第二次作业

本次作业为《数理逻辑十二讲》Page 17：5题 6题；Page 18：9题 10题 12题 13题 14题。作业提交截止时间为：4月23日，上午10点上课之前，纸质版本。

方盛俊 201300035

5.

先证明部分定理:

双重否定律: $\neg(\neg A) \simeq A$

幂定律: $(A \vee A) \simeq A, (A \wedge A) \simeq A$

排中律: $\models \neg A \vee A, \models A \vee \neg A$

列真值表如下:

A	$\neg(\neg A)$	$A \vee A$	$A \wedge A$	$\neg A \vee A$	$A \vee \neg A$
F	F	F	F	T	T
T	T	T	T	T	T

交换律: $(A \vee B) \simeq (B \vee A), (A \wedge B) \simeq (B \wedge A)$

列真值表如下:

A	B	$A \vee B$	$B \vee A$	$A \wedge B$	$B \wedge A$
F	F	F	F	F	F
F	T	T	T	F	F
T	F	T	T	F	F
T	T	T	T	T	T

蕴涵等值式: $(A \rightarrow B) \simeq ((\neg A) \vee B)$

A	B	$A \rightarrow B$	$(\neg A) \vee B$

A	B	$A \to B$	$(\neg A) \vee B$
F	F	T	T
F	T	T	T
T	F	F	F
T	T	T	T

德摩根律: $\neg(A \vee B) \simeq (\neg A) \wedge (\neg B), \neg(A \wedge B) \simeq (\neg A) \vee (\neg B)$

列真值表如下:

A	B	$\neg(A \vee B)$	$(\neg A) \wedge (\neg B)$	$\neg(A \wedge B)$	$(\neg A) \vee (\neg B)$
F	F	T	T	T	T
F	T	F	F	T	T
T	F	F	F	T	T
T	T	F	F	F	F

(a)

$$
\begin{aligned}
&\because (\neg((P \to \neg Q) \to R)) \\
&\simeq (\neg(\neg(P \to \neg Q) \vee R)) \\
&\simeq (\neg(\neg(\neg P \vee \neg Q) \vee R)) \\
&\simeq (\neg((\neg\neg P \wedge \neg\neg Q) \vee R)) \\
&\simeq (\neg((P \wedge Q) \vee R)) \\
&\simeq (\neg(P \wedge Q) \wedge \neg R) \\
&\simeq ((\neg P \vee \neg Q) \wedge \neg R) \\
&\simeq ((\neg P \wedge \neg R) \vee (\neg Q \wedge \neg R))
\end{aligned}
$$

$\therefore$ $((\neg P \vee \neg Q) \wedge \neg R)$ 为原式的 ∧∨-nf,
$((\neg P \wedge \neg R) \vee (\neg Q \wedge \neg R))$ 为原式的 ∨∧-nf

(b)

$$
\begin{aligned}
&\because \neg(\neg(\neg\neg R \land Q) \land P) \\
&\simeq \neg(\neg(R \land Q) \land P) \\
&\simeq \neg((\neg R \lor \neg Q) \land P) \\
&\simeq (\neg(\neg R \lor \neg Q) \lor \neg P) \\
&\simeq ((R \land Q) \lor \neg P) \\
&\simeq ((R \lor \neg P) \land (Q \lor \neg P))
\end{aligned}
$$

$\therefore$ $((R \lor \neg P) \land (Q \lor \neg P))$ 为原式的 $\land\lor$-nf,
$((R \land Q) \lor \neg P)$ 为原式的 $\lor\land$-nf

6.

(a)

$$
\dfrac{A \vdash A}{\vdash A \to A} \to R
$$

(b)

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{(B \to C), A \vdash A, C \qquad \dfrac{B, A \vdash B, C \qquad B, C, A \vdash C}{B, (B \to C), A \vdash C} \to L}{(A \to B), (B \to C), A \vdash C} \to L}{(A \to B), (B \to C) \vdash A \to C} \to R}{((A \to B) \land (B \to C)) \vdash (A \to C)} \land L}{\vdash ((A \to B) \land (B \to C)) \to (A \to C)} \to R
$$

(c)

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \vdash \neg B, A}{\vdash \neg A, \neg B, A} \neg R \qquad \dfrac{B \vdash \neg A, B}{\vdash \neg A, \neg B, B} \neg R}{\vdash \neg A, \neg B, A \land B} \land R}{\neg(A \land B) \vdash \neg A, \neg B} \neg L}{\neg(A \land B) \vdash (\neg A \lor \neg B)} \lor R}{\vdash \neg(A \land B) \to (\neg A \lor \neg B)} \to Rp
$$

(d)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A, B \vdash A}{\neg A, A, B \vdash}\neg L \quad \dfrac{A, B \vdash B}{\neg B, A, B \vdash}\neg L}{(\neg A \vee \neg B), A, B \vdash}\vee L}{(\neg A \vee \neg B), (A \wedge B) \vdash}\wedge L}{(\neg A \vee \neg B) \vdash \neg(A \wedge B)}\neg R}{\vdash (\neg A \vee \neg B) \to \neg(A \wedge B)}\to R$$

(e)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \vdash A, B}{\vdash \neg A, A, B}\neg R \quad \dfrac{B \vdash A, B}{\vdash \neg B, A, B}\neg R}{\vdash (\neg A \wedge \neg B), A, B}\wedge R}{\vdash (\neg A \wedge \neg B), (A \vee B)}\vee R}{\neg(A \vee B) \vdash (\neg A \wedge \neg B)}\neg L}{\vdash \neg(A \vee B) \to (\neg A \wedge \neg B)}\to R$$

(f)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg B, A \vdash A}{\neg A, \neg B, A \vdash}\neg L \quad \dfrac{\neg A, B \vdash B}{\neg A, \neg B, B \vdash}\neg L}{\neg A, \neg B, (A \vee B) \vdash}\vee L}{(\neg A \wedge \neg B), (A \vee B) \vdash}\wedge L}{(\neg A \wedge \neg B) \vdash \neg(A \vee B)}\neg R}{\vdash (\neg A \wedge \neg B) \to \neg(A \vee B)}\to R$$

9.

对于规则 $\neg L$：

$\neg L : \dfrac{\Gamma, \Delta \vdash \Lambda, A}{\Gamma, \neg A, \Delta \vdash \Lambda}$

1.

设 $\Gamma \cup \Delta$ 为 $\{C_1, C_2, \cdots, C_n\}$, $\Lambda \cup \Theta$ 为 $\{D_1, D_2, \cdots, D_n\}$.

　　赋值 v 反驳规则的结论

iff　赋值 v 使得 $v \models (C_1 \wedge C_2 \wedge \cdots \wedge C_n \wedge \neg A) \wedge (\neg D_1 \wedge \neg D_2 \wedge \cdots \wedge \neg D_n)$

iff　赋值 v 使得 $v \models (C_1 \wedge C_2 \wedge \cdots \wedge C_n) \wedge (\neg A \wedge \neg D_1 \wedge \neg D_2 \wedge \cdots \wedge \neg D_n)$

iff　赋值 v 至少反驳规则的一个前提 (此时只有一个前提)

2.

对于呈形 $\dfrac{S'}{S}$ 的规则:

命题 "赋值 v 使得 $v \models (A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_n) \wedge (\neg B_1 \wedge \neg B_2 \wedge \cdots \wedge \neg B_n)$"

使用德摩根律可知等价于命题 "赋值 v 使得 $v \models (A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_n) \wedge \neg(B_1 \vee B_2 \vee \cdots \vee B_n)$"

取其反命题可得 "赋值 v 有 $v \models \neg(A_1 \wedge A_2 \vee \cdots \wedge A_n) \wedge (B_1 \vee B_2 \vee \cdots \vee B_n)$"

使用蕴涵等值式可知后者等价于命题 "赋值 v 有 $v \models (A_1 \wedge A_2 \vee \cdots \wedge A_n) \to (B_1 \vee B_2 \vee \cdots \vee B_n)$"

即在只有一个前提的情况下,
命题 "v 满足规则的结论" 的否命题为 "v 反驳规则的结论",
命题 "v 满足规则的所有前提" 的否命题为 "v 至少反驳规则的一个前提".

根据一个命题的逆否命题与其等价可知, "v 满足规则的结论 iff v 满足规则的所有前提" 与 "赋值 v 反驳规则的结论 iff 赋值 v 至少反驳规则的一个前提" 互为逆否命题.

在 1. 中我们已经证明了后者, 因此我们可得:

v 满足规则的结论 iff v 满足规则的所有前提.

3.

因为 $\forall x(P(x) \leftrightarrow Q(x)) \Leftrightarrow (\forall x P(x) \leftrightarrow \forall x Q(x))$

对于任意赋值 v 我们均有 2. 结论, 即对于任意赋值 v 都有 v 满足规则的结论 iff v 满足规则的所有前提.

因此就有, 每个前提有效 iff 结论有效.

对于规则 $\neg R$:

$\neg R : \dfrac{\Gamma, A \vdash \Lambda, \Theta}{\Gamma \vdash \Lambda, \neg A, \Theta}$

1.

设 $\Gamma \cup \Delta$ 为 $\{C_1, C_2, \cdots, C_n\}$, $\Lambda \cup \Theta$ 为 $\{D_1, D_2, \cdots, D_n\}$.

赋值 v 反驳规则的结论

iff 赋值 v 使得 $v \models (C_1 \wedge C_2 \wedge \cdots \wedge C_n) \wedge (\neg A \wedge \neg D_1 \wedge \neg D_2 \wedge \cdots \wedge \neg D_n)$

iff　赋值 v 使得 $v \models (C_1 \wedge C_2 \wedge \cdots \wedge C_n \wedge \neg A) \wedge (\neg D_1 \wedge \neg D_2 \wedge \cdots \wedge \neg D_n)$

iff　赋值 v 至少反驳规则的一个前提 (此时只有一个前提)

2.

同理, 与规则 $\neg L$ 相似, 有

v 满足规则的结论 iff v 满足规则的所有前提.

3.

同理, 与规则 $\neg L$ 相似, 有

每个前提有效 iff 结论有效.

对于规则 $\vee L$：

$\vee L: \dfrac{\Gamma, A, \Delta \vdash \Lambda \quad \Gamma, B, \Delta \vdash \Lambda}{\Gamma, (A \vee B), \Delta \vdash \Lambda}$

1.

设 $\Gamma \cup \Delta$ 为 $\{C_1, C_2, \cdots, C_n\}$, $\Lambda \cup \Theta$ 为 $\{D_1, D_2, \cdots, D_n\}$.

　　赋值 v 反驳规则的结论

iff　$v \models (C_1 \wedge C_2 \wedge \cdots \wedge C_n \wedge (A \vee B)) \wedge (\neg D_1 \wedge \neg D_2 \wedge \cdots \wedge \neg D_n)$

iff　$v \models ((C_1 \wedge C_2 \wedge \cdots \wedge C_n \wedge A) \vee (C_1 \wedge C_2 \wedge \cdots \wedge C_n \wedge B)) \wedge (\neg D_1 \wedge \neg D_2 \wedge \cdots \wedge \neg D_n)$

iff　$v \models (((C_1 \wedge C_2 \wedge \cdots \wedge C_n \wedge A) \wedge (\neg D_1 \wedge \neg D_2 \wedge \cdots \wedge \neg D_n)) \vee ((C_1 \wedge C_2 \wedge \cdots \wedge C_n \wedge B) \wedge (\neg D_1 \wedge \neg D_2 \wedge \cdots \wedge \neg D_n)))$

iff　$v \models ((C_1 \wedge C_2 \wedge \cdots \wedge C_n \wedge A) \wedge (\neg D_1 \wedge \neg D_2 \wedge \cdots \wedge \neg D_n))$ 或 $v \models ((C_1 \wedge C_2 \wedge \cdots \wedge C_n \wedge B) \wedge (\neg D_1 \wedge \neg D_2 \wedge \cdots \wedge \neg D_n))$

iff　赋值 v 至少反驳规则的一个前提 (此时有两个前提)

2.

对于呈形 $\dfrac{S_1 \quad S_2}{S}$ 的规则:

同理有

命题 "v 满足规则的结论" 的否命题为 "v 反驳规则的结论",
命题 "v 满足规则的所有前提" 即 "v 满足 S_1 和 S_2"
其否命题为 "v 反驳 S_1 或 S_2" 即 "v 至少反驳规则的一个前提"

根据一个命题的逆否命题与其等价可知, "v 满足规则的结论 iff v 满足规则的所有前提" 与 "赋值 v 反驳规则的结论 iff 赋值 v 至少反驳规则的一个前提" 互为逆否命题.

在 1. 中我们已经证明了后者, 因此我们可得:

v 满足规则的结论 iff v 满足规则的所有前提.

3.

同理, 与规则 $\neg L$ 相似, 有

每个前提有效 iff 结论有效.

对于规则 $\vee R$：

$\vee R: \dfrac{\Gamma \vdash \Lambda, A, B, \Theta}{\Gamma \vdash \Lambda, A \vee B, \Theta}$

1.

设 $\Gamma \cup \Delta$ 为 $\{C_1, C_2, \cdots, C_n\}$, $\Lambda \cup \Theta$ 为 $\{D_1, D_2, \cdots, D_n\}$.

赋值 v 反驳规则的结论

$\text{iff} \quad v \models (C_1 \wedge C_2 \wedge \cdots \wedge C_n) \wedge (\neg(A \vee B) \wedge \neg D_1 \wedge \neg D_2 \wedge \cdots \wedge \neg D_n)$

$\text{iff} \quad v \models (C_1 \wedge C_2 \wedge \cdots \wedge C_n) \wedge (\neg A \wedge \neg B \wedge \neg D_1 \wedge \neg D_2 \wedge \cdots \wedge \neg D_n)$

iff 赋值 v 至少反驳规则的一个前提

2.

同理, 与规则 $\neg L$ 相似, 有

v 满足规则的结论 iff v 满足规则的所有前提.

3.

同理, 与规则 $\neg L$ 相似, 有

每个前提有效 iff 结论有效.

对于规则 $\wedge L$：

$\wedge L: \dfrac{\Gamma, A, B, \Delta \vdash \Lambda}{\Gamma, A \wedge B, \Delta \vdash \Lambda}$

1.

设 $\Gamma \cup \Delta$ 为 $\{C_1, C_2, \cdots, C_n\}$, $\Lambda \cup \Theta$ 为 $\{D_1, D_2, \cdots, D_n\}$.

　　赋值 v 反驳规则的结论

iff　$v \models (C_1 \wedge C_2 \wedge \cdots \wedge C_n \wedge (A \wedge B)) \wedge (\neg D_1 \wedge \neg D_2 \wedge \cdots \wedge \neg D_n)$

iff　$v \models (C_1 \wedge C_2 \wedge \cdots \wedge C_n \wedge A \wedge B) \wedge (\neg D_1 \wedge \neg D_2 \wedge \cdots \wedge \neg D_n)$

iff　赋值 v 至少反驳规则的一个前提

2.

同理, 与规则 $\neg L$ 相似, 有

v 满足规则的结论 iff v 满足规则的所有前提.

3.

同理, 与规则 $\neg L$ 相似, 有

每个前提有效 iff 结论有效.

对于规则 $\wedge R$:

$\wedge R: \dfrac{\Gamma \vdash \Lambda, A, \Theta \quad \Gamma \vdash \Lambda, B, \Theta}{\Gamma \vdash \Lambda, (A \wedge B), \Theta}$

1.

设 $\Gamma \cup \Delta$ 为 $\{C_1, C_2, \cdots, C_n\}$, $\Lambda \cup \Theta$ 为 $\{D_1, D_2, \cdots, D_n\}$.

　　赋值 v 反驳规则的结论

iff　$v \models (C_1 \wedge C_2 \wedge \cdots \wedge C_n) \wedge (\neg(A \wedge B) \wedge \neg D_1 \wedge \neg D_2 \wedge \cdots \wedge \neg D_n)$

iff　$v \models (C_1 \wedge C_2 \wedge \cdots \wedge C_n) \wedge ((\neg A \vee \neg B) \wedge \neg D_1 \wedge \neg D_2 \wedge \cdots \wedge \neg D_n)$

iff　$v \models (C_1 \wedge C_2 \wedge \cdots \wedge C_n) \wedge ((\neg A \wedge \neg D_1 \wedge \neg D_2 \wedge \cdots \wedge \neg D_n) \vee (\neg B \wedge \neg D_1 \wedge \neg D_2 \wedge \cdots \wedge \neg D_n))$

iff　$v \models (((C_1 \wedge C_2 \wedge \cdots \wedge C_n) \wedge (\neg A \wedge \neg D_1 \wedge \neg D_2 \wedge \cdots \wedge \neg D_n)) \vee ((C_1 \wedge C_2 \wedge \cdots \wedge C_n) \wedge (\neg B \wedge \neg D_1 \wedge \neg D_2 \wedge \cdots \wedge \neg D_n)))$

iff $\quad v \models ((C_1 \wedge C_2 \wedge \cdots \wedge C_n) \wedge (\neg A \wedge \neg D_1 \wedge \neg D_2 \wedge \cdots \wedge \neg D_n))$ 或 $v \models ((C_1 \wedge C_2 \wedge \cdots \wedge C_n) \wedge (\neg B \wedge \neg D_1 \wedge \neg D_2 \wedge \cdots \wedge \neg D_n))$

iff $\quad$ 赋值 v 至少反驳规则的一个前提

2.

同理, 与规则 $\vee L$ 相似, 有

v 满足规则的结论 iff v 满足规则的所有前提.

3.

同理, 与规则 $\vee L$ 相似, 有

每个前提有效 iff 结论有效.

对于规则 $\rightarrow L$:

$$\rightarrow L : \frac{\Gamma, \Delta \vdash A, \Lambda \quad \Gamma, B, \Delta \vdash \Lambda}{\Gamma, A \rightarrow B, \Delta \vdash \Lambda}$$

1.

设 $\Gamma \cup \Delta$ 为 $\{C_1, C_2, \cdots, C_n\}$, $\Lambda \cup \Theta$ 为 $\{D_1, D_2, \cdots, D_n\}$.

赋值 v 反驳规则的结论

iff $\quad v \models (C_1 \wedge C_2 \wedge \cdots \wedge C_n \wedge (A \rightarrow B)) \wedge (\neg D_1 \wedge \neg D_2 \wedge \cdots \wedge \neg D_n)$

iff $\quad v \models (C_1 \wedge C_2 \wedge \cdots \wedge C_n \wedge (\neg A \vee B)) \wedge (\neg D_1 \wedge \neg D_2 \wedge \cdots \wedge \neg D_n)$

iff $\quad v \models ((C_1 \wedge C_2 \wedge \cdots \wedge C_n \wedge \neg A) \vee (C_1 \wedge C_2 \wedge \cdots \wedge C_n \wedge B)) \wedge (\neg D_1 \wedge \neg D_2 \wedge \cdots \wedge \neg D_n)$

iff $\quad v \models (((C_1 \wedge C_2 \wedge \cdots \wedge C_n \wedge \neg A) \wedge (\neg D_1 \wedge \neg D_2 \wedge \cdots \wedge \neg D_n)) \vee ((C_1 \wedge C_2 \wedge \cdots \wedge C_n \wedge B) \wedge (\neg D_1 \wedge \neg D_2 \wedge \cdots \wedge \neg D_n)))$

iff $\quad v \models (((C_1 \wedge C_2 \wedge \cdots \wedge C_n) \wedge (\neg A \wedge \neg D_1 \wedge \neg D_2 \wedge \cdots \wedge \neg D_n)) \vee ((C_1 \wedge C_2 \wedge \cdots \wedge C_n \wedge B) \wedge (\neg D_1 \wedge \neg D_2 \wedge \cdots \wedge \neg D_n)))$

iff $\quad v \models ((C_1 \wedge C_2 \wedge \cdots \wedge C_n) \wedge (\neg A \wedge \neg D_1 \wedge \neg D_2 \wedge \cdots \wedge \neg D_n))$ 或 $v \models ((C_1 \wedge C_2 \wedge \cdots \wedge C_n \wedge B) \wedge (\neg D_1 \wedge \neg D_2 \wedge \cdots \wedge \neg D_n))$

iff $\quad$ 赋值 v 至少反驳规则的一个前提

2.

同理, 与规则 $\vee L$ 相似, 有

v 满足规则的结论 iff v 满足规则的所有前提.

3.

同理, 与规则 $\vee L$ 相似, 有

每个前提有效 iff 结论有效.

对于规则 $\rightarrow R$:

$\rightarrow L : \dfrac{\Gamma, A \vdash \Lambda, B, \Theta}{\Gamma \vdash \Lambda, (A \rightarrow B), \Theta}$

1.

设 $\Gamma \cup \Delta$ 为 $\{C_1, C_2, \cdots, C_n\}, \Lambda \cup \Theta$ 为 $\{D_1, D_2, \cdots, D_n\}$.

$$
\begin{aligned}
& \text{赋值 } v \text{ 反驳规则的结论} \\
\text{iff} \quad & v \models (C_1 \wedge C_2 \wedge \cdots \wedge C_n) \wedge (\neg(A \rightarrow B) \wedge \neg D_1 \wedge \neg D_2 \wedge \cdots \wedge \neg D_n) \\
\text{iff} \quad & v \models (C_1 \wedge C_2 \wedge \cdots \wedge C_n) \wedge (\neg(\neg A \vee B) \wedge \neg D_1 \wedge \neg D_2 \wedge \cdots \wedge \neg D_n) \\
\text{iff} \quad & v \models (C_1 \wedge C_2 \wedge \cdots \wedge C_n) \wedge ((\neg\neg A \wedge \neg B) \wedge \neg D_1 \wedge \neg D_2 \wedge \cdots \wedge \neg D_n) \\
\text{iff} \quad & v \models (C_1 \wedge C_2 \wedge \cdots \wedge C_n) \wedge ((A \wedge \neg B) \wedge \neg D_1 \wedge \neg D_2 \wedge \cdots \wedge \neg D_n) \\
\text{iff} \quad & v \models (C_1 \wedge C_2 \wedge \cdots \wedge C_n \wedge A) \wedge (\neg B \wedge \neg D_1 \wedge \neg D_2 \wedge \cdots \wedge \neg D_n) \\
\text{iff} \quad & \text{赋值 } v \text{ 至少反驳规则的一个前提}
\end{aligned}
$$

2.

同理, 与规则 $\neg L$ 相似, 有

v 满足规则的结论 iff v 满足规则的所有前提.

3.

同理, 与规则 $\neg L$ 相似, 有

每个前提有效 iff 结论有效.

综上可得

对于 G' 系统中的每条异于 Cut 的规则,

1. 赋值 v 反驳规则的结论 iff v 至少反驳规则的一个前提;
2. 赋值 v 满足规则的结论 iff v 满足规则的所有前提;
3. 每个前提有效 iff 结论有效.

10.

$\because$ 由 9. 可知对于异于 Cut 的规则有每个前提有效 iff 结论有效.

$\therefore \dfrac{\Gamma \vdash \Lambda, A \to B, \Theta}{\Gamma, A \vdash \Lambda, B, \Theta} \to R'$ 也为一条规则

$$\therefore \dfrac{\vdash A \quad \dfrac{\vdash A \to B}{A \vdash B} \to R'}{\vdash B} Cut$$

即规则 MP : $\dfrac{\vdash A \quad \vdash A \to B}{\vdash B}$

12.

(a) 永真式

(b) 矛盾式

(c) 既非永真式也非矛盾式

(d) 既非永真式也非矛盾式

13.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{A, B \vdash A, D \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{A, B, S, D \vdash D}{A, B, (S \wedge D) \vdash D} \wedge L}{A, B \vdash \neg(S \wedge D), D} \neg R \quad \dfrac{A, B \vdash D, B}{\neg B, A, B \vdash D} \neg L}{(\neg(S \wedge D) \to \neg B), A, B \vdash D} \to L}{A \to (\neg(S \wedge D) \to \neg B), A, B \vdash D} \to L}{A \to (\neg(S \wedge D) \to \neg B), A, \neg D, B \vdash} \neg L}{A \to (\neg(S \wedge D) \to \neg B), A, \neg D \vdash \neg B} \neg R$$

$\therefore A \to (\neg(S \wedge D) \to \neg B), A, \neg D \vdash \neg B$ 可证

14.

由 G' 的 Soundness 可知, 若 $\Gamma \vdash \Delta$ 在 G' 中可证, 则 $\Gamma \vdash \Delta$ 有效.

由其逆否命题可知, 若 $\Gamma \vdash \Delta$ 有反例, 则 $\Gamma \vdash \Delta$ 在 G' 中不可证.

要证 $\neg A \vee B, A \to (B \wedge C), D \to B \vdash B \vee C$ 在 G' 中不可证,
那就要找到一个赋值 v, 使得 $v \models ((\neg A \vee B) \wedge (A \to (B \wedge C)) \wedge (D \to B)) \wedge (\neg(B \vee C))$

取 $v(A) = F, v(B) = F, v(C) = F, v(D) = F$, 可得

$\because v(((\neg A \vee B) \wedge (A \to (B \wedge C)) \wedge (D \to B)) \wedge (\neg(B \vee C)))$
$= ((\neg F \vee F) \wedge (F \to (F \wedge F)) \wedge (F \to F)) \wedge (\neg(F \vee F))$
$= (T \wedge T \wedge T) \wedge (\neg F)$
$= T$

$\therefore \neg A \vee B, A \to (B \wedge C), D \to B \vdash B \vee C$ 在 G' 中不可证.