)$. 若ROC包含 $j\omega$ 轴. 则 $X(j\omega) = X(s)|_{s=j\omega}$

离散信号: $x(n) \longrightarrow X(z)$ 若ROC包含单位圆. 则 $X(e^{jw}) = X(z)|_{z=e^{jw}}$.

若 $x(n)$ 的z变换不存在. 其傅立叶变换也仍可能存在. 如 $\frac{\sin Wn}{\pi n}$.

0. 若 $X(e^{jw}) = \frac{2}{(1-\frac{1}{2}e^{-jw})(1-\frac{1}{4}e^{-jw})^2}$ 求 $x(n)$. $\Rightarrow$ 一看就是单位圆上的z变换. ROC包含单位圆

$\Rightarrow X(e^{jw}) = \frac{8}{1-\frac{1}{2}e^{-jw}} - \frac{4}{1-\frac{1}{4}e^{-jw}} - \frac{2}{(1-\frac{1}{4}e^{-jw})^2}$

$x(n) = 8 \cdot (\frac{1}{2})^n u(n) - 4(\frac{1}{4})^n u(n) - 2(n+1)(\frac{1}{4})^n u(n)$. $|z| > \frac{1}{2}$

○ 求反变换.

(a) $X(e^{j\omega})=1-2e^{-j3\omega}+4e^{-j2\omega}+3e^{-j6\omega}$.

(b) $X(e^{j\omega})=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(-1)^k\delta(\omega-\frac{\pi k}{2})$.

(c) $X(e^{j\omega})=\cos^2\omega$.

(d) $X(e^{j\omega})=\dfrac{e^{-j\omega}}{1+\frac{1}{6}e^{-j\omega}-\frac{1}{6}e^{-j2\omega}}$.

$\Rightarrow$(a). $X(z)=1-2z^{-3}+4z^{-2}+3z^{-6}\xrightarrow{Z^{-1}}x(n)=\delta(n)-2\delta(n-3)+4\delta(n-2)+3\delta(n-6)$.

(b) 由于 $X(e^{j\omega})$ 以 2π 为周期. 在 $-\pi\leq\omega<\pi$ 范围内.

$$X(e^{j\omega})=\delta(\omega+\pi)-\delta(\omega+\tfrac{\pi}{2})+\delta(\omega)-\delta(\omega-\tfrac{\pi}{2}).$$

$$\Rightarrow x(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega.$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[\delta(\omega+\pi)-\delta(\omega+\tfrac{\pi}{2})+\delta(\omega)-\delta(\omega-\tfrac{\pi}{2})]e^{j\omega n}d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}[e^{-jn\pi}-e^{-j\frac{n\pi}{2}}+1-e^{j\frac{n\pi}{2}}]=\frac{1}{2\pi}[1+(-1)^n-2\cos\frac{n\pi}{2}].$$

(c). $X(e^{j\omega})=\cos^2\omega=\dfrac{1+\cos2\omega}{2}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}(e^{j2\omega}+e^{-j2\omega})$. $\Rightarrow X(z)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}(z^2+z^{-2})$.

$\xrightarrow{Z^{-1}}x(t)=\frac{1}{2}\delta(n)+\frac{1}{4}[\delta(n+2)+\delta(n-2)]$.

考 (d). $X(z)=\dfrac{z^{-1}}{1+\frac{1}{6}z^{-1}-\frac{1}{6}z^{-2}}$

$$=\frac{6z}{6z^2+z-1}=\frac{\frac{6}{5}}{2z+1}+\frac{\frac{6}{5}}{3z-1}=z^{-1}\left(\frac{\frac{6}{5}}{2+z^{-1}}+\frac{\frac{6}{5}}{3-z^{-1}}\right).\ |z|>\frac{1}{2}.$$

$$=\frac{3}{5}\cdot\frac{z^{-1}}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}+\frac{2}{5}\cdot\frac{z^{-1}}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}=\frac{3}{5}(-\frac{1}{2})^{n-1}u(n-1)+\frac{2}{5}(\frac{1}{3})^{n-1}u(n-1)$$

考

○ 求z反变换: $x(z)=\dfrac{1+z^{-1}}{1-2z^{-1}\cos\omega+z^{-2}}$. $|z|>1$.

拆

$$x(z)=\frac{1-[\cos\omega]z^{-1}}{1-2z^{-1}\cos\omega+z^{-2}}+\frac{\cos\omega+1}{\sin\omega}\cdot\frac{[\sin\omega]z^{-1}}{1-2z^{-1}\cos\omega+z^{-2}}$$

$$\Rightarrow x(n)=[\cos\omega n]u(n)+\frac{\cos\omega+1}{\sin\omega}[\sin\omega n]u(n).$$

凑

(4) 离散时间线性时不变系统的频域分析.

离散时间LTI系统：$x(n) \longrightarrow \boxed{h(n)} \longrightarrow y(n)$.

⇒ $y(n)=x(n)*h(n)$. 由DTFT有：$Y(e^{j\omega})=X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$. $H(e^{j\omega})$为系统频响

对离散时间LTI系统分析：时域 $y(n)=x(n)*h(n)$

频域 $y(n)=IDTFT[Y(e^{j\omega})]=IDTFT[H(e^{j\omega})\cdot X(e^{j\omega})]$.

和连续时间LTI系统一样(P26)有：

输入为 $x(n)=e^{j\omega_0 n}$ 时. → 正弦信号

$y(n)=x(n)*h(n)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}h(m)x(n-m)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}h(m)e^{j\omega_0(n-m)}=e^{j\omega_0 n}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}h(m)e^{-j\omega_0 m}$

又 $H(e^{j\omega_0})=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}h(m)e^{-j\omega_0 m}$ (傅立叶变换的定义).

即 $y(n)=H(e^{j\omega_0})e^{j\omega_0 n}=|H(e^{j\omega_0})|e^{j[\omega_0 n+\arg H(e^{j\omega_0})]}$. → 正弦稳态响应

将输入信号分解为基本信号$e^{j\omega_0 n}$的加权和，则输出也为$H(e^{j\omega_0})e^{j\omega_0 n}$的加权和.

$x(n)=A\cos(\omega_0 n+\varphi_0)\longrightarrow h(n)\longrightarrow y(n)=|H(e^{j\omega_0})|\cdot A\cos(\omega_0 n+\varphi_0+\arg H(e^{j\omega_0}))$.

↳ 或者写为 $e^{j\omega_0 n}$ 的形式.

○ 已知某离散时间系统的差分方程为： (本质和z变换一样)

$$y(n)-\frac{3}{4}y(n-1)+\frac{1}{8}y(n-2)=2x(n).$$

① 求系统频响 $H(e^{j\omega})$、冲激响应 $h(n)$. ⇒ 系统稳定.

⇒ 方程进行DTFT变换：$Y(e^{j\omega})-\frac{3}{4}e^{-j\omega}Y(e^{j\omega})+\frac{1}{8}e^{-2j\omega}Y(e^{j\omega})=2X(e^{j\omega})$

则 $H(e^{j\omega})=\frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})}=\frac{4}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}-\frac{2}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}}$. $|e^{j\omega}|>\frac{1}{2}$. → 极点都在单位圆内，则因果稳定

$h(n)=IDTFT[H(e^{j\omega})]=4(\frac{1}{2})^n u(n)-2(\frac{1}{4})^n u(n)$.

② $x(n)=(\frac{1}{4})^n u(n)$. 求$y(n)$. ⇒ $y(n)=IDTFT\left[\frac{1}{(1-\frac{1}{2}e^{-j\omega})(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega})^2}\right]=8(\frac{1}{2})^n u(n)-4(\frac{1}{4})^n u(n)-2(n+1)(\frac{1}{4})^n u(n)$

③ $x(n)=\cos\frac{\pi}{2}n$. 求$y(n)$.

↳ $\omega_0=\frac{\pi}{2}$. 则 $y(n)=|H(\cancel{j\omega_0}\,e^{j\omega_0})|\cos(\frac{\pi}{2}n+\arg H(j\omega_0))$.

又 $H(\cancel{j\omega_0}\,e^{j\omega_0})=H(j\frac{\pi}{2})=\frac{4}{1+\frac{1}{2}j}-\frac{2}{1+\frac{1}{4}j}=\frac{16}{5}-\frac{32}{17}+(\frac{8}{17}-\frac{8}{5})j$

第六章. 系统的实现.

1. 离散时间LTI系统实现.

延时器. 乘法器, 加法器. (z^{-1}是延迟器).

○ 某离散时间LTI系统: $y(n)-\frac{5}{6}y(n-1)+\frac{1}{6}y(n-2)=x(n)-\frac{13}{6}x(n-1)+\frac{1}{3}x(n-2)$.

$\Rightarrow Y(z)-\frac{5}{6}z^{-1}Y(z)+\frac{1}{6}z^{-2}Y(z)=X(z)-\frac{13}{6}z^{-1}X(z)+\frac{1}{3}z^{-2}X(z)$.

$$H(z)=\frac{1-\frac{13}{6}z^{-1}+\frac{1}{3}z^{-2}}{1-\frac{5}{6}z^{-1}+\frac{1}{6}z^{-2}}=\underbrace{(1-\tfrac{13}{6}z^{-1}+\tfrac{1}{3}z^{-2})}_{\text{MA(纯零点模型) 有限长(FIR)}}\cdot\underbrace{\frac{1}{1-\frac{5}{6}z^{-1}+\frac{1}{6}z^{-2}}}_{\text{AR(纯极点模型) 无限长(IIR)}}=H_1(z)\cdot H_2(z)$$

$$x(n)\longrightarrow\boxed{H(z)}\longrightarrow y(n)\ \Rightarrow\ x(n)\longrightarrow\boxed{H_1(z)}\xrightarrow{w(n)}\boxed{H_2(z)}\longrightarrow y(n).$$

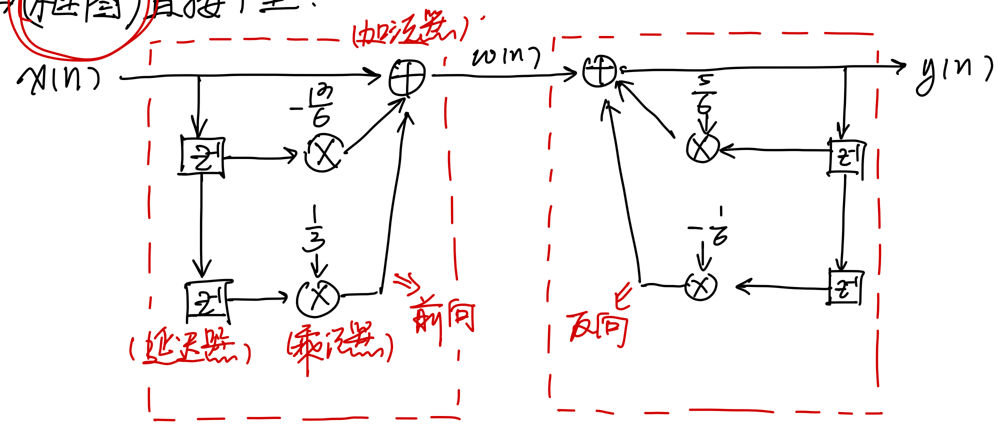
$H_1(z)=\frac{W(z)}{X(z)}=1-\frac{13}{6}z^{-1}+\frac{1}{3}z^{-2}\Rightarrow w(n)=x(n)-\frac{13}{6}x(n-1)+\frac{1}{3}x(n-2)$.

$H_2(z)=\frac{Y(z)}{W(z)}=\frac{1}{1-\frac{5}{6}z^{-1}+\frac{1}{6}z^{-2}}\Rightarrow y(n)-\frac{5}{6}y(n-1)+\frac{1}{6}y(n-2)=w(n)$.

↳ $y(n)=w(n)+\frac{5}{6}y(n-1)-\frac{1}{6}y(n-2)$ 注意系数的符号!!!

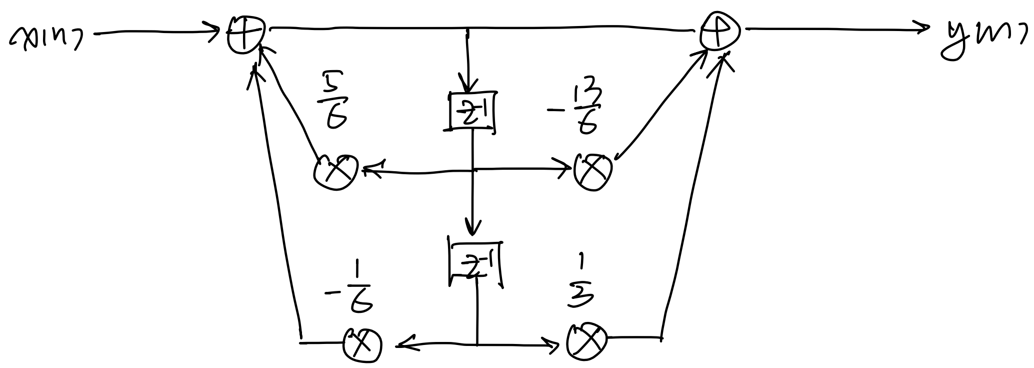
(实现 $-\frac{13}{6}x(n-1)$ 需要两个延迟器. 一个乘法器; 实现 $\frac{1}{3}x(n-2)$ 需要2个延迟器一个乘法器).

⇒(框图)直接I型.



↳ 系统①和②可交换顺序. 延迟器可共用.

直接II型:

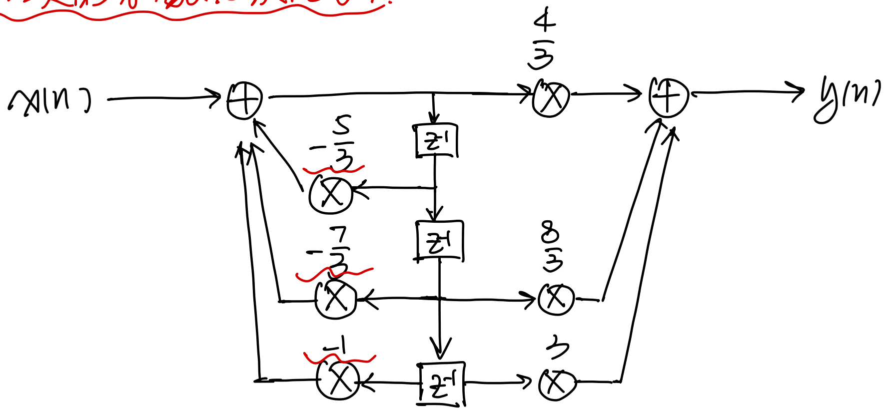


① $3y(n)+5y(n-1)+7y(n-2)+3y(n-3)=4x(n)+8x(n-2)+9x(n-3)$.

$\Rightarrow y(n)+\frac{5}{3}y(n-1)+\frac{7}{3}y(n-2)+y(n-3)=\frac{4}{3}x(n)+\frac{8}{3}x(n-2)+3x(n-3)$.

△ y(n)项的系数必须化为1.

框图:



注意y这边的系数除y(n)之外变为相反数!!!

注意方向. y反向. x正向

→该项系数必须为1

② $y(n)+6y(n-1)+11y(n-2)+6y(n-3)=x(n)+4x(n-1)$

$\Rightarrow H(z)=\frac{1+4z^{-1}}{1+6z^{-1}+11z^{-2}+6z^{-3}}$ (直接型).

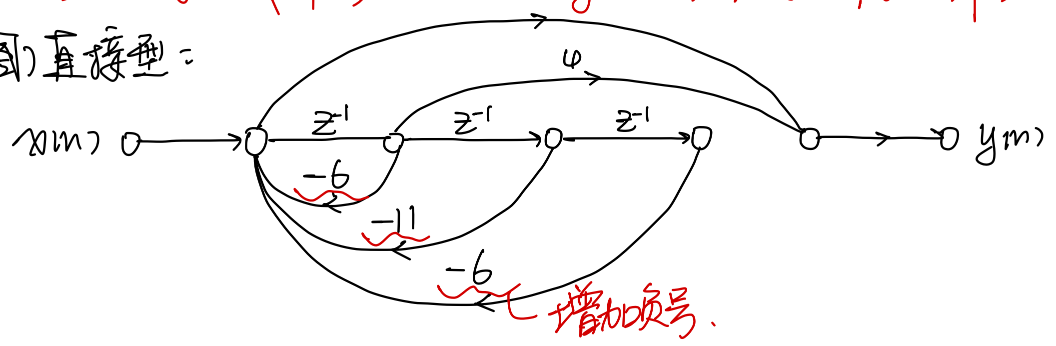
$H(z)=\frac{z}{z-1}\cdot\frac{z}{z+2}\cdot\frac{z+4}{z+3}=\frac{1}{1+z^{-1}}\cdot\frac{1}{1+2z^{-1}}\cdot\frac{1+4z^{-1}}{1+3z^{-1}}$.(级联型).

$H(z)=1+\frac{\frac{3}{2}}{z+1}+\frac{-8}{z+2}+\frac{\frac{9}{2}}{z+3}=1+\frac{\frac{3}{2}z^{-1}}{1+z^{-1}}+\frac{-8z^{-1}}{1+2z^{-1}}+\frac{\frac{9}{2}z^{-1}}{1+3z^{-1}}$ (并联型).

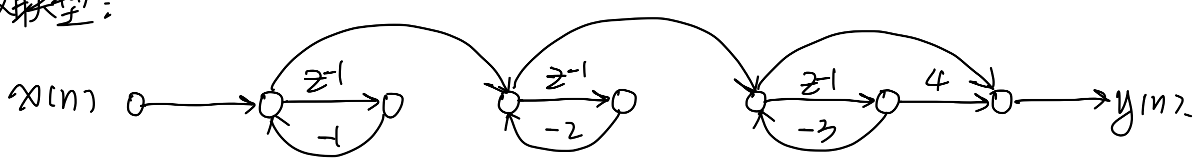
抄

H(z)的分子对应x(前向). 分母对应y(反向). ⇒ 系数除"1"外变为相反数.

(流图)直接型:



级联型:



2. 连续时间LTI系统的实现.

积分器. 乘法器. 加法器. (s是微分器. s^{-1}是积分器).

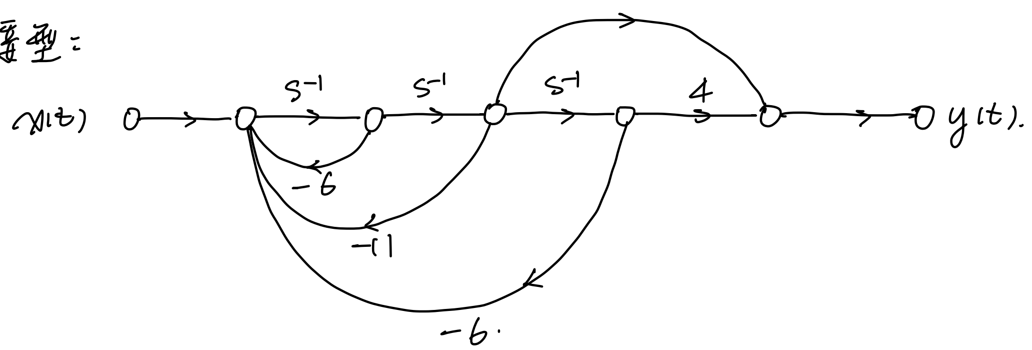
0 $y'''(t)+6y''(t)+11y'(t)+6y(t)=x'(t)+4x(t)$.

$\Rightarrow H(s)=\frac{s+4}{s^3+6s^2+11s+6}=\frac{s^{-2}+4s^{-3}}{1+6s^{-1}+11s^{-2}+6s^{-3}}$ (直接型).

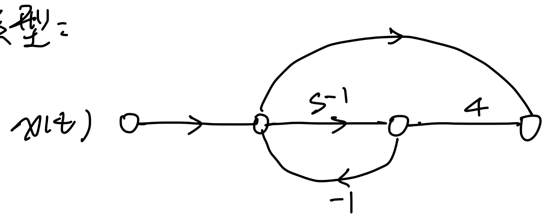
$H(s)=\frac{\frac{3}{2}s^{-1}}{1+s^{-1}}+\frac{-2s^{-1}}{1+2s^{-1}}+\frac{\frac{1}{2}s^{-1}}{1+3s^{-1}}$ (并联型)

$H(s)=\frac{1+4s^{-1}}{1+s^{-1}}\cdot\frac{s^{-1}}{1+2s^{-1}}\cdot\frac{s^{-1}}{1+3s^{-1}}$. (级联型).

直接型:

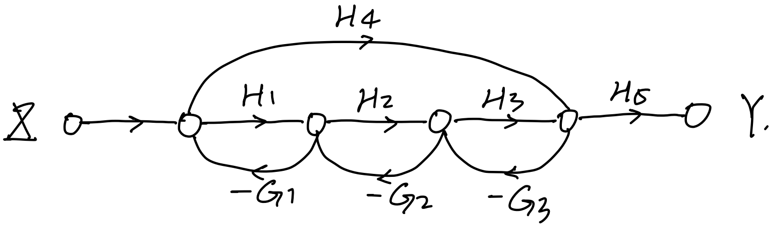


级联型:



梅森公式.

○ 求下图所示系统的转移函数.



共有环路：① $H_1 \to -G_1$. ② $H_2 \to -G_2$

③ $H_3 \to -G_3$ ④ $H_4 \to -G_3 \cdot G_2 \cdot G_1$.

只有一对互不接触的环路：①. ③. $\to (-G_1H_1)\cdot(-G_3H_3) = G_1H_1G_3H_3$

$$\Delta = 1-(-G_1H_1-G_2H_2-G_3H_3-G_1G_2G_3H_4)+G_1H_1G_3H_3.$$

$$\hookrightarrow \Delta = 1+G_1H_1+G_2H_2+G_3H_3+G_1G_2G_3H_4+G_1H_1G_3H_3$$

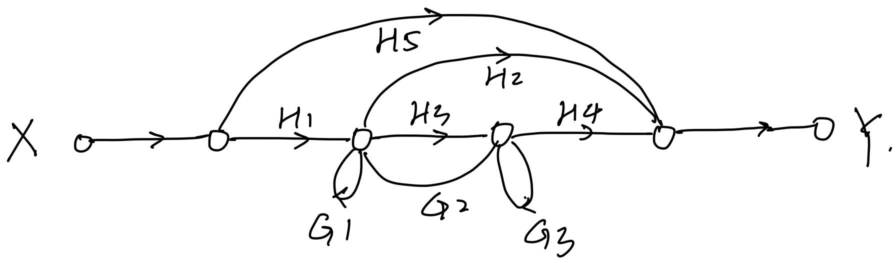
前向通路有两条：第一条，增益为 $g_1=H_1H_2H_3H_5$，与各环路接触. 则 $\Delta_1=1$.

第二条，增益为 $g_2=H_4H_5$，环路②与其不接触. 则 $\Delta_2=1-(-G_2H_2)=1+G_2H_2$

$$\Rightarrow H=\frac{g_1\Delta_1+g_2\Delta_2}{\Delta}=\frac{H_1H_2H_3H_5+H_4H_5(1+G_2H_2)}{1+G_1H_1+G_2H_2+G_3H_3+G_1G_2G_3H_4+G_1H_1G_3H_3}$$

○ 已知系统函数为：$H=\frac{Y}{X}=\frac{H_5[1-(G_1+G_2H_3+G_3)+G_1G_3]+H_1H_2(1-G_3)+H_1H_3H_4}{1-(G_1+G_2H_3+G_3)+G_1G_3}$. 求流图

$\Rightarrow$



26. 某两阶 LTI 因果稳定系统，其系统函数 $H(s)$ 为有理函数，$h(t)$ 为系统的单位冲激响应。以下四点是关于系统的信息：1)当系统的输入为 $e(t)=\varepsilon(t)$ 时，其稳态响应为 $(-\frac{1}{3})$；2)当系统的输入为 $e(t)=e^{t}\varepsilon(t)$ 时，其输出 $r(t)$ 绝对可积；3)设 $f(t)=\frac{d^2h(t)}{dt^2}+5\frac{dh(t)}{dt}+6h(t)$，其拉氏变换 $F(s)$ 的收敛域为 $-\infty<\mathrm{Re}[s]<+\infty$；4) $H(s)$ 有且仅有一个零点。试求：

(1) 系统函数 $H(s)$ 并确定其收敛域；

(2) 画出直接形式的系统框图。

4．以下关于 Fourier 分析的论述中不正确的是________

(A) 离散时间序列的 Fourier 变换结果一定是以 2π 为周期的；

(B) 不满足绝对可积条件的信号 Fourier 变换一定不存在；

(C) 在均方误差最小的准则下，傅里叶级数是对周期信号的最佳近似；

(D) 持续时间时有限的信号，频域上占据的频谱宽度必定是无限的。

5．以下关于拉氏变换 $F(s)$ 的极点位于 s 平面的位置与对应的函数 $f(t)$ 的关系的叙述中，正确的是________

(A) 当 $F(s)$ 的仅有的两个极点关于 $j\omega$ 轴对称时，则 $f(t)$ 也是偶函数；

(B) 若 $f(t)$ 为实函数，则 $F(s)$ 的所有极点一定都位于实轴上；

(C) 当 $F(s)$ 的一阶极点越远离实轴，则 $f(t)$ 对应的振幅增长越快；

(D) 当 $F(s)$ 的一阶极点实部越大，则 $f(t)$ 对应的振幅振荡频率越高；

8. 若某基波周期为 1 的周期信号 $x(t)$ 的傅立叶级数系数为 $a_k=\begin{cases}1, & k=\pm1\\ 0, & 其他\end{cases}$，则 $x(t)$ 为________

(A) $\sin(2\pi t)$　(B) $2\cos(2\pi t)$　(C) $2\sin(2\pi t)$　(D) $\cos(2\pi t)$

15. 已知 $x[n]=\begin{cases}a^n, 0\le n\le N-1\\ 0, \quad Otherwise\end{cases}$，其中 $a>0$，则 $X(z)$ 的收敛域(ROC)包括________

(A) $|z|>a$　(B) 全部 z　(C) 除 $z=0$ 外的全部 z　(D) 除 $z=a$ 外的全部 z

23. 一周期实信号 $f(t)$ 只含有基波分量和 3 次谐波分量，且有 $|\boldsymbol{F}_1|=2, |\boldsymbol{F}_3|=1, \phi_1=-\pi/2, \phi_3=\pi/2$.

（1） 画出该信号的指数形式的幅度频谱和相位频谱；

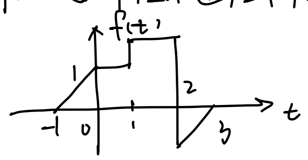
（2） 写出三角形式的傅里叶级数；

（3） 判断信号的对称性；

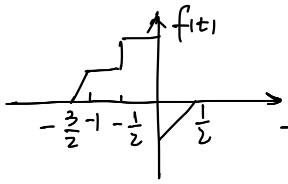
（4） 求信号的平均功率。

Part 1

1. $f(t)$ 如下图, 画出 $f(2t+2)$.

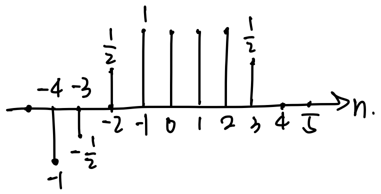


$\Rightarrow$

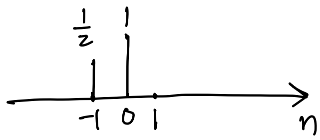


(左加右减).

2. $f(n)$ 如下图. 画出 $f(3n+1)$.

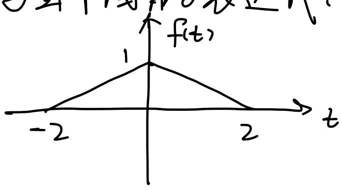


$\Rightarrow$

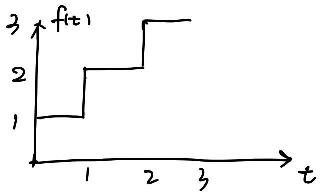


(注意离散信号和连续信号区别)

3. 写出下图的表达式.



(a)



(b)

(a) $f(t) = (1+\frac{1}{2}t)[u(t+2)-u(t)] + (1-\frac{1}{2}t)[u(t)-u(t-2)]$

$= (1-\frac{1}{2}|t|)[u(t+2)-u(t-2)]$.

(b) $f(t) = u(t)+u(t-1)+u(t-2)$.

3(g).

Part 2.

2. 由 $x(t)=2e^{-2t}u(t)$ 得: $\frac{d^2x(t)}{dt^2}-2\frac{dx(t)}{dt}+x(t)=18e^{-2t}u(t)$

特征方程: $r^2+6r+5=0$ 得: $r_1=-1$. $r_2=-5$.

则设齐次解为 $y_h(t)=c_1e^{-x}+c_2e^{-5x}$. 特解为 $y_p(t)=Ae^{-2t}$.

代入方程解得 $A=-6$ 即 $y_p(t)=-6e^{-2t}$.

代入 $y(0^-)=y(0^+)=-4$, $y'(0^-)=y'(0^+)=6$ 得零输入响应为 $y_{zi}(t)=(-\frac{7}{2}e^{-x}-\frac{1}{2}e^{-5x})u(t)$.

全响应 $y(t)=(c_1e^{-x}+c_2e^{-5x}-6e^{-2t})u(t)$. 代入解出 $c_1.c_2$ 得:

$y(t)=(e^{-t}+e^{-5t}-6e^{-2t})u(t)$. 则零状态响应 $y_{zs}(t)=(\frac{7}{2}e^{-t}+\frac{1}{2}e^{-5t}-6e^{-2t})u(t)$.

3.(b). $f_1(t)=f_2(t)=u(t+\tau)-u(t-\tau)$.

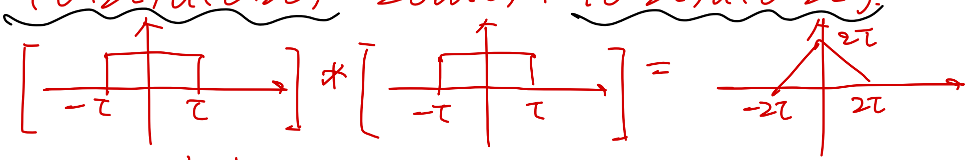
$f_1(t)*f_2(t)=[u(t+\tau)-u(t-\tau)]*[u(t+\tau)-u(t-\tau)]$

方法一: 原式 $=u(t+\tau)*u(t+\tau)-2u(t+\tau)u(t-\tau)+u(t-\tau)*u(t-\tau)$

$=[u(t)*u(t)]\big|_{t=t+2\tau}-2u(t)*u(t)+[u(t)*u(t)]\big|_{t=t-2\tau}$.

$=\underbrace{(t+2\tau)u(t+2\tau)}-2tu(t)+\underbrace{(t-2\tau)u(t-2\tau)}$.

方法二: 原式 =



$$=\begin{cases}2\tau(1-\frac{|t|}{2\tau}), & |t|\le 2\tau.\\ 0, & |t|>2\tau.\end{cases}$$

注: 注意方法一中 $u(t)*u(t)=\underline{tu(t)}$ 而不是 t !!!

(c) $f_1(t)=f_2(t)=u(t)-u(t-\tau)$.

$f_1(t)*f_2(t)=[u(t)-u(t-\tau)]*[u(t)-u(t-\tau)]$.

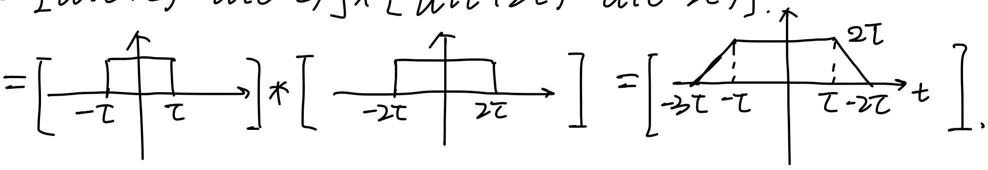
$=u(t)*u(t)-2u(t)*u(t-\tau)+u(t-\tau)*u(t-\tau)$.

$=tu(t)-2(t-\tau)u(t-\tau)+(t-2\tau)u(t-2\tau)$.

$$=\begin{cases}\tau(1-\frac{|t-\tau|}{\tau}), & |t-\tau|\le\tau\\ 0, & |t-\tau|>\tau.\end{cases}$$

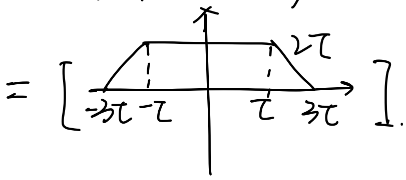
(d). $f_1(t)=u(t+\tau)-u(t-\tau)$. $f_2(t)=u(t+2\tau)-u(t-2\tau)$.

$f_1(t)*f_2(t)=[u(t+\tau)-u(t-\tau)]*[u(t+2\tau)-u(t-2\tau)]$.



或者 $= u(t+\tau)*u(t+2\tau)-u(t+\tau)*u(t-2\tau)-u(t-\tau)*u(t+2\tau)+u(t-\tau)*u(t-2\tau)$

$=(t+3\tau)u(t+3\tau)-(t-\tau)u(t-\tau)-(t+\tau)u(t+\tau)+(t-3\tau)u(t-3\tau)$.



9??

(g) $f_1(t)=u(t)-u(t-4)$. $f_2(t)=\sin\pi t\cdot u(t)$.

$f_1(t)*f_2(t)=[u(t)-u(t-4)]*\sin\pi t\, u(t)$

$\mathcal{F}[u(t)-u(t-4)]=16Sa(2w)e^{-2jw}$

$\mathcal{F}[\sin\pi t\, u(t)]=j\pi[\delta(w+\pi)-\delta(w-\pi)]*[\pi\delta(w)+\frac{1}{jw}]$

$=[j\pi^2+\frac{\pi}{w}][\delta(w+\pi)-\delta(w-\pi)]$.

则 $\frac{1}{2\pi}\mathcal{F}_1\cdot\mathcal{F}_2=16Sa(2w)e^{-2jw}[\delta(w+\pi)-\delta(w-\pi)][j\pi^2+\frac{\pi}{w}]$

$=$

5.(b) $y(t)=h(t)*x(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}h(t-\tau)x(\tau)d\tau$

又 $y(t)=\int_{-\infty}^{t}e^{-(t-\tau)}x(\tau-2)d\tau=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(t-\tau)}u(t-\tau)x(\tau-2)d\tau=e^{-t}u(t)*x(t-2)$

$=e^{-(t-2)}u(t-2)*x(t)$. 则 $h(t)=e^{-(t-2)}u(t-2)\to H(jw)=\frac{1}{j(w+2)+1}$

$x'(t)=\delta(t+1)-\delta(t-2)$

则 $y(t)=h(t)*x(t)=\int_{-\infty}^{t}h(t)*x'(t)dt$

$h(t)*x'(t)=e^{-(t-1)}u(t-1)-e^{-(t-4)}u(t-4)$.

1°. 当 $t\le 1$ 时. $y(t)=0$.

2°. 当 $1<t\le 4$ 时. $y(t)=\int_1^t e^{-(\tau-1)}d\tau=1-e^{-(t-1)}$.

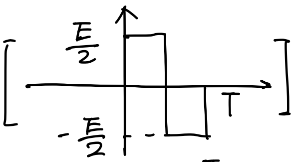
3°. 当 $t>4$ 时. $y(t)=\int_1^t e^{-(\tau-1)}d\tau+\int_4^t e^{-(\tau-4)}d\tau=e^{-(t-4)}-e^{-(t-1)}$.

8. (2) $y(n)-y(n-1)-2y(n-2) = x(n)+2x(n-2).$

12. $h(n) = h_1(n) * [h_2(n) - h_3(n)]$

$= u(n) * [\delta(n) - \delta(n-N)] = u(n) - u(n-N).$

Part 3.   (b) 7(a)(d)(e)(f)

1. 令 $x_0(t) = \Big[$  $\Big]$. 则 $x_0'(t) = \frac{E}{2}\delta(t) - E\delta(t-\frac{T}{2}) + \frac{E}{2}\delta(t-T)$.

则 $X_0(j\omega) = \frac{1}{j\omega}[\frac{E}{2} - Ee^{-\frac{T}{2}j\omega} + \frac{E}{2}e^{-Tj\omega}]$

$x(t)$ 的傅立叶级数为 $X(j\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n e^{-jn\omega_s}$. 其中 $\omega_s = \frac{2\pi}{T}$.

$F_n = \frac{1}{T}X_0(j\omega)|_{\omega=n\omega_s} = \frac{1}{j2\pi n}[\frac{E}{2} - Ee^{-jn\pi} + \frac{E}{2}e^{-j2n\pi}]$.

$\Rightarrow X(j\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{j2n\pi}[\frac{E}{2} - Ee^{-jn\pi} + \frac{E}{2}e^{-j2n\pi}]e^{-j\frac{2\pi}{T}n}$.

3. (b) $f(t) = e^{-3|t|}\sin 2t$.

其中 $f_1(t) = e^{-3|t|} = e^{-3t}u(t) + e^{3t}u(-t)$. $F_1(j\omega) = \frac{1}{j\omega+3} - \frac{1}{j\omega-3} = \frac{6}{\omega^2+9}$.

$f_2(t) = \sin 2t \Rightarrow F_2(j\omega) = j\pi[\delta(\omega+2) - \delta(\omega-2)]$

则 $F(j\omega) = \frac{1}{2\pi}F_1(j\omega) * F_2(j\omega) = \frac{j}{2}\cdot\frac{6}{\omega^2+9} * [\delta(\omega+2) - \delta(\omega-2)]$

$= \frac{j}{2}[\frac{6}{(\omega+2)^2+9} - \frac{6}{(\omega-2)^2+9}]$.

6. (a) $F(\omega) = \frac{2\sin[3(\omega-2\pi)]}{(\omega-2\pi)} = 6Sa[3(\omega-2\pi)]$.

令 $F'(\omega) = 6Sa(3\omega)$. 则 $f(t) = f'(t)e^{j2\pi t}$.

$f'(t) = \mathcal{F}^{-1}[F'(\omega)] = u(t+3) - u(t-3)$, 则 $f(t) = [u(t+3) - u(t-3)]e^{j2\pi t}$.

即 $f(t) = \begin{cases} e^{j2\pi t}, & |t|<3 \\ 0, & |t|>3 \end{cases}$

$\underline{-2\omega_0\cos\omega_0 t\, u(t) + 2\sin\omega_0 t\,[\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}]}$.

10. (a) $X(j\omega) = 2\pi\delta(\omega-1)$. $Y(\omega) = H(\omega)X(\omega) = -4\pi j\delta(\omega-1)$.

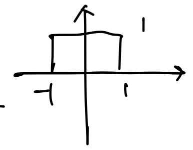
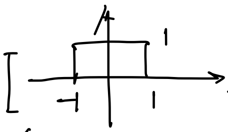
则 $y(t) = -2je^{jt}$.

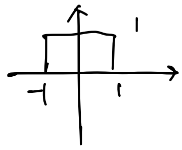
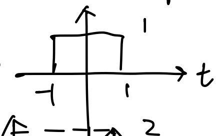
(b) $y(t) = -2\omega_0(\cos\omega_0 t)u(t)$.

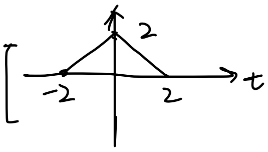
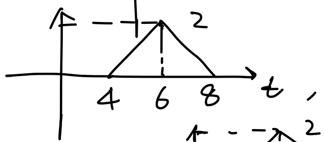
16. (a)

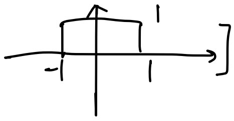
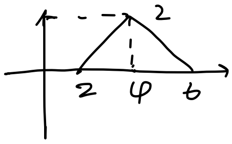
期中练习.

一、
1. a　2. b.　3. a　4. d　5. d　6. b　7. b
8. c.　9. a　10. b.　11. d　12. b.　13. a　14. C
15. a　16. a.　17. b　18. b　19. b　20. d.

二.
1. (1) $x(t) = [$  $]|_{t=t-3}$　$h_1(t) = [$  $]|_{t=t-3}$.

则 $y_1(t) = h_1(t) * x(t) = [$  $*$  $]|_{t=t-6}$

$= [$  $]|_{t=t-6} =$ 

(2) $h_2(t) = [$  $]|_{t=t-1}$. 则 $y_2(t) =$ 

2. (1) 否.　(2) $y(t) = x(t) * h(t) = x(t) * x^*(T-t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) x^*(T-(t-\tau)) d\tau$

$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) x^*(T-t+\tau) d\tau$, 则当 $t=T$ 时取到最大值.

三. 1. 由 $r^2-r-2=0$ 得 $r_1=2, r_2=-1$. 设 $y_h(n) = C_1 \cdot 2^n + C_2(-1)^n$.

代入 $y(-1)=2$. $y(-2)=-\frac{1}{2}$ 得零输入响应 $y_{zp}(n) = 2^{n+1} + (-1)^{n+1}$

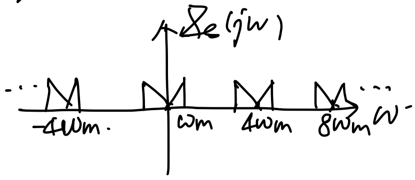
设 $y_p(n) = p$. 代入方程得 $p = -\frac{1}{2}$.

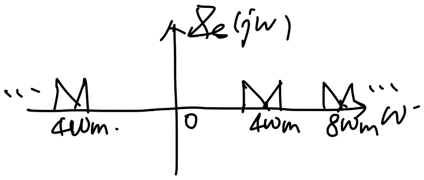
则全响应 $y(n) = C_1 \cdot 2^n + C_2(-1)^n - \frac{1}{2}$. 代入 $y(-1)=2$. $y(-2)=-\frac{1}{2}$ 得 $y(n) = \frac{10}{3} \cdot 2^n - \frac{5}{6} \cdot (-1)^n - \frac{1}{2}$

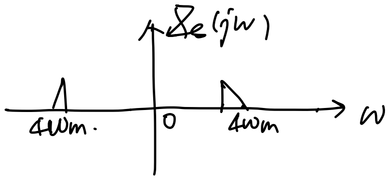
$\Rightarrow y_{zs}(n) = y(n) - y_{zp}(n) = [\frac{4}{3} \cdot 2^n + \frac{1}{6} \cdot (-1)^n - \frac{1}{2}] u(n)$.

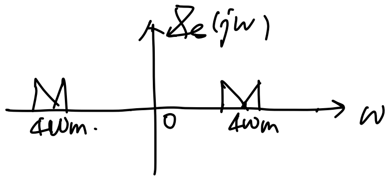
2. $x(n) = u(n-2)$ 时. $y_{zs}(n) = [\frac{4}{3} \cdot 2^{n-2} + \frac{1}{6} \cdot (-1)^{n-2} - \frac{1}{2}] u(n-2)$.

则 $y(n) = [2^{n+1} + (-1)^{n+1}] u(n) + [\frac{4}{3} \cdot 2^{n-2} + \frac{1}{6} \cdot (-1)^{n-2} - \frac{1}{2}] u(n-2)$.

四.
1. $X_s(j\omega) = \frac{1}{2\pi} X(j\omega) S(j\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(\omega - n\omega_s)$, $\omega_s = 4\omega_m$. $\Rightarrow$ 

$Y(j\omega) \Rightarrow$ 

3. $Y(j\omega) =$ 

2. $Y(j\omega) \Rightarrow$ 

$\Rightarrow y(t) = \frac{1}{\pi} x(t) \cos(4\omega_m t)$

4. $y(t) \cdot A\cos\omega_0 t = \frac{A}{\pi} x(t) \cos^2(4\omega_m t)$

$= \frac{A}{2\pi} x(t) [\cos(8\omega_m t) + 1]$

此时 $\omega_m \le \omega_{c2} \le 7\omega_m$.