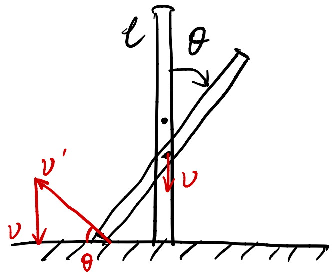
长为l，质量为m的均匀杆，在光滑桌面上由竖直位置自然倒下，当夹角为θ时，试求：

(1) 质心速度

(2) 杆的角速度



$\Rightarrow$ 由动量守恒，质心竖直下落。

$$mg\frac{l}{2}(1-\cos\theta)=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}J\omega^2 \cdots\cdots ①$$

由几何关系： $v'\sin\theta=v$.

又 $v'=\frac{l}{2}\cdot\omega \Rightarrow v=\frac{1}{2}\sin\theta\,\omega l \cdots\cdots ②$

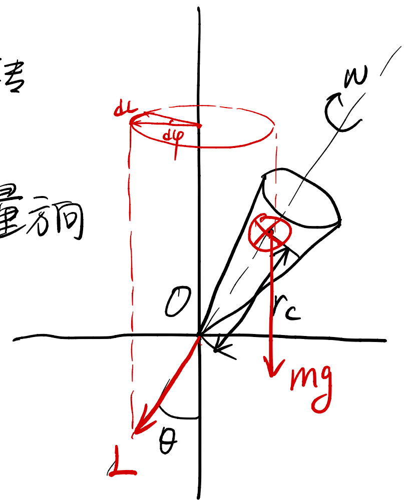
$$J=\frac{1}{12}ml^2$$

联立解得： $$\omega=2\sqrt{\frac{3g(1-\cos\theta)}{l(3\sin^2\theta+1)}}$$

$$\therefore v=\frac{1}{2}\sin\theta\,\omega l=l\sqrt{\frac{3g\sin^2\theta(1-\cos\theta)}{3\sin^2\theta+1}}$$

△ 陀螺（进动）

质量为 m 的陀螺绕自转轴转动惯量为 J_c，质心到支点距离为 r_c，并以角速度 ω 转动，自转轴与竖直方向夹角为 θ，求进动速度大小。



⇒ 陀螺转动的角动量方向沿陀螺自转轴向下，如图，重力作用于陀螺，重力矩垂直纸面向内，其改变角动量方向，故进动方向为顺时针。

由几何关系：

$$dL \approx (L\sin\theta)d\varphi = (J_c\omega\sin\theta)d\varphi$$

又 $M = mgr_c\sin\theta = \frac{dL}{dt}$

$$\Rightarrow mgr_c\sin\theta\, dt = J_c\omega\sin\theta\, d\varphi$$

$$\therefore \omega_p = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{mgr_c\sin\theta}{J_c\omega\sin\theta} = \frac{mgr_c}{J_c\omega}$$

即为进动角速度。

L 的方向和 ω 的方向⇒右手法则。

Δ 转动动能.

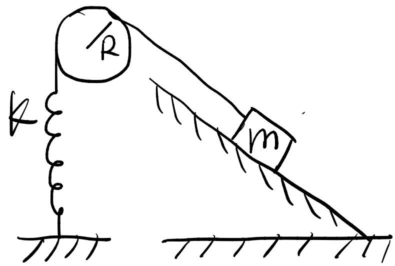
已知 $k=20N/m$, $R=0.3m$, $J=0.5kg\cdot m^2$, $m=2kg$, $\theta=37^\circ$ 斜面光滑. 物体从弹簧原长位置静止释放, 求:

(1) 物体下落的最大距离

(2) 物体下落过程中的最大速度 v_{max} 与此时下落距离.

分析: 物体先加速下落到 v_{max}, 再减速下落到 x_{max}, $v=0$, 然后回到

过程中(弹簧、定滑轮、物块)机械能守恒



(1) 物体到最大距离 S_{max} 时 $v=0$ 滑轮 $\omega=0$

$$mgS_{max}\sin\theta=\frac{1}{2}kS_{max}^2 \Rightarrow S_{max}=\frac{2mg\sin\theta}{k}=1.18m$$

(2) 加速度为0时 v 最大.

$$\begin{cases} mg\sin\theta=T_1=T_2=kS \quad (a=0) \\ mg\sin\theta\cdot S-\frac{1}{2}kS^2=\frac{1}{2}mv_{max}^2+\underset{\sim\sim}{\frac{1}{2}J\omega^2} \\ \omega R=v_{max} \end{cases}$$

<滑轮变速运动时 $T_1\neq T_2$>

<题目中没有忽略滑轮质量时, 滑轮也需参加计算>

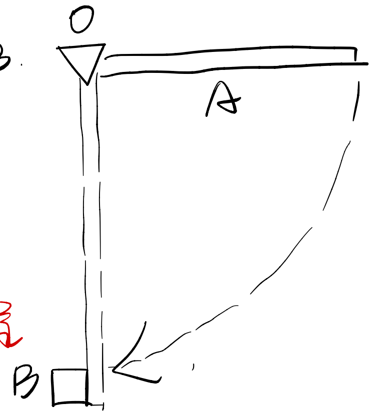
△转动机械能守恒

细杆A：(m, L) 绕轴转动，水平处静止释放，竖直位置与静止物块 B：(m) 发生碰撞，时间极短，求

(1) 碰撞后瞬间后物块B的速度 v_B

(2) 细杆A的角速度

(3) 细杆A转过的最大角度 θ_{max}



分析：过程分为杆下落过程和碰撞过程

- 碰撞过程中(A+B)体系角动量不变

(重力矩=0，轴支力力矩=0，内力矩=0)

- 碰撞过程(A+B)机械能不变，而动量不守恒(受外力)
- 杆下落过程动量不守恒(重力)，角动量不守恒(重力矩)

① 杆下落过程：选O为重力势能零点，由机械能守恒：

$$\frac{1}{2}J\omega_1^2 - mg\frac{L}{2} = 0 \Rightarrow \omega_1 = \sqrt{\frac{3g}{L}}$$

② 碰撞过程：$J_A = \frac{1}{3}mL^2$

由角动量守恒：$J_A\omega_1 = J_A\omega_2 + mv_BL$

(mv_BL 为物体B对于转轴的角动量)

由机械能守恒：$\frac{1}{2}J_A\omega_1^2 = \frac{1}{2}J_A\omega_2^2 + \frac{1}{2}mv_B^2$

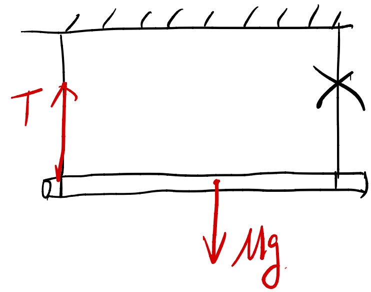
联立解出：$\omega_2 = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3g}{L}}$ (反向)，$v_B = \frac{1}{2}\sqrt{3gL}$，(3)问同用机械能守恒

Δ刚体平面平行运动

一质量为 M 长度为 l 的均匀细杆，两端用绳悬挂，杆的方向水平，若突然将杆右端的悬线剪断，则

(1) 杆在这一瞬间如何运动？

(2) 此时另一根悬线上的张力为多少？



由质心运动定理：$Mg-T=Ma$ ①

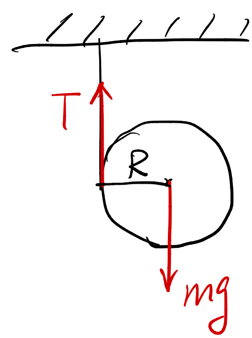
由质心系的角动量定理：

$M=J_c\alpha \Rightarrow T\cdot\frac{1}{2}l=\frac{1}{12}ml^2\alpha$ ②

由刚性约束条件：左端不动 $\Rightarrow a=\frac{1}{2}l\alpha$ ③

联立以上三式有：$T=\frac{1}{4}Mg$

Δ质量为 m 的均质圆盘，半径为 R，求圆盘下落过程中质心加速度 a_c 和绳的拉力 F。

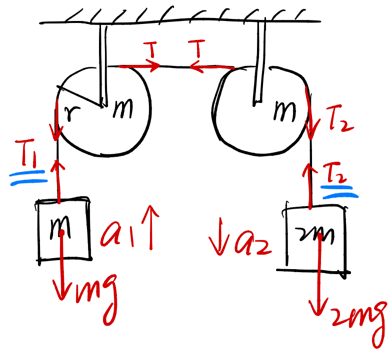


$$\begin{cases} mg-T=ma_c & ① \\ TR=M=J\beta & ② \\ a_c=R\beta & ③ \end{cases}$$

$\Rightarrow a_c=\frac{2}{3}g \quad T=\frac{1}{3}mg$

△ 绳子张力

一轻绳跨过两个质量为m，半径为r的滑轮，分别挂着质量为m、2m重物，绳与滑轮间无相对滑动，将重物从静止释放，求重物的加速度和两滑轮间绳内张力。$J=\frac{1}{2}mr^2$.



⇒ 受力分析如图：初步判断方向

对重物：
$$T_1-mg=ma_1$$
$$2mg-T_2=2ma_2$$

对滑轮：
$$(T-T_1)r=J\beta_1$$
$$(T_2-T)r=J\beta_2$$

由约束关系：$a_1=r\beta_1$　$a_2=r\beta_2$.　$a_1=a_2=a\Rightarrow\beta_1=\beta_2=\beta$.

由上式可解得：$T_1=T-J\beta_1$，$T_2=T+J\beta_2$.

$$mg+ma_1=T-\frac{J\beta_1}{r},\quad 2mg-2ma_2=T+\frac{J\beta_2}{r}$$

即 $$mg+ma=T-\frac{J\beta}{r},\quad 2mg-2ma=T+\frac{J\beta}{r}$$

$$\begin{cases} mg+mr\beta=T-\frac{J\beta}{r} \\ 2mg-2mr\beta=T+\frac{J\beta}{r} \end{cases}$$

$$mg-3mr\beta=2\cdot\frac{J\beta}{r}=mr\beta$$

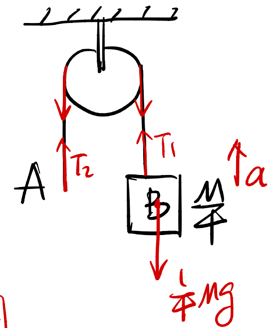
$$\Rightarrow r\beta=a=\frac{1}{4}g.$$

$$T=mg+ma+\frac{J\beta}{r}=\frac{11}{8}mg.$$

Δ

轻绳绕过定滑轮，滑轮质量 $\frac{M}{4}$，绳子A端有一质量为M的人，绳另一端为一质量为 $\frac{M}{4}$ 的重物，已知滑轮相对O轴转动惯量为 $J=\frac{MR^2}{4}$，设人从静止开始以相对绳匀速上爬时，绳与重物间无相对滑动，求重物上升的加速度。

⇒ 受力分析如图：



对重物：$T_1 - \frac{1}{4}Mg = \frac{1}{4}Ma$ ⇒ 相对绳匀速 不妨设为0 即人和绳速度相同

$Mg - T_2 = Ma$

对滑轮：$(T_2 - T_1)R = J\beta$

约束关系：$a = R\beta$　　解得：$a = \frac{1}{2}g$

另一种解法：

系统角动量 $L = \frac{M}{4}uR - M(v-u)R + \frac{M}{4}R^2\omega$

$= \frac{3}{2}MuR - MvR$

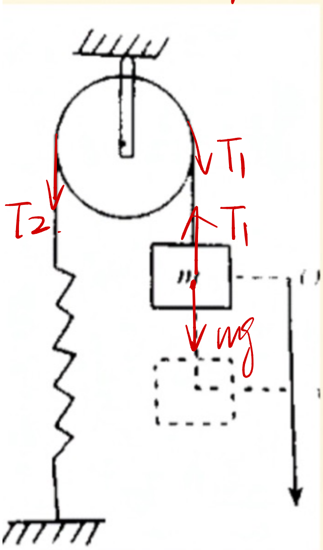
$\downarrow v$ (相对)　$\uparrow u$

由 $M = \frac{dL}{dt}$ 得：

$$\left(Mg - \frac{Mg}{4}\right)R = \frac{d}{dt}\left(\frac{3}{2}MuR - MvR\right)$$

其中 $\frac{dv}{dt} = 0$，$\frac{du}{dt} = a$，即 $\frac{3}{4}MgR = \frac{3}{2}MRa \Rightarrow a = \frac{1}{2}g$

4 简谐振动

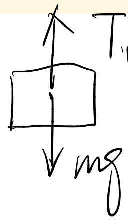


? 一定滑轮的半径为R、转动惯量为J，其上挂一轻绳，绳的一端系一质量为m的物体，另一端与一固定的轻弹簧相连，设轻弹簧的倔强系数为k，绳与滑轮间无滑动，且忽略轴的摩擦力及空气阻力，现将物体m从平衡位置拉下一微小距离后放手，可证明物体做简谐振动，求其圆频率为( ).

A. $\sqrt{\dfrac{k}{m}}$　　B. $\sqrt{\dfrac{k}{m+J/R^2}}$

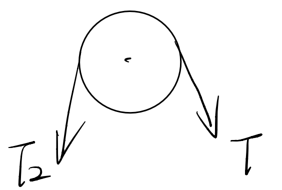
C. $\sqrt{\dfrac{k}{2m+J/R^2}}$　　D. $\sqrt{\dfrac{k}{m+2J/R^2}}$

23



对物块：$mg - T_1 = ma$

对滑轮：$\begin{cases} (T_1 - T_2)R = J\alpha \\ T_2 = kx \end{cases}$



刚性约束条件：$a = R\alpha$

上式消去T_1、T_2：$\left(m+\frac{J}{R^2}\right)\ddot{x} + kx = mg$

由平衡位置：$mg = kx_0 \Rightarrow \left(m+\frac{J}{R^2}\right)(x-x_0)'' + k(x-x_0) = 0$

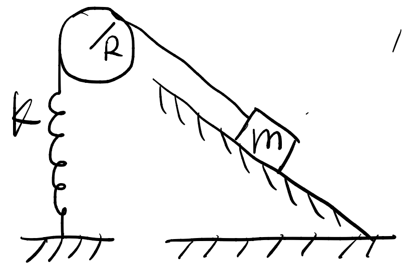
$$\Rightarrow \ddot{x}' + \frac{k}{m+\frac{J}{R^2}}x' = 0$$

$\therefore \omega = \sqrt{\dfrac{k}{m+J/R^2}}$ (也可用能量计算)

能量计算：$E=\frac{1}{2}kx^2+\frac{1}{2}(m+\frac{J}{R^2})v^2=const.$

$$\Rightarrow \omega=\sqrt{\frac{k}{m_{有效}}}=\sqrt{\frac{k}{m+J/R^2}}$$

将上题图换成右图，则物块m是否做简谐振动？$\omega=$？



<与上题一致>

△单摆

有单摆，摆长 $l=1.0m$，小球质量 $m=10g$，$t=0$ 时，小球正好经过 $\theta=-0.06$ rad处，并以角速度 $\dot{\theta}=0.2\,rad/s$ 向平衡位置移动，求：

(1) 角频率，频率，周期

(2) 振动表达式

⇒ 设表达式为 $\theta=A\cos(\omega t+\varphi)$

$$\omega=\sqrt{\frac{g}{l}}=\sqrt{10}=3.16$$

$t=0$ 时 $\theta=A\cos\varphi=-0.06$

$$\dot{\theta}=-A\sin\varphi=0.2$$

解得 $A=0.0876\,rad$，$\varphi=3.96\,rad$

$\therefore\ \theta=0.0876\cos(3.16t+3.96)$

△复摆

质量为m 长为L的均质杆可绕位于其一端的固定水平轴在竖直平面内做小角度转动.

(1)求运动周期

(2)证明若轴位于杆端的$\frac{1}{3}$处. 杆做小角度运动周期不变.

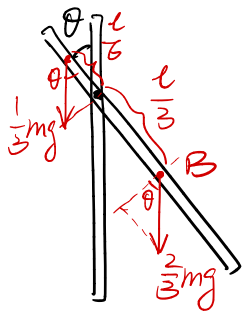
⇒(1) 此时杆为复摆.

$$\Rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{mgh}{J}\theta=0, \quad h=\frac{l}{2}, \quad J=\frac{1}{3}ml^2.$$

$$\therefore \omega=\sqrt{\frac{mgh}{J}}=\sqrt{\frac{3g}{2l}} \Rightarrow T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{2l}{3g}}$$

(2)证明:

如图: 对B点有



$$\frac{2}{3}m\cdot\frac{l}{3}\cdot\frac{d^2\theta}{dt^2}=-\left(\frac{2}{3}mg\sin\theta-\frac{1}{3}mg\sin\theta\right)$$

化简得: $\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{3g}{2l}\sin\theta=0$

$\sin\theta\approx\theta$

∴ 周期不变.

△ 桌面上有一质量为m的小球，其上连接一竖直轻弹簧，弹簧的劲度系数为k，开始时弹簧处于原长状态，其上端在外力作用下以匀速v向上运动，求从弹簧上端开始运动到弹簧第一次到达最大伸长过程中外力所做的功。

平衡时有：$mg=kx_1 \Rightarrow x_1=\frac{mg}{k}$（平衡位置）

弹簧振动时的振幅：

$$\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}kx_2^2 \Rightarrow x_2=v\sqrt{\frac{m}{k}}$$

∴弹簧最大伸长量 $x=x_1+x_2=v\sqrt{\frac{m}{k}}+\frac{mg}{k}$

从物体离开地面到弹簧第一次到达原长：

$$t=\frac{T}{4}=\frac{1}{4}\cdot\frac{2\pi}{\omega}=\frac{1}{4}\times 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}=\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{k}}$$

此过程中物体上升距离 $h=vt-A=vt-x$

$$\therefore W=\frac{1}{2}mv^2+mgh+\frac{1}{2}kx^2$$

$$=\frac{1}{2}mv^2+mg\left(vt-v\sqrt{\frac{m}{k}}-\frac{mg}{k}\right)+\frac{1}{2}k\left(v\sqrt{\frac{m}{k}}+\frac{mg}{k}\right)^2$$

$$=mv^2+\frac{m^2g^2}{2k}+\frac{\pi}{2}mgv\sqrt{\frac{m}{k}}$$

△ 用能量守恒解振动问题

劲度系数为k，质量为M的滑块组成的弹簧振子在光滑水平面上做振幅为A的简谐振动时，另一质量为m的黏土从高处自由落下在滑块上，二者一起运动，求周期和振幅

(1) 滑块位于最大位移时

(2) 滑块位于平衡位置时

⇒ (1) $\omega' = \sqrt{\frac{k}{m+M}}$ $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

最大位移处：$E = E_p = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 = \frac{1}{2}(m+M)\cdot\omega'^2 A'^2$

$\Rightarrow m\cdot\frac{k}{m}\cdot A^2 = (m+M)\cdot\frac{k}{m+M}\cdot A'^2$

$\therefore A' = A$

(2) 平衡位置：由 $x = A\cos(\omega t+\varphi)$

及 $v = \dot{x} = -\omega A\sin(\omega t+\varphi)$ 知 $v = v_m = \pm\omega A$

$E = E_k = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2$

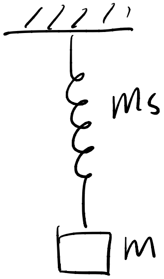
碰撞过程动量守恒：

$m\omega A = (m+M) v' \Rightarrow v' = \frac{m}{m+M}\omega A$

总能量变为 $E' = E_k' = \frac{1}{2}(m+M)\cdot\left(\frac{m}{m+M}\omega A\right)^2 = \frac{1}{2} m\omega^2\left(A^2\cdot\frac{m}{m+M}\right)$

$\Rightarrow A'^2 = A^2\frac{m}{m+M}$ $\therefore A' = \sqrt{\frac{m}{m+M}}A$

若用质量为m_s,劲度系数为k的弹簧,与质量为m的滑块构成弹簧振子,求其振周期.



对m: $y=A\cos(\omega t+\varphi)$, $v=-\omega A\sin(\omega t+\varphi)$

对m_s: 取质元 $dm=\frac{m_s}{L}dx$

则质元位移: $y'=\frac{x}{L}y=\frac{x}{L}A\cos(\omega t+\varphi)$

质元速度: $v'=\frac{x}{L}v=-\frac{x}{L}\omega A\sin(\omega t+\varphi)$

⇒质元动能: $dE=\frac{1}{2}dm\cdot v'^2=\frac{1}{2}\cdot\frac{m_s}{L}dx\cdot\frac{x^2}{L^2}\omega^2A^2\sin^2(\omega t+\varphi)$

弹簧总动能 $E_k=\int_0^L\frac{m_s\omega^2A^2\sin^2(\omega t+\varphi)}{2L^3}x^2dx=\frac{m_s}{6}\omega^2A^2\sin^2(\omega t+\varphi)$

系统总机械能: $E=\frac{1}{6}m_sv^2+\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}ky^2=const$

$$\frac{dE}{dt}=\frac{1}{3}m_sv\cdot\frac{dv}{dt}+m\cdot v\cdot\frac{dv}{dt}+ky\cdot\frac{dy}{dt}=0\quad\left(\frac{dy}{dt}=v\right)$$

$$\Rightarrow\left(\frac{1}{3}m_s+m\right)\frac{d^2y}{dt^2}+ky=0$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{k}{\frac{1}{3}m_s+m}y=0$$

$$\therefore\ \omega=\sqrt{\frac{k}{\frac{1}{3}m_s+m}}=\sqrt{\frac{3k}{m_s+3m}}$$

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\cdot\sqrt{\frac{m_s+3m}{3k}}$$

⇒弹簧等效质量为 $\frac{1}{3}m_s$

△阻尼振动

△某弹簧振子在真空中自由振动的周期为T_0，将该弹簧浸入水中，由于阻尼作用，经过每个周期振幅降为原来的90%

(1) 振子在水中的振动周期

(2) 若开始时振幅$A_0=10cm$，从开始到静止，振子经过的路程

⇒(1) 振子的固有圆频率为 $\omega_0=\frac{2\pi}{T_0}$

由 $x=e^{-\beta t}A_0\cos(\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}\,t+\varphi)$ 得：

$$A_1=e^{-\beta T}A_0=0.9A_0 \Rightarrow e^{-\beta T}=0.9$$

$$\therefore \beta=\frac{1}{T}\ln\frac{10}{9}$$

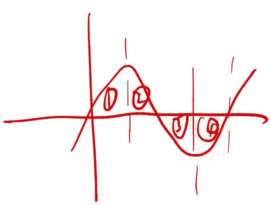
又∵ $T=\frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}}=\frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2-\frac{1}{T^2}\ln^2\frac{10}{9}}}$ 解得：$T=T_0\left(1+\frac{\ln^2\frac{10}{9}}{4\pi^2}\right)$

(2)

$$S=4A_0(1+e^{-\beta T}+e^{-2\beta T}+\cdots)$$

$$=40(1+0.9+0.9^2+0.9^3+\cdots)$$

$$=40\lim_{n\to\infty}\frac{1-0.9^n}{1-0.9}=400\,cm$$

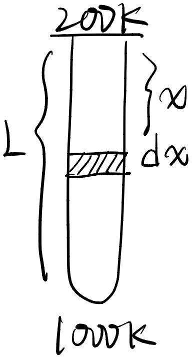


⇒一个周期有4倍的振幅!

△高压氧瓶压强和体积为 $p=1.3\times10^7\,Pa$ 和 $V=30L$. 每天使用压强为 $p_1=1.0\times10^5\,Pa$ 的氧气 400L. 为保证瓶内压强 $p'\geq 1\times10^6\,Pa$. 能用几天?

$$\Rightarrow \frac{(1.3\times10^7\times30-1\times10^6\times30)}{1\times10^5\times400}=9\text{(天)}.$$

△长金属管下端封闭,上端开口,置于压强为 p_0 的大气中. 在封闭端加热到 $T_1=1000K$. 另一端保持 $T_2=200K$. 设温度沿管长均匀变化. 现封闭开口端,使管子冷却到 100K. 求管内压强.



取微元 $dV = S\,dx$

则有 $R\,d\nu = \frac{p_0\,dV}{T} = C$ 其中 $T=(200+\frac{800}{L}\cdot x)\,K$.

积分: $\nu R=\int_0^L \frac{p_0 S}{T}dx = p_0 S\int_0^L \frac{1}{200+\frac{800}{L}\cdot x}dx$

$= \frac{p_0 S L}{800}\ln5 = \frac{p_0 V}{800}\ln5$

∴ 冷却之前 $\nu R=\frac{p_0 V}{800}\ln5$

冷却之后 $\nu R=\frac{pV}{100}$

比较得: $p=\frac{\ln5}{8}p_0$.

△ 抽气机转速 $400r/min=n$. 每分钟能抽出 $2L$. 容器容积 $V=4L$.
多长时间才能使容器内压强从 $p_0=10^5Pa$ 降到 $p_n=100Pa$?

⇒ 抽气机每抽一次气抽 $\frac{2}{400}=0.05L=V$ 气体

抽出一次气体后: $p_0V_0=p_1(V_0+V) \Rightarrow p_1=\frac{V_0}{V_0+V}p_0$.

抽出二次: $p_1V_0=p_2(V_0+V) \Rightarrow p_2=\frac{V_0}{V_0+V}p_1$

⋮

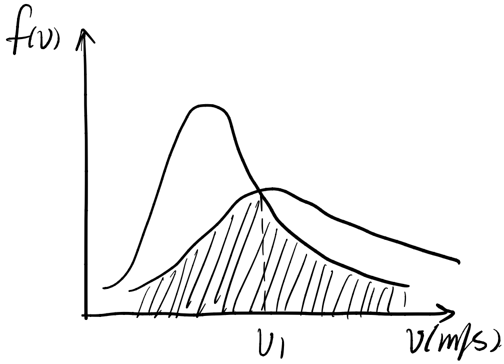
抽出n次后: $p_n=\frac{V_0}{V_0+V}p_{n-1}=\left(\frac{V_0}{V_0+V}\right)^n p_0$

代入 $p_n=100$, $p_0=10^5$, $V_0=4$ $V=0.05$ 得:

$$100=\left(\frac{4}{4+0.05}\right)^n\times10^5$$

解得: $n=556.007$ 次 ⇒ 557 次.

∴ $t=\frac{557}{400}=1.39\,min$



Δ 由 $f(v_x)=\left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{m v_x^2}{2k_B T}}$. 推导 $p=nk_BT$.

$$\Rightarrow \overline{v_x^2} = \int_0^\infty v_x^2 f(v_x)\,dv_x = \int_0^\infty v_x^2 \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{m v_x^2}{2k_B T}}\,dv_x = \frac{k_B T}{m}$$

$\left(\frac{1}{2} m \overline{v_x^2} = \frac{1}{2} k_B T\right)$

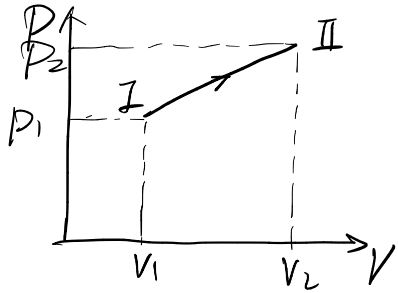
$\therefore\ p = mn\overline{v_x^2} = nk_BT$.

(记公式 $p = mn\overline{v_x^2} = mn\overline{v_y^2} = mn\overline{v_z^2} = \frac{1}{3} mn\overline{v^2}$

$p = \frac{2}{3} n\varepsilon$, $\varepsilon = \frac{3p}{2n} = \frac{3}{2} m\overline{v_x^2} = \frac{3}{2} k_B T$).

△根据PV图计算系统做功和热量

双原子理想气体从状态I(p_1, V_1, T_1)出发，经图示直线过程到达状态II(p_2, V_2, T_2)，求这过程中系统对外所做功和吸收的热量.



对I、II状态由 $pV=nRT$ 有：

$$p_1V_1=RT_1 \qquad p_2V_2=RT_2$$

$$\therefore\ T_1=\frac{p_1V_1}{R} \qquad T_2=\frac{p_2V_2}{R}$$

则 $\Delta E=\frac{5}{2}R\Delta T=\frac{5}{2}(p_2V_2-p_1V_1)$

系统对外做功 $W=\frac{1}{2}(p_2+p_1)(V_2-V_1)$

系统吸热 $Q=\Delta E+W=3(p_2V_2-p_1V_1)+\frac{1}{2}(p_1V_2-p_2V_1)$

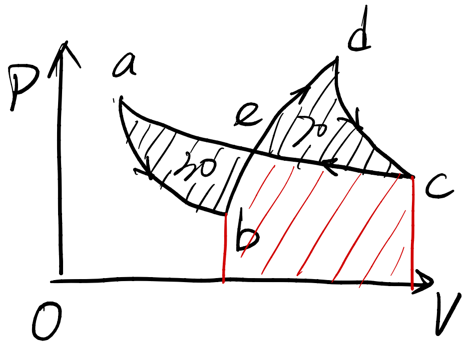
注：系统内能增量可由 $\Delta E=\nu\frac{i}{2}R\Delta T$ 直接求得.

也可按不同过程到达相同状态叠加而成 如 $\Delta E=\Delta E_V+\Delta E_p$

△外界对系统所做功即为P-V图的面积.

△绝热和等温过程

ab、dc为绝热过程，aec为等温过程，bed为任意过程，各部分面积如图所示，求 bed 过程吸热为多少？



整个闭循环内能变化为0

①：放热30J　②：吸热70J

总：吸热40J

ab、dc 不多

cea放热100J

则 bed 吸热140J

Δ泄流

一容器体积为2V，一导热隔板把它分成相等的两半。开始时左边盛有压强为p_0的理想气体，右边为真空。在隔板上有一面积为S的小孔，求打开小孔后左右两边压强p_1、p_2与时间t的关系。

⇒ 设t=0时左边含有分子数N_0，dt时间内从左侧流入右侧分子数为dN，左侧数密度为n_1，右侧数密度为n_2

则 $dN = (\frac{1}{4}n_1\bar{v} - \frac{1}{4}n_2\bar{v})S\,dt$

其中 $n_1 = \frac{N_0 - N}{V}$，$n_2 = \frac{N}{V}$ 代入得：$dN = \frac{\bar{v}S}{4V}(N_0 - 2N)\,dt$

两边积分得：$N = \frac{1}{2}N_0(1 - e^{-\frac{\bar{v}S}{2V}t})$

所以t>0时左侧含有分子数 $N_1 = N_0 - N = \frac{1}{2}N_0(1 + e^{-\frac{\bar{v}S}{2V}t})$

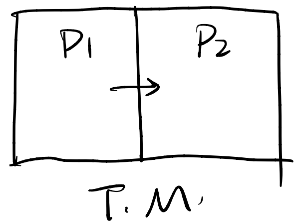
右侧含有分子数 $N_2 = N = \frac{1}{2}N_0(1 - e^{-\frac{\bar{v}S}{2V}t})$

由 $pV = Nk_BT$ 得 $p = \frac{N}{V}k_BT$

即左侧压强 $p_1 = \frac{N_1}{V}k_BT = \frac{1}{2}p_0(1 + e^{-\frac{\bar{v}S}{2V}t})$

$p_2 = \frac{N_2}{V}k_BT = \frac{1}{2}p_0(1 - e^{-\frac{\bar{v}S}{2V}t})$

一容器被分隔成两部分，两部分气体压强分别为P_1、P_2，而温度都是T，摩尔质量都是M。隔板上开有一面积为S的小孔，小孔是如此之小，以至于分子从小孔射出或射入对平衡态的扰动都可忽略，则每秒通过小孔的气体质量是多少？



$\Rightarrow$ 左侧：$\bar{v}_1 = \sqrt{\dfrac{2RT}{M}}$　碰壁频率 $\Gamma_1 = \dfrac{1}{4} n_1 \bar{v}_1$

$$P_1 = n_1 k_B T \Rightarrow n_1 = \frac{P_1}{k_B T}$$

右侧：$\bar{v}_2 = \sqrt{\dfrac{2RT}{M}}$　碰壁频率 $\Gamma_2 = \dfrac{1}{4} n_2 \bar{v}_2$

$$P_2 = n_2 k_B T \Rightarrow n_2 = \frac{P_2}{k_B T}$$

$$\Rightarrow m = \left(\frac{1}{4} n_1 \bar{v}_1 - \frac{1}{4} n_2 \bar{v}_2\right) \cdot S \cdot \frac{M}{N_A}$$

$$= \sqrt{\frac{M}{2\pi RT}}\,(P_1 - P_2)\,S$$

若一宇宙飞船的体积为 $27m^3$，舱内压强为 p_0，温度为与 $\bar{v}=300m\cdot s^{-1}$ 相应的值。在飞行中被一陨石击中而在壁上形成面积为 $1cm^2$ 的孔，以致舱内空气逸出。问多久舱内压强降到 $p=\frac{1}{e}p_0$？（温度不变）。

⇒ 由 $pV=NkT$，dt 时间内逸出的气体分数：

$$dN=\frac{1}{4}n\bar{v}\cdot S\cdot dt \qquad n=\frac{N_0-N}{V}$$

即 $$dN=\frac{(N_0-N)\bar{v}S}{4V}dt \Rightarrow \frac{dN}{N_0-N}=\frac{\bar{v}S}{4V}dt$$

积分：$$\int_0^N\frac{dN}{N_0-N}=\int_0^t\frac{\bar{v}S}{4V}dt$$

$$\Rightarrow N=N_0(1-e^{-\frac{\bar{v}S}{4V}t})$$（逸出的气体）

舱内剩余 $N'=N_0-N=N_0e^{-\frac{\bar{v}S}{4V}t}$

又 $N=\frac{PV}{k_BT}$ 得 $p'=p_0e^{-\frac{\bar{v}S}{4V}t}$

当 $t=\frac{4V}{\bar{v}S}$ 时 $p'=\frac{1}{e}p$

$$\therefore t=\frac{4\times27}{300\times1\times10^{-4}}=3600s$$

Δ 将质量为 μ 的单原子理想气体速率分布函数 $4\pi\left(\frac{\mu}{2\pi k_BT}\right)e^{-\frac{\mu v^2}{2k_BT}}v^2$ 改写成按动能 $\varepsilon=\frac{1}{2}\mu v^2$ 分布的函数形式，再求出最概然动能及平均动能。

由 $\varepsilon=\frac{1}{2}\mu v^2$ 得 $\mu v\,dv=d\varepsilon$.

$$\frac{dN}{N}=f(v)dv=4\pi v^2\left(\frac{\mu}{2\pi k_BT}\right)^{\frac{3}{2}}e^{-\frac{\mu v^2 \leftarrow \varepsilon}{2k_BT}}dv$$

$$=\frac{2}{\sqrt{\pi}}(k_BT)^{-\frac{3}{2}}e^{-\frac{\varepsilon}{k_BT}}\cdot\varepsilon^{\frac{1}{2}}\underset{\mu v\,dv}{\underline{d\varepsilon}}=f(\varepsilon)d\varepsilon.$$

$$\therefore f(\varepsilon)=\frac{dN}{N\,d\varepsilon}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}(k_BT)^{-\frac{3}{2}}e^{-\frac{\varepsilon}{k_BT}}\cdot\varepsilon^{\frac{1}{2}}.$$

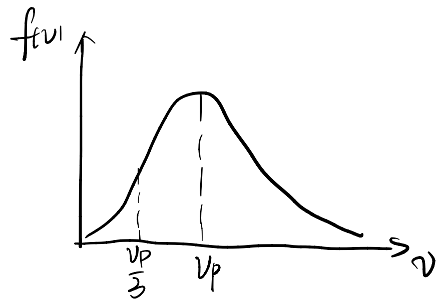
由 $\frac{df(\varepsilon)}{d\varepsilon}=0$ 得：$\varepsilon_p=\frac{1}{2}k_BT$.

$$\bar{\varepsilon}=\int_0^\infty\varepsilon f(\varepsilon)d\varepsilon=\frac{2}{\sqrt{\pi}}(k_BT)^{-\frac{3}{2}}\int_0^\infty\varepsilon^{-\frac{3}{2}}e^{-\frac{\varepsilon}{k_BT}}d\varepsilon=\frac{3}{2}k_BT$$

Δ 质量为m、摩尔质量为M的双原子理想气体，平衡态时的麦克斯韦速率分布函数如下图，v_p已知，求：

(1) 该系统的内能

(2) 当速率小于$\frac{v_p}{3}$时，麦氏函数可近似为$f(v)\approx av^2$，求分子速率小于$\frac{v_p}{3}$的那些分子的平均动能



⇒(1) $v_p=\sqrt{\frac{2RT}{M}} \Rightarrow T=\frac{1}{2}\frac{M}{R}v_p^2$

$$E=N\bar{\varepsilon}=\frac{mN_A}{M}\cdot\frac{5}{2}k_BT$$

$$=\frac{5}{2}\cdot\frac{m}{M}RT=\frac{5mv_p^2}{4M}$$

(2) $N=\frac{mN_A}{M}$ 由归一化条件：$\int_0^{\frac{v_p}{3}} av^2dv=1$ 得 $a=\frac{81}{v_p^3}$

$$\bar{\varepsilon}=\frac{1}{2}\cdot m\int_0^{\frac{v_p}{3}} f(v)dv\cdot\frac{\int_0^{\frac{v_p}{3}} N v^2 f(v)dv}{\int_0^{\frac{v_p}{3}} N f(v)dv}$$

$$=\frac{1}{2}m\int_0^{\frac{v_p}{3}}\frac{81v^4}{v_p^3}dv=\frac{mv_p^2}{30}$$ (X)

$$\overline{v^2}=\int_0^{\frac{v_p}{3}} v^2 f(v)dv=\int_0^{\frac{v_p}{3}} av^4dv=\frac{av_p^5}{1215}$$

∴ $E=\frac{1}{2}\cdot\frac{M}{N_A}\cdot\overline{v^2}=\frac{aMv_p^2}{2430N_A}$

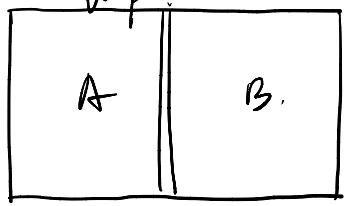
△混合气体温度

△容器绝热. 体积为$2V_0$. 被绝热板分为两部分. A中有1mol单原子分子理想气体. B中有2mol刚性双原子分子理想气体. AB两部分压强相等均为p_0. 两部分体积均为V_0. 则

(1) 两种气体各自内能为多少?

(2) 抽去隔板. 平衡后的温度?

V_0, p_0



⇒ (1) $E_A = N_A \cdot \frac{3}{2} k_B T_1 = \frac{3}{2} RT_1 = \frac{3}{2} p_0 V_0$

$E_B = 2N_A \cdot \frac{5}{2} k_B T_2 = 5RT_2 = \frac{5}{2} p_0 V_0$

(2) 混合由于绝热气体内能不变.

混合前: $E = E_A + E_B = \frac{3}{2} RT_1 + 5RT_2$.

由 $p_0 V_0 = RT_1 = 2RT_2$ 知 $T_1 = 2T_2$.

$\therefore E = \frac{3}{2} RT_1 + 5RT_2 = 8RT_2$

混合后: $E = \frac{3}{2} RT + 5RT = \frac{13}{2} RT$

$\Rightarrow \frac{13}{2} RT = 8RT_2$

$\therefore T = \frac{16T_2}{13}$

又 $T_2 = \frac{p_0 V_0}{2R}$. 即 $T = \frac{8 p_0 V_0}{13R}$

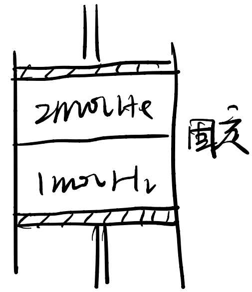
能量不变

△绝热气缸. 上下绝热活塞 中间固定导热板. 开始上下温度均为 T_0. 下面体积为 V_0. 现缓慢推动下方活塞.

(1) 下方气体摩尔热容和多方过程指数

(2) 下方体积减半时 下方气体所做功

上方气体内能变化



⇒ (1) 系统绝热. 下方多方过程. 上方定容

⇒ $Q = Q_上 + Q_下 = 0$

上方: $\delta Q = dE = 2\cdot\frac{5}{2}RdT$

下方: $\delta Q = C_{n,m}dT$

⇒ $2\cdot\frac{5}{2}RdT + C_{n,m}dT = 0$ 得 $C_{n,m} = -5R$

$$n = \frac{C_{n,m} - C_{p,m}}{C_{n,m} - C_{v,m}} = \frac{-5R - \frac{7}{2}R}{-5R - \frac{5}{2}R} = \frac{17}{15}$$

(2) 下方气体多方过程:

$$A = -\frac{\nu R(T_2 - T_1)}{1-n} = \frac{\nu R}{n-1}(T - T_0) = \frac{15}{2}\nu RT_0\left(1 - \frac{T}{T_0}\right)$$

由 $TV^{n-1} = C$ 得: $\frac{T}{T_0} = \left(\frac{V_0}{V}\right)^{n-1} = 2^{n-1} = 2^{\frac{2}{15}}$

$$\therefore A = \frac{15}{2}\nu RT_0\cdot\left(1 - 2^{\frac{2}{15}}\right) = 0.762RT_0$$

上方气体: $\Delta E = \nu C_{v,m}\Delta T = 2\cdot\frac{5}{2}R(T - T_0) = 0.29RT_0$

A 空调

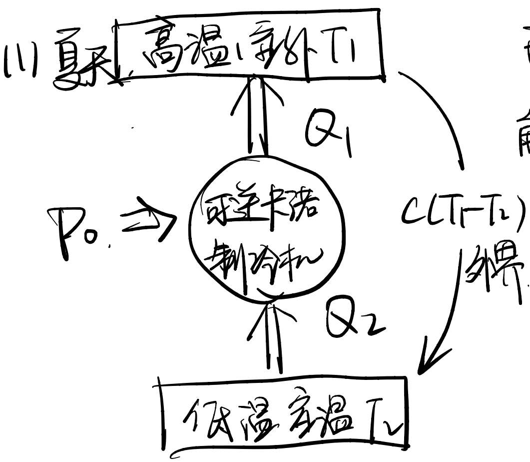
? 某空调器可按可逆卡诺循环运转， 其连续做功时所提供的功率为 P_0.

(1) 如果夏天室外温度恒定为 T_1, 启动空调连续工作， 最后可将室温降低到恒定温度 T_2. 若室外通过热传导在单位时间内向室内传输的热量为 $C(T_1-T_2)$, 求 T_2 与 T_1, C, P_0的关系。

(2) 当室外温度为 30°C 时, 这台空调机只要 30% 的时间处于工作状态, 室内温度可维持在 20°, 这台空调器能维持室内 20° 的最高室外温度是多少?

(3) 冬天, 空调器从室外吸热, 在室内放出, 我们可以视为供热机. 如果让室内保持 20°, 室外的最低温度是多少?

2



已知 P_0. T_1(高温). C. 求 T_2(低温)

解: $Q_2 = C(T_1-T_2)\Delta t$

$P_0 \Delta t = Q_1 - Q_2$

$$\frac{Q_1}{T_1} = \frac{Q_2}{T_2} = \frac{P_0}{T_1-T_2}$$

即 $$\frac{C(T_1-T_2)}{T_2} = \frac{P_0}{T_1-T_2}$$

(2) $T_1 = 303K$. $0.3P_0 \Rightarrow T_2 = 293K$, T_2 P_0 不变. 求 T_{1max}

$$\begin{cases} \dfrac{C(T_1-T_2)}{T_2} = \dfrac{0.3P_0}{T_1-T_2} \\ \dfrac{C(T_{1max}-T_2)}{T_2} = \dfrac{P_0}{T_{1max}-T_2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{(T_1-T_2)^2}{(T_{1max}-T_2)^2} = 0.3, \quad T_{1max} > T_1$$

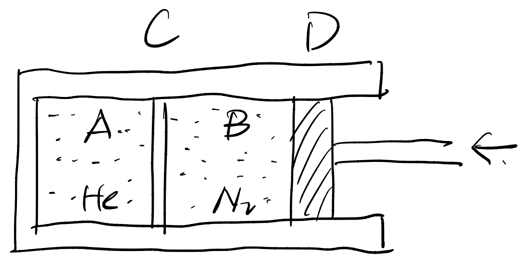
Δ 热力学第一定律应用

绝热气缸中有一固定的导热隔板C把气缸分为A、B两部分，D为绝热活塞，A、B分别盛有1mol He 和 N_2，若活塞缓慢压缩B部气体做功W，求：

(1) B部气体内能变化

(2) B部气体的摩尔热容

(3) B部气体的V(T)



⇒ (1) 由于C导热，则系统前后温度均相同，即温度增量相同：

$$\Delta E_A+\Delta E_B=\frac{3}{2}R\Delta T_A+\frac{5}{2}R\Delta T_B=W \;;\quad \Delta T_A=\Delta T_B$$

得 $\Delta E_A=\frac{3}{8}W$，$\Delta E_B=\frac{5}{8}W$

(2) 由于气缸绝热，则吸收热量为0，即总比热容为0：

$$C_{An,m}+C_{Bn,m}=0$$

由A为等体过程，则 $C_{An,m}=\frac{3}{2}R$ ∴ $C_{Bn,m}=-\frac{3}{2}R$

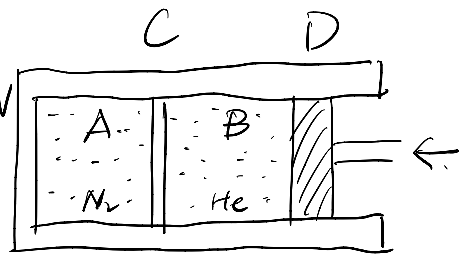
(3) 由B的热容为常数，则为多方过程

$$\therefore n=\frac{C_{Bn,m}-C_{Bp,m}}{C_{Bn,m}-C_{BV,m}}=\frac{5}{4}$$ 即 $pV^{\frac{5}{4}}=C_1$

化得 $TV^{\frac{1}{4}}=C_2$

Δ 熵变的计算

绝热气缸中有一固定的导热板把气缸分为两部分，一部分装有0.2mol N_2，另一部分有0.5mol He，开始时系统温度为T_0。在缓慢压缩He的过程中，若外界对系统做功W，求He熵变？



由绝热，知 $\Delta E = W$，对A、B有：

$$\begin{cases} \Delta E_A + \Delta E_B = 0.2 \times \frac{5}{2} R \Delta T_A + 0.5 \times \frac{3}{2} R \Delta T_B = W \\ \Delta T_A = \Delta T_B = \Delta T \end{cases}$$

得 $\Delta T = \frac{4W}{5}$，即 $T = T_0 + \frac{4W}{5R}$

由系统吸收热量为0知总摩尔热容为0，即 $C_{An,m} + C_{Bn,m} = 0$

A作等体过程：$C_{An,m} = \frac{5}{2}R \Rightarrow C_{Bn,m} = -\frac{5}{2}R$

对B作多方过程：$n = \frac{C_{Bn,m} - C_{Bp,m}}{C_{Bn,m} - C_{B,V,m}} = \frac{-\frac{5}{2}R - \frac{5}{2}R}{-\frac{5}{2}R - \frac{3}{2}R} = \frac{5}{4}$

则对He：$pV^{\frac{5}{4}} = C_1$ 或 $TV^{\frac{1}{4}} = C_2$

则 $T_1 V_1^{\frac{1}{4}} = T_2 V_2^{\frac{1}{4}} \Rightarrow \frac{V_2}{V_1} = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^4$

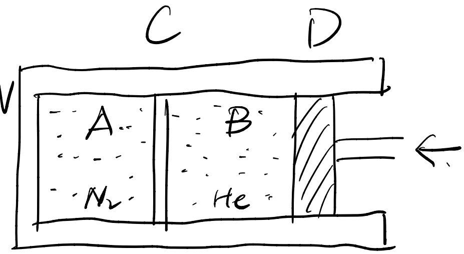
∴ 对He：$\Delta S = C_V \ln \frac{T_2}{T_1} + \nu R \ln \frac{V_2}{V_1}$

$$= \frac{3}{4} R \ln \frac{T_2}{T_1} + 2R \ln \frac{T_1}{T_2} = \frac{5}{4} R \ln \frac{T_1}{T_2}$$

$$= \frac{5}{4} R \ln \frac{5RT_0}{5RT_0 + 4W}$$

绝热气缸中有一固定的导热板把气缸分为两部分。一部分装有0.2mol N_2，另一部分有0.5mol He。开始时系统温度为T_0。在缓慢压缩He的过程中，若外界对系统做功W，求He熵变？

由绝热，知 $\Delta E = W$，对A、B有：



$$\begin{cases} \Delta E_A + \Delta E_B = 0.2 \times \frac{5}{2} R \Delta T_A + 0.5 \times \frac{3}{2} R \Delta T_B = W \\ \Delta T_A = \Delta T_B = \Delta T \end{cases}$$

得 $\Delta T = \frac{4W}{5}$，即 $T = T_0 + \frac{4W}{5R}$

由整个系统经历可逆绝热过程知 $\Delta S^* = 0$

$$\Delta S^* = \Delta S_{N_2} + \Delta S_{He} = 0 \quad \text{即} \quad \Delta S_{He} = -\Delta S_{N_2}$$

对 N_2 来说经历等体过程：

$$\text{即} \quad \Delta S_{N_2} = \nu C_{v,m} \ln \frac{T_2}{T_1}$$

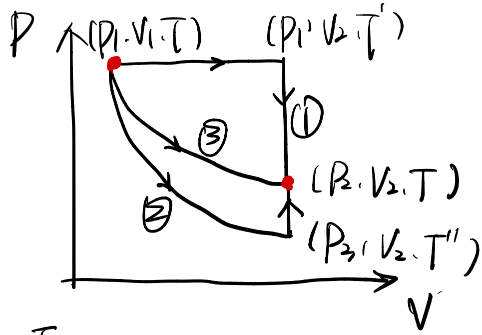
$$= \frac{5}{2} R \ln \frac{T_0 + \frac{4W}{5R}}{T_0}$$

$$= \frac{5}{2} R \ln \left(1 + \frac{4W}{5RT_0}\right)$$

$$\Rightarrow \Delta S_{He} = \frac{5}{2} R \ln \frac{T_0}{T_0 + \frac{4W}{5R}}$$

$$= \frac{5}{2} R \ln \frac{5RT_0}{5RT_0 + 4W}$$

Δ 绝热自由膨胀熵变



可逆过程1：

$$\Delta S = \int_p \frac{\delta Q}{T} + \int_V \frac{\delta Q}{T}$$

$$= \nu C_p \ln\frac{T'}{T} + \nu C_V \ln\frac{T}{T'}$$

$$= \nu(C_p - C_V)\ln\frac{T'}{T} = \nu R\ln\frac{T'}{T}$$

$$= \nu R\ln\frac{V_2}{V_1}$$

可逆过程2(绝热过程)：

$$\Delta S = \int_{绝热}\frac{\delta Q}{T} + \int_V \frac{\delta Q}{T} = 0 + \int_V \frac{\delta Q}{T} = \nu C_{V,m}\ln\frac{T''}{T}$$

由绝热过程：$TV^{\gamma-1} = C \Rightarrow \frac{T''}{T} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}$

$$原式 = \nu\, \underline{C_{V,m}(1-\gamma)}\ln\frac{V_2}{V_1} = \nu R\ln\frac{V_2}{V_1}$$

$$\left[C_{V,m} = \frac{R}{\gamma-1}\right]$$

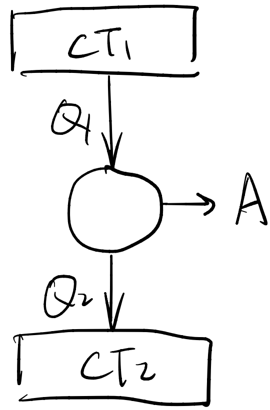
可逆过程3(等温过程)：等温过程中吸热=对外做功即 $\delta Q = p\,dV$

$$\Delta S = \int_{等温}\frac{\delta Q}{T} = \int \frac{p\,dV}{T} = \int_{V_1}^{V_2}\frac{\frac{\nu RT}{V}dV}{T}$$

$$= \int_{V_1}^{V_2}\frac{\nu R}{V}dV = \nu R\ln\frac{V_2}{V_1}$$

两有限大热源，其初温分别为T_1、T_2，热容量与温度无关均为C。有热机工作在这两热源之间，直至两热源有共同的温度为止。求该热机能输出的最大功为多少？若热机为卡诺热机，求其最终温度T_f。

（两物体无相变，压强不变）



⇒ 对系统：$\Delta S^* = \Delta S + \Delta S_1 + \Delta S_2$

ΔS为物体内部产生的熵（相变）

ΔS_1、ΔS_2为热流产生的熵

由题意 $\Delta S = 0$

$$\Delta S_1 = cm\ln\frac{T_f}{T_1}, \quad \Delta S_2 = cm\ln\frac{T_f}{T_2}$$

$$\Delta S^* = cm\ln\frac{T_f^2}{T_1T_2}$$

当循环为卡诺循环（可逆）时 $\Delta S^* = 0 \Rightarrow T_f = \sqrt{T_1T_2}$

热机作功 $A = Q_1 - Q_2 = C(T_1 - T_f) - C(T_f - T_2) = C(T_1 + T_2 - 2T_f)$

$$= C(T_1 + T_2 - 2\sqrt{T_1T_2})$$

当循环为任意（可逆或不可逆）时 $\Delta S^* \geq 0 \Rightarrow T_f \geq \sqrt{T_1T_2}$

热机作功 $A = Q_1 - Q_2 = C(T_1 - T_f) - C(T_f - T_2) = C(T_1 + T_2 - 2T_f)$

$$\leq C(T_1 + T_2 - 2\sqrt{T_1T_2})$$

例: 有三个热容都为 C (可近似为常量)的相同物体，其温度分别为 $T_a = T_b = 300$ K, $T_c = 100$ K。若外界不作功，也不传热，利用热机将三个物体作为热源、使其中的某一个温度升高，试问它所能达到的最高温度为多少?

例: 设有一刚性容器内装有温度为 T 的 1 mol 氮气, 在此气体和温度也是 T 的大热源之间有一个可逆制冷机在工作，它从热源吸收热量, 向容器中的气体放出热量。氮气、热源和制冷机与外界隔绝。经一段时间后中氮气的温度升至 T'。试证明该过程中制冷机必须消耗的功 A

$$A \geq \frac{5}{2} R T\left(\ln \frac{T}{T'}+\frac{T'}{T}+1\right)$$

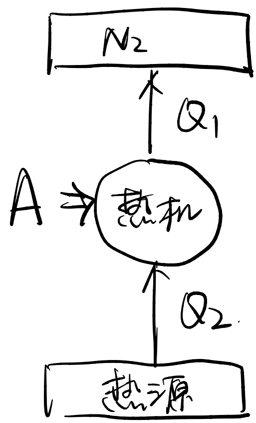
证明：$\Delta S^* = \Delta S + \Delta S_{N_2} + \Delta S_{热}$

其中 $\Delta S = 0$. $\Delta S_{N_2} = \frac{5}{2} R \ln \frac{T'}{T}$ $\Delta S_{热} = -\frac{Q_2}{T}$

由 $\Delta S^* \geq 0$

得 $\frac{5}{2} R \ln \frac{T'}{T} - \frac{Q_2}{T} \geq 0$

$\Rightarrow Q_2 \leq \frac{5}{2} R T \ln \frac{T'}{T}$

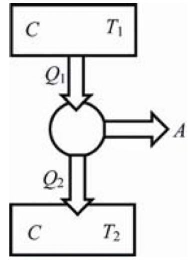


$A = Q_1 - Q_2 = \frac{5}{2} R (T' - T) - Q_2$

$\geq \frac{5}{2} R T' - \frac{5}{2} R T - \frac{5}{2} R T \ln \frac{T'}{T}$

$= \frac{5}{2} R T \left(\ln \frac{T}{T'} + \frac{T'}{T} + 1 \right)$

10-17. 两有限大热源，其初温分别为 T_1 和 T_2，热容与温度无关均为 C，有一热机工作于这两热源之间，直至两热源具有共同的温度为止。求这热机能输出的最大功为多少？



解：设热源最后达到的共同温度为 T_3，

$$\Delta S=\int_{T_1}^{T_3}\frac{C\mathrm{d}T}{T}+\int_{T_2}^{T_3}\frac{C\mathrm{d}T}{T}=C\ln\frac{T_3}{T_1}+C\ln\frac{T_3}{T_2}=C\ln\frac{T_3^2}{T_1T_2}\geq 0$$

理想可逆机效率最高，此时ΔS=0，$\therefore T_3=\sqrt{T_1T_2}$

$$A_{\max}=Q_1-Q_2=C\left(T_1-T_3\right)-C\left(T_3-T_2\right)=C\left(T_1+T_2-2\sqrt{T_1T_2}\right)=C\left(\sqrt{T_1}-\sqrt{T_2}\right)^2$$

由熵增原理可得到最终温度

- $\int_{v_1}^{v_2} nvf(v)dv$: 速率在区间 $[v_1, v_2]$ 上单位时间碰撞单位面积器壁的平均分子数(平均碰撞次数), 其中 n: 粒子数密度, $f(v)$: 分子速率的分布函数(概率密度函数)
- $\frac{\int_{v_1}^{v_2} vf(v)dv}{\int_{v_1}^{v_2} f(v)dv}$: 速率在区间 $[v_1, v_2]$ 上分子的平均速率
- $\int_{v_1}^{v_2} \frac{N}{2}mv^2 f(v)dv$: 速率在区间 $[v_1, v_2]$ 上分子平动动能之和.
- $dE = \nu C_{V,m}dT$: 适用于理想气体,
  $dE = \nu C_{V,m}dT + \left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_T dV$: 适用于理想气体和实际气体. $\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_T$: 保持温度不变的情况下内能对体积的偏微分.