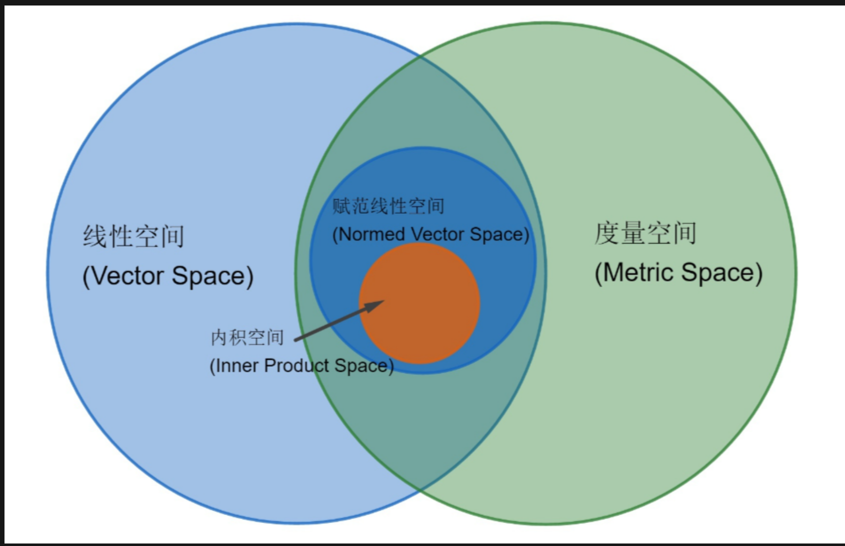
第二章 数学背景知识



1. 内积与范数
   - 线性空间 (向量空间, Vector Space): 集合 + 线性结构
     - 加法和数乘, 封闭性
     - 向量, 矩阵, 多项式
   - 度量空间 (Metric Space): 集合 + 拓扑结构 (距离函数)
     - 存在度量函数 $d : V \times V \to R$, 满足
       - $d(x, y) \geq 0$ (非负性)
       - $d(x, y) = 0 \text{ iff } x = y$ (同一性)
       - $d(x, y) = d(y, x)$ (对称性)
       - $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (三角不等式)
   - 赋范向量空间 (Normed Vector Space): 向量空间 + 范数
     - 存在范数: $\|\cdot\| : V \to R$, 满足
       - $\|x\| \geq 0$ (非负性), 且 $\|x\| = 0 \text{ iff } x = 0$
       - $\|ax\| = |a|\|x\|, a \in R$ (齐次性)
       - $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, x, y \in V$ (三角不等式)
     - 根据范数定义距离函数: $d(x, y) = \|x - y\|$
   - 内积空间 (Inner Product Space): 向量空间 + 内积
     - 存在内积: $\langle 1, 1\rangle : V \times V \to R$, 满足
       - $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$ (共轭对称性)
       - $\langle ax, y\rangle = a\langle x, y\rangle, \langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$ (线性)
       - $\langle x, x\rangle \geq 0, x \in V$ (非负性)
       - $\langle x, x\rangle = 0 \text{ iff } x = 0$ (非退化)
     - 根据内积定义范数: $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$
     - 常用内积: $\langle x, y\rangle = x^T y$, $\langle f(x), g(x)\rangle = \int f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$
     - 性质
       - $\langle x, y\rangle \leq |\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|$
       - $\left(\sum_{i=1}^{d} x_i y_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{d} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{d} y_i^2\right)$ (柯西不等式)

- $\left(\int f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 \leq \left(\int f^2(x)\,\mathrm{d}x\right)\left(\int g^2(x)\,\mathrm{d}x\right)$