大学物理(A)

1. 若 $\vec{a}(t)$ 三阶可导，求证: $\frac{d}{dt}\left[\vec{a}\cdot\left(\frac{d\vec{a}}{dt}\times\frac{d^2\vec{a}}{dt^2}\right)\right]=\vec{a}\cdot\left(\frac{d\vec{a}}{dt}\times\frac{d^3\vec{a}}{dt^3}\right)$

等式右边=

$$\frac{d}{dt}\left[\vec{a}\cdot\left(\frac{d\vec{a}}{dt}\times\frac{d^2\vec{a}}{dt^2}\right)\right]=\frac{d}{dt}\left[\vec{a}\cdot\frac{d\vec{a}\times d\left(\frac{d\vec{a}}{dt}\right)}{dt^2}\right]$$

$$=\frac{d\left[\vec{a}\cdot d\vec{a}\times d\left(\frac{d\vec{a}}{dt}\right)\right]}{dt^3}=\frac{\vec{a}\cdot d\left[d\vec{a}\times d\left(\frac{d\vec{a}}{dt}\right)\right]+d\vec{a}\cdot d\vec{a}\times d\left(\frac{d\vec{a}}{dt}\right)}{dt^3}$$

$$=\frac{\vec{a}\cdot d\left[d\vec{a}\times d\left(\frac{d\vec{a}}{dt}\right)\right]}{dt^3}=\frac{\vec{a}\cdot d^2\vec{a}\times d\left(\frac{d\vec{a}}{dt}\right)+\vec{a}\cdot d\vec{a}\times d^2\left(\frac{d\vec{a}}{dt}\right)}{dt^3}$$

$$=\vec{a}\cdot\left[\frac{d^2\vec{a}}{dt^2}\times\frac{d\left(\frac{d\vec{a}}{dt}\right)}{dt}+\frac{d\vec{a}}{dt}\times\frac{d^2\left(\frac{d\vec{a}}{dt}\right)}{dt^2}\right]$$

$$=\vec{a}\cdot\left[\frac{d\vec{a}}{dt}\times\frac{d^3\vec{a}}{dt^3}\right]$$ = 等式右边

2. 求证: $\vec{A}(t)$ 与 $\left[\frac{d\vec{A}}{dt}+\frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{A}}{A^2}\right)\right]$ 相互垂直。

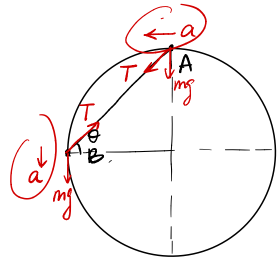
$$\vec{A}\cdot\left[\frac{1}{A^2}\frac{d\vec{A}}{dt}+\frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{A}}{A^2}\right)\right]=\frac{\vec{A}}{(\vec{A}\cdot\vec{A})}\frac{d\vec{A}}{dt}+\frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{A}}{\vec{A}\cdot\vec{A}}\right)$$

$$=\frac{1}{\vec{A}}\frac{d\vec{A}}{dt}+\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\vec{A}}\right)$$

$$=\frac{1}{\vec{A}}\frac{d\vec{A}}{dt}-\frac{1}{\vec{A}^2}\frac{d\vec{A}}{dt}$$

$$=0.$$

两质量为m的小球穿在一光滑的竖直圆环上，小球由一轻绳相连，
并在$\theta=45^\circ$处由静止释放，求绳子上的张力大小？



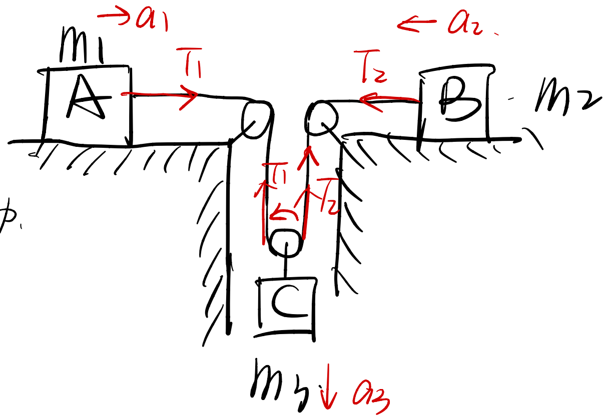
如图受力分析：

由约束关系知小球A、B加速度大小相等，
方向均为其切线方向。

则列方程：
$$\begin{cases} mg - T\sin\theta = ma & (\text{对}B) \\ T\cos\theta = ma & (\text{对}A) \end{cases}$$

可解出：$a=\frac{g}{2}$，进而得：$T=\frac{ma}{\cos\theta}=\frac{\sqrt{2}}{2}mg$.

一细绳两端分别拴着质量为 $m_1=1kg$, $m_2=2kg$ 的物体A、B. 均放在水平桌面上，与桌面间摩擦因数为 $\mu=0.1$. 绳子分别跨过定滑轮吊着一个动滑轮. 动滑轮下吊着 $m_3=1kg$ 的物体C. 设整个绳子在同一平面内，吊着动滑轮的两段绳子相互平行. 如绳子及滑轮质量忽略. 滑轮轴上的摩擦不计. 绳子不可伸长. 求A、B、C相对地面加速度 a_1、a_2、a_3.



作受力分析:

由 $m_2>m_1$ 及 $T_1=T_2$ 可知

连接C的动滑轮逆时针转动.

对A: $T_1-\mu m_1 g=m_1 a_1$.

对B: $T_2-\mu m_2 g=m_2 a_2$

对C: $m_3 g-(T_1+T_2)=m_3 a_3$.

由 $a_1\neq a_2$ 知绳子相对动滑轮有滑动. $\Rightarrow a=a_1-a_3$, $a=a_3-a_2$.

且有 $a_3=a_1-a$, $a_3=a_2+a$.

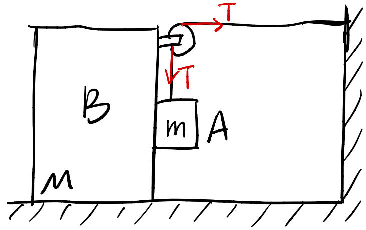
解得: $a_3=\frac{1}{2}(a_1+a_2)$.　　$\Delta v_3=\frac{1}{2}(v_1+v_2)$ <动滑轮>.

联立式解得: $a_1=3m/s^2$. $a_2=1m/s^2$. $a_3=2m/s^2$.

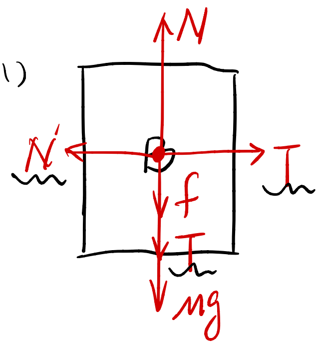
已知物体B与滑块A质量分别为 m, M. 滑轮绳质量均不计. 且绳无伸长. 仅在滑块与物块之间有摩擦. 因数为 μ.

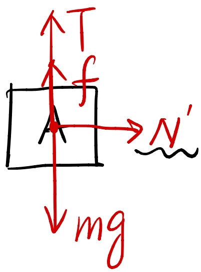
(1) 画出A、B的隔离体受力图.

(2) 计算A、B相对地面加速度.



⇒(1)





(2) 对B有: $T - N' = Ma_B$.

对A水平方向有: $N' = ma_{ax}$

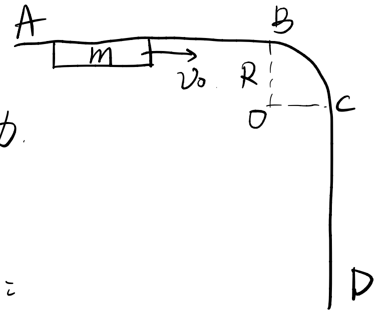
对A竖直方向有: $mg - T - f = ma_{ay}$ $\quad f = \mu N'$.

由约束关系: $a_B = a_{ax}$ $\quad a_{ax} = a_{ay}$ <定滑轮两侧加速度相等>.

由各式解得: $a_A = \dfrac{mg}{M+(2+\mu)m}(\vec{i} - \vec{j})$

$$a_B = \frac{mg}{M+(2+\mu)m}\vec{i}$$

质量为m的物体在无摩擦桌面上滑动，其运动被约束于固定在桌面的挡板内，挡板由AB、CD平直板和半径为R的1/4圆弧组成。t=0时，物体以速度v_0沿AB内壁运动，物体与挡板之间摩擦因数为μ，求物体在CD的速度。



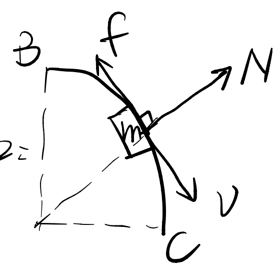
⇒ AB、CD过程与挡板无压力，则无摩擦。

在BC部分时：受到方向与v相反的摩擦力。

$$\overset{\frown}{BC} = \frac{1}{4}\cdot 2\pi R = \frac{1}{2}\pi R$$

设某时刻物块速度为v，则其阻力f大小为：

$$-f = \mu N = \frac{\mu m v^2}{R} = ma$$



<寻找v-x关系>

即 $a = \frac{\mu v^2}{R}$，由 $a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx}$ 知：

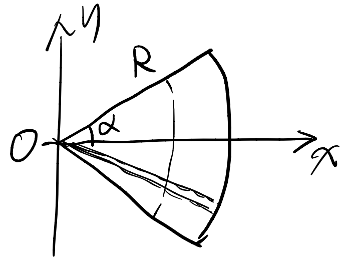
$$v\frac{dv}{dx} = -\frac{\mu}{R}v^2 \Rightarrow \frac{dv}{dx} = -\frac{\mu}{R}v$$

积分：$\frac{dv}{v} = -\frac{\mu}{R}dx \Rightarrow \int_{v_0}^{v}\frac{dv}{v} = -\frac{\mu}{R}\int_0^{\frac{1}{2}\pi R}dx$

得：$v = v_0 e^{-\frac{1}{2}\pi\mu}$

△求质心位置（坐标）

求半径为R，顶角为2α的匀质扇形板质心位置



如图建立坐标系，则其质心点必在x轴上

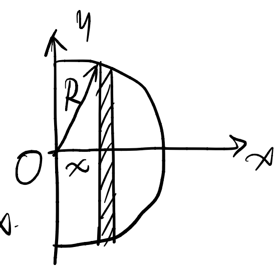
对其中每个扇形微元可等效为三角形，则质心位于中线$\frac{2}{3}$处，则扇形质心位于$r=\frac{2}{3}R$的圆弧上

设该圆弧质量为m，长度为l，则线密度为$\frac{m}{l}=\lambda$

取一小段微元dm，则$dm = rd\theta\cdot\lambda = \lambda r d\theta$，$x = r\cos\theta$

$$\text{则 } x_c = \frac{\int x\,dm}{m} = \frac{\int_{-\alpha}^{\alpha}\lambda r^2\cos\theta\,d\theta}{\lambda r 2\alpha} = \frac{2}{3}R\frac{\sin\alpha}{\alpha}$$

求半圆匀质薄板质心位置



建立坐标系，则质心位置必在x轴上

设质量为M，面积为$\frac{1}{2}\pi R^2$，面密度为$\lambda=\frac{M}{\frac{1}{2}\pi R^2}$

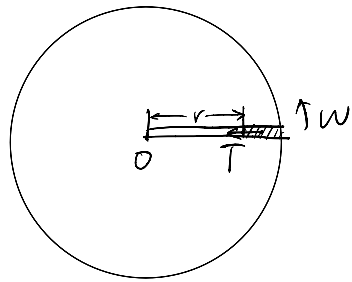
取一长度为$2\sqrt{R^2-x^2}$的微元，宽度为dx则面积为$2\sqrt{R^2-x^2}\,dx$

$\therefore \Rightarrow x\,dm = x\cdot 2\sqrt{R^2-x^2}\cdot\lambda\,dx$

$$x_c = \frac{\int x\,dm}{m} = \frac{\int_0^R 2\lambda x\sqrt{R^2-x^2}\,dx}{\frac{1}{2}\pi R^2\cdot\lambda} = \frac{4R}{3\pi}$$

质量为M,长为L的匀质细绳在水平面内以角速度ω绕O匀速转动.
并始终保持伸直.求绳子离中心r处的张力

细绳线密度$\lambda=\frac{M}{L}$. 取离中心r到L的细绳为研究对象.



$$m=\lambda(L-r)=(L-r)\frac{M}{L}$$

$$R=\frac{1}{2}(L+r)$$

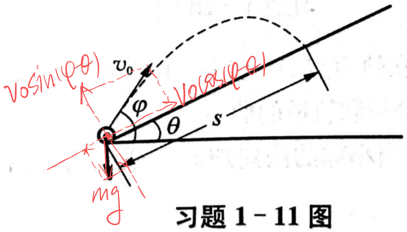
$$\Rightarrow T=m\omega^2 r=\lambda(L-r)\frac{1}{2}(L+r)\omega^2$$

$$=\frac{M}{2L}\omega^2(L^2-r^2)$$

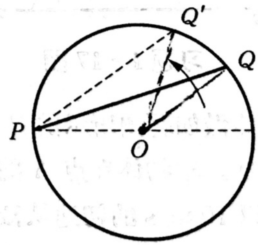
二、1-11 在与水平面成 θ 角的山坡上，一石块以初速度 v_0 做斜抛运动，如题图所示。

(1) 若抛射角为 φ，求石块沿山坡方向的射程 s；

(2) 问抛射角 φ 为多大时，s 最大？



习题 1－11 图



习题 1－12 图

~~如图分解可列~~：

$$\begin{cases} v_0\sin(\varphi-\theta) - g\cos\theta \cdot t = -v_0\sin(\varphi-\theta) \quad (\text{竖直}) \\ s = v_0\cos(\varphi-\theta)t - \frac{1}{2}g\sin\theta \cdot t^2 \end{cases}$$

解得 $s = \frac{2v_0^2}{g\cos^2\theta}\left[\sin(\varphi-\theta)\cos(\varphi-\theta)\cos\theta - \sin^2(\varphi-\theta)\sin\theta\right]$

$= \frac{2v_0^2}{g\cos^2\theta}\sin(\varphi-\theta)\cos\varphi$

②由 $\sin(\varphi-\theta)\cos\varphi = \frac{1}{2}[\sin(2\varphi-\theta) - \sin\theta]$

代入得：$s = \frac{v_0^2[\sin(2\varphi-\theta)-\sin\theta]}{g\cos^2\theta}$

当 $\sin(2\varphi-\theta)=1$ 即 $2\varphi-\theta=\frac{\pi}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}+\theta$ 时 s 最大。

1-1 质点沿 x 轴正向运动，加速度 $a=-kv$（k 为常数）。设从原点出发时速度为 v_0，求运动方程 $x=x(t)$。

初始条件

$$\boxed{a=\frac{dv}{dt}=-kv} \Rightarrow \frac{dv}{v}=-kdt$$

两边积分：$\ln v=-kt+C_1$ 代入 $(t,v)=(0,v_0)$ 得 $C_1=\ln v_0$

$$\therefore v=v_0e^{-kt}.$$

$$\boxed{v=\frac{dx}{dt}=v_0e^{-kt}} \Rightarrow dx=v_0e^{-kt}dt$$

两边积分：$x=-\frac{v_0}{k}e^{-kt}+C_2$. 代入 $(t,x)=(0,0)$ 得：$C_2=\frac{v_0}{k}$

$$\therefore x(t)=-\frac{v_0}{k}e^{-kt}+\frac{v_0}{k}$$

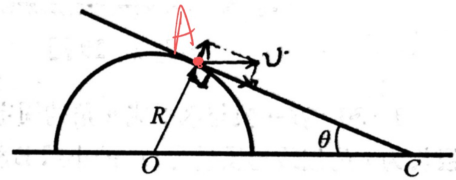
和此法一致：

$$\begin{cases} a=\frac{dv}{dt}=-kv \\ v=\frac{dx}{dt} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2}+k\frac{dx}{dt}=0.$$

解此二阶方程.

3



习题 1 - 24 图

1-24　如题图所示，一细杆可以绕通过点 C 的水平轴转动，半径为 R 的半圆环向右以匀速 v 运动，运动过程中细杆恒与半圆环相切。当细杆与水平线的交角为 θ 时，求其绕水平转轴转动角速度的大小。

~~重~~点讨论切点A：

任何情况下，切点A相对地面速度为v，水平向右.

按图式分解：沿杆方向运动速度为 $v\cos\theta$，

沿垂直杆方向运动速度为 $v\sin\theta$.

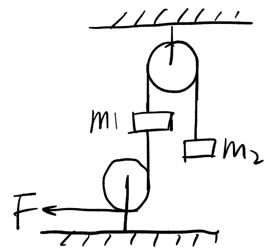
此时半径为 $L=\frac{R}{\tan\theta}$，则 $w=\frac{v'}{R'}=\frac{v\sin\theta}{L}=\frac{v\sin\theta\tan\theta}{R}$.

还可计算切点在圆周上运动的角速度为

$$w'=\frac{v''}{R''}=\frac{v\cos\theta}{R}.$$

4

如图所示装置中，若两个滑轮与绳子质量及摩擦不计，绳子不可伸长，在外力F作用下，求物体m_1、m_2加速度大小及m_1与m_2间绳子张力



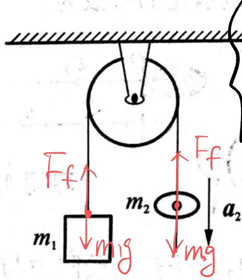
受力分析： $F+m_1g-m_2g=(m_1+m_2)a$

$$\Rightarrow a=\frac{F+m_1g-m_2g}{m_1+m_2}$$

$$T-m_2g=m_2a$$

$$\Rightarrow T=m_2(a+g)=\frac{m_2F+2m_1m_2g}{m_1+m_2}$$

1-27 一条轻绳跨过一轻滑轮（滑轮与轴间摩擦可忽略），在绳的一端挂一质量为 m_1 的物体，在另一侧有一质量为 m_2 的环，求当环相对于绳以恒定的加速度 a_2 沿绳向下滑动时，物体和环相对地面的加速度各是多少？环与绳间的摩擦力多大？



$$\begin{cases} a_2' = a_2 - a \\ m_2 g - f = m a_2' \\ f - m_1 g = m_1 a \end{cases}$$

习题 1－27 图

对环作分析：

$$m g - F_f = m_2 a_2 \quad (a_2\text{为相对于绳的加速度})$$

对物体分析：

$$m_1 g - F_f = m_1 a_1' \quad (a_1'\text{为相对于地面加速度})$$

设环相对于地面加速度为 a_2'.

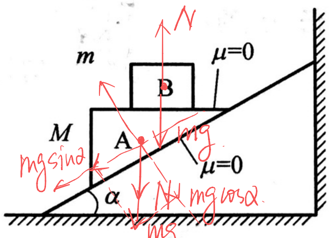
则 $a_2 = a_1' + a_2'$ △约束条件

联立三式可解出：

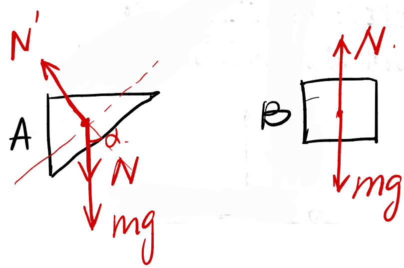
$$\begin{cases} a_1' = \dfrac{(m_1 - m_2)g + m_2 a_2}{m_1 + m_2} \\[2ex] a_2' = \dfrac{(m_2 - m_1)g + m_1 a_2}{m_1 + m_2} \\[2ex] f = \dfrac{m_1 m_2 (2g - a_2)}{m_1 + m_2} \end{cases}$$

5

1-29 一质量为 M 的楔形物体 A，放在倾角为 α 的固定光滑斜面上，在此楔形物体的水平表面上又放一质量为 m 的物体 B，如题图所示。设 A 与 B 间，A 与斜面间均光滑接触。开始时，A 与 B 均处于静止状态，当 A 沿斜面下滑时，在 B 接触到斜面之前，求 A、B 相对地面的加速度。



习题 1-29 图



对A分析：$(Mg+N)\sin\alpha = Ma_A$

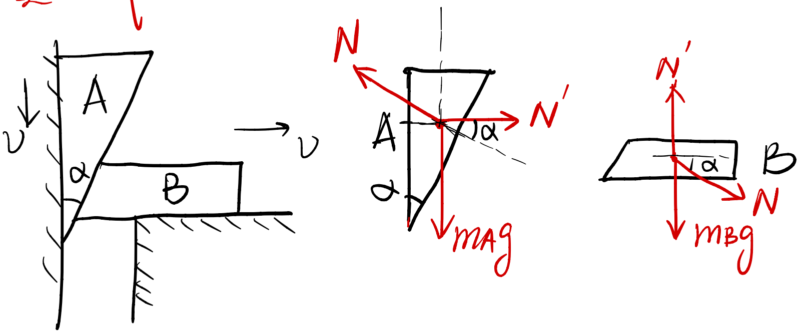
对B分析：$mg - N = ma_B$

由加速度关联：$a_B = a_A\sin\alpha$　△约束条件

联立三式解得：$a_A = \dfrac{2(M+m)g}{4M+m}$

$a_B = a_A\sin\alpha = \dfrac{2(M+m)g\sin\alpha}{4M+m}$

类似地：



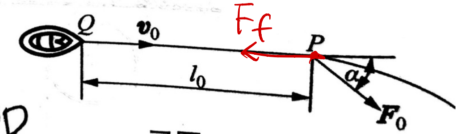
$$\Rightarrow \begin{cases} m_Ag - N\sin\alpha = m_Aa_A \\ N\cos\alpha = m_Ba_B \end{cases}$$

约束关系：$a_A = a_B$

1-34　如题图所示，一质量为 M 的机动船，在进入河弯道前于点 Q 处关闭发动机，以初速度 v_0 在静水中行驶，设水的阻力与船速成正比，且方向相反，比例系数为 k。

（1）若点 Q 至弯道处点 P 的距离为 l_0，求船行至点 P 时的速率 v_P；

（2）若船行至点 P 时开动发动机，给船以 F_0 的转向力，F_0 与速度方向的夹角为 α，如图所示，则求船在该点 P 的切向加速度分量及航道的曲率半径。!!!



习题 1-34 图

(1) 由阻力与船速成正比得：$F_f=-kv=Ma$

∴ $a=\frac{F_f}{M}=-\frac{k}{M}v$

又 $a=\frac{dv}{dt}=-\frac{k}{M}v \Rightarrow \frac{dv}{v}=-\frac{k}{M}dt$

两边积分：$\ln v=-\frac{k}{M}t+C_1$，代入 $t=0$，$v=v_0$ 得 $C_1=\ln v_0$

∴ $v=v_0e^{-\frac{k}{M}t}$ 又由 $v=\frac{dx}{dt}=v_0e^{-\frac{k}{M}t}$ 得：

$dx=v_0e^{-\frac{k}{M}t}dt$

两边积分：$x=-\frac{M}{k}v_0e^{-\frac{k}{M}t}+C_2$，代入 $t=0$，$x=0$ 得：$C_2=\frac{Mv_0}{k}$

∴ $x=-\frac{M}{k}v_0e^{-\frac{k}{M}t}+\frac{Mv_0}{k}$

当 $x=l_0$ 时有 $[v_0e^{-\frac{k}{M}t}]=-\frac{k}{M}(l_0-\frac{Mv_0}{k})=v_P=v_0-\frac{k}{M}l_0$

(2)
$$\begin{cases} F_0\cos\alpha-F_f=Ma_t \\ F_0\sin\alpha=Ma_n=M\frac{v_P^2}{\rho} \end{cases}$$
联立解得：

$$\begin{cases} a_t=\frac{F_0\cos\alpha}{M}-\frac{kv_0}{M}+\frac{k^2}{M^2}l_0 \\ \rho=\frac{M(v_0-\frac{k}{M}l_0)^2}{F_0\sin\alpha} \end{cases}$$

?

1-37 已知一质量为 m 的质点在 x 轴上运动，质点只受到指向原点的引力作用，引力大小与质点离原点的距离 x 的平方成反比，即 $f=-k/x^2$，k 是比例常数。设质点在 $x=A$ 时的速度为零。求质点在 $x=A/4$ 处的速度的大小。

1-38 一质量为 2 kg 的质点，在 xy 平面上运动，受到外力 $\boldsymbol{F}=4\boldsymbol{i}-24t^2\boldsymbol{j}$ 的作用，$t=0$ 时，它的初速度为 $\boldsymbol{v}_0=3\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}$。求 $t=1$ s 时质点的速度及受到的法向力 $\boldsymbol{F}_n$。

(1-37) 由题可知：$f=ma=-\frac{k}{x^2}$ 即 $a=-\frac{k}{mx^2}$

$\because a=\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}=v\frac{dv}{dx}=-\frac{k}{mx^2}$

$\Rightarrow vdv=-\frac{kdx}{mx^2}$ 两边积分得：$\frac{1}{2}v^2=\frac{k}{mx}+C_1$

代入 $x=A$，$v=0$ 得：$C_1=-\frac{k}{mA}$，即 $v^2=\frac{2k}{m}(\frac{1}{x}-\frac{1}{A})$

代入 $x=\frac{A}{4}$ 得：$v_x=\sqrt{\frac{6k}{mA}}$

△ 运用公式 $a=\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}=v\frac{dx}{dt}$

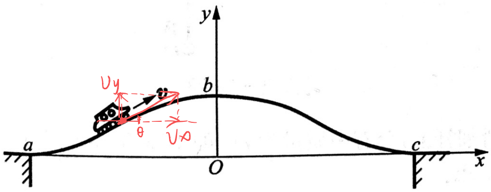
△ 根据题意找 $v-t$ / $a-t$ / $x-t$ / $v-a$ / $v-x$ / $a-x$ 关系，再积分求解。

8

1-23 如题图所示，abc 是一立交桥面，桥面中部区间按 $y = H - Kx^2$ 的规律变化。若一质量为 m 的汽车驶过桥面时，保持 x 方向的分速度 $v_x = V$ 不变。试计算汽车在桥中部区间任一点的：

(1) 速度矢量和加速度矢量；

(2) 切向加速度和法向加速度。



(1) 对 $y = H - Kx^2$ 求导得：$\tan\theta = -2Kx$

则 $V_y = V_x \tan\theta = -2KxV$ ∴ $\vec{v} = V\vec{i} - 2KxV\vec{j}$ $(x<0)$

在 dt 时间后，汽车的速度矢量变为 $\vec{v}' = V\vec{i} - K(x+Vdt)V\vec{j}$

∴ $\vec{a} = \dfrac{d\Delta\vec{v}}{dt} = \dfrac{[V\vec{i} - 2K(x+Vdt)V\vec{j}] - [V\vec{i} - 2KxV\vec{j}]}{dt} = -2KV^2\vec{j}$

↳ $\vec{v} = V\vec{i} - 2KxV\vec{j} = V\vec{i} - 2KV^2t\vec{j}$

$\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt} = -2KV^2\vec{j}$

(2) 由(1)得：$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{V^2 + (-2KxV)^2} = V\sqrt{1+4K^2x^2}$

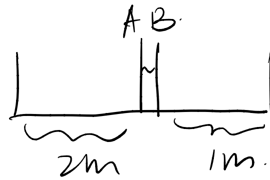
∴ $a_t = \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{-4K^2V^2x}{\sqrt{4K^2x^2+1}}$

由 $\rho^{-1} = \left|\dfrac{y''}{[1+(y')^2]^{\frac{3}{2}}}\right| \Rightarrow \rho = \dfrac{(1+4K^2x^2)^{\frac{3}{2}}}{2K}$

9

∴ $a_n = \dfrac{v^2}{\rho} = \dfrac{2KV^2}{\sqrt{1+4K^2x^2}}$

长为3m，质量为4kg的小车静止在光滑水平面，小车上距右端1m处放着质量为 $m_A=3kg$，$m_B=2kg$ 的小滑块A和B，其宽度可忽略，A、B之间有质量和长度不计的弹簧，现释放弹簧，A、B沿相反方向运动，求小车在整个过程中的位移。



设小车位移为x，取右为正方向：

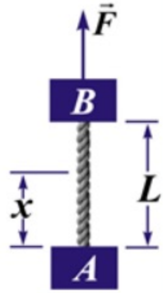
由质心运动定理：

$$3\times(-2\underline{+x})+2\times(1\underline{+x})+4x=0$$

解得：$x=\frac{4}{9}m$.

错误：$3\times(-2)+2\times1+4x=0$

如图所示，质量为 m 的均匀绳，长为 L，两端分别连接物块 A 和 B，其质量分别为 m_A、m_B，今在 B 端施以大小为 F 的竖直向上的拉力，使绳和物体向上运动，则在距离绳的下端为 x 处绳中的张力大小为

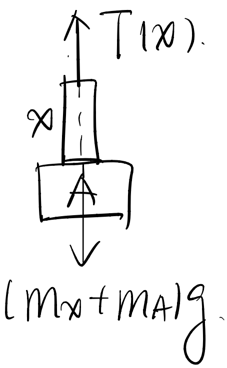


A、$\dfrac{F(m_A+mx/L)}{m+m_A+m_B}$；

B、$\dfrac{F(m_A+mxL)}{m+m_A+m_B}$；

C、$\dfrac{F(m_A-mx/L)}{m+m_A+m_B}$；

D、$\dfrac{F(m_A-mxL)}{m+m_A+m_B}$。



$$T(x)=(m_x+m_A)(g+a)$$

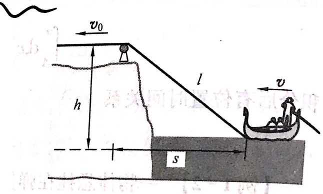
其中 $m_x=\dfrac{mx}{L}$.

$$a=\frac{F-(m+m_A+m_B)g}{m+m_A+m_B}.$$

$$\Rightarrow T(x)=\left(\frac{mx}{L}+m_A\right)\frac{F}{m+m_A+m_B}$$

10

【例 1－3】 如图 1－6 所示，小船在绳子的牵引下运动，河岸高度为 h，船离岸距离为 s。设拉绳速度大小恒定为 v_0，求船的速度与加速度。



由几何关系有：

$$l^2 = h^2 + s^2.$$

对t求导：

$$2l\frac{dl}{dt} = 2s\frac{ds}{dt} \Rightarrow l\frac{dl}{dt} = s\frac{ds}{dt}$$ Δ约束关系、

又有 $\frac{dl}{dt} = v_{\text{绳}} = v_0$，$\frac{ds}{dt} = v_{\text{船}}$. 则：

$$v_{\text{船}} = \frac{l}{s}v_0 = \frac{\sqrt{h^2+s^2}}{s}v_0$$

$$a_{\text{船}} = \frac{dv_{\text{船}}}{dt} = \frac{d\left(\frac{\sqrt{h^2+s^2}}{s}v_0\right)}{dt}$$

$$= \left(\frac{\frac{s^2}{\sqrt{h^2+s^2}} - \sqrt{h^2+s^2}}{s^2}\right)\frac{ds}{dt}$$

$$= \left(-\frac{h^2}{s^2\sqrt{h^2+s^2}}\right)v_{\text{船}}$$

$$= -\frac{h^2}{s^2 l}\cdot\frac{l}{s}v_0 = -\frac{h^2}{s^3}v_0$$

【例 1-13】 如图 1-32 所示，两质量均为 m 的小球穿在一光滑的竖直圆环上，小球由一轻绳相连，并在 $\theta=45°$ 位置由静止释放。问释放时绳上张力大小为多少?

约束关系

解 设释放瞬间绳上张力大小为 T，A 球切向加速度分量为 a，由约束关系知释放瞬间 B 球切向加速度分量也为 a。分别写出释放瞬间 A，B 两球牛顿第二定律的切向分量表达式

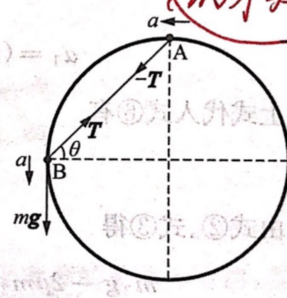


图 1-32

$$T\frac{\sqrt{2}}{2}=ma,$$

$$mg-T\frac{\sqrt{2}}{2}=ma,$$

由此得切向加速度分量 a 与绳上张力大小 T 为

$$a=\frac{g}{2},$$

$$T=\frac{\sqrt{2}}{2}mg。$$

$mg-T\sin\theta=ma.$

$T\cos\theta=ma.$

$mg-T\sin\theta=T\cos\theta.$

$T=\frac{mg}{\sin\theta+\cos\theta}=\frac{mg}{\ }$

△解法步骤：定量描述约束条件.

几何约束▲

初始条件.

运动学约束（运动方向，速度大小已知轨道的）

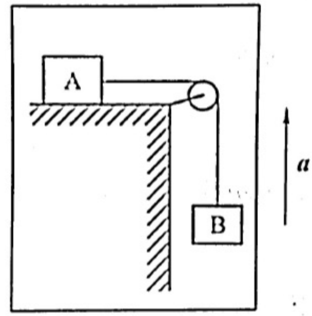
△定量描述运动状态.

微元法

运动的分解

12

例：如图所示，系统置于以 $a=\frac{1}{4}g$ 的加速度上升的升降机内; A、B两物体质量相同均为 m, A所在的桌面是水平的，绳子和定滑轮质量均不计, 若忽略滑轮轴上和桌面上的摩擦，并不计空气阻力, 绳中张力为多少.



(a)

1、选用地面参考系：

$$A:\begin{cases} N_A - mg = m\cdot\frac{1}{4}g \\ T = ma_x \end{cases}$$

<A、B一定相对桌面运动>

$$B:\ mg - T = m\left(a_x - \frac{1}{4}g\right)$$

解得：$a_x = \frac{5}{8}g$

$$T = \frac{5}{8}mg$$

2、引力等效于加速运动

$$g_{eff} = \frac{5}{4}g$$

$$mg_{eff} = 2ma_x \Rightarrow a_x = \frac{5}{8}g$$

3、选用升降机参考系 △非惯性参考系

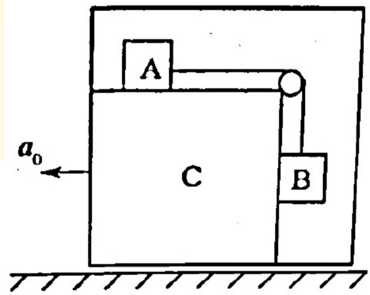
A、B受到竖直向下，大小为 $\frac{1}{4}g$ 的惯性力

对B：$ma' + mg = 2ma_x \quad a' = \frac{1}{4}g$

$$T = ma_x = \frac{5}{8}mg$$

13

例： 车厢内的滑轮装置如图所示，平台C与车厢一起运动，滑轮固定不转动，只是为轻绳提供光滑的接触。物块A与水平桌面间摩擦因数 $\mu=0.25$，A的质量 $m_A=20\mathrm{kg}$，物块B的质量 $m_B=30\ \mathrm{kg}$。今使车厢沿图示水平朝左方向匀加速运动，加速度 $a_0=2\ \mathrm{m/s^2}$，假定稳定后绳将倾斜不晃，试求绳中张力 T。



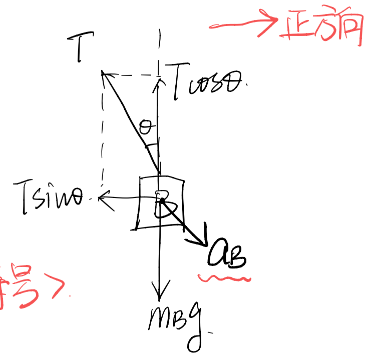
先假设A、B相对车厢静止，则有：

$$\begin{cases} f-T=m_Aa_0 \\ N_A=m_Ag \\ T\cos\theta-m_Bg=0 \\ T\sin\theta=m_Ba_0 \end{cases}$$

解得：$f=m_Aa_0+m_B\sqrt{a_0^2+g^2}>\mu m_Ag$

则A、B相对车厢非静止

设其相对车厢加速度为 a_A、a_B，忽略轻绳伸缩，有 $a_A=a_B=a$

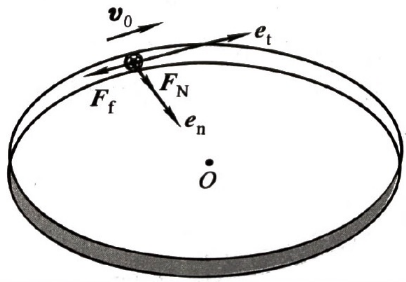


$$\begin{cases} T-f=m_A(a-a_0) \\ N_A=m_Ag \\ m_Bg-T\cos\theta=m_Ba\cos\theta \\ -T\sin\theta=m_B(a\sin\theta-a_0) \end{cases}$$

<注意符号>

解得：$T=\dfrac{m_Am_B}{m_A+m_B}(\sqrt{a_0^2+g}+\mu g-a_0)$

例 光滑的水平桌面上放置一半径为 R 的固定圆环，物体紧贴环的内侧作圆周运动，其摩擦因数为 μ，开始时物体的速率为 v_0，求：
(1) t时刻物体的速率；
(2) 当物体速率从 v_0 减少到 $v_0/2$ 时，物体所经历的时间及经过的路程.



(1)
$$\begin{cases} F_N = ma_n = m\frac{v^2}{R} \\ F_f = -\mu F_N = ma_t = m\frac{dv}{dt} \end{cases} \Rightarrow \mu\frac{v^2}{R} = \frac{dv}{dt}$$

积分：$\int_0^t dt = -\frac{R}{\mu}\int_{v_0}^{v} \frac{dv}{v^2} \Rightarrow v = \frac{Rv_0}{R+v_0\mu t}$ 为任一时刻速率

由 $v = \frac{ds}{dt} = \frac{Rv_0}{R+v_0\mu t}$ 得：$\frac{ds}{R} = \frac{v_0 dt}{R+v_0\mu t}$.

积分：$\int_0^s \frac{ds}{R} = \int_0^t \frac{v_0 dt}{R+v_0\mu t} \Rightarrow s = \frac{R}{\mu}\ln\left(1+\frac{v_0\mu t}{R}\right)$

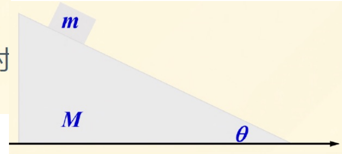
为任一时刻路程

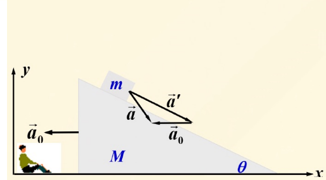
(2). $v = \frac{Rv_0}{R+v_0\mu t} = \frac{v_0}{2} \Rightarrow t_0 = \frac{R}{\mu v_0}$

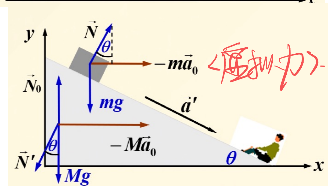
经过的路程为 $s = \frac{R}{\mu}\ln 2$.

路程？位移？

例：在光滑水平面上放一质量为 M、底角为 θ、斜边光滑的楔块。今在其斜边上放一质量为 m 的物体，求物体沿楔块下滑时对楔块和对地面的加速度。







如图：$\vec{a}'$是物体相对于楔块的加速度

$\vec{a}$是物体相对于地面的加速度

$\vec{a}_0$是楔块相对于地面的加速度。

关系为：$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_0$ （静=动+牵）

对物体分析：

$$\begin{cases} N + ma_0\sin\theta - mg\cos\theta = 0 \\ ma_0\cos\theta + mg\sin\theta = ma' \end{cases}$$

<受力分析>

对楔块有：$N\sin\theta = Ma_0$

上式联立求解：

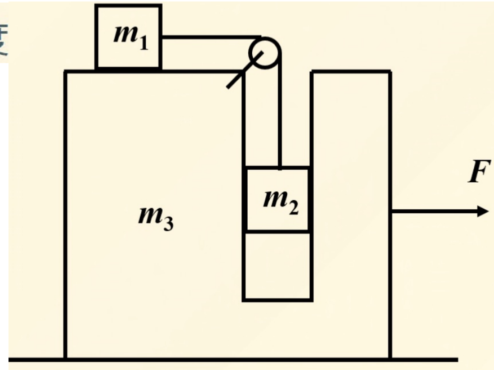
$$a' = \frac{(M+m)\sin\theta}{M+m\sin^2\theta}g$$

$$a_0 = \frac{m\sin\theta\cos\theta}{M+m\sin^2\theta}g$$

由 $\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_0$ 得：

$$\vec{a}\begin{cases} a_x = a'\cos\theta - a_0 = \dfrac{M\sin\theta\cos\theta}{M+m\sin^2\theta}g. \\ a_y = -a'\sin\theta = -\dfrac{(M+m)\sin^2\theta}{M+m\sin^2\theta}g. \end{cases}$$

[例] 所有接触无摩擦，求各物体加速度



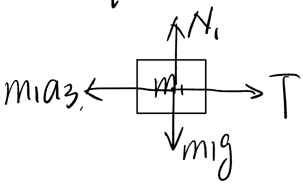
1°. 采用地面参考系.

2°. 以M_3为参考系.

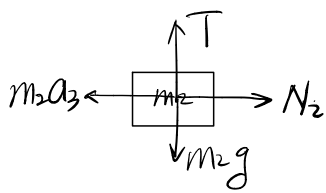
设m_3相对地面以加速度a_3向右运动

m_3参考系下 m_1具有向右加速度a，m_2具有向下加速度也为a.

对m_1分析：



对m_2分析：

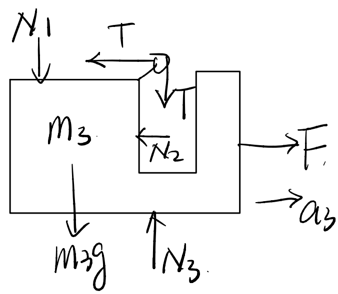


列方程得：

$$T-m_1a_3=m_1a$$

$$m_2g-T=m_2a$$

$$N_2=m_2a_3$$



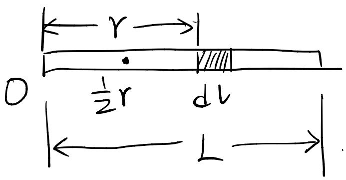
地面参考系下对m_3有：$F-N_2-T=m_3a_3$

联合上式可解：

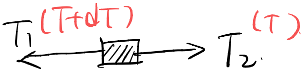
17

[例1-26] 一质量分布均匀的绳子，质量为 M，长为 L，以恒定角速度 ω 在水平面上绕点 O 旋转。求绳中的张力 $T(r)$。

1. 由牛顿第二定律，取 r 处 dl 为研究对象



对 dl 有：



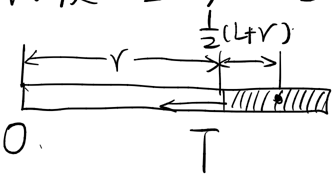
$$T_1 = m\omega^2 R = \lambda L \cdot \omega^2 \cdot \frac{1}{2}L = \frac{1}{2}\lambda\omega^2 L^2$$

$$T_2 = m\omega^2 R = \lambda r \cdot \omega^2 \cdot \frac{1}{2}r = \frac{1}{2}\lambda\omega^2 r^2$$

$$\therefore dT = T_1 - T_2 = \frac{1}{2}\lambda\omega^2(L^2 - r^2)$$

$$T(r) = \frac{1}{2}\lambda\omega^2(L^2 - r^2),\quad \lambda = \frac{M}{L}$$

2. 由质心运动定理，取一小段绳子 $[r, L]$ 作研究对象



$$T = m\omega^2 R$$

$$m = \lambda(L - r),\quad R = \frac{1}{2}(L + r)$$

代入得：$T = \frac{1}{2}\lambda\omega^2(L^2 - r^2)$

Δ 典例：变质量物体运动问题.

$$\vec{F} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} - \vec{u}\frac{dm}{dt}$$

<主体>　　<副体>

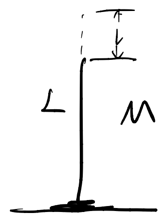
m, v为主体质量和速度

dm, u为副体合并前或分离后瞬间速度

F为作用于整个系统上的力

1°. $\vec{u}=0$时. $\vec{F} = \frac{d(m\vec{v})}{dt}$　　2°. $\vec{u}=\vec{v}$时. $\vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$.

质量为M的匀质链条，全长为L. 手持其上端. 使下端正好碰到桌面. 然后放手让它自由下落到桌面上，求链条落到桌面长度为l时, 桌面受到链条作用力的大小.



[法一]：变质量系统动力学方程.

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} + \frac{dm}{dt}\vec{u}$$

其中$m\frac{dv}{dt}$为落在桌面上的部分. $\frac{dm}{dt}u$为空中部分.

F为系统所受合外力. $F = Mg - N$ (向下为正方向).

$$m\frac{dv}{dt} = mg - N + \frac{dm}{dt}u.$$

$m = \lambda l$, $\frac{dv}{dt} = 0$. 即 $N = mg + \frac{dm}{dt}u$.

$$\frac{dm}{dt} = \frac{d(\lambda l)}{dt} = \lambda\frac{dl}{dt} = \lambda v = \lambda u$$

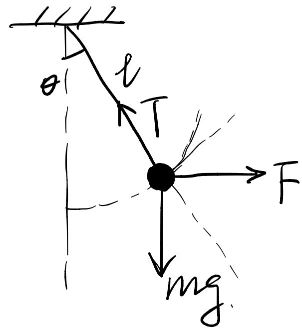
$$\Rightarrow \lambda = \frac{M}{L}, \quad u = \sqrt{2gl}$$

$$\therefore N = mg + \frac{dm}{dt}u = \frac{M}{L}gl + 2\frac{M}{L}gl = 3\frac{M}{L}gl.$$

【法二】动量定理

Δ 变力作功

小球在水平变力F下从最低点开始缓慢移动，直到与偏竖直方向成θ角，由于小球移动缓慢，在任何位置上都可以为小球处于平衡状态，求变力F所做功。



$$dA = F\cos\theta\, ds$$

由平衡状态：$F = mg\tan\theta$

又有：$ds = l\,d\theta$

$$\therefore dA = F\cos\theta\, ds = mg\tan\theta\cos\theta\, l\, d\theta$$

$$= mgl\sin\theta\, d\theta$$

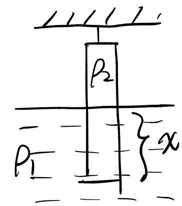
积分：$\int_0^A dA = \int_0^\theta mgl\sin\theta\, d\theta$

$$\Rightarrow A = mgl(1-\cos\theta)$$

Δ 变力作功

在密度为ρ_1的液面上方，悬挂一根长为l、密度为ρ_2的均匀棒，棒的下端恰与液面接触，剪断细绳，设细棒只在浮力和重力作用下运动，在$\frac{\rho_1}{2}<\rho_2<\rho_1$条件下，求细棒下落过程中的最大速度$v_m$及能进入液体的最大深度$H$。

$a=0$　　$v=0$



下沉x时浮力$F(x)$为$-\rho_1 Sxg$

浮力作功：$A_F=-\int_0^x \rho_1 Sxg\,dx=-\frac{1}{2}\rho_1 Sgx^2$

重力作功：$A_G=\rho_2 Slgx$

则 $E_k=\frac{1}{2}mv^2=A_G-A_F=\rho_2 Slgx-\frac{1}{2}\rho_1 Sgx^2$

$\frac{dE_k}{dx}=\rho_2 Slg-\rho_1 Sgx=0$ 得 $x=\frac{\rho_2}{\rho_1}l$，此时有v_m

代入 $x=\frac{\rho_2}{\rho_1}l$ 得 $v_m=\sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_1}gl}$

设最大深度$H>l$，则浮力作功：

$$A_F=-\int_0^l \rho_1 Sxg\,dx-\int_l^H \rho_1 Slg\,dx=-\frac{1}{2}\rho_1 Sgl^2-\rho_1 Sgl(H-l)$$

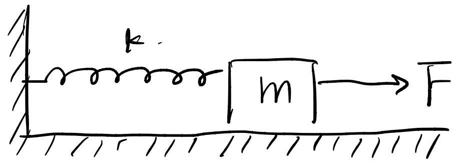
重力作功：$A_G=\rho_2 SlgH$

由 A_F+A_G 得：$H=\frac{\rho_2}{\rho_1-\rho_2}\cdot\frac{l}{2}$

令$H>l$得$\rho_2>\frac{\rho_1}{2}$，满足条件，假设成立

A 最大位移和最大速度

劲度系数为k的轻弹簧，一端固定在墙上，一端与质量为m的物体相连，物体与桌面间摩擦因数为μ。开始时物体静止于平衡位置，若物体受水平向右恒力F（F>μmg）作用，求物体最大位移和最大速度。



(1) 最大速度时 $a=0$

$$F-\mu mg-kx=0$$

$$\Rightarrow x=\frac{1}{k}(F-\mu mg)$$

由 $E_k=Fx-\mu mg\,x-\frac{1}{2}kx^2=\frac{1}{2}mv^2$ 可得 v_m。

(2) 最大位移时 $v=0$

由功能原理：$Fx_m-\mu mg x_m=\Delta E$

$$\Delta E=\left(\frac{1}{2}kx_m^2+0\right)-(0+0)=\frac{1}{2}kx_m^2$$

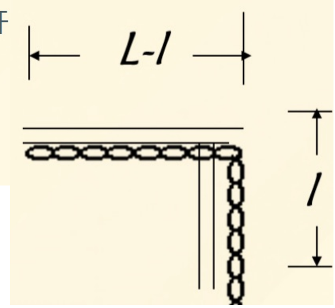
联立可得：$x_m=\frac{2}{k}(F-\mu mg)$

由动能定理：$E_k=Fx-\mu mgx-\frac{1}{2}kx^2$

令 $E_k=0$ 得 $x_m=\frac{2}{k}(F-\mu mg)$

[例] 一条质量为 M，长为 L 的匀质链条放在一光滑水平桌面上，开始时链条静止。长为 l 一段铅直下垂。求：

(1) 整个链条刚离开桌面时的速度。
(2) 由开始运动到完全离开桌面所经历的时间。



(1) 设下落长度为 x 时：

$$\lambda x g - T = \lambda x a_1$$

$$T = \lambda(L-x)a_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{M}{L}xg = Ma$$

$$a_1 = a_2 = a \qquad a = \frac{g}{L}x$$

$$\lambda = \frac{M}{L}$$

$$a = \frac{dv}{dt} = v\frac{dv}{dx} = \frac{g}{L}x \Rightarrow vdv = \frac{g}{L}x\,dx$$

积分：$\int_0^v v\,dv = \int_l^x \frac{g}{L}x\,dx$

$$\Rightarrow v(x) = \sqrt{\frac{g}{L}(x^2-l^2)}$$

$x=L$ 时：$v = \sqrt{\frac{g}{L}(L^2-l^2)}$ 即为离开桌面时的速度

(2) 由 $v = \frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{g}{L}(x^2-l^2)} \Rightarrow dt = \sqrt{\frac{L}{g}}\frac{dx}{\sqrt{x^2-l^2}}$

积分：$\int_0^T dt = \int_l^L \frac{dx}{\sqrt{x^2-l^2}}$

$$\Rightarrow T = \sqrt{\frac{L}{g}}\ln\frac{L+\sqrt{L^2-l^2}}{l}$$

△由功能原理/动能定理将所求物理量联系起来

质量m的卫星在圆轨道上运行，受到空气阻力，阻力与速度正比，$f=-kv$，求卫星从离地心$r_0=4R$（R为地球半径）陨落到地球地面所需时间。

⇒卫星运行dt时间内，阻力f所做功为：

$$dA=-kv\cdot ds=-kv\cdot vdt=-kv^2dt$$

运行时有：

$$m\frac{v^2}{r}=\frac{GMm}{r^2}\quad 即\quad v^2=\frac{GM}{r}$$

即飞船的动能$E_k=\frac{1}{2}mv^2=\frac{GMm}{2r}$

另有飞船的势能$E_p=\int_{\infty}^{r}\frac{GMm}{r^2}dr=-\frac{GMm}{r}$

⇒飞船具有的能量$E=-\frac{GMm}{2r}$

由功能原理：$dA=dE=d\left(-\frac{GMm}{2r}\right)=\frac{GMm}{2r^2}dr$

即$-kv^2dt=\frac{GMm}{2r^2}dr$　　↳也可以直接$dA=dE_k$（动能定理）

⇒　$-kdt=\frac{m}{2r}dr$

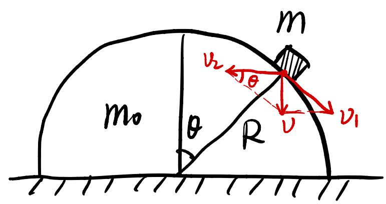
积分得：$\int_0^t -kdt=\int_R^{4R}\frac{m}{2r}dr$

$$t=-\frac{m}{k}\ln 2$$

光滑水平面上有一半径为R质量为m_0的表面光滑的半球，在半球顶部放一质量为m的小物块，小物块受轻微扰动而下滑.

(1) 求物块滑至θ角位置时相对半球的速率. 小球未脱离半球.

(2) 如物块脱离半球时θ=45°. 求$\frac{m_0}{m}$的值.



⇒ (1). 系统总机械能设为0.

则当小物块下滑至θ角时:

如图. v_1为小物块相对半球速度

v_2为半球相对地面速度. v为小物块相对地面速度.

系统水平方向动量守恒: $m(v_1\cos\theta-v_2)-m_0v_2=0$

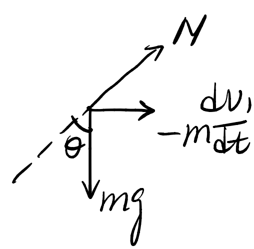
由功能原理: $mgR(1-\cos\theta)=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}m_0v_2^2$

其中 $v^2=v_1^2+v_2^2-2v_1v_2\cos\theta$ (余弦定理)

联立解得: $v_1=\sqrt{\frac{2gR(1-\cos\theta)(m+m_0)}{m_0+m\sin\theta}}$

(2) 以半球为参考系. 物块脱离前做圆周运动. 受重力mg. 半球支持力N. 和惯性力$-m\frac{dv_1}{dt}$. 物块沿径向动力学方程:

$$m\frac{v_1^2}{R}=mg\cos\theta-N-m\frac{dv_1}{dt}\sin\theta$$



脱离半球时有 N=0 及 $\frac{dv_1}{dt}=0$

即 $m\frac{v_1^2}{R}=mg\cos\theta$

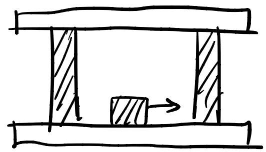
将 v_1 代入得：

$$\frac{2(1-\cos\theta)(m+m_0)}{m_0+m\sin^2\theta}=\cos\theta.$$

代入 $\theta=45^\circ$ 得：

$$\frac{m_0}{m}=\frac{8-5\sqrt{2}}{6\sqrt{2}-8}=1.914.$$

光滑水平地面静置一质量m的箱子，箱内光滑底面上质量也为m的物块以某一初速度开始运动，与箱子两壁反复碰撞，已知碰撞的恢复系数为$e=0.95$，求至少发生多少次碰撞才使系统总能量损失40%



质量为m_1、m_2的物体以速度v_{10}、v_{20}碰撞后损失动能$\Delta E_k=\frac{1}{2}(1-e^2)\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}(v_{10}-v_{20})^2$.

设物块初速度为v，第一次碰撞后损失动能$\Delta E_{k_1}=\frac{1}{2}(1-e^2)\frac{m}{2}v^2$.

列式：$\begin{cases} mv = mv_1+mv_2 \\ e=\dfrac{v_2-v_1}{v-0} \end{cases}$ ⇒ 碰撞后物块相对箱子速度为 $v'=v_2-v_1=ev$.

（巧妙之处：质量相同的物体相碰，分离速度(v_2-v_1)等于e倍追碰速度）

第二次碰撞，物块（相对于箱子）初速度为ev，碰撞后损失动能$\Delta E_{k_2}=\frac{1}{2}(1-e^2)\frac{m}{2}(ev)^2$.

同理：$\Delta E_{k_3}=\frac{1}{2}(1-e^2)\frac{m}{2}(e^2v)^2$. $\Delta E_{k_4}=\frac{1}{2}(1-e^2)\frac{m}{2}(e^3v)^2$ ……

$$\Rightarrow \Delta E=\Delta E_{k_1}+\Delta E_{k_2}+\cdots+\Delta E_{k_n}=\frac{1}{2}(1-e^2)\frac{m}{2}v^2(1+e^2+e^4+e^6+\cdots+e^{2n})$$

$$=\frac{1}{2}(1-e^2)\frac{m}{2}v^2\cdot\frac{1-e^{2n}}{1-e^2}=\frac{m}{4}v^2(1-e^{2n})$$

$$\therefore \frac{1}{4}mv^2(1-e^{2n})=\frac{1}{2}mv^2\times 40\%$$

代入$e=0.95$解得$n=15.688$ ⇒ 16次

Δ 光子的吸收和发射

(1) 质量为m_0的静止原子核，受到能量E光子撞击，光子能量被全部吸收，求合并系统的速度及静止质量

(2) 静止质量为M_0原子核发出能量为E的光子，求发射光子后原子核静止质量

⇒ (1) 能量守恒：$m_0c^2+E=Mc^2=\dfrac{M_0c^2}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$

动量守恒：$\dfrac{E}{c}=Mu=\dfrac{M_0u}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$

解出：$u=\dfrac{Ec}{m_0c^2+E}$　$M_0=m_0\sqrt{1+\dfrac{2E}{m_0c^2}}$

(2) 能量守恒：$M_0c^2-E=\dfrac{M_0'c^2}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$

动量守恒：$-\dfrac{E}{c}=\dfrac{M_0'u}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$

解出：$M_0'=M_0\sqrt{1-\dfrac{2E}{M_0c^2}}$

此类问题就用两守恒：能量（质量）守恒，动量守恒

△ 3-13 宇宙飞船以初速 v_0 在宇宙尘埃中飞行，飞船质量为 m_0，前表面积为 S，尘埃密度为 ρ。假设宇宙尘埃在飞船上的淀积速率 $\frac{dm}{dt}=\rho S v$，求飞船的速度与其在尘埃中飞行的时间的关系。

$\Rightarrow dm = \rho s v dt$.

由动量定理 $m_0 v_0 = m v$.

则 $m dm = \rho s m_0 v_0 dt$

两边同时积分：$\int_{m_0}^{m} m dm = \int_0^t \rho s m_0 v_0 dt$

得：$\frac{1}{2}m^2 - \frac{1}{2}m_0^2 = \rho s m_0 v_0 t$.

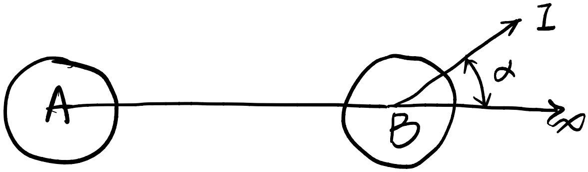
即：$m^2 = 2\rho s m_0 v_0 t + m_0^2$.

由 $v=\frac{m_0 v_0}{m}$ 得 $v=\frac{m_0 v_0}{\sqrt{2\rho s m_0 v_0 t + m_0^2}}$.

20

3-8 大小相同，质量分别为 m_A 和 m_B 的 A，B 两球，系在一细柔绳的两端，放在光滑的水平桌面上，细绳被两球拉直在两球的连心线上，如题图所示。当 B 球在极短时间内受到一大小未知、方向与 x 轴成 α 角度且通过 B 球中心的水平冲量作用时，获得大小为 v_B 的速度。忽略细柔绳的质量和变形，试求 B 球的速度方向和作用在 B 球上冲量的大小。

θ



$$\Rightarrow \quad I\cos\alpha = m_A v_A + m_B v_B \cos\theta$$

$$I\sin\alpha = m_B v_B \sin\theta$$

由绳子的约束关系：$v_A = v_B\cos\theta$

由以上可解得：$\tan\theta = \dfrac{m_A+m_B}{m_B}\tan\alpha$

$$\Rightarrow I = \frac{(m_A+m_B)m_B v_B \tan\alpha}{\sin\alpha\sqrt{m_B^2+(m_A+m_B)^2\tan^2\alpha}}$$

θ 为 v_B 与水平方向夹角

错误解法：$I = m_B v_B$

题中所给 v_B 是稳定后的速度！

21

3-10 质量为 M、长为 l 的船浮在静止的水面上，船上有一质量为 m 的人，开始时人与船也相对静止，然后人以相对于船的速度 u 从船尾走到船头，当人走到船头后人就站在船头上，经长时间后，人与船又都静止下来了。设船在运动过程中受到的阻力与船相对水的速度成正比，即 $f=-kv$。求在整个过程中船的位移 Δx。

① 整个过程：人和船组成的系统水平方向只受外力⇒摩擦力

由冲量定理：$I=\Delta p=\int_{t_1}^{t_2} F_f\,dt=p_2-p_1=mv_2-mv_1$

本题中：始末速度均为零，则 $I=\int_{t_1}^{t_2} F_f\,dt=\int_{t_1}^{t_2} -kv\,dt=0$

另有 $\Delta x=\int_{t_1}^{t_2} v\,dt$，则 $\Delta x=0$

② 设船速为 u，则人相对地面速度为 $(v-u)$

对人、船、水面组成系统在 dt 内用冲量定理：

$$f\,dt=M(u+du)-m[(v-u)+d(v-u)]-[Mu-m(v-u)]$$

代入 $f=-kv$ 得 $(M+m)du-m\,dv=-ku\,dt=-k\,dx$

积分：$(M+m)u-mv=-kx$

初始：$(M+m)u_1-mv_1=-kx_1$

结束：$(M+m)u_2-mv_2=-kx_2$

相减：$(M+m)(u_2-u_1)-m(v_2-v_1)=-k(x_2-x_1)$

由 $u_2=u_1=0$，$v_2=v_1=0$

得 $x_2=x_1$ 即 $\Delta x=0$

△（固定套路）解题思想：$f=-k\underline{v}$，$x=\underline{v}t$

22

3-12 质量为 6 000 kg 的火箭，竖直发射，假定喷气速度为 1 000 m/s，问每秒内必须喷出多少气体，才能满足下列条件：

（1）能克服火箭重量所需要的推力；

（2）能使火箭最初向上的加速度为 19.6 m/s^2。

(1) 冲量定理：$I = \Delta p = Ft$ ；$F = Mg$.

$$\Delta p = mv - 0.$$

代入 $v = 1000\,m/s$. $M = 6000\,kg$. $t = 1\,s$ 得：

$$m = \frac{Ft}{v} = \frac{6000 \times 10 \times 1}{1000} = 60\,kg$$

(2). 将(1)中 $F = Mg$ 条件改为 $F - Mg = Ma$.

得：$$m' = \frac{Ft}{v} = \frac{6000 \times (10 + 19.6) \times 1}{1000} = 177.6\,kg.$$

一艘宇宙飞船以匀速$0.5c$（c表示真空中的光速）驶向地球。飞船内一位乘客测得他的心跳为每分钟70，地球上观察者测得他心跳为每分钟

A、49。

B、61。

C、70。

D、80。

一宇宙飞船相对于地球以 $0.8c$ （c 表示真空中光速）的速度飞行。现有一光脉冲从船尾传到船头，已知飞船上的观察者测得飞船长为 90 m，则地球上的观察者测得光脉冲从船尾发出和到达船头这两个事件的空间间隔为

A、54m。

B、90m。

C、150m。

D、270m。

一列静止长度为 L 的火车以匀速 u 前进，火车上两个实验者同时从火车两端轻轻放下两个包裹，地面上这两个包裹的距离为

A、L。

B、$L\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}$。

C、$\frac{L}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$。

24

宇宙飞船相对于地面以速度v作匀速直线飞行，某一时刻飞船头部的宇航员向飞船尾部发出一个光讯号，经过Δt（飞船上的时钟）时间后，被尾部的接收器收到，则由此可知飞船的静止长度为

A、$c \cdot \Delta t$。

B、$v \cdot \Delta t$。

C、$\dfrac{c \cdot \Delta t}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$。

D、$c \cdot \Delta t \cdot \sqrt{1-(v/c)^2}$。

关于同时性的以下结论中，正确的是

A、在一惯性系同时发生的两个事件，在另一惯性系一定不同时发生。

B、在一惯性系不同地点同时发生的两个事件，在另一惯性系一定同时发生。

C、在一惯性系同一地点同时发生的两个事件，在另一惯性系一定同时发生。

D、在一惯性系不同地点不同时发生的两个事件，在另一惯性系一定不同时发生。

在静止于某一惯性系的观察者的前方有一把静止长度为 1m 的尺子水平高速通过，该观察者看到这把尺子的长度

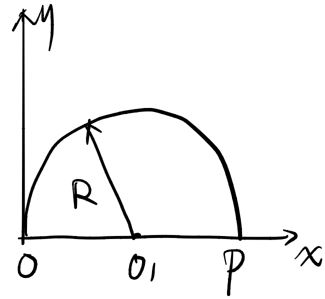
A、一定小于1m。

B、一定等于1m。

C、一定大于1m。

D、与该观察者所处的位置有关。

质点以恒定速率 v 沿半圆路径从坐标原点 O 运动到点 $P(2R,0)$.
其中作用在质点上的力包括 $\vec{F_1}=c\vec{v}$ 等. c 为恒量. 求力 F_1 在此过程中所做的功及力 F_1 给予质点的冲量.



⇒ F_1 和 v 的方向始终相同:

则 $W=FS = cv\cdot\pi c = \pi cvR$.

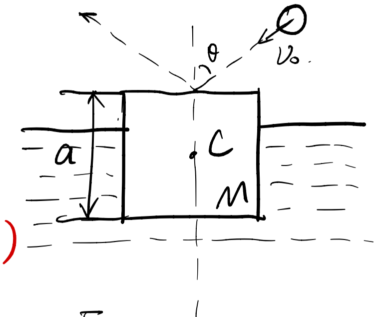
$\vec{I}=\vec{F}t=\vec{F}\cdot\frac{\pi R}{v}$

$I=2\int_0^{\frac{\pi}{2}} cv\cos\theta\cdot\frac{R}{v}\,d\theta = 2cR$. 方向水平向右.

题图为浮在一种液体中的立方体木块，木块边长为a，质量为M。平衡时木块$\frac{2}{3}$部分浸在液体里。现有质量为m的小球，以速度v_0沿$\theta=60°$方向与木块相撞，设木块与小球之间光滑，恢复系数为$e=\frac{2}{3}$，$\frac{M}{m}=4$。求：

(1) 碰撞后瞬时小球速度的水平和竖直分量值。

(2) 要使木块能够全部沉入液体则初速度v_0至少为多大？



⇒(1) $v_0\cos\theta=\frac{1}{2}v_0$ $\quad v_0\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}v_0$

$$-\frac{1}{2}mv_0=-Mv+mv'$$

$$e=\frac{-v-v'}{-\frac{1}{2}v_0}=\frac{2}{3}$$ (注意方向!!!)

解得：$v=\frac{1}{6}v_0$，$v'=-\frac{1}{6}v_0$ ⇒ 水平：$\frac{\sqrt{3}}{2}v_0$，竖直：$\frac{1}{6}v_0$

(2) 碰撞后木块速度：$v=\frac{1}{6}v_0$

沉没过程中浮力做功：$W=\int_{\frac{2a}{3}}^{a}F(h)\,dh$

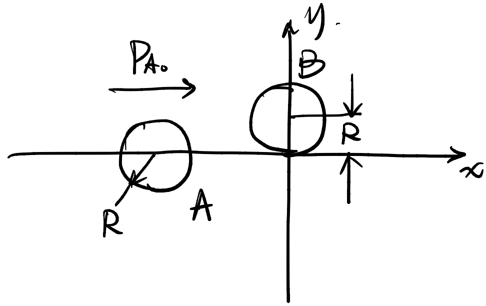
由 $F(\frac{2a}{3})=Mg$，$F(0)=0$ 得：$F(h)=\frac{Mg}{\frac{2}{3}a}h$

$$\therefore W=\int_{\frac{2a}{3}}^{a}\frac{Mg}{\frac{2}{3}a}h\,dh=\frac{5}{12}Mga$$

$\frac{1}{2}mv^2=\frac{5}{12}Mga$ 解出 $v_0=2\sqrt{30ga}$

Δ 斜碰（连线方向动量守恒）

光滑水平面有两只相同的光滑钢球，开始时A球沿x轴以动量p_{A0}运动，B球静止在$x=0$，$y=R$的位置。当A、B发生碰撞后，B球动量大小$p_B=\frac{1}{2}p_{A0}$，求碰撞后A球的动量。

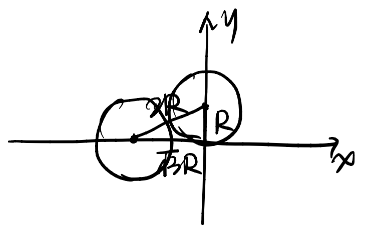


⇒A球沿球心连线方向动量为

$$p_A=\cos 30^\circ p_{A0}=\frac{\sqrt{3}}{2}p_{A0}$$

动量守恒：

$$\begin{cases}\frac{\sqrt{3}}{2}p_{A0}=p_B+p_{A\perp}\\ \frac{1}{2}p_{A0}=p_{A\parallel}\end{cases}$$



由题中：$p_B=\frac{1}{2}p_A$

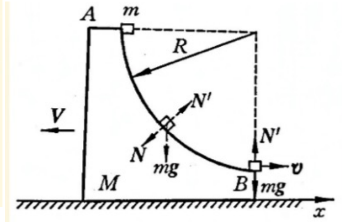
代入得 $p_{A\perp}=\frac{\sqrt{3}-1}{2}p_{A0}$

$$p_A=\sqrt{p_{A\perp}^2+p_{A\parallel}^2}=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}\,p_{A0}=\frac{\sqrt{5-2\sqrt{3}}}{2}p_{A0}$$

〈注意题目没给恢复系数e，不一定是弹性碰撞〉

例：一质量为 m 的物体，从质量为 M 的圆弧形槽顶端由静止滑下，设圆弧形槽的半径为 R，张角为 $\pi/2$. 若所有摩擦都可忽略，求：

(1) 物体刚离开槽底端时，物体和槽的速度各是多少?
(2) 在物体从A滑到B的过程中，物体对槽所做的功 A。
(3) 物体到达B时对槽的压力。



(1) 槽-物体系统机械能守恒，水平动量守恒.

$$\begin{cases} mgR = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}MV^2 \\ mv + MV = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{\frac{2MgR}{m+M}} \qquad V = -m\sqrt{\frac{2gR}{M(m+M)}}$$

(2) $$A = \frac{1}{2}MV^2 = \frac{m^2gR}{m+M}$$

(3) 最低点B： $N' - mg = m\frac{v^2}{R}$ （错误）

此方程是以槽为参考系所列，而物体相对地面并未作圆周运动，槽具有水平方向速度，不是惯性参考系.

$$v' = v - V = \sqrt{\frac{2MgR}{m+M}} + m\sqrt{\frac{2gR}{M(m+M)}}$$ ⇒ 以地面为参考系.

$$N' - mg = m\frac{v'^2}{R} \Rightarrow N' = \left(3 + \frac{2m}{M}\right)mg$$

A 相对论.

2-18 从 S 系观测到有一粒子在 $t_1=0$ 时，由 $x_1=100$ m 处以速度 $v=0.98c$ 沿 x 方向运动，10 s 后到达点 x_2，如在 S' 系（相对 S 系以速度 $u=0.96c$ 沿 x 方向运动）观测，粒子出发和到达的时空坐标 t'_1，x'_1，t'_2 和 x'_2 各为多少？（$t=t'=0$ 时，S' 系与 S 系的原点重合），并算出粒子相对 S' 系的速度。

$$t_1'=\frac{t_1-\frac{u}{c^2}x_1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=\frac{0-\frac{0.96c}{c^2}\times 100}{\sqrt{1-\left(\frac{0.96c}{c}\right)^2}}=1.147\times 10^{-6}\,s$$

$$x_1'=\frac{x_1-ut}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=\frac{100-0.96c\times 10}{\sqrt{1-\left(\frac{0.96c}{c}\right)^2}}=357.14\,m$$

$$t_2'=\frac{t_2-\frac{u}{c^2}x_2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=\frac{10-\frac{0.96c}{c^2}\times 0.98c\times 10}{\sqrt{1-\left(\frac{0.96c}{c}\right)^2}}=2.11\,s$$

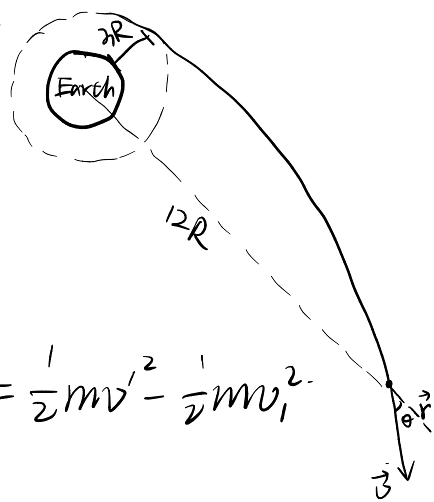
$$x_2'=\frac{x_2-ut}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}=\frac{9.8c-0.96c\times 10}{\sqrt{1-\left(\frac{0.96c}{c}\right)^2}}=2.14\times 10^{8}\,m$$

$$v_x'=\frac{v_x-u}{1-\frac{u}{c^2}v_x}=\frac{0.98c-0.96c}{1-\frac{0.96c}{c^2}\times 0.98c}=1.014\times 10^{8}\,m/s.$$

△ 角动量（1.此问题就到角动量守恒，机械能守恒）

质量为m的飞船绕质量为M的地球做匀速圆周运动，轨道半径为3R（R为地球半径）。其运行速率为多少？[1] 飞船在此处要将它的运动速度至少增加到v_1为多少时才能飞离地球？[2] 若飞船在3R处将速度增加到v_1后关闭发动机，在离地心12R处，其切向加速度分量为多少？[3] 该处轨道曲率半径为多少？[4]

(1) $\frac{GMm}{(3R)^2}=\frac{mv_0^2}{3R} \Rightarrow v_0=\sqrt{\frac{GM}{3R}}=\sqrt{\frac{1}{3}gR}$



(2) $-\frac{GMm}{\infty}+\frac{GMm}{3R}=\frac{1}{2}mv_1^2$

$\Rightarrow v_1=\sqrt{\frac{2GM}{3R}}=\sqrt{\frac{2}{3}gR}$

(3) 12R处速度v'：$-\frac{GMm}{12R}+\frac{GMm}{3R}=\frac{1}{2}mv'^2-\frac{1}{2}mv_1^2$

$\Rightarrow v'=\sqrt{\frac{GM}{6R}}=\sqrt{\frac{1}{6}gR}$

角动量守恒：$mv_1\cdot 3R=mv'\cdot 12R\sin\theta$

$\Rightarrow \sin\theta=\frac{1}{4}\cdot\frac{v_1}{v'}=\frac{1}{2}$

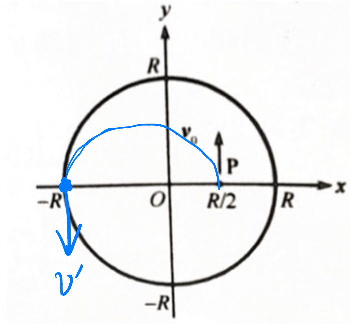
其加速度 $a=\frac{GMm}{(12R)^2}=\frac{1}{144}g$

切向加速度：$a_t=-a\cos\theta=-\frac{\sqrt{3}}{288}g$

法向加速度：$a_n=a\sin\theta=\frac{1}{288}g=\frac{v^2}{\rho}$ $\Rightarrow \rho=\frac{v^2}{a_n}=48R$

△有心力场中$\boxed{角动量守恒}$ $\boxed{机械能守恒}$

[例] 气态星球S的半径为 R，密度设为常量 ρ，过S中心点的某座标O-xy如图所示。在 $x_0=R/2$，$y_0=0$ 处有一飞行器P，它具有朝着y轴方向的初速度 v_0，P在而后运动过程中受到的气体阻力可忽略。问 v_0 为多少时，P恰好不会运动到S的表面外？飞行器的机械能将是多少？



由飞行器P角动量守恒，选取O为参考点，则有：

$$v_0\cdot\frac{R}{2} = v\cdot R \quad 则\ v=\frac{v_0}{2}$$

$$\frac{1}{2}mv^2-\frac{1}{2}mv_0^2=-\frac{3}{8}mv_0^2=\int_{\frac{R}{2}}^{R} f(r)dr$$ （万有引力所做功）

$$f(r)=-\frac{G(\frac{4}{3}\pi r^3)\rho m}{r^2}=\frac{4G\pi\rho m}{3}\cdot r$$ （行星内部万有引力）

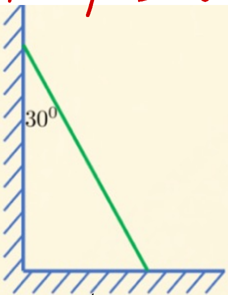
$$\Rightarrow \int_{\frac{R}{2}}^{R}-\frac{4G\pi\rho m}{3}\cdot r\,dr=-\frac{2G\pi\rho m}{3}r^2\Big|_{\frac{R}{2}}^{R}=-\frac{G\pi\rho mR^2}{2}$$

$$\Rightarrow -\frac{3}{4}mv_0^2=-G\pi\rho mR^2$$

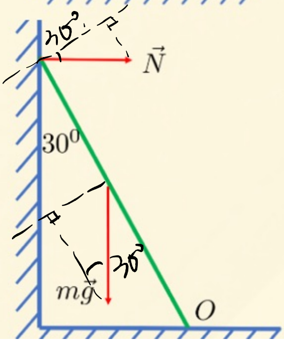
$$\therefore v_0=\sqrt{\frac{4G\pi\rho}{3}}R$$

机械能E=k+U，k为动能，U为势能.

Δ角动量守恒



[例] 质量为20kg, 长为10m的梯子静止地靠在光滑竖直的墙上， 并于铅垂方向成30^o角。 由于地面的摩擦， 这架结构均匀的梯子才不致滑动， 求梯子作用在墙上的力是多少?



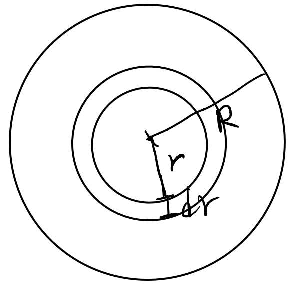
梯子对点O有角动量守恒

$\Rightarrow mg\sin\alpha\cdot\frac{L}{2} - N\cos\alpha\cdot L = 0$

代入 $L=10m$, $m=20kg$, $\alpha=30^\circ$ 得:

$N=\frac{10\sqrt{3}g}{3}N \approx 57N$

一半径为R、质量为m的均匀圆盘平放在粗糙的水平面上。若它以初角速度ω_0绕中心O旋转，问经过多长时间圆盘才停止？停止旋转前圆盘转过的角度为多少？（摩擦因数为μ）



选取质元dr如图，其质量为：

$$dm = \frac{m}{\pi R^2}(2\pi r dr) = \frac{2mr dr}{R^2}$$

其摩擦力矩为 $dM_f = r\mu dm g = \frac{2\mu m g r dr}{R^2}$

整个圆盘阻力矩：$M_f = \int_0^R \frac{2\mu m g r dr}{R^2} = \frac{2}{3}\mu m g R$

由 $M_f = -J\beta = -J\frac{d\omega}{dt}$ 得：

$$d\omega = -\frac{M_f}{J}dt$$

积分：$\int_{\omega_0}^0 d\omega = \int_0^t -\frac{M_f}{J}dt$

$$\Rightarrow t = \frac{J}{M_f}\omega_0 = \frac{3\omega_0 R}{4\mu g}$$

$$F = ma = m\frac{dv}{dt} = m\frac{dv}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} = m\cdot v\frac{dv}{dx}$$

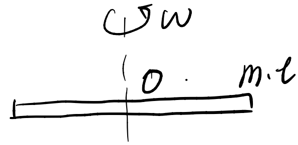
$$M = J\beta = J\frac{d\omega}{dt} = J\frac{d\omega}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt} = J\omega\frac{d\omega}{d\theta}$$

△由 $M = -J\beta \Rightarrow \frac{2}{3}\mu m g R = -\frac{1}{2}mR^2\frac{d\omega}{dt} = -\frac{1}{2}mR^2\cdot\omega\frac{d\omega}{d\theta}$

$$\Rightarrow \frac{2}{3}\mu g = -\frac{1}{2}R\omega\frac{d\omega}{d\theta} \Rightarrow d\theta = -\frac{3R\omega}{4\mu g}d\omega$$

积分得：$\theta = \frac{3R}{8\mu g}\omega_0^2$

一均匀细杆长为l，质量为m，平放在摩擦因数为μ的水平桌面上，设开始时杆以角速度ω_0绕中心轴O转动，求：



(1) 作用于杆的摩擦力矩

(2) 经过多长时间停下？

(3) 转过多少角度？

⇒(1) 取质元 $dm = \frac{m}{l}dr$，其摩擦力矩：$dM_f = \frac{\mu m g r}{l}dr$

$$\text{则} M_f = 2\int_0^{\frac{l}{2}} \frac{\mu m g}{l} r\,dr = \frac{1}{4}\mu m g l$$

(2)

$$-M = J\beta = J\frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{4}\mu m g l$$

$$\Rightarrow -J d\omega = \frac{1}{4}\mu m g l\, dt$$

积分：$-J\int_{\omega_0}^{0} d\omega = \frac{1}{4}\mu m g l \cdot \int_0^t dt$

得到：$t = \frac{\omega_0 l}{3\mu g}$

(3)

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt} = \omega\frac{d\omega}{d\theta}$$

$$\Rightarrow -J\frac{d\omega}{dt} = -J\omega\frac{d\omega}{d\theta} = \frac{1}{4}\mu m g l$$

$$-J\omega\, d\omega = \frac{1}{4}\mu m g l\, d\theta$$

积分：$-J\cdot\int_{\omega_0}^{0}\omega\, d\omega = \frac{1}{4}\mu m g l\cdot\int_0^\theta d\theta$

得到：$\theta = \frac{\omega^2 l}{6\mu m g}$

转动动能：

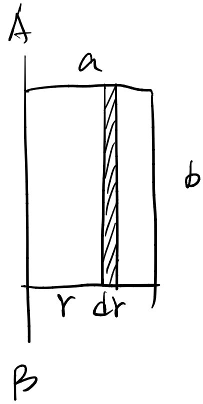
$E_k = \frac{1}{2}J\omega^2$

摩擦力做功：

$W = M_f\cdot\theta$

$\Rightarrow \frac{1}{2}J\omega^2 = M_f\cdot\theta$

质量为m、宽度为a、高度为b的薄板门，以初角速度ω_0绕AB轴转动，薄板每一部分受到空气阻力，阻力方向恒垂直薄板平面，阻力大小和受力面积和速度平方成正比，比例系数为k



(1) 薄板对AB轴的转动惯量

(2) 经过多长时间？

$\Rightarrow$ (1) 取质元 $dm=\frac{m}{ab}\cdot bdr=\frac{m}{a}dr$

则 $J=\int_0^a \frac{m}{a}\cdot r^2 dr=\frac{1}{3}ma^2$

(2) 取质元 $dm=\frac{m}{ab}\cdot bdr=\frac{m}{a}dr$，则 $dS=bdr$

其受阻力 $df=kv^2 dS=k\omega^2 r^2 bdr$

阻力矩 $dM_f=rdf=kb\omega^2 r^3 dr$

$\therefore M_f=\int_0^a kb\omega^2 r^3 dr=\frac{1}{4}ka^4 b\omega^2$ 为阻力矩

$-M_f=J\beta=J\frac{d\omega}{dt}$ 即 $-\frac{1}{4}ka^4 b\omega^2=\frac{1}{3}ma^2\frac{d\omega}{dt}$

$$\Rightarrow \frac{d\omega}{\omega^2}=-\frac{3ka^2b}{4m}dt$$

积分：$$\int_{\omega_0}^{\frac{\omega_0}{2}}\frac{d\omega}{\omega^2}=\int_0^t -\frac{3ka^2b}{4m}dt$$

$$\Rightarrow t=\frac{4m}{3k\omega_0 a^2 b}$$

一半径为R、质量为m_0的均质圆盘在水平面内绕通过圆心且垂直于盘面的垂直轴转动，现加一轴向的恒力矩M，使盘从静止开始加速转动。若从运动一开始沙漏以$q=\frac{dm}{dt}$的质量增加率均匀地将沙子落在盘上离轴线r处，当沙子落下质量为m_0时，圆盘的角速度多大？

⇒根据题目，找dm，dw关系式，

由 $q=\frac{dm}{dt}$ 和 $dt=\frac{dm}{q}$

沙子组成的圆环：$J=m_0r^2$

系统：$J=\frac{1}{2}m_0R^2+m_0r^2$

角动量定理：$M=J\beta=J\frac{dw}{dt}$

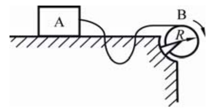
$$\Rightarrow \quad Jdw=Mdt=\frac{M}{q}dm$$

积分：$\int_0^w Jq\,dw=\int_0^{m_0}M\,dm$

$$Jqw=Mm_0$$

$$\Rightarrow \quad w=\frac{Mm_0}{Jq}=\frac{Mm_0}{(\frac{1}{2}m_0R^2+m_0r^2)q}=\frac{2M}{q(R^2+2r^2)}$$

物体A放在粗糙的水平面上，与水平桌面之间摩擦因素为μ，细绳一端绕在半径为R的圆柱形转轮B上，物体与转轮质量相同，开始时，均静止，绳松弛，若转轮以ω_0转动，问：(1)细绳刚绷紧瞬间物体A速度多大？(2)物体A运动后细绳张力？

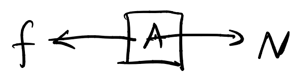


⇒(1) 刚绷紧时机械能守恒

$$\begin{cases} \frac{1}{2}J\omega_0^2 = \frac{1}{2}J\omega^2 + \frac{1}{2}mv^2 \\ v = R\omega \end{cases}$$

$$\Rightarrow v = \frac{\sqrt{3}}{3}R\omega_0$$

(2) 对A受力分析：



$$f - N = ma = mR\frac{d\omega}{dt}$$

对滑轮分析：

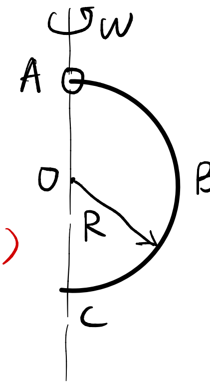
$$N = M = J\beta = J\frac{d\omega}{dt}$$

又有 $f = \mu mg$，$J = \frac{1}{2}mR^2$，联立得 $N = \frac{1}{3}\mu mg$

将质量为m的均匀金属丝弯成一半径为R的半圆环，其上套有一质量也等于m的小球，小球可在此半圆环上无摩擦运动。这一系统可绕固定在地面上的竖直轴转动。开始时小球位于半圆环顶部A处，系统绕轴旋转速度为ω_0。已知半圆环相竖直轴的转动惯量$J=\frac{1}{2}mR^2$，试计算小球分别滑到环的中点B和底部C时

(1) 环的角速度

(2) 小球相对环和相对地面的速度值



⇒(1) B点：机械能守恒：

$$\frac{1}{2}J\omega_0^2+mgR=\frac{1}{2}J\omega^2+\frac{1}{2}mR^2\cdot\omega^2 \Rightarrow \omega=\sqrt{\frac{\omega_0^2R+4g}{3R}}\ (\times)$$

（这里的ω是环相对地面的角速度，不是环相对地面角速度）

角动量守恒：$J\omega_0=J\omega+mR^2\omega \Rightarrow \omega_B=\frac{\omega_0}{3}$

同理：C点时 $J\omega_0=J\omega+0 \Rightarrow \omega_C=\omega_0$

(2) 机械能守恒：$\frac{1}{2}J\omega_0^2+mgR=\frac{1}{2}J\omega^2+\frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow v=\sqrt{\frac{4}{9}R^2\omega_0^2+2gR}$

其水平方向分量为相对地面速度，竖直方向分量为相对环速度

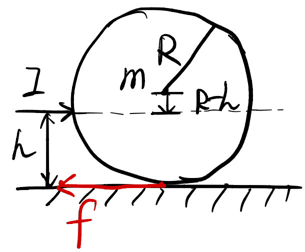
$$\Rightarrow v^2=v_B'^2+(R\omega_B)^2$$

$$\therefore v_B'=\sqrt{\frac{1}{3}R^2\omega_0^2+2gR}$$

同理：C点：$v_C'=\sqrt{4gR}$

在极短时间内，将一水平方向的冲量 I 作用在质量为 m、半径为 R 的原先静止的均质实心小球上，作用点在球下方，距地面高度 h，求小球最终做纯滚动时的角速度。

动量守恒：阻力冲量 $= I_f$



$$I - I_f = mv = m\omega R \quad \cdots\cdots ①$$

角动量守恒：冲量矩 $= IR = \int M dt$

$$I(R-h) - I_f \cdot R = \int M dt = J\omega \quad \cdots\cdots ② \qquad J = \frac{2}{5}mR^2$$

由①②联立解得：

$$\omega = \frac{5Ih}{3mR^2}$$