概率统计

Δ条件概率（P20 例1.3.1）

一口袋内有12个球，9个白球，3个黑球，每次从口袋中任取4个球作为一组，不再放回，共取3组，求3个黑球在同一组的概率。

解：设 $A=\{$3个黑球在同一个组$\}$，$A_i=\{$3个黑球在第i组$\}$，则 $A=A_1\bar{A}_2\bar{A}_3\cup\bar{A}_1A_2\bar{A}_3\cup\bar{A}_1\bar{A}_2A_3$.

$$\Rightarrow P(A)=P(A_1\bar{A}_2\bar{A}_3\cup\bar{A}_1A_2\bar{A}_3\cup\bar{A}_1\bar{A}_2A_3)$$

$$=P(A_1\bar{A}_2\bar{A}_3)+P(\bar{A}_1A_2\bar{A}_3)+P(\bar{A}_1\bar{A}_2A_3)$$

$$=P(A_1)P(\bar{A}_2|A_1)P(\bar{A}_3|A_1\bar{A}_2)$$

$$\boxed{+P(A_2)P(\bar{A}_1|A_2)P(\bar{A}_3|\bar{A}_1A_2)+P(A_3)P(\bar{A}_1|A_3)P(\bar{A}_2|\bar{A}_1A_3)}\quad (\times)$$

$$+P(\bar{A}_1)P(A_2|\bar{A}_1)P(\bar{A}_3|\bar{A}_1A_2)\quad (\checkmark)$$

$$+P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2|\bar{A}_1)P(A_3|\bar{A}_1\bar{A}_2)$$

$$=\frac{C_3^3C_9^1}{C_{12}^4}\times\frac{C_8^4C_4^4}{C_8^4}\times\frac{C_4^4}{C_4^4}+\frac{C_9^4}{C_{12}^4}\times\frac{C_3^3C_5^1}{C_8^4}\times\frac{C_4^4}{C_4^4}+\frac{C_9^4}{C_{12}^4}\times\frac{C_5^4}{C_8^4}\times\frac{C_3^3C_1^1}{C_4^4}\approx 0.0545.$$

写条件概率算式时，一定按照实际发生的先后顺序写，先发生的作条件

例 每100件产品为一批，已知每批产品中的次品数不超过4件，每批产品中有 i 件次品的概率为

i	0	1	2	3	4
P	0.1	0.2	0.4	0.2	0.1

从每批产品中不放回地取10件进行检验，若发现有不合格产品，则认为这批产品不合格，否则就认为这批产品合格. 求

（1）一批产品通过检验的概率

（2）通过检验的产品中恰有 i 件次品的概率

（3）没通过检验的产品，恰有几件次品的概率大？

(1) 一批产品通过的概率与其次品数量有关，而其次品的数量构成一个完备事件组 ⇒ 全概率公式

令A为一批产品通过，B_i表示其有i件次品.

$$\text{则 } P(A)=\sum_{i=0}^{4}P(B_i)P(A|B_i)$$

$$=0.1\times1+0.2\times\frac{C_{99}^{10}}{C_{100}^{10}}+0.4\times\frac{C_{98}^{10}}{C_{100}^{10}}+0.2\times\frac{C_{97}^{10}}{C_{100}^{10}}+0.1\times\frac{C_{96}^{10}}{C_{100}^{10}}=0.814.$$

(2) 已知"后果"求"原因" ⇒ Bayes公式

$$P(B_i|A)=\frac{P(AB_i)}{P(A)}=\frac{P(B_i)P(A|B_i)}{\sum_{j=0}^{4}P(B_j)P(A|B_j)}=\frac{P(B_i)\times\frac{C_{100-i}^{10}}{C_{100}^{10}}}{0.814},\ i=0,1,2,3,4$$

(3) 分别取 $i=1,2,3,4$ 并比较.

$i=0$: $P(0)=0.123$. $i=1$: $P(1)=0.221$

$\underline{i=2: P(2)=0.397}$ $i=3$: $P(3)=0.179$. $i=4$: $P(4)=0.080$

案例2 某高校共有10000名学生，据一段时间的统计调查显示，大约15%的学生中午选择在第一食堂就餐，那么食堂管理部门至少应该设置多少座位，才能保证90%的学生中午就餐时有座位？

将其看作进行10000次贝努利实验，每次实验结果为"选"和"不选"，"选"的概率为$p=\frac{15}{10000}$ ⇒ 二项分布(n重贝努利实验)

设立n个座位，则

$$P(X\le n)=\sum_{k=0}^{n} C_{10000}^{k}\, 0.15^{k}\, 0.85^{10000-k} \geq 0.90$$

例 设有两门高射炮独立射击，每一门击中飞机的概率都是0.6，求下列事件的概率：（1）同时发射一发炮弹而击中飞机的概率是多少？

（2）若有一架敌机入侵领空，欲以99%以上的概率击中它，问至少需要多少门高射炮？

(1) A、B两门炮击中为独立事件 $\Rightarrow P(AB)=P(A)P(B)$

设 A_1, A_2 分别表示两门炮独立击中飞机

① $\Rightarrow P(\text{击中飞机}) = P(A_1 \cup A_2) = P(\overline{\bar{A_1} \cap \bar{A_2}}) = 1 - P(\bar{A_1}\bar{A_2})$

$= 1 - P(\bar{A_1})P(\bar{A_2}) = 1 - 0.4 \times 0.4 = 0.84$

② $\Rightarrow P(\text{击中飞机}) = P(A_1\bar{A_2}) + P(\bar{A_1}A_2) + P(A_1A_2)$

$= P(A_1)P(\bar{A_2}) + P(\bar{A_1})P(A_2) + P(A_1)P(A_2)$

$= 0.6 \times 0.4 + 0.4 \times 0.6 + 0.6 \times 0.6 = 0.84$

(2) (1)问中是两门炮，概率为0.84，此问同样的公式

设需要n门炮，则：

$P(\text{击中飞机}) = P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = P(\overline{\bigcap_{i=1}^{n} \bar{A_i}}) = 1 - P(\bigcap_{i=1}^{n} \bar{A_i})$

$= 1 - \prod_{i=1}^{n} P(\bar{A_i}) = 1 - \prod_{i=1}^{n}(1 - P(A_i))$

$= 1 - 0.4^n > 0.99 \Rightarrow n \geq 6$

例 一门大炮对目标进行射击，假定此目标必须被击中r次才能被摧毁. 若每次击中目标的概率为 $p\ (0<p<1)$, 且各次射击相互独立，一次一次地射击直到摧毁目标为止. 求所需射击次数X的概率分布.

⇒ 帕斯卡分布

第X次射击就是射中的第r次，则所讨论的是射击的前(X-1)次内射中(r-1)次所需的次数和射击X次内射中r次的所需次数是相同的.

$$P(X=k)=C_{k-1}^{r-1}p^{r-1}(1-p)^{k-r},\quad k=r,r+1,\cdots$$

例 设有同类型设备90台，每台工作相互独立，每台设备发生故障的概率都是0.01. 在通常情况下，一台设备发生故障可由一个人独立维修，每人同时也只能维修一台设备.

(1) 问至少要配备多少维修工人，才能保证当设备发生故障时不能及时维修的概率小于0.01?

(2) 问3个人共同负责90台还是3个人各自独立负责30台设备发生故障不能及时维修的概率低?

⇒ "相互独立"：二项分布 $\xrightarrow{np\text{满足一定条件时}}$ Possion分布

(1) 问题要转化为已知二项分布的概率，求满足条件的 C_n^k 中的k值.

用X表示故障台数，则 $X \sim B(90, 0.01)$

设要配备N人，则求满足 $P(X>N) < 0.01$ 的N

$$\Rightarrow P(X>N) = \sum_{k=N+1}^{90} C_{90}^{k}\, 0.01^{k}\, 0.99^{90-k} \quad (\text{无法直接计算})$$

用Possion近似计算：$\lambda = np = 90 \times 0.01 = 0.9$

$$\text{则 } P(X>N) \approx \sum_{k=N+1}^{90} e^{-0.9}\frac{0.9^k}{k!} = \sum_{k=0}^{90} e^{-0.9}\frac{0.9^k}{k!} - \sum_{k=0}^{N} e^{-0.9}\frac{0.9^k}{k!}$$

$$\approx 1 - \sum_{k=0}^{N} e^{-0.9}\frac{0.9^k}{k!} < 0.01 \quad \text{即} \sum_{k=0}^{N} e^{-0.9}\frac{0.9^k}{k!} > 0.99$$

查表得：$N \geq 4$.

(2) 1°. 三个人共同负责90台发生故障不能及时维修的概率为

$$P(X>3) \approx \sum_{k=4}^{90} e^{-0.9}\frac{0.9^k}{k!} \approx 1 - \sum_{k=0}^{3} e^{-0.9}\frac{0.9^k}{k!} = 0.0135$$

2°. 用Y表示30台故障数，则 $Y \sim B(30, 0.01)$

设A_i表示第i组发生了出现故障不能及时维修

$$P(A_i)=P(Y>2)\approx\sum_{k=2}^{30}e^{-0.3}\frac{0.3^k}{k!}\approx 1-\sum_{k=0}^{1}e^{-0.3}\frac{0.3^k}{k!}=0.0369$$

$$P=P(A_1\cup A_2\cup A_3)=1-P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)P(\bar{A}_3)$$

$$=1-(1-0.0369)^3=0.1067>0.0135.$$

例 2.3.3 设顾客到达某美容院后需要等候的服务时间 X 服从参数为 0.1 的指数分布，若顾客等候时间超过 20 min 就会离开.

(1) 试求该美容院于营业时间内，在 50 个顾客中因等候时间超过 20 min 没有等到服务而离开的人数的概率分布；

(2) 试求在 50 个顾客中没有等到服务而离开的人数大于 1 的概率.

此类题目均为某种随机变量分布+二项分布的形式

(1) 对单个人而言，可看作单次实验. 设单次实验因等候时间超过 20min 的概率为 p. 则：

$$f_X(x)=\begin{cases}0.1e^{-0.1x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases};\quad F_X(x)=\begin{cases}1-e^{-0.1x}, & x>0\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$$

$$p=P(X>20)=1-P(X\le 20)=1-F_X(20)=e^{-2}.$$

对 50 次独立重复实验：设离开人数为 Y 则：

$$P(Y=k)=p_k=C_{50}^{k}p^{k}(1-p)^{50-k}=C_{50}^{k}e^{-2k}(1-e^{-2})^{50-k},\ k=0,1,2\ldots$$

(2)

$$P(Y>1)=1-P(Y=0)-P(Y=1)$$
$$=1-C_{50}^{0}e^{0}(1-e^{-2})^{50}-C_{50}^{1}e^{-2}(1-e^{-2})^{49}.$$

△ 对于 $\Phi(x) \sim N(0,1)$. $\Phi(x>3) \approx 1$, $\Phi(x<-3) \approx 0$.

已知随机变量 $X \sim N(8,16)$. 求 $P(|X| \leq 10)$.

$$\Rightarrow P(|X| \leq 10) = P(-10 \leq X \leq 10) = F(10) - F(-10)$$

$$= \Phi\left(\frac{1}{2}\right) - \underbrace{\Phi\left(-\frac{9}{2}\right)}_{\approx 0}$$

$$\approx \Phi\left(\frac{1}{2}\right) = 0.6915$$

△将二项分布近似为泊松分布简化计算

设测量的随机误差 $X\sim N(0,10^2)$，试求在200次独立重复测量中，至少有4次测量误差的绝对值大于20的概率。

A 连续型随机变量的函数的分布

设随机变量 $X \sim U(-2,3)$. 记 $Y_1 = \begin{cases} -1, & X<0 \\ 1, & X \geq 0 \end{cases}$ $Y_2 = \frac{X+1}{2}$. 求:

(1) Y_1 的分布律

(2) Y_2 的概率密度

⇒ (1) Y_1 为离散型随机变量

$$P(Y_1=-1) = P(X<0) = F(0) = \frac{0-(-2)}{3-(-2)} = \frac{2}{5}.$$

$$P(Y_1=1) = 1-P(Y_1=-1) = \frac{3}{5}$$

$$\therefore P(Y_1) = \begin{cases} \frac{2}{5}, & X<0 \\ \frac{3}{5}, & x \geq 0. \end{cases}$$

(2) Y_2 为连续型随机变量

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P\left(\frac{X+1}{2} \leq y\right) = P(X \leq 2y-1)$$

$$= F_X(2y-1) = \frac{(2y-1)-(-2)}{3-(-2)} = \frac{2y+1}{5} \Rightarrow (2y-1) \in (-2,3) \Rightarrow y \in \left(-\frac{1}{2}, 2\right)$$

当 $2y-1 \leq -2$ 或 $2y-1 \geq 3$ 即 $y \leq -\frac{1}{2}$, $y \geq 2$ 时 $F_X(2y-1)=0$

$$\therefore F_Y(y) = \begin{cases} \frac{2y+1}{5}, & -\frac{1}{2}<y<2 \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

$$\therefore f_Y(y) = \begin{cases} \frac{2}{5}, & -\frac{1}{2}<y<2 \\ 0. & \text{其他}. \end{cases}$$

设随机变量 $X\sim N(0,1)$，$\Phi(x)$ 为 X 的分布函数，

(1) 求 $Y_1=X^2$ 的概率密度

(2) 求 $Y_2=e^{-X}$ 的概率密度

(3) 求 $Y_3=X+|X|$ 的分布函数 $F_{Y_3}(y)$。

⇒ (1). $F_{Y_1}(y)=P(Y_1\le y)=P(X^2\le y)=P(-\sqrt{y}\le X\le\sqrt{y})$.

$\overset{y\ge0}{=}\Phi(\sqrt{y})-\Phi(-\sqrt{y})=2\Phi(\sqrt{y})-1.=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\sqrt{y}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt-1$

$\therefore f_{Y_1}(y)=F_{Y_1}'(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y}{2}}\cdot y^{-\frac{1}{2}}$.

当 $y<0$ 时. $f_{Y_1}(y)=0$.

$$\therefore f_{Y_1}(y)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y}{2}}\cdot y^{-\frac{1}{2}}, & y\ge0\\ 0, & y<0\end{cases}$$

(2) $F_{Y_2}(y)=P(Y_2\le y)=P(e^{-X}\le y)\overset{y\ge0}{=}P(X\ge-\ln y)$

$=1-\Phi(-\ln y)=\Phi(\ln y)=\frac{1}{y\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(\ln y)^2}{2}}$.

$\therefore f_{Y_2}(y)=F_{Y_2}'(y)=\frac{1}{y\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(\ln y)^2}{2}}$.

当 $y<0$ 时、$F_{Y_2}(y)=0$.

$$\therefore f_{Y_2}(y)=\begin{cases}\frac{1}{y\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(\ln y)^2}{2}}, & y\ge0.\\ 0. & y<0\end{cases}$$

(3) $F_{Y_3}(y) = P(Y_3 \le y) = P(X+|X| \le y)$

由 $|X| = \pm X$ 知 $X+|X| = 2X$ 或 0. $\begin{cases} 当 X\le 0 时, X+|X|=0 \\ 当 X\ge 0 时 \ X+|X|=2X \end{cases}$

$\therefore$ 当 $y<0$ 时, $F_{Y_3}(y) = P(X+|X| \le y) = 0$.

当 $y=0$ 时, $F_{Y_3}(y) = P(X+|X| \le 0) = P(X+|X|=0)$

$= P(X \le 0) = \Phi(0) = \frac{1}{2}$

当 $y>0$ 时, $F_{Y_3}(y) = P(X+|X| \le y)$

$= P(2X \le y) = P(X \le \frac{y}{2})$

$= \Phi(\frac{y}{2})$.

$\because \Phi(0) = \Phi(\frac{y}{2}) |_{y=0}$

$\therefore F_{Y_3}(y) = \begin{cases} \Phi(\frac{y}{2}), & y \ge 0 \\ 0, & y<0 \end{cases}$

例 设随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & |y|<x,0<x<1;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

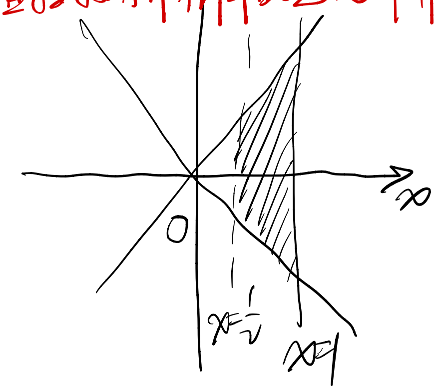
试求$P\left(X>\frac{1}{2}\middle|Y>0\right)$.

Δ 连续型随机变量的条件概率密度:

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)},\ -\infty<x<+\infty \quad (Y\text{取定某个值}y)$$

$$F_{X|Y}(x|y)=P(X\le x|Y=y)=\int_{-\infty}^{x}\frac{f(u,y)}{f_Y(y)}du.$$

而 $P(X\le x|Y\le y)=\dfrac{P(X\le x,Y\le y)}{P(Y\le y)}$ (直接按条件概率的思想计算)



$$P\left(X>\tfrac{1}{2}\middle|Y>0\right)=\frac{P(X>\frac{1}{2},Y>0)}{P(Y>0)}$$

$$=\frac{\int_{\frac{1}{2}}^{+\infty}dx\int_{0}^{+\infty}f(x,y)dy}{\int_{-\infty}^{+\infty}dx\int_{0}^{+\infty}f(x,y)dy}$$

$$=\frac{\int_{\frac{1}{2}}^{1}dx\int_{0}^{x}1\,dy}{\int_{0}^{1}dx\int_{0}^{x}1\,dy}$$

$$=\frac{3}{4}$$

(面积之比)

△离散型随机变量的条件分布律

随机变量X服从参数为0.6的(0-1)分布,在{X=0}及{X=1}的条件下Y的条件分布律为:

Y|X=0	1	2	3
P(Y|X=0)	0.25	0.5	0.25

Y|X=1	1	2	3
P(Y|X=1)	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$

求在{Y=1}及{Y≠1}条件下X的条件分布律.

$P(X=0)=0.4$. $P(X=1)=0.6$.

⇒

X\Y	1	2	3	P_X
0	0.1	0.2	0.1	0.4
1	0.3	0.1	0.2	0.6
P_Y	0.4	0.3	0.3	1

$\Rightarrow P(Y=1)=0.4 \quad P(Y\neq1)=0.6$.

X(Y=1)	0	1
P(X|Y=1)	0.25	0.75
	$\Downarrow$ $\frac{0.1}{0.4}$	$\Downarrow$ $\frac{0.3}{0.4}$

X(Y≠1)	0	1
P(X|Y≠1)	0.5	0.5
	$\Downarrow$ $\frac{0.3}{0.6}$	$\Downarrow$ $\frac{0.3}{0.6}$

Δ 二维随机变量分布的应用

某食品生产商、

△ 电梯问题

设一个办公楼有n层，m个人在一楼进入电梯，若每个人在任何一层楼出电梯的概率相同，直到电梯中的人走空为止，求电梯需停次数的数学期望。

设进行(n-1)次重复实验，则对每一次实验：

$$X=\begin{cases}1, & \text{有人出电梯} \quad P(X=1)=1-\left(1-\frac{1}{n-1}\right)^m \\ 0, & \text{没有一个人出电梯} \quad P(X=0)=\left(1-\frac{1}{n-1}\right)^m\end{cases}$$

由"每个人在任何一层出电梯的概率都相同"知 $P=\frac{1}{n-1}$。

则对第i层来说：

$$P(X_i=1)=\left(\frac{1}{n-1}\right)^m \quad (\times)$$

$$P(X_i=0)=\left(1-\frac{1}{n-1}\right)^m \quad \text{(没有一个人出电梯)}$$

$$P(X_i=1)=1-\left(1-\frac{1}{n-1}\right)^m$$

第一层楼一定为0，只对(n-1)层楼求E(X)：

$$E(X)=\sum_{i=2}^{n}X_iP(X_i)=\sum_{i=2}^{n}1\times P(X_i=1)=(n-1)\left[1-\left(1-\frac{1}{n-1}\right)^m\right]$$

△ 球入盒问题

将3个相同的球逐个独立随机地放入编号为1,2,3,4的4个盒子中，记X表示有球盒子的最小号码，求E(X)

⇒ 易知样本总数为 $4^3=64$ 种

$X=1$ 有 $4\times4+4\times3+3\times3=37$ 种 $=C_3^1\times3^2+C_3^2\times3+C_3^3$

$X=2$ 有 $3\times3+3\times2+2\times2=19$ 种 $=C_3^1\times2^2+C_3^2\times2+C_3^3$

$X=3$ 有 $2\times2+2\times1+1\times1=7$ 种 $=C_3^1+C_3^2+C_3^3$

$X=4$ 有 $1\times1=1$ 种

∴ $P(X=1)=\frac{37}{64}$ $P(X=2)=\frac{19}{64}$ $P(X=3)=\frac{7}{64}$ $P(X=4)=\frac{1}{64}$

⇒ $E(X)=1\times\frac{37}{64}+2\times\frac{19}{64}+3\times\frac{7}{64}+4\times\frac{1}{64}=\frac{25}{16}$

错误做法：总共有 $C_4^3+2C_4^2+C_4^1=20$ 种

$P(X=1)=\frac{C_3^2+2C_3^1+1}{20}=\frac{1}{2}$ $P(X=2)=\frac{1+2C_2^1+1}{20}=\frac{3}{10}$

$P(X=3)=\frac{2+1}{20}=\frac{3}{20}$ $P(X=4)=\frac{1}{20}$

⇒ $E(X)=1\times\frac{1}{2}+2\times\frac{3}{10}+3\times\frac{3}{20}+4\times\frac{1}{20}=\frac{7}{4}$

把n个不同的球放入k个不同的盒子（$n \le k$），共有k^n种。

把n个相同的球放入k个不同的盒子（$n \le k$）共有C_{n+k-1}^{n}种。

若要求每个盒中到有一球，则有$C_n^k \cdot A_k^k \cdot k^{n-k}$种。

Δ 卡方分布

设总体 $X \sim N(0,4)$，X_1、X_2、X_3、X_4 为总体的样本.

$$Y=a(2X_1-X_2)^2+b(4X_3-3X_4)^2.$$

确定常数a、b的值，使 $Y \sim \chi^2$，自由度为多少？

$$Y=\left(\sqrt{a}(2X_1-X_2)\right)^2+\left(\sqrt{b}(4X_3-3X_4)\right)^2.$$

要使 $Y \sim \chi^2$，则需让 $\sqrt{a}(2X_1-X_2)$ 和 $\sqrt{b}(4X_3-X_4)$ 均服从标准正态分布.

已知 $X_1, X_2, X_3, X_4 \sim N(0,4)$

则 $(2X_1-X_2) \sim N(0,20)$　$(4X_3-X_4) \sim N(0,100)$

$\therefore \dfrac{2X_1-X_2}{\sqrt{20}} \sim N(0,1)$，$\dfrac{4X_3-X_4}{10} \sim N(0,1)$

$\Rightarrow$ 以致得 $a=\dfrac{1}{20}$，$b=\dfrac{1}{100}$，$n=2$

△ 区分 $\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\overline{X}}{\sigma}\right)^2$ 和 $\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right)^2$.

从正态总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 中，抽取了 $n=20$ 的样本. X_1 $X_2\cdots X_n$.

(1) 求 $P\left(0.4\sigma^2\le\frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20}(X_i-\overline{X})^2\le 1.76\sigma^2\right)$

(2) 求 $P\left(0.4\sigma^2\le\frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20}(X_i-\mu)^2\le 1.76\sigma^2\right)$

$\Rightarrow$ (1) $P\left(0.4\sigma^2\le\frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20}(X_i-\overline{X})^2\le 1.76\sigma^2\right)$

$=P\left(8\le\sum_{i=1}^{20}\left(\frac{X_i-\overline{X}}{\sigma}\right)^2\le 35.2\right)$

由 $\frac{(n-1)S_n}{\sigma^2}=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\overline{X}}{\sigma}\right)^2\sim\chi^2(n-1)$ 知：$\sum_{i=1}^{20}\left(\frac{X_i-\overline{X}}{\sigma}\right)^2\sim\chi^2(19)$

$\therefore =P(8\le\chi^2(19)\le 35.2)$

$=P(\chi^2(19)\ge 8)-P(\chi^2(19)\ge 35.2)=0.99-0.01=0.98$

$\Rightarrow$ (2) $P\left(0.4\sigma^2\le\frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20}(X_i-\mu)^2\le 1.76\sigma^2\right)$

$=P\left(8\le\sum_{i=1}^{20}\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right)^2\le 35.2\right)$

由 $\frac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$ 知 $\sum_{i=1}^{20}\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right)^2\sim\chi^2(20)$

$=P(\chi^2(20)\ge 8)-P(\chi^2(20)\ge 35.2)=0.99-0.025=0.975$

证明：

A 算术均值比一般的加权均值更有效

设总体期望 $E(X)=\mu$，方差 $D(X)=\sigma^2$，$(X_1, X_2, \cdots X_n)$ 是总体的样本，(1) 设常数 $c_i \neq \frac{1}{n}$，$i=1,2\cdots n$，$\sum_{i=1}^{n} c_i = 1$，证明 $\hat{\mu}_1 = \sum_{i=1}^{n} c_i X_i$ 是 μ 的无偏估计量。(2) 证明 $\hat{\mu} = \bar{X}$ 比 $\hat{\mu}_1$ 更有效。

$\Rightarrow$

(1) $E(\hat{\mu}_1) = E\left(\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} c_i E(X_i) = \sum_{i=1}^{n} c_i \mu = \mu$

所以 $\hat{\mu}_1$ 是 μ 的无偏估计量。

(2). $D(\hat{\mu}) = D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} D(X_i) = \frac{1}{n^2}\cdot n\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$

$D(\hat{\mu}_1) = D\left(\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} c_i^2 D(X_i) = \sum_{i=1}^{n} c_i^2 \sigma^2$

即证 $\underline{\frac{1}{n} < \sum_{i=1}^{n} c_i^2}$

由不等式 $(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2) \geq \frac{(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2}{n}$ 知：

$$\sum_{i=1}^{n} c_i^2 > \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} c_i\right)^2}{n} = \frac{1}{n}$$

（$c_i \neq \frac{1}{n}$ 故不取等号）。

Δ题型：Bayes公式运用

13. 假定某射击手对指定目标射击三次，已知他的每次命中率分别为 0.4。 该目标如果被击中一次能被摧毁的概率为 0.2，被击中两次能被摧毁的概率为 0.5，被击中三次能被摧毁的概率为 0.8。（1）求目标能被摧毁的概率；（2）如果目标被摧毁，求是由三次都命中而摧毁的概率。

(1) A_i为射中i次，B_i为射中i次后被摧毁.

$$P = P(A_1)P(B_1|A_1) + P(A_2)P(B_2|A_2) + P(A_3)P(B_3|A_3)$$

$$= C_3^1(0.4)^1(0.6)^2 \times 0.2 + C_3^2(0.4)^2 0.6 \times 0.5 + C_3^3(0.4)^3 \times 0.8$$

$$= 0.2816$$

(2) $$P(B_3|A) = \frac{P(A_3B_3)}{P(A)} = \frac{P(A_3)P(B_3|A_3)}{\sum P(A_i)P(B_i|A_i)} = \frac{C_3^3(0.4)^3 \times 0.8}{0.2816} = 0.1818$$

13. 某射击小组共有 20 名射手，其中一级射手 6 人，二级射手 11 人，三级射手 3 人，一、二、三级射手能通过选拔进入决赛的概率分别是 0.9、0.7、0.5；

1）求这个射击小组中任选的一名射手能通过选拔进入决赛的概率；

2）任选一名射手未能通过选拔进入决赛时，他是一级射手的概率大？

(1) $P = \frac{6}{20} \times 0.9 + \frac{11}{20} \times 0.7 + \frac{3}{20} \times 0.5 = 0.73$

(2) $P = 1 - 0.73 = 0.27$

$P = \frac{6}{20} \times 0.1 = 0.03$

$P = \frac{0.03}{0.27} = 0.111$

13. 一口袋中有两种硬币，其中均匀的硬币 7 个，不均匀的硬币 3 个，每个不均匀的硬币，随机投掷时正面向上的概率都为 0.7。某游戏规定从该口袋中任取一枚，投掷 3 次，恰有两次正面向上为胜出。求

（1）胜出该游戏的概率；

（2）如果某次胜出该游戏，取出的那个为不均匀硬币的概率是多少？

(1) $P(\text{胜出}) = P(\text{均匀胜出}) + P(\text{不均匀胜出})$

$= \frac{7}{10} \times C_3^2 \times 0.7^2 \times 0.3 + \frac{3}{10} \times C_3^2 \times 0.5^2 \times 0.5$

$= 0.4212$

(2) $P = \dfrac{\frac{7}{10} \times C_3^2 \times 0.7^2 \times 0.3}{0.4212} = 0.7329$

△题型：独立事件

△ 1. 设 A,B,C 为两两独立的随机事件，则 A,B,C 相互独立的充分必要条件（ ~~D~~ A ）。

（A） A 与 BC 独立 $\Rightarrow P(ABC)=P(A)P(BC)=P(A)P(B)P(C)$ （B） AB 与 $A\cup C$ 独立

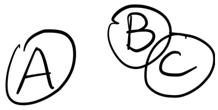
（C） AB 与 AC 独立 （D） $A\cup B$ 与 $A\cup C$ 独立

A 与 BC 独立 $\Rightarrow P(ABC)=P(A)P(BC)=P(A)P(B)P(C)$.

A,B,C 相互独立 $\Rightarrow P(A)P(B)P(C)=P(A)P(BC)=P(ABC)$. $\Rightarrow$ A 与 BC 独立

B,C 独立.

△ 1. 设 A,B,C 为随机事件，A 与 B 独立，A 与 C 独立，A 与 BC 独立，则【 A 】



（A） A 与 $B\cup C$ 相互独立； （B） A 与 $B\cup C$ 互不相容；

（C） A,B,C 相互独立；$\times B,C$? （D） A,B,C $\boxed{\text{互不相容}}$。?

$P(AB)=P(A)P(B)$、 $P(AC)=P(A)P(C)$、 $P(ABC)=P(A)P(BC)$

$P[A\cap(B\cup C)]=P[A\cap(B+C-BC)]=P(AB)+P(AC)-P(ABC)$

$=P(A)[P(B)+P(C)-P(BC)]=P(A)P(B\cup C)$.

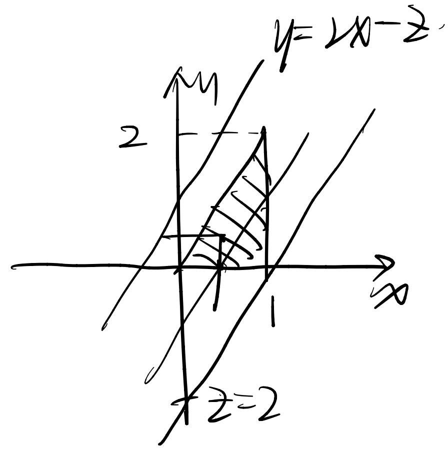
题型：概率分布（画图画准点！！！）

14. 设二维随机变量 (X,Y) 的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}1 & 0<x<1, 0<y<2x \\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

（1） 令 $Z=2X-Y$ ，求 Z 的概率密度函数 $f_Z(z)$ ；

（2） 求 $P(Y\le\frac{1}{2}\mid X\le\frac{1}{2})$ 。



(1) $F_Z(z)=P(Z\le z)=P(2X-Y\le z)$

$$=\iint\limits_{2x-y\le z} f(x,y)\,dx\,dy$$

$$=\int_{\frac{z}{2}}^{1}dx\int_{2x-z}^{2x}1\cdot dy+\int_{0}^{\frac{z}{2}}dx\int_{0}^{2x}1\cdot dy$$

$$=z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^2}{4}=z-\frac{z^2}{4}\quad(0\le z\le 2)$$

$$\Rightarrow f_Z(z)=F_Z'(z)=1-\frac{z}{2}\quad(0\le z\le 2)$$

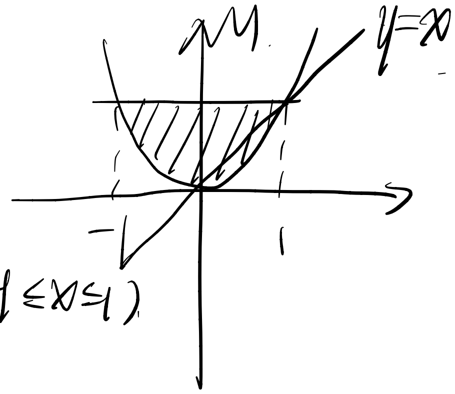
(2) $P(Y\le\frac{1}{2}\mid X\le\frac{1}{2})=\frac{3}{4}$

（此题目 $f(x,y)$ 恰好为1，所以可直接用面积计算）

14．设 (X,Y) 的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{21}{4}x^2y & x^2\le y\le 1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}，\quad 求$$

（1）$f_X(x)$ 与 $f_Y(x)$；（2）$P(X\ge Y)$。



(1) $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy=\int_{x^2}^{1}\frac{21}{4}x^2y\,dy$

$=\frac{21}{4}x^2\cdot\frac{1}{2}y^2\Big|_{x^2}^{1}=\frac{21}{8}x^2-\frac{21}{8}x^6 \quad (-1\le x\le 1)$

$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx=\int_{-1}^{1}\frac{21}{4}x^2y\,dx$ (X)

$=\frac{21}{4}y\cdot\frac{1}{3}x^3\Big|_{-1}^{1}=\frac{7}{2}y.\ (0\le y\le 1)$

$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx=\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}\frac{21}{4}x^2y\,dx$

$=\frac{21}{4}y\cdot\frac{1}{3}x^3\Big|_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}=\frac{7}{2}y^{\frac{5}{2}}.\ (0\le y\le 1)$

(2)

$P(X>Y)=\dfrac{\int_0^1 (x-x^2)\,dx}{\int_{-1}^{1}(1-x^2)\,dx}=\frac{1}{8}$ (X)

$P(X>Y)=\iint\limits_{x>y} f(x,y)\,dx\,dy=\int_0^1 dx\int_{x^2}^{x}\frac{21}{4}x^2y\,dy$

$=\frac{21}{8}\int_0^1 (x^4-x^6)\,dx=\frac{21}{8}\times\frac{2}{35}=\frac{3}{4}\times\frac{1}{5}=\frac{3}{20}$

14．已知随机变量（X，Y）的密度函数：$f(x,y)=\begin{cases}\frac{21}{4}x^2y, & x^2\le y\le 1\\ 0, & 其他\end{cases}$；试求：

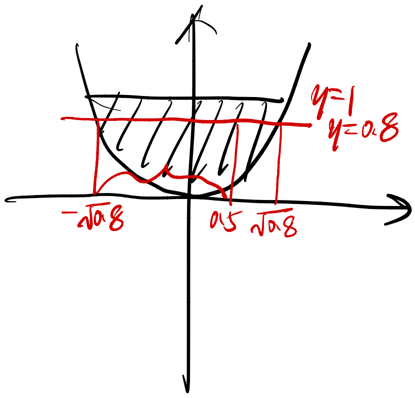
1）条件密度函数 $f_{X|Y}(x|y)$，2）条件概率 $P(X\le 0.5|Y=0.8)$. 0.587

(1) $f_Y(y)=\frac{7}{2}y^{\frac{5}{2}}$，$y\in[0,1]$.

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\frac{\frac{21}{4}x^2y}{\frac{7}{2}y^{\frac{5}{2}}}=\begin{cases}\frac{3}{2}x^2y^{-\frac{3}{2}}, & x^2\le y\le 1\\ 0, & 其他\end{cases}$$

(2). 由(1)所得 $f_{X|Y}(x|y)$ 可得：

$$f_{X|Y}(x|y=0.8)=\frac{3}{2}x^2\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^{-\frac{3}{2}},\quad x^2\le 1.$$



$\therefore P(X\le 0.5|Y=0.8)$

$$=\int_{-\infty}^{0.5}f_{X|Y}(x|y=0.8)\,dx$$

$$=\int_{-\sqrt{0.8}}^{0.5}\frac{3}{2}x^2\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^{-\frac{3}{2}}dx=0.587.$$

习题3-14：$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2}{2}e^{-x(1+y)}, & x>0,\ y>0.\\ 0, & 其他.\end{cases}$

(1) 求 $f_{X|Y}(x|y)$. 写出当 $x=0.5$ 时的条件概率密度.

(2). 求条件概率 $P(Y\ge 1|X=0.5)$

$\Rightarrow$ (1) $f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}xe^{-xy}, & x>0,\ y>0.\\ 0, & 其他.\end{cases}$

$$f_{Y|X}(y|X=0.5)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}y}, & y>0\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

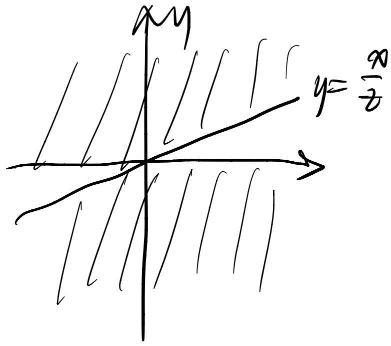
(2). $P(Y\ge 1|X=0.5)=F_{Y|X}(+\infty|X=0.5)-F_{Y|X}(1|0.5)=\int_0^{+\infty}\cdots dy-\int_1^{+\infty}\cdots dy=e^{-\frac{1}{2}}$

习题 3-34：

设X与Y为独立同分布的随机变量，其概率密度为：

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{10}{x^2}, & x>10\\ 0, & x\le 10\end{cases}\qquad f_Y(y)=\begin{cases}\frac{10}{y^2}, & y>10\\ 0, & y\le 0\end{cases}$$

求 $Z=\frac{X}{Y}$ 的概率密度



$\Rightarrow F_Z(z)=P(Z\le z)=P(\frac{X}{Y}\le z)=\iint\limits_{\frac{x}{y}\le z} f(x,y)\,dx\,dy$

(由 $\frac{x}{y}\le z$ 得 $y>0$ 时 $y\ge\frac{x}{z}$；$y<0$ 时 $y\le\frac{x}{z}$)。

$=\int_0^{+\infty}dy\int_{-\infty}^{yz}f(x,y)\,dx+\int_{+\infty}^{0}dy\int_{yz}^{+\infty}f(x,y)\,dx$

$\therefore f_Z(z)=F'_Z(z)=\int_0^{+\infty}f(yz,y)\,y\,dy-\int_{-\infty}^{0}f(yz,y)\,y\,dy$

$=\int_{-\infty}^{+\infty}f(yz,y)|y|\,dy=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(yz)f_Y(y)|y|\,dy$

由X、Y相互独立：$f(yz,y)=f_X(yz)f_Y(y)$

$$f_X(yz)=\begin{cases}\frac{10}{(yz)^2}, & y>\frac{10}{z}\\ 0, & y\le\frac{10}{z}\end{cases}$$ 仅当 $X>0$，$Y>0$，$Z>0$ 时 f_X 不为0

1° $z\ge1$ 时 $\frac{10}{z}\le10$。$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{100}{y^4z^2}|y|\,dy$

$=\int_{10}^{+\infty}\frac{100}{y^3z^2}\,dy=\frac{100}{z^2}\int_{10}^{+\infty}\frac{1}{y^3}\,dy=\frac{1}{2z^2}$。

2° $0<z<1$ 时 $\frac{10}{z}>10$。$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{100}{y^4z^2}|y|\,dy$

$=\int_{\frac{10}{z^2}}^{+\infty}\frac{100}{y^3z^2}\,dy=\frac{100}{z^2}\left(-\frac{1}{2y^2}\right)\Big|_{\frac{10}{z^2}}^{+\infty}=\frac{1}{2}$

综上：$$f_Z(z)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & 0<z<1\\ \frac{1}{2z^2}, & z\ge1\\ 0, & 其他\end{cases}$$

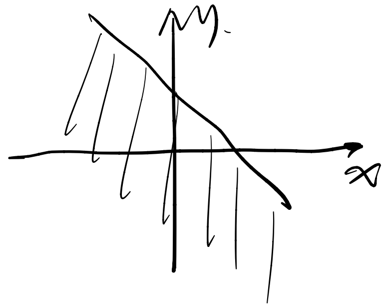
习题3-31:

设随机变量X与Y相互独立，且$X\sim N(\mu,\sigma^2)$, $Y\sim U(-b,b)$.

求$Z=X+Y$.

$$\Rightarrow F_Z(z)=P(Z\le z)=P(X+Y\le z)=\iint\limits_{x+y\le z} f(x,y)\,dx\,dy$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}dx\int_{-\infty}^{z-x}f(x,y)\,dy$$



$$\Rightarrow f_Z(z)=F_Z'(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,z-x)\,dx$$

由X,Y相互独立得: $f(x,z-x)=f_X(x)f_Y(z-x)$

由$X\sim N(\mu,\sigma^2)$, $Y\sim U(-b,b)$得:

$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},\ x\in(-\infty,\infty).\qquad f_Y(z-x)=\begin{cases}\frac{1}{2b}, & -b<z-x<b\\ 0, & 其他\end{cases}$$

则仅当 $-b<z-x<b$ 时 $f_Z(z)\neq 0$

$x\in(z-b,z+b)$时

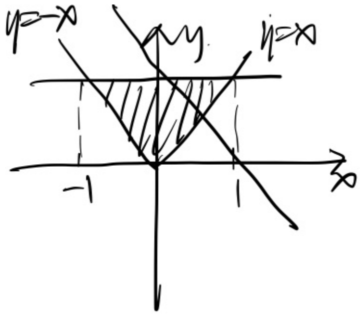
$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)f_Y(z-b)\,dx=\frac{1}{2b}\int_{z-b}^{z+b}f_X(x)\,dx$$

$$=\frac{1}{2b}[F_X(z+b)-F_X(z-b)]$$

$$=\frac{1}{2b}\left[\Phi\left(\frac{z+b-\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{z-b-\mu}{\sigma}\right)\right]$$

(不知道$f(x,y)$表达式的情况下按步骤计算)

16. 设二维随机变量(X,Y)的概率密度函数为：



$$f(x,y)=\begin{cases}3|x| & -1<x<1, |x|<y<1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

(1) 求条件概率密度函数$f_{Y|X}(y|x)$，条件概率$P(Y<\frac{1}{2}|X=0)$;

(2) 求$\mathbf{P}(X+Y\geq 1)$。

(1) $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy = \int_{|x|}^{1} 3|x|\,dy = 3|x|-3x^2,\ x\in(-1,1)$

$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\frac{3|x|}{3(|x|-x^2)}=\frac{|x|}{|x|-x^2}=\frac{1}{1-|x|},\ -1<x<1$ $|x|<y<1$

$P(Y<\frac{1}{2}|X=0)=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{1-0}\,dy=\frac{1}{2}.$

(2) $x+y\geq 1 \Rightarrow y\geq -x+1$

$P(X+Y\geq 1)=\iint_{x+y\geq 1} f(x,y)\,dx\,dy=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}}{2\times 1\times\frac{1}{2}}=\frac{1}{4}$ (X)

这种做法只能是$f(x)=1$时才行!!!

(2) $P(X+Y\geq 1)=\iint_{x+y\geq 1} f(x,y)\,dx\,dy=\int_{\frac{1}{2}}^{1}dy\int_{1-y}^{y}3x\,dx$

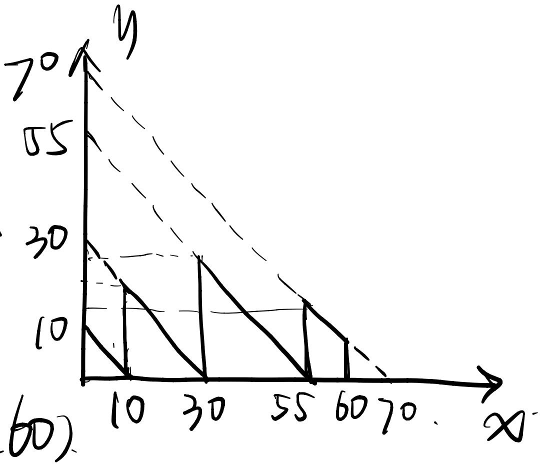
$=3\int_{\frac{1}{2}}^{1}(\frac{1}{2}y-\frac{1}{4})\,dy$

$=\frac{3}{8}$

题型：随机变量函数的数学期望

习题4-14：汽车始发站分别于每小时的10分、30分、55分发车，若乘客不知道发车时间，在每小时内的任意时刻随机到达车站，求乘客等候时间的数学期望。

⇒ 如图：



实线部分代表等待时间变化曲线

由题可知乘客到达车站的时间 x 属于均匀分布即 $X \sim U(0,60)$

则 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{60}, & x \in (0,60) \\ 0, & 其他 \end{cases}$

y 表示等待时间：

$$y = \begin{cases} -x+10, & x \in [0,10] \\ -x+30, & x \in (10,30] \\ -x+55, & x \in (30,55] \\ -x+70, & x \in (55,60] \end{cases}$$

则 $E(Y) = E_1(-X+10) + E_2(-X+30) + E_3(-X+55) + E_4(-X+70)$

$$= \int_0^{10} (-x+10)\cdot\frac{1}{60}dx + \int_{10}^{30} (-x+30)\cdot\frac{1}{60}dx + \int_{30}^{55} (-x+55)\cdot\frac{1}{60}dx + \int_{55}^{60} (-x+70)\cdot\frac{1}{60}dx$$

$= 10.4\,(min) = 10m\,25s$

△设由自动流水线加工的某种零件内径X(mm)服从正态分布 $N(\mu,1)$，内径小于10mm或大于12mm为次品。已知销售利润T(元)与内径X有如下关系：

$$T=\begin{cases}-1, & X<10\\ 20, & 10\le X\le 12\\ -5, & X>12.\end{cases}$$

问平均内径为何值时，销售一个零件的平均利润最大？

$\Rightarrow$ 由 $X\sim N(\mu,1)$ 知 $f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2}}$，

$$E(T)=\int_{-\infty}^{10}-f(x)dx+\int_{10}^{12}20f(x)dx+\int_{12}^{+\infty}-5f(x)dx$$

$$=-F(10)+20[F(12)-F(10)]-5[1-F(12)]$$

$$=25F(12)-21F(10)-5$$

$$E'(T)=25f(12)-21f(10)$$

$$=\frac{25}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(12-\mu)^2}{2}}-\frac{21}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(10-\mu)^2}{2}}$$

令 $E'(T)=0$ 得 $\mu\approx10.9$mm.

(此题中T为X的函数，求T的期望即 $\int T(x)f(x)dx$)

题型：中心极限定理

△ Laplace 中心极限定理

假设某数学楼每天有3000名学生上课，每个学生在课间一般有1%的时间占用一个水龙头，现有水龙头25个。

(1) 未增水龙头前，需要排队的概率？

(2) 至少需要装多少个水龙头，才能95%以上概率保证不用排队？

⇒ (1) $n=3000$，$p=0.01$ ⇒ $\mu=np=30$，$\sigma^2=np(1-p)=29.7$

设占用的水龙头个数为X个，则 $X\sim B(3000, 0.01)$.

近似地：$X\sim N(30, 29.7)$

则 $P(X>25)=P\left(\frac{X-30}{\sqrt{29.7}}>\frac{25-30}{\sqrt{29.7}}\right)=1-\Phi\left(\frac{25-30}{\sqrt{29.7}}\right)$

$=\Phi\left(\frac{5}{\sqrt{29.7}}\right)=\Phi(0.9175)=0.82$.

(2) 设装m个水龙头。

则 $P(X>m)\leq 0.05$ ⇒ $1-\Phi\left(\frac{m-30}{\sqrt{29.7}}\right)\leq 0.05$

$\Phi\left(\frac{m-30}{\sqrt{29.7}}\right)\geq 0.95$

$\frac{m-30}{\sqrt{29.7}}\geq 1.645$ ⇒ $m\geq 38.9$

∴ 至少39个

$P(\underline{0}\leq X\leq m)=\Phi\left(\frac{m-30}{\sqrt{29.7}}\right)-\Phi\left(\frac{0-30}{\sqrt{29.7}}\right)$

$\approx\Phi\left(\frac{m-30}{\sqrt{29.7}}\right)$

△15. 某厂每月生产 10000 部手机，已知其显示屏的正品率为 0.8，为了以 0.997 的概率保证出厂的手机都装上正品显示屏，请利用中心极限定理估计该厂每月应生产多少只显示屏？

Laplace.

所需查表 $\Phi(2.745)=0.997$, $\Phi(1.96)=0.975$, $\Phi(1.65)=0.95$,

m名学生. 占用水龙头概率 0.8 保证率 0.997. 10000个水龙头.

设应生产 m 只显示屏, 则其正品数为 X.

$$X \sim B(m, 0.8) \quad np = 0.8m \quad np(1-p) = 0.16m.$$

近似地: $X \sim N(0.8m, 0.16m)$

则按照题目要求:

$$P(X > 10000) \geqslant 0.997 \Rightarrow P\left(\frac{X-0.8m}{\sqrt{0.16m}} > \frac{10000-0.8m}{\sqrt{0.16m}}\right) \geqslant 0.997$$

$$1-\Phi\left(\frac{10000-0.8m}{\sqrt{0.16m}}\right) \geqslant 0.997$$

$$\Rightarrow \Phi\left(\frac{10000-0.8m}{\sqrt{0.16m}}\right) \leqslant 0.003.$$

查表得: $\Phi(-2.745) = 0.003$.

$$\text{则} \quad \frac{10000-0.8m}{\sqrt{0.16m}} \leqslant -2.745$$

$$10000-0.8m \leqslant -1.098\sqrt{m}$$

$$0.8m - 1.098\sqrt{m} - 10000 \geqslant 0$$

解得: $m \geqslant 112.49^2 = 12654$ (只)

19.（二阶段摸奖）某公司年终搞促销活动，分两步抽奖：第一步，先抽签决定“是否中奖”，中奖率为 30%；第二步，再抽奖决定奖品，奖品具体如下表：

奖品	毛巾（价值 10 元）	电饭煲（价值 500 元）	新品手机（价值 3000 元）
概率	0.55	0.4	0.05

该公司预计有 2000 人参加该抽奖活动，　　$p=0.05$，$1-p=0.95$

（1）用切比雪夫不等式估计“抽中手机”的人数在 20 到 40 之间的概率；

（2）用中心极限定理估计“抽中手机”的人数在 20 到 40 之间的概率。

(1) 共有 $2000\times30\%=600$ 人进入第二步

$\mu=np=600\times0.05=30$　$\sigma^2=np(1-p)=28.5$

设 X 为“抽中手机”的人数

$P(|X-30|<10)\geq1-\frac{28.5}{10^2}=0.715$

《案例5.3.1》 独立同分布的中心极限定理

18. 某生产线上组装每件产品平均需要 10 分钟，并且每件产品的组装时间相互独立，都服从指数分布. 若要保证 95%的可能性，16 小时内最多可组装多少件产品？

设 X 为组装每件产品所花时间，则 $X \sim E(\frac{1}{10})$.

$$\Rightarrow \mu = 10, \quad \sigma^2 = 100$$

设16小时（960分钟）最多组装 n 件产品：

Y 为 $\sum_{i=1}^{n} X_i$ 的总时间，由中心极限定理：

$$Y \sim N(10n, 100n)$$

则 $P(Y \le 16 \times 60) \geq 0.95$ 即 $\Phi\left(\frac{960-10n}{\sqrt{100n}}\right) \geq 0.95$

查表得 $\Phi(1.645) = 0.95$

则 $\frac{960-10n}{\sqrt{100n}} \geq 1.645$

$$10n + 16.45\sqrt{n} - 960 \le 0$$

解得：

$$n \le 81$$

∴ 最多81件.

《题目只给了单个 X 的 $E(X)$、$D(X)$，则 $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N(n\mu, n\sigma^2)$》

和之间的 Laplace 中心极限定理不同.

⇓

二项分布.

题型：Chebyshev大数定律.

20. 设相互独立随机变量序列 $\{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}$ 满足 $P(\xi_k=\pm\sqrt[3]{k})=\frac{1}{2}$，证明 $\{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}$ 服从大数定律。

证明：$P(\xi_k=\sqrt[3]{k})=\frac{1}{2}$. $P(\xi_k=-\sqrt[3]{k})=\frac{1}{2}$ ⇒分布律.

$E(\xi_k)=\frac{1}{2}\sqrt[3]{k}-\frac{1}{2}\sqrt[3]{k}=0.$

$P(\xi_k^2=k^{\frac{2}{3}})=1 \Rightarrow \{\xi_k^2\}_{k=1}$的分布律.

$E(\xi_k^2)=k^{\frac{2}{3}}$

$D(\xi_k)=E(\xi_k^2)-(E(\xi_k))^2=k^{\frac{2}{3}}.$

$$\Rightarrow D\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k\right)=\frac{1}{n^2}D\left(\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k\right)\overset{\text{相互独立}}{=}\frac{1}{n^2}\left(D(\xi_1)+D(\xi_2)+\cdots+D(\xi_n)\right)$$

$$=\frac{1}{n^2}\left(1+2^{\frac{2}{3}}+3^{\frac{2}{3}}+\cdots+n^{\frac{2}{3}}\right)\leq\frac{1}{n^2}\cdot n\cdot n^{\frac{2}{3}}=\frac{1}{\sqrt[3]{n}}.$$

则 $\frac{1}{n^2}D\left(\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k\right)\longrightarrow 0\ (n\to\infty)$ (Markov条件).

由Chebyshev大数定律知，$\{\xi_k\}_{k=1}^{n}$ 服从大数定律.

<同习题5-5.>

设$\{X_n\}$ $(n\geq 1)$为相互独立的随机变量序列，且其分布律为：

X_n	$-\sqrt{\ln n}$	$\sqrt{\ln n}$
P	0.5	0.5

其中$n=1,2,\cdots$ 证明$\{X_n\}$服从大数定律.

<习题5-4>：

设$\{X_n\}$ $(n\geq 1)$为相互独立的随机变量序列，且其分布律为：

$P(X_1=0)=1$，$P(X_n=0)=1-\frac{2}{n}$，$P(X_n=\pm\sqrt{n})=\frac{1}{n}$，$n=2,3,\cdots$

证明$\{X_n\}$服从大数定律.

<习题5-3>.

设$\{X_n\}$ $(n\geq 1)$为相互独立的随机变量序列，且

$$P(X_n=0)=1-p_n,\quad P(X_n=p_n\},\quad n=1,2,\cdots$$

证明$\{X_n\}$服从大数定律

题型：统计量的相关知识

△ 设总体二阶矩存在，$(X_1, X_2, X_3 \cdots X_n)$ 是来自某总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的样本，求 $X_i - \overline{X}$ 与 $X_j - \overline{X}$ 的相关系数，并作解释。

$\overline{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$，$E(\overline{X}) = \mu$，$D(\overline{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$

(1) $i=j$ 时，$\rho = 1$

(2) $i \neq j$ 时，$E(X_i) = E(X_j) = \mu$，$D(X_i) = D(X_j) = \sigma^2$

$E[(X_i - \overline{X})(X_j - \overline{X})] = E[X_i X_j - \overline{X}(X_i + X_j) + \overline{X}^2]$

$= E(X_i X_j) - E(X_i \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k) - E(X_j \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_j) + E(\overline{X}^2)$

$= E(X_i)E(X_j) - E(\frac{1}{n}X_i^2 + \frac{1}{n}X_i \sum_{k=1, k\neq i} X_k) - E(\frac{1}{n}X_j^2 + \frac{1}{n}X_j \sum_{k=1, k\neq j} X_k)$

$+ E(\overline{X}^2)$

$= \mu^2 - \frac{1}{n}E(X_i^2) - \frac{1}{n}E(X_j^2) - \frac{(n-1)}{n}E(X_i)E(X_k)$

$- \frac{(n-1)}{n}E(X_j)E(X_k) + E(\overline{X}^2)$

$= \mu^2 - \frac{2}{n}(\sigma^2 + \mu^2) - \frac{n-1}{n} \cdot \mu \cdot \mu \cdot 2 + \frac{\sigma^2}{n} + \mu^2$

$= -\frac{\sigma^2}{n}$

$E(X_i - \overline{X})E(X_j - \overline{X}) = [E(X_i) - E(\overline{X})][E(X_j) - E(\overline{X})] = 0$

$D(X_i - \overline{X}) = D(X_j - \overline{X}) = D[(1-\frac{1}{n})X_j - \frac{1}{n}\sum_{k=1, k\neq j}^{n} X_k)$

$= (1-\frac{1}{n})^2 D(X_j) + \frac{n-1}{n^2} D(X_k) = \frac{n-1}{n}\sigma^2$

$\Rightarrow \rho = -\frac{1}{n-1}$

△ 设 $(X_1, X_2, \cdots X_n)$ 是来自正态总体 $N(0,1)$ 的样本，求下列统计量的分布：

(1) $Y = \left(\dfrac{X_1+X_2}{X_1-X_2}\right)^2$　　(2) $Z = (n-1)\cdot\dfrac{X_1^2}{\sum\limits_{i=2}^{n} X_i^2}$

⇒ (1) $X_1+X_2 \sim N(0,2)$　$X_1-X_2 \sim N(0,2)$

∴ $\dfrac{X_1+X_2}{\sqrt{2}} \sim N(0,1)$　$\dfrac{X_1-X_2}{\sqrt{2}} \sim N(0,1)$

$$Y = \left(\frac{X_1+X_2}{X_1-X_2}\right)^2 = \frac{\left(\frac{X_1+X_2}{\sqrt{2}}\right)^2}{\left(\frac{X_1-X_2}{\sqrt{2}}\right)^2} \sim \frac{\chi^2(1)}{\chi^2(1)} = F(1,1)$$

(2) $F(1, n-1)$

△ 11. 假设两个相互独立的总体 X 与 Y，其中 $X \sim N(\mu_1,100)$，$Y \sim N(\mu_2,64)$。$(X_1,\cdots X_{21})$ 是来自 X 的样本，S_1^2 是其样本方差；$(Y_1,\cdots Y_{16})$ 是来自总体 Y 的样本，S_2^2 是其样本方差。求 $P(0.71 \le \dfrac{S_1^2}{S_2^2} \le 3)$

由 $X \sim N(\mu_1,100)$、$Y \sim N(\mu_2,64)$ 得：

$$\frac{(n-1)S_1^2}{\sigma_1^2} = \frac{20S_1^2}{100} = \frac{S_1^2}{5} \sim \chi^2(20)$$

$$\frac{(n-1)S_2^2}{\sigma_2^2} = \frac{15S_2^2}{64} \sim \chi^2(15)$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{S_1^2}{100}}{\frac{S_2^2}{64}} = \frac{16S_1^2}{25S_2^2} \sim F(20,15)$$

∵ $P(0.71 \le \dfrac{S_1^2}{S_2^2} \le 3) = P(0.71 \times \dfrac{16}{25} \le \dfrac{16S_1^2}{25S_2^2} \le 3 \times \dfrac{16}{25}) = P(0.455 < \dfrac{16S_1^2}{25S_2^2} < 1.92)$

∵ $F_{0.1}(20,15) = 1.92$

$F_{0.05}(15,20) = 2.2$

$F_{0.95}(20,15) = \dfrac{1}{F_{0.05}(15,20)} = 0.455$

∴ 原式 $= 0.95 - 0.1$

$= 0.85$

题型：参数估计

△ 设总体X的分布律为：

X	0	1	2	3
P	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	θ^2	$1-2\theta$

其中θ（$0<\theta<\frac{1}{2}$）是未知参数，若一次抽取得一组样本观测值如下：

3 1 3 0 3 1 2 3.

求θ的矩估计值和最大似然估计值

$\Rightarrow$ $E(X) = 0\cdot\theta^2 + 1\cdot 2\theta(1-\theta) + 2\cdot\theta + 3\cdot(1-2\theta) = 3-4\hat{\theta}$.

$\overline{X} = \frac{1}{8}(3+1+3+3+1+2+3) = 2$.

$\therefore 3-4\hat{\theta} = 2 \Rightarrow \hat{\theta} = \frac{1}{4}$ 即为矩估计值.

$\Rightarrow L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} p(x_i,\theta) = \theta^2\cdot[2\theta(1-\theta)]^2\cdot\theta^2\cdot[1-2\theta]^4$

$= 4\theta^6(1-\theta)^2(1-2\theta)^4$.

$\ln L(\theta) = 4[6\ln\theta + 2\ln(1-\theta) + 4\ln(1-2\theta)]$

$\frac{\partial \ln L(\theta)}{\partial\theta} = 8[\frac{3}{\theta} - \frac{1}{1-\theta} - \frac{4}{1-2\theta}]$.

令 $\frac{\partial \ln L(\theta)}{\partial\theta} = 0$ 解得：$\theta_{mle} = \frac{7-\sqrt{13}}{12}$

即为极大似然估计值.

习题 7.6：（合集）

(1) 设总体 $X \sim B(n, \theta)$，其中 n 已知，$\theta\ (0<\theta<1)$ 未知。

$$E(X) = n\theta = \overline{X} \Rightarrow \hat{\theta} = \frac{\overline{X}}{n}$$

由 $X \sim B(n, \theta)$ 知：$p(X=m \mid n, \theta) = C_n^m \theta^m (1-\theta)^{n-m}$

$m \in \{0, 1, 2, \cdots, n\}$

样本大小为 N，则似然函数：

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{N} \left[C_n^{m_i} \theta^{m_i} (1-\theta)^{n-m_i}\right] \quad (m_i = X_i)$$

$$= \left[\prod_{i=1}^{N} C_n^{m_i}\right]\left[\prod_{i=1}^{N} \theta^{m_i}\right]\left[\prod_{i=1}^{N} (1-\theta)^{n-m_i}\right]$$

$$= \left[\prod_{i=1}^{N} C_n^{m_i}\right] \cdot \theta^{\sum_{i=1}^{N} m_i} \cdot (1-\theta)^{\sum_{i=1}^{N}(n-m_i)}$$

$$\ln L(\theta) = \sum_{i=1}^{N} m_i \ln\theta + \sum_{i=1}^{N}(n-m_i)\ln(1-\theta) + \ln\left[\prod_{i=1}^{N} C_n^{m_i}\right]$$

$$\frac{\partial \ln L(\theta)}{\partial\theta} = \frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{N} m_i - \frac{1}{1-\theta}\left(Nn - \sum_{i=1}^{N} m_i\right)$$

令 $\frac{\partial \ln L(\theta)}{\partial\theta} = 0$ 得：$\theta_{MLE} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i}{N \cdot n} = \frac{\overline{X}}{n}$

(2) $f(x;\theta)=\begin{cases}\frac{x}{\theta^2}e^{-\frac{x}{\theta}}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$ 其中 $\theta(\theta>0)$ 未知.

$$E(X|\theta)=\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{\theta^2}e^{-\frac{x}{\theta}}dx=\left(-\frac{x^2}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}+2xe^{-\frac{x}{\theta}}-2\theta e^{-\frac{x}{\theta}}\right)\Big|_0^{+\infty}$$

$$=2\theta=\overline{X}\Rightarrow\hat{\theta}=\frac{\overline{X}}{2}.$$

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta)=\frac{1}{\theta^{2n}}\underline{\prod_{i=1}^{n}x_i}\,e^{-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}x_i},\quad x_i>0.$$

$$\ln L(\theta)=\ln\left(\prod_{i=1}^{n}x_i\right)-2n\ln\theta-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}x_i.$$

$$\frac{\partial\ln L(\theta)}{\partial\theta}=-\frac{2n}{\theta}+\frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{n}x_i$$

令 $\frac{\partial\ln L(\theta)}{\partial\theta}=0$ 得: $\theta_{MLE}=\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}x_i=\frac{\overline{X}}{2}$

(3) $f(x;\theta)=\begin{cases}\sqrt{\theta}x^{\sqrt{\theta}-1}, & 0<x<1.\\ 0, & 其他\end{cases}$ 其中 $\theta(\theta>0)$ 未知.

$$E(X)=\int_0^1\sqrt{\theta}x^{\sqrt{\theta}}dx=\frac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{\theta}+1}x^{\sqrt{\theta}+1}\Big|_0^1=\frac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{\theta}+1}=\overline{X}.$$

$$\Rightarrow\hat{\theta}=\left(\frac{\overline{X}}{1-\overline{X}}\right)^2.$$

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta)=n\sqrt{\theta}\prod_{i=1}^{n}x_i^{\sqrt{\theta}-1}.$$

$$\ln L(\theta)=\frac{n}{2}\ln\theta+(\sqrt{\theta}-1)\sum_{i=1}^{n}\ln x_i.$$

$$\frac{\partial\ln L(\theta)}{\partial\theta}=\frac{n}{2\theta}+\frac{1}{2\sqrt{\theta}}\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$$

令 $\frac{\partial\ln L(\theta)}{\partial\theta}=0$ 得: $\theta_{MLE}=\left(\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}\right)^2.$

(4) $f(x;\theta)=\begin{cases}\frac{2\theta^2}{x^3}, & x\geq\theta\\ 0, & x<\theta\end{cases}$ 其中 $\theta(\theta>0)$ 未知.

$$E(X)=\int_0^{+\infty}\frac{2\theta^2}{x^2}dx=-\frac{2\theta^2}{x}\Big|_\theta^{+\infty}=2\theta=\overline{X}\Rightarrow\hat{\theta}=\frac{\overline{X}}{2}$$

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta)=\frac{2^n\theta^{2n}}{\prod_{i=1}^{n}x_i^3}$$

$$\ln L(\theta)=n\cdot2^{n+1}\ln\theta-3\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$$

$$d\ln L(\theta)=\frac{n\cdot2^{n+1}}{\theta}.\Rightarrow \text{无法求出极值点.}$$

$L(\theta)$ 随 θ 增大而增大. 则 θ 取最大值时 $L(\theta)$ 最大.

$$\theta_{max}=\min\{x_1,x_2,\cdots x_n\}=X_{(1)}=\theta_{MLE}.$$

(5) $f(x;\theta)=\begin{cases}\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x-\mu}{\theta}}, & x>\mu \\ 0, & 其他\end{cases}$ 其中 $\theta(\theta>0)$，μ 未知.

$$E(X)=\int_{\mu}^{\infty}\frac{x}{\theta}e^{-\frac{x-\mu}{\theta}}dx=\mu+\theta=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i=\overline{X}.$$

$$E(X^2)=\int_{\mu}^{\infty}\frac{x^2}{\theta}e^{-\frac{x-\mu}{\theta}}dx=2\theta^2+2\theta\mu+\mu^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2$$

解得 μ,θ 的矩估计量为：

$$\hat{\theta}=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}.\quad \hat{\mu}=\overline{X}-\hat{\theta}=\overline{X}-\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}.$$

$$L(\theta,\mu)=\prod_{i=1}^{n}f(x;\mu,\theta)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x-\mu}{\theta}}$$

$$=\frac{1}{\theta^n}e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i-n\mu}{\theta}}\quad (x>\mu)$$

$$\Rightarrow \ln L(\theta,\mu)=-n\ln\theta-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}x_i+\frac{n\mu}{\theta}$$

$$\frac{d\ln L(\theta,\mu)}{d\theta}=-\frac{n}{\theta}+\frac{1}{\theta^2}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i-n\mu\right)$$

$$\frac{d\ln L(\theta,\mu)}{d\mu}=\frac{n}{\theta}$$ ⇒ 无法求极值.

由 $\ln L(\theta,\mu)$ 知，μ 取最大值时 $L(\theta,\mu)$ 最大.

$$\mu_{ME}=\min\{x_1,x_2,\cdots x_n\}=X_{(1)}$$

令 $\frac{d\ln L(\theta,\mu)}{d\theta}=0$ 得 $\theta_{ME}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i-\mu=\overline{X}-X_{(1)}$

20. 1）有一繁忙的汽车站，每天有大量汽车通过，设每辆汽车在一天的某段时间内出事故的概率为 0.0005，设每天的该段时间内有 1000 辆汽车通过，事件 A 为“该时间段内，汽车出事故的次数不小于 2”的事件，1） 利用泊松定理，求事件 A 发生的概率；

2）设随机变量 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 相互独立同分布，其中 $E(X_k)=\mu$，$D(X_k)=\sigma^2<\infty$，$k=1,2,\ldots,n$.

证明：$T_n=\frac{2}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n} kX_k$ 是μ的相合（一致）估计.

(1) $n=1000$，$p=0.0005$. $np=\lambda=0.5=\frac{1}{2}$

$P(X=k)=e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^k}{k!}$，$k=0,1,2\cdots$

$=e^{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{2^k k!}$

$P(A)=\sum_{k=2}^{\infty}P(X=k)=\sum_{k=2}^{\infty}e^{-\frac{1}{2}}\frac{1}{2^k k!}=e^{-\frac{1}{2}}(e^{\frac{1}{2}}-1-\frac{1}{2})=1-\frac{3}{2}e^{-\frac{1}{2}}$

≈ 0.09

(2). 证明：$T_n=\frac{2}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n}kX_k$

$D(T_n)=D\left(\frac{2}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n}kX_k\right)$

$=\frac{4}{n^2(n+1)^2}\sum_{k=1}^{n}D(kX_k)=\frac{4}{n^2(n+1)^2}[\sigma^2+(2\sigma)^2+(3\sigma)^2+\cdots+(n\sigma)^2]$

$<\frac{4}{n^2(n+1)^2}\cdot n\cdot(n\sigma)^2=\frac{4n\sigma^2}{(n+1)^2}=\frac{4\sigma^2}{n+2+\frac{1}{n}}$

$\lim_{n\to\infty}D(T_n)=0\Rightarrow$ 一致.

配对题：

20. 将 n 个人的帽子编号后混合放入一个袋子中， 再随机地每人从袋子里各拿一顶帽子，如果每个人恰拿到自己的帽子，称为一个配对。令 S_n 表示正确搭配的个数。

（1）求 $E(S_n)$， $D(S_n)$；（2）证明：当 $n\to\infty$ 时，$\frac{S_n-ES_n}{n}$ 依概率收敛于 0 。

(1) $p(S_1)=\frac{(n-1)!}{n!}=\frac{1}{n}$. $p(S_2)=\frac{(n-2)!}{n!}=\frac{1}{n(n-1)}$

$\cdots\ p(S_k)=\frac{(n-k)!}{n!}=\frac{1}{n(n-1)\cdots(n-k+1)}$, $\cdots\ p(S_n)=\frac{1}{n!}$

$E(S_n)=\frac{1}{n}+2\times\frac{1}{n(n-1)}+3\times\frac{1}{n(n-1)(n-2)}+\cdots+n\times\frac{1}{n!}$

(例 2.3.3).
(例 2.3.7).
(例 2.4.4)
(例 2.4.5).
(例 2.4.6).
(题 2-13).
(题 2-15).
(题 2-41).

第一章 随机事件和概率

<患病模型>. 患结核病=A. 检出结核病=B.

$p(B|A)=0.95$. $p(B|\bar{A})=0.002$. $p(A)=0.002$.

$$p(A|B)=\frac{p(AB)}{p(B)}=\frac{p(A)p(B|A)}{\Sigma p(A_i)p(B|A_i)}=\frac{0.002\times0.95}{0.002\times0.95+0.998\times0.002}=0.487.$$

$\hookrightarrow p'(A)=0.487$. $(0.002\rightarrow0.487)$.

○ 某电子元件一级品率0.3. 从大批元件中抽20只, 记X为其中一级品数. 最有可能抽到的一级品数k是多少? 并求$p(X=k)$.

$\Rightarrow k=[(n+1)p]=[21\times0.3]=6$. 则$p(X=6)=C_{20}^{6}(0.3)^6(0.7)^{14}\approx0.1916$.

○ 某自动生产线调整后出现废品的概率为p. 当生产过程中出现废品立即重新调整. 求两次调整之间生产的合格品X的概率分布.

$\Rightarrow$ 把生产一个产品当作一次实验. 出现次品立即调整即首次失败即停止. 所以对应分布为几何分布.

事件$X=k$表示共生产$k+1$件产品. 前k件为合格品. 第$k+1$件为次品.

所以分布律为 $p(X=k)=(1-p)^kp$. $k=0,1,2,\cdots$

○ 设某超市每周顾客数$N\sim P(\lambda)$. 根据统计. 女性顾客比例为p. 求每周女性顾客人数X的分布.

○ 某地区人口带菌率为10%. 带菌者呈阴.阳反应概率分别为0.05, 0.95. 不带菌者呈阴阳反应概率为0.99. 0.01. 求.

(1) 对某人独立检测3次. 发现2次呈阳性反应概率.

(2) 当(1)中事件发生时. 求该人为带菌者的概率.

$\Rightarrow$ (1) $p(A)=0.1$. $p(B|A)=0.95$. $p(\bar{B}|A)=0.05$. $p(B|\bar{A})=0.01$. $p(\bar{B}|\bar{A})=0.99$.

$p(C)=p(A)C_3^2p^2(B|A)p(\bar{B}|A)+p(\bar{A})C_3^2p^2(B|\bar{A})p(\bar{B}|\bar{A})\approx0.0138$.

(2) $p(C|A)=C_3^2p^2(B|A)p(\bar{B}|A)=0.135735$.

由乘法公式: $p(A|C)=\dfrac{p(A)p(C|A)}{p(C)}=\dfrac{0.0135735}{0.0138}=98\%$.

○ 一本500页书共有500个错. 每个错等可能出现在每一页上(每页印刷符号超过500个). 求指定的一页至少有3个错的概率.

指定的一页上出现某个错误概率为$p=\frac{1}{500}$. 则错误数$X\sim B(500,\frac{1}{500})$. $\Rightarrow X\sim P(1)$.

$P(X\geq3)=1-\sum_{k=0}^{2}e^{-1}\frac{1}{k!}=1-\frac{5}{2e}\approx0.0803$.

第二章 随机变量及其分布

〈食堂座位问题〉

10000名学生，15%学生选择，90%学生保证。

设 n 个，$\underline{p=0.15}$.

$$P(X\le n)=\sum_{k=0}^{n}C_{10000}^{k}\,0.15^{k}(1-0.15)^{10000-k}\ge 0.9.$$

〈等候问题〉 指数分布。

〈患病模型〉

0. 带菌率为10%，带菌者呈阴、阳性概率为0.05、0.95，不带菌者呈阴、阳性概率为0.99、0.01.

求：(1) 某人独立检测3次，发现2次呈阳性概率。

(2) 在(1)发生时，该人带菌概率。

解 (1) 带菌=A，呈阳=B.

则 $P(C)=P(A)P(B|A)+P(\bar A)P(B|\bar A)$

$=P(A)\cdot C_3^2P^2(B|A)[1-P(B|A)]+P(\bar A)\cdot C_3^2P^2(B|\bar A)[1-P(B|\bar A)]$

$=0.1\times C_3^2\times 0.95^2\times(1-0.95)+0.9\times C_3^2\times 0.01^2\times(1-0.01)=0.0138.$

(2) $P(A|C)=\dfrac{P(A)P(C|A)}{P(C)}=\dfrac{P(A)P(C|A)}{P(A)P(C|A)+P(\bar A)P(C|\bar A)}=\dfrac{0.1\times C_3^2\times 0.95^2\times(1-0.95)}{0.0138}$

$=0.9806.$

0. 某随机变量的分布函数
$$F(x)=\begin{cases}0, & x<-2\\ 0.3, & -2\le x<-1\\ 0.9, & -1\le x<2\\ 1, & x\ge 2.\end{cases}$$

求随机变量 $Y=X^2-3$ 和 $Z=|X|$ 的分布律。

第三章. 多维随机变量及其分布

0 $F(x,y)=A(B+\arctan\frac{x}{2})(C+\arctan\frac{y}{2})$. $-\infty<x<+\infty$. $-\infty<y<+\infty$.

(1) 求常数A.B.C. (2) (X.Y)的边缘分布. (3) $P(X>2)$.

⇒(1) $F(+\infty,+\infty)=A(B+\frac{\pi}{2})(C+\frac{\pi}{2})=1$.

$F(-\infty,y)=A(B-\frac{\pi}{2})(C+\arctan y)=0$. 解得: $A=\frac{1}{\pi^2}$. $B=\frac{\pi}{2}$. $C=\frac{\pi}{2}$.

$F(x,-\infty)=A(B+\arctan\frac{x}{2})(C-\frac{\pi}{2})=0$.

(2) $F_X(x)=F(x,+\infty)=A(B+\arctan\frac{x}{2})(C+\frac{\pi}{2})=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arctan\frac{x}{2}$.

$F_Y(y)=F(+\infty,y)=A(B+\frac{\pi}{2})(C+\arctan y)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arctan\frac{y}{2}$.

(3) $P(X>2)=1-P(X\leq 2)=1-F_X(2)=1-(\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arctan 1)=\frac{1}{4}$.

Δ 二维离散型随机变量.

0 已知X.Y的分布为:

X	0	1
P	0.5	0.5

Y	-1	0	1
P	0.25	0.5	0.25

且 $P(XY=0)=1$. 求联合分布律.

由 $P(XY=0)=1$ 知: $P(X=1,Y=-1)=P(X=1,Y=1)=0$. 即 $P_{21}=P_{23}=0$

再由 $P(Y=-1)=P(X=0,Y=-1)+P(X=1,Y=-1)=P_{11}+P_{21}=0.25$

$P(Y=0)=P(X=0,Y=0)+P(X=1,Y=0)=P_{12}+P_{22}=0.5$

$P(Y=1)=\cdots$

可解出 $P_{11}=0.25$. $P_{12}=0$. $P_{13}=0.25$. $P_{22}=0.5$.

Δ 二维连续型随机变量.

Δ 二维随机变量的条件概率.

☆ (例3.2.1) 二维(X,Y). 当$y>0$时. 在$\{Y=y\}$条件下X的条件概率密度为:

$$f_{X|Y}(x|y)=\begin{cases}\frac{1}{y}, & 0<x<y\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

关于变量Y的边缘概率密度为 $f_Y(y)=\begin{cases} ye^{-y}, & y>0\\ 0, & y\le 0.\end{cases}$

求条件分布函数 $F_{X|Y}(x|y=4)$

↳ 怎么求这种类型?

先根据 $\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$ 求出 $f_{X|Y}(x|y)$. 再代入$y=4$得 $f_{X|Y}(x|y=4)$. 再求 $F_{X|Y}(x|y=4)$.

Δ 随机变量的独立性.

※ 独立性定理. 使X与Y相互独立的充分必要条件是存在非负可积函数 $r(x)$, $g(y)$ 使 $f(x,y)=r(x)g(y)$

这时: $f_X(x)=\dfrac{r(x)}{\int_{-\infty}^{+\infty}r(x)dx}$. $f_Y(y)=\dfrac{g(y)}{\int_{-\infty}^{+\infty}g(y)dy}$.

例如: $f(x,y)=6e^{-2x-3y} \Rightarrow f_X=2e^{-2x}$. $f_Y=3e^{-3y}$.

$f(x,y)=e^{-3y}. \Rightarrow f_X=\frac{1}{3}.\quad f_Y=3e^{-3y}.$

↳ $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=\dfrac{r(x)}{\int_{-\infty}^{+\infty}r(x)dx}\cdot\dfrac{g(y)}{\int_{-\infty}^{+\infty}g(y)dy}=r(x)g(y).$

则 $\int_{-\infty}^{+\infty}r(x)dx\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}g(y)dy=1.$

Δ 多维随机变量函数的分布.

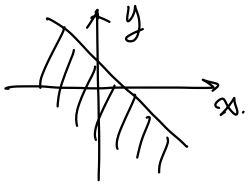
相互独立的泊松分布、二项分布、正态分布、卡方分布具有可加性

(连续型):

$Z=g(X,Y)$. 则 $F_Z(z)=P(Z\le z)=P(g(X,Y)\le z)=\iint\limits_{g(x,y)\le z} f(x,y)\,dx\,dy$.

1°. 和: $Z=X+Y$.

$F_Z(z)=P(Z\le z)=P(X+Y\le z)=\iint\limits_{x+y\le z} f(x,y)\,dx\,dy$.

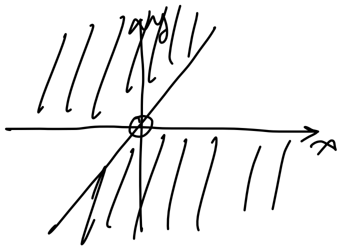


①(例3.5.2).

已知 (X,Y) 的联合概率密度 $f(x,y)=\begin{cases}3x, & 0<x<1,\ 0<y<x\\ 0, & 其他.\end{cases}$

$Z=X+Y$. 求 Z 的概率密度 $f_Z(z)$.

2°. 商: $Z=\frac{X}{Y}$.



$F_Z(z)=P(Z\le z)=P(\frac{X}{Y}\le z)=\iint\limits_{\frac{x}{y}\le z} f(x,y)\,dx\,dy$.

$=\iint\limits_{y>0,\,y\ge\frac{1}{z}x} f(x,y)\,dx\,dy+\iint\limits_{y<0,\,y<\frac{1}{z}x} f(x,y)\,dx\,dy$

$=\int_0^{+\infty}\int_{-\infty}^{yz} f(x,y)\,dx\,dy+\int_{-\infty}^{0}\int_{yz}^{+\infty} f(x,y)\,dx\,dy$.

$f_Z(z)=\frac{d}{dz}F_Z(z)=\int_0^{+\infty} f(yz,y)\,y\,dy-\int_{-\infty}^{0} f(yz,y)\,y\,dy.=\int_{-\infty}^{+\infty} f(yz,y)|y|\,dy.$

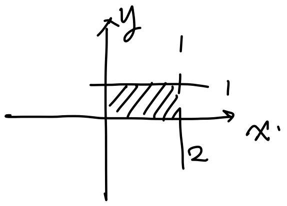
※: $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(yz)f_Y(y)|y|\,dy=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(\frac{x}{z})|x|\,dx$.

3°. 平方和

4°. 极值.

$\begin{cases} n个独立: & F_M(z)=\prod F_{X_i}(z). \\ & F_N(z)=1-\prod[1-F_{X_i}(z)]. \\ n个独立同分布: & F_M(z)=[F(z)]^n. \\ & F_N(z)=1-[1-F(z)]^n. \end{cases}$

0 设区域 $D=\{(x,y)\mid 0\le x<2,\ 0\le y\le 1\}$ (X,Y) 服从 D 上的均匀分布. 令 $M=\max\{X,Y\}$.
$N=\min\{X,Y\}$. 求 M、N 的分布函数.



1°. $f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & 0<x<2,\ 0<y<1\\ 0, & 其他.\end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} f_X(x)=\frac{1}{2},\ 0<x<2 \\ f_Y(y)=1,\ 0<y<1.\end{array}$

$\Rightarrow F_X(x)=\begin{cases}0, & x\le 0.\\ \frac{1}{2}x, & 0<x<2\\ 1, & x\ge 2.\end{cases} \qquad F_Y(y)=\begin{cases}0, & y\le 0\\ y, & 0<y<1\\ 1. & y\ge 1.\end{cases}$

则 X、Y 独立. 可得: $F_M=F_X(z)F_Y(z)=\begin{cases}0, & z\le 0\\ \frac{1}{2}z^2, & 0<z\le 1\\ \frac{1}{2}z, & 1<z\le 2.\\ 1, & z>2.\end{cases}$

$$F_N(z)=1-[1-F_X(z)][1-F_Y(z)]=\begin{cases}0, & z<0\\ 1-\frac{(1-z)(2-z)}{2}, & 0\le z<1\\ 1. & z\ge 1.\end{cases}$$

2°. $F_M(z)=P(X\le z,\ Y\le z)=\iint\limits_{\substack{x\le z\\ y\le z}} f(x,y)\,dx\,dy=\begin{cases}0, & z\le 0\\ \frac{1}{2}z^2, & 0<z\le 1\\ \frac{1}{2}z, & 1<z\le 2\\ 1, & z>2.\end{cases}$

$F_N(z)=1-P(X>z,\ Y>z)=1-\iint\limits_{\substack{x>z\\ y>z}} f(x,y)\,dx\,dy=\begin{cases}0, & z<0\\ 1-\frac{(1-z)(2-z)}{2}, & 0\le z<1.\\ 1. & z\ge 1.\end{cases}$

○ 某器件使用寿命(kh) X 服从参数为 $\lambda=\frac{1}{50}$ 的指数分布
已知某件已使用了10000h，求其至少还能再使用10000h的概率.

⇒ 由指数分布的无记忆性知：

$$P(X\geq 20 \mid X\geq 10)=P(X\geq 10)=\int_{10}^{+\infty}\frac{1}{50}e^{-\frac{x}{50}}dx=0.8187.$$

○ 设随机变量 X 的分布函数：

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<-2\\ 0.3, & -2\leq x<-1\\ 0.9, & -1\leq x<2\\ 1, & x\geq 2.\end{cases}$$

求 $Y=X^2$ 和 $Z=|X|$ 的分布律.

⇒ 由分布函数 $F(x)$ 可知：$X=-2,-1,2$. 且 $P(X=-2)=0.3$. $P(X=-1)=0.6$ $P(X=2)=0.1$

则 $Y=1,4$. 且 $P(Y=1)=P(X=-1)=0.6$. $P(Y=4)=P(X=-2)+P(X=2)=0.4$

$Z=1,2$. 且 $P(Z=1)=P(X=-1)=0.6$. $P(Z=2)=P(X=-2)+P(X=2)=0.4$

○ 设随机变量 $X\sim U(-2,3)$，记 $Y=\frac{X+1}{2}$，求 Y 的概率密度.

法一：

$$F_{Y_2}(y_2)=P(Y_2\leq y_2)=P(\frac{X+1}{2}\leq y_2)=P(X\leq 2y_2-1)=\begin{cases}0, & 2y_2-1<-2\\ \int_{-2}^{2y_2-1}\frac{1}{5}dx, & -2\leq 2y_2-1<3\\ 1, & 2y_2-1\geq 3.\end{cases}$$

$$\Rightarrow P(X\leq 2y_2-1)=\begin{cases}0, & y_2<-\frac{1}{2}\\ \frac{2}{5}y_2+\frac{1}{5}, & -\frac{1}{2}\leq y_2<2\\ 1, & y_2\geq 2\end{cases}\Rightarrow f_{Y_2}(y_2)=F'_{Y_2}(y_2)=\begin{cases}0. & y_2<-\frac{1}{2}\\ \frac{2}{5}, & -\frac{1}{2}\leq y_2<2\\ 0. & y_2\geq 2.\end{cases}$$

法二：由 $Y=\frac{X+1}{2}$ 解得 $X=2Y_2-1$.

又由 $f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{5}, & -2<x<3.\\ 0. & 其他.\end{cases}$ 得：$f_Y(y)=f_X(2y-1)(2y-1)'=\begin{cases}\frac{2}{5}, & -\frac{1}{2}<y_2<2\\ 0, & 其他.\end{cases}$

2) A定理.

例：设随机变量 $X\sim N(0,1)$，$\Phi(x)$ 为 X 的分布函数，记 $Y_1=X^2$，$Y_2=e^{-X}$，$Y_3=X+|X|$。
求 (1) Y_1 概率密度 (2) Y_2 概率密度 (3) Y_3 分布函数 $F_{Y_3}(y)$。

$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\ (-\infty<x<+\infty)$。

(1) 当 $x>0$ 时 $y=x^2$ 反函数为 $x=\sqrt{y}$。$\Rightarrow f_1(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(\sqrt{y})^2}{2}}\cdot|(\sqrt{y})'|=\frac{1}{2\sqrt{2\pi y}}e^{-\frac{y}{2}}$，$y>0$

$x<0$ 时 $y=x^2$ 反函数为 $x=-\sqrt{y}$。$\Rightarrow f_2(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(-\sqrt{y})^2}{2}}|(-\sqrt{y})'|=\frac{1}{2\sqrt{2\pi y}}e^{-\frac{y}{2}}$，$y>0$。

则 $f_{Y_1}=f_1(y)+f_2(y)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}y^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{y}{2}}, & y>0\\ 0, & y\le 0.\end{cases}$

(2) $y=e^{-x}$ 的反函数为 $x=-\ln y\ (y>0)$ 则

$f_{Y_2}=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(-\ln y)^2}{2}}\cdot|(-\ln y)'|, & y>0\\ 0, & y\le 0\end{cases}=\begin{cases}\frac{1}{y\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(\ln y)^2}{2}}, & y>0\\ 0, & y\le 0\end{cases}$

(3) $F_{Y_3}(y)=P(Y_3\le y)=P(X+|X|\le y)=\begin{cases}P(2X\le y), & y\ge 0\\ 0, & y<0\end{cases}=\begin{cases}\Phi(\frac{y}{2}), & y\ge 0\\ 0, & y<0.\end{cases}$

例：设点随机落在以原点为圆心的单位圆上，并设随机点落在圆周上任一小段等长的弧上概率相同，求此点横坐标 X 的概率密度 $f(x)$。

$F(x)=P(X\le x)=\begin{cases}0, & x<-1\\ 1-\frac{1}{\pi}\arccos x, & -1\le x<1\\ 1, & x\ge 1\end{cases}\Rightarrow f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}, & |x|<1\\ 0, & |x|\ge 1.\end{cases}$

○ (3-4). 已知 $X\sim U(-1,2)$, $Y_1=\begin{cases}0, & X<0\\ 1, & 0\le X<1\\ 2, & X\ge 1\end{cases}$. $Y_2=\begin{cases}-1, & X>0\\ 1, & X\le 0\end{cases}$. 求 Y_1, Y_2 的联合分布律与边缘分布律.

$\Rightarrow$ $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}, & -1<x<2\\ 0, & 其他.\end{cases}$ $\quad F(x)=\begin{cases}0, & x<-1\\ \frac{x+1}{3}, & -1\le x<2\\ 1, & x\ge 2\end{cases}$

$P(Y_1=0)=P(X<0)=F_X(0)=\frac{1}{3}$. $\quad P(Y_1=1)=F_X(1)-F_X(0)=\frac{1}{3}$. $\quad P(Y_1=2)=1-F_X(1)=\frac{1}{3}$.

$P(Y_2=-1)=P(X>0)=1-F_X(0)=\frac{2}{3}$. $\quad P(Y_2=1)=F_X(0)=\frac{1}{3}$.

联合分布律:

Y_2 \ Y_1	0	1	2	P_2
-1	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{3}$
1	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$
P_1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1

$$\begin{bmatrix}0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & 0 & 0\end{bmatrix}$$

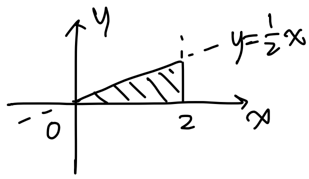
Δ 不能由边缘分布律推联合分布律.

$P(Y_1=0, Y_2=-1)=P(X<0, X>0)=0$. $\quad P(Y_1=0, Y_2=1)=P(x\le 0)=\frac{1}{3}$

$P(Y_1=1, Y_2=-1)=P(0\le x<1)=\frac{1}{3}$ $\quad P(Y_1=1, Y_2=1)=P(0\le x<1, x\le 0)=0$

$P(Y_1=2, Y_2=-1)=P(x\ge 1)=\frac{1}{3}$ $\quad P(Y_1=2, Y_2=1)=P(X\ge 1, x\le 0)=0$.

○ (3-7). 二维随机变量概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{3}{4}x, & (x,y)\in G.\\ 0, & (x,y)\notin G.\end{cases}$

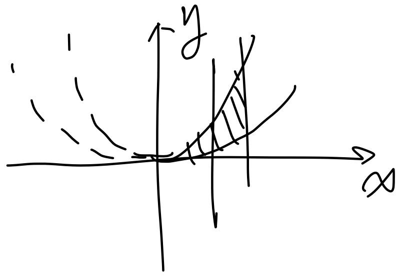


求边缘概率密度:

$\Rightarrow$ $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,dy=\begin{cases}\int_0^{\frac{x}{2}}\frac{3}{4}x\,dy, & 0<x<2\\ 0, & 其他.\end{cases}=\begin{cases}\frac{3}{8}x^2, & 0<x<2\\ 0, & 其他.\end{cases}$

$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,dx=\begin{cases}\int_{2y}^{2}\frac{3}{4}x\,dx, & 0<y<1\\ 0, & 其他\end{cases}=\begin{cases}\frac{3}{2}(1-y^2), & 0<y<1\\ 0, & 其他.\end{cases}$

○ (3-9). 设随机变量(X,Y)在 $G=\{(x,y)\mid y=x^2, y=\frac{x^2}{2}, x=1\}$ 上服从均匀分布. 求 (X,Y) 的联合概率密度和边缘概率密度.



$\Rightarrow S=\frac{1}{6}$. 则 $f(x,y)=\begin{cases} 6, & (x,y)\in G \\ 0, & (x,y)\notin G. \end{cases}$

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy=\begin{cases}\int_{\frac{x^2}{2}}^{x^2} 6\,dy, & 0<x<1 \\ 0, & \text{其他}.\end{cases}=\begin{cases}3x^2, & 0<x<1 \\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx=\begin{cases}\int_{\sqrt{y}}^{\sqrt{2y}} 6\,dx & 0<y<\frac{1}{2} \\ \int_{\sqrt{y}}^{1} 6\,dx, & \frac{1}{2}<y<1 \\ 0, & \text{其他}\end{cases}=\begin{cases}6(\sqrt{2}-1)\sqrt{y}, & 0<y<\frac{1}{2}. \\ 6(1-\sqrt{y}), & \frac{1}{2}<y<1 \\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

○ (3-14). 已知, $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^3}{2}e^{-x(1+y)}, & x>0, y>0. \\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

(1) 求 $f_X(x)$. (2) 求条件概率密度 $f_{Y|X}(y|x)$. 并写出 $f_{Y|X}(y|x=0.5)$.

(3) $P(Y\geq 1 \mid X=0.5)$.

$\Rightarrow$ (1) $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy=\begin{cases}\int_0^{+\infty}\frac{x^3}{2}e^{-x(1+y)}\,dy & x>0 \\ 0, & x<0\end{cases}=\begin{cases}\frac{1}{2}x^2e^{-x}, & x>0 \\ 0, & x<0.\end{cases}$

(2) $f_{Y|X}(y|x)=\dfrac{f(x,y)}{f_X(x)}=\begin{cases}xe^{-xy}, & y>0. \\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

$f_{Y|X}(y|x=0.5)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}y}, & y>0 \\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

(3) $P(Y\geq 1 \mid X=0.5)=\int_1^{+\infty}\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}y}\,dy=e^{-\frac{1}{2}}$.

○ (3-16).

○(3-23) 已知 $f(x,y)=\begin{cases} x+y, & 0<x<1,\ 0<y<1 \\ 0, & 其他. \end{cases}$，求在$\{0<X<\frac{1}{n}\}$条件下Y的条件分布函数.

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy=\begin{cases} x+\frac{1}{2}, & 0<x<1, \\ 0, & 其他 \end{cases} \qquad f_Y(y)=\begin{cases} y+\frac{1}{2}, & 0<y<1 \\ 0, & 其他. \end{cases}$$

$$\Rightarrow F_{Y|X}(y|0<x<\tfrac{1}{n})=P(Y\le y|0<X<\tfrac{1}{n})=\frac{P(Y\le y,\ 0<X<\frac{1}{n})}{P(0<X<\frac{1}{n})}$$

其中 $P(Y\le y,\ 0<X<\frac{1}{n})=\int_0^y\int_0^{\frac{1}{n}}(x+y)dxdy=\frac{1}{2n^2}y+\frac{1}{2n}y^2$, $x>0,\ y>0$.

$$P(0<X<\tfrac{1}{n})=\int_0^{\frac{1}{n}}f_X(x)dx=\int_0^{\frac{1}{n}}(x+\tfrac{1}{2})dx=\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{2n}.$$

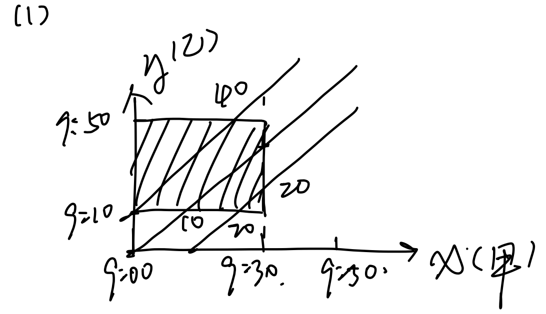
则原式 $=\dfrac{\frac{1}{2n^2}y+\frac{1}{2n}y^2}{\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{2n}}=\dfrac{y(1+ny)}{1+n}$, $0<y<1$.

$$F_{Y|X}(y|0<x<\tfrac{1}{n})=P(Y\le y|0<X<\tfrac{1}{n})=\frac{P(Y\le y,0<X<\frac{1}{n})}{P(0<X<\frac{1}{n})}$$

$$=\frac{\int_0^{\frac{1}{n}}dx\int_{-\infty}^{y}f(x,v)dv}{\int_0^{\frac{1}{n}}dx\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,v)dv}=\begin{cases} 0, & y<0 \\ \dfrac{\int_0^{\frac{1}{n}}dx\int_{-\infty}^{y}(x+v)dv}{\int_0^{\frac{1}{n}}dx\int_{-\infty}^{+\infty}(x+v)dv}, & 0\le y<1 \\ 1, & y\ge 1. \end{cases}=\begin{cases} 0, & y<0 \\ \dfrac{y(1+ny)}{1+n}, & 0\le y<1 \\ 1, & y\ge 1 \end{cases}$$

○(3-22)《候车问题》.

(1)



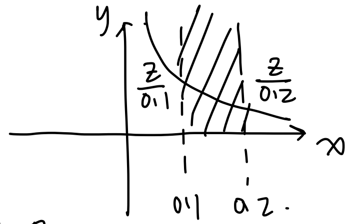
$$f(x,y)=\begin{cases} \frac{1}{1200}, & 0<x<30,\ 10<y<50. \\ 0, & 其他. \end{cases}$$

$$P(甲先到)=\frac{\frac{1}{2}\times 20\times 20}{1200}=\frac{1}{6}.$$

$$P_2=\frac{1200-\frac{1}{2}\times 40\times 40-\frac{1}{2}\times 10\times 10}{1200}=\frac{350}{1200}=\frac{7}{24}.$$

0(3-24). 周销量Y. 单价X. 且 $f(x,y)=\begin{cases}10x e^{-xy}, & 0.1<x<0.2,\ y>0.\\ 0. & 其他.\end{cases}$

(1) 求周收入的概率密度. (2) X的概率密度.



⇒ (1) 周收入. $Z=XY$.

$$F_Z(z)=P(Z\le z)=P(XY\le z)=\iint_{xy\le z} f(x,y)\,dx\,dy.$$

$$=\begin{cases}\int_{0.1}^{0.2}dx\int_0^{\frac{z}{x}}10x e^{-xy}dy, & z>0\\ 0, & z<0.\end{cases}=\begin{cases}1-e^{-z}, & z>0\\ 0, & z<0.\end{cases}$$

则 $f_Z(z)=\frac{d}{dz}F_Z(z)=\begin{cases}e^{-z}, & z>0\\ 0, & z<0.\end{cases}$

(2) $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\int_0^{+\infty}10x e^{-xy}dy, & 0.1<x<0.2\\ 0 & ,其他\end{cases}=\begin{cases}10, & 0.1<x<0.2\\ 0, & 其他.\end{cases}$

(3) $f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\begin{cases}xe^{-xy}, & y>0\\ 0, & y<0.\end{cases}$

⇒ $P(Y>1|X=0.15)=\int_1^{+\infty}0.15e^{-0.15y}dy=e^{-0.15}\approx 0.86$

$P(Y>1|X=0.2)=\int_1^{+\infty}0.2e^{-0.2y}dy=e^{-0.2}\approx 0.82$

0(3-25). $Z=\max(X,Y)$. $Z=\min(X,Y)$.

0(3-29). 当ρ取何值时X与Z相互独立?

※、 $\left[f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,z-x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}f(z-y,y)dy.\right]$

0(3-31). X与Y相互独立. 且 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$. $Y\sim U(-b,b)$. 求 $Z=X+Y$ 的概率密度.

$$F_Z(z)=P(X+Y\le z)=\iint_{x+y\le z}f(x,y)dxdy=\int_{-b}^{b}dy\int_{-\infty}^{z-y}f(x,y)dx$$

$$=\int_{-b}^{b}f_Y(y)dy\int_{-\infty}^{z-y}f_X(x)dx=\int_{-b}^{b}f_Y(y)F_X(z-y)dy=\frac{1}{2b}\int_{-b}^{b}F_X(z-y)dy.$$

则 $f_Z(z)=\frac{d}{dz}F_Z(z)=\frac{1}{2b}\int_{-b}^{b}f_X(z-y)dy=\frac{1}{2b}\left[\Phi\left(\frac{z+b-\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{z-b-\mu}{\sigma}\right)\right].$

△ $f_Z(z)=\int_{-b}^{b}f_X(z-y)\cdot f_Y(y)dy=\frac{1}{2b}\int_{-b}^{b}f_X(z-y)dy=\frac{1}{2b}\int_{z-b}^{z+b}f_X(x)dx$

$=\frac{1}{2b}[F_X(z+b)-F_X(z-b)]$ $\quad\left(F_X(x)=\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right).$

0

第四章、随机变量的数字特征.

○(题5) 设一个办公楼有n层. 共m个人在一楼进入电梯. 若每个人在任何一层楼走出电梯的概率相同. 直到人走空为止. 求电梯需停次数的数学期望.

设X表示电梯需停次数. X_i表示在第i层停或不停. 即$X_i=0$或1. 则$X=\sum_{i=2}^{n}X_i$.

对X_i有:

X_i	0	1
P	$\left(\frac{n-2}{n-1}\right)^m$	$1-\left(\frac{n-2}{n-1}\right)^m$

$\Rightarrow E(X_i)=1-\left(\frac{n-2}{n-1}\right)^m$.

则 $E(X)=E\left(\sum_{i=2}^{n}X_i\right)=\sum_{i=2}^{n}E(X_i)=(n-1)\left[1-\left(\frac{n-2}{n-1}\right)^m\right]$

○(题8). 3台设备每台发生故障相互独立. 且概率为p_1. p_2. p_3. 证明发生故障的设备数的数学期望为$p_1+p_2+p_3$.

证明: $p(X=0)=(1-p_1)(1-p_2)(1-p_3)$

$p(X=1)=p_1(1-p_2)(1-p_3)+(1-p_1)p_2(1-p_3)+(1-p_1)(1-p_2)p_3$.

$p(X=2)=p_1p_2(1-p_3)+p_1(1-p_2)p_3+(1-p_1)p_2p_3$

$p(X=3)=p_1p_2p_3$.

$\Rightarrow E(X)=1\cdot p(X=1)+2\cdot p(X=2)+3\cdot p(X=3)=p_1+p_2+p_3$

○(题13). 加工某种零件内径(mm)服从正态分布$N(\mu,1)$. 内径小于10mm或大于12mm为次品. 销售利润(T)与内径X关系:

$$T=\begin{cases}-1, & X<10\\ 20, & 10\le X<12\\ -5, & X>12.\end{cases}$$

问μ为何值时. 平均利润最大?

$\Rightarrow$ 销售一个零件的利润为:

$T=20p(10\le X<12)-p(X<10)-5p(X>12)$

$=20[\Phi(12-\mu)-\Phi(10-\mu)]-\Phi(10-\mu)-5(1-\Phi(12-\mu))$

$=-21\Phi(10-\mu)+25\Phi(12-\mu)-5$.

对μ求导得: $-21e^{-\frac{(10-\mu)^2}{2}}+25e^{-\frac{(12-\mu)^2}{2}}=0$ 得 $\mu=11-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{21}{25}\right)\approx 10.91$mm

○(题17) 设X与Y相互独立. $X\sim U(0,1)$. Y概率密度为 $f_Y(y)=\begin{cases}e^{-(y-5)}, & y>5\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

求E(XY). D(XY). D(2X-Y).

$\Rightarrow E(XY)=E(X)E(Y)=\int_5^{+\infty}ye^{-(y-5)}dy\cdot\frac{1}{2}=3$, $E[(XY)^2]=\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{12}\right)\int_5^{+\infty}y^2e^{-(y-5)}dy=\frac{37}{3}$.

$D(XY)=\frac{10}{3}$.

$D(2X-Y)=\frac{1}{3}+\int_5^{+\infty}(y-6)^2e^{-(y-5)}dy=\frac{4}{3}$.

○(题20) 在长为l的线段上任取两点. 求两点距离的数学期望和方差.

⇒ 用X、Y表示两点坐标. 距离为$|X-Y|$. 由题得$X\sim U(0,l)$. $Y\sim U(0,l)$.

且X、Y相互独立. 则:

$$E(|X-Y|)=\frac{1}{l^2}\int_0^l\int_0^l |x-y|\,dx\,dy = 2\frac{1}{l^2}\int_0^l dx\int_0^x (x-y)\,dy=\frac{l}{3}.$$

$$E(|X-Y|^2)=\frac{1}{l^2}\int_0^l\int_0^l |x-y|^2\,dx\,dy = 2\frac{1}{l^2}\int_0^l dx\int_0^x (x-y)^2\,dy=\frac{l^2}{6}.$$

$$D(|X-Y|)=\frac{l^2}{18}.$$

○(题22). 设连续型随机变量X的一切可能取值在区间$[a,b]$内. 且概率密度为$f(x)$. 证明:

(1) $a\le E(X)\le b$. (2) $D(X)\le \frac{(b-a)^2}{4}$.

证明: (1) 由期望的定义: $E(X)=\int_a^b x f(x)\,dx \le \int_a^b b\cdot f(x)\,dx=b$

$E(X)=\int_a^b x f(x)\,dx \ge \int_a^b a f(x)\,dx=a$.

(2) 由$D(X)\le E[(X-C)^2]$知: 令$\varphi(C)=E[(X-C)^2]=E(X^2)-2CE(X)+C^2$.

当$C=E(X)$时$\varphi(C)$达到最小. 最小值为$D(X)$. 取$C=\frac{a+b}{2}$得:

$$D(X)\le E\left[\left(X-\frac{a+b}{2}\right)^2\right]=\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2 f(x)\,dx \le \int_a^b\left(b-\frac{a+b}{2}\right)^2 f(x)\,dx=\frac{(b-a)^2}{2}.$$

○(题28) 设A、B是试验E的两个随机事件 且$P(A)>0$. $P(B)>0$. 并定义随机变量X与Y如下:

$$X=\begin{cases}1, & A\text{发生}\\ 0, & \bar{A}\text{发生}.\end{cases}\qquad Y=\begin{cases}1, & B\text{发生}\\ 0, & \bar{B}\text{发生}.\end{cases}$$

证明: 若X与Y不相关. 则X与Y必相互独立.

⇒ X、Y的联合分布律为:

p_{ij}		X = 0	X = 1
Y	0	$P(\bar{A}\bar{B})$	$P(A\bar{B})$
	1	$P(\bar{A}B)$	$P(AB)$

若X、Y不相关.则 $cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=0$. 即$E(XY)=E(X)E(Y)$.

又有$E(XY)=P(AB)$. $E(X)=P(A\bar{B})+P(AB)=P(A)$. $E(Y)=P(\bar{A}B)+P(AB)=P(B)$.

所以$P(AB)=P(A)P(B)$. 则X、Y相互独立.

○(题29) 设二维随机变量 $(X,Y) \sim N(1,9;0,16;-0.5)$. 令 $Z=\frac{X}{3}+\frac{Y}{2}$. 求 $E(Z)$. $D(Z)$. ρ_{XZ}.

$\Rightarrow$ $E(X)=1$. $D(X)=9$. $E(Y)=0$. $D(Y)=16$. $\rho_{XY}=-0.5$.

则 $E(Z)=E(\frac{X}{3}+\frac{Y}{2})=\frac{1}{3}E(X)+\frac{1}{2}E(Y)=\frac{1}{3}$

$D(Z)=D(\frac{X}{3}+\frac{Y}{2})=\frac{1}{9}D(X)+\frac{1}{4}D(Y)+2cov(\frac{X}{3},\frac{Y}{2})=1+4+\frac{1}{3}\rho_{XY}\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}=3$.

$cov(X,Z)=\frac{1}{3}D(X)+\frac{1}{2}cov(X,Y)=0$. $\rho_{XZ}=0$.

○(题31) 二维随变量 (X,Y) 的协方差矩阵为 $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 5\end{pmatrix}$. 令 $U=X-2Y$. $V=2X-Y$. 求 ρ_{UV}.

$\Rightarrow$ $D(X)=1$. $D(Y)=5$. $cov(X,Y)=2$.

$cov(U,V)=cov(X-2Y,2X-Y)=2D(X)-5cov(X,Y)+2D(Y)=2$

$D(U)=D(X-2Y)=D(X)+4D(Y)-4cov(X,Y)=13$.

$D(V)=D(2X-Y)=4D(X)+D(Y)-4cov(X,Y)=1$.

$\rho_{UV}=\frac{2}{\sqrt{13}}$.

○ 计算0-1分布的数学期望和方差.

$\Rightarrow E(X) = 0\cdot(1-p) + 1\cdot p = p.\quad E(X^2) = p.\quad$ 则 $D(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = p - p^2 = p(1-p).$

○ 计算几何分布的数学期望(参数为p).

$\Rightarrow$ 变量 X: $P(X=k) = p(1-p)^{k-1},\ k=1,2,\cdots.$

则 $E(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} kp(1-p)^{k-1} = p\frac{d}{dq}\left(\sum_{k=1}^{+\infty} q^k\right) = p\frac{d}{dq}\left(\frac{q}{1-q}\right) = \frac{1}{p}$

$E(X^2) = E[X(X-1)+X] = E[X(X-1)] + E(X) = E[X(X-1)] + \frac{1}{p}.$

$= \sum_{k=1}^{+\infty} k(k-1)p(1-p)^{k-1} + \frac{1}{p} = p(1-p)\frac{d^2}{dq^2}\left(\sum_{k=1}^{+\infty} q^k\right) + \frac{1}{p} = \frac{2-p}{p^2}.$

$D(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{2-p}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}.$

○ 计算均匀分布的数学期望和方差. $X\sim U(a,b).$

$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a\le x\le b. \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$ 则 $E(X) = \int_a^b x f(x)dx = \int_a^b \frac{x}{b-a}dx = \frac{1}{2}(a+b).$

$E(X^2) = \int_a^b x^2 f(x)dx = \int_a^b \frac{x^2}{b-a}dx = \frac{1}{3}(a^2+ab+b^2)$

$D(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{1}{3}(a^2+ab+b^2) - \frac{1}{4}(a+b)^2 = \frac{(b-a)^2}{12}.$

○ 计算泊松分布的数学期望和方差.

$\Rightarrow$ 变量 X: $P(X=k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}.\ k=0,1,2,\cdots.$

则 $E(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} k\cdot e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = \sum_{k=1}^{+\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{(k-1)!} = \lambda\sum_{k=1}^{+\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda$

$D(X) = \lambda.$

○ 计算指数分布的期望(参数为λ)和方差.

$\Rightarrow$ 变量 x: $f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x>0. \\ 0, & x\le 0. \end{cases}$ 则 $E(X) = \int_0^{+\infty} \lambda x e^{-\lambda x}dx = \frac{1}{\lambda}$

$E(X^2) = \int_0^{+\infty} \lambda x^2 e^{-\lambda x}dx = \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda^2}.$ 则 $D(X) = \frac{1}{\lambda^2}$

○ 设离散型随机变量X的分布律为$P(X=(-1)^{k-1}\frac{2^k}{k})=\frac{1}{2^k}$, $k=1,2,3,\cdots$

$\Rightarrow E(X)=\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k-1}\frac{2^k}{k}\cdot\frac{1}{2^k}=\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k-1}\frac{1}{k}=\ln 2.$ (X)

由于 $\sum_{k=1}^{+\infty}|x_k|p_k=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k}=+\infty$. $\Rightarrow$ 非绝对收敛. 故$E(X)$不存在.

(极小值/极大值分布).

○ 电子元件寿命$X_k(k=1,2,3)$服从参数为λ的指数分布, 并且相互独立.

(1) 3个元件串联组成的系统的期望寿命.

(2) 并联.

$\Rightarrow$ (1) 寿命$N=\min\{X_1,X_2,X_3\}$, 分布函数为:

$$F_N(z)=1-[1-F(z)]^3=\begin{cases}1-e^{-3\lambda z}, & z>0\\ 0, & z\leq 0.\end{cases}$$ 即$N\sim E(3\lambda)$. $\Rightarrow E(N)=\frac{1}{3\lambda}$.

(2) 寿命$M=\max\{X_1,X_2,X_3\}$, 分布函数为:

$$F_M(z)=[F(z)]^3=\begin{cases}(1-e^{-\lambda z})^3, & z>0\\ 0, & z\leq 0.\end{cases}$$

$$\Rightarrow f_M(z)=\frac{d}{dz}F_M(z)=\begin{cases}3\lambda(1-e^{-\lambda z})^2e^{-\lambda z}, & z>0.\\ 0, & z\leq 0.\end{cases}$$

$$E(M)=\int_0^{+\infty}zf_M(z)dz=\int_0^{+\infty}3\lambda z(1-e^{-\lambda z})^2e^{-\lambda z}dz$$
$$=3\lambda\left(\int_0^{+\infty}ze^{-\lambda z}dz-2\int_0^{+\infty}ze^{-2\lambda z}dz+\int_0^{+\infty}ze^{-3\lambda z}dz\right)=\frac{11}{6\lambda}.$$

○ 变量X服从柯西分布. $f(x)=\frac{1}{\pi(1+x^2)}$. $x\in(-\infty,+\infty)$. 证明其数学期望不存在.

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty}|x|f(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|x|}{\pi(1+x^2)}dx=2\int_0^{+\infty}\frac{x}{\pi(1+x^2)}dx=+\infty.$$

(平均利润问题): 随机变量函数的期望.

○. 每周需求量X服从$[200,300]$均匀分布. 每件获利5元, 卖不出去时降价处理亏损2元.

计划每周进货. 求期望利润

$$\Rightarrow \text{利润 } Y=g(X)=\begin{cases}5a, & X\geq a.\\ 5a-2(a-X), & X<a.\end{cases}$$ 由$E(X)=\frac{1}{100}$, 得:

$$E(Y)=\int_{200}^{a}(7x-2a)\frac{1}{100}dx+\int_a^{300}5a\cdot\frac{1}{100}dx=-0.035a^2+19a-1400.$$

○(题1). 将3个相同的球逐个随机放入编号为1,2,3,4的4个盒子中. 以X表示有球盒子的最小号码. 求E(X).

⇒ $X=1,2,3,4$.

$P(X=1)=1-\left(\frac{3}{4}\right)^3$. $P(X=2)=\frac{3^3-2^3}{4^3}$. $P(X=3)=\frac{2^3-1}{4^3}$ $P(X=4)=\frac{1}{4^3}$

则 $E(X)=\frac{25}{16}$.

○(题3). 5局3胜制. 一方先胜3局比赛结束. 每人每局比赛获胜概率相同. 求比赛局数的数学期望.

$P(X=3)=2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{4}$

$P(X=4)=2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)\cdot C_3^2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{8}$

$P(X=5)=2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)\cdot C_4^2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{8}$.

$\Rightarrow E(X)=3\times\frac{1}{4}+4\times\frac{3}{8}+5\times\frac{3}{8}=\frac{33}{8}$

○(题10). 边长为500m的场地. 测量边长误差为X. $f(x)=\begin{cases}k(1-x^2), & |x|<1\\ 0, & 其他\end{cases}$.

$\Rightarrow E(S)=E[(500+X)^2]=250000+1000E(X)+E(X^2)$ (√)

$E(S)=250000+E(X)$ (×).

○(题14). 汽车于每小时的10, 30, 55分发车. 乘客在每小时内任意时刻随机到达车站. 求乘客等候时间的数学期望.

到达时间为X. 则 $X\sim U(0,60)$. 等候时间Y. 则 $Y=g(x)=\begin{cases}10-x, & 0\le x\le 10\\ 30-x, & 10<x\le 30\\ 55-x, & 30<x\le 55\\ 70-x, & 55<x\le 60.\end{cases}$

$E(Y)=E[g(X)]=\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)f(x)\,dx=\int_0^{60}g(x)\cdot\frac{1}{60}\,dx$.

$=\frac{1}{60}\int_0^{10}(10-x)dx+\frac{1}{60}\int_{10}^{30}(30-x)dx+\frac{1}{60}\int_{30}^{55}(55-x)dx+\frac{1}{60}\int_{55}^{70}(70-x)dx$

$=\frac{125}{12}$ (10分25秒).

○(题17). X, Y相互独立. $X\sim U(0,1)$. Y概率密度为 $f_Y(y)=\begin{cases}e^{-(y-5)}, & y>5\\ 0, & 其他\end{cases}$

求$D(XY)$.

○(题18). 二维随机变量联合概率密度为: $f(x,y)=\begin{cases}6xy^2, & 0<x<1,\ 0<y<1\\ 0, & \text{otherwise}\end{cases}$

求 $E(XY)$. $E(2X^2+3Y)$. $D(X+Y)$.

① $\Rightarrow f_Y(y)=\begin{cases}3y^2\\ 0\end{cases}$ $\quad f_X(x)=\begin{cases}2x\\ 0\end{cases}$ $\Rightarrow X,Y$ 独立.

② $\Rightarrow E(XY)=\int_0^1 dx\int_0^1 xy\cdot 6xy^2\,dy=\frac{1}{2}$. $\quad E(2X^2+3Y)=\int_0^1 dx\int_0^1(2x^2+3y)\cdot 6xy^2\,dy$.

$E[(X+Y)^2]=\int_0^1 dx\int_0^1(x^2+2xy+y^2)\cdot 6xy^2\,dy$. $\quad E(X+Y)=\int_0^1 dx\int_0^1(x+y)\cdot 6xy^2\,dy$.

$D(X+Y)=E[(X+Y)^2]-[E(X+Y)]^2$.

○(题30). 设二维随机变量 (X,Y) 在单位圆盘内服从均匀分布. 证明 X,Y 不相关, 但不是相互独立.

$\Rightarrow f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{\pi}, & \sqrt{x^2+y^2}\le 1\\ 0, & \sqrt{x^2+y^2}>1\end{cases}$ (二维均匀分布).

$E(XY)=\int_{-1}^1 dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} xy\cdot\frac{1}{\pi}\,dy=0$.

且 $E(X)=\int_{-1}^1 dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} x\cdot\frac{1}{\pi}\,dy=0$. $\quad E(Y)=\int_{-1}^1 dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} y\cdot\frac{1}{\pi}\,dy=0$.

所以 $\operatorname{cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=0$. 即 X,Y 不相关.

又由:

$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,dy$. $\quad f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,dx$. $\Rightarrow f(x,y)\ne f_X(x)f_Y(y)$.

即 X,Y 不是相互独立.

○(题26). 二维随机变量的联合概率密度为:

$$f(x,y)=\begin{cases}e^{-(x+y)}, & x>0,\ y>0.\\ 0, & \text{otherwise.}\end{cases}$$

求 $E(X)$. $E(Y)$. $D(X)$. $D(Y)$. $\operatorname{cov}(X,Y)$. ρ_{XY}.

$\mathcal{X}$ 0 设随机变量 $X\sim U[-2,2]$. 则 X 和 $Y=|X|$ 的相关系数 ρ_{XY}.

$$\rho_{XY}=\frac{E[(X-E(X))(Y-E(Y))]}{\sqrt{D(X)}\cdot\sqrt{D(Y)}}=\frac{E(XY)-E(X)E(Y)}{\sqrt{D(X)}\cdot\sqrt{D(Y)}}$$

$$=\frac{E(X|X|)}{\sqrt{D(X)}\cdot\sqrt{D(Y)}}=0$$

$$Z=X|X| \Rightarrow f(z)=\begin{cases}\frac{1}{8}, & -4<z<4\\ 0, & \text{其他}.\end{cases} \qquad E(Z)=\int_{-4}^{4}\frac{1}{8}z\,dz=0$$

原假设和备择假设互换的问题

假设检验时，将原假设和备择假设互换，有时候会产生完全相反的结果。例如下面这题，如果令H0 :u>225，H1:u≤225，检验时t的值落在接受域，即认为元件的平均寿命大于225h。在同样显著性水平下，用同样的样本进行假设检验时，不同的原假设和备择假设产生了相反的结论。

例 1 某种元件的寿命 X(以 h 计)服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，μ,σ^2 均未知. 现测得 16 只元件的寿命如下：

159	280	101	212	224	379	179	264
222	362	168	250	149	260	485	170

问是否有理由认为元件的平均寿命大于 225 h?

解 按题意需检验

$$H_0:\mu\leqslant\mu_0=225,\quad H_1:\mu>225.$$

取 $\alpha=0.05$. 由表 8.1 知此检验问题的拒绝域为

$$t=\frac{\bar{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}\geqslant t_\alpha(n-1).$$

现在 $n=16$，$t_{0.05}(15)=1.7531$. 又算得 $\bar{x}=241.5$，$s=98.7259$，即有

$$t=\frac{\bar{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}=0.6685<1.7531.$$

t 没有落在拒绝域中，故接受 H_0，即认为元件的平均寿命不大于 225 h.

问题 4 2 分

假设某厂生产的一种保险丝的融化时间服从分布 $N(\mu,\sigma^2)$，按规定保险丝熔化时间的方差不得超过 400，现从一批产品中抽取 25 个，测得其熔化时间的样本方差为 427.5。在显著性水平为 0.05 下，根据这个样本数据检验这批产品的方差是否符合要求，假设检验的原假设H_0，被择假设H_1，拒绝域W，以及检验结论为:

（**本题查表值**：$\chi^2_{0.05}(24)=36.415$，$\chi^2_{0.025}(24)=39.364$，

$\chi^2_{0.95}(24)=13.848$，$\chi^2_{0.975}(24)=12.401$）

- ○ $H_0:\sigma^2\geq 400, H_1:\sigma^2<400$; $W=\left\{\frac{24S^2}{400}<12.401\right\}$; 结论：符合要求.
- ○ $H_0:\sigma^2\leq 400, H_1:\sigma^2>400$; $W=\left\{\frac{24S^2}{400}>39.364\right\}$; 结论： 不符合要求.
- ● $H_0:\sigma^2\geq 400, H_1:\sigma^2<400$; $W=\left\{\frac{24S^2}{400}<13.848\right\}$; 结论：符合要求.
- ○ $H_0:\sigma^2\leq 400, H_1:\sigma^2>400$; $W=\left\{\frac{24S^2}{400}>36.415\right\}$; 结论：符合要求.

第五章 大数定律和中心极限定理

① 设$\{X_n\}(n\geq1)$为相互独立的随机变量序列，且

X_n	$-\sqrt{\ln n}$	$\sqrt{\ln n}$
P	0.5	0.5

证明$\{X_n\}$服从大数定律.

第六章. 数理统计的基本概念.

○ 设 $(X_1,X_2\cdots X_n)$ 来自总体 $N(\mu,36)$ 样本. 求样本容量 n 为多大时才使得样本均值 $\bar X$ 与 μ 的差的绝对值小于1的概率不小于95%?

单个正态总体的抽样分布:

$X\sim N(\mu,\sigma^2)$ — 总体. $(X_1,X_2,\cdots X_n)$ — 样本.

(1) $\bar X\sim N(\mu,\frac{\sigma^2}{n})$. $\frac{\bar X-\mu}{\sigma/\sqrt n}\sim N(0,1)$.

(2) $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}=\sum_{i=1}^n\left(\frac{X_i-\bar X}{\sigma}\right)^2\sim\chi^2(n-1)$.

(3) 令 $Y=\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$. 则 $\frac{\frac{\bar X-\mu}{\sigma/\sqrt n}}{\sqrt{\frac{Y}{n-1}}}=\frac{\frac{\bar X-\mu}{\sigma/\sqrt n}}{S/\sigma}=\frac{\bar X-\mu}{S/\sqrt n}\sim t(n-1)$

○(题6-9) 设 $(X_1,X_2\cdots X_{10})$ 是来自总体 $N(\mu,0.25)$ 的样本.

(1) 已知 $\mu=0$. 求 $P(\sum_{i=1}^{10}X_i^2\geq 4)$. (2) 当 μ 未知时 求 $P(\sum_{i=1}^{10}(X_i-\bar X)^2\geq 4.23)$.

○(题6-10). 设 $(X_1,X_2,X_3\cdots X_9)$ 来自总体 $N(0,4)$. 记 $Y=\frac15\sum_{i=5}^9 X_i$.

(1) 确定常数 a,b,c. 使 $aX_1^2+b(X_2+X_3+X_4)^2+c\sum_{i=5}^9(X_i-Y)^2$ 服从 χ^2 分布.

(2) 确定常数 d. 使 $d\frac{X_1+X_2}{\sqrt{X_3^2+X_4^2+X_5^2}}$ 服从 t 分布. 并指出自由度.

⇒(1) 由题有: $\frac{X_1}{2}\sim N(0,1)$. $X_2+X_3+X_4\sim N(0,12)$. 则 $\frac{X_2+X_3+X_4}{\sqrt{12}}\sim N(0,1)$.

$\sum_{i=5}^9(X_i-\bar X)^2$ 有 $\sum_{i=5}^9\left(\frac{X_i-\bar X}{2}\right)^2\sim\chi^2(4)$.

$\left(\frac{X_1}{2}\right)^2\sim\chi^2(1)$. $\left(\frac{X_2+X_3+X_4}{\sqrt{12}}\right)^2\sim\chi^2(1)$. 则原式 $\sim\chi^2(6)$.

∴ $a=\frac14$. $b=\frac1{12}$. $c=\frac14$.

(2). $X_1+X_2\sim N(0,8)$ 则 $\frac{X_1+X_2}{\sqrt8}\sim N(0,1)$

$\frac{X_3^2+X_4^2+X_5^2}{4}\sim\chi^2(3)$ 则 $\frac{\frac{X_1+X_2}{\sqrt8}}{\sqrt{\frac{X_3^2+X_4^2+X_5^2}{4\times3}}}=\frac{\sqrt6}{2}\cdot\frac{X_1+X_2}{\sqrt{X_3^2+X_4^2+X_5^2}}$ ⇒ $d=\frac{\sqrt6}{2}$. 自由度为3.

o (题6-11) $\bar{X}\sim N(\mu,\frac{\sigma^2}{n})$. $X_{n+1}\sim N(\mu,\sigma^2)$. 且 X_{n+1} 与 $\bar{X}$ 相互独立.

则 $X_{n+1}-\bar{X}\sim N(0,\frac{\sigma^2}{n}+\sigma^2) \Rightarrow \dfrac{X_{n+1}-\bar{X}}{\sigma\sqrt{\frac{n+1}{n}}}\sim N(0,1)$

又 $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim \chi^2(n-1)$. 则 $\dfrac{X_{n+1}-\bar{X}}{\sigma\sqrt{\frac{n+1}{n}}}\Big/\dfrac{S}{\sigma} = \dfrac{X_{n+1}-\bar{X}}{S}\sqrt{\dfrac{n}{n+1}}\sim t(n-1)$

$Y_2=\dfrac{(X_{n+1}-\bar{X})^2}{S^2}\cdot\dfrac{n}{n+1} = \left(\dfrac{X_{n+1}-\bar{X}}{S}\cdot\sqrt{\dfrac{n}{n+1}}\right)^2 = \left(\dfrac{X_{n+1}-\bar{X}}{\sigma\sqrt{\frac{n+1}{n}}}\right)^2\Big/\left(\dfrac{S^2}{\sigma^2}\right) = F(1,n-1)$.

o (题6-12). 由 $X\sim F(12,12)$. 知 $\frac{1}{X}\sim F(12,12)$.

$P(X\geq 1)=P(\frac{1}{X}\geq 1)= P(X\leq 1)$. 又 $P(X\geq 1)+P(X\leq 1)=1$. 则 $P(X\geq 1)=\frac{1}{2}$;

第七章、参数估计

○(例7.1.2). 总体X服从$[\theta_1,\theta_2]$上均匀分布. θ_1,θ_2未知. $(X_1,X_2,X_3\cdots X_n)$为一个样本. 求θ_1,θ_2的矩估计量.

○(例7.1.3). 一般地. X是一个总体. 其二阶矩存在. 记$E(X)=\mu$. $D(X)=\sigma^2$. μ与σ^2未知 $(X_1,X_2\cdots X_n)$为一个样本. 求μ. σ^2的矩估计量与矩估计值.

3、区间估计.

(1) 估计μ: 若σ^2已知. 使用 $\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$

若σ^2未知: 使用 $\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$.

(2) 估计σ: 若μ已知. 使用 $\frac{1}{\sigma^2}\sum(X_i-\mu)\sim\chi^2(n)$

若μ未知. 使用 $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$

○.(题7.18) t分布求单侧置信上下限. $\bar{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_\alpha(n-1)$, $\bar{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_\alpha(n-1)$.

上限: $P(\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}>t_{1-\alpha})=1-\alpha$.

$\Downarrow$

$P(\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}>-t_\alpha)=1-\alpha$. $\Rightarrow P(\mu<\bar{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_\alpha(n-1))$.

↳ t分布是对称的. $t_{1-\alpha}=-t_\alpha$.

χ^2分布上下限: $\frac{(n-1)S}{\chi^2_\alpha(n-1)}$, $\frac{(n-1)S}{\chi^2_{1-\alpha}(n-1)}$.

上限: $P(\frac{(n-1)S}{\sigma^2}>\chi^2_{1-\alpha}(n-1))=1-\alpha$.

$\Downarrow$

χ^2不对称

○题(7-2). $E(\theta)=\int_1^\theta \frac{2\theta^2}{(\theta^2-1)x^2}dx = -\frac{2\theta^2}{(\theta^2-1)x}\Big|_1^\theta = \frac{2\theta^2}{\theta^2-1}-\frac{2\theta}{\theta^2-1}=\frac{2\theta}{\theta+1}$.

令 $\frac{2\theta}{\theta+1}=\bar{X}$. 矩估计量为 $\hat{\theta}=\frac{\bar{X}}{2-\bar{X}}$. 矩估计值为 $\hat{\theta}=\frac{\bar{x}}{2-\bar{x}}$.

○题(7-4). $E(\theta)=2\theta(1-\theta)+2\theta^2+3(1-2\theta)=-4\theta+3$.

令 $-4\theta+3=\bar{X}$ 得 θ 矩估计值 $\hat{\theta}=\frac{3-\bar{X}}{4}$. $\bar{X}=2$. $\Rightarrow \hat{\theta}=\frac{1}{4}$.

? 似然函数 $L(\theta)=P(X=0)[P(X=1)]^2P(X=2)[P(X=3)]^3=\theta^2(2\theta(1-\theta))^2\theta^2(1-2\theta)^4$.

$\Rightarrow \ln L(\theta)=2\ln 2+6\ln\theta+2\ln(1-\theta)+4\ln(1-2\theta)$.

$\frac{d}{d\theta}\ln L(\theta)=\frac{6}{\theta}-\frac{2}{1-\theta}-\frac{8}{1-2\theta}=0 \Rightarrow \theta=\frac{7\pm\sqrt{13}}{12}$. $\theta\in(0,\frac{1}{2})$. 所以 $\hat{\theta}_{MLE}=\frac{7-\sqrt{13}}{12}$

○(题7-5). $f(T;\lambda)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda T_i}, & T\ge 0.\\ 0, & 其他.\end{cases}$

设 $x_1,x_2\cdots x_n$ 为一组观测值. 则 $L(\lambda)=\prod_{i=1}^{n}(\lambda e^{-\lambda x_i})=\lambda^n e^{-\lambda\sum_{i=1}^n x_i}$.

$\Rightarrow \ln L(\lambda)=n\ln\lambda-\lambda\sum_{i=1}^n x_i=0$. $\frac{d}{d\lambda}\ln L(\lambda)=\frac{n}{\lambda}-\sum_{i=1}^n x_i=0$

得 $\lambda_{MLE}=\frac{n}{\sum_{i=1}^n x_i}=\frac{1}{\bar{x}}$. 代入 $\bar{x}$ 求得 $\hat{\lambda}_{MLE}=0.0008562$.

○(题7-6).

(2). $E(X)=\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{\theta^2}e^{-\frac{x}{\theta}}dx=2\theta \Rightarrow \hat{\theta}=\frac{\bar{X}}{2}$. (矩估计).

设 $x_1,x_2\cdots x_n$ 为一组观测值. 则似然函数为:

$L(\theta)=\prod_{i=1}^n f(x_i;\theta)=\prod_{i=1}^n\frac{x_i}{\theta^2}e^{-\frac{x_i}{\theta}}=\frac{x_1x_2\cdots x_n}{\theta^{2n}}e^{-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^n x_i}$

$\ln L(\theta)=\sum_{i=1}^n\ln x_i-2n\ln\theta-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^n x_i \Rightarrow \frac{d}{d\theta}\ln L(\theta)=-\frac{2n}{\theta}+\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{\theta^2}=0\Rightarrow\hat{\theta}_{MLE}=\frac{\bar{X}}{2}$.

(3) $E(X)=\int_0^1\sqrt{\theta}x^{\sqrt{\theta}}dx=\frac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{\theta}+1} \Rightarrow \hat{\theta}=\left(\frac{\bar{X}}{1-\bar{X}}\right)^2$

设 $x_1,x_2\cdots x_n$ 为一组观测值. 则似然函数为:

$L(\theta)=\prod_{i=1}^n f(x_i;\theta)=\prod_{i=1}^n\sqrt{\theta}x_i^{\sqrt{\theta}-1}=\theta^{\frac{n}{2}}\prod_{i=1}^n x_i^{\sqrt{\theta}-1}$

$\ln L(\theta)=\frac{n}{2}\ln\theta+(\sqrt{\theta}-1)\sum_{i=1}^n\ln x_i. \Rightarrow \frac{d}{d\theta}\ln L(\theta)=\frac{n}{2\theta}+\frac{1}{2\sqrt{\theta}}\sum_{i=1}^n\ln x_i=0$

$\Rightarrow \theta_{MLE}=\left(\frac{n}{\sum_{i=1}^n\ln x_i}\right)^2$.

15) $f(x;\theta)=\begin{cases}\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x-\mu}{\theta}}, & x>\mu. \quad \theta, \mu 未知.\\ 0 & ,其他.\end{cases}$

设$x_1, x_2 \cdots x_n$为一组观测量. 则似然函数为:

$L(\mu,\theta)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x_i-\mu}{\theta}}=\frac{1}{\theta^n}e^{\frac{n\mu}{\theta}-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}x_i}$

$\Rightarrow \ln L(\mu,\theta)=-n\ln\theta+\frac{1}{\theta}n\mu-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}x_i$

$\frac{d}{d\theta}\ln L(\mu,\theta)=-\frac{n}{\theta}-\frac{n\mu}{\theta^2}+\frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{n}x_i=0$, 得: $\theta+\mu=\overline{X}$

$\frac{d}{d\mu}\ln L(\mu,\theta)=\frac{n}{\theta}$. 由$\theta>0$知$\frac{d}{d\mu}\ln L(\mu,\theta)>0$.

而$\mu<x_i\ (i=1,2\cdots n)$. 则$\mu=X_{(1)}=min(x_1,x_2\cdots x_n)$时 $\ln L(\mu,\theta)$最大.

即 $\hat{\mu}=X_{(1)}$, $\hat{\theta}=\overline{X}-X_{(1)}$.

矩估计:

$E(X)=\int_{\mu}^{+\infty}\frac{x}{\theta}e^{-\frac{x-\mu}{\theta}}dx.=\theta+\mu.$ 则 $\theta+\mu=\overline{X}.$

$E(X^2)=\int_{\mu}^{+\infty}\frac{x^2}{\theta}e^{-\frac{x-\mu}{\theta}}dx=\theta^2+(\mu+\theta)^2$. 则 $\theta^2+(\mu+\theta)^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2$

$\Rightarrow \begin{cases}\theta+\mu=\overline{X}\\ \theta^2+(\theta+\mu)^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2\end{cases}$ 解得: $\begin{cases}\hat{\theta}=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}\\ \hat{\mu}=\overline{X}-\hat{\theta}=\overline{X}-\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}.\end{cases}$

第八章. 假设检验.

○ (题8-5)

○ (题8-6) 构造检验统计量 $u=\frac{\bar{x}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$.

① 原假设: H_0: $\mu<\mu_0=19400$.

备择假设: H_1: $\mu\geq\mu_0=19400$.

则在H_0成立的前提下. H_1发生是小概率事件. 即:

$$P\left(\frac{\bar{x}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\geq t_\alpha(n-1)\right)=\alpha.$$

该不等式要与H_1相同.

② 原假设: H_0: $\mu\geq\mu_0=19400$.

备择假设: H_1: $\mu<\mu_0=19400$.

$$\Rightarrow P\left(\frac{\bar{x}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}<-t_\alpha(n-1)\right)=\alpha.$$

和H_1相同.

※. (σ与σ^2检验).

○ (题8-7)

○ (题8-8)

<试卷题目>

μ_0 σ_0

17. 某台机器加工某种零件，规定零件长度为 100cm，标准差不超过 2cm，每天定时检查机器运行情况，某日抽取 10 个零件，测得平均长度 $\overline{X}=101\,\text{cm}$，样本标准差 $S=2.2\,\text{cm}$，设加工的零件长度服从正态分布，问该日机器工作是否正常（$\alpha=0.05$）？

① 构造统计检验量 $U=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$. $\mu_0=100\text{cm}$、$\sigma_0=2\text{cm}$.

假设：$H_0: \mu=\mu_0$. $H_1: \mu\neq\mu_0$.

则由 $P\left(\left|\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma_0/\sqrt{n}}\right|>U_{\frac{\alpha}{2}}\right)=\alpha$ 得接受域为 $\left(\mu_0-\dfrac{\sigma_0}{\sqrt{n}}U_{\frac{\alpha}{2}},\ \mu_0+\dfrac{\sigma_0}{\sqrt{n}}U_{\frac{\alpha}{2}}\right)$ 1.645

$\Rightarrow (98.9596,\ 101.0403)$. 由 $\overline{X}=101$ 得接受原假设. 平均长度正常.

① 检验 μ：假设：$H_0: \mu=100$、$H_1: \mu\neq100$（σ^2 未知）

$U=\dfrac{\overline{X}-100}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$

拒绝域 $(-\infty,-t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1))\cup(t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1),+\infty)$

$\Rightarrow(-\infty,-2.2622)\cup(2.2622,+\infty)$.

1.58. 接受 H_0.

② 检验 σ^2：假设：$H_0: \sigma^2\leq2^2$.

$H_1: \sigma^2>2^2$（μ 未知）

$U=\dfrac{(n-1)S^2}{2^2}\sim\chi^2(n-1)$

拒绝域 $(\chi^2_{\alpha}(n-1),+\infty)$.

接受 H_0.

18. 设总体 X 的分布函数为 $F(x;\alpha)=\begin{cases}1-\left(\dfrac{\alpha}{x}\right)^3, & x\geq\alpha\\ 0, & x<\alpha\end{cases}$，其中 $\alpha>0$ 为未知参数。从总体中抽取样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$。

（1）求 α 的矩估计量，并证明该估计量是一致估计量；

（2）求 α 的极大似然估计量。

$E(\hat{\alpha})=\frac{2}{3}E(\overline{X})=\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}\alpha=\alpha$. $\Rightarrow$ 无偏

$\Rightarrow E(X^2)=\int_{\alpha}^{+\infty}x^2\cdot\dfrac{3\alpha^3}{x^4}dx=3\alpha^2$.

则 $D(X)=E(X^2)-(E(X))^2=\frac{3}{4}\alpha^2$.

$D(\hat{\alpha})=D(\frac{2}{3}\overline{X})=\frac{4}{9}D(\overline{X})=\frac{4}{9}\cdot\dfrac{D(X)}{n}=\dfrac{\alpha^2}{3n}\xrightarrow{n\to\infty}0$. $\Rightarrow$ 一致.

$\Rightarrow$ (1) $f(x;\alpha)=\dfrac{d}{dx}F(x;\alpha)=\begin{cases}\dfrac{3\alpha^3}{x^4}, & x\geq\alpha\\ 0, & x<\alpha\end{cases}$

则 $E(x)=\int_{\alpha}^{+\infty}\dfrac{3\alpha^3}{x^3}dx=\frac{3}{2}\alpha$. 令 $\overline{X}=\sum_{i=1}^{n}X_i$. 则矩估计量：$\hat{\alpha}=\frac{2}{3}\overline{X}$.

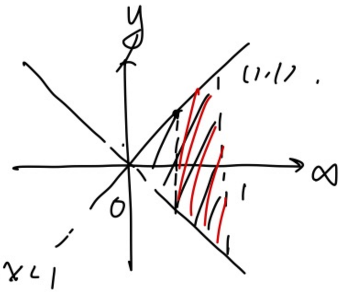
(2) 似然函数：

$L(\alpha)=\prod_{i=1}^{n}\dfrac{3\alpha^3}{x_i^4}=\dfrac{3^n\alpha^{3n}}{x_1^4x_2^4\cdots x_n^4}$. 则 $\ln L(\alpha)=n\ln3+3n\ln\alpha+4\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$.

$\dfrac{d}{d\alpha}\ln L(\alpha)=\dfrac{3n}{\alpha}$. 为增函数. 则当 $\alpha=\min\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 时最大.

即 $\hat{\alpha}_{MLE}=X_{(1)}$.

15．设二维随机变量的密度函数为 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{3}{2}x, & 0<x<1,-x<y<x \\ 0, & 其他\end{cases}$，



（1）X，Y 是否相互独立？（2）试求 $P\left(\min(X, Y)<\frac{1}{2}\right)$。

$\Rightarrow$ (1) $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy = \begin{cases}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{3}{2}x\,dy, & 0<x<1 \\ 0, & 其他\end{cases} = \begin{cases}3x^2, & 0<x<1 \\ 0, & 其他.\end{cases}$

$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx = \begin{cases}\int_{y}^{1}\frac{3}{2}x\,dx, & 0<y<1 \\ \int_{-y}^{1}\frac{3}{2}x\,dx, & -1<y<0 \\ 0, & 其他.\end{cases} = \begin{cases}\frac{3}{4}(1-y^2), & -1<y<1 \\ 0, & 其他\end{cases}$

不独立

$\Rightarrow 1-P(\min(X,Y)\geq\frac{1}{2})$

(2) $P(\min(X,Y)<\frac{1}{2}) = P(X<\frac{1}{2}, Y<\frac{1}{2}) = \iint_{x<\frac{1}{2},\,y<\frac{1}{2}} f(x,y)\,dxdy = \int_0^{\frac{1}{2}}dx\int_{-\infty}^{\infty}\frac{3}{2}x\,dy$

not max!!! $= \int_0^{\frac{1}{2}} 3x^2\,dx = x^3\Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{8}$ $\frac{27}{32}$

19. 在 n 次伯努里试验中，事件 A 出现的概率为 p，令

$$X_i=\begin{cases}1 & 在第i次试验中A发生 \\ 0 & 在第i次试验中A不发生\end{cases}\qquad i=1,2,\cdots,n$$

求在 $X_1+X_2+\cdots+X_n=r(0\le r\le n)$ 的条件下，$X_i(0\le i\le n)$ 的分布律。

由题可知：$P(X_i=1)=p$ · $P(X_i=0)=1-p$.

$\Rightarrow P(X_i=0\mid X_1+X_2+\cdots+X_n=r) = \frac{P(X_i=0,\ X_1+X_2+\cdots+X_{i-1}+X_{i+1}+\cdots+X_n=r)}{P(X_1+\cdots+X_n=r)}$

$= \frac{qC_{n-1}^{r}p^{r}q^{n-1-r}}{C_n^{r}p^{r}q^{n-r}}$. 其中 $q=1-p$.

$P(X_i=1\mid X_1+\cdots+X_n=r) = 1-\frac{n-r}{n} = \frac{r}{n}$.

<选择填空>.

1、事件A,B. $P(\bar{A})=0.3$、$P(B)=0.4$. $P(A-B)=0.5$. 则 $P(B|A\cup\bar{B})=$ $\underline{\frac{1}{4}}$.

2、X服从自由度为(n,n)的F分布. 已知 $P(X>\alpha)=0.5$. 则 $P(X>\frac{1}{\alpha})=$ $\underline{0.5}$.

3. 设 $X\sim U(-1,1)$. X与 $Y=|X|$ 的相关系数 $\rho_{XY}=$ $\underline{0}$.

$\Rightarrow Z=XY$. $F_Z(z)=P(XY\le z)=P(X|X|\le z)=\begin{cases}P(X^2\le z), & x>0\\ P(-X^2\le z), & x<0.\end{cases}$

$E(X|X|)=0$.

4. 已知A,B满足 $P(A|B)+P(\bar{A}|\bar{B})=1$. $0<P(A)$、$P(B)<1$. 则 $\underline{A,B相互独立}$.

$\Rightarrow P(A|B)+P(\bar{A}|\bar{B})=1 \Rightarrow P(A|B)=1-P(\bar{A}|\bar{B})=P(A|\bar{B})$.

$\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{P(A\bar{B})}{P(\bar{B})} \Rightarrow P(AB)P(\bar{B})=P(AB)[1-P(B)]=P(A\bar{B})P(B)=P$

$\Rightarrow P(AB)=P(B)P(AB+P(B)P(A\bar{B})=P(A)P(B)$.

5. 已知 $F_X(x)$, $F_Y(y)$ 分别是随机变量X,Y的分布函数. 若 $F_Z(z)=kF_X(z)-lF_Y(z)$ 是z的分布函数, 则 $\underline{k=\frac{3}{5}.\ l=-\frac{2}{5}}$.

$F_Z(+\infty)=kF_X(+\infty)-lF_Y(+\infty)=k-l=1$

6. 设 $X\sim\begin{pmatrix}0&1\\0.3&0.7\end{pmatrix}$, $Y\sim\begin{pmatrix}0&1\\0.3&0.7\end{pmatrix}$. 若X,Y相互独立 则 ______.

(A) $X=Y$　　(B) $P(X=Y)=1$　　(C) $P(X=Y)=0$　　(D) 都不对

7. μ 的无偏估计中最有效: A.

(A) $\frac{1}{2}X_1+\frac{1}{2}X_2$　　(B) $\frac{1}{3}X_1+\frac{2}{3}X_2$　　(C) $\frac{1}{2}\bar{X}+\frac{1}{2}X_2$　　(D) $\frac{1}{3}\bar{X}+\frac{2}{3}X_2$

8. $X_1,\cdots X_n$ 服从同一分布. $\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$. 则: A

(A) $\mathrm{cov}(X_1,\bar{X})=\frac{\sigma^2}{n}$.　　(B) $\mathrm{cov}(X_1,\bar{X})=\sigma^2$

(C) $D(X_1+\bar{X})=\frac{n+2}{n}\sigma^2$.　　(D) $D(X_1-\bar{X})=\frac{n+1}{n}\sigma^2$.

9. $(X,Y)\sim(1,2;2,4;0)$. 设 $Z=2X+Y-3$, 则 $f_Z(z)=$ ______.

$E(Z)=2E(X)+E(Y)-3=2+2-3=1$.　$D(Z)=4D(X)+D(Y)=8+4=12$.

$Z\Rightarrow f_Z(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot 2\sqrt{3}}e^{-\frac{(z-1)^2}{24}}$.

10. 假设检验要同时减小 α 和 β（一类、二类错误概率）则 ___增大样本容量 n___

11. 设 $U\sim N(0,1)$，给定 α $(0<\alpha<1)$，$P(U>U_\alpha)=\alpha$，若 $P(|U|<c)=\alpha$，则 $c=$ ___$U_{\frac{1-\alpha}{2}}$___

$P(|U|<c)=\alpha \Rightarrow P(U>c)=\frac{1-\alpha}{2}$.

12. 要使 $P(X=k)=at^k$，$k=1,2,\cdots$ 为 X 的分布列 则 ___A___.

(A) $t=(1+a)^{-1}$ 且 $a>0$.　　(B) $a=1-t$ 且 $0<t<1$

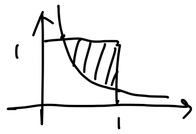
(C) $a=t^{-1}-1$ 且 $t<1$　　(D) $a>0$ 且 $0<t<1$

$\Rightarrow F(+\infty)=\sum_{k=1}^{+\infty}P(X=k)=\sum_{k=1}^{+\infty}at^k=\lim_{k\to\infty}\frac{t(1-t^k)}{1-t}\cdot a=1$

A 和 C 均满足 $F(+\infty)=1$，但 C 没有指明 $P(X=k)\geq 0$.

13. 设 X、Y 独立同分布，$U=X+Y$，$V=X-Y$，则 U 和 V 必然 ___不相关___.

14. 在区间 (0,1) 中随机取两个数，"两数之积大于 $\frac{1}{4}$" 概率为 ___$\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\ln 2$___.



$xy=\frac{1}{4} \Rightarrow \int_{\frac{1}{4}}^{1}dx\int_{\frac{1}{4x}}^{1}dy=$

15. 设 $(X_1,X_2\cdots X_n)$ 为来自总体 $X\sim N(1,4)$ 的一个样本，则样本的联合概率密度为

$f_n(x_1,x_2\cdots x_n)=\prod_{i=1}^{n}f_X(x_i)=\frac{1}{(2\sqrt{2\pi})^n}e^{-\frac{1}{8}\sum_{i=1}^{n}(x_i-1)^2}$.

16. X_{ij} 独立同分布 $E(X_{ij})=3$，则 $Y=\begin{vmatrix}X_{11}&X_{12}\\X_{21}&X_{22}\end{vmatrix}$，$E(Y)=$ ___0___.

17. 设 $X\sim U(0,2)$，则 $Y=X^2$ 在 (0,4) 内的概率密度函数为 ______.

$F_Y(y)=P(X^2\leq y)=P(X\geq-\sqrt{y})+P(X\leq\sqrt{y})=1-F_X(-\sqrt{y})+F_X(\sqrt{y})$.

$X=\pm\sqrt{y}$，$X'=\pm\frac{1}{2\sqrt{y}}$ $\Rightarrow f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{4\sqrt{y}}, & 0<y<4\\ 0, & 其他.\end{cases}$

$f_Y(y)=\begin{cases}f_X(h(y))|h'(y)|.\\ 0.\end{cases}$

18. 设 A、B、C 为随机事件，$P(C)>0$，且 $P(A\cup B|C)=P(A|C)+P(B|C)$.

则正确的是：D

(A) $P(A\cup B|\bar{C})=P(A|\bar{C})+P(B|\bar{C})$　　(C) $P(C)=P(A)P(C|A)+P(B)P(C|B)$

(B) $P(A\cup B)=P(A|C)+P(B|C)$　　(D) $P(C(A\cup B))=P(AC)+P(BC)$.

19. X、Y相互独立，且$X\sim N(0,1)$，$Y\sim N(1,1)$，则 ___B___.

(A) $P(X+Y\le 0)=\frac{1}{2}$　　(C) $P(X-Y\le 0)=\frac{1}{2}$

(B) $P(X+Y\le 1)=\frac{1}{2}$.　　(D) $P(X-Y\le 1)=\frac{1}{2}$.

20. X服从参数为λ的指数分布，则$Y=\max(X,2)$的分布函数 ___C、D___.

(A) 是连续函数.　(B) 是阶梯函数　(C) 至少两个间断点.　(D) 恰好一个间断点，

$\Rightarrow P(Z=2)=1$.　$F_Z(z)=\begin{cases}0, & z<2\\ 1, & z\ge 2\end{cases}$.　$F_X(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ 1-e^{-\lambda x}, & x\ge 0.\end{cases}$

则$Y=\max(X,Z)$：$F_Y(y)=F_X(y)F_Z(y)=\begin{cases}0, & y<2\\ 1-e^{-\lambda y}, & y\ge 2.\end{cases}$ $\Rightarrow$ 一个间断点。

21. 分布函数？

(A) $G_1(x)=\begin{cases}\frac{1}{1+x^2}, & x<0\\ 1, & x\ge 0.\end{cases}$　(B) $G_2(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ 0.6, & x=0\\ 1, & x>0.\end{cases}$ → 不满足右连续.

22. 某商品销售量服从λ泊松分布.选取4天恰有一天销售量为5件的概率 $p=$ ______.

23. X、Y独立同分布且 $X\sim\begin{pmatrix}-1 & 1 & 2\\ 0.2 & 0.2 & 0.6\end{pmatrix}$

则 $Z=\max(X^2,Y^2)$ 的分布为 __________.

24. 二维随机向量(X,Y)的联合分布列为

(X,Y)	(1,0)	(1,1)	(2,0)	(2,1)
P	0.4	0.2	a	b

若$E(XY)=0.8$，则$\mathrm{cov}(X,Y)=$ __________.

25. $(X,Y)\sim N(0,2^2;1,3^2;0)$，则$P(|2X-Y|\ge 1)=$ ______.

26. 已知离散型随机变量X分布函数为$F(x)$，则$P(X=x_k)=$ ______.

$F(x_k)-F(x_{k-1})$.

27. X服从自由度为n的t分布. 则X^2服从的分布是______.

(1,n)的F分布

28. $x_1<x_2$. 且 $P(X\le x_2)\ge 1-\beta$. $P(X>x_1)\ge 1-\alpha$. 则必有 $P(x_1<X<x_2)$ ______

$\ge 1-(\alpha+\beta)$.

29. 变量X·Y相互独立. 且都服从参数为p=0.8的(0-1)分布. 则$Z=\min(X,Y)$的分布律为______.

⇒ 和连续型不一样.

30. 已知$(X,Y)\sim N(1,4;1,9;0.5)$. 令$Z=-2X-Y$. 则$\mathrm{cov}(Z,Y)=$______.

~~31.~~ $P(A)=0.4$. $P(B|A)=0.2$. 则 $P(A\bar{B})=$______.

⇒ $P(AB)=P(A)P(B|A)=0.2\times0.4=0.08$.

$P(A\bar{B})=P(A-B)=P(A-AB)=P(A)-P(AB)=0.4-0.08=0.32$.

31. A, B, C相互独立, 且$0<P(C)<1$. 不相互独立的是____.

(A) $\overline{A\cup B}$ 与 C (B) $\overline{AC}$ 与 $\bar{C}$. (C) $\overline{A-B}$ 与 $\bar{C}$. (D) $\overline{AB}$ 与 $\bar{C}$.

⇒ $P(\overline{AC}\cap\bar{C})=P(\overline{A}\bar{C})$...

⇒ $P(\overline{AC}\cap\bar{C})=P(AC\bar{C})=P(\phi)=0\neq P(\overline{AC})P(\bar{C})$ 不相互独立

观察. (A). (C). (D)中A, B, C没有同时出现在两边.

32. 随机变量X的分布函数$F(x)=0.2\Phi(x)+0.8\Phi(\frac{x}{2}-\frac{1}{2})$. $\Phi(x)$为标准正态分布. 则X的数学期望$E(X)=$ <u>0.8</u>.