模式识别

HMM: Hidden Markov Model – part 2
隐马尔科夫模型第二部分

吴建鑫
南京大学人工智能学院，2023

Evaluation

假设隐状态已知

- ✓ 已知$\lambda, o_{1:T}$，求$P(o_{1:T}|\lambda)$
- ✓ 若假设oracle已告知所有的隐变量的值$q_{1:T}$
  - $P(o_{1:T}|\lambda, q_{1:T}) = \prod_{i=1}^{T} P(o_t|q_t, \lambda) = \prod_{i=1}^{T} b_{q_i}(o_i)$
  - 证明？含义？
  - λ的存在只是表明概率的大小是基于该模型参数计算的，可以去除而不影响计算
- ✓ 关于各随机变量之间的独立性的判断，进一步参阅PRML第八章

一种naïve的计算方法

- ✓ 那么隐变量序列$q_{1:T}$的可能性多大呢？
  - $P(q_{1:T}|\lambda) = \pi_{q_1} A_{q_1 q_2} A_{q_2 q_3} \cdots A_{q_{T-1} q_T}$
  - 含义？
- ✓ 用全概率公式对所有可能的$q_{1:T}$求和可以得到$P(o_{1:T}|\lambda)$
  - $P(o_{1:T}|\lambda) = \sum_{all\ Q} P(o_{1:T}|\lambda, q_{1:T}) P(q_{1:T}|\lambda)$，复杂度？
  - $O(T \times N^T)$
- ✓ 虽然不实用，但可以从中学到一种思考问题的方法
  - 后面EM学习算法用相似的思路

那么，如何快速计算？

- ✓ 动态规划！

- ✓ 只看最后一步（$t=T$)，该如何计算?
  1. 最后一步（$t=T$)时一共可能有N种状态：$q_T=S_1,\ldots,S_N$，其概率$P(o_{1:T-1},q_T=S_i\,|\lambda\,)=?$
  2. 若最后一步状态为S_i, 那么观察到输出o_T的概率是多少？
  3. 所求的值是多少？(全概率公式)

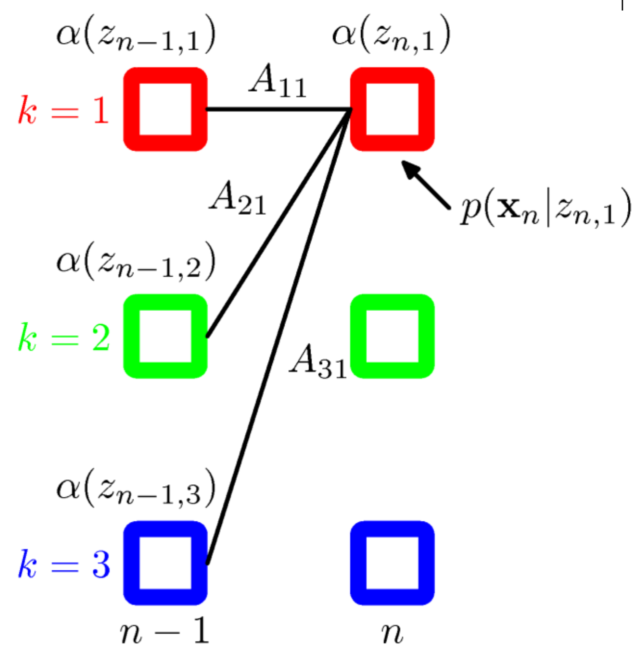
$$P(o_{1:T}|\lambda)=\sum_{i=1}^{N}P(o_{1:T-1},q_T=S_i|\lambda\,)b_{S_i}(o_T)$$

- 只限于最后一步吗？

快速计算（2）

✓ 如何计算$P(o_{1:T-1}, q_T = S_i|\lambda)$?

- PRML Fig. 13.12
- 有N种可能，即$T-1$时刻状态为$q_{T-1} = S_j$，$j = 1,2,\dots,N$，然后通过概率A_{ji}转移
- 全概率公式，again！



$$P(o_{1:T-1}, q_T = S_i|\lambda) = \sum_{j=1}^{N} P\big(o_{1:T-1}, q_{T-1} = S_j\big|\lambda\big)A_{ji}$$

快速计算小结

- ✓ $P(o_{1:T}|\lambda) = \sum_{i=1}^{N} P(o_{1:T-1}, q_T = S_i|\lambda)b_{S_i}(o_T) = \sum_{i=1}^{N}\left(b_{S_i}(o_T)\sum_{j=1}^{N} P\left(o_{1:T-1}, q_{T-1} = S_j|\lambda\right)A_{ji}\right)$
- ✓ 红色部分是什么？
  - 一个规模小一点的相同问题（$T-1$）
  - 但是需要对所有j的可能取值计算
  - 正如DTW中一样，可以通过动态规划解决，但是需要解决比原问题更多数目的小规模子问题
  - 但是，复杂的是，目前牵涉两个数值而不是一个：$P(o_{1:T-1}, q_T = S_i|\lambda)$和$P(o_{1:T}|\lambda)$
  - 计算的方向应该是什么？

动态规划算法（前向forward算法）

- $P(o_{1:T}|\lambda) = \sum_{i=1}^{N} P(o_{1:T-1}, q_T = S_i|\lambda\,)b_{S_i}(o_T) = \sum_{i=1}^{N}\left(b_{S_i}(o_T)\sum_{j=1}^{N} P\left(o_{1:T-1}, q_{T-1} = S_j|\lambda\right)A_{ji}\right)$
- 定义
  - $\alpha_t(i) = P(o_{1:t}, q_t = S_i|\lambda)$ –含义是？
  - Initialization: $\alpha_1(i) = \pi_i b_{S_i}(o_1),\ \ 1 \le i \le N$
  - Induction: For $1 \le t \le T-1$

$$\alpha_{t+1}(i) = \left[\sum_{j=1}^{N} \alpha_t(j)A_{ji}\right] b_{S_i}(o_{t+1}), \qquad 1 \le i \le N$$

  - Termination (output): $P(o_{1:T}|\lambda) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_T(i)$

后向算法backward algorithm

- ✓ 定义$\beta_t(i) = P(o_{t+1:T} | q_t = S_i, \lambda)$
  - 若在时刻t状态为S_i，将来观测到$o_{t+1:T}$的概率
- ✓ 初始化：$\beta_T(i) = 1$，$1 \leq i \leq N$
- ✓ 反向更新：$t = T-1, T-2, \ldots, 2,1$

$$\beta_t(i) = \sum_{j=1}^{N} A_{ij} b_{S_j}(o_{t+1}) \beta_{t+1}(j), \qquad 1 \leq i \leq N$$

- ✓ 输出：$\beta_1(i) = P(o_{2:T} | q_1 = S_i, \lambda)$

$$P(o_{1:T} | \lambda) = \sum_{i=1}^{N} \pi_i b_{S_i}(o_1) \beta_1(i)$$

Decoding

发现“最好”的隐变量值

✓ 标准1：对于每个时刻，发现其后验概率最大的状态

- 定义$\gamma_t(i) = P(q_t = S_i | o_{1:T}, \lambda)$，当观测到输出为$o_{1:T}$时，时刻$t$时隐变量为第$i$个状态的后验概率
- 那么，对于一个输出序列$o_{1:T}$，选择

$$q_t = \underset{1 \le i \le N}{\operatorname{argmax}} \gamma_t(i), \qquad t = 1,2, \dots, T$$

- 可能出现什么问题？
- 不存在这样的路径$q_{1:T}$

怎样计算γ

- ✓ $\alpha_t(i)\beta_t(i) = P(o_{1:T}, q_t = S_i|\lambda)$
  - 为什么？
- ✓ 贝叶斯定理

$$\gamma_t(i) = P(q_t = S_i|o_{1:T}, \lambda) = \frac{P(o_{1:T}, q_t = S_i|\lambda)}{P(o_{1:T}|\lambda)} = \frac{\alpha_t(i)\beta_t(i)}{P(o_{1:T}|\lambda)}$$

  - $P(o_{1:T}|\lambda) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_t(i)\beta_t(i)$ for any t!
  - 三种计算方法计算$P(o_{1:T}|\lambda)$了
- ✓ 或者 1) $\gamma_i = \alpha_t(i)\beta_t(i)$ 2) L1 normalize： $\gamma_i \leftarrow \frac{\gamma_i}{\sum_i \gamma_i}$

寻找最大概率的路径

- ✓ 一共有N^T种可能的路径，有些的概率可能为0
  - 比如通过准则1得到的路径
  - 那么，如果寻找所有可能路径里面概率最大的那个呢？

$$q_{1:T} = \underset{Q_{1:T}}{\operatorname{argmax}} P(Q_{1:T}|o_{1:T}, \lambda) = \underset{Q_{1:T}}{\operatorname{argmax}} P(Q_{1:T}, o_{1:T}|\lambda)$$

- ✓ Naïve的方法复杂性是N^T，有没有更好的方法？
  - Viterbi方法
  - 猜猜这是一种什么类型的方法？
  - Andrew J. Viterbi，USC的工程学院以其命名

Viterbi decoding

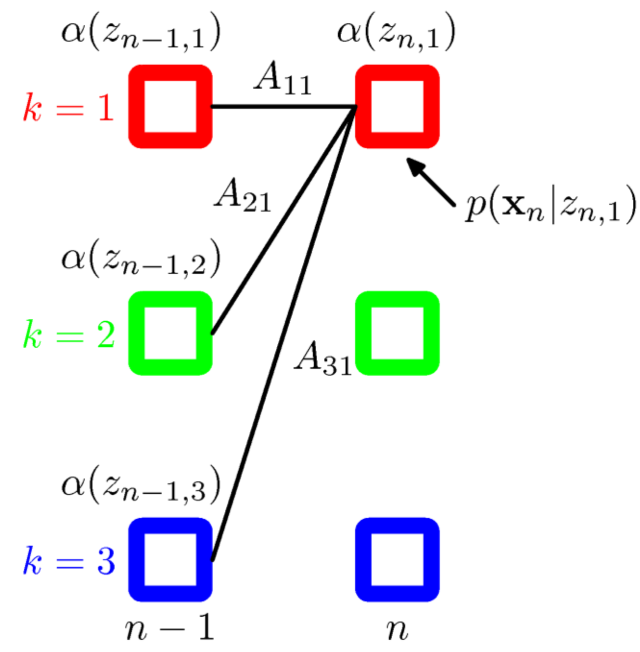
- ✓ $q_{1:T} = \underset{Q_{1:T}}{\operatorname{argmax}} P(Q_{1:T}, o_{1:T}|\lambda)$
- ✓ 定义更多的子问题

$$\delta_t(i) = \max_{q_{1:t-1}} P(q_{1:t-1}, q_t = S_i, o_{1:t}|\lambda)$$

  - 含义：当限定两个条件1）前t个时刻的输出为$o_{1:t}$，2）第t个时刻的隐状态为第i个状态的时候，最佳路径所能取得的最大概率
  - 怎么取得q_t?
    - 用另外一个变量$\psi_t(i)$做记录
  - 怎么从t进展到$t+1$?

两个步骤

- 从t进展到$t+1$
  - $\delta_{t+1}(i) = \max_j([\delta_t(j)A_{ji}]b_{s_i}(o_{t+1}))$
  - $\delta_{t+1}(i)$是概率，如果只需要发现概率最大那个状态，$b_i(o_{t+1})$？
- 所以在时刻$t+1$，需要用另外一个变量$\psi_t(i)$记录最大概率的路径在时刻t是哪一个状态
  - $\psi_{t+1}(i) = \operatorname{argmax}_{1 \le j \le N}([\delta_t(j)A_{ji}])$



Viterbi算法

- ✓ 初始化：$\delta_1(i) = \pi_i b_{S_i}(o_1), \psi_1(i) = 0, 1 \le i \le N$
- ✓ 递归：$2 \le t \le T$，$1 \le i \le N$

$$\delta_t(i) = \max_{1\le j\le N}\left(\left[\delta_{t-1}(j)A_{ji}\right]b_{S_i}(o_t)\right)$$

$$\psi_t(i) = \operatorname*{argmax}_{1\le j\le N}\left(\left[\delta_{t-1}(j)A_{ji}\right]\right)$$

- ✓ 输出：
  - 最大概率：$P^* = \max_{1\le i\le n} \delta_T(i)$
  - 时刻T的最佳路径变量：$q_T^* = \operatorname*{argmax}_{1\le i\le N}(\delta_T(i))$
  - 时刻$T-1, T-2, \dots, 2,1$的最佳路径变量：$q_t^* = \psi_{t+1}(q_{t+1}^*)$

分析

- ✓ 问题1的动态规划$\alpha_{t+1}(i) = \sum_{j=1}^{N} \alpha_t(j) A_{ji}$
- ✓ 问题2的动态规划$\delta_t(i) = \max_j\left(\left[\delta_{t-1}(j) A_{ji}\right] b_i(o_t)\right)$
- ✓ 最重要的操作分别是sum-product和max-product
  - 其复杂性均为N^2T
  - 和naïve方法的TN^T比较，极其巨大的速度提高

- ✓ 进一步阅读：sum-product和max-product是更为通用的算法，在图模型graphical model中有极为广泛的应用。

问题3：学习系统的参数

- ✓ 发现$\lambda = (A, B, \boldsymbol{\pi})$，使得对于固定的$N$，$T$，和观察值$\boldsymbol{O}$，似然(likelihood) $P(\boldsymbol{O}|\lambda)$最大

  - 目前没有方法能发现全局最优的解
  - 常用的方法是Baum-Welch算法，发现一个局部最优的解
  - 进一步阅读，Baum-Welch是EM方法的一种具体体现，更多内容可参考上个PPT的进一步阅读部分，EM算法的一个tutorial
    - 可参考我的EM Note