



# 第一章 场论

## △ 正交曲线坐标系中的场论

○ 在球坐标系中，若矢量  $\vec{A} = \frac{\cos^2\phi}{R^3} \vec{a}_R$ ,  $1 \leq R \leq 2$ . 求  $\int_V \nabla \cdot \vec{A} dV$ .

$$\Rightarrow \int_V \nabla \cdot \vec{A} dV = \int_S \vec{A} \cdot d\vec{S} = \int_1^2 \frac{1}{R^3} dR \int_0^{2\pi} \cos^2\phi d\phi \int_0^\pi d\theta = \frac{3}{8} \cdot \pi \cdot \pi = \frac{3}{8} \pi^2$$

○ 在球坐标系中证明:  $\nabla^2 \left( \frac{e^{-jKR}}{R} \right) = \frac{-k^2 e^{-jKR}}{R}$ .

$$\Rightarrow h_1 = 1, h_2 = R, h_3 = R \sin\theta.$$

由  $\nabla^2 \phi = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[ \frac{\partial}{\partial u_1} \left( h_2 h_3 \frac{1}{h_1} \frac{\partial \phi}{\partial u_1} \right) + \frac{\partial}{\partial u_2} \left( h_1 h_3 \frac{1}{h_2} \frac{\partial \phi}{\partial u_2} \right) + \frac{\partial}{\partial u_3} \left( h_1 h_2 \frac{1}{h_3} \frac{\partial \phi}{\partial u_3} \right) \right]$  得:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \left( \frac{e^{-jKR}}{R} \right) &= \frac{1}{R^2 \sin\theta} \left[ \frac{\partial}{\partial R} \cdot R^2 \sin\theta \cdot \frac{-jke^{-jKR}}{R} + \frac{\partial}{\partial \theta} \cdot R \sin\theta \cdot \frac{1}{R} \cdot 0 + \frac{\partial}{\partial \phi} \cdot R \cdot \frac{1}{R \sin\theta} \cdot 0 \right] \\ &= \frac{1}{R^2} (-k^2 e^{-jKR} \cdot R - jke^{-jKR} + jke^{-jKR}) = \frac{-k^2 e^{-jKR}}{R}. \end{aligned}$$

## △ 题型：不同坐标系之间矢量表达式转换

○ 已知直角坐标系中  $\vec{A} = x^2 \vec{a}_x + xy \vec{a}_y + \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \vec{a}_z$ . 求在圆柱坐标系中表达式.

由  $\begin{bmatrix} \vec{a}_x \\ \vec{a}_y \\ \vec{a}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{a}_r \\ \vec{a}_\theta \\ \vec{a}_z \end{bmatrix}$  得:  
 $x = G_1 = r \cos\psi$   
 $y = G_2 = r \sin\psi$   
 $z = G_3 = z$ .

$$\begin{aligned} \vec{A} &= x^2 \vec{a}_x + xy \vec{a}_y + \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \vec{a}_z = (r \cos\psi)^2 (\cos\psi \vec{a}_r - \sin\psi \vec{a}_\theta) \\ &\quad + r^2 \cos\psi \sin\psi (\sin\psi \vec{a}_r + \cos\psi \vec{a}_\theta) + r \cos^2\psi \vec{a}_z \\ &= (r^2 \cos^3\psi + r^2 \cos^2\psi \sin\psi) \vec{a}_r + (r^2 \cos^2\psi \sin\psi - r^2 \cos^2\psi \sin\psi) \vec{a}_\theta + r \cos^2\psi \vec{a}_z \\ &= r^2 \cos\psi \vec{a}_r + r \cos^2\psi \vec{a}_z. \end{aligned}$$

代入坐标变换关系和单位矢量变换关系，再整理表达式.

△ 已知直角坐标中坐标  $\vec{A} = A_x \vec{a}_x + A_y \vec{a}_y + A_z \vec{a}_z$ .

① 用  $\begin{bmatrix} \vec{a}_r \\ \vec{a}_\theta \\ \vec{a}_z \end{bmatrix} = T \cdot \begin{bmatrix} \vec{a}_x \\ \vec{a}_y \\ \vec{a}_z \end{bmatrix}$  转换得到:  $\vec{A} = A_r \vec{a}_r + A_\theta \vec{a}_\theta + A_z \vec{a}_z$ .

此时  $A_r, A_\theta, A_z$  中包含了  $x, y, z$  坐标，再将其替换即可 } 本质上是一样的

② 用  $\begin{bmatrix} \vec{a}_r \\ \vec{a}_\theta \\ \vec{a}_z \end{bmatrix} = T \cdot \begin{bmatrix} \vec{a}_x \\ \vec{a}_y \\ \vec{a}_z \end{bmatrix}$  转换得到:  $\vec{A} = A_r \vec{a}_r + A_\theta \vec{a}_\theta + A_z \vec{a}_z$ .

此时  $A_r, A_\theta, A_z$  仍为  $x, y, z$  形式，将其替换即可 } 不一样

○ 已知圆柱坐标系中矢量  $\vec{A} = a \vec{a}_r + b \vec{a}_\theta + c \vec{a}_z$ .  $a, b, c$  为非零常数，则  $\vec{A}$  是变矢量还是常矢量？

⇒ 变矢量.

○ 已知圆柱坐标系中矢量  $\vec{A} = 4\vec{a}_r + 3\vec{a}_\varphi + 2\vec{a}_z$  和  $\vec{B} = -3\vec{a}_r + 3\vec{a}_\varphi + 2\vec{a}_z$  的起点坐标分别为点  $P(4, \frac{\pi}{6}, 2)$ ,  $Q(2, \frac{\pi}{3}, 2)$ . 求起点坐标在  $R(1, \frac{\pi}{4}, 2)$  处的矢量  $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$ .

→ 首先看两个矢量的起点,  $\vec{A}$  和  $\vec{B}$  不在同一平面上. 所以在圆柱坐标系中不能直接求和, 需变换到直角坐标系.

对起点为  $P$  的矢量  $A$  有:  $\psi = \frac{\pi}{6}$ .  $\begin{bmatrix} \vec{a}_r \\ \vec{a}_\varphi \\ \vec{a}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{a}_x \\ \vec{a}_y \\ \vec{a}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{a}_x \\ \vec{a}_y \\ \vec{a}_z \end{bmatrix}$

则  $\vec{A} = 4\vec{a}_r + 3\vec{a}_\varphi + 2\vec{a}_z = 4(\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{a}_x + \frac{1}{2}\vec{a}_y) + 3(-\frac{1}{2}\vec{a}_x + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{a}_y) + 2\vec{a}_z = 1.964\vec{a}_x + 4.598\vec{a}_y + 2\vec{a}_z$

对起点为  $Q$  的矢量  $B$  有:  $\psi = \frac{\pi}{3}$ .  $\begin{bmatrix} \vec{a}_r \\ \vec{a}_\varphi \\ \vec{a}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{a}_x \\ \vec{a}_y \\ \vec{a}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{a}_x \\ \vec{a}_y \\ \vec{a}_z \end{bmatrix}$

则  $\vec{B} = -3\vec{a}_r + 3\vec{a}_\varphi + 2\vec{a}_z = -3(\frac{1}{2}\vec{a}_x + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{a}_y) + 3(-\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{a}_x + \frac{1}{2}\vec{a}_y) + 2\vec{a}_z = -4.098\vec{a}_x - 1.098\vec{a}_y + 2\vec{a}_z$

$$\Rightarrow \vec{C} = \vec{A} + \vec{B} = -2.134\vec{a}_x + 3.5\vec{a}_y + 4\vec{a}_z$$

再将  $\vec{C}$  变换到起点在  $R(1, \frac{\pi}{4}, 2)$  处的坐标系:

$$\begin{bmatrix} \vec{a}_x \\ \vec{a}_y \\ \vec{a}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{a}_r \\ \vec{a}_\varphi \\ \vec{a}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{a}_r \\ \vec{a}_\varphi \\ \vec{a}_z \end{bmatrix}$$

则  $\vec{C} = -2.134(\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{a}_r - \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{a}_\varphi) + 3.5(\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{a}_r + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{a}_\varphi) + 4\vec{a}_z = 0.966\vec{a}_r + 3.983\vec{a}_\varphi + 4\vec{a}_z$ .

○ 在球坐标系中, 已知矢量  $\vec{A} = (2\cos\varphi/R^3)\vec{a}_\theta + \sin\theta\vec{a}_\phi$  的起点不在坐标原点, 求该矢量在直角坐标系中的表达式.

→ 直角坐标系中:  $P_1(0, -5, 0)$ ,  $P_2(5, \frac{\pi}{4}, 0)$ .

$$\vec{A} = \frac{5}{2}\sqrt{2}\vec{a}_x + (\frac{5}{2}\sqrt{2} + 1)\vec{a}_y.$$

0(题17). 求标量函数  $\phi = 2x^2y + 3y^2z + xz^2$  在点  $(1, -1, 1)$  处沿矢量  $\vec{l} = y\vec{a}_x + xz\vec{a}_y + xy\vec{a}_z$  方向的  
向导数。

$$\Rightarrow \nabla \phi = (\frac{\partial}{\partial x}\vec{a}_x + \frac{\partial}{\partial y}\vec{a}_y + \frac{\partial}{\partial z}\vec{a}_z) \phi = (4xy + z^2)\vec{a}_x + (2x^2 + 6yz)\vec{a}_y + (6yz + 2xz)\vec{a}_z.$$

$$\vec{n} = -3\vec{a}_x - 4\vec{a}_y + 5\vec{a}_z, \vec{e} = -\vec{a}_x + \vec{a}_y - \vec{a}_z$$

$$D_{\vec{n}} \frac{\partial \phi}{\partial \vec{l}} = \vec{n} \cdot \vec{e} = (-3, -4, 5) \cdot (-1, 1, \cancel{1}) = 3 \quad \vec{a}_l = \frac{\vec{l}}{|\vec{l}|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1, 1, 1)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \vec{l}} = \vec{n} \cdot \vec{a}_l = -2\sqrt{3}.$$

0(题18). 在球坐标系中。若矢量  $\vec{A} = \frac{\cos^2\varphi}{R^3} \vec{a}_R$ ,  $1 \leq R \leq 2$ . 求  $\int_V \nabla \cdot \vec{A} dV$ .

$\Rightarrow$  用球坐标计算时不要忘记  $\boxed{[R^2 \sin\theta dR d\theta d\varphi]}$ .

0(题19). 直角坐标系中。已知  $\vec{A} = a\vec{a}_x + b\vec{a}_y + c\vec{a}_z$ . 点不在坐标原点, 分别写出  
圆柱坐标系和球坐标系中  $\vec{A}$  的表达式。

① 圆柱坐标系:

$$\begin{cases} \vec{a}_x = \cos\varphi \vec{a}_r - \sin\varphi \vec{a}_{\theta} \\ \vec{a}_y = \sin\varphi \vec{a}_r + \cos\varphi \vec{a}_{\theta} \\ \vec{a}_z = \vec{a}_z \end{cases} \Rightarrow \vec{A} = a(\cos\varphi \vec{a}_r - \sin\varphi \vec{a}_{\theta}) + b(\sin\varphi \vec{a}_r + \cos\varphi \vec{a}_{\theta}) + c\vec{a}_z \\ = (a\cos\varphi + b\sin\varphi) \vec{a}_r + (b\cos\varphi - a\sin\varphi) \vec{a}_{\theta} + c\vec{a}_z.$$

② 球坐标系:

$$\vec{A} = (a\sin\theta \cos\varphi + b\sin\theta \sin\varphi + c\cos\theta) \vec{a}_R + (a\cos\theta \cos\varphi + b\cos\theta \sin\varphi - c\sin\theta) \vec{a}_{\theta} \\ + (-a\sin\varphi + b\cos\varphi) \vec{a}_{\varphi}$$

$\Rightarrow$  起点不在圆点, 且  $\varphi \neq 0$ , 则这些坐标系的坐标不是固定不变的。

## 第二章 静电场

### 1. 真空静电场

无限长直导线电场:  $\vec{E} = \frac{\rho}{2\pi\epsilon_0 r} \hat{a}_r$ .  $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$ .

高斯定理:  $\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{s} = Q$ .  $\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q}{\epsilon_0}$ . (积分)  $\nabla \cdot \vec{D} = \rho$ ,  $\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$  (微分)

2. 电位  $\phi$ ,  $\phi_b = \int_b^P \vec{E} \cdot d\vec{l}$  ( $\phi_p = 0$ )

已知中求  $\vec{E}$ :  $\vec{E} = -\nabla\phi = -(\frac{\partial\phi}{\partial x} \hat{a}_x + \frac{\partial\phi}{\partial y} \hat{a}_y + \frac{\partial\phi}{\partial z} \hat{a}_z)$ .

已知  $\vec{E}$  求  $\phi$ :  $\phi = \int_b^P \vec{E} \cdot d\vec{l}$ .

电位方程:  $\nabla^2\phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$  (无源区),  $\nabla^2\phi = 0$  (有源区).

泊松方程

拉普拉斯方程

对一维边值问题, 可由  $\nabla^2\phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$  或  $\nabla^2\phi = 0$  解出电位  $\phi$ , 再求  $\vec{E}$ .

例 2.4

对二维、三维边值问题, 需通过分离变量求解.

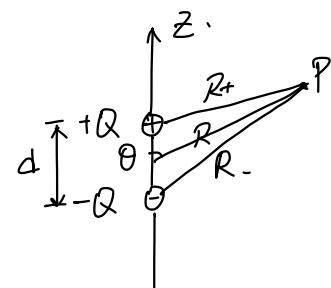
### 3. 电介质静电场

#### (1) 电偶极子 (P39).

电位:  $\phi \approx \frac{\alpha d \cos\theta}{4\pi\epsilon_0 R^2}$ .  $\phi = \frac{\vec{P} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 R^3} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \vec{P} \cdot \nabla \left( \frac{1}{R} \right)$ .

电偶极矩:  $\vec{P} = \alpha d \hat{a}_z$ .

电场强度:  $\vec{E} = \frac{2P \cos\theta}{4\pi\epsilon_0 R^3} \hat{a}_R + \frac{P \sin\theta}{4\pi\epsilon_0 R^3} \hat{a}_\theta$ .  $(R^3)$ .



#### (2) 电介质静电场

是密度, 不是梯度.

$\left\{ \begin{array}{l} \text{束缚体电荷密度} = p_p = -\nabla \cdot \vec{P} \\ \text{束缚面电荷密度} = p_s = \vec{P} \cdot \hat{a}_n \end{array} \right.$  高斯定理:  $\nabla \cdot \vec{D} = \rho \Rightarrow \vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} = \epsilon \vec{E}$ .

$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{s} = Q$ .

$\Delta \vec{D}$  的源是自由电荷, 主的源是自由电荷 + 束缚电荷.

$$\begin{aligned} p_p = 0 \text{ 的条件} &= p_p = -\nabla \cdot \vec{P} = -\nabla \cdot (\epsilon_0 \epsilon_r \vec{E}) = -\nabla \left( \frac{\epsilon_r}{1+\epsilon_r} \vec{D} \right) \\ &= -\frac{\epsilon_r}{1+\epsilon_r} \nabla \cdot \vec{D} - \vec{D} \cdot \nabla \left( \frac{\epsilon_r}{1+\epsilon_r} \right) = 0. \end{aligned}$$

得: 自由电荷为 0 即  $\nabla \cdot \vec{D} = 0$ . 介电常数即  $\nabla \left( \frac{\epsilon_r}{1+\epsilon_r} \right) = 0$ .

#### 4. 静电场边界条件

(1) 主和副的边界条件.

① 主的切向分量:  $E_{1t} = E_{2t}$ ,  $\vec{a}_n \times (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) = 0$ .

媒质1  
媒质2

② 副的法向分量:  $D_{1n} - D_{2n} = p_s$ ,  $\vec{a}_n \cdot (\vec{D}_{1n} - \vec{D}_{2n}) = p_s \rightarrow$  自由电荷.

特别地, 若 1 为理想媒质, 2 为理想导体,  $\Rightarrow \vec{a}_n \cdot \vec{D}_1 = p_s$ ,  $D_{1n} = p_s$ ,  $E_t = 0$ .

导体表面介质一侧电通量密度法向分量与导体表面面电荷密度.

束缚电荷  
↑  
 $p_{ps}$

若 1, 2 均为理想媒质, 且分界面上无自由面电荷,  $D_n \Rightarrow D_{1n} = D_{2n}$ ,  $E_{1n} - E_{2n} = \frac{p_s}{\epsilon_0}$ .

$D_{1n} \neq \epsilon_0 E_{1n}$ ,  $D_{2n} \neq \epsilon_0 E_{2n}$  !

$E_t$  不连续是由于束缚电荷引起的.

此时有电场折射定律:  $\frac{\tan \theta_1}{\tan \theta_2} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} = \frac{\epsilon_r 1}{\epsilon_r 2}$ ,  $D_n = \epsilon E_n = \epsilon_0 E_n + p_n$  并且  $p_{ps} = p_n$

Δ 副的源是自由电荷.

主的源是自由电荷 + 束缚电荷.

(2) 电压中的边界条件.

① 媒质分界面处电压连续:  $\phi_1 = \phi_2$ .

② 若分界面存在自由电荷, 法向导数不连续:  $\epsilon_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial n} - \epsilon_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial n} = p_s$  ( $D_n = \epsilon E_n = -\epsilon \frac{\partial \phi}{\partial n}$ ).

5. 静电场边值问题的解法=分离变量法、镜像法.

△分离变量法.

1. 直角坐标系. 电位 $\phi$ 满足 Laplace 方程:  $\nabla^2\phi=0$ . (电位方程).

$$\text{即 } \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = 0. \quad \text{令 } \phi(x,y,z) = X(x)Y(y)Z(z)$$

经整理可得三个关于  $x, y, z$  的常系数分立方程.

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = 0$$

$$\frac{d^2X}{dx^2} + k_x^2 X = 0, \quad \frac{d^2Y}{dy^2} + k_y^2 Y = 0, \quad \frac{d^2Z}{dz^2} + k_z^2 Z = 0 \quad k_x, k_y, k_z \text{ 为分离常数/本征值.}$$

-维: ①  $k_x = 0$ , 通解为  $X = A_0 + B_0 x$ .

$$\begin{cases} \text{② } k_x^2 > 0, k_x \text{ 为实数. 通解为 } \\ \quad X = A_1 e^{-jk_x x} + B_1 e^{jk_x x} \quad (\text{指数形式}) \\ \quad X = A_2 \cos k_x x + B_2 \sin k_x x \quad (\text{三角函数形式}). \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{③ } k_x^2 < 0, k_x \text{ 为纯虚数. 通解为 } \\ \quad X = A_3 e^{-jk_x x} + B_3 e^{jk_x x} \\ \quad X = A_4 \cosh(-jk_x x) + B_4 \sinh(-jk_x x) \end{cases}$$

若  $x$  为无限区域, 用指数形式; 若  $x$  为有限区域且  $x$  有周期, 用双曲正弦形式.

二维: 设  $k_x^2 > 0, k_y^2 \leq 0$ . 由  $|k_x| = |k_y| = k > 0$ .

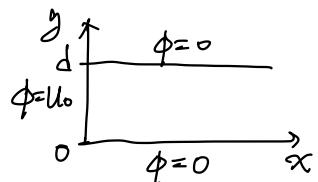
通解形式为:  $\phi = (A_0 + B_0 x)(C_0 + D_0 y) + (A_1 \cos k_x x + B_1 \sin k_x x)(C_1 \cosh k_y y + D_1 \sinh k_y y)$ .

$$\phi = (A_0 + B_0 x)(C_0 + D_0 y) + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos k_n x + B_n \sin k_n x)(C_n \cosh k_n y + D_n \sinh k_n y).$$

0. 半无限长导体槽. 上下壁接地.  $x=0$  处激励电压为  $U_0$ . 求导体槽中电位分布  $\phi(x,y)$  和电场强度.

$\Rightarrow$  二维边值问题.  $E_y = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = 0$ .

$$\begin{cases} \text{B.C. } \phi(x,0) = 0, \quad \phi(x,d) = 0 \\ \phi(\infty, y) = 0, \quad \phi(0, y) = U_0. \end{cases}$$



令  $\phi(x,y) = X(x)Y(y)$ .  $x$  为无限区域. 取  $k_x = j\alpha$ . 由  $X(x) = A e^{-\alpha x} + B e^{\alpha x}$ .

$y$  为有限且周期. 取  $k_y = \alpha$ . 由  $Y(y) = C \cos \alpha y + D \sin \alpha y$ .

通解:  $\phi(x,y) = (A_0 + B_0 x)(C_0 + D_0 y) + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n e^{-\alpha x} + B_n e^{\alpha x})(C_n \cos \alpha y + D_n \sin \alpha y)$ .

由边界条件:  $\phi(x,0) = (A_0 + B_0 x)C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n e^{-\alpha x} + B_n e^{\alpha x})C_n = 0 \Rightarrow C_0 = 0, C_n = 0$

$$\phi(x,d) = (A_0 + B_0 x)D_0 d + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n e^{-\alpha x} + B_n e^{\alpha x})D_n \sin \alpha d = 0$$

$$\Rightarrow D_0 = 0, \sin \alpha d = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{n\pi}{d}, n=1, 2, 3, \dots$$

$$\phi(0,y) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cdot \infty \cdot (D_n \sin \alpha y) = 0 \Rightarrow B_0 = 0, B_n = 0.$$

$$A_n' = A_n D_n$$

$$\text{设 } \phi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n' e^{-\frac{n\pi x}{a}} \sin \frac{n\pi}{a} y. \quad \text{又由 } \phi(a, y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n' \sin \frac{n\pi}{a} y = U_0 \text{ 得:}$$

$$\int_0^a U_0 \sin \frac{n\pi}{a} y dy = \int_0^a \sum_{n=1}^{\infty} A_n' \sin \frac{n\pi}{a} y \sin \frac{n\pi y}{a} dy = \frac{A_n'}{2} a.$$

$$\Rightarrow \int_0^a U_0 \sin \frac{n\pi}{a} y dy = \begin{cases} 0, & n \text{为偶} \\ \frac{2dU_0}{n\pi}, & n \text{为奇} \end{cases} \Rightarrow A_n' = \begin{cases} 0, & n \text{为偶} \\ \frac{4U_0}{n\pi}, & n \text{为奇} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \phi(x, y) = \sum_{n=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \frac{4U_0}{n\pi} e^{-\frac{n\pi x}{a}} \sin \frac{n\pi y}{a}. n \text{为奇数.}$$

$$\vec{E} = -\nabla \phi = -\frac{4U_0}{a} \sum_{n=1, 3, 5, \dots}^{\infty} (\bar{a}_x \sin \frac{n\pi y}{a} - \bar{a}_y \cos \frac{n\pi y}{a}) e^{-\frac{n\pi x}{a}}$$

## 2. 圆柱坐标系.

0 - 无限长金属管, 三壁接地. 另一壁电压由  $100 \sin \frac{\pi x}{a}$  (V). 求管内电压分布.

$$Eq: \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0, \text{ 令 } \phi(x, y) = X(x) Y(y).$$

$$BC: \begin{cases} \phi(x, 0) = 0, \quad \phi(x, b) = 100 \sin \frac{\pi x}{a}. \end{cases}$$

$\phi(0, y) = 0, \quad \phi(a, y) = 0. \Rightarrow \text{边界从两个端点开始}$

$x$  有有限且周期. 令  $k_x = \alpha$ .  $\Im Y(x) = A \cos \alpha x + B \sin \alpha x$ .

$y$  有有限. 令  $k_y = j\alpha$ .  $\Im Y(y) = C \cosh(j\alpha y) + D \sinh(j\alpha y)$ . ~~×~~

$$\text{通解: } \phi(x, y) = (A_0 + B_0 x)(C_0 + D_0 y) + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \cos \alpha x + B_n \sin \alpha x] [C_n \cosh(j\alpha y) + D_n \sinh(j\alpha y)].$$

$$\text{由 } \phi(0, y) = A_0(C_0 + D_0 y) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n [C_n \cosh(j\alpha y) + D_n \sinh(j\alpha y)] = 0 \Rightarrow A_0 = A_n = 0.$$

$$\phi(a, y) = B_0 a (C_0 + D_0 y) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \alpha a [\cosh(j\alpha y) + D_n \sinh(j\alpha y)] = 0.$$

$$\Rightarrow B_0 = 0, \quad \sin \alpha a = 0. \quad \text{即 } \alpha = \frac{n\pi}{a}, \quad n=1, 2, 3 \dots$$

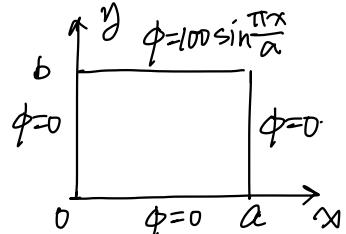
$$\phi(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \alpha x \cdot C_n = 0 \Rightarrow C_n = 0.$$

$$\Im Y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n' \sin \frac{n\pi x}{a} \sinh \left( \frac{n\pi y}{a} \right)$$

$$\Re \phi(x, b) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n' \sin \frac{n\pi x}{a} \sinh \frac{n\pi b}{a} = 100 \sin \frac{\pi x}{a}.$$

$$\text{通过比较系数得: } \begin{cases} n=1, \quad A_1' = \frac{100}{\sinh \frac{\pi b}{a}}. \\ n \neq 1, \quad A_n' = 0. \end{cases}$$

$$\Im Y(\phi(x, y)) = \frac{100}{\sinh \frac{\pi b}{a}} \sin \frac{\pi x}{a} \sinh \frac{\pi y}{a} \quad (0 \leq x \leq a, 0 \leq b \leq y).$$

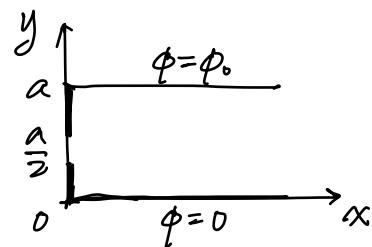


(题2-18)

0 - 矩形槽由两部分构成，两平行板电位为 $\phi_0$ , 0。求槽内电位分布。

$$\Rightarrow \nabla^2\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = 0$$

$$B.C. = \begin{cases} \phi(0, 0 \leq y \leq \frac{a}{2}) = 0, \quad \phi(0, \frac{a}{2} \leq y \leq a) = \phi_0, \\ \phi(x, 0) = 0, \quad \phi(x, a) = \phi_0, \quad \phi(\infty, y) = 0. \end{cases}$$



不好求解。

$$\begin{array}{c} \text{原问题} \\ \text{原问题为(1)和(2)的叠加。} \end{array} = \begin{array}{c} (1) \\ \phi_1(y) = \frac{\phi_0}{a}y, \quad \phi = \phi_0, \quad \phi = 0, \quad \phi = 0. \end{array} + \begin{array}{c} (2) \\ \phi_2 = \phi_0 - \frac{\phi_0}{a}y, \quad \phi = 0, \quad \phi = -\frac{\phi_0}{a}y, \quad \phi = 0. \end{array}$$

(1) 中为电容器电位。 $\phi_1(y) = \frac{\phi_0}{a}y$ .

$$(2) 中有  $\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = 0$  B.C. =  $\begin{cases} \phi(x, 0) = 0, \quad \phi(x, a) = 0 \\ \phi(a, y) = \begin{cases} \phi_0 - \frac{\phi_0}{a}y, & \frac{a}{2} \leq y \leq a, \quad \phi(\infty, y) = 0 \\ -\frac{\phi_0}{a}y, & 0 \leq y \leq \frac{a}{2}. \end{cases} \end{cases}$$$

$x$  为无限区域，设  $k_x = j\alpha$ . 由  $X(x) = A e^{-\alpha x} + B e^{\alpha x}$ .

$y$  为有限且周期。设  $k_y = \alpha$ . 由  $Y(y) = C \cos \alpha y + D \sin \alpha y$ .

$$\text{通解} \phi = \phi(x, y) = (A_0 + B_0 x) C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n e^{-\alpha x} + B_n e^{\alpha x})(C_n \cos \alpha y + D_n \sin \alpha y)$$

$$\text{由 } \phi(x, 0) = (A_0 + B_0 x) C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n e^{-\alpha x} + B_n e^{\alpha x}) C_n = 0 \Rightarrow C_0 = 0, C_n = 0$$

$$\phi(x, a) = (A_0 + B_0 x) D_0 a + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n e^{-\alpha x} + B_n e^{\alpha x}) D_n \sin \alpha a = 0 \Rightarrow$$

$$D_0 = 0, \sin \alpha a = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{n\pi}{a}, n=1, 2, 3 \dots$$

$$\phi(\infty, y) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cdot D_n \sin \frac{n\pi y}{a} = 0 \Rightarrow B_n = 0.$$

$$\text{即 } \phi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n' e^{-\frac{n\pi x}{a}} \sin \frac{n\pi y}{a}. \Rightarrow \phi(0, y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n' \sin \frac{n\pi y}{a}.$$

$$\Rightarrow \int_0^a \phi(0, y) \sin \frac{n\pi y}{a} dy = \int_0^a \sum_{n=1}^{\infty} A_n' \sin \frac{n\pi y}{a} \sin \frac{n\pi y}{a} dy$$

$$\text{左边} = \frac{a}{2} A_1'. \text{ 右边} = \int_0^{\frac{a}{2}} -\frac{\phi_0}{a} y \sin \frac{n\pi y}{a} dy + \int_{\frac{a}{2}}^a (\phi_0 - \frac{\phi_0}{a} y) \sin \frac{n\pi y}{a} dy = \frac{a\phi_0}{n\pi} \cos \frac{n\pi}{2}.$$

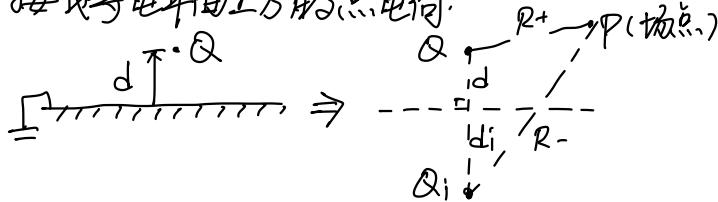
$$\text{即 } A_1' = \frac{2\phi_0}{n\pi} \cos \frac{n\pi}{2} = \frac{2[(-1)^n] \phi_0}{n\pi}.$$

$$\text{所以 } \phi(x, y) = \frac{\phi_0}{a}y + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2[(-1)^n] \phi_0}{n\pi} e^{-\frac{n\pi x}{a}} \sin \frac{n\pi y}{a}.$$

△ 镜像法  
 ↳ 将不均匀电荷分布的作用等效为点电荷的作用。镜像法是间接求解电场边值问题的方法。理论基础是唯一性定理。

### 1. 平面边界

(1) 接地导电平面上方的点电荷。



将含边界的均匀媒质空间转换为无限大单一均匀媒质空间。

放置电量为  $Q_i$  的镜像电荷，代替接地平面上的感应电荷。由此可计算上方空间任一点的电位。

推导：因平面电位为 0 (边界条件) 可得  $q_i = -q$ .  $d_i = d$ .

$$\text{平面上方空间任一点电位为 } \phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{R_+} - \frac{1}{R_-} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z-h)^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z+h)^2}} \right).$$

由静电场的边界条件，可由电位分布求得平面 ( $z=0$ ) 上的感应电荷面密度：

$$P_s = -\epsilon_0 \frac{\partial \phi}{\partial z} \Big|_{z=0} = -\frac{qd}{2\pi(x^2+y^2+d^2)^{\frac{3}{2}}} \Rightarrow$$

$$\text{导电平面上的总感应电荷: } q_{ps} = \int_S P_s dS = -\frac{qd}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx dy}{(x^2+y^2+d^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{qd}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{r dr d\varphi}{(r^2+d^2)^{\frac{3}{2}}} = -q.$$

② 两个相互垂直直相连半无限大接地导体平板，点电荷位于  $(cd_1, d_2)$  处。

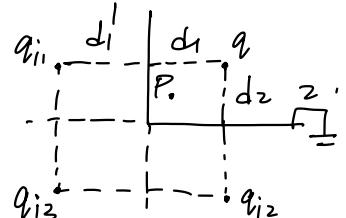
→ 对平面 1. 有镜像电荷  $q_{i1} = -q$  ( $-d_1, d_2$ )。

对平面 2. 有镜像电荷  $q_{i2} = -q$  ( $d_1, -d_2$ )。

由于  $q_{i1}$  对平面 2.  $q_{i2}$  对平面 1. 不满足边界条件 (电位为 0)

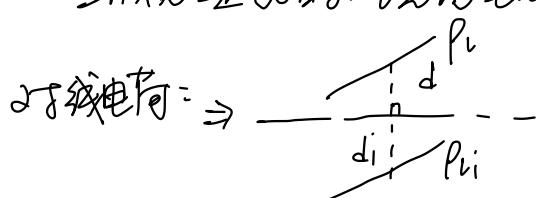
因此需增加镜像电荷  $q_{i3} = q$  ( $-d_1, -d_2$ ) 才满足边界条件。

对场点 P 有:  $\phi_p = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} \right)$ .



↳ 对于两相交导体平面构成的边界，夹角为  $\theta \neq \frac{\pi}{n}$  ( $n$  为整数) 时，镜像电荷数目有  $2m-1$  且所有镜像电荷位于同一个圆上，圆心在边界顶点。

当  $n$  不为整数时，镜像电荷有无限多个，镜像法不适用。



## 12) 两种不同介质分界面上方的点电荷.

⇒ 在点电荷  $q$  的电场作用下, 介质产生极化, 介质分界面上有束缚电荷.

① 计算介质1(上方)中电位时, 用位于介质2中的镜像电荷代替

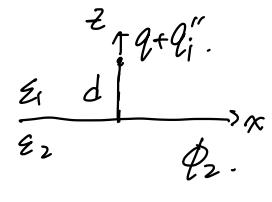
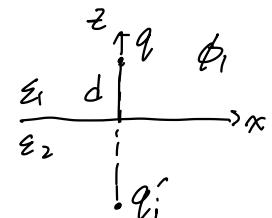
分界面上的束缚电荷, 并将整个空间充满  $\epsilon_2$  介质.

$$\phi_1(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_1} \left[ \frac{q}{\sqrt{x^2+y^2+(z-h)^2}} + \frac{q'_i}{\sqrt{x^2+y^2+(z+h)^2}} \right] \quad (z \geq 0).$$

② 计算介质2(下方)中电位时, 用位于介质1中的镜像电荷代替

分界面上的束缚电荷, 并将整个空间充满  $\epsilon_1$  介质.

$$\phi_2(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_2} \cdot \frac{q+q''_i}{\sqrt{x^2+y^2+(z-h)^2}}. \quad (z \leq 0).$$



无自由电荷

由电位的边界条件  $\phi_1|_{z=0} = \phi_2|_{z=0}$ , 和  $\epsilon_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial z}|_{z=0} = \epsilon_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial z}|_{z=0}$  ( $E_{1t} = E_{2t}, D_{1n} = D_{2n}$ ).

$$\text{解得} = \begin{cases} q'_i = \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} q & (\text{点电荷}) \\ q''_i = \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_1 + \epsilon_2} q & \end{cases} \quad \begin{cases} p'_{li} = \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 \epsilon_2} p_l & (\text{线电荷}) \\ p''_{li} = \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_1 \epsilon_2} p_l & \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \phi_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_1} \left( \frac{Q}{R} + \frac{Q'}{R'} \right) \\ \phi_2 = \frac{Q+Q''}{4\pi\epsilon_2 R} \end{cases}$$

## 2. 导体圆柱与平行线电荷.

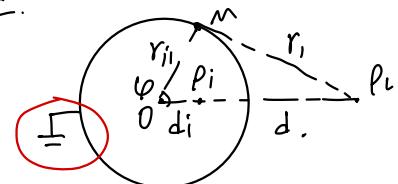
① ⇒ 导体圆柱面上产生感应电荷, 圆柱内外的电位由线电荷和感应电荷产生.

在圆柱内  $d_i$  处放置镜像电荷  $p_{li}$ , 则  $\phi = -\frac{p_l}{2\pi\epsilon_0 r} \ln r - \frac{p_{li}}{2\pi\epsilon_0 r_i} \ln r_i + C$ .

线电荷  $p_l$  和  $p_{li}$  在圆柱表面产生的电场为  $\vec{E}_l + \vec{E}_{li}$ .

由静电场边界条件: 导体圆柱表面上任一点的电场切向分量为零.

$$\text{即 } E_t + E_{it} = \frac{p_l}{2\pi\epsilon_0 r} \sin\alpha + \frac{p_{li}}{2\pi\epsilon_0 r_i} \sin\alpha_i = 0, \text{ 由此可解得: } p_{li} = -p_l. \quad d_i = \frac{a^2}{d}$$



② 由于导体圆柱表面电位为0. 得  $\phi_m = -\frac{p_l}{2\pi\epsilon_0} \ln r_i + \frac{p_l}{2\pi\epsilon_0} \ln r_{ii} + C = \frac{p_l}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_{ii}}{r_i} + C = 0$ .

$$\text{得: } C = -\frac{p_l}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_{ii}}{r_i}. \quad \text{导体圆柱外任一点电位为 } \phi = \frac{p_l}{2\pi\epsilon_0} \ln \left( \frac{r_i}{r} \cdot \frac{r_{ii}}{r_{ii}} \right) = \frac{p_l}{2\pi\epsilon_0} \ln \left( \frac{r_i}{r} \cdot \frac{d}{a} \right).$$

$$\Rightarrow \text{圆柱表面面电荷密度为 } p_s = -\epsilon_0 \frac{\partial \phi}{\partial r} \Big|_{r=a} = -\frac{p_l (d^2 - a^2)}{2\pi a (d^2 + a^2 - 2ad \cos\alpha)}$$

$$\text{外表面单位长度的感应电荷: } p = \int_s p_s ds = \int_0^a dz \int_0^{2\pi} p_s d\varphi = -p_l$$

$$\text{单位长度线电荷受到静电力: } f = -\frac{p_l^2 d}{2\pi\epsilon_0 (d^2 - a^2)}$$

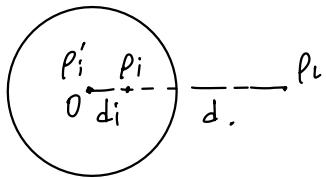
(3) 导体圆柱不接地也不带电, 则导体表面总感应电荷量始终为0(电中性)

为使导体圆柱面是电位不为零的等位面, 且满足任意包围单位长度导体圆柱的闭合面内总电荷量为零, 则只有在导体圆柱轴线上放置一等效线电荷  $p'_i = -p_i$ .

$$\text{导体圆柱外任意点的电位为: } \phi = \frac{p_l}{2\pi\epsilon_0} \ln \left( \frac{R_i}{R} \frac{d}{a} \right) + \frac{p'_i}{2\pi\epsilon_0} \ln \left( \frac{C_i}{R} \right)$$

$$\text{若导体圆柱单位长度带有电荷 } p_{lo} \text{ 时, 在圆柱轴线上放置等效线电荷 } p'_i = p_{lo} - p_i$$

$$\text{导体圆柱外任意点的电位为: } \phi = \frac{p_l}{2\pi\epsilon_0} \ln \left( \frac{R_i}{R} \frac{d}{a} \right) + \frac{p_l}{2\pi\epsilon_0} \ln \left( \frac{C_i}{R} \right) + \frac{p_{lo}}{2\pi\epsilon_0} \ln \left( \frac{a}{R} \right)$$



### 3. 导体球和点电荷

#### (1) 带导体球和球外点电荷

① 接地导体球表面感应出负电荷，为不改变球面上的电荷分布，镜像电荷 $q_i$ 位于球内，又由球的对称性， $q_i$ 位于OP连线上。

再利用球面上任意点电位为0，有 $\phi_m = \phi_{mp} + \phi_{mi} = 0$ 。可解出：

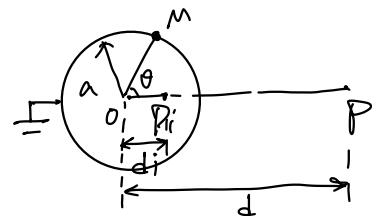
$$|q_i| < |q| \quad q_i = -\frac{a}{d}q, \quad d_i = \frac{a^2}{d} \quad (\text{结论}) \quad 2\text{项}$$

球外空间任一点电位： $\phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r} - \frac{a}{dr_i} \right)$

球表面上感应电荷面密度： $p_s = -\epsilon_0 \frac{\partial \phi}{\partial R} \Big|_{R=a} = -\frac{q(d^2 - a^2)}{4\pi a(a^2 + d^2 - 2ad\cos\theta)^{\frac{3}{2}}}$

总感应电荷： $Q = \int_S p_s dS = -\frac{q(d^2 - a^2)}{4\pi a} \int_0^\pi \frac{2\pi a \cdot a \sin\theta d\theta}{(a^2 + d^2 - 2ad\cos\theta)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{a}{d}q = q_i$  (带镜像电荷)

接地导体球时点电荷对的吸引力： $F = -\frac{adQ^2}{4\pi\epsilon_0(d^2 - a^2)^2}$



② 导体球不接地，电位不为零，球面上总电荷为0。

除放置镜像电荷 $p_i$ 外，还在球心处放置另1个镜像电荷 $q'_i = -q_i$ 。

导体球外任一点处的电位： $\phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i} + \frac{q'_i}{4\pi\epsilon_0 r'_i} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r} - \frac{a}{dr_i} + \frac{a}{dr'_i} \right)$

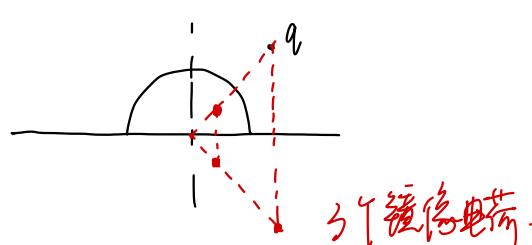
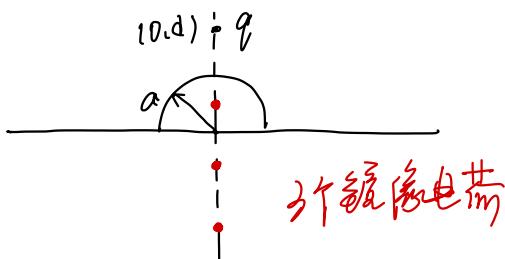
球面上的电位为： $\phi_s = \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 a} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 d} \quad (\neq 0)$  3项

③ 导体球不接地且带有 $q_0$ 电荷，球心处的镜像电荷为 $q'_i = q_0 - q_i$

此时球面电位： $\phi_s = \frac{q_0 + \frac{a}{d}q}{4\pi\epsilon_0 a} \quad (\neq 0)$

④ 导体球不接地且带有电位 $\phi_0$ ，球心处镜像电荷为 $q'_i = 4\pi\epsilon_0 a \phi_0$ 。

0



## 12) 空心导体球和球内点电荷

① 由于球壳接地，感应点电荷只分布于内表面，镜像电荷 $q'_i$ 应位于球壳外。

当电荷位于接地导体球外同样分析可得：

$$q_i = -\frac{a}{d}q, \quad d_i = \frac{a^2}{d}$$

1个镜像电荷

此时镜像电荷电量大于原电荷电荷量，电量与位置与外半径无关。

$$\text{球壳内任一点电位} = \phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{\sqrt{r^2+d^2-2rd\cos\theta}} - \frac{a}{d\sqrt{r^2+(\frac{a^2}{d})^2-2r(\frac{a^2}{d})\cos\theta}} \right] (r \leq a)$$

$$\text{感应电荷分布在球壳内表面上，电荷面密度为} = p_s = \epsilon_0 \frac{\partial \phi}{\partial r} |_{r=a} = \frac{q(a^2-d^2)}{4\pi a(a^2+d^2-2ad\cos\theta)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\text{内表面上总感应电荷为} = q_{es} = \int_s p_s ds = -\frac{q(a^2-d^2)}{4\pi a} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{a^2 \sin\theta d\theta d\phi}{(a^2+d^2-2ad\cos\theta)^{\frac{3}{2}}} = -q$$

→ 感应电荷量等于原点电荷量，不等于镜像电荷量 → 和球不一样。

② 球壳不接地且不带电，则球壳电位不为0，总电荷量为0。

⇒ 内表面分布不均匀电荷，外表面分布均匀电荷。

$$\text{求球壳内任一点电位时：内表面感应电荷由球壳外镜像电荷 } q_i = -\frac{a}{d}q, d_i = \frac{a^2}{d} \text{ 代替}$$

$$\text{求球壳外任一点电位时：外表面感应电荷由球心处镜像电荷 } q'_i = q \text{ 代替} \quad 2\text{个镜像电荷}$$

$$\text{当 } r < a \text{ 时，} \phi(r, \theta) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{\sqrt{r^2+d^2-2rd\cos\theta}} - \frac{a}{d\sqrt{r^2+(\frac{a^2}{d})^2-2r(\frac{a^2}{d})\cos\theta}} \right] + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a} \quad (3\text{项})$$

$$\text{当 } r > a \text{ 时，} \phi(r, \theta) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (1\text{项})$$

→ 引入和球外点电荷不同

## 13) 空心导体球和球外点电荷

球壳外表产生均匀分布的感应电荷，其镜像电荷经球壳内。

$$q_i = -\frac{b}{d}q, \quad d_i = \frac{b^2}{d}$$

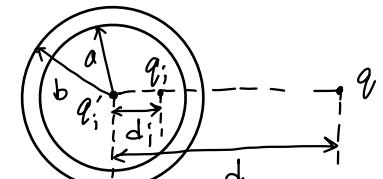
2个镜像电荷

球壳内表面产生均匀分布的感应电荷，其镜像电荷位于球心。

$$q'_i = \frac{b}{d}q, \quad d'_i = 0$$

$$\text{球壳外任一点的电位} = \phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q}{r} + \frac{q_i}{r_i} + \frac{q'_i}{r'_i} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r} - \frac{b}{dr_i} + \frac{b}{dr'_i} \right)$$

→ 此时与实心导体球一致。



△ 镜像法 = 汇聚 → 镜像电荷的个数、位置、大小。

镜像电荷必须位于所求解的场区以外的空间中。

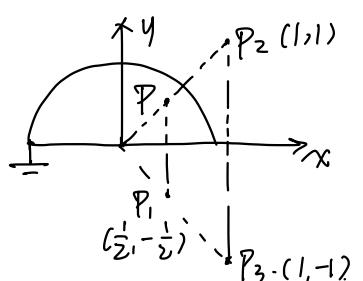
0半径为1m的半球接地，球内有空气，在点P(0.5m, 0.5m)处放置一点电荷Q，求球内静电位分布。

镜像电荷分布如图所示： $P_1 = -Q$

$$P_2 = \frac{a^2}{d}Q, \quad d_i = \frac{a^2}{d}d, \quad q_i = -\frac{a}{d}Q \text{ 得} d_2 = \sqrt{2}m, \quad q_2 = -\sqrt{2}Q$$

$$P_3 = d_3 = \sqrt{2}m, \quad q_3 = -\sqrt{2}Q$$

$$\phi = \phi_0 + \phi_1 + \phi_2 + \phi_3$$



○ 真空中，一半径为  $a$  的不接地导体球壳内，在距球心为  $b$  ( $b < a$ ) 处放一点电荷  $q$ ，求：球内外任一点  $P_i$ 、 $P_0$  和球壳上的电位表达式。

①  $R \geq a$  时，外表面上感应电荷用球心处  $q_i = q$  的电荷代替。

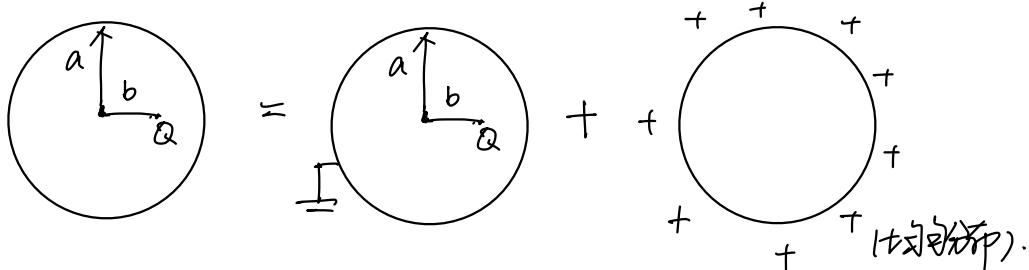
里带  $Q$  和外表面上感应电荷对球心外电位为 0。

$$\text{则 } \phi(P_0) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R}.$$

②  $R < a$  时，外表面上感应电荷用  $q_i = -\frac{a}{b}q$ ， $b_i = \frac{a^2}{b}$  代替。

$$\phi_1 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{R^2 + b^2 - 2Rb\cos\theta}} - \frac{aq}{4\pi\epsilon_0 b \sqrt{R^2 + b^2 - 2Rb\cos\theta}}, \quad \phi_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a} \Rightarrow \text{外表面上感应电荷产生电位} \\ (\text{由于没有接地造成})$$

$$\phi(P_i) = \phi_1 + \phi_2.$$



○ [例题 2.16]。

① 假设两极板间电压  $U$  不变。

由  $E = \frac{U}{d}$ ，电容的能量为：

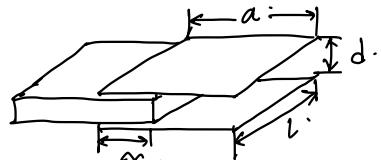
$$We = \frac{1}{2} \int_{V_1} \epsilon E^2 dV + \frac{1}{2} \int_{V_2} \epsilon_0 E^2 dV = \frac{\alpha l d}{2} \epsilon \cdot \frac{U^2}{d^2} + \frac{(a-\alpha) l d}{2} \epsilon_0 \cdot \frac{U^2}{d^2} \\ = \frac{\alpha}{2d} \epsilon l U^2 + \frac{(a-\alpha)}{2d} \epsilon_0 l U^2.$$

$$F_L = \nabla We = \frac{\partial We}{\partial x} = \frac{l}{2d} U^2 (\epsilon - \epsilon_0), \quad \text{且 } f_L = \frac{F_L}{l d} = \frac{U^2}{2d^2} (\epsilon - \epsilon_0) = \frac{E^2}{2} (\epsilon - \epsilon_0) \vec{ax}.$$

$$(Q = \int_{S_1} P_{S_1} dS_1 + \int_{S_2} P_{S_2} dS_2 = \int_{S_1} \vec{a}_{n_1} \cdot \vec{D}_1 dS_1 + \int_{S_2} \vec{a}_{n_2} \cdot \vec{D}_2 dS_2 = \int_{S_1} \epsilon \frac{U}{d} dS_1 + \int_{S_2} \epsilon_0 \frac{U}{d} dS_2)$$

$$= \epsilon \frac{lx}{d} U + \epsilon_0 \frac{(a-x)l}{d} U = \frac{LU}{d} [\epsilon x + \epsilon_0 (a-x)].$$

$$We = \frac{1}{2} CU^2 = \frac{1}{2} QU = \frac{LU^2}{2d} [\epsilon_0 (a-x) + \epsilon x].$$



② 两极板间总电荷量  $Q$  不变。

$$\text{由 } Q = \int P_{S_1} dS_1 + \int P_{S_2} dS_2 = \epsilon E \cdot xl + \epsilon_0 E \cdot (a-x)L \text{ 得: } E = \frac{Q}{xl\epsilon + (a-x)L\epsilon_0}.$$

$$We = \frac{1}{2} QU = \frac{Q^2 d}{2[xl\epsilon + (a-x)L\epsilon_0]}, \quad F_L = -\frac{\partial We}{\partial x} = \frac{Q^2 d (\epsilon - \epsilon_0)}{2[xl\epsilon + (a-x)L\epsilon_0]^2} = \frac{E^2 l d}{2} (\epsilon - \epsilon_0)$$

$$f_L = \frac{F_L}{l d} = \frac{E^2}{2} (\epsilon - \epsilon_0).$$

(题2-5) 真空中一静止点电荷 $Q$ 位于圆柱坐标系中的点 $P_0(a, \frac{\pi}{3}, -a)$ 处. 求①此点电荷在直角坐标系中点 $P(a, a, a)$ 处产生的电场强度. ②点 $P$ 处的电场强度在球坐标系中的表达式.

→ ① 进行坐标变换. 点 $P_0(a, \frac{\pi}{3}, -a)$ 在直角坐标系下为 $P_0(\frac{a}{2}, \frac{\sqrt{3}a}{2}, -a)$ .

$$\text{设 } R_1 = |P_0 P| = \sqrt{(a - \frac{a}{2})^2 + (a - \frac{\sqrt{3}a}{2})^2 + (-a)^2} = \sqrt{6\sqrt{3}}a = 2.0659a.$$

点电荷 $P_0$ 产生的电场强度为  $\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_1^2} \vec{a}_R$ , 其中  $R_1 = 2.0659a$ .  $\vec{a}_{R_1} = \frac{1}{R_1} [\frac{a}{2} \vec{a}_x + \frac{2-\sqrt{3}}{2} a \vec{a}_y + 2a \vec{a}_z]$

$$\text{则 } P_0 \text{ 点处场强 } \vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_1^2} [\frac{a}{2} \vec{a}_x + \frac{2-\sqrt{3}}{2} a \vec{a}_y + 2a \vec{a}_z] = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a^2} [0.057 \vec{a}_x + 0.015 \vec{a}_y + 0.227 \vec{a}_z].$$

② 根据坐标转换关系  $R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ,  $\theta = \arctan \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}$ ,  $\varphi = \arctan \frac{y}{x}$  得

点 $P(a, a, a)$ 在球坐标系下为  $P(R, \theta, \varphi) = P(R, \theta, \varphi)$

再由坐标系单位矢量转换关系:

$$\begin{bmatrix} \vec{a}_x \\ \vec{a}_y \\ \vec{a}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta \cos\varphi & \cos\theta \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\theta \sin\varphi & \cos\theta \sin\varphi & \cos\varphi \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{a}_R \\ \vec{a}_\theta \\ \vec{a}_\varphi \end{bmatrix} \text{ 得 } \begin{cases} \vec{a}_x = 0.577 \vec{a}_R + 0.408 \vec{a}_\theta - 0.707 \vec{a}_\varphi \\ \vec{a}_y = 0.577 \vec{a}_R + 0.408 \vec{a}_\theta + 0.707 \vec{a}_\varphi \\ \vec{a}_z = 0.577 \vec{a}_R - 0.816 \vec{a}_\theta. \end{cases}$$

$$\text{代入得 } \vec{E}(R, \theta, \varphi) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a^2} [0.057 \vec{a}_R - 0.16 \vec{a}_\theta + 0.17 \vec{a}_\varphi].$$

或者由坐标系矢量分量转换关系:

$$\begin{bmatrix} \vec{a}_R \\ \vec{a}_\theta \\ \vec{a}_\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta \cos\varphi & \sin\theta \sin\varphi & \cos\theta \\ \cos\theta \cos\varphi & \cos\theta \sin\varphi & -\sin\theta \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{a}_x \\ \vec{a}_y \\ \vec{a}_z \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} A_R = 0.17 \\ A_\theta = -0.16 \\ A_\varphi = 0.17. \end{cases} \quad \begin{pmatrix} A_x = 0.057 \\ A_y = 0.015 \\ A_z = 0.227 \end{pmatrix}.$$

$$\text{所以 } \vec{E}(R, \theta, \varphi) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a^2} [A_R \vec{a}_R + A_\theta \vec{a}_\theta + A_\varphi \vec{a}_\varphi] = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a^2} [0.057 \vec{a}_R - 0.16 \vec{a}_\theta + 0.17 \vec{a}_\varphi].$$

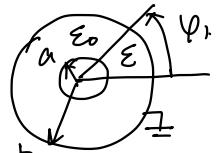
(题2-5) 无限长同轴圆柱. 内外导体半径分别为 $a, b$ . 两导体间 $0 \leq \varphi \leq \psi_1$ , 内填空气, 外填理想介质. 各区域内外充满空气. 内外导体间电压差 $U_0$ . 求①内外导体间电场强度与电通量密度. ②导体表面上单位长度的带电量 $q_{el}$ .

$$\Rightarrow \text{由高斯定理知: } \begin{cases} \oint (a r D_1(r)) dr = \psi_1 a \cdot q_{el_1} \\ (2\pi r - \psi_1) r D_2(r) = (2\pi r - \psi_1) a \cdot q_{el_2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D_1(r) = \frac{a}{r} q_{el_1} \\ D_2(r) = \frac{a}{r} q_{el_2}. \end{cases}$$

$$\text{又因 } D_1 = \epsilon E, D_2 = \epsilon_0 E. \text{ 得 } E(r) = \frac{a}{\epsilon r} q_{el_1} = \frac{a}{\epsilon_0 r} q_{el_2}. \quad \Delta$$

$$\text{且 } \int_b^a E(r) dr = \int_b^a \frac{a}{\epsilon r} q_{el_1} dr = \frac{a q_{el_1}}{\epsilon} \ln \frac{b}{a} = U_0 \Rightarrow q_{el_1} = \frac{\epsilon_0 U_0}{a \ln \frac{b}{a}} \text{ 同理 } q_{el_2} = \frac{\epsilon_0 U_0}{a \ln \frac{b}{a}}.$$

$$\text{所以 } E(r) = \frac{U_0}{r \ln \frac{b}{a}}. \quad D_1(r) = \frac{\epsilon_0 U_0}{r \ln \frac{b}{a}}. \quad D_2(r) = \frac{\epsilon_0 U_0}{r \ln \frac{b}{a}}.$$



$$q_{el} = \psi_1 a \cdot q_{el_1} + (2\pi r - \psi_1) a \cdot q_{el_2} = \frac{U_0}{\ln \frac{b}{a}} [\epsilon \psi_1 + (2\pi r - \psi_1) \epsilon_0].$$

0 (题2-16) 球形电容器内导体半径为 $R_1$ , 外导体半径为 $R_2$ . 中间充满 $\epsilon_1, \epsilon_2$ 两种介质. 设内球壳带电荷量 $Q$ . 外球壳接地. 求①两球壳间的电场强度与电位表达式; ②两球壳间束缚电荷密度及各介质表面上的束缚电荷面密度表达式; ③各导体表面上自由电荷面密度表达式.

~~① 由高斯定理 =  $2\pi R^2 D_1 + 2\pi R^2 D_2 = Q (R < R < R_2)$ .~~

~~$D_1 = \epsilon_1 E, D_2 = \epsilon_2 E, \text{ 则 } E = \frac{Q}{2\pi R^2 (\epsilon_1 + \epsilon_2)}, \Phi = \int_R^{R_2} \vec{E} \cdot d\vec{l}$~~

~~②  $D_1 = \vec{D}_1 - \epsilon_0 \vec{E} = (\epsilon_1 - \epsilon_0) \vec{E}, \text{ 同理 } \vec{D}_2 = (\epsilon_2 - \epsilon_0) \vec{E}.$~~

~~束缚电荷密度 =  $P_{p1} = -\nabla \cdot \vec{P}_1 = 0, \text{ 同理 } P_{p2} = 0.$~~

~~(球坐标系下对 $\vec{P}_1$ 求散度:  $\nabla \cdot \vec{P}_1 = \frac{1}{R^2 \sin\theta} \left[ \frac{\partial}{\partial R} (R \sin\theta \cdot \frac{(\epsilon_1 - \epsilon_0) Q}{2\pi R^2 (\epsilon_1 + \epsilon_2)}) + 0 + 0 \right] = 0$ ).~~

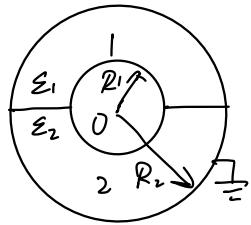
~~束缚电荷面密度:~~

~~介质内表面 =  $P_{ps1} = -\vec{a}_R \cdot \vec{P}_1 |_{R=R_1} = -\frac{(\epsilon_1 - \epsilon_0) Q}{2\pi R_1^2 (\epsilon_1 + \epsilon_2)}$~~

~~介质外表面 =  $P_{ps2} = -\vec{a}_R \cdot \vec{P}_2 |_{R=R_2} = -\frac{(\epsilon_2 - \epsilon_0) Q}{2\pi R_2^2 (\epsilon_1 + \epsilon_2)}$~~

~~介质分界面 =  $P_{ps} = \vec{a}_x \cdot (\vec{P}_1 - \vec{P}_2) = 0.$~~

~~区别~~



~~③ 自由电荷面密度 =  $P_s = \vec{D}_1 \cdot \vec{a}_n = \frac{\epsilon_1 Q}{2\pi R_1^2 (\epsilon_1 + \epsilon_2)}, P_{s2} = \frac{\epsilon_2 Q}{2\pi R_2^2 (\epsilon_1 + \epsilon_2)}.$  (内导体外表面).~~

~~$P_{s1} = -\frac{\epsilon_1 Q}{2\pi R_1^2 (\epsilon_1 + \epsilon_2)}$  (外导体内表面)  $P_{s2} = -\frac{\epsilon_2 Q}{2\pi R_2^2 (\epsilon_1 + \epsilon_2)}$  (外导体内表面)~~

0 (题2-12). ① 由  $D_{1n} = D_{2n} \Rightarrow \epsilon_1 E_1 = \epsilon_2 E_2 \quad \left\{ \begin{array}{l} U_0 = E_1 d_1 + E_2 d_2 \\ \text{得: } \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} E_1 = \frac{\epsilon_2 U_0}{\epsilon_1 d_2 + \epsilon_2 d_1} \\ E_2 = \frac{\epsilon_1 U_0}{\epsilon_1 d_2 + \epsilon_2 d_1}. \end{array} \right.$

② 由  $E_2 - E_1 = \frac{P_{ps}}{\epsilon_0}$  得  $P_{ps} = \epsilon_0 (E_2 - E_1) = \frac{\epsilon_0 (\epsilon_1 - \epsilon_2) U_0}{\epsilon_1 d_2 + \epsilon_2 d_1}$

或者  $P_{ps} = \vec{a}_x \cdot \vec{P}_1 |_{x=d_1} + (-\vec{a}_x) \cdot \vec{P}_2 |_{x=d_1} = \vec{a}_x \cdot (\vec{D}_1 - \epsilon_0 \vec{E}_1) - \vec{a}_x \cdot (\vec{D}_2 - \epsilon_0 \vec{E}_2)$

$$= \frac{\epsilon_0 (\epsilon_1 - \epsilon_2) U_0}{\epsilon_1 d_2 + \epsilon_2 d_1}.$$

~~0 (题2-15). 由高斯定理 =  $[\psi_1 R \vec{D}_1 + (2\pi - \psi_1) R \vec{D}_2] \cdot \vec{a}_R = Q_1, \vec{D}_1 = \epsilon \vec{E}, \vec{D}_2 = \epsilon_0 \vec{E}.$~~

~~解得:  $\vec{E} = \frac{Q_1}{R [\psi_1 \epsilon + (2\pi - \psi_1) \epsilon_0]} \vec{a}_R.$  由  $\int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{R} = U_0$  解得:~~

$$Q_1 = \frac{U_0}{\ln \frac{b}{a}} [\psi_1 \epsilon + (2\pi - \psi_1) \epsilon_0], \quad \vec{E} = \frac{U_0}{R \ln \frac{b}{a}} \vec{a}_R, \quad \epsilon_0 \vec{D}_1 = \frac{\epsilon U_0}{R \ln \frac{b}{a}} \vec{a}_R, \quad \vec{D}_2 = \frac{\epsilon_0 U_0}{R \ln \frac{b}{a}} \vec{a}_R$$

① 计算带电荷壳层的膨胀力.

设电荷量为  $q$ . 半径为  $a$ . 则  $F = -\frac{\partial W_e}{\partial r}|_{Q=\text{const.}}$

$$\phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a}. \quad W_e = \frac{1}{2} q\phi = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 a}.$$

$$V = \frac{4\pi a^3}{3}. \Rightarrow dV = 4\pi a^2 da.$$

$$F = -\frac{1}{4\pi a^2} \frac{\partial W_e}{\partial a} = \frac{q^2}{32\pi^2 \epsilon_0 a^4}.$$

②(题2-31). (球壳外点电场) 真空中一半径为  $R$  的金属球壳. 一电量为  $Q$  的点电荷放在距球心  $d$  ( $d > R$ ) 处. ①求金属球壳外任意点处电场强度和电位表达式;  
②求金属球面上各点电场强度和电位表达式. ③若接地. 情况如何?

$\Rightarrow$  ① 球壳外表面感应电荷的镜像电荷为:  $Q_i = -\frac{R}{d} Q$ .  $d_i = \frac{R^2}{d}$ .

球壳外表面感应电荷的镜像电荷为:  $Q'_i = \frac{R}{d} Q$ .  $d_i = 0$ .

球壳外任一点电位为:  $\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{Q}{r} + \frac{Q_i}{r_i} + \frac{Q'_i}{r'_i} \right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r} - \frac{R}{dr_i} + \frac{R}{dr'_i} \right)$ .

电场强度为:  $E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{Q \vec{r}}{r^3} + \frac{Q_i \vec{r}_i}{r_i^3} + \frac{Q'_i \vec{r}'_i}{r'_i^3} \right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{\vec{r}}{r^3} - \frac{R \vec{r}_i}{dr_i^3} + \frac{R \vec{r}'_i}{dr'_i^3} \right)$ .

令  $r'_i = a$ . 则  $r^2 = a^2 + d^2 \Rightarrow \cos\theta = \frac{a^2 + R^2 - d^2}{2aR}$ .  $r'_i = a^2 + \frac{R^4}{d^2} - 2aR\cos\theta \frac{R^2}{d}$ .

在球坐标系中电场强度为:

$$\begin{aligned} E &= -\vec{ar} \left[ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^3} (\cos\theta - a) + \frac{Q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i^3} (a - \cos\theta \frac{R^2}{d}) + \frac{Q'_i}{4\pi\epsilon_0 a^2} \right] \\ &\quad - \vec{a\theta} \left[ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^3} (-d\sin\theta) + \frac{Q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i^3} \frac{R^2}{d} \sin\theta \right]. \end{aligned}$$

② 球面上的电位为  $\phi_s = \frac{Q'_i}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 d}$ .

$\hookrightarrow Q$  和  $Q'_i$  满足球面电位为 0 的边界条件.

电场强度为主  $= -\vec{ar} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[ (R^2 + d^2 - 2Rd\cos\theta)^{-\frac{3}{2}} \left( \frac{d^2}{R} - R \right) + \frac{1}{Rd} \right]$

当  $\theta = 0$  时. 场强最大为主  $E_{\max} = -\vec{ar} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[ (R^2 + d^2 - 2Rd)^{\frac{3}{2}} \left( \frac{d^2}{R} - R \right) + \frac{1}{Rd} \right]$ .

③ 若将金属球壳接地. 则球壳外任一点电位  $\phi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r} - \frac{R}{dr_i} \right)$ .

球壳电位为零. 电场强度为主  $= -\vec{ar} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[ (R^2 + d^2 - 2Rd\cos\theta)^{-\frac{3}{2}} \left( \frac{d^2}{R} - R \right) \right]$ .

○(题2-32). 真空中一半径为 $a$ 不接地导体球壳内距球心 $b$  ( $b < a$ ) 处放一点电荷 $Q$ . 求①球内、外任意点 $P$ 及点 $P_0$ 处和球壳上电位表达式; ②电荷 $Q$ 所受电场力.

⇒ ① 内表面感应电荷的镜像电荷为  $q_i = -\frac{a}{r} Q \cdot d_i = \frac{a^2}{r}$ .

外表面感应电荷=球心处  $q_i' = Q$ .

$$\text{则当 } r < a \text{ 时}, \phi(r, \theta) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{\sqrt{r^2 + d^2 - 2rd\cos\theta}} - \frac{a}{\sqrt{r^2 + (a)^2 - 2r(\frac{a^2}{r})\cos\theta}} \right] + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a}.$$

$$\text{当 } r > a \text{ 时}, \phi(r, \theta) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (\text{外表面感应电荷}).$$

$$r = a \text{ 时}, \phi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a}.$$

$$\text{② 由库仑力得} \quad F = \vec{ar} \cdot \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{Q}{r^2} - \frac{a^2 Q}{d^3} \right]$$

球内电荷 $Q$ 所受电场力为内表面电荷对其作用力:

$$\vec{F} = \vec{ar} \cdot \frac{Q Q_i}{4\pi\epsilon_0 (d_i - b)^2} = \vec{ar} \frac{ba Q^2}{4\pi\epsilon_0 (a^2 - b^2)^2}.$$

○(题2-40). (电容).

设内导体单立长度带电 $q_L$ . 则由  $2\pi r \cdot l \vec{E} = q_L$  得  $\vec{E} = \frac{q_L}{2\pi r a} \vec{ar}$  ( $a < r < b$ )

由  $\int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} = U_0$  得  $q_L = \frac{2\pi l U_0}{\ln \frac{b}{a}}$  即  $\vec{E} = \frac{U_0}{r \ln \frac{b}{a}} \vec{ar}$ . ( $a < r < b$ ).

又由  $2\pi r \cdot l \vec{E} = \frac{q_L}{\pi a^2} \cdot \pi r^2 l$  得,  $\vec{E} = \frac{r q_L}{2\pi a^2}$  ( $0 < r < a$ ) =  $\frac{r U_0}{a^2 \ln \frac{b}{a}}$

$$\begin{aligned} \text{由} \quad W_e &= \int_r^b \vec{D} \cdot \vec{E} dV = \frac{1}{2} [\epsilon_0 (l-h) + \epsilon h] \cdot \left[ \int_0^a \frac{r^2 U_0^2}{a^2 \ln \frac{b}{a}} dr + \int_a^b \frac{U_0^2}{r^2 \ln \frac{b}{a}} dr \right] \\ &= \frac{1}{2} [\epsilon_0 (l-h) + \epsilon h] \cdot \left[ \frac{U_0^2}{3a \ln \frac{b}{a}} + \frac{U_0^2}{\ln \frac{b}{a}} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) \right]. \end{aligned}$$

由  $G = \rho e g h \pi (b^2 - a^2) = -\frac{dW_e}{dl}$  得,

$$h = \frac{\epsilon_0 l}{2\rho e g \pi (b^2 - a^2)} \frac{U_0^2}{\ln \frac{b}{a}} \left[ \frac{1}{3a} + \frac{b-a}{ab} \right].$$

选取圆柱坐标系, 由高斯定理中满足拉普拉斯方程:  $\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r \frac{d\phi}{dr}) = 0$ .

解得:  $\phi(r) = A/\ln r + B$ . 代入  $\phi(a) = U_0$ ,  $\phi(b) = 0$  得:  $\phi = U_0 \frac{\ln(\frac{b}{a})}{\ln(\frac{b}{a})}$ .

$$\text{由} \quad \vec{E} = -\nabla \phi = -\frac{d\phi}{dr} \vec{ar} = \frac{U_0}{r \ln \frac{b}{a}} \vec{ar}.$$

则内导体表面电荷密度:  $p_s = \vec{ar} \cdot \vec{D} |_{r=a} = \frac{\epsilon_0 l U_0}{r \ln \frac{b}{a}}$ .  $p_{s2} = \vec{ar} \cdot \vec{D}_2 |_{r=a} = \frac{\epsilon U_0}{r \ln \frac{b}{a}}$ .

$$\Rightarrow q_{L1} = 2\pi a p_{s1} = \frac{2\pi \epsilon_0 l U_0}{\ln \frac{b}{a}}, \quad q_{L2} = 2\pi a p_{s2} = \frac{2\pi \epsilon U_0}{\ln \frac{b}{a}}.$$

则电容为:  $C = \frac{2\pi \epsilon_0 (l-h)}{\ln \frac{b}{a}} + \frac{2\pi \epsilon h}{\ln \frac{b}{a}}$ . 电容储存能量:  $W_e = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi}{\ln \frac{b}{a}} [\epsilon_0 (l-h) + \epsilon h] U_0^2$

$$W_e = \frac{\partial W_e}{\partial h} \vec{a}_z = \frac{\pi U_0^2 (\epsilon - \epsilon_0)}{\ln \frac{b}{a}} \vec{a}_z. \quad |F| = G = \rho e g h \pi (b^2 - a^2).$$

$$\text{解得: } h = \frac{U_0^2 (\epsilon - \epsilon_0)}{\rho e g (b^2 - a^2) / \ln \frac{b}{a}}.$$

## △ 静电场的能量/能量密度.

$$\text{离散点电荷系统: } W = \frac{1}{2} \sum_i Q_i \phi_i. \quad (\text{P70})$$

$$\text{连续分布体电荷和面电荷: } W = \frac{1}{2} \int_V \rho \phi dV + \frac{1}{2} \oint_S P_s \phi dS. = \frac{1}{2} \int_V \rho \phi dV + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \oint_{S_i} P_{s_i} \phi_i dS;$$

$$\Rightarrow \text{能量: } We = \frac{1}{2} \int_V \vec{D} \cdot \vec{E} dV. \quad \text{空间任意点能量密度 } We = \frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E} \left( \text{J/m}^3 \right).$$

$$\text{对简单媒质: } We = \frac{1}{2} \epsilon E^2 \quad (\text{静电场能量不满足能量守恒})$$

○ 半径为  $a$  的球形空间内均匀分布有电荷体密度为  $\rho$  的电荷. 求静电场能量.

$$\text{法一: } We = \frac{1}{2} \int_V \vec{D} \cdot \vec{E} dV.$$

$$\text{由高斯定理求解: } \vec{E}_1 = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \hat{a}_r. (r < a) \quad \vec{E}_2 = \frac{\rho a^3}{3\epsilon_0 r^2} \hat{a}_r. (r \geq a).$$

$$\begin{aligned} \text{则 } We &= \frac{1}{2} \int_V \vec{D} \cdot \vec{E} dV = \frac{1}{2} \int_{V_1} \epsilon_0 E_1^2 dV + \frac{1}{2} \int_{V_2} \epsilon_0 E_2^2 dV \\ &= \frac{1}{2} \epsilon_0 \left[ \int_0^a \frac{\rho^2 r^2}{9\epsilon_0^2} \cdot 4\pi r^2 dr + \int_a^\infty \frac{\rho^2 a^6}{9\epsilon_0^2 r^4} \cdot 4\pi r^2 dr \right] = \frac{4\pi}{15\epsilon_0} \rho^2 a^5. \end{aligned}$$

$$\text{法二: } We = \frac{1}{2} \int_V \rho \phi dV$$

$$\text{电位分布: } \phi = \int_r^a \vec{E}_1 \cdot d\vec{r} + \int_a^\infty \vec{E}_2 \cdot d\vec{r} = \int_r^a \frac{\rho r}{3\epsilon_0} dr + \int_a^\infty \frac{\rho a^3}{3\epsilon_0 r^2} dr = \frac{\rho}{2\epsilon_0} (a^2 - \frac{r^2}{5}). (r \leq a),$$

$$\text{则 } We = \frac{1}{2} \int \rho \phi dV = \frac{1}{2} \cdot \frac{\rho^2}{2\epsilon_0} \int_0^a (a^2 - \frac{r^2}{5}) 4\pi r^2 dr = \frac{4\pi}{15\epsilon_0} \rho^2 a^5.$$

## △ 历位形式的电场力.

$$\text{理论依据: 能量守恒} \Rightarrow \Delta W_s = \Delta W + \Delta We$$

$\Delta W_s$ : 外源提供的功.  $\Delta W$ : 导体或填充媒质因运动所做机械功.  $\Delta We$ : 系统储能的变化.

$$\text{由 } \Delta W = F_L \Delta l \text{ 得: } F_L \Delta l = \Delta W_s - \Delta We. \Rightarrow F_L = \frac{\partial W_s}{\partial l} - \frac{\partial We}{\partial l}$$

$$\text{① 电荷不变, 则不连接外源. } \Delta W_s = 0. \Rightarrow F_L = - \frac{\partial We}{\partial l} = - \nabla We$$

$F_L$ : 沿  $L$  方向作用力.  $-\nabla We$ : 沿  $L$  方向位移单位距离引起系统中电场能量的减少量.

② 电位不变, 与恒压源相连. 此时有  $\Delta We = \frac{1}{2} \Delta W_s$ .

$$\Rightarrow F_L = \nabla We, \quad \nabla We: \text{沿 } L \text{ 方向位移单位距离引起电场能量增加量.}$$

$$\text{力矩: } T = - \frac{\partial We}{\partial \theta} |_{Q=\text{const}}. \quad T = \frac{\partial We}{\partial \theta} |_{\phi=\text{const}}.$$

$$(\text{例题2-40}): \text{由高斯定理: } \begin{cases} 2\pi r(l-h) D_1 = q_{u1} \cdot (l-h) \\ 2\pi r \cdot h D_2 = q_{u2} \cdot h. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D_1 = \frac{q_{u1}}{2\pi r} \\ D_2 = \frac{q_{u2}}{2\pi r}. \end{cases}$$

$$\times D_1 = \epsilon_0 E, D_2 = \epsilon E, \text{且 } \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_a^b \frac{q_{u1}}{2\pi r \epsilon_0} dr = U_0 \Rightarrow q_{u1} = \frac{2\pi \epsilon_0 U_0}{l-h}, q_{u2} = \frac{2\pi \epsilon_0 U_0}{l-h}.$$

$$Q = (l-h)q_{u1} + hq_{u2} = \frac{2\pi U_0}{l-h} [\epsilon_0(l-h) + \epsilon h]. \quad C = \frac{Q}{U} = \frac{1}{2} CU^2.$$

### 第三章 恒定电场

1. 恒定电场的源 = 恒定电流.  $\left\{ \begin{array}{l} \text{恒定电流} \\ \text{传导电流} \end{array} \right.$

(1) 恒定电流. (无导体, 不满足欧姆定律)  $\rightarrow$  带电粒子

① 恒定电流的体电流密度:

电荷运动距离微元量  $d\vec{r} = \vec{v}_e \Delta t$ . 通过垂直截面的电荷数元  $dQ = \rho \Delta V = \rho d\vec{S} \cdot d\vec{r}$

通过面积  $\Delta S$  的恒定电流  $\Delta I = \frac{dQ}{dt} = \rho d\vec{S} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \rho d\vec{S} \cdot \vec{v}_e$ .

$\Rightarrow$  体电流密度  $= \vec{J}_e = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta I}{\Delta S} = \rho \vec{v}_e$  (A/m<sup>2</sup>).

方向为正电荷运动方向, 大小为垂直于单位面积上的体电流.

② 由恒定电流密度计算恒定电流:  $\Delta I_e = \vec{J}_e \cdot \Delta \vec{S}$ .

(2) 传导电流. (导体中有恒定电流时, 总体呈电中性)  $\rightarrow$  自由电子

① 传导电流的体电流密度:  $\vec{J} = \rho \vec{v}_c$  A/m<sup>2</sup> ( $\rho$  导体媒质的体电荷密度,  $\vec{v}_c$  电荷的漂移速度)

对导体中任意面  $S$ , 穿过该面的总电流 =  $I = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$  ( $I = - \int_V \frac{\partial P}{\partial t} dV$ )

② 面电流密度:  $\vec{J}_S = \lim_{\Delta L \rightarrow 0} \frac{\Delta I}{\Delta L}$  (A/m) 线电流直接用 I 表示.

③ 在导体媒质中, 某点的体电流密度与该点处电场强度成正比.  $= \vec{J} = \sigma \vec{E}$  方向一致  
(欧姆定律的微分形式或恒定电场的本构关系)  $(\sigma$  为电导率, S/m).

$\Rightarrow$   $J=0$  为理想介质,  $J=\infty$  为理想导体 放在理想导体中有恒定电流通过时, 不产生电场强度(忽略)

(3) 恒定电流: 电流不随时间变化.

均匀电流: 电流大小不随空间位置变化.

### 2. 电荷守恒定律(电流连续方程)

(1) 积分形式:  $\oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = - \frac{d}{dt} \int_V P dV$

(2) 微分形式:  $\nabla \cdot \vec{J} = - \frac{\partial P}{\partial t}$   $\Rightarrow$  电荷密度  $P$  的时间变化率为电流密度  $\vec{J}$  的源.

(b) 对于恒定电流(直流动):  $\oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = 0$ ,  $\nabla \cdot \vec{J} = 0$ .

④ 证明简单导体媒质(导体)内部体电荷密度  $P_v = 0$ .

由电流连续方程:  $\nabla \cdot \vec{J} = - \frac{\partial P}{\partial t}$ . 和本构关系,  $\vec{J} = \sigma \vec{E}$ . 得到:

$$\nabla \cdot \vec{J} = \nabla \cdot (\sigma \vec{E}) = \sigma (\nabla \cdot \vec{E}) = \sigma \cdot \frac{P}{\epsilon_0} = - \frac{\partial P}{\partial t}. \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\sigma}{\epsilon_0} P = 0.$$

解此方程 =  $P = P_0 e^{-\frac{\sigma}{\epsilon_0} t}$ . 则  $t \rightarrow \infty$  时,  $P=0$ .

### 电场恒定 电流恒定

#### 3. 恒定电场基本方程.

(1) 恒定电场为保守场:  $\nabla \times \vec{E} = 0, \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$ .

导电媒质中 ( $\vec{J} = \sigma \vec{E}$ )  $\nabla \times (\frac{\vec{J}}{\sigma}) = 0, \oint_C \frac{\vec{J}}{\sigma} \cdot d\vec{l} = 0$  非导电媒质中 ( $\sigma = \epsilon_0$ )  $\nabla \times \vec{J} = 0, \oint_C \vec{J} \cdot d\vec{l} = 0$

(2) 电流恒定  $\nabla \cdot \vec{J} = 0, \oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = 0$  ( $\nabla \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$ ).

均匀导电媒质 ( $\vec{J} = \sigma \vec{E}, \sigma = \epsilon_0$ )  $\nabla \cdot \vec{E} = 0, \nabla^2 \phi = 0$ .

→ 静电场是理想媒质,  $\sigma = 0$ .

#### 4. 恒定电场边界条件.

(1) 电场强度:  $E_{1t} = E_{2t}, \phi_1 = \phi_2$ . (电场强度切向连续, 电压连续).

两种不同导电媒质分界面:  $\frac{J_{1t}}{J_{2t}} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2}$  ( $\vec{J} = \sigma \vec{E}$ ).

(2) 电流密度:  $J_{1n} = J_{2n}, \sigma_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial n} = \sigma_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial n}$  (电流密度法向连续, 电导率与电位法向导数乘积连续).

导电媒质分界面:  $\frac{E_{1n}}{E_{2n}} = \frac{\sigma_2}{\sigma_1}$

(3) 两种不同导电媒质分界面上自由面电荷密度  $\rho_s: \rho_s = D_{1n} - D_{2n} = D_{1n} (1 - \frac{\sigma_1 \epsilon_2}{\sigma_2 \epsilon_1}) = J_{1n} (\frac{\epsilon_1}{\sigma_1} - \frac{\epsilon_2}{\sigma_2})$

一种为导电媒质, 一种为理想媒质 ( $\sigma_2 = 0 \Rightarrow \vec{J}_2 = 0$ ). 因  $J_{1n} = J_{2n}$  知导电媒质中不存在法向电流, 而平行于分界面  
⇒ 完全绝缘.

#### 5. 损耗功率与焦耳定律.

(1) 每单位体积中的损耗功率  $P$  为:  $P = \vec{E} \cdot \vec{J} = \sigma E^2 = \frac{J^2}{\sigma}$  ( $W/m^3$ ) ⇒ 焦耳定律的分形式.

总损耗功率  $P = \int_V P dV = \int_V \vec{E} \cdot \vec{J} dV$  ( $W$ )

具有恒定截面积的导体中:  $P = \int_E dI \int_S J dS = UI$

(2) 推导: 横截面  $dS$ , 长  $dL$ , 轴线与正电荷运动方向平行的圆柱体  $dV$ , 包含的电荷元  $dQ$ .

在恒定电场作用下,  $dQ$  经过时间  $dt$  后沿轴线移动  $dL$ , 恒定电场对电荷元做功:

$$dW = dQ \vec{E} \cdot d\vec{l} = d\vec{F} \cdot d\vec{l}. \quad dP = \frac{dW}{dt} = \vec{E} \cdot d\vec{l} \frac{dQ}{dt} = \vec{E} \cdot \frac{dQ}{dL} dL = \vec{E} \cdot \vec{J} dL = \vec{E} \cdot \vec{J} dV. \quad P = \frac{dP}{dV} = \vec{E} \cdot \vec{J}.$$

#### 6. 静电场以直接地电阻.

(1) 静电场:  $\left\{ \begin{array}{l} \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = 0 \\ \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \\ \nabla \cdot \vec{D} = 0 \\ \nabla \times \vec{E} = 0 \end{array} \right.$  恒定电场:  $\left\{ \begin{array}{l} \oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = 0 \\ \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \\ \nabla \cdot \vec{J} = 0 \\ \nabla \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{E} = 0 \end{array} \right.$

(2)  $\frac{G}{C} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$   $\rightarrow G = C \cdot \frac{\sigma}{\epsilon_0}, C = G \cdot \frac{\epsilon_0}{\sigma}$ .

→ 静电场上先设电荷量  $\rho_0$ . 恒定电场上先设电流.

D(题3-11). 同轴线内、外导体半径分别为  $a$  和  $b$ . 其间充满媒质. 电导率为  $\sigma$ . 设内外导体间电压为  $U_0$ . 求单位长度的电阻以及损耗功率.

→ 设导体间电流为  $I$ . 则单位长度电流密度  $\vec{J}(r) = \frac{\vec{I}}{2\pi r}$  ( $a < r < b$ ) 由  $\vec{J} = \sigma \vec{E}$  得  $E(r) = \frac{\vec{I}}{2\pi r \sigma}$  ( $a < r < b$ ).

$$\text{则 } U_0 = \int_a^b \vec{E}(r) \cdot d\vec{r} = \int_a^b \frac{1}{2\pi r \sigma} dr = \frac{1}{2\pi \sigma} \ln \frac{b}{a}, \text{ 因此 } I = \frac{2\pi \sigma U_0}{\ln \frac{b}{a}}, \text{ 单位长度电阻 } R = \frac{U_0}{I} = \frac{\ln \frac{b}{a}}{2\pi \sigma}$$

$$\text{单位长度损耗功率} = P(r) = \sigma E^2(r) = \sigma \left(\frac{U_0}{r \ln \frac{b}{a}}\right)^2 \Rightarrow P = \int_a^b P(r) dr = \frac{\sigma U_0^2}{\ln \frac{b}{a}}$$

~~D(题3-16)~~. 两块电导率  $\sigma_1, \sigma_2$  厚度为  $\epsilon_0$  的金属薄片构成一扇形薄片. 两薄片的介电常数为  $\epsilon_0$ . 且已知电极 A, B 的电导率远大于  $\sigma_1$  和  $\sigma_2$ . 电极 A, B 之间电压为  $U_0$ . ①求该片内任意点的电压. ②求总电流以及电极 A, B 之间的电阻. ③分离面 CD 处主电场是否有突变. ④分离面上的面电荷密度.

→ ①  $\phi_1$  和  $\phi_2$  满足拉普拉斯方程:  $\nabla^2 \phi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial \phi}{\partial r} = 0$ .

$$\text{满足条件: } \begin{cases} \phi_1|_{\varphi=0} = 0, \phi_2|_{\varphi=\frac{\pi}{2}} = U_0 \end{cases}$$

$$\phi_1|_{\varphi=\frac{\pi}{2}} = \phi_2|_{\varphi=\frac{\pi}{2}}, \sigma_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial \varphi} = \sigma_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial \varphi} \text{ 端连接}$$

由方程可设解得  $\phi_1 = A_1 \varphi + B_1, \phi_2 = A_2 \varphi + B_2$ . 由边界条件得:  $B_1 = 0, A_2 \frac{\pi}{2} + B_2 = U_0$ .

$$\text{由 } \phi_1|_{\varphi=\frac{\pi}{2}} = \phi_2|_{\varphi=\frac{\pi}{2}}, \sigma_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial \varphi} = \sigma_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial \varphi} \text{ 得: } \begin{cases} A_1 \frac{\pi}{2} = A_2 \frac{\pi}{2} + B_2 \\ \sigma_1 A_1 = \sigma_2 A_2 \end{cases}$$

$$\text{解得: } A_1 = \frac{4U_0 \sigma_2}{\pi(\sigma_1 + \sigma_2)}, A_2 = \frac{4U_0 \sigma_1}{\pi(\sigma_1 + \sigma_2)}, B_1 = 0, B_2 = \frac{(\sigma_2 - \sigma_1) U_0}{\sigma_1 + \sigma_2}.$$

$$\text{则 } \phi_1 = \frac{4U_0 \sigma_2}{\pi(\sigma_1 + \sigma_2)} \varphi (0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}), \phi_2 = \frac{4U_0 \sigma_1}{\pi(\sigma_1 + \sigma_2)} \varphi + \frac{(\sigma_2 - \sigma_1) U_0}{\sigma_1 + \sigma_2} (\frac{\pi}{4} < \varphi \leq \frac{\pi}{2}).$$

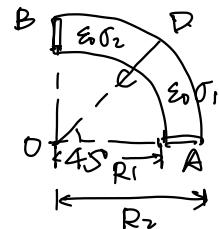
$$② \rightarrow \vec{E}_1 = -\nabla \phi_1 = -\frac{1}{r} \frac{\partial \phi_1}{\partial \varphi} \hat{\alpha}_\varphi = -\frac{4\sigma_2 U_0}{\pi r (\sigma_1 + \sigma_2)} \hat{\alpha}_\varphi (R_1 < r < R_2)$$

$$\vec{E}_2 = -\nabla \phi_2 = -\frac{1}{r} \frac{\partial \phi_2}{\partial \varphi} \hat{\alpha}_\varphi = -\frac{4\sigma_1 U_0}{\pi r (\sigma_1 + \sigma_2)} \hat{\alpha}_\varphi (R_1 < r < R_2)$$

$$\vec{J}_1 = \sigma_1 \vec{E}_1 = \vec{J}_2 = \sigma_2 \vec{E}_2 = -\frac{4\sigma_1 \sigma_2 U_0}{\pi r (\sigma_1 + \sigma_2)} \hat{\alpha}_\varphi, \text{ 则 } I = \int \vec{J} \cdot d\vec{S} = h \int_{R_1}^{R_2} J(r) dr = \frac{4\sigma_1 \sigma_2 U_0 h}{\pi (\sigma_1 + \sigma_2)} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

③  $\vec{E}_1$  有突变,  $\vec{E}_2$  没有突变,  $\vec{D}$  发生突变

$$④ \rho_s = D_{in} - D_{2n} = \epsilon_0 (E_{1n} - E_{2n}) = \frac{4U_0 (\sigma_1 - \sigma_2)}{\pi r (\sigma_1 + \sigma_2)}$$



D(题3-18). 内、外半径为  $a, b$  的同轴电缆中有两层介质. 介质分界面是半径为  $C$  的同轴圆柱面. 内、外两层介质的参数由  $(\epsilon_1, \mu_0, \sigma_1), (\epsilon_2, \mu_0, \sigma_2)$ , 内外导体间电压为  $U_0$ . ①求单位长度的漏电流. ②电场强度.

① 设漏电流大小为  $I$ . 则漏电流密度  $\vec{J} = \frac{I}{2\pi r L} \hat{\alpha}_r$ . 则  $\vec{E}_1 = \frac{\sigma_1 I}{2\pi r L} \hat{\alpha}_r, \vec{E}_2 = \frac{\sigma_2 I}{2\pi r L} \hat{\alpha}_r$

$$\text{由 } \int_a^C \vec{E}_1 \cdot d\vec{r} + \int_C^b \vec{E}_2 \cdot d\vec{r} = U_0 \text{ 得: } I = \frac{2\pi L U_0}{\sigma_1 \ln \frac{C}{a} + \sigma_2 \ln \frac{b}{C}}, \text{ 则 } \vec{E}_1 = \frac{\sigma_1 U_0}{r (\sigma_1 \ln \frac{C}{a} + \sigma_2 \ln \frac{b}{C})} \hat{\alpha}_r, \vec{E}_2 \text{ 同理.}$$

(题2-12中若无耗介质(理想介质 $\sigma_1=\sigma_2=0$ )，则用 $\Sigma E_1 = \Sigma E_2$ 求解。)

0 例1. 一平板电容器填充两种非理想介质，两种介质厚度分别为 $d_1, d_2$ ，电容器所加电压为 $U_0$ 。求(i) 两个介质中电场强度和电流密度大小，(ii) 两个介质中损耗功率密度。

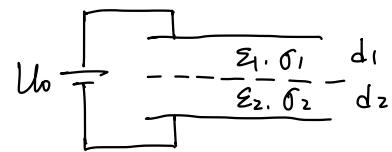
$\Rightarrow$  (i) 由边界条件  $\sigma_1 E_1 = \sigma_2 E_2$ ，且  $E_1 d_1 + E_2 d_2 = U_0$  得

$$E_1 = \frac{\sigma_2 U_0}{\sigma_2 d_1 + \sigma_1 d_2}, \quad E_2 = \frac{\sigma_1 U_0}{\sigma_2 d_1 + \sigma_1 d_2}. \quad \text{由 } J_1 = \sigma_1 E_1, \quad J_2 = \sigma_2 E_2 \text{ 得:}$$

$$J_1 = J_2 = \frac{\sigma_1 \sigma_2 U_0}{\sigma_2 d_1 + \sigma_1 d_2}$$

$$(ii) P_1 = \sigma_1 E_1^2 = \frac{\sigma_1 \sigma_2 U_0^2}{(\sigma_2 d_1 + \sigma_1 d_2)^2}, \quad P_2 = \sigma_2 E_2^2 = \frac{\sigma_2 \sigma_1 U_0^2}{(\sigma_2 d_1 + \sigma_1 d_2)^2}.$$

$\downarrow$  导电媒质分界面不满足  $D_{in} = D_{out}$ ，即  $\Sigma E_1 = \Sigma E_2$ ，而得  $J_{in} = J_{out}$ 。



$$\Sigma E_1 = \Sigma E_2 ???$$

(3) 两种不同导电媒质分界面上自由面电荷密度  $\rho_s$ :  $\rho_s = D_{in} - D_{out} = D_{in} \left( 1 - \frac{\sigma_1 \epsilon_2}{\sigma_2 \epsilon_1} \right) = J_{in} \left( \frac{\epsilon_1}{\sigma_1} - \frac{\epsilon_2}{\sigma_2} \right)$

0 (3-1). 同轴线内、外导体半径 $a, b$ ，填充媒质电导率为 $\sigma$ ，内外导体间电压为 $U_0$ 。求单位长度电阻及损耗功率。

设轴向电流大小为 $I$ ，轴线长为 $L$ ，轴向电流密度  $J(r) = \frac{I}{2\pi r L}$ 。

$$\text{则电场强度 } \vec{E} = \frac{J}{\sigma} \vec{ar} = \frac{I}{2\pi r L \sigma} \vec{ar}. \quad \text{由 } \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{R} = U_0 \text{ 解得: } I = \frac{2\pi L \sigma U_0}{\ln \frac{b}{a}}.$$

$$\Rightarrow \text{单位长度电阻: } R = \frac{U_0}{I} = \frac{\ln \frac{b}{a}}{2\pi L \sigma}. \quad \text{损耗功率: } P = \int_V \sigma E^2 dV \quad (= UI)$$

$$= \int_a^b \frac{\sigma U_0^2}{r^2 \ln \frac{b}{a}} \cdot 2\pi r L dr = \frac{2\pi \sigma L U_0^2}{\ln \frac{b}{a}}$$

0 (3-1b) 电压 $\psi$ 随 $\psi$ 变化，选取圆柱坐标系。则电压分布满足拉普拉斯方程:  $\nabla^2 \psi = \frac{1}{r^2} \frac{d^2 \psi}{dr^2} = 0$ 。

$$\begin{cases} \psi_1 = A_1 \psi + B_1, & \text{代入 } \psi_1(0) = 0 \\ \psi_2 = A_2 \psi + B_2, & \end{cases} \quad \begin{cases} \psi_1(\frac{\pi}{2}) = \psi_2(\frac{\pi}{2}), \\ \sigma_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial \psi} = \sigma_2 \frac{\partial \psi_2}{\partial \psi} \end{cases} \quad \text{得:}$$

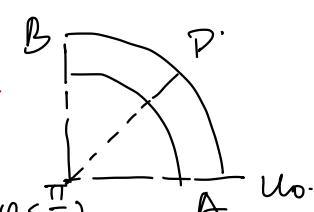
$$\psi_1 = \frac{4\sigma_2 U_0}{\pi(\sigma_2 + \sigma_1)} \psi \quad (0 \leq \psi < \frac{\pi}{2}), \quad \psi_2 = \frac{4\sigma_1 U_0}{\pi(\sigma_2 + \sigma_1)} \psi + \frac{(\sigma_2 - \sigma_1) U_0}{\sigma_2 + \sigma_1} \quad (\frac{\pi}{2} < \psi \leq \pi)$$

$$\Rightarrow \vec{E}_1 = -\nabla \psi_1 = \frac{1}{r} \frac{4\sigma_2 U_0}{\pi(\sigma_1 + \sigma_2)} \vec{ar}, \quad (0 \leq \psi < \frac{\pi}{2}), \quad \vec{E}_2 = -\nabla \psi_2 = \frac{1}{r} \frac{4\sigma_1 U_0}{\pi(\sigma_1 + \sigma_2)} \vec{ar}, \quad (\frac{\pi}{2} < \psi \leq \pi)$$

$$\text{则 } \vec{J}_1 = \sigma_1 \vec{E}_1, \quad \vec{J}_2 = \sigma_2 \vec{E}_2. \quad \text{得总电流为 } I = \int_S J_1 ds = \int_S J_2 ds = \frac{4\sigma_1 \sigma_2 U_0 h}{\pi(\sigma_1 + \sigma_2)} \ln \frac{R_2}{R_1} \quad (\text{横截面}).$$

$$\text{电阻 } R = \frac{U_0}{I} = \frac{\pi(\sigma_1 + \sigma_2)}{4\sigma_1 \sigma_2 h \ln \frac{R_2}{R_1}}. \quad \Rightarrow \text{分界面处发生突变, 于无突变, 于发生突变, 与静电场不同.}$$

$$\rho_s = J_{in} \left( \frac{\epsilon_1}{\sigma_1} - \frac{\epsilon_2}{\sigma_2} \right) = J_1 \epsilon_0 \left( \frac{1}{\sigma_1} - \frac{1}{\sigma_2} \right) = \frac{4\sigma_1 \sigma_2 U_0 \epsilon_0}{\pi(\sigma_1 + \sigma_2) r} \left( \frac{1}{\sigma_2} - \frac{1}{\sigma_1} \right) = \frac{4(\sigma_1 - \sigma_2) \epsilon_0 U_0}{\pi(\sigma_1 + \sigma_2) r}.$$



## 第四章 静磁场

$$\vec{B} = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{I d\vec{l} \times \vec{R}}{R^3}$$

↑

1. 真空中的静磁场.

$$(1) \text{毕奥-萨伐尔定律: } \vec{B} = \frac{\mu}{4\pi} \int_L \frac{I d\vec{l} \times \vec{a}_R}{R^2} \quad (\text{线电流}).$$

若电流以体密度 $\rho$ 分布于体积 $V$ 内, 则用 $\int dV$ 代替 $\int d\vec{l}$ . 若以面密度分布于曲面上同理.

$$\vec{B} = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J} \times \vec{R}}{R^3} dV \quad (\text{体电流}), \quad \vec{B} = \frac{\mu}{4\pi} \int_S \frac{\vec{J} \times \vec{R}}{R^3} dS \quad (\text{面电流}).$$

(2) 磁场力: ① 长度为 $l$ 的载流导线受到的磁场所受  $\vec{F} = \int_l I d\vec{l} \times \vec{B}$ .

类似地, 体电流导体  $\vec{F} = \int_V \vec{J} \times \vec{B} dV$ , 分布于曲面上的面电流  $\vec{F} = \int_S \vec{J} \times \vec{B} dS$

② 带电粒子作用力  $\vec{F} = Q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \rightarrow$  洛伦兹力.

(3) 由于体电流的  $\vec{B} = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J} \times \vec{R}}{R^3} dV$  可得出:

点电荷 $Q$ 以平均速度 $\vec{v}$ 运动时, 在距离 $R$ 处的磁通量密度 $\vec{B}$ 由:  $\vec{B} = \frac{\mu}{4\pi} \frac{Q \vec{v} \times \vec{R}}{R^3}$ .

若此时在场点 $R'$ 处有另一个运动电荷 $Q'$ , 速度为 $\vec{v}'$ , 则点电荷所受磁力:  $\vec{F} = \frac{\mu_0}{4\pi R^3} (Q \vec{v} \times Q' \vec{v}' \times \vec{R})$ .

(4) 真空中有一闭合载流回路 $I_1$ , 及另一直流回路 $I_2$ , 有作用力:

$$\vec{F}_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{L_2} \int_{L_1} \frac{I_2 d\vec{l}_2 \times (I_1 d\vec{l}_1 \times \vec{a}_R)}{R^2} = - \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \int_{L_1} \oint_{L_2} \frac{d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2}{R^3} \vec{R}.$$

(5) 结论: ① 真空中载流直导线  $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} (\sin \beta_2 - \sin \beta_1) \vec{a}_\phi$  (有限长),  $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{a}_\phi$  (无限长)

② 真空中螺线管轴线上  $\vec{B} = \frac{\mu_0 n I}{2} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2) \vec{a}_z$  (有限长),  $\vec{B} = \mu_0 n I \vec{a}_z$  (无限长)

(6) 磁通连续性原理: 磁通量  $\phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{S}$ . (P93)

微分形式:  $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ . 积分形式:  $\oint \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$ .  $\Rightarrow$  用“旋涡散流通则”.

(对比电流连续性定理:  $\nabla \cdot \vec{J} = - \frac{\partial \rho}{\partial t}$ ).  $\nabla \times \vec{E} = 0$

(7) 安培环路定律(磁的高斯定理).

① 真空:  $\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$  或  $\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = I$ , 其中  $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0}$ .

简单媒质:  $\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu I$  或  $\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = I$ , 其中  $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu}$ .

② 若封闭曲线上电流以体电流密度 $\rho$ 分布, 则  $\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$  (面积分).

③ 微分形式:  $\nabla \times \vec{H} = \vec{J}$  或  $\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$   $\Rightarrow$  磁场为旋度场, 旋涡源为 $\vec{J}$ .

(对比电场的高斯定理:  $\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$  或  $\nabla \cdot \vec{D} = \rho$ ).

## \* 2. 静磁场的矢量磁位及其方程.

(1) 矢量磁位: 磁通量密度  $\vec{B}$  为无散场 ( $\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0$ ) 则有  $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ ,  $\vec{A}$  为磁位 ( $Wb/m$ ).

(2) 对比电场中的电位, 电通量密度为无旋场 ( $\oint \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0$ ) 则有  $\vec{E} = -\nabla \phi$ ,  $\phi$  为电位 ( $V/m$ ) A 方向与 E 方向相同

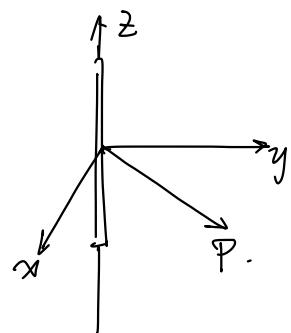
计算公式:  $\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}}{R} dV$  (体电流) 或  $\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_S \frac{\vec{J}_s}{R} dS$  (面电流).  $\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_L \frac{I d\vec{r}}{R}$ . (线电流).

其中  $R$  为电流元到待求磁位的场点的距离. 参考图,  $(\vec{A}=0)$  在无穷远处, 若电流流进空间至无穷远处则公式不适用.  $\vec{A}$  与  $\vec{J}$  方向相同.

对磁位  $\vec{A}$  作闭合曲线积分得磁通量:  $\phi = \oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \oint \vec{A} \cdot d\vec{r}$ .

(2) 磁位方程:  $\nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{J}$  (泊松方程)  $\rightarrow$  有源区. (对比电位方程:  $\nabla^2 \phi = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ )  
 $\nabla^2 \vec{A} = 0$  (拉普拉斯方程)  $\rightarrow$  无源区.

【例4.4】真空中有一沿  $z$  轴放置、长为  $2l$ 、载直流动  $I$  的直导线. 求  $xOy$  平面上任一点  $P$  处的磁位, 和  $l \rightarrow \infty$  下  $P$  处的磁位和磁通量密度.



## 3. 磁介质中的静磁场.

(1) 磁偶极子  $\Rightarrow$  半径很短的圆形平面载流回路.

① 这区域场的近似表达式:

$$\text{整个载流圆环在 } P \text{ 点产生的 } \vec{A} = \frac{\mu_0 I b}{2\pi R} \vec{a}_\varphi \int_0^\pi \frac{\cos \varphi}{R_1} d\varphi$$

积分后得:  $\vec{A} = \vec{a}_\varphi \frac{\mu_0 I S}{4\pi R^2} \sin \theta$ . 其中  $R$  为  $P$  点到圆形回路中心距离.  
 $\theta$  为  $z$  轴与  $\vec{a}_\varphi$ 、中心连线的夹角.

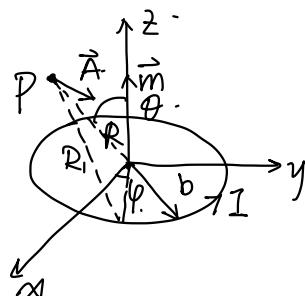
同时,  $\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi R^2} \vec{m} \times \vec{a}_R$ , 其中  $\vec{m} = I \vec{S}$  (磁偶极矩)

则  $P$  点磁通量密度:  $\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = \frac{\mu_0 m}{4\pi R^3} (2\cos \theta \vec{a}_R + \sin \theta \vec{a}_\theta)$ .

推导过程:  $\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = \frac{1}{R^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} \vec{a}_R & \vec{a}_{\theta} & \vec{a}_\varphi \\ \frac{\partial}{\partial R} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ A_R & R \vec{a}_\theta & R \sin \theta \vec{a}_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\vec{a}_R}{R^2 \sin \theta} & \frac{\vec{a}_\theta}{R \sin \theta} & \frac{\vec{a}_\varphi}{R \sin \theta} \\ \frac{\partial}{\partial R} & \frac{\partial}{\partial \theta} & 0 \\ 0 & 0 & R \sin \theta A_\varphi \end{vmatrix}$

$$= \frac{\vec{a}_R}{R^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (R \sin \theta A_\varphi) - \frac{\vec{a}_\theta}{R \sin \theta} \frac{\partial}{\partial R} (R \sin \theta A_\varphi)$$

$$= \frac{\vec{a}_R}{R^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\mu_0 m}{4\pi R} \sin^2 \theta \right) - \frac{\vec{a}_\theta}{R \sin \theta} \frac{\partial}{\partial R} \left( \frac{\mu_0 m}{4\pi R} \sin^2 \theta \right) = \frac{\mu_0 m}{4\pi R^3} (2\cos \theta \vec{a}_R + \sin \theta \vec{a}_\theta)$$



当 $\theta=0$ 时，可得磁偶极子中心轴线上任一点处： $\vec{B} = \frac{\mu_0 m}{2\pi R^3} = \frac{\mu_0 I a^2}{2R^3} (V)$

当 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 时，可得磁偶极子平面内中心处： $\vec{B} = \frac{\mu_0 m}{4\pi R^3} (X) \Rightarrow$  此公式只能用来计算注磁场

## ② 磁偶极子对比：

磁偶极子： $\vec{A} = \mu_0 \frac{\vec{m} \times \vec{ar}}{4\pi R^2}$	$\vec{B} = \mu_0 \frac{\vec{m}}{4\pi R^3} (2\cos\theta \vec{ar} + \sin\theta \vec{a}\theta)$	(均在球坐标系下)
电偶极子： $\phi = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\vec{P} \cdot \vec{ar}}{4\pi R^2}$	$\vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\vec{P}}{4\pi R^3} (2\cos\theta \vec{ar} + \sin\theta \vec{a}\theta)$	

⇒ 在注磁场，两者分布是相同的。但在偶极子附近分布不同。

存在对偶关系： $\vec{m}$  和  $\mu_0$ ,  $\vec{P}$  和  $\vec{m}$ ,  $\vec{a}$  和  $\vec{B}$ .

## (2) 磁介质中的静磁场。

① 电子绕核运动 → 分子电流 → 磁偶极子。

原子核自旋的磁偶极距与电子轨道运动或电子自旋的磁偶极距相比，可忽略不计。

微观上，一个原胞中做轨道运动的电子产生分子电流，相当于半径为 $a$ 的电流环，垂直于电流环距中心 $d$ 处的磁通量密度大小为： $B = \frac{\mu_0 I a^2}{2d^3} (d \gg a) = \frac{\mu_0 S}{2\pi d^3} \Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 \vec{m}}{2\pi d^3}$  ⇒ 可视作一磁偶极子。

一磁偶极子 $\vec{m}$ 处在外加磁场 $\vec{B}_0$ 中时受到转矩： $\vec{T} = \vec{m} \times \vec{B}_0$ 。（使磁偶极子方向与外加磁场方向趋于一致）

## ② 磁化强度。

磁介质被磁化后，其中的磁场由外磁场和分子电流产生的磁场叠加。

定义磁化强度： $\vec{M} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \sum \vec{m}_i$  (A/m) ⇒ 单位体积中分子电流磁矩的矢量和。

⇒ 当 $I=0$ 时，该磁介质被磁化。

⇒ 介质内部 $dV$ 体积内分子电流（磁偶极子）在任意点产生的磁矢量：

$$d\vec{A} = \frac{\mu_0 \vec{M} \times \vec{ar}}{4\pi R^2} dV = \frac{R}{4\pi} \vec{M} \times \nabla' \left( \frac{1}{R} \right) dV; \quad (\nabla' \left( \frac{1}{R} \right) = -\frac{\vec{ar}}{R^3} = -\frac{\vec{ar}}{R^2}).$$

积分得体积 $V$ 内所有磁偶极子在外部任一点产生磁矢量： $\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \vec{M} \times \nabla' \left( \frac{1}{R} \right) dV'$

高场论恒等式： $\nabla \times (\phi A) = \phi \nabla \times A + (\nabla \phi) \times A$  得  $A \times (\nabla \phi) = \phi \nabla \times A - \nabla \times (\phi A)$ 。  
即  $\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{M} \times \vec{ar}}{R} dV' - \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \nabla' \left( \frac{\vec{M}}{R} \right) dV' = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{M} \times \vec{ar}}{R} dV + \frac{\mu_0}{4\pi} \phi \int_S \frac{\vec{M} \times \vec{a}_n}{R} dS'$ . 推导

其中 $S'$ 为包围体积 $V$ 的封闭区域， $\vec{a}_n$ 为 $S'$ 的外法向单位矢量。

该式也用于计算介质内部任意点的磁矢量。

将上式与磁矢量的计算式： $\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}_b}{R} dV$  和  $\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_S \frac{\vec{J}_s}{R} dS'$  比较可得：

$\begin{cases} \vec{J}_b = \nabla \times \vec{M} \Rightarrow \text{束缚体电流密度, 磁化体电流密度} \end{cases}$

$\begin{cases} \vec{J}_s = \vec{M} \times \vec{a}_n \Rightarrow \text{束缚面电流密度, 磁化面电流密度.} \end{cases}$

磁化介质内部的 $\vec{J}_b$ 和表面的 $\vec{J}_s$ 是磁化介质产生的磁矢量的源。

③ 磁介质的安培环路定理的微分形式： $\nabla \times \vec{H} = \mu_0 (\vec{J} + \vec{J}_b)$   $\vec{J}$ 为传导电流， $\vec{J}_b$ 为束缚电流。

或者写为  $\nabla \times \vec{H} = \vec{J}$ ，其中  $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$  ⇒ 磁场强度。

积分形式： $\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = I$  (传导电流)。

$$\left. \begin{array}{l} \text{磁} \left\{ \begin{array}{l} \text{真空中: } \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \\ \text{介质: } \nabla \times \vec{B} = \mu_0 (\vec{J} + \vec{J}_b) \end{array} \right. \right\} \nabla \times \vec{H} = \vec{J}. \quad \left. \begin{array}{l} \text{电} \left\{ \begin{array}{l} \text{真空中: } \nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} P \\ \text{介质: } \nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} (P + P') \end{array} \right. \right\} \nabla \cdot \vec{D} = P.$$

⇒ 磁场强度  $\vec{H}$  的旋涡源是传导电流, 磁感应强度  $\vec{B}$  的旋涡源是传导电流和束缚电流.

④ 磁场的本构关系(磁通量密度  $\vec{B}$  与磁场强度  $\vec{H}$  之间的关系).

$$\left. \begin{array}{l} \text{线性磁介质: 磁介质参数与磁场强度大小无关.} \\ \text{均匀磁介质: 磁介质参数与位置无关.} \\ \text{各向同性介质: 磁介质参数与方向无关} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{简单磁介质} (\nabla \cdot \vec{H} = 0)$$

→ 如空气、水、油等.

⇒ 在各向同性介质中, 磁化强度  $\vec{M}$  的方向与总磁场强度  $\vec{H}$  的方向相同.

对于  $\vec{H}$  的方向和  $\vec{H}$  不同的介质, 称为各向异性介质. 其满足:  $\vec{M} = \chi_m \vec{H}$  ( $\chi_m$  为二维张量). 而对于线性、各向同性介质有:  $\vec{M} = \chi_m \vec{H}$  ( $\chi_m$  为常数).  $\rightarrow \vec{B} = \mu \vec{H}$  ( $\mu$  为张量).

$$\vec{B} = \epsilon_0 \chi_m \vec{E}, \quad \rightarrow \vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) = \mu_0 (1 + \chi_m) \vec{H} = \mu_0 \mu_r \vec{H} = \mu \vec{H}$$

其中  $\mu_r = 1 + \chi_m$  为相对磁导率. 真空中  $\mu_r = 1$ .

A B 例题 4.5 真空中一长为  $L$ 、半径为  $a$  的均磁化的圆柱形磁棒轴线沿  $z$  轴放置. 已知圆柱形磁棒的磁化强度  $\vec{M} = \vec{\alpha}_z M_0$ , 求轴线上点  $P(0, 0, z)$  处  $\vec{B}$ .

$$\Rightarrow z = \pm \frac{L}{2} = \vec{J} = 0 \quad \rightarrow \text{由 } \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_S \frac{2d\vec{l} \times \vec{R}}{R^3} \text{ 有:} \quad \Rightarrow \text{积分: } \vec{B} = \vec{\alpha}_z \frac{\mu_0 M_0}{2} \left[ \frac{\frac{L}{2}+z}{\sqrt{(\frac{L}{2}+z)^2+a^2}} + \frac{\frac{L}{2}-z}{\sqrt{(\frac{L}{2}-z)^2+a^2}} \right].$$

$$r = a: \quad \vec{J} = M_0 \vec{\alpha}_z r.$$

$$\boxed{\vec{B} = \vec{\alpha}_z \frac{\mu_0 L a^2}{2(a^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}}$$

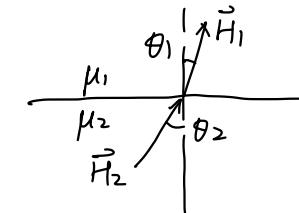
→ 传导电流.

4. 静磁场的边界条件.

(1) 场矢量  $\vec{B}$  和  $\vec{H}$ :  $H_{1t} - H_{2t} = J_s$  ( $\vec{\alpha}_n \times (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = \vec{J}_s$ ) 当  $J_s = 0$  时,  $H_{1t} = H_{2t}$ .  
 $B_{1n} = B_{2n}$  ( $\vec{\alpha}_n \cdot (\vec{B}_1 - \vec{B}_2) = 0$ )

对磁导率分别为  $\mu_1$  和  $\mu_2$  的两种简单磁介质的分界面:

$$\left. \begin{array}{l} H_1 \sin \theta_1 = H_2 \sin \theta_2 \\ \mu_1 H_1 \cos \theta_1 = \mu_2 H_2 \cos \theta_2 \end{array} \right\} \text{ 可得: } \frac{\tan \theta_1}{\tan \theta_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2} = \frac{\mu_r}{\mu_{r2}}$$



(类比于静电场中:  $E_{1t} = E_{2t}$ ,  $D_{1n} - D_{2n} = P_s$ ,  $\frac{\tan \theta_1}{\tan \theta_2} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} = \frac{\epsilon_r}{\epsilon_{r2}}$ .)

5. 电感

恒定电流产生的静磁场中, 电感为穿过导体系统中的磁链与产生该磁链的电流之比.

(1) 磁通量  $\Psi$ : 与回路电流  $I$  交链的磁通量中为回路电流  $I$  的磁通  $\Psi$ .  $\Rightarrow \Psi = N \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$   
 其中  $N$  可以小写!

(2) 自感: 空间充满线性媒质时. 当静磁场由导线回路产生时. 穿过回路的磁通链与电流之比为自感.  $L = \frac{\Psi}{I}$  (H),  $L$  大小与电流无关.

自感为内自感与外自感之和  $= L = \frac{\Psi_0}{I} + \frac{\Psi_i}{I} = L_0 + L_i$  (注意区分内自感和外自感).

⇒ 计算内磁通时, 采用等效的概念:  $\Psi_i = \int_S \frac{I_i}{I} d\vec{B} \cdot \vec{n}$  (部分电流与全部电流之比)

$$(3) 互感:  $L_{21} = \frac{\Psi_{21}}{I_1}, \quad L_{12} = \frac{\Psi_{12}}{I_2}$ , 谢伊曼公式:  $M = \frac{\mu_0 N_1 N_2}{4\pi} \int_{L_2} \int_{L_1} \frac{d\vec{l}_2 \cdot d\vec{l}_1}{R} (H)$$$

I<sub>1</sub>, I<sub>2</sub> 方向影响系数

## X、(内自感与外自感)

同轴线内导体半径为a，外导体半径为b，内外导体之间为空气，求同轴线单位长度的内自感与外自感

$\Rightarrow$  设电流为I，则对内导体有： $\vec{B}_i = \vec{a}\varphi \frac{\mu_0}{2\pi r} I_i = \vec{a}\varphi \frac{\mu_0}{2\pi r} \cdot \frac{r^2}{a^2} I = \vec{a}\varphi \frac{\mu_0 r I}{2\pi a^2}$  ( $0 < r < a$ )

① 穿过r处的磁通量为： $d\Psi_i = \vec{B}_i \cdot d\vec{S} = B_i dr = \frac{\mu_0 r I}{2\pi a^2} dr$  (单位长度)

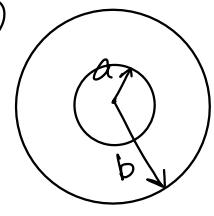
此部分磁通相互连的不是导体中的全部电流I，而内磁通为：

$$d\Psi_i = \frac{I_i}{I} d\Psi_i = \frac{r^2}{a^2} \cdot \frac{\mu_0 r I}{2\pi a^2} dr = \frac{\mu_0 r^3 I}{2\pi a^4} dr \quad (\Rightarrow \Psi = N\Psi, N \text{有小于1的分数})$$

$$\text{则 } \Psi_i = \int_s d\Psi_i = \int_0^a \frac{\mu_0 r^3 I}{2\pi a^4} dr = \frac{\mu_0 I}{8\pi} \quad \text{则内自感为 } L_i = \frac{\Psi_i}{I} = \frac{\mu_0}{8\pi}.$$

② 内外导体间任一点有： $\vec{B}_0 = \vec{a}\varphi \frac{\mu_0}{2\pi r} I$  ( $a < r < b$ )  $\Rightarrow$  单位长度的磁通量为： $d\Psi_0 = d\Psi = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} dr$ .

$$\text{则 } \Psi_0 = \int_s d\Psi_0 = \int_a^b \frac{\mu_0 I}{2\pi r} dr = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{b}{a} \quad \text{则外自感为 } L_0 = \frac{\Psi_0}{I} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{b}{a}.$$



## 6. 静磁场的能量

(1) 单个线圈：对线圈系统有： $W_m = \frac{1}{2} L I^2 = \frac{1}{2} I \Psi_i$  (J) ( $N\Psi = L I \neq 4$ )

(2) 两个耦合线圈： $W_m = \frac{1}{2} I_1 \Psi_1 + \frac{1}{2} I_2 \Psi_2 = \frac{1}{2} I_1 (N_1 \Psi_{11} + N_1 \Psi_{12}) + \frac{1}{2} I_2 (N_2 \Psi_{22} + N_2 \Psi_{21}) = \frac{1}{2} I_1^2 + M_1 I_1 I_2 + \frac{1}{2} I_2^2$

$\downarrow$  自磁链       $\downarrow$  互磁链

$\downarrow$  自磁能       $\downarrow$  互磁能

n个耦合线圈： $W_m = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n I_k \Psi_k = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n I_k \Psi_{kk} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{j \neq k} I_k \Psi_{jk}$  (自磁能与互磁能)

$$\text{其中 } \Psi_k = \Psi_{kk} + \Psi_{jk} = L_k I_k + \sum_{j \neq k} L_{kj} I_j \quad \Rightarrow \text{课本 P19.}$$

$\hookrightarrow$  回路k中的电流  $I_k$  在回路  $j$  ( $j=1, 2, \dots, k-1, k+1, \dots, n$ ) 中产生的磁链

(3) n个线电流回路构成的磁场系统的能量： $W_m = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \oint_{L_k} \vec{A} \cdot (I_k d\vec{l}_k)$ .

其中  $\vec{A}$  为各回路电流在闭合回路  $L_k$  上产生的合磁矢量。

计算体电流与面电流产生的磁场能量： $W_m = \frac{1}{2} \int_V \vec{A} \cdot \vec{J} dV + \frac{1}{2} \int_S \vec{A} \cdot \vec{J} dS'$ .

(4)  $W_m = \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H}$  (J/m³).  $W_m = \int_V W_m dV = \frac{1}{2} \int_V \vec{B} \cdot d\vec{H} dV$  (J).

对于简单媒质 ( $\vec{B} = \mu \vec{H}$ ) 有  $W_m = \frac{1}{2} \mu H^2$ .

(类比静电场  $W_e = \frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E}$ .  $W_e = \int_V \vec{D} \cdot \vec{E} dV$ . 简单媒质： $W_e = \frac{1}{2} \epsilon E^2$ ).

O (内自感和外自感 = 例题 11). 同轴线内导体半径为a，外导体半径为b，内外导体之间为空气。

$\Rightarrow$  ① 设同轴线中电流为I，由安培... 求得： $\vec{B}_i = \vec{a}\varphi \frac{\mu_0 r I}{2\pi a^2}$  ( $0 < r < a$ )

穿过r处宽dr，长l的矩形面元的磁通量为  $d\Psi_i = B_i dS = B_i dr l$ .

以r为半径的圆柱中  $I_i = \frac{r^2}{a^2} I \Rightarrow$  内磁链为  $d\Psi_i = \frac{I_i}{I} d\Psi_i = \frac{\mu_0 r^3 l I}{2\pi a^4} dr$ .

$$\Psi_i = \int_s d\Psi_i = \int_0^a \frac{\mu_0 r^3 l I}{2\pi a^4} dr = \frac{\mu_0 l I}{8\pi} \Rightarrow L_{iu} = \frac{\Psi_i}{I l} = \frac{\mu_0}{8\pi} \quad (\text{单位长度内自感}).$$

$$\text{②} \Rightarrow \vec{B}_0 = \vec{a}\varphi \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad (a < r < b) \quad \Psi_0 = \int_s B_0 dr = \int_a^b \frac{\mu_0 I}{2\pi r} dr = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{b}{a}.$$

$$\Rightarrow L_0 = \frac{\Psi_0}{I} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{b}{a} \quad (\text{单位长度外自感}).$$

○ 半径为  $a$ ，通有电流为  $I$  的无限长直导线，其下部分埋入磁导率为  $\mu$  的均匀磁介质中。和在空气与磁介质的两个区域中磁感应强度及各分界面处束缚电流面密度。

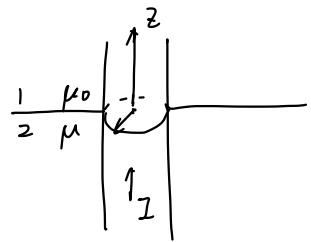
$$\Rightarrow \text{由安培环路定理} \oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = I \text{ 得: } \vec{H} = \vec{a}\varphi \frac{I}{2\pi a}.$$

$$\text{在 1 中: } B = \mu H \text{ 且 } \vec{B}_1 = \vec{a}\varphi \frac{\mu_0 I}{2\pi r}, \text{ 同理有 } \vec{B}_2 = \vec{a}\varphi \frac{\mu I}{2\pi a}.$$

$$\text{又有 } \vec{m} = \frac{\vec{B}_1}{\mu_0} - \vec{H} = 0, \quad \vec{m}_2 = \frac{\vec{B}_2}{\mu_0} - \vec{H} = \vec{a}\varphi \left(\frac{\mu}{\mu_0} - 1\right) \frac{I}{2\pi a}.$$

$$\text{分界面 1 例: } \vec{J}_{S1} = \vec{m} \times \vec{a}_n = 0, \quad 2\pi a: \vec{J}_{S2} = \vec{m}_2 \times \vec{a}_n = \vec{a}_R \left(\frac{\mu}{\mu_0} - 1\right) \frac{I}{2\pi a}.$$

$$\text{导线和磁介质分界面上: } \vec{J}_S = \vec{m}_2 \times \vec{a}_n = \vec{a}_z \left(\frac{\mu}{\mu_0} - 1\right) \frac{I}{2\pi a}.$$



○ (用能量法求自感例 4(2). 例 4(1) 中:

取长为  $l$ ，半径  $r \sim r+dr$  的圆柱，其中的电流强度为  $dI_i = \frac{I}{\pi a^2} \cdot 2\pi r l dr$ .

与电流流经连的磁通量  $\Phi_i = \int_r^a B_i l dr = \frac{\mu_0 I l}{2\pi a^2} (a^2 - r^2)$ .

$$\Rightarrow W_m = \frac{1}{2} \int_s \Phi_i dI_i = \frac{1}{2} \int_0^a \frac{\mu_0 I l}{2\pi a^2} (a^2 - r^2) \cdot \left(\frac{I}{\pi a^2}\right) 2\pi r dr = \frac{\mu_0 I^2 l}{16\pi}.$$

$$L_{iu} = \frac{\partial W_m}{\partial I^2 l} = \frac{\mu_0}{8\pi}$$

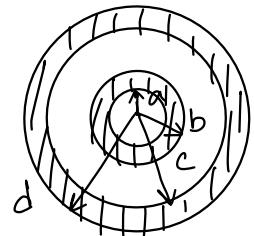
○ 求长为  $l$ ，内外导体的内、外半径分别为  $a, b, c, d$  的同轴线自感。

① 内导体的内自感  $L_{i1}$ .  $\Rightarrow$  也可通过能量计算 (题 4-28)

② 内外导体间的外自感  $L_o$ .  $W_m = \frac{1}{2} L I^2 = \int_r^d \frac{1}{2} \mu H^2 dV$

③ 外导体的内自感  $L_{i2}$

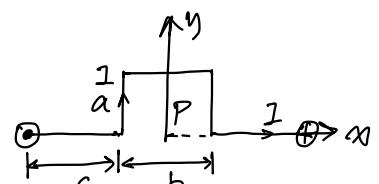
$$\Rightarrow L = L_{i1} + L_o + L_{i2}$$



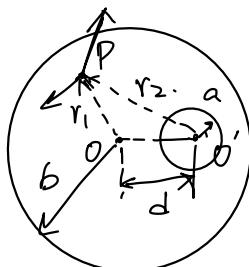
○ (题 4-2) 自由空间中，已知区域  $|r| \leq a$  内存在恒定电流  $\vec{J} = J_0 \vec{a}_y$  对该区域的磁通量密度。

○ (题 4-4) 自由空间中，若两根间距  $(2c+b)$  的半无限长载流直导线在近处弯曲折成如图形状，求 P 点处  $\vec{B}$  的表达式。

$$\Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} (\sin\beta_1 - \sin\beta_2).$$



○ (题 4-12).



① ② ③

○ (题本-18). -半径为  $a$  的磁介质球被均匀磁化，且  $\vec{M} = M_0 \vec{a}_z$ . 求：① 体束缚电流密度和面束缚电流密度. ② 球心处磁通量密度.

$$\Rightarrow d\vec{B} = \frac{\mu_0 I a^2}{2(a^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \vec{a}_z. \quad dI = J_s d\Omega \text{ 而不是 } dI = J_s \cdot 2\pi R d\theta.$$

\* (题本-28)

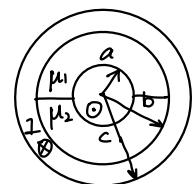
○ 同轴线的内导体是半径为  $a$  的圆柱，外导体是内外半径为  $b, c$  的圆柱，内外导体间充满  $\mu_1, \mu_2$  两种磁介质. 设同轴线中通有电流  $I$ . 求：① 单位长度存储的能量. ② 单位长度电感.

$$① r < a: \text{由 } 2\pi r \cdot H_1 = \frac{r^2}{a^2} I \text{ 得: } H_1(r) = \frac{Ir}{2\pi a^2}$$

$$a \leq r < b: \text{由 } \frac{B}{\mu_1} \pi r + \frac{B}{\mu_2} \pi r = I \text{ 得: } B(r) = \frac{I}{\pi r} \cdot \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \quad (\text{由 } \nabla \times E = \mu_0 H + \epsilon_0 E = 0)$$

$$b \leq r < c: \text{由 } 2\pi r \cdot H_3 = \frac{(r^2 - b^2)}{(c^2 - a^2)} I \text{ 得: } H_3(r) = \frac{I}{2\pi r} \left[ 1 - \frac{r^2 - b^2}{c^2 - b^2} \right]$$

$$r > c: \text{由 } 2\pi r \cdot H_4 = 0 \text{ 得: } H_4 = 0.$$

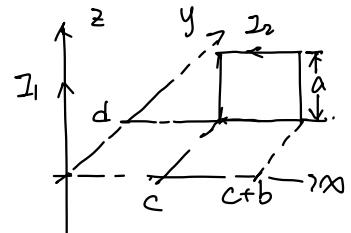
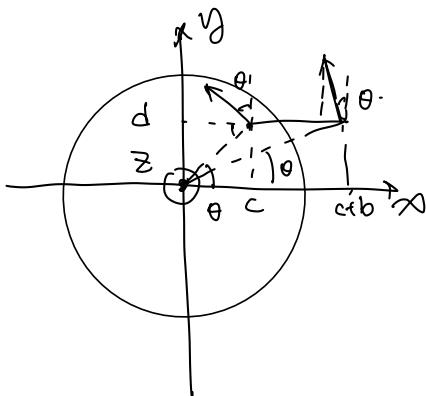


$$\text{则由 } W_m = \frac{1}{2} \mu_0 H^2 \text{ 得: } W = \int_0^a \frac{1}{2} \mu_0 H_1^2 \cdot 2\pi r dr + \left( \int_a^b \frac{1}{2} \mu_1 \left( \frac{B}{\mu_1} \right)^2 \pi r dr + \int_a^b \frac{1}{2} \mu_2 \left( \frac{B}{\mu_2} \right)^2 \pi r dr \right) \\ + \int_b^c \frac{1}{2} \mu_0 H_3^2 \cdot 2\pi r dr \\ = \frac{\mu_0 I^2}{16\pi} + \frac{\mu_1 \mu_2 I^2}{2\pi(\mu_1 + \mu_2)} \ln \frac{b}{a} + \frac{\mu_0 I^2}{4\pi(c^2 - b^2)} \left[ c^4 \ln \frac{c}{b} - c^2(c^2 - b^2) + \frac{1}{4}(c^4 - b^4) \right]$$

$$② \text{由 } W = \frac{1}{2} L I^2 \text{ 得: } L = \frac{2W}{I^2} = \frac{\mu_0}{8\pi} + \frac{\mu_1 \mu_2}{\pi(\mu_1 + \mu_2)} \ln \frac{b}{a} + \frac{\mu_0}{2\pi(c^2 - b^2)} \left[ c^4 \ln \frac{c}{b} - c^2(c^2 - b^2) + \frac{1}{4}(c^4 - b^4) \right]$$

同时计算内自感与外自感.

○ 一长导线附近放置一矩形线圈，两者不在同一平面. 求互感.



## 第五章 时变电磁场

### 1. 电磁感应定律和全电流定律

静电场由静止电荷产生，静磁场由运动电荷或恒定电流产生。

$$(1) \text{ 由 } \left\{ \begin{array}{l} e = - \frac{d\phi_e}{dt} \\ e = \oint_c \vec{E} \cdot d\vec{l} \end{array} \right. \text{ 可得: } \oint_c \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \frac{1}{c} \int_s \vec{B} \cdot d\vec{s}$$

$$\text{回路电动势} = e = - \underbrace{\int_s \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{s}}_{\text{感生电动势}} + \underbrace{\oint_c (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}}_{\text{动生电动势}} \Rightarrow \nabla \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}). \Rightarrow \nabla \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (\text{回路静止时})$$

$$(2) \text{ 对于静磁场有: } \nabla \times \vec{H} = \vec{J}, \text{ 且 } \nabla \cdot (\nabla \times \vec{H}) = \nabla \cdot \vec{J} = 0.$$

$$\text{对于时变场有: } \nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \Rightarrow \vec{J}_t = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (\text{微分形式}).$$

$\Rightarrow$  (磁场强度旋度)总电流密度 = 传导电流密度 + 位移电流密度。

$$\oint_c \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_s (\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}) \cdot d\vec{s} \quad (\text{积分形式}).$$

$\Rightarrow$  金电流 = 传导电流 + 位移电流。

对包含电容器的导体系统: 导线内金电流等于传导电流, 在电容器极板间, 金电流等于位移电流, 金电流处处连续。

### 2. 麦克斯韦方程组

(1) 微分形式: (时变场和静态场均适用), 两个场源 =  $\vec{J}, P$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (\text{电磁感应定律}) \Rightarrow \text{区域包含感应电动势也包含库仑场 (梯无旋)} \\ \nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (\text{全电流定律}) \Rightarrow \text{静态场时 } \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = 0. \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (\text{磁通连续性原理}) \Rightarrow \text{区域包含静态场也包含时变场 (旋无散)} \\ \nabla \cdot \vec{D} = P \quad (\text{高斯定理}) \Rightarrow \text{区域包含感应电动势也包含库仑场 (旋无散)} \\ \nabla \cdot \vec{J} = - \frac{\partial P}{\partial t} \quad (\text{电流连续性原理}) \end{array} \right.$$

含义: ① 时变磁场均激发时变电场。② 传导电流和位移电流激发时变磁场。  
③ 穿过任意封闭面的磁通量=0 ④ 穿过任意封闭面的电通量等于所包含电荷量。

### 2) 积分形式:

$$① \oint_c \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_s \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{s}.$$

$$② \oint_c \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_s (\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}) \cdot d\vec{s}.$$

$$③ \oint_s \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0$$

$$④ \oint_s \vec{D} \cdot d\vec{s} = \int_V \rho dV.$$

### 3) 时变电磁场本构关系:

对于简单媒质(线性、均匀、各向同性):  $\vec{D} = \epsilon \vec{E}, \vec{B} = \mu \vec{H}, \vec{J} = \sigma \vec{E}$ .

真空:  $\epsilon = \epsilon_0, \mu = \mu_0, \sigma = 0$ . 理想介质:  $\sigma = 0$ . 理想导体:  $\sigma = \infty$

### 3. 时变电磁场的边界条件.

#### (1) ~一般情况

① 电场强度边界条件 (电磁感应定律  $\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$ ).

$$\Rightarrow \vec{a}_n \times (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) = 0, E_{1t} = E_{2t} \text{ (切向分量连续).}$$

② 磁场强度边界条件 (全电流定律  $\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \Phi_0 (J + \frac{\partial D}{\partial t}) d\vec{S}$ ).

$$\Rightarrow \vec{a}_n \times (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = \vec{J}_s, H_{1t} - H_{2t} = J_s \rightarrow \text{传导电流}$$

③ 磁通量密度边界条件 (磁通连续性原理  $\int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$ ).

$$\Rightarrow \vec{a}_n \cdot (\vec{B}_1 - \vec{B}_2) = 0, B_{1n} = B_{2n}$$

④ 电通量密度边界条件 (高斯定理  $\oint \vec{D} \cdot d\vec{S} = P$ ).

$$\Rightarrow \vec{a}_n \cdot (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) = P_s, D_{1n} - D_{2n} = P_s \rightarrow \text{自由电荷}$$

⑤ 电流密度边界条件 (电流连续性原理  $\int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = - \int_V \frac{\partial P}{\partial t} dV$ ).

$$\Rightarrow \vec{a}_n \cdot (\vec{J}_1 - \vec{J}_2) = - \frac{\partial P_s}{\partial t}, J_{1n} - J_{2n} = - \frac{\partial P_s}{\partial t}$$

#### (2) 两种理想媒质 ( $\sigma=0$ ) 边界

⇒ 边界不存在面电流 ( $J_s$ ) 和面电荷 ( $P_s$ ). 则有  $E_{1t} = E_{2t}, H_{1t} = H_{2t}, D_{1n} = D_{2n}, B_{1n} = B_{2n}$ .

#### (3) 理想媒质 ( $\sigma=0$ ) 与理想导体 ( $\sigma=\infty$ ) 边界.

⇒ 理想导体中不存在电场、时变磁场.  $\vec{E}_2 = \vec{D}_2 = \vec{B}_2 = \vec{H}_2 = 0$ .

$$\vec{a}_n \times \vec{E}_1 = 0, \vec{a}_n \times \vec{H}_1 = \vec{J}_s, \vec{a}_n \cdot \vec{D} = P_s, \vec{a}_n \cdot \vec{B} = 0, \nabla \cdot \vec{J}_s = - \frac{\partial P_s}{\partial t}$$

理想导体表面: 电场切向分量为0, 磁场法向分量为0. (磁壁+电壁).

### 4. 坎印亭

(1) 坎印亭定理  $\Rightarrow$  时变电磁场中的能量守恒定律.

$$\text{微分形式} = -\nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) = \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{E} \cdot \vec{J}.$$

$$\text{对简单媒质} = - \int_S (\vec{E} \times \vec{H}) \cdot d\vec{S} = \frac{d}{dt} \int_V (W_m + W_e) dV + \int_V P_d dV.$$

$$= \frac{d}{dt} \int_V \left( \frac{1}{2} \mu H^2 + \frac{1}{2} \epsilon E^2 \right) dV + \int_V \sigma E^2 dV.$$

⇒ 其中  $W_m = \frac{1}{2} \mu H^2$  为瞬时磁场能量密度 ( $J/m^3$ ),  $W_e = \frac{1}{2} \epsilon E^2$  为瞬时电场能量密度 ( $J/m^3$ )

$P_d = \sigma E^2$  为传导电流引起的热损耗瞬时功率密度 ( $W/m^3$ )

对静态场  $= - \int_S (\vec{E} \times \vec{H}) \cdot d\vec{S} = \int_V \sigma E^2 dV \Rightarrow - \int_S \vec{S} \cdot d\vec{A} = \int_V P_d dV \Rightarrow \nabla \cdot \vec{S} = - P_d$ .

(2) 坎印亭矢量:  $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$  (单立面向上的瞬时功率流)  $\Rightarrow \vec{S}(t) = \vec{E}(t) \times \vec{H}(t)$ .

$$\text{平均能流密度} = \bar{S}_{av} = \frac{1}{T} \int_0^T \vec{S}(t) dt$$

<b>场</b>	<b>路</b>
电场强度: $\vec{E}$	电压: $U$
磁场强度: $\vec{H}$	电流: $I$
功率流密度: $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$	功率: $P = UI$
$\vec{J} = \sigma \vec{E}$	$I = \frac{U}{R}$
$P_0 = \sigma E^2 = \frac{J^2}{\rho}$	$P = I^2 R = \frac{U^2}{R}$

$$U = \int_L \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$I = \oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l}$$

电磁感应定律微分形式:

5. 波动方程

全电流定律微分形式

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla^2 \vec{E} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = (\mu \frac{\partial \vec{J}}{\partial t} + \frac{\nabla P}{\epsilon}) \\ \nabla^2 \vec{H} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = (-\nabla \times \vec{J}) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla^2 \vec{E} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \\ \nabla^2 \vec{H} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0 \end{array} \right.$$

$$\text{波动方程: } \nabla^2 f - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0 \quad \text{wave equation}$$

(2) 电磁位函数及方程(标量电位 $\phi$ , 矢量磁位 $\vec{A}$ )

由  $\vec{H} = \frac{1}{\mu} (\nabla \times \vec{A})$  代入麦克斯韦第一旋度方程  $\nabla \times \vec{E} = 0$  可得:  $\vec{E} = -\nabla \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$   
 (在静电场中  $\vec{E} = -\nabla \phi$ , 而时变场  $\vec{E} = -\nabla \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ ).

则可得标量电位中的方程:  $\nabla^2 \phi + \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \vec{A}) = -\frac{P}{\epsilon}$

代入第二旋度方程  $\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$  得矢量磁位 $\vec{A}$ 的方程:  $\nabla^2 \vec{A} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \nabla (\nabla \cdot \vec{A} + \mu \epsilon \frac{\partial \phi}{\partial t}) = -\mu \vec{J}$

由以上两个求出 $\vec{A}$ 和 $\phi$ 之后可由  $\vec{H} = \frac{1}{\mu} (\nabla \times \vec{A})$ ,  $\vec{E} = -\nabla \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$  求出 $\vec{H}$ 和 $\vec{E}$ .

但由亥姆霍兹定理知, 需确定 $\vec{A}$ 的旋度、散度后才能唯一确定 $\vec{A}$ .  $\left\{ \begin{array}{l} \nabla \times \vec{A} = \vec{B} \\ \nabla \cdot \vec{A} = ? \end{array} \right.$

(3) 对矢量磁位 $\vec{A}$ 的散度规范.

① 库伦规范:  $\nabla \cdot \vec{A} = 0$ .

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \nabla^2 \phi = -\frac{P}{\epsilon} \\ \nabla^2 \vec{A} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu \vec{J} + \mu \epsilon \nabla \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) \end{array} \right.$$

静态场:  $\left\{ \begin{array}{l} \nabla^2 \phi = -\frac{P}{\epsilon} \\ \nabla^2 \vec{A} = -\mu \vec{J} \end{array} \right.$

② 高斯规范:  $\nabla \cdot \vec{A} = -\mu \epsilon \frac{\partial \phi}{\partial t}$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \nabla^2 \phi - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\frac{P}{\epsilon} \\ \nabla^2 \vec{A} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu \vec{J} \end{array} \right.$$

非静场:  $\left\{ \begin{array}{l} \nabla^2 \phi = -\frac{P}{\epsilon} \\ \nabla^2 \vec{A} = -\mu \vec{J} \end{array} \right.$

## 6. 周期(正弦)电磁场的复数表示.

设直角坐标系中周期电磁场的电场强度瞬时分量:

$$\vec{E}(t) = \vec{\alpha}_x E_x(t) + \vec{\alpha}_y E_y(t) + \vec{\alpha}_z E_z(t)$$

$$= \vec{\alpha}_x E_x \cos(\omega t + \varphi_x) + \vec{\alpha}_y E_y \cos(\omega t + \varphi_y) + \vec{\alpha}_z E_z \cos(\omega t + \varphi_z)$$

$$xy\text{方向的分量 } E_x, E_y, E_z \text{ 可写为: } E_i(t) = E_i \cos(\omega t + \varphi_i) = \operatorname{Re}[E_i e^{j(\omega t + \varphi_i)}] \\ = \operatorname{Re}[E_i e^{j\varphi_i} e^{j\omega t}] = \operatorname{Re}[\vec{E}_i e^{j\omega t}]$$

其中  $\vec{E}_i = E_i e^{j\varphi_i}$  为复振幅, 则有  $\vec{E}(t) = \operatorname{Re}[\vec{E} e^{j\omega t}] = \operatorname{Re}[(\vec{E}_x \vec{\alpha}_x + \vec{E}_y \vec{\alpha}_y + \vec{E}_z \vec{\alpha}_z) e^{j\omega t}]$ .

$\vec{E}$  为复矢量.

$\Rightarrow$  瞬时矢量 = [复矢量  $\cdot e^{j\omega t}$ ] 实部.

$$\text{则有: } \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \operatorname{Re}[j\omega \vec{E} e^{j\omega t}], \quad \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \operatorname{Re}[-\omega^2 \vec{E} e^{j\omega t}]$$

### (1) 复数形式的麦克斯韦方程组

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \times \vec{E} = -j\omega \vec{B}, \Rightarrow \nabla \times \vec{E} = -j\omega \mu \vec{H} \\ \nabla \times \vec{H} = \vec{j} + j\omega \vec{D} \Rightarrow \vec{E} = \frac{1}{j\omega \epsilon} \nabla \times \vec{H} \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \cdot \vec{D} = \rho \text{ (复数)} \\ \nabla \cdot \vec{j} = -j\omega \rho \end{array} \right.$$

### (2) 复数形式的边界条件

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\alpha}_n \times (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) = 0 \\ \vec{\alpha}_n \times (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = \vec{j}_s \\ \vec{\alpha}_n \cdot (\vec{B}_1 - \vec{B}_2) = 0 \\ \vec{\alpha}_n \cdot (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) = \rho_s \\ \vec{\alpha}_n \cdot (\vec{j}_1 - \vec{j}_2) + \nabla \cdot \vec{j}_s = -j\omega \rho_s \end{array} \right.$$

本构关系 (简单媒质中)

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu \vec{H}, \quad \vec{j} = \sigma \vec{E}$$

设自由空间某点电场强度为  $\vec{E}(t) = \vec{\alpha}_x E_0 \sin(\omega t - kz) \text{ (V/m)}$

(a) 求电场强度复矢量  $\vec{E}$ , (b) 磁场强度复矢量  $\vec{H}(t)$ .

$$\Rightarrow (a) \vec{E}(t) = \vec{\alpha}_x E_0 \cos(\omega t - kz - \frac{\pi}{2}) = \operatorname{Re}[\vec{\alpha}_x E_0 e^{-jkz - j\frac{\pi}{2}} e^{j\omega t}] \Rightarrow \vec{E} = \vec{\alpha}_x E_0 e^{-jkz - j\frac{\pi}{2}} = \vec{\alpha}_x \vec{E}_x$$

$$(b) \vec{H} = -\frac{1}{j\omega \mu_0} \nabla \times \vec{E} = -j \frac{1}{\omega \mu_0} \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \vec{E}_x & 0 & 0 \end{vmatrix} = \vec{\alpha}_y \frac{j}{\omega \mu_0} \frac{\partial \vec{E}_x}{\partial z} = \vec{\alpha}_y \frac{k}{\omega \mu_0} E_0 e^{-jkz - j\frac{\pi}{2}}$$

$$\vec{H}(t) = \operatorname{Re}[\vec{H} e^{j\omega t}] = \vec{\alpha}_y \frac{k}{\omega \mu_0} E_0 \cos(\omega t - kz - \frac{\pi}{2})$$

### (3) 复矢量 $\vec{E}$ 和 $\vec{H}$ 的亥姆霍兹方程. (P148)

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla^2 \vec{E} + k^2 \vec{E} = j\omega \mu \vec{j} + \frac{\nabla \rho}{\epsilon} \\ \nabla^2 \vec{H} + k^2 \vec{H} = -\nabla \times \vec{j} \end{array} \right.$$

$$f = \omega \sqrt{\mu \epsilon} = \frac{\omega}{v} \text{ (电磁波的波数)}$$

$$\Rightarrow k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$$

$\downarrow$   
沿  $x, y, z$  方向的分波数.

#### (4) 复坡印量

$$\text{由 } \vec{S}(t) = \operatorname{Re}[\vec{E}e^{j\omega t}] = \frac{1}{2}(\vec{E}e^{j\omega t} + \vec{E}^*e^{-j\omega t}), \vec{H}(t) = \operatorname{Re}[\vec{H}e^{j\omega t}] = \frac{1}{2}(\vec{H}e^{j\omega t} + \vec{H}^*e^{-j\omega t}) \text{ 得:}$$

$$\text{坡印量瞬时值: } \vec{S}(t) = \vec{E}(t) \times \vec{H}(t) = \frac{1}{2} \operatorname{Re}[\vec{E} \times \vec{H}^* + (\vec{E} \times \vec{H})e^{j2\omega t}]$$

$$\text{坡印量平均值: } \bar{S}_{av} = \frac{1}{T} \int_0^T \vec{S}(t) dt = \operatorname{Re}\left[\frac{1}{2} \vec{E} \times \vec{H}\right] = \operatorname{Re}[\vec{S}]$$

其中,  $\vec{S} = \frac{1}{2}(\vec{E} \times \vec{H}^*)$ , 为复坡印量.  $\vec{E}$  和  $\vec{H}$  对应于振幅值, 而不是有效值  $\Rightarrow \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}}$ .

△不强调复功率流密度  $\vec{S}$  计算瞬时功率流密度矢量  $\vec{S}(t)$ .  $\vec{S}$  复功率和  $\vec{S}(t)$  之间没有联系,  
复数场量也不能用于计算瞬时电磁场能量密度.

$$\text{平均电场能量密度: } (We)_{av} = \frac{1}{T} \int_0^T We(t) dt, \quad We(t) = \frac{1}{2} \vec{D}(t) \cdot \vec{E}(t)$$

$$\Rightarrow (We)_{av} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}[We] = \frac{1}{4} \varepsilon E^2 \text{ (简单媒质)} \quad We = \frac{1}{2}(\vec{E} \cdot \vec{D}^*) \text{ 为复电场能量密度.}$$

$$\text{平均磁场能量密度: } \frac{1}{4} \mu H^2$$

$$\Rightarrow (Wm)_{av} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}[Wm] = \frac{1}{4} \mu H^2 \text{ (简单媒质)} \quad Wm = \frac{1}{2}(\vec{H} \cdot \vec{B}^*) \text{ 为复磁场能量密度.}$$

复坡印量定理:

$$-\oint_S \left( \frac{1}{2} \vec{E} \times \vec{H}^* \right) \cdot d\vec{S} = j2w \underbrace{\int_V \left( \frac{1}{4} \mu H^2 - \frac{1}{4} \varepsilon E^2 \right) dV}_{\text{内部}} + \underbrace{\int_V \frac{1}{2} \sigma E^2 dV}_{\text{外部.}}$$

从封闭面  $S$  输入的有功功率 = 体积内的平均热损耗功率.

无功功率 = 体积内电磁场储存能的最大时间变化率.

$$\text{推导: 设 } \vec{E}(t) = E \cos(\omega t + \phi_E), \vec{H}(t) = H \cos(\omega t + \phi_H).$$

$$\therefore We = \frac{1}{2} \varepsilon E^2 \cos^2(\omega t + \phi_E) = \frac{1}{4} \varepsilon E^2 [1 + \cos(2\omega t + 2\phi_E)]$$

$$Wm = \frac{1}{2} \mu H^2 \cos^2(\omega t + \phi_H) = \frac{1}{4} \mu H^2 [1 + \cos(2\omega t + 2\phi_H)]$$

$$\text{则 } \frac{\partial (We + Wm)}{\partial t} = -2w \left[ \frac{1}{4} \varepsilon E^2 \sin(2\omega t + 2\phi_E) + \frac{1}{4} \mu H^2 \sin(2\omega t + 2\phi_H) \right] \quad \phi_h = \phi_E \pm \frac{\pi}{2}$$

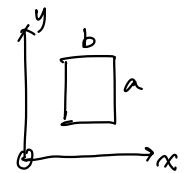
$$\left[ \frac{\partial (We + Wm)}{\partial t} \right]_{\max} = \left[ 2w \left[ \frac{1}{4} \mu H^2 - \frac{1}{4} \varepsilon E^2 \right] \sin(2\omega t + 2\phi_E) \right]_{\max} = 2w \left( \frac{1}{4} \mu H^2 - \frac{1}{4} \varepsilon E^2 \right).$$

~~(题5-2)~~ - 时变磁场  $\vec{B}(t) = B_0 \cos(\omega t - kx) \hat{a}_x$  存在的空间中，有一处于  $xOy$  平面内的矩形线圈，以速度  $v$  沿  $x$  轴方向移动。线圈在某点不闭合，求矩形线圈上的感应电动势。

$$\Rightarrow e = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{s} + \oint_L (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}$$

$$-\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{s} = \int_{-b}^{x+b} aw B_0 \sin(\omega t - kx) dx = \frac{awB_0}{k} [\cos(\omega t - k(x+b)) - \cos(\omega t - kx)]$$

$$\oint_L (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} = \oint_L v \cdot B(t) \cdot (-a\hat{y}) \cdot d\vec{l} = avB_0 [\cos(\omega t - kx) - \cos(\omega t - k(x+b))].$$



~~(题5-8)~~ - 长度为  $L=1m$ 、内外半径各  $a=1mm$ 、 $b=2.5mm$  的同轴电容器中充满相对介电常数  $\epsilon_r=7$  的介质。内外导体间的电压为  $U=200\sin(377t)V$ 。求位移电流  $i_d$ 、传导电流  $i_c$ 。

$$\Rightarrow \text{设内外导体带电量 } q-q. \text{ 则由高斯定理 } \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = 2\pi rL \cdot \epsilon_r E(r,t) = q(t). \Rightarrow E = \frac{q}{2\pi r L \epsilon_r}$$

$$\text{又由 } \int_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = U \text{ 得 } q(t) = \frac{2\pi L \epsilon_r U(t)}{\ln \frac{b}{a}} \text{ 则 } E(r,t) = \frac{U(t)}{r \ln \frac{b}{a}} (V/m).$$

$$\text{位移电流 } i_d = \int_S \vec{J}_d \cdot d\vec{S} = 2\pi rL \cdot \epsilon_r \frac{\partial E}{\partial t} = \frac{2\pi L \epsilon_r}{\ln \frac{b}{a}} \cdot \frac{\partial U(t)}{\partial t} = 2.64 \times 10^6 \cos 377t (A)$$

$$\text{电容器总电容为 } C = \frac{q}{U} = \frac{2\pi L \epsilon_r}{\ln \frac{b}{a}}, \text{ 则传导电流 } i_c = C \frac{dU}{dt} = i_d.$$

○ 用微分形式的麦克斯韦方程组证明  $\nabla \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$ 。

$$\Rightarrow \nabla \cdot \nabla \times \vec{B} = \nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \vec{D}) = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} = 0.$$

~~(题5-18)~~ 真空中，一时变电磁场的电场强度瞬时复量为：

$$\vec{E}(t) = 0.03 \sin(10^8 \pi t - \frac{\pi}{3}z - \frac{\pi}{3}) \hat{a}_x + 0.04 \cos(10^8 \pi t - \frac{\pi}{3}z + \frac{\pi}{4}) \hat{a}_y V/m.$$

求①电场强度复数量  $\vec{E}$ 。②磁场强度瞬时复量  $\vec{H}(t)$ 。

$$\Rightarrow ① \vec{E}(t) = 0.03 \cos(10^8 \pi t - \frac{\pi}{3}z - \frac{5\pi}{6}) \hat{a}_x + 0.04 \cos(10^8 \pi t - \frac{\pi}{3}z + \frac{\pi}{4}) \hat{a}_y \\ = \operatorname{Re} [0.03 e^{-j(\frac{\pi}{3}z + \frac{5\pi}{6})}, e^{j10^8 \pi t} \hat{a}_x + 0.04 e^{-j(\frac{\pi}{3}z - \frac{\pi}{4})}, e^{j10^8 \pi t} \hat{a}_y]$$

$$\text{则 } \vec{E} = 0.03 e^{-j(\frac{\pi}{3}z + \frac{5\pi}{6})} \hat{a}_x + 0.04 e^{-j(\frac{\pi}{3}z - \frac{\pi}{4})} \hat{a}_y.$$

$$② \vec{H} = -\frac{1}{j\omega \mu_0} \nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{j\omega \mu_0} \begin{vmatrix} \hat{a}_x & \hat{a}_y & \hat{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \hat{a}_x & \hat{a}_y & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{\omega \mu_0} (-\frac{\pi}{3} 0.04 e^{-j(\frac{\pi}{3}z - \frac{\pi}{4})} \hat{a}_x + 0.01 \pi e^{-j(\frac{\pi}{3}z + \frac{5\pi}{6})} \hat{a}_y)$$

$$\vec{H}(t) = \operatorname{Re} [\vec{H} e^{j\omega t}] = \frac{1}{10^8 \pi \mu} (-\frac{\pi}{3} 0.04 \cos(10^8 \pi t - \frac{\pi}{3}z + \frac{\pi}{4}) \hat{a}_x + 0.01 \pi \cos(10^8 \pi t - \frac{\pi}{3}z - \frac{5\pi}{6}) \hat{a}_y)$$

$$\Rightarrow ① \vec{E} = \underbrace{(-j\hat{a}_x 0.03 e^{-j\frac{\pi}{3}z - j\frac{5\pi}{6}} + \hat{a}_y 0.04 e^{-j\frac{\pi}{3}z + j\frac{\pi}{4}})}_{\downarrow} \\ - \hat{a}_x 0.03 e^{-j\frac{\pi}{3}z - j\frac{5\pi}{6}}.$$

注意  $x, y, z$  和混淆。

01(题5-22).自由空间中一正弦电磁波的电场强度复矢量为

$$\vec{E} = (-j\bar{a}_x - 2\bar{a}_y + j\sqrt{3}\bar{a}_z)e^{-j0.05\pi(\sqrt{3}x+z)}$$

求：①电场强度瞬时矢量 $\vec{E}$ . ②磁场强度瞬时矢量 $\vec{H}$ . ③平均角流密度矢量 $\vec{s}_{av}$ .

④平均电磁场能量密度矢量 $w_{av}$ .

$$\Rightarrow \text{① } \vec{E}(t) = \operatorname{Re}[\vec{E}e^{j\omega t}] = \operatorname{Re}[(-j\bar{a}_x - 2\bar{a}_y + j\sqrt{3}\bar{a}_z)e^{j(wt - 0.05\sqrt{3}\pi x - 0.05\pi z)}]$$

$$= \sin[wt - 0.05\pi(\sqrt{3}x+z)]\bar{a}_x - 2\cos[wt - 0.05\pi(\sqrt{3}x+z)]\bar{a}_y - \sqrt{3}\sin[wt - 0.05\pi(\sqrt{3}x+z)]\bar{a}_z$$

$$\text{② } \vec{H} = -\frac{1}{jw\mu_0} \nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{jw\mu_0} \begin{vmatrix} \bar{a}_x & \bar{a}_y & \bar{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \bar{E}_x & \bar{E}_y & \bar{E}_z \end{vmatrix} = -\frac{1}{jw\mu_0} \left[ -\bar{a}_x \frac{\partial \bar{E}_y}{\partial z} - \bar{a}_y \left( \frac{\partial \bar{E}_z}{\partial x} - \frac{\partial \bar{E}_x}{\partial z} \right) + \bar{a}_z \frac{\partial \bar{E}_y}{\partial x} \right]$$

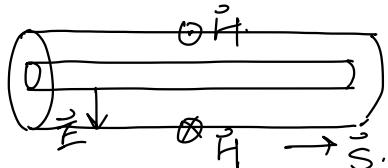
$$= -\frac{1}{jw\mu_0} [0.1\pi j e^{-j0.05\pi(\sqrt{3}x+z)} \bar{a}_x - 0.2\pi e^{-j0.05\pi(\sqrt{3}x+z)} \bar{a}_y + 0.1\sqrt{3}\pi j e^{-j0.05\pi(\sqrt{3}x+z)} \bar{a}_z]$$

$$= -\frac{e^{-j0.05\pi(\sqrt{3}x+z)}}{jw\mu_0} 0.1\pi (j\bar{a}_x - 2\bar{a}_y + \sqrt{3}\bar{a}_z).$$

$$\text{③ } \vec{s}_{av} = \operatorname{Re}[\frac{1}{2}(\vec{E} \times \vec{H}^*)] = \frac{0.1\pi}{w\mu_0} [\cos(wt - 0.05\pi(\sqrt{3}x+z)) + 2\sin(wt - 0.05\pi(\sqrt{3}x+z)) - \sqrt{3}\cos(wt - 0.05\pi(\sqrt{3}x+z))].$$

$$\text{④ } w_{av} = (We)_{av} + (Wm)_{av} = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2}\mu_0 H^2 = 3.154 \times 10^{-11} \text{ J/m}^3.$$

02(题5-29).长为L内外导体半径分别为a,b同轴线始端接电压U<sub>0</sub>终端接电阻R<sub>L</sub>电流I在内外导体截面上均匀分布. ①求该印廷矢量. ②证明该印廷定理.



设内导体带电量为q, 则由高斯定理 $\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = q$ , 又由 $\int \vec{E} \cdot d\vec{l} = U_0$ 得 $q = \frac{2\pi L U_0}{\ln b/a}$ .

又 $\vec{E}(r) = \frac{U_0}{2\pi r \ln b/a} \vec{a}_r$ . 由安培环路定理 $\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = I$ , 得 $\vec{H}(r) = \frac{I}{2\pi r \ln b/a} \vec{a}_\phi$ .

又 $r$ 处的印廷矢量 $\vec{s}(r) = \vec{E}(r) \times \vec{H}(r) = \frac{U_0 I}{2\pi r^2 \ln b/a} \vec{a}_z$

整条同轴线积分 $= - \oint \vec{s} \cdot d\vec{A} = \int_a^b s \cdot 2\pi r L dr = U_0 I$ .

$$\vec{E} = \vec{a}_y E_{y0} \sin \frac{\pi x}{a} e^{-j\beta z}$$

$$\vec{H} = \vec{a}_x H_{x0} \sin \frac{\pi x}{a} e^{-j\beta z} - j \vec{a}_z H_{z0} \cos \frac{\pi x}{a} e^{-j\beta z}$$

○(题5-25) 设理想导体的空心矩形波导( $0 < x < a$ ,  $0 < y < b$ ,  $-\infty < z < +\infty$ )中传播的导行波的瞬时电磁场分量分别为:

$$Z_y = E_{y0} \sin \frac{\pi x}{a} \cos(\omega t - \beta z) \quad H_x = H_{x0} \sin \frac{\pi x}{a} \cos(\omega t - \beta z)$$

$$H_z = H_{z0} \cos \frac{\pi x}{a} \sin(\omega t - \beta z) \quad E_x = E_z = H_y = 0.$$

其中  $\beta$  为导行电磁波的相移常数。①求电磁场分量的复数表达式。②求波导中的位移电流密度的复数表达式。③求波导内壁表面上的面电荷、面电流密度的复数表达式。

$$\textcircled{1} Z_y = \operatorname{Re}[Z_y \sin \frac{\pi x}{a} e^{-j\beta z} e^{j\omega t}] \quad \text{即 } \dot{Z}_y = Z_{y0} \sin \frac{\pi x}{a} e^{-j\beta z}.$$

$$\text{同理有: } \dot{H}_x = H_{x0} \sin \frac{\pi x}{a} e^{-j\beta z}, \quad \dot{H}_z = H_{z0} \cos \frac{\pi x}{a} e^{-j\beta z} - j(\beta^2 + \frac{\pi^2}{a^2}) = (-j) H_{z0} \cos \frac{\pi x}{a} e^{-j\beta z}.$$

$$\textcircled{2} \dot{J}_d = \frac{\partial D}{\partial t} = \epsilon_0 \frac{\partial \dot{E}}{\partial t} = \epsilon_0 \frac{\partial \dot{Z}_y}{\partial t} = j\omega \epsilon_0 Z_{y0} \sin \frac{\pi x}{a} e^{-j\beta z}. \Rightarrow \dot{J} = \cancel{j\omega \epsilon_0 Z_{y0} \sin \frac{\pi x}{a} e^{-j\beta z}} \vec{a}_y.$$

$$\textcircled{3} \text{由理想导体与媒质交界面: } \vec{a}_n \vec{D} = \vec{p}_s, \quad \vec{a}_n \times (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = \vec{J}_s.$$

$$\text{得: } (y=0) \vec{p}_s = \vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} = \epsilon_0 \dot{Z}_y = \epsilon_0 Z_{y0} \sin \frac{\pi x}{a} e^{-j\beta z}$$

$$(y=0) \vec{p}_s = -\vec{D} = -\epsilon_0 \vec{E} = -\epsilon_0 \dot{Z}_y = -\epsilon_0 Z_{y0} \sin \frac{\pi x}{a} e^{-j\beta z}.$$

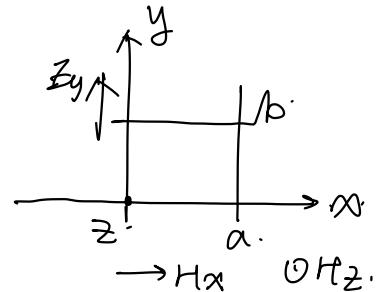
$$(y=0 \text{ 且 } y=b) = \vec{J}_s = 0. \quad (x=0 \text{ 和 } x=a) = \vec{p}_s = 0.$$

$$(x=0) = \vec{J}_s = -\vec{H}_x = -H_{x0} \sin \frac{\pi x}{a} e^{-j\beta z}.$$

$$(x=a) = \vec{J}_s = \vec{H}_x = H_{x0} \sin \frac{\pi x}{a} e^{-j\beta z}.$$

$$(x=0 \text{ 和 } x=a) = \vec{J}_s = j H_{z0} \cos \frac{\pi x}{a} e^{-j\beta z} \vec{a}_y.$$

$$(y=b) = \vec{J}_s = j H_{z0} \cos \frac{\pi x}{a} e^{-j\beta z} \vec{a}_x + H_{x0} \sin \frac{\pi x}{a} e^{-j\beta z} \vec{a}_z.$$



沿波向

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{p}_s = \vec{a}_n \cdot \vec{D} \\ \vec{J}_s = \vec{a}_n \times \vec{H} \end{array} \right.$$

\*-球坐标系  $\vec{A} \rightarrow \vec{B} \rightarrow \vec{H} \rightarrow \vec{E} \rightarrow \vec{S}$ .

○(题5-27) 真空中一与波源对应的矢量磁位为  $\vec{A} = A_2 \vec{a}_z = A_0 \frac{e^{jKR}}{R} \vec{a}_z$ , 其中  $R$  为球坐标系的径向坐标。①导出由波源电流在球坐标系中产生的电磁场的复数表达式。②求平均能流密度矢量。

$$\Rightarrow \textcircled{1} \text{球坐标系下: } \vec{A} = A_0 \frac{e^{jKR}}{R} \cos \theta \vec{a}_R - A_0 \frac{e^{jKR}}{R} \vec{a}_\theta.$$

$$\text{即磁感为: } \vec{B} = \nabla \times \vec{A} = \frac{1}{R^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial R} & \frac{R \cos \theta}{\partial \theta} & \frac{R \sin \theta \cos \phi}{\partial \phi} \\ \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial R} & \frac{\partial}{\partial \phi} \\ \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{-R \sin \theta}{\partial R} & \frac{R \sin^2 \theta}{\partial \phi} \end{vmatrix} = A_0 \sin \theta \frac{jKR+1}{R^2} e^{-jKR} \vec{a}_\phi.$$

$$\therefore \vec{H} = \frac{1}{\mu_0} A_0 \sin \theta \frac{jKR+1}{R^2} e^{-jKR} \vec{a}_\phi, \quad \vec{E} = \frac{\nabla \times \vec{H}}{j\omega \epsilon_0} = \frac{A_0}{j\omega \mu_0 \epsilon_0 R^3} [2 \cos \theta (jKR+1) e^{jKR} \vec{a}_R - \sin \theta (K^2 R^2 - jKR) e^{-jKR} \vec{a}_\theta].$$

$$\vec{B} = \epsilon_0 \vec{E} = \frac{A_0}{j\omega \mu_0 R^3} [2 \cos \theta (jKR+1) e^{-jKR} \vec{a}_R - \sin \theta (K^2 R^2 - jKR) e^{-jKR} \vec{a}_\theta].$$

$$\textcircled{2} \vec{S}_{av} = \operatorname{Re} [\frac{1}{2} (\vec{E} \times \vec{H}^\dagger)] = \operatorname{Re} [\frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} \vec{a}_R & \vec{a}_\theta & \vec{a}_\phi \\ \vec{a}_R^\dagger & \vec{a}_\theta^\dagger & \vec{a}_\phi^\dagger \\ \vec{H}_R^\dagger & \vec{H}_\theta^\dagger & \vec{H}_\phi^\dagger \end{vmatrix}] = \frac{A_0^2 \sin^2 \theta}{2 \omega \mu_0^2 \epsilon_0 R^5} K^3 R^3 \vec{a}_R.$$

物理

○ 求向量场  $\vec{A} = -y\vec{a}_x + x\vec{a}_y + c\vec{a}_z$  (c为常数) 沿下列曲线正向的环量:

$$(1) (x-2)^2 + y^2 = R^2, z=0$$

$$\Rightarrow \text{令 } x = R\cos\theta + 2, y = R\sin\theta, z=0.$$

$$T = \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l} = \oint_C -y dx + x dy + c dz = \int_0^{2\pi} [R^2 \sin^2\theta + (R\cos\theta + 2)R\cos\theta] d\theta \\ = \int_0^{2\pi} (R^2 + 2R\cos\theta) d\theta = 2\pi R^2.$$

$$T = \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l} = \oint_C \nabla \times \vec{A} \cdot d\vec{S} = \left| \begin{array}{ccc} \vec{a}_x & \vec{a}_y & \vec{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y & x & c \end{array} \right| \pi R^2 = 2\pi R^2$$

○ 一半径为  $a$  的带质球被均匀极化. 其极化强度  $\vec{P} = P_0 \vec{a}_z$ . 带极化电荷分布及介电常数的电偶极矩.

$$\text{根据定义: } \vec{P} = \vec{P} \cdot \Delta V = \frac{4}{3}\pi R^3 P_0 \vec{a}_z. \text{ 或 } \vec{P} = \int_0^{\pi} \frac{a \cos\theta}{r} \cdot \frac{P_0 \cos\theta \cdot 2\pi a \sin\theta \cdot a d\theta}{r} = \frac{4}{3}\pi a^3 P_0,$$

$\Rightarrow$  均匀极化的带电球的电偶极矩 = 体积  $\times P$ .

电偶极矩 = 电荷乘以位矢再求和或积分.

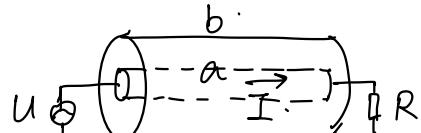
$$\text{点电荷系: } \vec{P} = \sum q_i \vec{r}. \quad \text{连续带电体: } \vec{P} = \int_V p(r) r dV.$$

○ 由叠加原理分析电源沿同轴电缆传递能量的过程. 内外半径分别为  $a, b$

半内导体内电磁场恒为 0. 设  $P_1$ .

$$\because 2\pi r l \cdot E = P_1 \cdot l \text{ 及 } \oint_E \cdot d\vec{l} = U \text{ 得: } \vec{E} = \frac{U}{2\pi l n \frac{b}{a}} \vec{a}_r \quad (a < r < b).$$

$$\because \oint_H \cdot d\vec{l} = I \text{ 得: } \vec{H} = \frac{I}{2\pi r} \vec{a}_\theta. \text{ 由 } \vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} = \frac{U^2}{2\pi r^2 n \frac{b}{a}} \vec{a}_z. \Rightarrow P = \oint (\vec{E} \times \vec{H}) \cdot d\vec{S} = UI.$$



○ 无限长同轴电缆内外导体半径为  $a, b$  内导体外表面上和外导体内表面上电荷密度分布为  $+P_{s1}$  和  $-P_{s2}$ . 且均匀分布, 外导体接地. 求各区域主 (P3b).

$$\vec{E} = 0 \quad (r > b).$$

$$\text{○ 磁场: } \vec{B}(t) = \vec{a}_x B_0 \sin(\omega t - kz) + \vec{a}_y B_0 \cos(\omega t - kz).$$

$$\Rightarrow \vec{E}(t) = -j \vec{a}_x B_0 \operatorname{Re}[e^{-jkz} e^{j\omega t}] + \vec{a}_y B_0 \operatorname{Re}[e^{-jkz} e^{j\omega t}]$$

$$\text{且 } \vec{E} = (-j \vec{a}_x + \vec{a}_y) B_0 e^{-jkz}.$$

① 两无限大理想导体平行板相距  $d$ . 在平行板间存在时谐电磁场. 等电场强度为  
 $\vec{E}(t) = \vec{a}_x E_0 \sin \frac{\pi y}{d} \cos(\omega t - k z) (V/m)$ .

求: (a) 磁场强度  $\vec{H}(t)$ . (b) 极化矢量  $\vec{S}$  及平均功率密度.

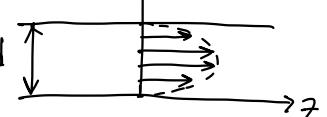
(c)  $y=0$  导体板内表面电流分布  $\vec{j}_s(t)$ .

$$\Rightarrow (a) \vec{E} = \vec{a}_x E_0 \sin \frac{\pi y}{d} e^{-jkz}$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{j\mu\mu_0} \nabla \times \vec{E} = -\frac{E_0 \sin \frac{\pi y}{d}}{j\mu\mu_0} \begin{vmatrix} \vec{a}_x & \vec{a}_y & \vec{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ e^{-jkz} & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{k}{\mu\mu_0} E_0 \sin \frac{\pi y}{d} e^{-jkz} \vec{a}_y$$

$$\vec{H}(t) = \operatorname{Re}[\vec{H} e^{j\omega t}] = \vec{a}_y \frac{k}{\mu\mu_0} E_0 \sin \frac{\pi y}{d} \cos(\omega t - k z).$$

$\uparrow y$



$$\nabla \times \vec{H} = -\frac{1}{j\mu\mu_0} \nabla \times \vec{E} = -\frac{E_0}{j\mu\mu_0} \begin{vmatrix} \vec{a}_x & \vec{a}_y & \vec{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \sin \frac{\pi y}{d} e^{-jkz} & 0 & 0 \end{vmatrix} = \vec{a}_y \frac{k}{\mu\mu_0} \sin \frac{\pi y}{d} e^{-jkz} - \vec{a}_z \frac{j\pi}{\mu\mu_0 d} \cos \frac{\pi y}{d} e^{-jkz}.$$

$$\vec{H}(t) = \operatorname{Re}[\vec{H} e^{j\omega t}] = \vec{a}_y \frac{k}{\mu\mu_0} E_0 \sin \frac{\pi y}{d} \cos(\omega t - k z) + \vec{a}_z \frac{\pi}{\mu\mu_0 d} E_0 \cos \frac{\pi y}{d} \sin(\omega t - k z). A/m$$

$$(b) \vec{S} = \frac{1}{2} \vec{E} \times \vec{H}^* = \vec{a}_z \frac{k}{2\mu\mu_0} E_0^2 \sin^2 \left( \frac{\pi y}{d} \right) - \vec{a}_y \frac{j\pi}{4\mu\mu_0 d} E_0^2 \sin \left( \frac{2\pi y}{d} \right).$$

$$\vec{S}_{av} = \operatorname{Re}[\vec{S}] = \vec{a}_z \frac{k}{2\mu\mu_0} E_0^2 \sin^2 \left( \frac{\pi y}{d} \right) (W/m^2) \quad (\text{平行板波导}) \text{ 功率沿平行板传播.}$$

$$(c) \vec{j}_s = \vec{a}_n \times \vec{H} = \vec{a}_y \times \vec{H} = \vec{a}_x \frac{\pi}{\mu\mu_0 d} E_0 \cos \frac{\pi y}{d} \sin(\omega t - k z)$$

② (题5-22) **自由空间**  $\omega = 3 \times 10^7 \pi$  怎么得的?  $\Rightarrow \omega = 2\pi f = 2\pi \frac{\nu}{\lambda} = 2\pi \frac{c}{\lambda} = k c = \frac{k}{\mu\mu_0 \epsilon_0}$ .

$$① \vec{E} = (-j\vec{a}_x - 2\vec{a}_y + j\sqrt{3}\vec{a}_z) e^{-j0.05\pi(\sqrt{3}x+z)} \quad k = \sqrt{E_x^2 + E_z^2} = 0.1\pi.$$

$$= \vec{a}_x e^{-j0.05\pi(\sqrt{3}x+z) - j\frac{\pi}{2}} - 2\vec{a}_y e^{-j0.05\pi(\sqrt{3}x+z)} + \sqrt{3}\vec{a}_z e^{-j0.05\pi(\sqrt{3}x+z) + j\frac{\pi}{2}}$$

$$\Rightarrow \vec{E}(t) = \vec{a}_x \cos [3 \times 10^7 \pi t - 0.05\pi(\sqrt{3}x+z) - \frac{\pi}{2}] - 2\vec{a}_y \cos [3 \times 10^7 \pi t - 0.05\pi(\sqrt{3}x+z)] + \sqrt{3}\vec{a}_z \cos [3 \times 10^7 \pi t - 0.05\pi(\sqrt{3}x+z) + \frac{\pi}{2}]$$

$$= (\vec{a}_x - \sqrt{3}\vec{a}_z) \sin [3 \times 10^7 \pi t - 0.05\pi(\sqrt{3}x+z)] - 2\vec{a}_y \cos [3 \times 10^7 \pi t - 0.05\pi(\sqrt{3}x+z)].$$

$$② \vec{H} = -\frac{1}{j\mu\mu_0} \cdot \nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{j\mu\mu_0} \begin{vmatrix} \vec{a}_x & \vec{a}_y & \vec{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ e^{-j0.05\pi(\sqrt{3}x+z) - j\frac{\pi}{2}} & -2e^{-j0.05\pi(\sqrt{3}x+z)} & \sqrt{3}e^{-j0.05\pi(\sqrt{3}x+z) + j\frac{\pi}{2}} \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{1}{j\mu\mu_0} [-\vec{a}_x j0.1\pi e^{-j0.05\pi(\sqrt{3}x+z)} - \vec{a}_y (-j0.15\pi e^{-j0.05\pi(\sqrt{3}x+z) + j\frac{\pi}{2}} + j0.05\pi e^{-j0.05\pi(\sqrt{3}x+z)}) + \vec{a}_z j0.1\pi e^{-j0.05\pi(\sqrt{3}x+z)}]$$

$$= \frac{1}{\mu\mu_0} [\vec{a}_x 0.1\pi e^{-j0.05\pi(\sqrt{3}x+z)} + \vec{a}_y 0.2\pi j e^{-j0.05\pi(\sqrt{3}x+z)} - \vec{a}_z 0.1\pi e^{-j0.05\pi(\sqrt{3}x+z)}]$$

$$\Rightarrow \vec{H}(t) = \frac{1}{j20\pi} [\cos (3 \times 10^7 \pi t - 0.05\pi(\sqrt{3}x+z)) \vec{a}_x - 2\sin (3 \times 10^7 \pi t - 0.05\pi(\sqrt{3}x+z)) \vec{a}_y - \sqrt{3} \cos (3 \times 10^7 \pi t - 0.05\pi(\sqrt{3}x+z)) \vec{a}_z].$$

$$\begin{aligned} w &= 2 \times 10^7 \pi \\ \mu &= 4\pi \times 10^{-7} \end{aligned} \quad \left\{ \frac{1}{w\mu} = \left( \frac{1}{12\pi^2} \right) \right.$$

$$③ \vec{s}_{aw} = \operatorname{Re}[\vec{s}] = \operatorname{Re}\left[\frac{1}{2} \vec{E} \times \vec{H}^*\right]$$

$$\begin{aligned} \vec{E} \times \vec{H}^* &= \frac{1}{w\mu} \begin{vmatrix} \vec{a}_x & \vec{a}_y & \vec{a}_z \\ e^{j0.05\pi(\sqrt{3}x+z)} - j\frac{\pi}{2} & -e^{-j0.05\pi(\sqrt{3}x+z)} & \sqrt{3}e^{j0.05\pi(\sqrt{3}x+z)} + j\frac{\pi}{2} \\ 0.1\pi e^{j0.05\pi(\sqrt{3}x+z)} & 0.2\pi e^{j0.05\pi(\sqrt{3}x+z)} - j\frac{\pi}{2} & -0.1\sqrt{3}\pi e^{j0.05\pi(\sqrt{3}x+z)} \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{w\mu} \left[ \vec{a}_x (0.2\sqrt{3}\pi - 0.2\pi) - \vec{a}_y (0.1\sqrt{3}\pi j - 0.1\pi j) + \vec{a}_z (-0.2\pi + 0.2\pi) \right] \\ &= \frac{1}{120\pi^2} (0.4\sqrt{3}\pi \vec{a}_x + 0.4\pi \vec{a}_z). \Rightarrow \vec{s}_{aw} = \frac{1}{60\pi} (\sqrt{3} \vec{a}_x + \vec{a}_z). \end{aligned}$$

不要漏掉  $j\frac{\pi}{2}$ .

$$④ W_{aw} = (W_e)_{aw} + (W_m)_{aw} = \frac{1}{4} \epsilon_0 |\vec{E}|^2 + \frac{1}{4} \mu_0 |\vec{H}|^2$$

# 第六章 平面电磁波

## 1. 理想媒质中的电磁波

### (1) 平面波的电磁场

① 在充满理想简单介质的无界区域中传播，电场强度  $\vec{E}$  与磁场强度  $\vec{H}$  满足齐次矢量波动方程：

$$\nabla^2 \vec{E} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0, \quad \nabla^2 \vec{H} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0.$$

$$\text{统一写为: } \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0. \Rightarrow \text{三维标量波动方程.}$$

② 对时谐电磁波，电场强度  $\vec{E}$  与磁场强度  $\vec{H}$  的复矢量满足齐次标量波动方程：

$$\begin{cases} \nabla^2 \vec{E} + \omega^2 \mu \epsilon \vec{E} = 0 \\ \nabla^2 \vec{H} + \omega^2 \mu \epsilon \vec{H} = 0 \end{cases} \quad \text{令 } k = \omega \sqrt{\mu \epsilon}. \quad \text{则有 } \begin{cases} \nabla^2 \vec{E} + k^2 \vec{E} = 0 \\ \nabla^2 \vec{H} + k^2 \vec{H} = 0. \end{cases}$$

$\vec{E} = \hat{a}_x E_x + \hat{a}_y E_y + \hat{a}_z E_z$ . 假设电场强度矢量  $\vec{E}$  只有  $E_x$  分量，即  $\vec{E} = \hat{a}_x E_x$ .

则有齐次标量波动方程： $\nabla^2 E_x + k^2 E_x = 0$ .

再设  $E_x$  仅与坐标  $z$  有关，而  $x, y$  无关，即  $\frac{\partial E_x}{\partial x} = \frac{\partial E_x}{\partial y} = 0$ . 则有  $\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} + k^2 E_x = 0$ .

该方程的一般解为： $E_x = E_0^+ e^{-jkz} + E_0^- e^{+jkz} = E_x^+ + E_x^-$ .

$$\begin{aligned} \text{瞬时表达式为: } E_x(t) &= \operatorname{Re}[E_0^+ e^{-jkz} e^{j\omega t} + E_0^- e^{+jkz} e^{j\omega t}] \\ &= E_0^+ \cos(\omega t - kz) + E_0^- \cos(\omega t + kz) = E_x^+(t) + E_x^-(t). \end{aligned}$$

入射波  $\hookrightarrow$  第一项： $E_0^+ \cos(\omega t - kz) \Rightarrow$  相位随  $z$  增加逐渐滞后，代表沿  $z$  轴正方向传播（正向行波）

第二项： $E_0^- \cos(\omega t + kz) \Rightarrow$  沿  $z$  轴负方向传播，为反向行波（反身波）。

△在无界空间中，只有入射波，没有反身波。

③ 设在充满理想介质的入射波

④ 沿任意方向传播的平面波，复振幅和瞬时表达式：

$$E_x = E_0 e^{-jkz}. \quad E_x(t) = E_0 \cos(\omega t - kz). \quad \Rightarrow \text{沿 } z \text{ 轴正向传播.}$$

$\downarrow$  行波因子       $\downarrow$  时间相位       $\downarrow$  空间相位.

$$\text{因此可得: } \nabla \times \vec{E} = \begin{vmatrix} \hat{a}_x & \hat{a}_y & \hat{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & 0 & 0 \end{vmatrix} = \hat{a}_x \frac{\partial E_x}{\partial z} = -\hat{a}_y j k E_x = -j \omega \mu \vec{H} = -j \omega \mu (\hat{a}_x H_x + \hat{a}_y H_y + \hat{a}_z H_z).$$

$$\text{可得磁场强度: } H_y = \frac{k}{\omega \mu} E_x = \frac{k E_0}{\omega \mu} e^{-jkz} = H_0 e^{-jkz}. \quad \Rightarrow M = \frac{E_x}{H_y} = \frac{k}{\omega \mu} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}.$$

$$H_y(t) = \hat{a}_y \operatorname{Re}[H_0 e^{j\omega t}] = \hat{a}_y H_0 \cos(\omega t - kz). \quad \text{本征阻抗}$$

入射波因子  $e^{-jkz}$  和  $\cos(\omega t - kz)$  均代表沿  $z$  轴正向传播。

1) 平面波.

## ① 传播参数

a). 波长与波数. = 波长  $\lambda = \frac{2\pi}{k}$  (m), 波数  $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \omega\sqrt{\mu\epsilon}$  (rad/m).  $\Rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{\omega\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{1}{f\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{\nu}{f}$ .  
↳ 波传播方向上  $2\pi$  长度中出现的波数  $\lambda$ .

在理想介质中: 波长  $\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{\omega\sqrt{\mu_0\epsilon_0}} = \frac{2\pi}{\omega\sqrt{\mu_0\epsilon_0}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r}} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\epsilon_r}}$ .  $\eta = \frac{\eta_0}{\sqrt{\epsilon_r}}$

在真空中: 波长  $\lambda_0 = \frac{2\pi}{\omega\sqrt{\mu_0\epsilon_0}}$ .

b) 相速: 等相位面向前传播的速度.

由  $\omega dt - kdz = 0$  得相速 =  $v_p = \frac{dz}{dt} = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} = \nu$  (m/s).  $\Rightarrow v_p = \lambda f = \lambda\nu$ .  
↳ 相速 等于媒质中的光速(电磁波波速).

在真空中:  $v_p = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}} = C \approx 3 \times 10^8$  m/s.

c) 本征阻抗: 横向电场与横向磁场的复振幅之比, 记者  $\eta$  ( $\Omega$ ).

$$\Rightarrow \eta = \sqrt{\mu/\epsilon} (\Omega) \quad (\eta = \frac{E_x}{H_y} = \frac{\omega\mu}{\epsilon} = \frac{k}{\omega\epsilon} = \sqrt{\mu/\epsilon}).$$

## ② 传播特性.

理想媒质中沿 z 轴传播的电磁波 =  $\begin{cases} \vec{E} = E_0 e^{-jkz} \hat{a}_x, & \vec{E}(z,t) = E_0 \cos(\omega t - kz) \hat{a}_x \\ \vec{H} = H_0 e^{-jkz} \hat{a}_y, & \vec{H}(z,t) = H_0 \cos(\omega t - kz) \hat{a}_y \end{cases}$

a)  $\vec{E}, \vec{H}$  相互垂直且均垂直于波的传播方向, 无纵向场分量.  $\Rightarrow$  横电磁波(TEM 波).

b)  $\vec{E}, \vec{H}$  处处相互相同, 振幅之比为本征阻抗且为实数.  $\eta = C$

c) 复波印迹矢量  $\vec{s} = \frac{1}{2}(\vec{E} \times \vec{H}^*) = \frac{E_0^2}{2\eta} \hat{a}_z = \vec{s}_{av} \Rightarrow$  平面波仅有实功率(无耗传输).  $\underline{s} = \vec{s}_{av}$

d) 电场、磁场平均能量密度相等. 即  $(W_e)_{av} = (W_m)_{av} = \frac{1}{2}\epsilon E_0^2 = \frac{1}{2}\mu H_0^2$ .

$$W_{av} = \frac{1}{2}\epsilon E_0^2 = \frac{1}{2}\mu H_0^2.$$

平面电磁波能速  $V_c = \frac{|\vec{s}_{av}|}{W_{av}} = \frac{1}{\epsilon\eta} = v_p = \nu$ .

↳ 在垂直于平面波传播方向上, 单位面积通过的平均功率等于单位体积上的平均电磁场能量与能速的乘积 =  $P = W_{av} V_c$ .

或  $\vec{s}_{av} \cdot \vec{s}_u = W_{av} V_c S_u$ .

$$W_{av} = W_{av} S_u. \quad P = \vec{s}_{av} \cdot \vec{s}_u.$$

## (b) 沿任意方向传播的平面波

① 沿正z方向传播的平面波，电场强度复矢量为  $E(x, y, z) = E_0 e^{-jkz}$ .  $k$  为波数。

由该方程由  $\frac{d^2 E}{dz^2} + k_z^2 E = 0$  解得，类似有：  $\frac{d^2 E}{dx^2} + k_x^2 E = 0$ ,  $\frac{d^2 E}{dy^2} + k_y^2 E = 0$ .

等相位面上任一点  $\vec{r} = x \hat{a}_x + y \hat{a}_y + z \hat{a}_z$ ,  $\Rightarrow E = E_0 e^{-jkz} = E_0 e^{-jk\vec{a}_z \cdot \vec{r}} \Rightarrow \underline{\underline{E(r)}}$

类似地， $e^{\pm jk\vec{a}_x \cdot \vec{r}}$ ,  $e^{\pm jk\vec{a}_y \cdot \vec{r}}$ ,  $e^{\pm jk\vec{a}_z \cdot \vec{r}}$  分别代表沿  $x$ ,  $y$ ,  $z$  方向传播的行波因子。

② 沿任意矢量  $\vec{a}_n$  方向传播的电磁波，电场强度复矢量为：  $E = E_0 e^{-jk\vec{a}_n \cdot \vec{r}} = E_0 e^{-jk\vec{k} \cdot \vec{r}}$ ,  $k = \omega/\mu$

其中  $\vec{k} = k \vec{a}_n$ , 称为 波矢量。  $\vec{a}_n = \vec{a}_x \cos\alpha + \vec{a}_y \cos\beta + \vec{a}_z \cos\gamma$ .

则  $\vec{k} = \vec{a}_x k \cos\alpha + \vec{a}_y k \cos\beta + \vec{a}_z k \cos\gamma = (\vec{a}_x k_x + \vec{a}_y k_y + \vec{a}_z k_z)$ ,  $k_x, k_y, k_z$  为分波数。

电场强度复矢量  $E = (E_0 e^{-j(k_x x + k_y y + k_z z)}) = (E_0 e^{-jk \cdot \vec{r}})$  其中  $k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k^2$

③ 可推导出：  $\nabla \times \vec{E} = -jk \vec{x} \vec{E}$ ,  $\nabla \cdot \vec{E} = -jk \cdot \vec{E}$ .  $\Rightarrow \underline{\underline{\vec{E}(r)}}$  类似  $\vec{E}(x) = E_0 e^{-jkx}$ .

用波矢量表示麦克斯韦方程组：

$$\begin{cases} -jk \vec{x} \vec{E} = -j\omega \mu \vec{H} \\ -jk \times \vec{H} = j\omega \epsilon \vec{E} \\ -jk \cdot \vec{E} = 0 \\ -jk \cdot \vec{H} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{H} = \frac{1}{\eta} \vec{a}_n \times \vec{E} \\ \vec{E} = -\eta \vec{a}_n \times \vec{H} \\ \vec{a}_n \cdot \vec{E} = 0 \\ \vec{a}_n \cdot \vec{H} = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{场矢量垂直于波传播方向.}$$

磁场所强度复矢量：  $\vec{H} = \frac{1}{\eta} \vec{a}_n \times \vec{E} = \frac{\vec{E} \times \vec{E}}{\omega \mu}$ .

平均功率流密度矢量（平均波印迹矢量）：  $\vec{S}_{av} = \vec{a}_n \frac{E_0^2}{2\eta} = \vec{a}_n S_{av}$ .  $\Rightarrow$  能流传播方向.

~~×~~ 例：一均匀平面波在空气中传播，其磁场所强度为：  $\vec{H} = (\sqrt{3}\vec{a}_x - \vec{a}_y + \vec{a}_z) \sin(\omega t + Ax - 2\sqrt{3}z) A/m$ .

求： 1) 常数  $A$ . 2) 平面波的频率、传播方向上的单位矢量. 3) 电场强度复数表达式.

$\Rightarrow$  1)  $\vec{H} = \operatorname{Re}[\vec{H} e^{j\omega t}] = \operatorname{Re}[(\sqrt{3}\vec{a}_x - \vec{a}_y + \vec{a}_z) e^{j(Ax - 2\sqrt{3}z - \frac{\pi}{2})} e^{j\omega t}]$

由  $\vec{H} \cdot \vec{R} = 0$  得：  $(\sqrt{3}\vec{a}_x - \vec{a}_y + \vec{a}_z) \cdot (-A\vec{a}_x + 2\sqrt{3}\vec{a}_z) = 0$  得  $A = 2$ .

2)  $k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = 4 + 12 = 16$ .  $\Rightarrow k = 4$ . 波长  $\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{\pi}{2} (m)$ .

频率  $f = \frac{c}{\lambda} = \frac{3 \times 10^8}{\pi/2} = 1.91 \times 10^8 Hz$ .

传播方向上的单位矢量  $\vec{a}_n = \frac{\vec{R}}{|\vec{R}|} = -\frac{1}{2}\vec{a}_x + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{a}_z$ .

3)  $\vec{E} = -\eta \vec{a}_n \times \vec{H} = -3770 \left( \frac{1}{2}\vec{a}_x + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{a}_z \right) \times (\sqrt{3}\vec{a}_x - \vec{a}_y + \vec{a}_z) e^{-j(2\sqrt{3}z - 2x + \frac{\pi}{2})}$

$= -188.5 (\sqrt{3}\vec{a}_x + 4\vec{a}_y + \vec{a}_z) e^{-j(2\sqrt{3}z - 2x + \frac{\pi}{2})} (V/m)$ .

空气中  $\eta = 377 \Omega$

## 2. 导电媒质中的平面波

(1) 导电媒质分类  $\Rightarrow$  有损媒质  $\sigma \neq 0$ .

→ 成为“源”

① 平面波在无源的导带媒质中传播时出现传导电流  $\vec{J}_c = \sigma \vec{E}$

复矢量法满足的麦克斯韦方程为：

$$\nabla^2 \vec{E} + k^2 \vec{E} = j\omega \mu \vec{J} = j\omega \mu \sigma \vec{E} \Rightarrow \nabla^2 \vec{E} = (j\omega \mu \sigma - k^2) \vec{E} = -\omega^2 \mu \epsilon (1 - j\frac{\sigma}{\omega \epsilon}) \vec{E} = -\omega^2 \mu \epsilon \epsilon_{ec} \vec{E}$$

$\epsilon_{ec} = \epsilon (1 - \frac{\sigma}{\omega \epsilon})$  为导电媒质的等效复介电常数.  $\Rightarrow \nabla^2 \vec{E} + \omega^2 \mu \epsilon_{ec} \vec{E} = 0$

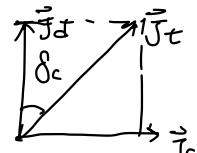
其形式和理想媒质  $\nabla^2 \vec{E} + \omega^2 \mu \epsilon \vec{E} = 0$  相同. 只需将  $\epsilon$  换为  $\epsilon_{ec}$ .

$\Rightarrow \nabla^2 \vec{E} + k_c'^2 \vec{E} = 0$ ,  $\nabla^2 \vec{E} - \gamma^2 \vec{E} = 0$ .  $k_c' = \omega \sqrt{\mu \epsilon_{ec}}$  为等效复波数.  $\gamma$  为传播系数.

② 等效复介电常数  $\epsilon_{ec}$  可写为  $\epsilon_{ec} = \epsilon_c' - j\epsilon_c'' = \epsilon (1 - j\frac{\sigma}{\omega \epsilon})$ . 则  $\epsilon_c' = \epsilon$ ,  $\epsilon_c'' = \frac{\sigma}{\omega \epsilon}$ .

$\Rightarrow \frac{\epsilon_c''}{\epsilon_c'} = \frac{\sigma}{\omega \epsilon}$  其为导电媒质中  $|\vec{J}_c| = |\sigma \vec{E}|$  和  $|\vec{J}_d| = |j\omega \epsilon \vec{E}|$  之比.

其中  $\vec{J}_c$  和  $\vec{J}_d$  方向相同.  $\vec{J}_d$  相位超前于  $\vec{J}_c$   $90^\circ$ . 损耗角正切  $\tan \delta_c = \frac{\sigma}{\omega \epsilon}$ .



事实上，即使是非导电的理想媒质，由于极化同样产生功率损耗，因此记介电常数为  $\epsilon_d$ . 那  $\epsilon_d = \epsilon_d' - j\epsilon_d''$  (具有普遍意义). 其中  $\epsilon_d'$  为对应介质的本征介电常数， $\epsilon_d''$  为功率损耗率.  $\rightarrow$  在理想介质中  $\vec{J} = 0$ . 则  $\vec{E} = \frac{1}{j\omega \epsilon} \nabla \times \vec{H}$

由麦克斯韦方程  $\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + j\omega \vec{D} = \sigma \vec{E} + j\omega \epsilon \vec{E} = j\omega (\epsilon_d - j\frac{\sigma}{\omega \epsilon}) \vec{E} = j\omega \epsilon_{ed} \vec{E}$ .

其中  $\epsilon_{ed} = \epsilon_d - j\frac{\sigma}{\omega \epsilon} = \epsilon_d' (1 - j\frac{\sigma + \omega \epsilon_d''}{\omega \epsilon_d'}) = \epsilon_d' (1 - j\tan \delta)$ . 为等效复介电常数.  $\sigma_d = \omega \epsilon_d''$  为媒质的等效电导率.  $\tan \delta = (\sigma + \omega \epsilon_d'') / (\omega \epsilon_d')$  为损耗角正切. 一般情况下  $\sigma_d \ll \sigma$ . 则有  $\tan \delta \approx \tan \delta_c = \frac{\sigma}{\omega \epsilon}$ .

③ 分类：若  $\frac{\sigma}{\omega \epsilon} \ll 1$  ( $\frac{\sigma}{\omega \epsilon} \leq 0.01$ ).  $\Rightarrow$  良导体.

若  $\frac{\sigma}{\omega \epsilon} \approx 1$   $\Rightarrow$  半导体/不良导体

若  $\frac{\sigma}{\omega \epsilon} \gg 1$  ( $\frac{\sigma}{\omega \epsilon} \geq 100$ )  $\Rightarrow$  良导体.

$$k_c' = \omega \sqrt{\mu \epsilon} c$$

$k_c'$  为等效复波数  
(从上页)

## 12) 平面波在导电媒质中的传播特性.

① 在理想媒质中类似, 可得二阶线性常微分方程:  $\frac{d^2 E_x}{dx^2} - \gamma^2 E_x = 0$ . ( $\gamma$  为传播常数,  $r = j k_c'$ )  
解此方程得:  $\vec{E} = E_0 e^{-r^2} \vec{a}_x$ , 进而  $\vec{H} = \frac{1}{\eta_c} (\vec{a}_z \times \vec{E}) = \frac{E_0}{\eta_c} e^{-r^2} \vec{a}_y$  (类比理想介质中  $e^{-jk_c' z}$ ).  
其中  $\eta_c = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon_{\text{rec}}} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon - j \frac{\sigma}{\omega}}}}$  为复本征阻抗 (理想介质中  $\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$ )

→ 理想媒质中  $\eta$  为实数

② 传播常数  $\gamma$  通常为复数:  $\gamma = \alpha + j\beta$ .  $\alpha$  为衰减常数,  $\beta$  为相移常数.

联立  $\gamma^2 = -k_c'^2 = -\omega^2 \mu (\epsilon - j \frac{\sigma}{\omega})$  可解得:  $k_c' = \omega \sqrt{\mu \epsilon} c$

$$\alpha = \omega \sqrt{\frac{\mu \epsilon}{2} [1 + (\frac{\sigma}{\omega})^2 + 1]} \quad \text{NP/m}$$

$$\beta = \omega \sqrt{\frac{\mu \epsilon}{2} [1 + (\frac{\sigma}{\omega})^2 + 1]} \quad \text{rad/m}$$

且有  $\frac{\sigma}{\omega} = \frac{2\alpha\beta}{\beta^2 + \alpha^2}$ . 表示相位

由  $\vec{E} = E_0 e^{-r^2} \vec{a}_x$  可得:

(电场) 复矢量:  $\vec{E} = E_0 e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} \vec{a}_x$ . 跃时矢量  $\vec{E} = E_x(t) \vec{a}_x = E_0 e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z) \vec{a}_x$   
衰减项(幅度). 相移项(相位) ↓ ↓  
衰减项.  $\beta$  为波数

⇒ 在导电媒质中, 场强振幅随  $z$  增加而衰减; 且电导率  $\sigma$  越大, 衰减项越大.

衰减量可用场强衰减直的自然对数计算量:  $\alpha = \frac{1}{l} \ln \left| \frac{E_1}{E_2} \right|$  (NP/m),  $l$  为传播距离.

以dB为单位时:  $\alpha = \frac{20}{l} \lg \left| \frac{E_1}{E_2} \right|$  (dB/m).  $1 \text{NP} = 20 \lg e = 8.686 \text{dB}$ .

③ 导电介质中平面波波长:  $\lambda = \frac{2\pi}{\beta}$ .  $\beta = \text{Im}[\gamma] = \omega \sqrt{\mu \epsilon}$

$$\text{相速: } v_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}} \cdot \sqrt{\frac{2}{1 + (\frac{\sigma}{\omega})^2 + 1}} < \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}}$$

⇒ 导电媒质中平面波比在  $\mu, \epsilon$  相同的理想介质中慢.  $\sigma$  越大,  $\omega$  越小, 则  $v_p$  越慢)

波的色散: 电磁波在导电媒质中传播时失真, 不同频率的相速不同.

$$\text{复本征阻抗: } \eta_c = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon_{\text{rec}}} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon - j \frac{\sigma}{\omega}}} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \cdot \sqrt{\frac{1}{1 - j \frac{\sigma}{\omega}}} = |\eta_c| e^{j\delta}}$$

$$\hookrightarrow \text{模: } |\eta_c| = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \left[ 1 + \left( \frac{\sigma}{\omega} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}}. \text{ 相位: } \delta = \frac{1}{2} \arctan \left( \frac{\sigma}{\omega} \right). \Rightarrow \eta_c = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \left[ 1 + \left( \frac{\sigma}{\omega} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} e^{j \frac{1}{2} \arctan \left( \frac{\sigma}{\omega} \right)}$$

即  $|\eta_c| < \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$ ,  $0 < \delta < \frac{\pi}{4}$ . 当  $\delta=0$  时为理想媒质,  $\delta=\frac{\pi}{2}$  时为理想导体.  $\vec{E} = -\eta \vec{a}_x \times \vec{H}$

⇒ 导电媒质的本征阻抗具有感性相角, 电场和磁场分量不再同相 ⇒ 电场超前于磁场  $\delta$

由电场分量可计算得磁场分量:

↑ 相位滞后项.  $\sigma$  越大, 滞后越少

$$\text{(磁场) 复矢量: } \vec{H} = \frac{E_0}{\eta_c} e^{-r^2} \vec{a}_y = \frac{E_0}{|\eta_c|} e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} e^{-j\delta} \vec{a}_y.$$

$$\text{瞬时矢量: } \vec{H}(t) = H_y(t) \vec{a}_y = \frac{E_0}{|\eta_c|} e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z - \delta) \vec{a}_y.$$

$$\Rightarrow |\eta_c| = |\eta| e^{j\delta}.$$

④ 此时平面波仍然是TEM波. 复波印证矢量为:

$$\vec{s} = \frac{1}{2} (\vec{E} \times \vec{H}^*) = \frac{E_0^2}{2|\eta_c|} e^{-2\alpha z} e^{j\delta} \vec{a}_z.$$

$$\text{对比在理想介质中: } \vec{s} = \frac{E_0^2}{2\eta} \vec{a}_z.$$

※ 注意: 磁场有附加相位!!!

由复本征阻抗  $\eta$  逆向求

→ 即在导电媒质中多了衰减项  $e^{-2\alpha z}$  和复指数项  $e^{j\beta z}$ . 复功率流密度  $S$  除实部外还有虚部, 代表除向 z 方向传播的实功率外还有电场能量和磁场能量相互转换对应的虚功率.

$$\text{平均功率流密度矢量} = \vec{S}_{av} = \operatorname{Re}[\vec{S}] = \frac{E_0^2}{2|\eta_c|} e^{-2\alpha z} \cos \xi \vec{a}_z, \text{ 其中 } \cos \xi = \frac{\beta}{\sqrt{\beta^2 + \alpha^2}}.$$

↳  $\vec{S}_{av} \neq \vec{S}$

→ 导电媒质中平面波的平均电、磁场不再相等(理想媒质中相等).  $\beta \neq 0$  导致传导电流产生的磁场.

$$(We)_{av} = \frac{1}{4}\epsilon_c |\vec{E}|^2 = \frac{1}{4}\epsilon E_0^2 e^{-2\alpha z}.$$

$$(Wm)_{av} = \frac{1}{4}\mu |\vec{H}|^2 = \frac{1}{4}\mu \frac{E_0^2}{|\eta_c|^2} e^{-2\alpha z} = \frac{1}{4}\epsilon E_0^2 e^{-2\alpha z} \sqrt{1 + (\frac{\sigma}{w\epsilon})^2} \Rightarrow (We)_{av} < (Wm)_{av}.$$

$$W_{av} = (We)_{av} + (Wm)_{av} = \frac{\epsilon}{4} E_0^2 e^{-2\alpha z} \left[ 1 + \sqrt{1 + (\frac{\sigma}{w\epsilon})^2} \right].$$

$$\text{能速} = v_e = \frac{|\vec{s}_{av}|}{W_{av}} = \frac{1}{\sqrt{w\mu}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \sqrt{1 + (\frac{\sigma}{w\epsilon})^2}}} = v_p \Rightarrow \text{导电媒质中能速也等于相速}.$$

(3) 良介质中的平面波.  $\Rightarrow \frac{\sigma}{w\epsilon} \ll 1, \frac{\sigma}{w\epsilon} \leq 0.01 \Rightarrow |\vec{J}_d| \gg |\vec{J}_c|$ .

$$\text{传播常数} = \gamma = \frac{\sigma}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} + j w \sqrt{\mu \epsilon}, \text{ 衰减常数} = \alpha = \frac{\sigma}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}, \text{ 相位常数} = \beta = w \sqrt{\mu \epsilon}.$$

$$\text{本征阻抗} = \eta_c = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}, \text{ 相速} = v_p = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}}.$$

→ 除功率分量有衰减项时, 其余与理想介质情况相同.

↳ 和波数表达式相同

(4) 良导体中的平面波  $\Rightarrow \frac{\sigma}{w\epsilon} \gg 1, \frac{\sigma}{w\epsilon} \gg 100, \Rightarrow |\vec{J}_d| \ll |\vec{J}_c|$ .

$$\text{等效良介电常数} = \epsilon = \frac{\sigma}{jw}, \text{ 相速} = v_p = \sqrt{\frac{2w}{\mu\sigma}}.$$

$$\text{传播常数} = \gamma = (1+j) \sqrt{\frac{w\mu\sigma}{2}}, \Rightarrow \text{衰减常数} \alpha = \text{相位常数} \beta = \sqrt{\frac{w\mu\sigma}{2}} (= \sqrt{\pi f \mu \sigma})$$

→ 即在良导体中磁力分量相位滞后  $\frac{\pi}{4}$   $\uparrow$   $(1+j)$   $\uparrow 45^\circ$

$w$  越大则衰减越快, 高频电磁波场强衰减到  $\frac{1}{e}$  (36.8%) 时的深度  $\Rightarrow$  超肤深度  $\delta$ .

$$\Rightarrow \text{当 } \alpha \delta = 1 \text{ 时场强幅度降为 } 1/e, \text{ 则 } \delta = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu \sigma}} \text{ (m). 且 } \delta = \frac{1}{\beta} = \frac{1}{2\pi} \text{ (m)}$$

场强复矢量和功率流密度矢量:

$$\vec{E} = E_0 e^{-\gamma z} \vec{a}_x = E_0 e^{-(1+j)\alpha z} \vec{a}_x = E_x \vec{a}_x.$$

↗ 良导体中根本物理的区别

$$\vec{H} = H_y \vec{a}_y = \frac{E_x}{\eta_c} \vec{a}_y = \frac{E_0}{\eta_c} e^{-(1+j)\alpha z} \vec{a}_y = \frac{E_0}{1/\eta_c} e^{-(1+j)\alpha z} e^{-j\frac{\pi}{4}} \vec{a}_y.$$

$$\vec{S} = \frac{1}{2} (\vec{E} \times \vec{H}^*) = \frac{E_0^2}{2} e^{-2\alpha z} (1+j) \sqrt{\frac{\sigma}{2w\mu}} \vec{a}_z.$$

磁力分量滞后电场半

$$\vec{S}_{av} = \operatorname{Re}[\vec{S}] = \frac{E_0^2}{2} e^{-2\alpha z} \sqrt{\frac{\sigma}{2w\mu}} \vec{a}_z.$$

→ 书本例题 6.3 (P169)

$$f \cdot w = 2\pi f \quad \epsilon_0 = \frac{1}{36\pi} \times 10^{-9} F/m.$$

○ 海水地参数为  $\epsilon = 80\epsilon_0$ ,  $\mu = \mu_0$ ,  $\sigma = 4S/m$ . 一颗频率为 5GHz 的平面电磁波在沿着与海平面垂直的 z 方向传播. 已知该平面波在海平面下侧 ( $z=0$ ) 处电场强度幅值为  $1V/m$ .

(1) 求衰减常数、相位常数、复本征阻抗、相速、趋肤深度

(2) 电场强度幅值衰减为  $1\mu V/m$  时海水的深度. (3) 海平面下侧 ( $z=0$ ) 平均能流密度矢量大小,

$$\Rightarrow (1) \alpha = w \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2}} [\sqrt{1 + (\frac{\sigma}{w\epsilon})^2}] = 83.96 \text{ rad/m} \quad \beta = w \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2} [\sqrt{1 + (\frac{\sigma}{w\epsilon})^2} + 1]} = 940.40 \text{ rad/m}$$

$$\eta_c = |\eta_c| e^{-j\frac{\sigma}{w\epsilon}} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon} [1 + (\frac{\sigma}{w\epsilon})^2]} e^{-j\frac{1}{2}\arctan(\frac{\sigma}{w\epsilon})} = 41.81 e^{j5.10^\circ} \Omega$$

$$v_p = \frac{w}{\beta} = 3.34 \times 10^7 \text{ m/s} \quad S = \frac{1}{\alpha} = 1.19 \times 10^{-2} \text{ m}$$

$$(2) E_0 e^{\alpha z} = 1\mu V/m, E_0 = 1V/m \text{ 解得 } z = \frac{\ln 10^6}{\alpha} = 0.16 \text{ m.}$$

$$(3) S_{av} = \text{Re}[\dot{S}] = \frac{E_0^2}{2|\eta_c|} e^{-2\alpha z} \cos \xi |_{z=0} = 11.91 \times 10^{-3} \text{ W/m}^3.$$

## 1.5) 平面波的极化.

→ 媒质中某点处电场强度矢量的尾端随时间的变化方式. 若没有相位滞后, 即  $\psi = 0$

设平面波沿 z 方向传播. 则  $\vec{E} = E_x \hat{a}_x + E_y \hat{a}_y$ . (复矢量表达式)

设  $E_y$  相位滞后于  $E_x$  为  $\psi$ . 则  $\vec{E} = E_x e^{-jkz} \hat{a}_x + E_y e^{-jkz} e^{-j\psi} \hat{a}_y$ .

瞬时表达式:  $\vec{E}(z, t) = E_x \cos(\omega t - kz) \hat{a}_x + E_y \cos(\omega t - kz - \psi) \hat{a}_y$ .

其两个分量:  $\begin{cases} E_x(z, t) = E_x \cos(\omega t - kz), \\ E_y(z, t) = E_y \cos(\omega t - kz - \psi). \end{cases}$

$$E_y(z, t) = E_y \cos(\omega t - kz - \psi)$$

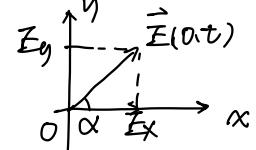
$$\text{可得关系式} = \left[ \frac{E_x(z, t)}{E_x} \right]^2 + \left[ \frac{E_y(z, t)}{E_y} \right]^2 - \frac{2 E_x(z, t) E_y(z, t)}{E_x E_y} \cos \psi = \sin^2 \psi.$$

↳ 这是一般情况下, 已给定  $E(z, t)$  尾端在 xy 平面上的轨迹方程  $\Rightarrow$  圆方程

### ① 线极化.

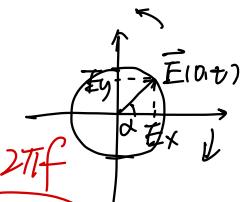
当  $\psi = 0$  或  $\pm \pi$  时. 方程为:  $E_y(x, t) = \pm \left( \frac{E_x}{E_y} \right) E_x(x, t)$ .  $\Rightarrow$  直线方程

"+" 对应于  $\psi = 0$ , "-" 对应于  $\psi = \pm \pi$ . 夹角  $\alpha = \pm \arctan \frac{E_y}{E_x}$ .



### ② 圆极化.

当  $E_x = E_y = E_0$ , 即  $\psi = \pm \frac{\pi}{2}$  时. 方程为:  $E_x^2(z, t) + E_y^2(z, t) = E_0^2$ .  $\Rightarrow$  圆方程  $w = 2\pi f$



$\vec{E}(z, t)$  大小不随时间变化, 夹角  $\alpha = \pm(\omega t - kz)$  即  $\vec{E}(z, t)$  随时间以角频率  $w$  等速旋转

且固定  $\Rightarrow$  右旋圆极化:  $E_y$  落后  $E_x \frac{\pi}{2}$  ( $\psi = \frac{\pi}{2}$ ).  $\alpha = \omega t$  向逆时针方向变化. 与传播方向满足右手螺旋关系.

左旋圆极化:  $E_y$  超前  $E_x \frac{\pi}{2}$  ( $\psi = -\frac{\pi}{2}$ ).  $\alpha = -\omega t$  向顺时针方向变化. 不满足右手螺旋关系.

且固定  $\Rightarrow$  左旋螺旋线: 右旋极化波.  $\alpha = \omega t + \frac{\pi}{2}$ . 向传播方向看为左旋线.

$$E_y = -jE_x \quad E_y = jE_x$$

右旋螺旋线: 左旋极化波.  $\alpha = -\omega t + \frac{\pi}{2}$ .  $\Delta$  相位超前正分量向相位落后正分量转

圆极化波  $\xrightarrow{\text{分解}} \text{两个相位相差}\frac{\pi}{2} \text{, 振幅相等, 空间上正交的线极化波.}$

$$\hookrightarrow \vec{E}(z) = a_x E_0 e^{-jkz} = a_x E_0 e^{-jkz} + \frac{1}{2} j a_y E_0 e^{-jkz} - \frac{1}{2} j a_y E_0 e^{-jkz} \\ = \frac{E_0}{2} (a_x + j a_y) e^{-jkz} + \frac{E_0}{2} (a_x - j a_y) e^{-jkz}.$$

③ 椭圆极化.

$\Rightarrow$  最一般情况, 且  $\vec{E}(z,t)$  尾端在椭圆上非匀速旋转.

椭圆极化波  $\Rightarrow$  两个空间上正交的线极化波.

$\Rightarrow$  两个旋向相反的圆极化波.

○ 判断以下各式的极化形式和传播方向.

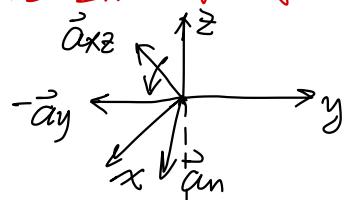
(1)  $\vec{E} = E_0 (6j\vec{a}_x - 2\sqrt{5}\vec{a}_y + 4j\vec{a}_z) e^{-jk(2x-3z)}$ .

$$\Rightarrow \text{传播方向} = \vec{a}_n = \frac{1}{\sqrt{13}} (2\vec{a}_x - 3\vec{a}_z)$$

$$\vec{E} = E_0 [2j(3\vec{a}_x + 2\vec{a}_z) - 2\sqrt{5}\vec{a}_y] e^{-jk(2x-3z)}.$$

则  $x,z$  分量  $\vec{E}_{xz} = 2j(3\vec{a}_x + 2\vec{a}_z)$ , 和  $y$  分量  $\vec{E}_y = -2\sqrt{5}\vec{a}_y$ , 均垂直于传播方向

$E_{xy} \neq E_y$ , 且  $\phi_{xz} = \frac{\pi}{2}$ ,  $\phi_y = 0$ .  $\Rightarrow$  右旋椭圆极化



$$\vec{a}_{xz} \perp \vec{a}_n \\ -\vec{a}_y \perp \vec{a}_n.$$

(2)  $\vec{E} = E_0 (j\vec{a}_x - 3j\vec{a}_y) e^{jkz}$

$\Rightarrow$  由于  $E_x = E_0$ ,  $E_y = 3E_0$ ,  $E_x \neq E_y$ ,  $\phi_x = \frac{\pi}{2}$ ,  $\phi_y = -\frac{\pi}{2}$  且沿  $z$  方向传播  $\Rightarrow$  线极化波.

(3)  $\vec{E} = E_0 (\vec{a}_x + 2j\vec{a}_z) e^{-jkz}$

$\Rightarrow E_x = E_0$ ,  $E_z = 2E_0$ ,  $E_x \neq E_z$ ,  $\phi_x = 0$ ,  $\phi_z = \frac{\pi}{2}$  且沿  $-y$  方向传播  $\Rightarrow$  左旋椭圆极化.

(4)  $\vec{E} = \vec{a}_x E_0 \sin(\omega t - kz) + \vec{a}_y E_0 \cos(\omega t - kz)$ .

$\Rightarrow E_x = E_y = E_0$ ,  $\phi_x = -\frac{\pi}{2}$ ,  $\phi_y = 0$ , 沿  $+z$  方向传播  $\Rightarrow$  左旋圆极化波.

○ 设空气中某均匀平面波的磁场为  $\vec{H} = (\vec{a}_x + A\vec{a}_y + 2j\vec{a}_z) e^{-j(20\pi x - 15\pi y)}$  (A/m).

求: (1) 平面波工作频率和波长 (2) 常数  $A$  和平面波的电场分量 (3) 极化类型.

$$\Rightarrow (1) k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2} = 25\pi, \lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2}{25} m, f = \frac{c}{\lambda} = 3.75 GHz$$

(2)  $\vec{k} = 20\pi\vec{a}_x - 15\pi\vec{a}_y$ .  $\vec{H} = \vec{a}_x + A\vec{a}_y + 2j\vec{a}_z$ .

由  $\vec{k} \cdot \vec{H} = 0$  得:  $20\pi - 15A\pi = 0 \Rightarrow A = \frac{4}{3}$ .

△ 判断极化看  $E$ , 不是  $H$ .

$$(3) \vec{H}_{xy} = (\vec{a}_x + \frac{4}{3}\vec{a}_y) e^{-j(20\pi x - 15\pi y)}$$

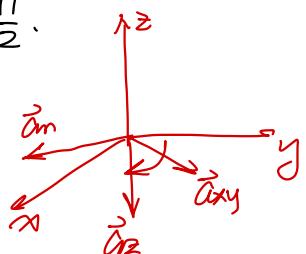
$$\left. \right\} \Rightarrow H_{xy} \neq H_z, \phi_{xy} = 0, \phi_z = \frac{\pi}{2}.$$

$$\vec{H}_z = 2j\vec{a}_z e^{-j(20\pi x - 15\pi y)}$$

左旋椭圆极化.

由  $\vec{E} = -\eta \vec{a}_n \times \vec{H}$  得:  $\vec{E} = (144\pi j\vec{a}_x + 192\pi j\vec{a}_y - 200\pi j\vec{a}_z) e^{-j(20\pi x - 15\pi y)}$

$E_y$  分量超前  $-a_z$  分量  $\frac{\pi}{2}$ , 幅值不相等.

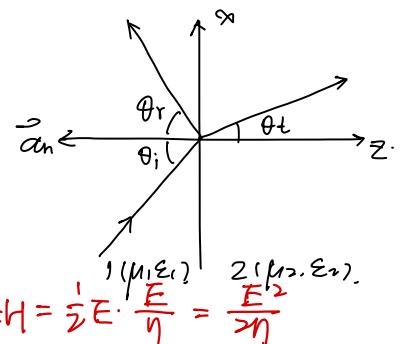


16) 两种理想媒质分界面上斜入射:  $\theta_r$  反射角,  $\theta_i$  反射角,  $\theta_t$  透射角.

① 角度关系:

$$Snell 反射定律: \theta_r = \theta_i \quad (\text{反射角等于入射角})$$

$$Snell 透射定律: \frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_t} = \frac{n_2}{n_1} = \sqrt{\frac{\mu_2 \epsilon_2}{\mu_1 \epsilon_1}} = \frac{v_{p1}}{v_{p2}}$$



② 振幅关系:

$$\text{平面波的传播方向为 } \vec{a}_n \text{ 时: 平均坡印廷矢量} = \vec{S}_{av} = \vec{a}_n \frac{|E_0|^2}{2\eta} \quad \frac{1}{2} \vec{E} \times \vec{H}^* = \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{H} = \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \frac{E}{\eta} = \frac{|E_0|^2}{2\eta}$$

则沿任意方向传播的平面波在单位面积上传输的平均功率为  $\frac{|E_0|^2}{2\eta}$

入射波、反射波、透射波所携带能量投影到交界面上的:

$$\text{平均入射功率} P_i = (\vec{S}_i)_{av} \cdot (\vec{S}) = \frac{|E_{i0}|^2}{2\eta_1} S \cos \theta_i$$

$$\text{平均反射功率} P_r = (\vec{S}_r)_{av} \cdot (\vec{S}) = \frac{|E_{r0}|^2}{2\eta_1} S \cos \theta_r$$

$$\text{平均透射功率} P_t = (\vec{S}_t)_{av} \cdot (\vec{S}) = \frac{|E_{t0}|^2}{2\eta_2} S \cos \theta_t$$

垂直极化、平行极化波适用.

$$\text{能量守恒定律: } P_i = P_r + P_t \text{ 可得三波之间幅度关系: } \frac{|E_{r0}|^2}{|E_{i0}|^2} = 1 - \frac{\eta_1}{\eta_2} \frac{|E_{t0}|^2 \cos \theta_t}{|E_{i0}|^2 \cos \theta_i}$$

③ 求解任意方向极化的入射波对应的场与对应的反射波和透射波的场.

$\Rightarrow$  将入射波的主分量为垂直分量和平行分量. 垂直于入射面为垂直极化.  $\Rightarrow$  按照电场分量化分为主平行于入射面为平行极化. 分别解两种情况下反射波和透射波的场量再叠加.

(a) 垂直极化  $\Rightarrow$  电场主垂直于入射面

$\Rightarrow$  入射波传播方向为  $\vec{a}_{ni}$ . 电场方向为  $\vec{E}_i$ . 磁场方向为  $\vec{H}_i$ .

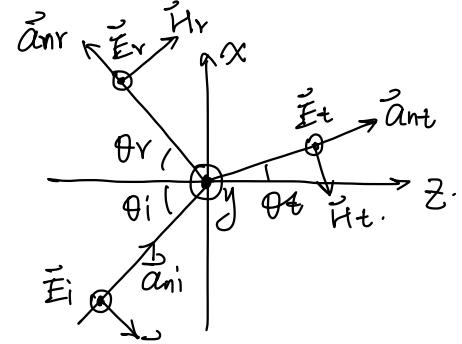
$$\text{即复矢量} \vec{E}_i = E_{i0} e^{-j\beta_i \vec{a}_{ni}} \vec{a}_y = E_{i0} e^{-j\beta_i \vec{r}} \vec{a}_y$$

$$\text{代入} \vec{a}_{ni} = \sin \theta_i \vec{a}_x + \cos \theta_i \vec{a}_z. \quad \vec{r} = x \vec{a}_x + y \vec{a}_y + z \vec{a}_z$$

得入射波场量:

$$\left\{ \vec{E}_i = E_{i0} e^{-j\beta_i (x \sin \theta_i + y \cos \theta_i)} \vec{a}_y \right.$$

$$\left. \vec{H}_i = \frac{1}{\eta_1} (\vec{a}_{ni} \times \vec{E}_i) = \frac{E_{i0}}{\eta_1} (-\cos \theta_i \vec{a}_x + \sin \theta_i \vec{a}_z) e^{-j\beta_i (x \sin \theta_i + z \cos \theta_i)} \right.$$



同理对反射波可以得到:  $\Rightarrow \vec{a}_{nr} = \vec{a}_x \sin \theta_r - \vec{a}_z \cos \theta_r$ .

$$\left\{ \vec{E}_r = E_{r0} e^{-j\beta_r \vec{a}_{nr}} \vec{a}_y = E_{r0} e^{-j\beta_r \vec{r}} \vec{a}_y = E_{r0} e^{-j\beta_r (x \sin \theta_r - z \cos \theta_r)} \vec{a}_y \right.$$

$$\left. \vec{H}_r = \frac{E_{r0}}{\eta_1} (\cos \theta_r \vec{a}_x + \sin \theta_r \vec{a}_z) e^{-j\beta_r (x \sin \theta_r - z \cos \theta_r)} \right.$$

透射波的场矢量:  $\Rightarrow \vec{a}_{nt} = \sin \theta_t \vec{a}_x + \cos \theta_t \vec{a}_z$ .

$$\left\{ \vec{E}_t = E_{t0} e^{-j\beta_t \vec{a}_{nt}} \vec{a}_y = E_{t0} e^{-j\beta_t (x \sin \theta_t + z \cos \theta_t)} \vec{a}_y \right.$$

$$\left. \vec{H}_t = \frac{E_{t0}}{\eta_2} (-\cos \theta_t \vec{a}_x + \sin \theta_t \vec{a}_z) e^{-j\beta_t (x \sin \theta_t + z \cos \theta_t)} \right.$$

媒质交界面 ( $z=0$ ) 处有：电场分量与磁场分量切向连续。 $\Rightarrow \begin{cases} (E_{iy} + E_{ry})|_{z=0} = E_{ty}|_{z=0} \\ (H_{ix} + H_{rx})|_{z=0} = H_{tx}|_{z=0} \end{cases}$   
代入复数表达式，结合对  $z=0$  上所有  $x$ -轴成立。

则指教因  $z$  轴相等，可得到： $\beta_i \sin \theta_i = \beta_s \sin \theta_r = \beta_t \sin \theta_t \Rightarrow \beta_{ix} = \beta_{rx} = \beta_{tx}$ 。

即入射波、反射波、透射波的传播常数  $\bar{\gamma}_i, \bar{\gamma}_r, \bar{\gamma}_t$  沿交界面的切向分量相等  
 $\Rightarrow x$  轴波数连续  $\Rightarrow$  相位匹配条件。同样可得  $\beta_{iy} = \beta_{ry} = \beta_{ty}$ 。

在此条件下可得： $\begin{cases} E_{io} + E_{ro} = E_{to}, \\ \frac{1}{\eta_1} (E_{io} - E_{ro}) \cos \theta_i = \frac{1}{\eta_2} E_{to} \cos \theta_t. \end{cases}$   $\quad \left. \begin{array}{l} \text{由上可解得 } E_{ro}, E_{to}. \\ \end{array} \right.$

反射系数  $T_\perp$  和透射系数  $T_\parallel$  分别为 (垂直极化)。

↓  
电场分量幅值比：

$$\begin{cases} T_\perp = \frac{E_{ro}}{E_{io}} = \frac{\eta_2 \cos \theta_i - \eta_1 \cos \theta_t}{\eta_2 \cos \theta_i + \eta_1 \cos \theta_t}, \\ T_\parallel = \frac{E_{to}}{E_{io}} = \frac{2\eta_2 \cos \theta_i}{\eta_2 \cos \theta_i + \eta_1 \cos \theta_t}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 + T_\perp = T_\perp \\ 1 - T_\perp = \frac{\eta_1 \cos \theta_t}{\eta_2 \cos \theta_i} T_\perp \end{cases}$$

$\hookrightarrow$  垂直极化的薛涅尔公式。

对非磁性媒质， $\eta = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$ 。以上变为：

$\mu = \mu_0$

$$\begin{cases} T_\perp = \frac{\cos \theta_i - \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}} \cos \theta_t}{\cos \theta_i + \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}} \cos \theta_t} = \frac{\cos \theta_i - \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} - \sin^2 \theta_i}}{\cos \theta_i + \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} - \sin^2 \theta_i}}, \\ T_\parallel = \frac{2 \cos \theta_i}{\cos \theta_i + \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \cos \theta_t}} = \frac{2 \cos \theta_i}{\cos \theta_i + \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} - \sin^2 \theta_i}}. \end{cases} \Rightarrow \frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_t} = \sqrt{\frac{\mu_2 \epsilon_2}{\mu_1 \epsilon_1}} = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}}$$

(当  $\theta_i = 0$  时， $\theta_r = \theta_t = 0$  为正入射。当  $\epsilon_2$  为理想导体时，由  $\epsilon_2 \rightarrow \infty, \eta_2 = 0$  有  $T_\perp = -1, T_\parallel = 0$ )

条件下入射情况下功率反射系数  $R$  和功率透射系数  $T$  =

垂直极化和平行极化均适用

$$\begin{cases} R = \frac{\bar{a}_n \cdot (\vec{s}_r)_{av}}{\bar{a}_n \cdot (\vec{s}_i)_{av}} = \left| \frac{E_{ro}}{E_{io}} \right|^2 = |T_\perp|^2, \\ T = \frac{\bar{a}_n \cdot (\vec{s}_t)_{av}}{\bar{a}_n \cdot (\vec{s}_i)_{av}} = \frac{\eta_1 \cos \theta_t}{\eta_2 \cos \theta_i} \left| \frac{E_{to}}{E_{io}} \right|^2 = \frac{\eta_1 \cos \theta_t}{\eta_2 \cos \theta_i} |T_\parallel|^2. \end{cases} \quad \begin{array}{l} (R = \frac{P_r}{P_i}) \\ (T = \frac{P_t}{P_i}) \end{array}$$

垂直极化情况下的功率反射系数  $R_\perp$  和功率透射系数  $T_\perp$  =

代入  $T_\perp, T_\parallel$   $R_\perp = |T_\perp|^2 = \left| \frac{\eta_2 \cos \theta_i - \eta_1 \cos \theta_t}{\eta_2 \cos \theta_i + \eta_1 \cos \theta_t} \right|^2.$

$$T_\perp = \frac{\eta_1 \cos \theta_t}{\eta_2 \cos \theta_i} |T_\perp|^2 = \frac{4\eta_1 \eta_2 \cos \theta_i \cos \theta_t}{(\eta_2 \cos \theta_i + \eta_1 \cos \theta_t)^2}.$$

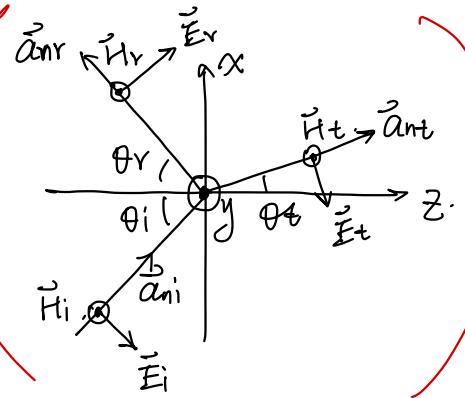
(b) 平行极化.

⇒ 入射电场在处平行入射面内. 该场分量复共轭为:

$$\begin{cases} \vec{E}_i = (\cos\theta_i \hat{a}_x - \sin\theta_i \hat{a}_z) E_{io} e^{-j\beta_1(x\sin\theta_i + z\cos\theta_i)} \\ \vec{H}_i = \frac{E_{io}}{\eta_1} e^{-j\beta_1(x\sin\theta_i + z\cos\theta_i)} \hat{a}_y. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{E}_r = (T_{||} E_{io}) (\cos\theta_i \hat{a}_x + \sin\theta_i \hat{a}_z) e^{-j\beta_1(x\sin\theta_i - z\cos\theta_i)} \\ \vec{H}_r = -\frac{T_{||} E_{io}}{\eta_1} e^{-j\beta_1(x\sin\theta_i - z\cos\theta_i)} \hat{a}_y. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{E}_t = (T_{||} E_{io}) (\cos\theta_t \hat{a}_x - \sin\theta_t \hat{a}_z) e^{-j\beta_2(x\sin\theta_t + z\cos\theta_t)} \\ \vec{H}_t = \frac{T_{||} E_{io}}{\eta_2} e^{-j\beta_2(x\sin\theta_t + z\cos\theta_t)} \hat{a}_y. \end{cases}$$



将基入射界面( $\theta=0$ )处的边界条件(电场和磁场分量切向连续)并结合相位匹配条件=

可得:  $1 + T_{||} = T_{||} \frac{\cos\theta_t}{\cos\theta_i}, \quad 1 - T_{||} = T_{||} \frac{\eta_1}{\eta_2}.$

且有:

$$\begin{cases} T_{||} = \frac{\eta_2 \cos\theta_t - \eta_1 \cos\theta_i}{\eta_2 \cos\theta_t + \eta_1 \cos\theta_i} \\ T_{||} = \frac{2\eta_2 \cos\theta_i}{\eta_2 \cos\theta_t + \eta_1 \cos\theta_i} \end{cases}$$

(垂直极化):  $\begin{cases} T_{\perp} = \frac{\eta_2 \cos\theta_i - \eta_1 \cos\theta_t}{\eta_2 \cos\theta_i + \eta_1 \cos\theta_t} \\ T_{\perp} = \frac{2\eta_2 \cos\theta_i}{\eta_2 \cos\theta_i + \eta_1 \cos\theta_t}. \end{cases}$

(当 $\theta_i=0$ 即正入射时, 垂直极化和平行极化表达式相同)

当 $\epsilon_2$ 为理想导体时,  $\eta_2=0$ , 平行极化也有( $T_{||} = -1, T_{\perp} = 0$ ).

注意和图对比

平行极化下的功率反射系数 $R_{||}$ 和功率透射系数 $T_{||}$ :

$$\begin{cases} R_{||} = |T_{||}|^2 = \left| \frac{\eta_2 \cos\theta_t - \eta_1 \cos\theta_i}{\eta_2 \cos\theta_t + \eta_1 \cos\theta_i} \right|^2 \\ T_{||} = \frac{\eta_1 \cos\theta_i}{\eta_2 \cos\theta_t} |T_{||}|^2 = \frac{4\eta_1 \eta_2 \cos\theta_i \cos\theta_t}{(\eta_2 \cos\theta_t + \eta_1 \cos\theta_i)^2}. \end{cases}$$

平行极化  $\vec{E}_i = (\hat{a}_x \cos\theta_i - \hat{a}_z \sin\theta_i) E_{io} e^{-j\beta_1(x\sin\theta_i + z\cos\theta_i)}$   $\vec{H}_i = \hat{a}_y \frac{E_{io}}{\eta_1} e^{-j\beta_1(x\sin\theta_i + z\cos\theta_i)}$   
 $\vec{E}_r = -E_{io} (\hat{a}_x \cos\theta_r + \hat{a}_z \sin\theta_r) e^{-j\beta_1(x\sin\theta_r - z\cos\theta_r)}$   $\vec{H}_r = \hat{a}_y \frac{E_{ir}}{\eta_1} e^{-j\beta_1(x\sin\theta_r - z\cos\theta_r)}$

$$\left. \begin{array}{l} E_i = \vec{a}_y E_{io} e^{-j\beta_1(x \sin \theta_i + z \cos \theta_i)} \\ H_i = \frac{E_{io}}{\eta_1} (\vec{a}_x \cos \theta_i + \vec{a}_z \sin \theta_i) e^{-j\beta_1(x \sin \theta_i + z \cos \theta_i)} \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{E}_r = -\vec{a}_y E_{io} e^{-j\beta_1(x \sin \theta_i - z \cos \theta_i)} \\ \vec{H}_r = \frac{-E_{io}}{\eta_1} (\vec{a}_x \cos \theta_i + \vec{a}_z \sin \theta_i) e^{-j\beta_1(x \sin \theta_i - z \cos \theta_i)} \end{array} \right\}$$

## (7) 理想媒质与导体分界面上的入射与反射波

### ① 理想媒质与理想导体交界面

当 $\epsilon_2$ 为理想导体时,  $\eta_2=0$ , 有  $T_{\perp}=T_{\parallel}=-1$ ,  $T_{\perp}=T_{\parallel}=0$ .

导体表面上不存在电场强度主的切向分量, 则没有能量穿过边界.

(a) 垂直极化.

1中的合成电场合成磁场为入射波和反射波之和. 即:

$$\left. \begin{array}{l} \vec{E}_1 = \vec{E}_i + \vec{E}_r = -2j E_{io} \sin(\beta_1 z \cos \theta_i) e^{-j\beta_1 x \sin \theta_i} \vec{a}_y \\ \vec{H}_1 = -2 \frac{E_{io}}{\eta_1} [\cos \theta_i \cos(\beta_1 z \cos \theta_i) \vec{a}_x + j \sin \theta_i \sin(\beta_1 z \cos \theta_i) \vec{a}_z] e^{-j\beta_1 x \sin \theta_i} \end{array} \right.$$

合成波的特点:

○ 合成波沿 $+x$ 方向传播, 为行波. 等相位面为  $x=\text{const}$  平面. 等相位面上不同之处振幅不同. 因此是非均匀波. 沿  $x$  方向的相位常数  $\beta_{1x} = \beta_1 \sin \theta_i$ .

$$\text{波长 } \lambda_{1x} = \frac{2\pi}{\beta_{1x}} = \frac{\lambda_1}{\sin \theta_i}. \quad \text{相速 } v_{p1x} = \frac{\omega}{\beta_{1x}} = \frac{\nu_1}{\sin \theta_i} \geq v_1. \quad (v_1 = \frac{1}{\sqrt{\mu_1 \epsilon_1}} \text{ 为媒质1中光速})$$

$v_{p1x}$  不在  $x$  方向观察时合成波的视速度, 不是能量的传播速度.

○ 合成波沿  $y$  方向形成驻波.

$$E_y \text{ 的零点 (电场波节点)} = \beta_1 z_{\min} \cos \theta_i = -m\pi \Rightarrow z_{\min} = -\frac{m\lambda_1}{2 \cos \theta_i} \quad (m=0, 1, 2, \dots)$$

$$E_y \text{ 的最大点 (电场波腹点)} = \beta_1 z_{\max} \cos \theta_i = -(2m+1)\frac{\pi}{2} \Rightarrow z_{\max} = -\left(\frac{2m+1}{2}\right) \frac{\lambda_1}{2 \cos \theta_i} \quad (m=0, 1, 2, \dots)$$

→ 零点和最大值点位置固定. 随离开导体表面距离增加. 相邻点距离  $\frac{\lambda_1}{2 \cos \theta_i}$

○ 合成波的传播方向上没有电场分量 (电场只有横向分量  $E_y$ ). 为横电波 (TE 波).

### (b) 平行极化.

1 中合成波的电场和磁场分量为:

$$\left. \begin{array}{l} \vec{E}_1 = -2 E_{io} [j \cos \theta_i \sin(\beta_1 z \cos \theta_i) \vec{a}_x + \sin \theta_i \cos(\beta_1 z \cos \theta_i) \vec{a}_z] e^{-j\beta_1 x \sin \theta_i} \\ \vec{H}_1 = 2 \frac{E_{io}}{\eta_1} \cos(\beta_1 z \cos \theta_i) e^{-j\beta_1 x \sin \theta_i} \vec{a}_y \end{array} \right.$$

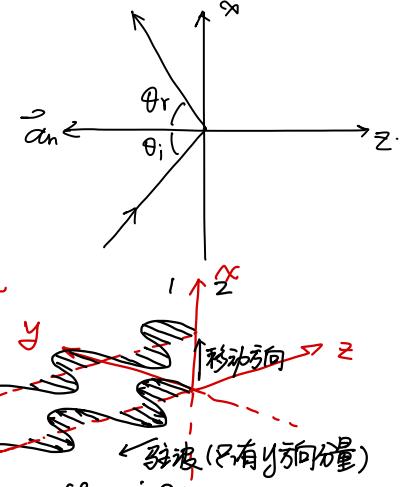
合成波的特点: (见 P192).

○ 合成波在  $y$  方向有线驻波. 沿  $x$  方向为行波. 所以沿  $x$  轴方向传播功率沿  $y$  方向传播功率.

$$\text{相速 } v_{p1x} = \frac{\omega}{\beta_{1x}} = \frac{\nu_1}{\sin \theta_i} > v_1. \quad E_x \text{ 零点位置: } \beta_1 z_{\min} \cos \theta_i = -m\pi \Rightarrow z_{\min} = -\frac{m\lambda_1}{2 \cos \theta_i} \quad (m=0, 1, 2, \dots)$$

○ 合成波沿传播方向无磁场分量. 磁场只有横向分量  $H_y$ . 为横磁波 (TM<sub>x</sub> 波).

在  $z_{\min}$  的位置放置导体薄板不会破坏场分布  $\Rightarrow$  则两平行导体平面间可传播 TM<sub>x</sub> 波.



② 平面波在两种理想媒质交界面反射、透射的分析结果，也适用于两种或其中一种媒质为导电媒质的情况。此时本征阻抗为复本征阻抗，反射透射系数为复数。

### 18) 全反射 & 全透射。

① 全反射：根据 Snell 折射定律  $\frac{\sin\theta_i}{\sin\theta_t} = \frac{n_2}{n_1} = \sqrt{\frac{\mu_2\epsilon_2}{\mu_1\epsilon_1}}$

若平面波从光疏媒质到光密媒质，即  $n_2 > n_1$ ,  $\sin\theta_i > \sin\theta_t$ . 此时有  $\sin\theta_t < 1$ . 即  $\theta_t < 90^\circ$ .

若平面波从光密媒质到光疏媒质，即  $n_1 > n_2$ ,  $\sin\theta_i \leq \sin\theta_t$ .

则存在一种情况下  $\sin\theta_t = 1$ . 此时  $\theta_t = \frac{\pi}{2}$ .  $\Rightarrow$  全反射，这时的入射角为  $\theta_c$  (临界角)。

此时有  $\sin\theta_i = \sin\theta_c = \frac{n_2}{n_1} = \sqrt{\frac{\mu_2\epsilon_2}{\mu_1\epsilon_1}} \Rightarrow \theta_c = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right)$ .

当  $\theta_i > \theta_c$  时,  $\sin\theta_t = \frac{n_1}{n_2} \sin\theta_i > 1$ .  $\Rightarrow \theta_t$  不存在实数解。

此时可推出  $\cos\theta_t = -j\sqrt{\frac{n_2^2}{n_1^2} \sin^2\theta_i - 1} = -jA$ . 平行极化和垂直极化下的反射系数有不同的表达式：

$$\text{反射系数 } \Gamma_{\perp} = \frac{n_2 \cos\theta_i - n_1 \cos\theta_t}{n_2 \cos\theta_i + n_1 \cos\theta_t} = \frac{n_2 \cos\theta_i + jn_1 A}{n_2 \cos\theta_i - jn_1 A} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{易知分子分母共轭.} \\ \text{且 } |\Gamma_{\perp}| = |\Gamma_{\parallel}| = 1 \end{array} \right.$$

$$\Gamma_{\parallel} = \frac{n_2 \cos\theta_t - n_1 \cos\theta_i}{n_2 \cos\theta_t + n_1 \cos\theta_i} = \frac{-jA n_2 - n_1 \cos\theta_i}{-jA n_2 + n_1 \cos\theta_i} \quad \Downarrow$$

入射波在交界面上发生全反射。

⇒ 反射波振幅等于入射波振幅

$$\text{而透射系数: } \left\{ \begin{array}{l} \Gamma_{\perp} = \frac{2n_2 \cos\theta_i}{n_2 \cos\theta_i + n_1 \cos\theta_t} = \frac{2n_2 \cos\theta_i}{n_2 \cos\theta_i - jn_1 A} \\ \Gamma_{\parallel} = \frac{2n_2 \cos\theta_i}{n_2 \cos\theta_t + n_1 \cos\theta_i} = \frac{2n_2 \cos\theta_i}{-jA n_2 + n_1 \cos\theta_i} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{表明入射波虽发生全反射} \\ \text{但透射波功率并不0.} \end{array} \right.$$

⇒ 透射波不再是均匀平面波，随着增加（离交界面越远），透射波场的幅度按指数规律减小，相应不恒定变化，这是衰变波。由于衰变透射波集中在交界面附近，这是表面波。其相移常数为  $\beta_{2x} > k_2 (= \omega\sqrt{\mu_2\epsilon_2})$ ，表明这是慢波 (P96)

透射波电磁场表达式：

$$\vec{E}_t = E_{io} \Gamma_{\perp} e^{-\alpha_2 x} e^{-j\beta_{2x} x} \hat{a}_y$$

$$\vec{H}_t = \frac{E_{io} \Gamma_{\perp}}{n_2} e^{-\alpha_2 x} e^{-j\beta_{2x} x} (jA \hat{a}_x + \sin\theta_i \hat{a}_z).$$

$\beta_2 = k_2 = \omega\sqrt{\mu_2\epsilon_2}$   
在媒质2中无界  
空间中的相速

$$\left\{ \alpha_2 = \beta_2 A = \beta_2 \sqrt{\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \sin^2\theta_i - 1} \right.$$

相速常数

$$\beta_{2x} = \beta_2 \sin\theta_i = \beta_2 \frac{n_1}{n_2} \sin\theta_i = \frac{n_1}{n_2} (\beta_2 \sin\theta_i) = \frac{n_1}{n_2} \cdot k_2 > k_2$$

前面分析只考虑了稳态，透射场来离子静态过程。

②全透射。 $\Rightarrow$ 发生全反射与入射电场的极化特性无关。发生全透射的条件与波的极化特性有关。发生全透射时的入射角称为 Brewster 角。 $\Rightarrow \theta_B$ 。

○垂直极化。该情况下的反射系数  $T_{\perp}$  应等于 0 (没有反射)。即： $\eta_1, \eta_2$  本征阻抗。

$$T_{\perp} = \frac{\eta_2 \cos \theta_i - \eta_1 \cos \theta_t}{\eta_2 \cos \theta_i + \eta_1 \cos \theta_t} = 0 \quad \text{及} \quad \theta_i = \theta_{BL} \quad \text{解得: } \eta_2 \cos \theta_{BL} = \eta_1 \cos \theta_t$$

由 Snell 定律有  $\frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_t} = \frac{n_2}{n_1}$ 。但  $\cos \theta_t = \sqrt{1 - \sin^2 \theta_t} = \sqrt{1 - (\frac{n_1}{n_2})^2 \sin^2 \theta_i}$ ，代入上式得：

$$\sin^2 \theta_{BL} = \frac{1 - \frac{\mu_1 \epsilon_2}{\mu_2 \epsilon_1}}{1 - (\frac{\mu_1}{\mu_2})^2} \Rightarrow \begin{cases} \text{非磁性介质} = \mu_1 = \mu_2 = \mu_0, \theta_{BL} \text{不存在.} \\ \epsilon_1 = \epsilon_2, \mu_1 \neq \mu_2 \text{ 时: } \sin \theta_{BL} = \sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_1 + \mu_2}}, \Rightarrow \theta_{BL} = \arctan \left( \frac{\mu_2}{\mu_1} \right) \end{cases}$$

↓

△ 当垂直极化波入射到两种不同(电介质)界面上，任何入射角上都有反射而不会发生全透射。  
两种相同的磁介质同样不存在  $\theta_{BL}$ ，只有两种不同的磁介质才存在  $\theta_{BL}$ 。

○ 平行极化：

$$T_{||} = \frac{\eta_2 \cos \theta_i - \eta_1 \cos \theta_t}{\eta_2 \cos \theta_t + \eta_1 \cos \theta_i} = 0 \quad \text{及} \quad \theta_i = \theta_{BII} \quad \text{解得: } \eta_1 \cos \theta_{BII} = \eta_2 \cos \theta_t.$$

由 Snell 定律有  $\frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_t} = \frac{n_2}{n_1}$ ，但  $\cos \theta_t = \sqrt{1 - \frac{n_1^2}{n_2^2} \sin^2 \theta_{BII}}$ ，代入上式得：

$$\sin^2 \theta_{BII} = \frac{1 - \frac{\mu_2 \epsilon_1}{\mu_1 \epsilon_2}}{1 - (\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2})^2} \Rightarrow \begin{cases} \epsilon_1 = \epsilon_2 = \theta_{BII} \text{ 不存在.} \\ \text{非磁性介质} = \epsilon_1 \neq \epsilon_2, \mu_1 = \mu_2 = \mu_0. \end{cases}$$
$$\theta_{BII} = \arcsin \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2}} = \arctan \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}}.$$

△ 两种相同的电介质， $\theta_{BII}$  不存在，只有两种不同的电介质，才存在  $\theta_{BII}$ 。

↓

△ 两种理想介质界面上的斜入射。

$\Rightarrow$  当均匀平面波以  $\theta_B$  入射到两种不同电介质 ( $\epsilon_1 \neq \epsilon_2, \mu_1 = \mu_2$ ) 分界面。  
反射波只有垂直极化分量。

$\Rightarrow$  当均匀平面波以  $\theta_B$  入射到两种不同磁介质 ( $\epsilon_1 = \epsilon_2, \mu_1 \neq \mu_2$ ) 分界面。  
反射波只有平行极化分量。

$\Rightarrow$  当圆极化以  $\theta_B$  入射到两种不同电介质 ( $\epsilon_1 \neq \epsilon_2, \mu_1 = \mu_2$ ) 分界面，反射波为线性化波。  
透射波为椭圆极化波 且反射角

(9) 两种理想介质平面交界面上垂直入射.

⇒ 平面波的入射方向与交界面法向重合, 无论定义入射平面.

也不区分垂直极化和平行极化.

设入射波主极化方向为  $x$  正向, 由分界面处电场切向分量连续, 则反射波和透射波电场方向也为  $x$  正向

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{入射波: } \vec{E}_i = \vec{a}_x E_{i0} e^{-j\beta_1 z}, \quad \vec{H}_i = \frac{1}{\eta_1} (\vec{a}_z \times \vec{E}_i) = \vec{a}_y \frac{E_{i0}}{\eta_1} e^{-j\beta_1 z}, \\ \text{反射波: } \vec{E}_r = \vec{a}_x (T E_{i0}) e^{j\beta_1 z}, \quad \vec{H}_r = \frac{1}{\eta_1} [(-\vec{a}_z) \times \vec{E}_r] = -\vec{a}_y \frac{T E_{i0}}{\eta_1} e^{j\beta_1 z}. \\ \text{透射波: } \vec{E}_t = \vec{a}_x (T E_{i0}) e^{-j\beta_2 z}, \quad \vec{H}_t = \frac{1}{\eta_2} [\vec{a}_z \times \vec{E}_t] = \vec{a}_y \frac{T E_{i0}}{\eta_2} e^{-j\beta_2 z}. \end{array} \right.$$

其中  $E_0, H_0$  为各圆切量的复振幅,  $\eta_1 = \sqrt{\mu_1/\epsilon_1}$ ,  $\eta_2 = \sqrt{\mu_2/\epsilon_2}$  为媒质本征阻抗.

$\beta_1 = \omega \sqrt{\mu_1 \epsilon_1} = \frac{2\pi}{\lambda_1}$ ,  $\beta_2 = \omega \sqrt{\mu_2 \epsilon_2} = \frac{2\pi}{\lambda_2}$  为媒质中波的波数.

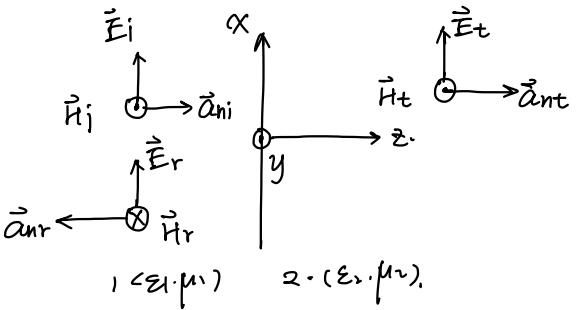
可得 1 中总电磁场复矢量为:  $\left\{ \begin{array}{l} \vec{E} = \vec{E}_i + \vec{E}_r = E_{i0} e^{-j\beta_1 z} \vec{a}_x + E_{r0} e^{j\beta_1 z} \vec{a}_x \\ \vec{H}_1 = \vec{H}_i + \vec{H}_r = \frac{1}{\eta_1} (E_{i0} e^{-j\beta_1 z} - E_{r0} e^{j\beta_1 z}) \vec{a}_y. \end{array} \right.$

由交界面电场和磁场切向分量连续:  $\left\{ \begin{array}{l} E_{i0} + E_{r0} = E_{t0} \\ \frac{E_{i0}}{\eta_1} - \frac{E_{r0}}{\eta_2} = \frac{E_{t0}}{\eta_2} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} T = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} \\ T = \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1} \end{array} \right. \Rightarrow I + T = T$

$T$  和  $I$  也可由连接方程得到:

$$\left\{ \begin{array}{l} T_{\perp} = \frac{\eta_2 \cos \theta_i - \eta_1 \cos \theta_t}{\eta_2 \cos \theta_i + \eta_1 \cos \theta_t} \\ T_{\parallel} = \frac{2\eta_2 \cos \theta_i}{\eta_2 \cos \theta_i + \eta_1 \cos \theta_t} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} T_{\perp} = \frac{\eta_2 \cos \theta_t - \eta_1 \cos \theta_i}{\eta_2 \cos \theta_t + \eta_1 \cos \theta_i} \\ T_{\parallel} = \frac{2\eta_2 \cos \theta_i}{\eta_2 \cos \theta_t + \eta_1 \cos \theta_i} \end{array} \right. \quad \theta_i = \underline{\theta_t}.$$

对非磁性介质 ( $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$ ):  $T = \frac{1 - \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}}}{1 + \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}}} \cdot I = \frac{2}{1 + \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}}}$



媒质中合成电磁场强度的复矢量 = 行波 + 强波

$$\vec{E}_1 = E_{i0} (e^{-j\beta_1 z} + \Gamma e^{j\beta_1 z}) \hat{a}_x = E_{i0} [(1+\Gamma) e^{-j\beta_1 z} + j2\Gamma \sin(\beta_1 z)]$$

$$\vec{H}_1 = \hat{a}_y \frac{E_{i0}}{\eta_1} (e^{-j\beta_1 z} - \Gamma e^{j\beta_1 z}) = \hat{a}_y \frac{E_{i0}}{\eta_1} [(1-\Gamma) e^{-j\beta_1 z} - 2\Gamma \cos(\beta_1 z)]$$

第一部分为行波，第二部分为强波  $\Rightarrow$  行强波。

$\hookrightarrow$  反射波振幅比入射波小，反射波的场只与入射波的一部分场形成强波。  
因此波节处振幅不为0，波腹处振幅也不为 $2|E_{i0}|$ 。

对应的瞬时值为：

$$\begin{cases} \vec{E}_1(z,t) = \hat{a}_x E_{i0} [(1+\Gamma) \cos(\omega t - \beta_1 z) + 2\Gamma \sin(\beta_1 z) \sin(\omega t)] \\ \vec{H}_1(z,t) = \hat{a}_y \frac{E_{i0}}{\eta_1} [(1-\Gamma) \cos(\omega t - \beta_1 z) - 2\Gamma \cos(\beta_1 z) \cos(\omega t)] \end{cases}$$

媒质中的两个行波（入射波与反射波）相互叠加形成驻波

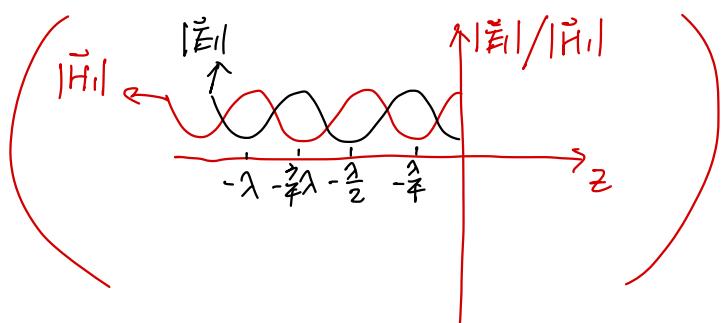
① 电场强度波节点（磁场强度波腹点） $\Rightarrow$  入射波与反射波相位相反，合成电场为极小值。

电场强度波腹点（磁场强度波节点） $\Rightarrow$  入射波与反射波相位相同，合成电场为极大值。

$$\vec{E}_1 = \hat{a}_x E_{i0} (e^{-j\beta_1 z} + \Gamma e^{j\beta_1 z}) \Rightarrow \begin{cases} E_{max} = (1+|\Gamma|) E_{i0}, \quad z = -\frac{m}{2}\lambda_1, m=0,1,2,\dots \\ E_{min} = (1-|\Gamma|) E_{i0}, \quad z = -\frac{(2m+1)}{4}\lambda_1, m=0,1,2,\dots \end{cases} \quad (P17b)$$

为反映驻波成分的大小，定义电场强度振幅极大值与极小值之比为电场的驻波系数 $\rho$ 。

$$\Rightarrow \rho = \frac{|E|_{max}}{|E|_{min}} = \frac{1+|\Gamma|}{1-|\Gamma|} \quad \text{由于 } 0 \leq |\Gamma| \leq 1, \text{ 则 } 1 \leq \rho \leq \infty.$$



⇒ 媒质1中向正z方向传播的平均(传输)功率流密度等于入射波的平均功率流密度减去反射波的功率流密度.

$$(\vec{S}_i)_{av} = \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{2} (\vec{E}_i \times \vec{H}_i^*) \right] = (\vec{S}_i)_{av} (1 - |\Gamma|^2).$$

$$\text{入射} = (\vec{S}_i)_{av} = \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{2} (\vec{E}_i \times \vec{H}_i^*) \right] = \frac{|\vec{E}_{i0}|^2}{2\eta_1} \hat{a}_z.$$

$$\text{反射} = (\vec{S}_r)_{av} = \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{2} (\vec{E}_r \times \vec{H}_r^*) \right] = -|\Gamma|^2 \cdot \frac{|\vec{E}_{i0}|^2}{2\eta_1} \hat{a}_z = -|\Gamma|^2 (\vec{S}_i)_{av}$$

⇒ 易得  $(\vec{S}_i)_{av} = (\vec{S}_2)_{av}$ , 即  $(1 - |\Gamma|^2 = \frac{\eta_1}{\eta_2} |\Gamma|^2)$  符合能量守恒定律.

但有  $\vec{S}_i + \vec{S}_r \neq \vec{S}_2$ .

⇒ 垂直入射情况下的功率反射系数  $R$  和功率透射系数  $\tau$ :

$$R = \frac{(S_r)_{av}}{(S_i)_{av}} = \left| \frac{E_{r0}}{E_{i0}} \right|^2 = |\Gamma|^2 \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} R = \tau$$

$$\tau = \frac{(S_t)_{av}}{(S_i)_{av}} = \left| \frac{E_{t0}}{E_{i0}} \right|^2 = \frac{\eta_1}{\eta_2} |\Gamma|^2.$$

⇒ 媒质1和媒质2区域通过单位横截面( $xoy$ )的平均功率:

$$\begin{aligned} P_1 &= \operatorname{Re} [(\vec{S}_i)_{av} \cdot \hat{a}_z] = \frac{|\vec{E}_{i0}|^2}{2\eta_1} (1 - |\Gamma|^2) \\ P_2 &= \operatorname{Re} [(\vec{S}_2)_{av} \cdot \hat{a}_z] = \frac{\eta_1}{\eta_2} |\Gamma|^2 (S_i)_{av} \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} P_1 = P_2, P_i + P_r = P_2. \Rightarrow \eta_2^2 \frac{\eta_1}{\eta_2} |\Gamma|^2 \end{array} \right\}$$

(10) 理想介质与理想导体平面交界面上垂直入射.

由于2是理想导体, 那  $\eta_2 = 0$ . 则  $T = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} = -1$ .  $T = \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1} = 0$ .

由  $E_{r0} = T E_{i0} = -E_{i0}$ .  $\Rightarrow$  反射波与入射波振幅相等, 相位相差  $\pi$ .

媒质1中合成电磁波的复矢量为:

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{E}_1 = \vec{a}_x E_{i0} [(1+T)e^{-j\beta_1 z} + j2T \sin(\beta_1 z)] = -\vec{a}_x j2E_{i0} \sin(\beta_1 z) \\ \vec{H}_1 = \vec{a}_y \frac{E_{i0}}{\eta_1} [(1+T)e^{-j\beta_1 z} - 2T \cos(\beta_1 z)] = \vec{a}_y \frac{2E_{i0}}{\eta_1} \cos(\beta_1 z) \end{array} \right. \Rightarrow \text{只有驻波, 没有行波}$$

对应的瞬时值:

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{E}_1(z, t) = \operatorname{Re}[\vec{E}_1(z) e^{j\omega t}] = \vec{a}_x 2E_{i0} \sin(\beta_1 z) \sin \omega t \\ \vec{H}_1(z, t) = \operatorname{Re}[\vec{H}_1(z) e^{j\omega t}] = \vec{a}_y \frac{2E_{i0}}{\eta_1} \cos(\beta_1 z) \cos \omega t. \end{array} \right.$$

$\Rightarrow$  媒质1中的合成波为纯驻波.  $E_{\min} = 0$   $E_{\max} = 2E_{i0}$   $H_{\min} = 0$ .  $H_{\max} = \frac{2E_{i0}}{\eta_1}$

$$\downarrow z = -\frac{(2m+1)}{4}\lambda_1 \text{ 时为 } E_{\max}, H_{\min}. \quad \downarrow z = -\frac{m}{2}\lambda_1 \text{ 时为 } E_{\min}, H_{\max}. \quad m=0, 1, 2, \dots$$

$$\sin \beta_1 z = \pm 1 (\beta_1 z = -\frac{2m+1}{2}\pi)$$

$$\sin \beta_1 z = 0 (\beta_1 z = -n\pi)$$

相邻波节与波腹点之间相距  $\frac{\lambda_1}{4}$ ,  $\vec{E}_1, \vec{H}_1$  在时间上有  $\frac{\pi}{2}$  相移.

$\Rightarrow$  合成波的平均能流密度矢量  $= \vec{S}_{av} = 0$ .

纯驻波时, 没有能量传输过程. 仅在波节与波腹之间有能量交换  $\Rightarrow$  能耗.

(11) 多层介质表面的垂直入射.

① 平面波从空气中射入 $z=0$ 处的空气-土壤界面上，入射波： $\vec{E}_i = \vec{a}_y/100 \cos(\omega t - \pi x - 1.73\pi z)$

土壤为相对介电常数为 $\epsilon_r = 4$ 的无耗介质，和？

① 空气和土壤中电磁波波长、相移常数 $\beta_1, \beta_2$ 、入射角 $\theta_i$ 、透射角 $\theta_t$ 。

② 空气和土壤中电场强度表达式瞬时。

③ 土壤中透射波的平均功率密度模值。

$$\Rightarrow ① k = \sqrt{k_x^2 + k_z^2} > 2\pi, \text{ 空气中: } \lambda_1 = \lambda_0 = \frac{2\pi}{k} = 1 \text{ m. 土壤中: } \lambda_2 = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\epsilon_r}} = \frac{1}{2} \text{ m. } \tan \theta_i = \frac{E_y}{E_z}$$

$$\beta_1 = 2\pi, \quad \beta_2 = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon} = \beta_1 \cdot \sqrt{\epsilon_r} = 4\pi.$$

$$\text{由下} \vec{k} = \pi \vec{a}_x - 1.73\pi \vec{a}_z \text{ 得入射角 } \theta_i = \arctan \frac{k_x}{k_z} = 30^\circ. \Delta \text{ 由加强表达式求入射角}$$

$$\text{由 } \frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_t} = \sqrt{\frac{\mu_2 \epsilon_2}{\mu_1 \epsilon_1}} = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}} = \sqrt{\epsilon_r} = 2. \text{ 得: } \theta_t = \arcsin \frac{1}{2} = 14.5^\circ. \text{ (波和图对应)}$$

② 反身波：传播方向 $\vec{a}_n = \sin \theta_i \vec{a}_x - \cos \theta_i \vec{a}_z = \frac{1}{2} \vec{a}_x - \frac{\sqrt{3}}{2} \vec{a}_z$ .

$$(\text{垂直极化}) \quad \text{反射系数} \Gamma_{\perp} = \frac{\cos \theta_i - \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}} - \sin \theta_i}{\cos \theta_i + \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}} - \sin \theta_i} = -0.38. \quad \text{透射系数} \Gamma_{\perp} = 1 + \Gamma_{\perp} = 0.62$$

$$\text{空气中: } \vec{E}_i = \vec{E}_i + \vec{E}_r = \vec{a}_y E_{i0} e^{-j(\pi x + 1.73\pi z)} + \vec{a}_y T_{\perp} E_{i0} e^{-j\beta_1 (\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}z)}$$

$$= \vec{a}_y [0.62 e^{-j(\pi x + 1.73\pi z)} - 0.38 e^{-j(\pi x - 1.73\pi z)}] \text{ (V/m).}$$

$$\text{又有 } \omega = 2\pi f = 2\pi \frac{c}{\lambda} = 6\pi \times 10^8 \text{ rad/s.}$$

$$\Rightarrow \vec{E}_i = \vec{a}_y [100 \cos(6\pi \times 10^8 t - \pi x - 1.73\pi z) - 38 \cos(6\pi \times 10^8 t - \pi x + 1.73\pi z)] \text{ (V/m)}$$

透射波：传播方向 $\vec{a}_n = \sin \theta_t \vec{a}_x + \cos \theta_t \vec{a}_z = 0.25 \vec{a}_x + 0.97 \vec{a}_z$ .

$$\text{土壤中: } \vec{E}_2 = \vec{E}_t = \vec{a}_y T_{\perp} E_{i0} e^{-j\beta_2 (0.25x + 0.97z)} = \vec{a}_y b_2 e^{-j(6\pi x + 1.73z)}$$

$$\Rightarrow \vec{E}_2 = \vec{a}_y b_2 \cos(6\pi x + 10^8 t - \pi x - 1.73z) \text{ (V/m). } \Delta \text{ 在入射波与透射波中 } \omega \text{ 不变.}$$

$$③ \text{ 土壤中: } (\eta_2 = \frac{\eta_0}{\sqrt{\epsilon_r}}) = \frac{120\pi}{2} = 60\pi$$

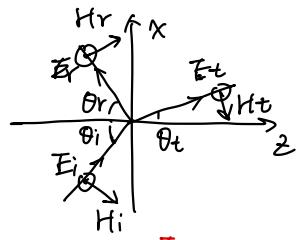
$$(S_t)_{av} = |(\vec{S})_{av}| = |\vec{a}_{nt} \frac{|E_{t0}|^2}{2\eta_2}| = \frac{|E_{t0}|^2}{2\eta_2} = \frac{b_2^2}{2 \times 60\pi} = 10.2 \text{ W/m}^2.$$

④ 空气中，波长为12m，进入无耗媒质后波长为8m，且媒质中振幅为 $8\pi \text{ V/m}$ 和 $0.1 \text{ A/m}$ .

问其介电常数 $\epsilon_r$ ， $\mu_r$ ？

$$\Rightarrow \epsilon_r = \left(\frac{\lambda_0}{\lambda}\right)^2 = \left(\frac{12}{8}\right)^2 = \frac{9}{4}, \quad \eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \cdot \sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}} = 120\pi \cdot \frac{2}{3} \sqrt{\mu_r} = 80\pi \sqrt{\mu_r} = \frac{8\pi}{0.1} = 80\pi$$

$$\text{所以 } \mu_r = 1.$$

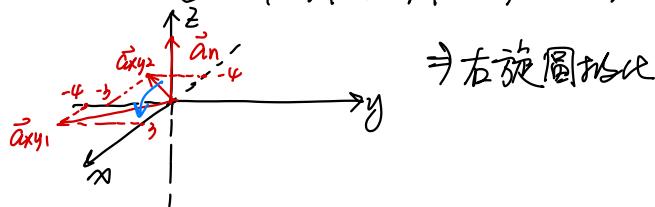


- 微波炉输出 $2.5\text{GHz}$ 微波，该频率上牛排等效介电常数为 $\epsilon' = 4\epsilon_0$ ,  $\tan \delta_e = 0.3$
- (a) 微波侵入牛排的透射深度，牛排肉8mm处场强是场强的百分比 $\%?$
- (b)  $\epsilon_s = \epsilon' = 1.03\epsilon_0$ ,  $\tan \delta_e = 0.3 \times 10^{-4}$ . 盘子什么不会被烧掉？

~~已知~~  $E = [\vec{E}_{xy1} - j\vec{E}_{xy2}] e^{-jBz}$ . 判断极化状态.

$$\Rightarrow \vec{E}_{xy1} = \vec{E}_{xy2} \quad |E_{xy1}| = |E_{xy2}|, E_{xy2} = jE_{xy1}$$

建坐标系:

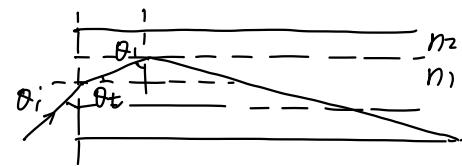


- 要使光波从空气进入光纤芯线后，在芯线和包层分界面上发生全反射，确定入射角的最小值 (P39).

$\Rightarrow$  发生全反射的条件为  $\theta_i \geq \theta_c = \arcsin \frac{n_2}{n_1}$ . 那  $\sin \theta_i \geq \sin \theta_c = \frac{n_2}{n_1}$

$\Rightarrow \sin \theta_i = \cos \theta_t$ , 且  $\sin \theta_t = n_1 \sqrt{1 - \cos^2 \theta_t} = n_1 \sqrt{1 - \sin^2 \theta_i}$ .

$$n_1 \sin \theta_i \leq n_1 \sqrt{1 - \sin^2 \theta_c} = n_1 \sqrt{1 - (\frac{n_2}{n_1})^2} \Rightarrow \theta_i \leq \arcsin \sqrt{n_1^2 - n_2^2}$$



- ~~○~~ 一圆极化波以入射角  $\theta_i = \frac{\pi}{3}$  从媒质1(参数  $\mu = \mu_0, \epsilon = 4\epsilon_0$ )射入射至空气. 此时反射波是什么样的? (P40)

$$\Rightarrow \text{临界角 } \theta_c = \arcsin \frac{n_2}{n_1} = \arcsin \frac{\sqrt{\epsilon_0}}{\sqrt{\epsilon_0}} = \frac{\pi}{6}$$

$\theta_i = \frac{\pi}{3} > \theta_c$  时发生全反射. 圆极化波分解为平行极化和垂直极化两个线极化波.

虽然反射系数为1. 但相位差不为 $\pm \frac{\pi}{2}$ . 所以有椭圆极化

$$\Rightarrow \mu_1 = \mu_2$$

- ~~○~~ 一线极化平面波由自由空间入射到介质( $\epsilon_r = 4, \mu_r = 1$ )分界面上. 入射波电场与入射面夹角为 $45^\circ$ .

(1) 反射波只有垂直极化波时的入射角  $\theta_i$ . (2) 此时反射波的实功率是入射波的百分比?

$$\Rightarrow (1) \text{ 平行极化分量全透射: } \theta_{\text{透射}} = \arctan \sqrt{\frac{\epsilon_r}{\epsilon_0}} = \arctan 2 = 63.455^\circ$$

$$(2) \Rightarrow \cos \theta_B = \frac{1}{\sqrt{5}}, \sin \theta_B = \frac{1}{\sqrt{5}}, \cos \theta_t = \sqrt{1 - \sin^2 \theta_t} = \sqrt{1 - (\sin \theta_B)^2} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\eta_2 = \frac{\eta_0}{\sqrt{\epsilon_r}} = \frac{\eta_0}{2}$$

$$\text{此时反射系数 } \Gamma_\perp = \frac{\eta_2 \cos \theta_i - \eta_1 \cos \theta_t}{\eta_2 \cos \theta_i + \eta_1 \cos \theta_t} = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{S_{r\perp}^{\text{av}}}{S_i^{\text{av}}} = \frac{S_{r\perp}}{S_i} = \frac{(\Gamma_\perp \epsilon_0)^2}{2\eta_2} = \frac{1}{2} (\Gamma_\perp)^2 = 18\%$$

此时计算垂直极化分量.

反射系数

均匀平面电磁波由空气斜入射到理想导体表面( $\epsilon=0$ ). 入射波电场强度:

$$\vec{E}_i = (\vec{a}_x - \vec{a}_z + \vec{a}_y j\sqrt{2}) E_{i0} e^{-j(\pi x + Az)} \text{ (V/m).}$$

求(1)常数A. 波长. 入射波传播方向的单位矢量  $\vec{a}_{ni}$ . B. 入射角.

(2)反射波电场强度复数表达式. (3)入射波和反射波极化形式

$$\Rightarrow (1) \vec{E} = \vec{a}_x - \vec{a}_z + \vec{a}_y j\sqrt{2}, \vec{k} = \pi \vec{a}_x + A \vec{a}_z. \text{ 由 } \vec{E} \cdot \vec{k} = 0 \text{ 得: } A = \pi$$

$$k = \sqrt{k_x^2 + k_z^2} = \sqrt{2}\pi, \lambda = \frac{2\pi}{k} = \sqrt{2} \text{ m. } \vec{a}_{ni} = \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{a}_x + \vec{a}_z)$$

$$\text{入射角: } \theta_i = \arctan \frac{k_x}{k_z} = \arctan \frac{\pi}{\pi} = \frac{\pi}{4}.$$

$$(2) 平行极化分量: \vec{E}_{\parallel} = (\vec{a}_x - \vec{a}_z) E_{i0} e^{-j\pi(x+z)}. 垂直极化分量: \vec{E}_{\perp} = \vec{a}_y j\sqrt{2} E_{i0} e^{j\pi(x+z)}$$

$$\text{水平垂直极化: } \vec{E}_{\perp r} = \vec{a}_y E_{\perp r} e^{-j\pi(x-z)} = \vec{a}_y (\Gamma_{\perp} E_{\perp i0}) e^{-j\pi(x-z)} = -\vec{a}_y j\sqrt{2} E_{i0} e^{-j\pi(x-z)}$$

$$\text{水平平行极化: } \vec{E}_{\parallel r} = (\Gamma_{\parallel} E_{\parallel i0}) (\vec{a}_x + \vec{a}_z) e^{-j\pi(x-z)} = -(\vec{a}_z + \vec{a}_x) E_{i0} e^{-j\pi(x-z)}$$

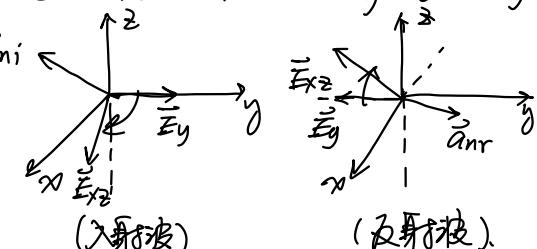
→ 套前面的公式. 注意 符号!!!

$$\text{则 } \vec{E}_r = -(\vec{a}_z + \vec{a}_x + \vec{a}_y j\sqrt{2}) E_{i0} e^{-j\pi(x-z)} \text{ (V/m)}$$

$$(3) \text{入射波: 传播方向 } \vec{a}_{ni} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{a}_x + \vec{a}_z), \text{ 极化分量: } \vec{E}_{xz} = \vec{a}_x - \vec{a}_z, \vec{E}_y = j\sqrt{2} \vec{a}_y.$$

由坐标系中可知为左旋圆极化波.

反射波: 右旋圆极化波



$$(1) \text{一右旋极化波的电场强度复数为: } \vec{E}_i = (\vec{a}_x - j\vec{a}_y) E_0 e^{-j\beta z}.$$

由空气向一理想介质 ( $\epsilon = 4\epsilon_0, \mu = \mu_0$ ) 平面 ( $z=0$ ) 垂直入射.

(1) 求反射波和透射波电场强度复数表达式

(2) 求反射波和透射波相对于入射波的平均功率密度值.

$$\Rightarrow (1) \eta_1 = \eta_0, \eta_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = \frac{\eta_0}{\sqrt{\epsilon_r}} = \frac{1}{2} \eta_0. \Rightarrow \Gamma = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} = -\frac{1}{3}. T = \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1} = \frac{2}{3}.$$

$$\beta_1 = w\sqrt{\mu_0 \epsilon_0} = \beta, \beta_2 = w\sqrt{\mu \epsilon} = w\sqrt{\mu_0 \epsilon_0} \cdot \sqrt{\epsilon_r} = 2\beta.$$

$$\text{则 } \vec{E}_r = (j\vec{a}_y - \vec{a}_x) \frac{E_0}{3} e^{-j\beta z}, \vec{E}_t = (\vec{a}_x - j\vec{a}_y) \frac{2E_0}{3} e^{-j2\beta z}$$

$$(2) \frac{(S_r)_{av}}{(S_i)_{av}} = \frac{\frac{E_0^2}{2\eta_1}}{\frac{E_{i0}^2}{2\eta_1}} = |\Gamma|^2 = \frac{1}{9}. \quad \frac{(S_t)_{av}}{(S_i)_{av}} = \frac{\frac{E_{t0}^2}{2\eta_2}}{\frac{E_{i0}^2}{2\eta_1}} = \frac{8}{9}.$$

- 厚度为1mm的介质雷达有一个( $\epsilon_r=2.25$ ,  $\mu_r=1$ )的介电板罩. 介电损耗为0.1, 直入射到上面的电磁波不发生反射.  
 $\Rightarrow f=10\text{GHz}$ .  $\lambda_0 = \frac{c}{f} = \frac{300}{10} = 0.03\text{m}$ .  $\lambda = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\epsilon_r}} = 0.02\text{m}$ .  $d = \frac{\lambda}{2} = 0.01\text{m}$ .

- 在半无限大的玻璃块平面上涂一层薄膜以消除红外线( $\lambda_0 = 0.75\mu\text{m}$ )的反射. 已知玻璃与薄膜均为理想介质, 且玻璃相对介电常数为6.25.  
(1) 求薄膜相对介电常数 $\epsilon_r$ 与厚度 $d$ .

→ 波沿传播方向与传播方向平行.

- (题1) 设自由空间中有一电场复矢量  $\vec{E} = E_0 e^{-jkx} \hat{a}_x$ . ① 它是否满足自由空间的齐次亥姆霍兹方程?  
② 它是否可代表自由空间中存在场的电磁波. 为什么?

解: 将  $\vec{E} = \hat{a}_x E_0 e^{-jkx}$  代入亥姆霍兹方程:  $\nabla^2 \vec{E} + k^2 \vec{E} = 0$  得:

$$\nabla^2 \vec{E} + k^2 \vec{E} = \frac{d^2 \vec{E}_x}{dx^2} + k^2 \vec{E}_x = -k^2 E_0 e^{-jkx} + k^2 E_0 e^{-jkx} = 0. \text{ 故此满足方程.}$$

由  $\vec{H} = \frac{1}{j} (\hat{a}_x \times \vec{E}) = 0$ . 知  $\vec{s}_x = 0$ . 传播方向上无能量传输(驻波). 故以不能.

磁感应强度  $H = A/\text{m}$ . 波数  $k = \text{rad}/\text{m}$ .

### (熟练)

- (题6). 在充满理想介质( $\mu_r=1$ )的空间中. 已知一均匀平面波的电磁场强度分布为  $\vec{E}(t)$

$$= 60\pi \cos(\omega t - 0.8y) \hat{a}_z \text{ V/m}, \quad \vec{H}(t) = 2\cos(\omega t - 0.8y) \hat{a}_x \text{ A/m}. \quad \vec{s}_r, \omega.$$

$$\Rightarrow \eta = \frac{|\vec{E}|}{|\vec{H}|} = \frac{60\pi}{2} = 30\pi \Rightarrow \eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_r}} \cdot \sqrt{\frac{I}{E_r}} = 120\pi \cdot \sqrt{\frac{I}{E_r}}, \quad \mu_r \epsilon_r = 16.$$

$$K = 0.8. \quad \text{由 } K = \omega \sqrt{\mu \epsilon} \text{ 得 } \omega = \frac{K}{\sqrt{\mu \epsilon}} = \frac{K}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_r}} = \frac{0.8 \times 3 \times 10^8}{16} = 6 \times 10^7 \text{ rad/m.}$$

$\frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_r}} = C$  不要写反了!!!

- (题6-11). 真空中. 一均匀平面波的电场强度  $\vec{E}(t) = 1.2 \cos[1.2 \times 10^9 \pi t - \pi(3x + \sqrt{3}y + 2\theta)]$  ( $\hat{a}_z - \sqrt{3}\hat{a}_y$ )  $\text{V/m}$ . ① 求此平面波的波长、相移常数、传播方向上的单位矢量. ② 功率密度和电磁场能量密度.

→ 注意后不是1.2. 而是  $1.2 \cdot \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$ .

$$\times \quad \epsilon_0 = \frac{1}{2\pi c} \times 10^{-9}, \quad \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$$

⇒ ① 由题有:  $\vec{k} = 3\pi \vec{a}_x + \sqrt{3}\pi \vec{a}_y + 2\pi \vec{a}_z$ , 且  $k_x = 3\pi$ ,  $k_y = \sqrt{3}\pi$ ,  $k_z = 2\pi$ .

$$k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} = 6\pi, \text{ 且 } \lambda = \frac{2\pi}{k} = 0.5\text{m}, \vec{a}_n = \frac{|\vec{E}|}{|\vec{E}|} = \frac{3}{4}\vec{a}_x + \frac{\sqrt{3}}{4}\vec{a}_y + \frac{1}{2}\vec{a}_z.$$

$$\textcircled{2} \quad \vec{E} = 1.2(\vec{a}_x - \sqrt{3}\vec{a}_y) e^{-j\pi(3x + \sqrt{3}y + 2z)} \Rightarrow \vec{H} = \frac{j}{\eta} \vec{a}_n \times \vec{E} = \frac{1.2}{377} \cdot (\frac{\sqrt{3}}{4}\vec{a}_x - \frac{3}{4}\vec{a}_y - \frac{3\sqrt{3}}{4}\vec{a}_z) e^{-j\pi(3x + \sqrt{3}y + 2z)}$$

$$\text{在空气中: } W_{av} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2 = \frac{1}{2} \times 8.8541 \times 10^{-12} \times 214^2 =$$

$$W_{av} = \frac{1}{2} \epsilon_0 |\vec{E}|^2$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{36\pi} \times 10^{-9} \times E_0^2$$

$$= 2.546 \times 10^{-11} \text{ J/m}^3$$

$$\vec{S}_{av} = \frac{|\vec{E}|^2}{2\eta} \vec{a}_n = \frac{1.2^2 + (1.2\sqrt{3})^2}{2 \times 377} \left( \frac{3}{4}\vec{a}_x + \frac{\sqrt{3}}{4}\vec{a}_y + \frac{1}{2}\vec{a}_z \right)$$

$$= 1.91 \times 10^{-3} (3\vec{a}_x + \sqrt{3}\vec{a}_y + 2\vec{a}_z) \text{ W/m}^2$$

$\Delta \vec{a}_n$  方向是  $\vec{S}_{av}$  的方向.

0(6-13). 一工作频率  $f = 300 \text{ MHz}$  平面波在导电媒质 ( $\epsilon_r = 15, \mu_r = 1, \sigma = 3 \text{ ms/m}$ ) 中沿正 z 方向传播.

已知沿 x 方向极化为主的平面波在  $z=0$  处的场强  $377 \text{ mV/m}$ . ① 求本征阻抗、衰减常数、传播常数、穿透深度、波长、相速. ② 媒质中任意处的  $E$  和  $H$  脉冲表达式和平均功率密度.

注意磁场与脉冲加速度!!!

由本征阻抗计算  $\sigma$

(6-15)

0 已知一平面波的工作频率为  $100 \text{ MHz}$ , 石墨的穿透深度为  $0.6 \text{ mm}$ . 求: ① 石墨的电导率.

② 频率为  $100 \text{ GHz}$  的平面波在石墨中传播多远距离基场的振幅衰减  $20 \text{ dB}$ ?

⇒ 石墨显然属于良导体. 且  $f = 10^8 \text{ Hz}$ ,  $\sigma = \frac{1}{j\omega \mu_0} = 1.6 \times 10^4 \text{ S/m}$ .

$$\text{由物系解得: } \sigma = \frac{1}{j\omega \mu_0} = 9.9 \times 10^4 \text{ S/m.}$$

$$f = 100 \text{ GHz} = 10^{11} \text{ Hz}, \alpha = \sqrt{\mu_0 \sigma} = 1.98 \times 10^5 \text{ Np/m.}$$

$$\text{由 } 20 \lg e^{-\alpha z} = -20 \text{ dB 得: } z = \frac{1}{\alpha} = 11.6 \text{ pm.}$$

⇒  $\alpha = \frac{1}{z} \ln \left| \frac{E_1}{E_2} \right| \text{ (Np/m). } 1 \text{ Np} = 20 \lg e = 8.686 \text{ dB. } 1 \text{ Np} \text{ 表示值下降至 } \frac{1}{e} \text{ 时的距离.}$

$$e^{-\alpha l} = \frac{|E_2|}{|E_1|} = \frac{1}{e}, \text{ 且 } \alpha l = 1.$$

$$\alpha l = \ln \left| \frac{E_1}{E_2} \right| \Rightarrow \underline{NP}. \alpha l = 20 \lg \left| \frac{E_1}{E_2} \right| \Rightarrow \underline{dB} \Rightarrow 20 \lg \left| \frac{E_1}{E_2} \right| = 20 \lg e^{-\alpha l} = -\alpha l.$$

$$\text{下降 } 20 \text{ dB} \text{ 即 } 20 \lg e^{-\alpha z} = \underline{-20}$$

~~?~~

0(6-1) 判断极化.

①  $\vec{E}(t) = 3\cos(\omega t - \beta x - 30^\circ)\vec{a}_x - 4\cos(\omega t - \beta x + 60^\circ)\vec{a}_z$ .

$$\vec{E} = (\vec{a}_y 3e^{-j\frac{\pi}{6}} - \vec{a}_z 4e^{j\frac{\pi}{3}}) e^{-j\beta x}.$$

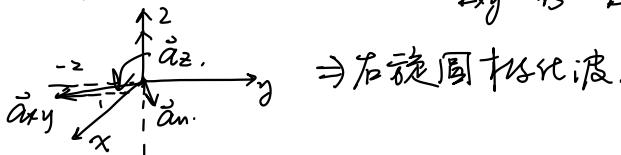
⇒ 直接判断.  $E_{x0} = 3$ ,  $E_{z0} = 4$ . 且  $\vec{a}_x$  超前  $\vec{a}_z$  相位  $\frac{\pi}{2}$ . 传播方向为  $x$ .

$$-\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{2} \text{ 即 } E_{z0} \text{ 超前 } \frac{\pi}{2}. \quad \text{因此是左旋椭圆极化波.}$$

②  $\vec{E} = 2e^{j\frac{\pi}{4}} e^{-j10\pi z} \vec{a}_x - 3e^{-j\frac{\pi}{4}} e^{-j10\pi z} \vec{a}_y$ .

⇒  $E_{x0} = 2$ ,  $E_{z0} = 3$ . 由  $\frac{\pi}{4} - (-\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{2}$  和  $\vec{a}_x$  超前  $(-\vec{a}_y)$   $\frac{\pi}{2}$ . 用右手比可知为左旋椭圆极化波.

③  $\vec{E} = E_0(\vec{a}_x - 2\vec{a}_y + j\vec{a}_z\sqrt{5}) e^{-j\beta_0(2x+y)}$ .  $E_{xy} = \sqrt{5} = E_z$



0(6-4) 一均匀平面波从媒质1(空气)垂直入射到媒质1和媒质2( $\mu_2 = 255/\text{m}$ ,  $\epsilon_{r2} = 2$ ,  $\mu_{r2} = 1$ )的交界面(云母)上. 已知该平面波  $f = 1\text{GHz}$ . 电场极化方向沿  $x$  轴. 电场强度复振幅为  $E_{x0} = 100e^{j0^\circ}\text{V/m}$ . 求入射波. 反射波. 透射波电磁场的瞬时矢量表达式.

空气中,  $k = \frac{2\pi f}{c} = \frac{20}{3}\pi \approx 20.94 \text{ rad/m}$ ,  $\eta_1 = \eta_0 = 120\pi \Omega$ ,  $\frac{\sigma}{\omega\epsilon_2} = 225 \gg 1$  良导体

各参数计算如下

$$\alpha \approx \sqrt{\pi f \mu \sigma} = 100\pi \approx 314.16 \text{ Np/m}$$

$$\beta_s \approx \sqrt{\pi f \mu \sigma} = 100\pi \approx 314.16 \text{ rad/m}$$

$$\eta_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon_{ec}}} = \sqrt{\frac{\mu}{1 - j\frac{\sigma}{\omega}}} = \sqrt{\frac{7200\pi^2}{1 - j225}} = 12.59 + j12.54 = 17.77 \angle 44.87^\circ \Omega$$

复本征阻抗.

反射系数和透射系数

$$\Gamma = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} = -0.9333 + j0.0622 = 0.9354 \angle 176.19^\circ$$

$$T = \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1} = 0.0667 + j0.0622 = 0.0912 \angle 43.03^\circ$$

入射、反射、透射电磁场

$$\vec{E}_i = E_{i0} \cos(\omega t - kz) \cdot \vec{a}_x = 100 \cos(2\pi \times 10^9 t - 20.94z) \cdot \vec{a}_x \text{ V/m}$$

$$\vec{H}_i = \frac{E_{i0}}{\eta_1} \cos(\omega t - kz) \cdot \vec{a}_y = 0.265 \cos(2\pi \times 10^9 t - 20.94z) \cdot \vec{a}_y \text{ A/m}$$

↑ 没有衰减项,

$$\vec{E}_r = \Gamma E_{i0} \cos(\omega t + kz) \cdot \vec{a}_x = 93.54 \cos(2\pi \times 10^9 t + 20.94z + 176.19^\circ) \cdot \vec{a}_x \text{ V/m}$$

$$\vec{H}_r = -\frac{\Gamma E_{i0}}{\eta_1} \cos(\omega t + kz) \cdot \vec{a}_y = -0.248 \cos(2\pi \times 10^9 t + 20.94z + 176.19^\circ) \cdot \vec{a}_y \text{ A/m}$$

↑ 没有相移.

$$\left. \begin{aligned} \vec{E}_t &= TE_{i0} e^{-\alpha z} \cos(\omega t - kz) \cdot \vec{a}_x = 9.12 e^{-314.16z} \cos(2\pi \times 10^9 t - 314.16z + 43.03^\circ) \cdot \vec{a}_x \text{ V/m} \\ \vec{H}_t &= \frac{TE_{i0}}{\eta_2} e^{-\alpha z} \cos(\omega t - kz) \cdot \vec{a}_y = 0.513 e^{-314.16z} \cos(2\pi \times 10^9 t - 314.16z - 1.84^\circ) \cdot \vec{a}_y \text{ A/m} \end{aligned} \right\}$$

衰减项

相移

$\vec{E}_t$  有衰减项  $e^{-\alpha z}$ .  $43.03^\circ$  相位由于造成.

$\vec{H}_t$  在  $\vec{E}_t$  的基础上多了  $\alpha z$  的相移  $\angle 44.87^\circ$ .

$$\left. \begin{aligned} \vec{E} &= T \\ \vec{H} &= T + \eta_2 \end{aligned} \right\}$$

## X(余弦反射)

0 (6-37). - 工作频率为  $100 \text{ MHz}$  的垂直极化波以  $60^\circ$  角从淡水 ( $\epsilon_r = 80, \sigma \approx 0$ ) 中入射到淡水和空气交界面上. ① 求反射系数. ② 空气中电场强度的复数表达式.  
③ 空气中复坡印廷矢量表达式.

$$\Rightarrow \text{① 临界的全反射角} \theta_c = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right) = \arcsin\sqrt{80} \approx 64.1^\circ.$$

由  $\theta_i = 60^\circ > \theta_c$  知口发生全反射, 此不存在实数解.

$$\cos \theta_t = -j \sqrt{\left(\frac{n_1}{n_2} \sin \theta_i\right)^2 - 1} = -j \sqrt{80 \sin^2 60^\circ - 1} = -j \sqrt{80 \cdot \frac{3}{4} - 1} = -j 7.681 = -j A \quad A = 7.681.$$

$$\eta_1 = \frac{\eta_0}{\sqrt{\epsilon_r}} = \frac{30\pi}{\sqrt{80}} \Omega. \quad \eta_2 = \eta_0 = 120\pi \Omega.$$

$$\text{反射系数 } T_L = \frac{\eta_2 \cos \theta_i + j \eta_1 A}{\eta_2 \cos \theta_i - j \eta_1 A} = \frac{120\pi \cdot \frac{1}{2} + j \cdot \frac{30\pi}{\sqrt{80}} \cdot 7.681}{120\pi \cdot \frac{1}{2} - j \cdot \frac{30\pi}{\sqrt{80}} \cdot 7.681} = -0.494 + 0.87j.$$

$$\text{② 透射系数 } T_L = \frac{2\eta_2 \cos \theta_i}{\eta_2 \cos \theta_i - j \eta_1 A} = 1.591 + 2.732j.$$

$$\text{空气中 } \beta_2 = \omega \sqrt{\mu_2 \epsilon_2} = 2\pi f \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} = \frac{2\pi}{3}, \text{ 且 } \sin \theta_t = \sqrt{1 - \cos^2 \theta_t} = 2\sqrt{15}.$$

由斜入射可知:

$$\vec{E}_t = \vec{E}_{t0} e^{-j\beta_2(x \sin \theta_t + z \cos \theta_t)} \hat{a}_y, \quad \vec{E}_{t0} = T_L \vec{E}_{i0}$$

$\vec{E}_{t0}$  是复数

$$\begin{aligned} \vec{E}_{t0} &= T_L \vec{E}_{i0} e^{-j\beta_2 x \sin \theta_t - j\beta_2 z \cos \theta_t} \hat{a}_y \\ &= (1.591 + 2.732j) \vec{E}_{i0} e^{-j \frac{2}{3}\pi \times 2\sqrt{15} x} e^{-j \frac{2\pi}{3} \times (-j 7.681) z} \hat{a}_y \\ &= (1.591 + 2.732j) \vec{E}_{i0} e^{-j 16.223x} e^{-16.087z} \hat{a}_y. \end{aligned}$$

$$\text{③ } \vec{S} = \frac{1}{2} \vec{E}_t \times \vec{H}_t^* - \text{由余弦反射:}$$

$$\begin{aligned} \vec{H}_t &= \frac{T \vec{E}_{i0}}{\eta_2} (-\cos \theta_t \hat{a}_x + \sin \theta_t \hat{a}_z) e^{-j\beta_2(x \sin \theta_t + z \cos \theta_t)} \\ &= (\hat{a}_x j 7.681 + 7746 \hat{a}_z) \frac{1.591 + 2.732j}{120\pi} \vec{E}_{i0} e^{-16.087z} e^{-j 16.223x}. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \vec{S} = \frac{1}{2} \vec{E}_t \times \vec{H}_t^* = \frac{|\vec{E}_{i0}|^2}{23\pi} e^{-\frac{4\pi}{3}\sqrt{15}z} (j\sqrt{15} \hat{a}_z + 2\sqrt{15} \hat{a}_x).$$

# 第七章. 导行电磁波.

## 1. 柱形导波

(1) 柱形导波的电磁场 = 建立 $\vec{E}$ 、 $\vec{H}$ 的 $(u, v, z)$ 坐标系

于 $(u, v, z)$ 坐标系下使用纵向协调分析:

$\vec{E}$ 、 $\vec{H}$ 的 $z$ 分量满足  
高阶电场纵向分量的标量方程  
高阶磁场纵向分量的标量方程

边界条件  
场纵向分量  
场横向分量

纵向协调分析条件 = (见书P204 3个条件).

$\vec{E}(u, v, z)$  和  $\vec{H}(u, v, z)$  满足两个齐次亥姆霍兹方程:

$$\nabla^2 \vec{E}(u, v, z) + k^2 \vec{E}(u, v, z) = 0, \quad \nabla^2 \vec{H}(u, v, z) + k^2 \vec{H}(u, v, z) = 0.$$

复矢量分解为横向分量和纵向分量:

$$\begin{aligned} \vec{E}(u, v, z) &= \vec{E}_t(u, v, z) + \vec{\alpha}_z E_z(u, v, z) \\ \vec{H}(u, v, z) &= \vec{H}_t(u, v, z) + \vec{\alpha}_z H_z(u, v, z) \end{aligned} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{纵向分量有标量亥姆霍兹方程:} \\ \nabla^2 E_z + k^2 E_z = 0 \\ \nabla^2 H_z + k^2 H_z = 0. \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla^2 E_z + k^2 E_z = 0 \\ \nabla^2 H_z + k^2 H_z = 0. \end{array} \right. \Rightarrow \text{由该方程及指定边界条件下解出纵向分量.} \quad \rightarrow k_c^2 = k^2 + r^2.$$

通过分离变量可得方程:

$\left\{ \begin{array}{l} \nabla_t^2 E_z(T) + (k_c^2 + r^2) E_z(T) = 0 \\ \frac{d^2 Z(z)}{dz^2} - r^2 Z(z) = 0. \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} \nabla_t^2 H_z(T) + (k_c^2 + r^2) H_z(T) = 0 \\ \frac{d^2 Z(z)}{dz^2} - r^2 Z(z) = 0. \end{array} \right.$
--	--

由第二个方程得其通解:  $Z(z) = \underbrace{A^+ e^{-r|z|}}_{\text{正z方向入射波}} + \underbrace{A^- e^{r|z|}}_{\text{负z方向反射波}}, r$  为导波中的传播常数.

由平面上反射波 =  $A^- = 0$ . 则  $Z(z) = A^+ e^{-rz}$ .

则由  $\left\{ \begin{array}{l} E_z(u, v, z) = E_z(u, v) Z(z) \\ H_z(u, v, z) = H_z(u, v) Z(z) \end{array} \right.$  得:  $\left\{ \begin{array}{l} E_z(u, v, z) = E_z(T) e^{-rz} \\ H_z(u, v, z) = H_z(T) e^{-rz}. \end{array} \right.$

$\Rightarrow$  导波中传播常数  $r = \alpha + j\beta$ .

$r$  为实数时, 只含衰减项, 振幅变化, 相位不变,  $\Rightarrow$  截止.

$r$  为虚数时, 只含相位常数项, 振幅不变, 相位变化  $\Rightarrow$  传输.

$r$  为复数.

无耗传输

横向场分量可用纵向场分量表示.

⇒ 求解横向分量时不用解方程. 由  $\vec{E}_z$  和  $\vec{H}_z$  及  $\left\{ \begin{array}{l} \nabla \times \vec{E} = -j\omega \mu \vec{H} \\ \nabla \times \vec{H} = j\omega \epsilon \vec{E} \end{array} \right.$  可得横向分量

$E_u, E_v, H_u, H_v$  的表达式 (柱坐标系和直角坐标系) 书本 P206.

$$\left\{ \begin{array}{l} E_u = -\frac{1}{k_c^2} \left( \frac{j\omega \mu}{h_2} \frac{\partial H_z}{\partial v} + \frac{r}{h_1} \frac{\partial E_z}{\partial u} \right) \\ E_v = \frac{1}{k_c^2} \left( \frac{j\omega \mu}{h_1} \frac{\partial H_z}{\partial u} - \frac{r}{h_2} \frac{\partial E_z}{\partial v} \right). \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} H_u = \frac{1}{k_c^2} \left( \frac{j\omega \mu}{h_2} \frac{\partial H_z}{\partial v} + \frac{r}{h_1} \frac{\partial E_z}{\partial u} \right) \\ H_v = -\frac{1}{k_c^2} \left( \frac{j\omega \mu}{h_1} \frac{\partial E_z}{\partial u} + \frac{r}{h_2} \frac{\partial H_z}{\partial v} \right) \end{array} \right. \Rightarrow \text{柱坐标系}$$

其中  $k_c^2 = r^2 + \omega^2 \epsilon \mu$ .  $k = \omega \sqrt{\mu \epsilon}$  为自由空间中的波数.  $r$  为导波中传播常数.

导波中传播方程.

## (2) 导波

① 分类: 无纵向场分量时,  $E_z = H_z = 0$ . 只有横向场分量. 称为横电磁模 (TEM).

$E_z \neq 0, H_z = 0$ : TM 模, E 模.  $E_z = 0, H_z \neq 0$ : TE 模, H 模.

$E_z \neq 0, H_z \neq 0$ : 混合模 (TE, TM 模线性叠加).

TE, TM 模可单独在柱形波导中. 混合模在开放式波导和非规则波导中.

## ② 性质 (导波).

1° 相速. 由相应恒定条件得出:  $v_p = \frac{\omega}{\beta} (m/s) = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}} = v \Rightarrow$  导波中相速等于电磁波速度 (光速)

2° 波导波长:  $\lambda_g = v_p T = \frac{v_p}{f} (m) = \frac{2\pi}{\beta}$

3° 波阻抗:  $Z = \pm \frac{E_t}{H_t} \Omega$  (横向场分量之比)

→ +, - 对于波传播方向而言, H 之间为右手螺旋关系.

和前面一样  $r = jk$

## (3) TEM 模.

① TEM 场. 由解得的  $E_u, E_v, H_u, H_v$  表达式可知:

当  $E_z = H_z = 0$  时, TEM 模有非零解条件为:  $k_c = 0$ . 即  $k_c^2 = r^2 + k^2 = 0 \Rightarrow r = jk$ .

若为无耗传输, 则  $r = j\beta = jk = j\omega \sqrt{\mu \epsilon}$ . (与无界空间的平面波类似)

此时电磁场 (仅有横向分量) 为:  $\vec{E}_t(u, v, z) = \vec{E}_t(T) e^{-jkz}$ .  $\vec{H}_t(u, v, z) = \frac{k}{j\omega \mu} \vec{a}_z \times \vec{E}(T) e^{-jkz}$ .

↓  $\frac{1}{j} \vec{a}_z \times \vec{E}(T) e^{-jkz}$ .

⇒ TEM 模的电磁场在传输系统横截面上的分布  
与边界条件相同的二维驻波完全一致.

由“用波矢量表示麦克斯韦方程组”推导得来.

这里横向场分量没有作具体表示.

$$\frac{k}{\omega \epsilon} = \sqrt{\mu}$$

$$\begin{aligned} \text{复数量} &= \begin{cases} \vec{E}(T, z) = \vec{E}_t(T, z) = \vec{E}(T) e^{-j\beta z} \\ \vec{H}(T, z) = \frac{1}{\eta} \vec{a}_z \times \vec{E}(T) e^{-j\beta z}. \end{cases} \\ \text{瞬时量} &= \begin{cases} \vec{E}(t) = \vec{E}(T) \cos(\omega t - \beta z) \\ \vec{H}(t) = \frac{1}{\eta} \vec{a}_z \times \vec{E}(T) \cos(\omega t - \beta z). \end{cases} \end{aligned}$$

## ② 传播特性

导波相速为  $v_p = \frac{\omega}{\beta}$ , 波导波长为  $\lambda_g = \frac{v_p}{f}$ .

对无耗传输的 TEM 模: 由  $\beta = k$  得  $v_p = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} = v$ .  $\lambda_g = \frac{v}{f} = \lambda$ .

$$r = j\beta = jk$$

$$Z_{TEM} = \frac{E}{H} = \left( \frac{\mu}{\epsilon} \right)^{1/2} \eta = \left( \frac{k}{\omega \epsilon} \right)$$

若以空气为传输媒质, 则  $Z_{TEM} = \eta_0 = 377 \Omega \Rightarrow (120\pi)$

对无耗传输的 TEM 模的相速、波导波长、波阻抗与充满理想媒质的无界空间相同.

(4) TE 模、TM 模.  $\rightarrow$  和 TEM 模不同, 横向有正或 H 分量, 且  $k_c \neq 0$ .

① 场量和波阻抗.

(TM 模) 将  $H_z = 0$  代入前面所得表达式得:

因为  $r = jk$  不成立

$$\begin{cases} E_x = -\frac{r}{k_c^2} \frac{\partial E_z}{\partial x}, \\ E_y = -\frac{r}{k_c^2} \frac{\partial E_z}{\partial y}, \end{cases} \quad \begin{cases} H_x = \frac{j\omega\epsilon}{k_c^2} \frac{\partial E_z}{\partial y}, \\ H_y = -\frac{j\omega\epsilon}{k_c^2} \frac{\partial E_z}{\partial x}. \end{cases}$$

对无耗传输的 TM 模:  $Z_{TM} = \frac{E_t}{H_t} = \frac{r}{k} Z_{TEM}$   $r \neq jk$

(TE 模) 将  $E_z = 0$  代入得:

$$\begin{cases} E_x = -\frac{j\omega\mu}{k_c^2} \frac{\partial H_z}{\partial y}, \\ E_y = \frac{j\omega\mu}{k_c^2} \frac{\partial H_z}{\partial x}, \end{cases} \quad \begin{cases} H_x = -\frac{r}{k_c^2} \frac{\partial H_z}{\partial x}, \\ H_y = -\frac{r}{k_c^2} \frac{\partial H_z}{\partial y}. \end{cases}$$

对无耗传输的 TE 模  $Z_{TE} = \frac{E_t}{H_t} = \frac{k}{\beta} Z_{TEM}$

## ② 传输条件:

由导波的传播方程:  $k_c^2 = k^2 + r^2$  得  $r = \sqrt{k_c^2 - k^2}$ .

1°. 当  $k^2 > k_c^2$  时.  $r = j\beta = j\sqrt{k^2 - k_c^2}$ . 此时  $r$  为虚数.

场量沿传播方向有相位变化, 幅值无衰减.  $\Rightarrow$  传输状态.

且由  $\beta < k$  得:  $v_p = \frac{\omega}{\beta} > \frac{\omega}{k} = v$ .  $\Rightarrow$  快波

$$\omega_c = 2\pi f_c = 2\pi \frac{v}{\lambda} = 2\pi \cdot \frac{v}{\frac{2\pi}{k_c}} = k_c v = \frac{k_c}{\sqrt{\mu \epsilon}}$$

2.  $k^2 = k_c^2$  时.  $\gamma = 0$ . 此时为截止状态(无传输)

$$\text{截止角频率 } \omega_c = \frac{k_c}{\sqrt{\mu \epsilon}}, \text{ 截止频率 } f_c = \frac{k_c}{2\pi\sqrt{\mu \epsilon}}, \text{ 截止波长 } \lambda_c = \frac{v}{f_c} = \frac{2\pi}{k_c}.$$

3.  $k^2 < k_c^2$  时.  $\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{k_c^2 - k^2} = \underline{\alpha}$ .  $\Rightarrow$  截止状态.

电磁场振幅高衰减, 相位不变. 此时  $f < f_c$ ,  $\lambda > \lambda_c$ .

综上, 只有当  $f > f_c$  或  $\lambda < \lambda_c$  时才能传输  $\Rightarrow$  高通.

### ③ 相速和波导波长.

相速: 对于无耗传播的 TM 和 TE 模(对应传输条件中的  $k^2 > k_c^2$ , 传播常数  $\gamma = j\beta$ ).

$$\gamma = j\beta = j\sqrt{k^2 - k_c^2}, \quad V_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{\omega}{\sqrt{k^2 - k_c^2}} = \frac{\omega}{k} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{k_c^2}{k^2}}} = \frac{v}{\sqrt{1 - \frac{k_c^2}{k^2}}} = \frac{v}{\sqrt{1 - \frac{\lambda_c^2}{\lambda^2}}} \quad (> v)$$

$\Rightarrow$  大于在媒质中电磁波传播速度  $v$ .  $\Rightarrow$  快波(传输状态下).

$$\text{波长: } \lambda_g = \frac{V_p}{f} = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \frac{\lambda_c^2}{\lambda^2}}} \quad (\text{对应媒质中的波长 } \lambda).$$

$V$ : 媒质中光速

$$\text{且有 } \beta = \frac{2\pi}{\lambda_g}. \quad (\text{对应媒质中的波数 } n).$$

群速(波包速度): 对于无耗传输的 TM 模或 TE 模.

$$V_g = V \sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_c^2}} = V \sqrt{1 - \frac{f_c^2}{f^2}}. \quad (\text{和 } \lambda_g \text{ 无关}).$$

$$\Rightarrow V_p > V, V_g < V, \text{ 且 } V_p V_g = V^2.$$

$V_p, V_g$  均随  $f$  的变化. 所以 TM 与 TE 为色散波 (TEM 模是非色散波).

$$\text{TEM 模: } \lambda_c \rightarrow \infty, V_p = V_g = V, \text{ 与频率无关}.$$

△ 区分工作波长、截止波长、波导波长.

### 3. 金属波导与同轴线波导

1) 平行板波导中的导波

2) 矩形波导中的导波

① 模式及场分布

正交坐标系中纵向电场分量、纵向磁场分量的横向分布通常满足二维标量亥姆霍兹方程：

$$\nabla_t^2 \left\{ \begin{array}{l} E_z(T) \\ H_z(T) \end{array} \right\} + k_c^2 \left\{ \begin{array}{l} E_z(T) \\ H_z(T) \end{array} \right\} = 0.$$

$E_z(T) = E_z(x, y)$ ,  $H_z(T) = H(x, y) \Rightarrow$  纵向场量在横截面上的二维分布通常

$$\text{直角坐标下变为 } \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left\{ \begin{array}{l} E_z(x, y) \\ H_z(x, y) \end{array} \right\} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left\{ \begin{array}{l} E_z(x, y) \\ H_z(x, y) \end{array} \right\} + k_c^2 \left\{ \begin{array}{l} E_z(x, y) \\ H_z(x, y) \end{array} \right\} = 0.$$

使用分离变量法可求得：

$$E_z = E_z(x, y, z) = (A_1 e^{-jk_x x} + A_2 e^{jk_x x}) (B_1 e^{-jk_y y} + B_2 e^{jk_y y}) (C_1 e^{-j\beta z} + C_2 e^{j\beta z}).$$

$$H_z = H_z(x, y, z) = (A_3 e^{-jk_x x} + A_4 e^{jk_x x}) (B_3 e^{-jk_y y} + B_4 e^{jk_y y}) (C_3 e^{-j\beta z} + C_4 e^{j\beta z}).$$

(上一节矩形导波中分离变量  $E_z(u, v, z) = E_z(u, v) Z(z)$ )

并求出  $Z(z) = A^+ e^{-r^2} + A^- e^{r^2}$ , 这里对  $E_z(u, v) = E_z(x, y)$  进行分离变量

$E_z(x, y) = X(x) Y(y)$  用图中的第一方程求解,  $Z(z)$  是由第二方程求解得到的

$$\left. \begin{array}{l} \nabla_t^2 E_z(T) + (k^2 + r^2) E_z(T) = 0 \\ \frac{d^2 Z(z)}{dz^2} - r^2 Z(z) = 0. \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} \nabla_t^2 H_z(T) + (k^2 + r^2) H_z(T) = 0 \\ \frac{d^2 Z(z)}{dz^2} - r^2 Z(z) = 0. \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow X(x) = A_1 e^{-jk_x x} + A_2 e^{jk_x x}, \quad Y(y) = B_1 e^{-jk_y y} + B_2 e^{jk_y y}, \quad Z(z) = C_1 e^{-j\beta z} + C_2 e^{j\beta z}$$

1. 对于 TM 模

由矩形波导四个面的边界条件(电场线垂直导体表面):  $E_z|_{x=a}=0$ ,  $E_z|_{y=b}=0$ .

可解出纵向场分量为:  $\begin{matrix} \text{纵波} \\ \downarrow \\ E_z(x, y, z) = E_0 \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y e^{-j\beta z} \end{matrix}$

$$\left. \begin{array}{l} k_x = \frac{m\pi}{a}, m=1, 2, \dots \\ k_y = \frac{n\pi}{b}, n=1, 2, \dots \end{array} \right\} \quad k_x^2 + k_y^2 = k_c^2$$

$$\text{再通过前面的公式} = \left\{ \begin{array}{l} E_x = -\frac{j\beta}{k_c^2} \frac{\partial E_z}{\partial x}, \\ E_y = -\frac{j\beta}{k_c^2} \frac{\partial E_z}{\partial y}, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} H_x = \frac{j\omega \epsilon}{k_c^2} \cdot \frac{\partial E_z}{\partial y}, \\ H_y = -\frac{j\omega \epsilon}{k_c^2} \frac{\partial E_z}{\partial x}. \end{array} \right. \quad \text{可得横向场分量} E_x, E_y, H_x, H_y$$

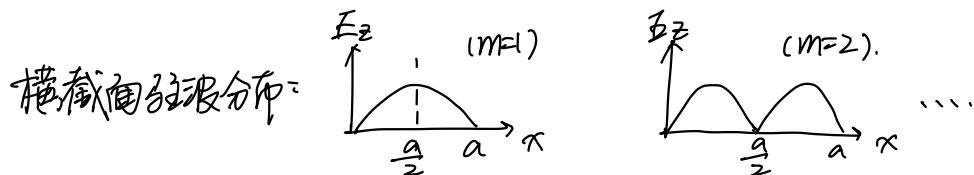
(PPT, Pg. 详细公式)

分析: TM 模各场分量沿波导轴向呈行波状态, 在横截面(x, y)上驻波分布。

。每一对(m, n)对应不同的模式  $\rightarrow TE_{mn}$  模, 最低模称为  $TM_{11}$ .  $\Rightarrow m \neq 0, n \neq 0$

。m 对应场分量沿 x 方向变化的半波数, n 对应 y 方向:

$$\text{若 } E_z = 0.$$



2° TE模.  $H_z \neq 0, E_z = 0$

不能直接用四个面上  $H_z$  的边界条件求系数  $a_2$ .

将  $H_z$  转换为  $H_x, H_y$  表达式再使用  $H_x, H_y$  的边界条件:  $H_x|_{x=0,a} = 0, H_y|_{y=0,b} = 0$ .

$$\text{求得: } H_z(x,y,z) = H_0 \underbrace{\cos \frac{m\pi}{a} x}_{\text{驻波}} \underbrace{\cos \frac{n\pi}{b} y}_{\text{行波(沿z轴正方向)}} e^{-j\beta z}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} k_x = \frac{m\pi}{a}, m=1,2,\dots \\ k_y = \frac{n\pi}{b}, n=1,2,\dots \end{array} \right.$$

$$k_x^2 + k_y^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 = k_c^2$$

同样用  $H_z$  求出横向场分量  $E_x, E_y, H_x, H_y$  的表达式 (书本 P250). (PPT. P16 详细公式)

分析 = ① 驻波 + 行波.

② 每对  $(m,n)$  对应不同模式  $\text{TE}_{mn}$ .  $m, n$  不能同时为 0. 最低模次为  $\text{TE}_{10}$ .

$$\Rightarrow \text{TM 模: } m \neq 0, n \neq 0; \text{ TE 模: } m^2 + n^2 \neq 0.$$

一般  $\text{TE}_{10}$  <math>\text{TE}\_{01}, \text{TE}\_{11}.

② 传输特性. 波数  $k$  与  $m, n$  不同有不同的场分布. 与  $mn, ab$  有关.

$$1° \text{ 截止波长: } \lambda_c = \frac{2\pi}{k_c} = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}}. \quad k_c^2 = k_x^2 + k_y^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2.$$

$$\text{截止频率: } f_c = \frac{v}{\lambda_c} = \frac{1}{2\pi c} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}. \Rightarrow \text{与 } \mu \epsilon, mn, ab \text{ 有关.}$$

$\Rightarrow$  当  $\lambda < \lambda_c$  或  $f > f_c$  时不能传输 (注意是工作波长  $\lambda$  不是波导波长  $\lambda_s$ ).

当波导尺寸  $(a, b)$  一定时. 工作波长越短则波导中能传输的模式越多.

$\lambda, m, n, ab$  之间相互制约.

{ 工作波长  $\lambda \geq 2a \Rightarrow$  截止区  $\rightarrow$  PPT. P21.

{ 工作波长  $\underline{\lambda} < \lambda \leq 2a \Rightarrow$  单模区  $\downarrow$  书本. P251

工作波长  $\lambda \leq a \Rightarrow$  多模区.  $\text{TE}_{10}$

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\epsilon_r}}$$

对固定波长  $\lambda$ , 限定  $\frac{\lambda}{2} < a < \lambda$  可保证单模传输.

2° 相速 & 群速

$$v_p = \frac{v}{\sqrt{1 + \left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2}}, \quad v_g = v \sqrt{1 + \left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2}. \Rightarrow \text{色散波.} \quad D_p v_g = v^2.$$

3° 波导波长

矩形波导中为空气:

$$\left( \begin{array}{l} \lambda_g = \frac{\lambda}{\sqrt{1 + \left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2}} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 + \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_c}\right)^2}} \\ \lambda = \lambda_0. \end{array} \right)$$

矩形波导中为  $\epsilon_r$  的无耗介质:

$$\left( \begin{array}{l} \lambda_g = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2}} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\epsilon_r - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_c}\right)^2}} \\ \lambda = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\epsilon_r}}. \end{array} \right)$$

$\lambda_0$ : 真空中工作波长,  $\lambda$ : 媒质中工作波长,  $\lambda_g$ : 波导波长,  $\lambda_c$ : 截止波长.

$$4^\circ \text{ 波阻抗} \Rightarrow \begin{cases} Z_{TM} = \frac{\beta}{\omega \epsilon} = Z_{TEM} \frac{\lambda}{\lambda_g} = \eta \frac{\lambda}{\lambda_g} = \eta \sqrt{1 + (\frac{\lambda}{\lambda_c})^2}, & Z_{TEM} = \eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}, \\ Z_{TE} = \frac{\omega \mu}{\beta} = Z_{TEM} \frac{\lambda_g}{\lambda} = \eta \frac{\lambda_g}{\lambda} = \frac{\eta}{\sqrt{1 - (\frac{\lambda}{\lambda_c})^2}} \end{cases}$$

★

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{在空气中: } Z_{TEM} = \eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 377 \Omega \\ Z_{TM} = \eta_0 \sqrt{1 + (\frac{\lambda_0}{\lambda_c})^2}, \quad Z_{TE} = \frac{\eta_0}{\sqrt{1 - (\frac{\lambda_0}{\lambda_c})^2}} \end{array} \right.$$

$$\text{在 } \epsilon_r \text{ 的无耗介质中: } Z_{TEM} = \eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \cdot \sqrt{\frac{1}{\epsilon_r}} = \frac{\eta_0}{\sqrt{\epsilon_r}}$$

$$\hookrightarrow Z_{TM} = \eta \sqrt{1 + (\frac{\lambda}{\lambda_c})^2} = \eta_0 \sqrt{\epsilon_r - (\frac{\lambda_0}{\lambda_c \sqrt{\epsilon_r}})^2}$$

$$Z_{TE} = \frac{\eta}{\sqrt{1 - (\frac{\lambda}{\lambda_c})^2}} = \frac{\eta_0}{\sqrt{\epsilon_r - (\frac{\lambda_0}{\lambda_c})^2}}.$$

$$GHz = 10^9 Hz$$

○ 一块空气填充的矩形波导尺寸为  $8cm \times 4cm$ . 若工作频率  $f = 4GHz$ . 给出所有可能的工作模式. 若填充满相对介电常数为 2 的理想介质. 传输模式有什么样变化?

(1)  $a=8cm, b=4cm$ .

$$\text{当内部为空气时, 工作波长 } \lambda = \frac{c}{f} = \frac{300}{4} = 75mm = 7.5cm$$

$$\text{截止波长为 } \lambda_c = \frac{2\pi}{k_c} = \frac{2}{\sqrt{(\frac{m}{a})^2 + (\frac{n}{b})^2}}.$$

$$m=0, n=0 \text{ 时 } \lambda_c(TE_{00}) = 2a = 16cm.$$

$$m=2, n=0 \text{ 时, } \lambda_c(TE_{20}) = a = 8cm.$$

$$m=0, n=1 \text{ 时, } \lambda_c(TE_{01}) = 2b = 8cm.$$

$$m=1, n=1 \text{ 时, } \lambda_c(TE_{11}, TM_{11}) = \frac{2}{\sqrt{(\frac{1}{a})^2 + (\frac{1}{b})^2}} = 7.15cm \quad (X)$$

则可以传输的模式为  $TE_{10}, TE_{01}, TE_{20}$ .

(2) 填充介质后, 工作波长为  $\lambda' = \frac{\lambda}{\sqrt{\epsilon_r}} = \frac{75}{\sqrt{2}} = 53.04cm$ .

$$\lambda_c(TE_{21}, TM_{21}) = \frac{2}{\sqrt{(\frac{2}{a})^2 + (\frac{1}{b})^2}} = 5.65cm \quad \lambda_c(TE_{30}) = \frac{2}{\sqrt{(\frac{3}{a})^2 + (\frac{1}{b})^2}} = 5.33cm$$

$$\lambda_c(TE_{31}, TM_{31}) = \frac{2}{\sqrt{(\frac{3}{a})^2 + (\frac{1}{b})^2}} = 4.43cm. \quad \lambda_c(TE_{02}) = \frac{2}{\sqrt{(\frac{1}{b})^2}} = 4cm < 5.304cm. \quad (X)$$

所以可以传输的模式为  $TE_{10}, TE_{20}, TE_{01}, TE_{11}, TM_{11}, TE_{21}, TM_{21}, TE_{30}$ .

→ 每一种模式对应一种截止波长  $\lambda_c(TE_{mn}, TM_{mn})$ .

② 矩形波导的主模 —  $TE_{10}$  模 ( $H_{10}$  模).

△  $TEM$  模存在的条件 — DPT. P55.

△ 横向磁场必须闭合.

△ 导体波导 ...

## 1b) 同轴波导中的波导 (PPT, P48)

0(题7-30). 一驻波测量仪矩形波导尺寸  $a \times b = (2.54 \times 1.13) \text{ cm}^2$ . 测得两波节之间距离为 3cm. 求所测信号源的工作频率.

由题得:  $\frac{\lambda_g}{2} = 3 \text{ cm}$ . 则  $\lambda_g = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - (\frac{a}{\lambda})^2}} = 6 \text{ cm}$ . } 解得  $\lambda =$

又此时传输的是  $TE_{10}$  模. 则  $\lambda_c = 2a = 5.08 \text{ cm}$ .

则  $f = \frac{c}{\lambda} = \underline{7.74 \text{ GHz}}$

→ 书本 P252~P253. 由于有驻波存在, 故以显然, 是  $TE_{10}$  模.  
且两波节之间相距  $\frac{\lambda_g}{2}$  !!!

X

0(题7-26). 工作频率为 10GHz 的  $TE_{11}$  模在空气填充的矩形波导内传输, 纵向场分量为  $H_z = 10^{-8} \cos \frac{\pi}{3}x \cos \frac{\pi}{3}y e^{-j\beta z} \text{ A/m}$ . 波导尺寸  $a, b$  为 cm. (1) 求  $\lambda_c, \lambda_g, v_p, v_g$ . (2) 写出横向场分量表达式.

⇒ ①  $k_x = \frac{\pi}{3}, k_y = \frac{\pi}{3}$ . 则  $k_c = \sqrt{k_x^2 + k_y^2} = \frac{\sqrt{2}\pi}{3}$ . 由  $k_x = \frac{m\pi}{a}, k_y = \frac{n\pi}{b}$  得  $a = 3 \text{ cm}, b = 3 \text{ cm}$ .

则  $\lambda_c = \frac{2}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{2\pi}{k_c} = 3\sqrt{2} \text{ cm}$ .  $\lambda_0 = \frac{c}{f_0} = \frac{3 \times 10^8}{10} = 30 \text{ mm}$  注意单位!!

$\lambda_g = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 - (\frac{\lambda_0}{\lambda_c})^2}} = 42.426 \text{ mm}$ .  $v_p = \frac{c}{\sqrt{1 - (\frac{\lambda_0}{\lambda_c})^2}} = 4.146 \times 10^8 \text{ m/s}$ .

$v_g = c \sqrt{1 - (\frac{\lambda_0}{\lambda_c})^2} = 2.121 \times 10^8 \text{ m/s}$ .

② ⇒  $\beta = \sqrt{k_x^2 + k_y^2} = \sqrt{(\frac{2\pi}{\lambda_0})^2 - (\frac{2\pi}{\lambda_c})^2} = 0.471\pi \text{ rad/cm}$ .

由 PPT, P16 公式得:

△ 计算器不要按错了!!!

$$H_x = \frac{j\beta H_0}{k_c^2} \cdot \frac{m\pi}{a} \sin(\frac{m\pi}{a}x) \cos(\frac{m\pi}{b}y) e^{-j\beta z} = \frac{j \cdot 0.471\pi \cdot 10^{-8}}{(\frac{\sqrt{2}\pi}{3})^2} \cdot \frac{\pi}{3} \sin(\frac{\pi}{3}x) \cos(\frac{\pi}{3}y) e^{-j\beta z}$$

$$= j0.71 \times 10^{-8} \sin(\frac{\pi}{3}x) \cos(\frac{\pi}{3}y) e^{-j\beta z}.$$

$$E_x = \frac{j\omega \mu H_0}{k_c^2} \frac{m\pi}{b} \cos(\frac{m\pi}{a}x) \sin(\frac{m\pi}{b}y) e^{-j\beta z} = \frac{j \cdot 2\pi \times 10^{10} \cdot 4\pi \times 10^{-7} \cdot 10^{-8}}{(\frac{\sqrt{2}\pi}{3})^2} \cdot \frac{\pi}{3} \cos(\frac{\pi}{3}x) \sin(\frac{\pi}{3}y) e^{-j\beta z}$$

$\Downarrow$   
 $\omega = 2\pi f, \mu = \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ .

$$= j3.77 \times 10^{-4} \cos(\frac{\pi}{3}x) \sin(\frac{\pi}{3}y) e^{-j\beta z}.$$

0(熟练) 一尺寸为  $a \times b = (6 \times 2.5) \text{ mm}^2$  的空气矩形波导, 15GHz 工作, 波导中传输的模式有 \_\_\_\_ 个. 若填入  $\epsilon_r = 16$  理想电介质, 则有 \_\_\_\_ 个.

## 第八章 天线

### 1. 电磁波辐射与天线

#### (1) 时谐场的滞后区 (间接法)

时谐电磁场在自由空间中复数形式的标量电位和矢量磁位分别满足非齐次标量和矢量亥姆霍兹方程：

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla^2 \phi + k^2 \phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \nabla^2 \vec{A} + k^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{j} \end{array} \right. \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \phi(\vec{r}, t) = \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r}') e^{jw(t-\frac{R_1}{V})}}{R_1} dV' \right] \\ \vec{A}(\vec{r}, t) = \operatorname{Re} \left[ \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{j}(\vec{r}') e^{jw(t-\frac{R_1}{V})}}{R_1} dV' \right]. \end{array} \right\} \quad (8.5, 8.6).$$

$\rightarrow$  由  $t - \frac{R_1}{V}$  可知存在滞后现象。由  $\vec{A}$  可求出  $\vec{E}$  和  $\vec{H}$  (间接法)：

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{E} = -jw\vec{A} - j \frac{\nabla(\nabla \cdot \vec{A})}{w\mu_0\epsilon_0} \\ \vec{H} = \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \vec{A}) \end{array} \right.$$

#### 2. 电流元的辐射 (基本电振子 / 电偶极子)

任何实际的线天线都可分解为许多个电流元。

将电流元沿 z 轴方向放置，可求出磁矢位  $\vec{A} = \frac{\mu_0 I l}{4\pi R} e^{-jkR} \hat{a}_z = A_z \hat{a}_z$ .

由磁矢位  $\vec{A}$  求出  $\vec{H} = \vec{H} = \frac{I l}{4\pi} \sin\theta \left( \frac{jk}{R} + \frac{1}{R^2} \right) e^{-jkR} \hat{a}_\theta$

由  $\vec{H}$  及麦克斯韦  $\nabla \times \vec{H} = jw\vec{E}$  求出  $\vec{E}$ ： $\vec{E} = \left[ \frac{\eta_0 I l}{2\pi R^2} \cos\theta \left( 1 + \frac{1}{jkR} \right) e^{-jkR} \right] \hat{a}_R + [\dots] \hat{a}_\theta = E_R \hat{a}_R + E_\theta \hat{a}_\theta$ .

$\Rightarrow$  磁场  $\vec{H}$  只有  $\theta$  方向分量。电场  $\vec{E}$  有  $R$  和  $\theta$  方向分量 ( $E_R, E_\theta, E_\phi$ )。

电流元的复坡印亭矢量  $\vec{S} = \frac{1}{2} (\vec{E} \times \vec{H}^*)$  只在  $R$  方向有实部。即  $P$  有  $R$  方向有实功率。 $\vec{S}_{av} = \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{2} (\vec{E} \times \vec{H}^*) \right]$

按照  $R$  的变化将电流元磁场分为近区、远区、中间区 (见 P297 页)。

具体见 PPT. P19.

### 3. 天线的基本参数

#### (1) 天线的方向图及有关参量

① 远区辐射场的振幅与方向之间的关系  $\rightarrow$  辐射方向图。

距天线尺处天线远区辐射电场与角度坐标等参数的关系式  $\rightarrow$  方向性函数  $F(\theta, \psi)$ .

$F(\theta, \psi)$  的模值  $\rightarrow$  天线的方向图函数  $|F(\theta, \psi)|$ .

天线的归一化方向图函数  $\rightarrow |f(\theta, \psi)| = \frac{|F(\theta, \psi)|}{|F(\theta, \psi)|_{max}}$ .

△ 判断属于什么区，再使用相应公式

这区场的表达式

↑

前面已经计算出  $H_\theta, E_\theta, E_\phi$  的表达式. 其中  $E_\theta = j \frac{\eta_0 I L}{2\lambda R} \sin\theta e^{-jKR}$ .

可写为  $E_\theta = j \frac{60I}{R} e^{-jKR} \left( \frac{\pi L}{\lambda} \sin\theta \right) = j \frac{E_\theta^0}{R} e^{-jKR} F(\theta, \psi)$ .  $\leftarrow \eta_0 = 120\pi$

其中  $E_\theta^0 = 60I$  为辐射自由空间的振幅.  $|F(\theta, \psi)| = \frac{\pi L \sin\theta}{\lambda}$  为电流元的未归一化方向图函数.

又有  $|F(\theta, \psi)| = f(\theta, \psi) = |\sin\theta|$

直角坐标系中的平面方向图: 主瓣的半功率点张角 / 半功率瓣宽度 / 主瓣宽度  $\theta_{HP}$ .

极坐标系中的平面方向图: 主瓣零点宽度  $2\theta_0$ .

① 求沿 z 轴放置的电流元正向主瓣宽度. 电流元  $\Rightarrow \begin{cases} H_\theta = j \frac{IL}{2\lambda R} \sin\theta e^{-jKR} \\ E_\theta = j \frac{\eta_0 IL}{2\lambda R} \sin\theta e^{-jKR}. \end{cases}$

$\rightarrow |f(\theta)| = |\sin\theta| = 1$  (2个波瓣)

$\text{且 } \theta_{max} = \frac{\pi}{2} \text{ 或 } \frac{3\pi}{2}$ . 令  $|\sin\theta| = \frac{1}{\sqrt{2}}$  解得  $\theta = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$ .

$\text{且 } 2\theta_{0.5} = (\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{2}) + (\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}) = (\frac{\pi}{4} - \frac{3\pi}{2}) + (\frac{5\pi}{2} - \frac{5\pi}{4}) = \frac{\pi}{2}$

× - 结论

② 天线一的正面归一化方向图函数为  $|F(\theta)| = |\cos(\pi \cos\theta - \pi)|$ , 则该方向图共有几个波瓣? ( $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ). 天线二的正面归一化方向图函数为  $|F(\theta)| = |\cos(\theta - \frac{\pi}{2})|$ .

其半功率瓣宽度为?

① 因  $F(\theta) = 1 \Rightarrow \cos(\pi \cos\theta - \pi) = \pm 1 \Rightarrow \pi \cos\theta - \pi = n\pi$ .

$\cos\theta = n \Rightarrow \theta = 0, \pm 1, \pm 2$ .

$n = 0 \text{ 时 } \cos\theta = 1, \theta = 0$

$n = -2 \text{ 时 } \cos\theta = -1, \theta = \pi$

$n = -1 \text{ 时 } \cos\theta = 0, \theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$

$\text{且 } \theta = 0, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \pi$  共有 4 个波瓣.

② 因  $|F(\theta)| = 1 \Rightarrow \cos(\theta - \frac{\pi}{2}) = \pm 1 \Rightarrow \theta - \frac{\pi}{2} = 0 \text{ 或 } \pi \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2} \text{ 或 } \frac{3\pi}{2}$ .

$|F(\theta)| = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \cos(\theta - \frac{\pi}{2}) = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \theta - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$

画图可知: 宽度为  $= |\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}| = 2|\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{2}| = \frac{\pi}{2}$ .

② 方向性系数  $D$ . (定义 P308 页).

$$D_0 = \frac{U_{max}}{U_0}$$

对称同轴天线  $= D_0 = 1$ .

$$\text{代入 } (S_{max})_{av} \text{ 和 } (S_0)_{av} \text{ 得: } D_0 = \frac{|E|_{max}^2 R^2}{60 Pr} \Rightarrow |E|_{max} = \frac{\sqrt{60 Pr D_0}}{R}$$

$\Rightarrow$  平均辐射功率相同时. 有方向性天线在最大辐射方向上的场强是无方向性辐射场强 ( $E_0 = \sqrt{60 Pr} = \frac{\sqrt{60 Pr}}{R}$ ) 的  $D_0$  倍. 平均功率增加到  $D_0$  倍. 这是因为其他方向的部分功率增加到其最大辐射方向上. 主瓣越窄.  $D_0$  越大.

$$\text{若已知天线的归一化方向图函数为 } |f(\theta, \psi)| = \frac{|f(\theta, \psi)|}{|f(\theta, \psi)|_{max}}.$$

$$\text{则天线在空间任意方向远区的辐射电场模为 } |E(\theta, \psi)| = |E_0| |f(\theta, \psi)| = |E_{max}| |f(\theta, \psi)|$$

$$\text{任意点平均功率密度: } S_{av}(\theta, \psi) = \frac{|E(\theta, \psi)|^2}{2\eta_0} = \frac{|E_{max}|^2 |f(\theta, \psi)|^2}{240\pi}.$$

$$\text{天线的平均辐射功率: } Pr = \oint_S S_{av}(\theta, \psi) dS = \frac{|E|_{max}^2 R^2}{240\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi |f(\theta, \psi)|^2 \sin\theta d\theta d\psi.$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi U(\theta, \psi) \sin\theta d\theta d\psi = \frac{|E|_{max}^2 R^2}{240\pi} \Delta A. \quad \text{球坐标系取分}$$

$$\text{代入 } D_0 = \frac{|E_{max}|^2 R^2}{60 Pr} \text{ 得: } D_0 = \frac{4\pi}{\int_0^{2\pi} \int_0^\pi |f(\theta, \psi)|^2 \sin\theta d\theta d\psi} \quad \begin{cases} \text{若与 } \psi \text{ 无关} \\ f(\theta, \psi) = f(\theta) \end{cases} \quad \frac{2}{\int_0^\pi |f(\theta)|^2 \sin\theta d\theta} \quad \text{平方割忌了}$$

③ 求沿 Z 轴放置的电流元的方向性系数.

$$\Rightarrow |f(\theta, \psi)| = |f(\theta)| = \sin\theta. \text{ 且 } D_0 = \frac{2}{\int_0^\pi \sin^3\theta d\theta} = \frac{2}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{2}.$$

$$(E_\theta = j \frac{60I}{R} e^{-jkr} (\frac{\pi l}{\lambda} \sin\theta). = j \frac{E_0}{R} e^{-jkr} F(\theta, \psi).)$$

$$\text{对电流流过选择的线天线: } |E(R, \theta, \psi)| = \frac{60I_m}{R} |F(\theta, \psi)|.$$

$$\text{其单向辐射功率为 } S_{av} = \operatorname{Re}[\frac{1}{2} \vec{E} \times \vec{H}^*] = \bar{a}_R \frac{\eta_0}{2} \left( \frac{\pi l}{2\lambda R} \sin\theta \right)^2. (P_{avg}).$$

$$\text{则有平均功率 } Pr = \oint_S \vec{S}_{av} \cdot d\vec{S} = \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^\pi \frac{\eta_0}{2} \left( \frac{\pi l}{2\lambda R} \sin\theta \right)^2 R^2 \sin\theta d\theta = 40\pi^2 \left( \frac{\pi l}{\lambda} \right)^2 \quad \text{(辐射功率).}$$

12) 辐射电阻. (P299)  $I_m$ : 天线电流的最大值, 此电流元:  $I_m = I$ .

当等效电阻  $R_r$  上的电流等于天线的最大电流, 其损耗功率即为辐射功率.

$$\Rightarrow P_r = \frac{1}{2} I_m^2 R_r = 40\pi^2 \left(\frac{I_m}{\lambda}\right)^2 \text{ 解得: } R_r = 80\pi^2 \left(\frac{\lambda}{\lambda}\right)^2 (S2).$$

辐射电阻越大, 其辐射能力越强.

13) 效率.  $\eta = \frac{P_r}{P_{in}} = \frac{P_r}{P_r + P_d}$ .  $P_{in}$  为输入功率,  $P_d$  为损耗功率.

$$\Rightarrow \eta_A = \frac{R_r}{R_r + R_d}, P_r = \frac{1}{2} I_m^2 R_r, P_d = \frac{1}{2} I_m^2 R_d.$$

13) 增益系数.  $G_{20} = \frac{(S_{av})_{max}}{(S_0)_{av}}$  ( $P_{in}$  相同)  $\Rightarrow D_0 = \frac{(S_{av})_{max}}{(S_0)_{av}}$  ( $P_r$  相同)

$$\Rightarrow G_{20} = D_0 \eta_A, G_{20} (\text{dB}) = 10 \lg G_{20} (\text{dB}).$$

0 (题8-4). ①  $|F(\theta)| = |\cos(\frac{\pi}{4} \cos \theta - \frac{\pi}{4})|$ . ②  $|F(\theta)| = |\cos(\theta - \frac{\pi}{4})|$ .

$\Rightarrow$  ① 令  $|F(\theta)| = 1$  得:  $\cos(\frac{\pi}{4} \cos \theta - \frac{\pi}{4}) = \pm 1$ .  $\frac{\pi}{4} \cos \theta - \frac{\pi}{4} = k\pi$  ( $k = 0, \pm 1, \dots$ )

$$\text{由 } \cos \theta = 4k+1. \Rightarrow \cos \theta = 1 \Rightarrow \theta = 0.$$

$$\text{令 } |F(\theta)| = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ 得: } \cos(\frac{\pi}{4} \cos \theta - \frac{\pi}{4}) = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{4} \cos \theta - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \quad (k = 0, \pm 1, \dots)$$

$$\text{由 } \cos \theta = 2 + 2k \Rightarrow \cos \theta = 0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}$$

$$\text{显然 } 2\theta_{0.5} = \pi$$

画图!!

$$② \text{ 令 } |F(\theta)| = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ 得: } \cos(\theta - \frac{\pi}{4}) = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4} + k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \dots)$$

$$\text{令 } |F(\theta)| = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ 得: } \cos(\theta - \frac{\pi}{4}) = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2} + \frac{k\pi}{2} \quad (k = 0, \pm 1, \dots)$$

$$\text{画图: } \begin{array}{ccccccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \frac{\pi}{4} & \frac{\pi}{2} & \frac{3\pi}{4} & \pi & \frac{5\pi}{4} & \frac{7\pi}{4} & \frac{9\pi}{4} \end{array} \Rightarrow \text{显然 } 2\theta_{0.5} = \frac{\pi}{4} \times 2 = \frac{\pi}{2}.$$

$$\text{也可取 } 0 \leq \theta \leq 2\pi, \theta_1 = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \theta_2 = \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi.$$

$$\text{Wallis formula: } I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = \begin{cases} \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}, & n = \text{even} \\ \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{4}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1, & n = \text{odd} \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^{\pi} \sin^n x dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx, \int_0^{\pi} \cos^n x dx = \begin{cases} 0, & n = \text{odd} \\ 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx, & n = \text{even} \end{cases} \end{array} \right.$$

$$\int_0^{2\pi} \sin^n x dx = \int_0^{2\pi} \cos^n x dx = \begin{cases} 0, & n = \text{odd} \\ 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx, & n = \text{even} \end{cases}$$