南京大学
人工智能学院
SCHOOL OF ARTIFICIAL INTELLIGENCE, NANJING UNIVERSITY

第四部分：　多Agent决策

章宗长

2023年4月18日

内容安排

制定群组决策

- **社会选择理论**
- 投票过程
- 投票过程的性质
- 策略性操纵

社会选择理论（social choice theory）

- 本节将研究用于制定群组决策的协议，这属于社会选择理论的范畴
- 社会选择理论研究的问题：综合个人偏好，得出集体选择
- 社会选择的典型实例：投票（voting）

社会选择理论模型

- 假设集合$Ag = \{1, \ldots, n\}$为投票者集合
  - 有限 or 无限？ → 有限
  - 奇数 or 偶数？ → 奇数

- 投票者关于候选集合$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$做出选择
- 如果$|\Omega| = 2$，将其称为成对选举（pairwise election）
- 如果$|\Omega| > 2$，称为一般投票场景（general voting scenario）

偏好

- 每个投票者对候选者都有其偏好（preference）：对集合Ω内元素的一个排序（ordering）

- 例：假设候选集合$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$，Agent i的偏好排序是$(\omega_2, \omega_3, \omega_1)$，那么表示Agent i最偏好ω_2，ω_3次之，最不偏好ω_1，可记作

$$\omega_2 \succ_i \omega_3 \succ_i \omega_1$$

- 将候选集合Ω上的所有偏好构成的集合记作$\Pi(\Omega)$

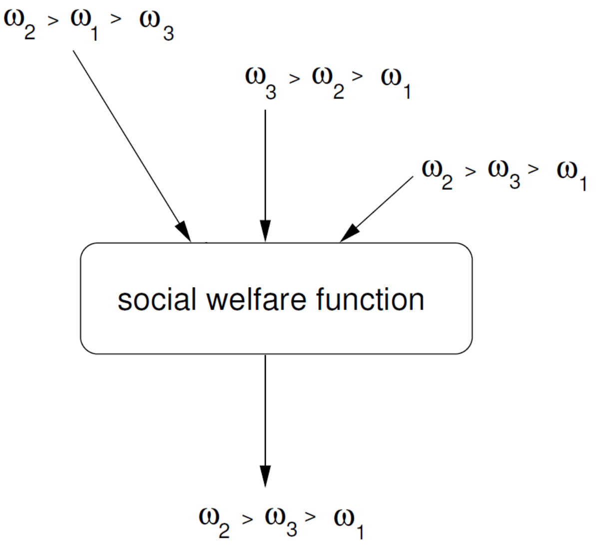
偏好聚合

- 社会选择理论研究的基本问题：
  - 偏好聚合（preference aggregation）：给定一组偏好，我们如何将它们结合起来得出一个尽可能紧密地反映投票人偏好的群组决策?
- 偏好聚合的两种形式：
  - 社会福利函数（social welfare functions）
  - 社会选择函数（social choice functions）

社会福利函数

- 令$\Pi(\Omega)$表示候选集合Ω上的偏好排序集合
- 一个社会福利函数的输入是每个投票者的偏好，输出一个社会偏好排序：

$$f: \underbrace{\Pi(\Omega) \times \cdots \times \Pi(\Omega)}_{n\ times} \rightarrow \Pi(\Omega)$$



- 社会福利函数的结果用$\succ^*$表示
  - $\omega \succ^* \omega'$：在社会排序中，对ω的偏好高于对ω'的偏好
- 例子：组合搜索引擎的结果，协同过滤

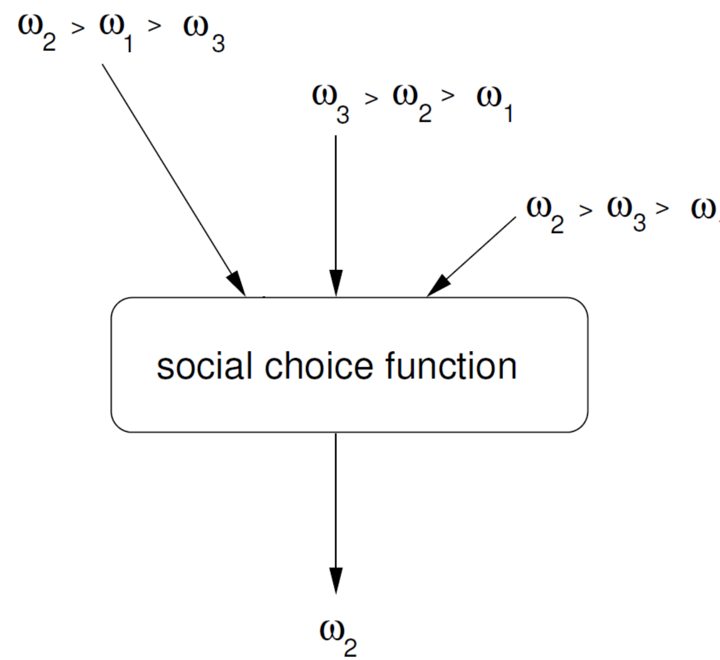
社会选择函数

- 有时，只需要选出一个候选者，而不是一个社会偏好排序

- 社会选择函数的形式：

$$f: \underbrace{\Pi(\Omega) \times \cdots \times \Pi(\Omega)}_{n\ times} \rightarrow \Omega$$

可以由社会福利函数得到社会选择函数



- 例子：总统选举

我们把社会福利函数和社会选择函数称作投票过程

制定群组决策

- 社会选择理论
- **投票过程**
- 投票过程的性质
- 策略性操纵

投票过程——多数制（Plurality）

- 也叫做最高票者当选（first-past-the-post），赢者通吃（winner-takes-all）
- 是一个社会选择函数，选出单一的结果
- 每个投票者提交一个偏好排序（或者一个最期望的候选者），被排到第一位次数最多的候选者获胜

Party	Leader	Votes
Conservative Party	David Cameron	11,334,920 (36.8%)
Labour Party	Ed Miliband	9,344,328 (30.4%)
UK Independence Party	Nigel Farage	3,881,129 (12.6%)
Liberal Democrats	Nick Clegg	2,415,888 (7.9%)
Scottish National Party	Nicola Sturgeon	1,454,436 (4.7%)
Green Party	Natalie Bennett	1,154,562 (3.8%)

多数制的问题

- 以英国为例，它有三大主要政党：
  - 工党（Labour Party），自由民主党（Liberal Democrats）和保守党（Conservative Party）
  - 用$\Omega = \{\omega_L, \omega_D, \omega_C\}$表示
- 假设38%的人选择ω_L，22%的人选择ω_D，40%的人选择ω_C
- 根据多数制，保守党ω_C获胜，但是有60%的人（多数）倾向于其他候选者

策略性投票（Tactical Voting）

- 假设你的偏好是

$$\omega_D \succ_i \omega_L \succ_i \omega_C$$

但是民调显示49%的选民的偏好是$\omega_L \succ \omega_D \succ \omega_C$，还有49%的选民的偏好是$\omega_C \succ \omega_D \succ \omega_L$

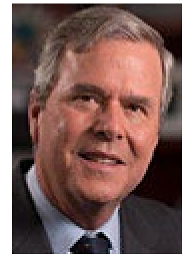
- 那么你会把票投给谁呢？
  - 最好投给ω_L，即使这并不是你真实的偏好

通过策略性投票，获得更期望看到的结果

策略性投票（续）

Hillary Clinton　Bernie Sanders　Jeb Bush　Carly Fiorina






H > B > C > J

J > C > B > H

B > C > J > H

C > B > J > H

民意调查:

✓ Hillary	40%	策略性投票
✓ Jeb	30%	
✓ Bernie	18%	
✓ Carly	12%	

"浪费的选票"

Jeb获胜，即使70%的投票者相信Bernie或者Carly可以是更好的总统！

康多塞悖论（Condorcet's Paradox）

Marquis de Condorcet
（1743 – 1794）

- **康多塞悖论：** 在某些情况下，无论我们选择哪种结果，大多数选民都会对我们选择的结果不满意。

- 例子：假设$Ag = \{1,2,3\}$，$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$，并且有

$$\omega_1 \succ_1 \omega_2 \succ_1 \omega_3$$

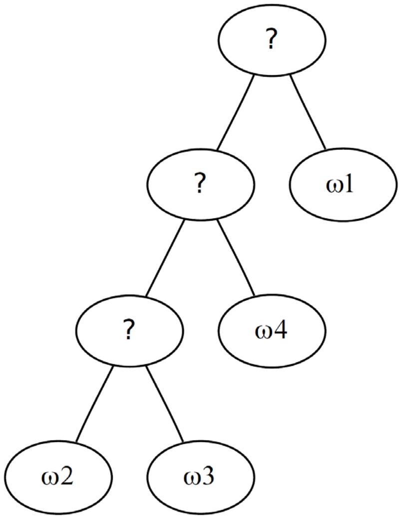
$$\omega_3 \succ_2 \omega_1 \succ_2 \omega_2$$

$$\omega_2 \succ_3 \omega_3 \succ_3 \omega_1$$

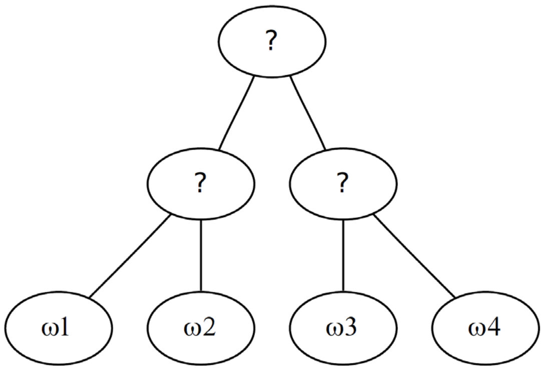
  - 对每一个候选者来说，都有另一个候选者被大多数投票者所偏好！

投票过程——序列多数选举（Sequential Majority Election）

- 多数制的一种变体，表现为进行一系列的选举
  - 每次进行成对选举，胜者进入下一次成对选举
- 序列可以是
  - 线性的
  - 树状的（类似淘汰赛）
- 最终的选举结果
  - 不仅取决于选民的偏好
  - 还取决于候选人参加选举的顺序，即选举议程（election agenda）



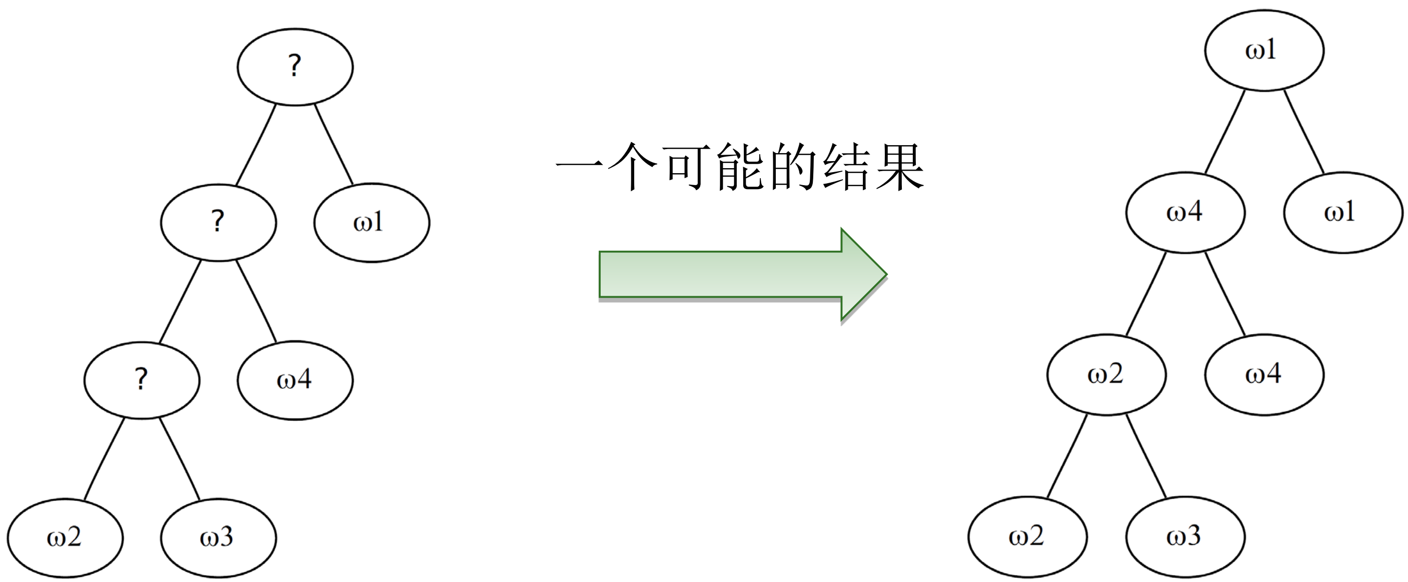
线性序列



树状序列

线性序列多数选举

例子：如果选举议程是$\omega_2,\omega_3,\omega_4,\omega_1$，那么第一次选举在$\omega_2$和$\omega_3$之间进行，胜者和$\omega_4$之间进行选举，本次的胜者与$\omega_1$进行选举



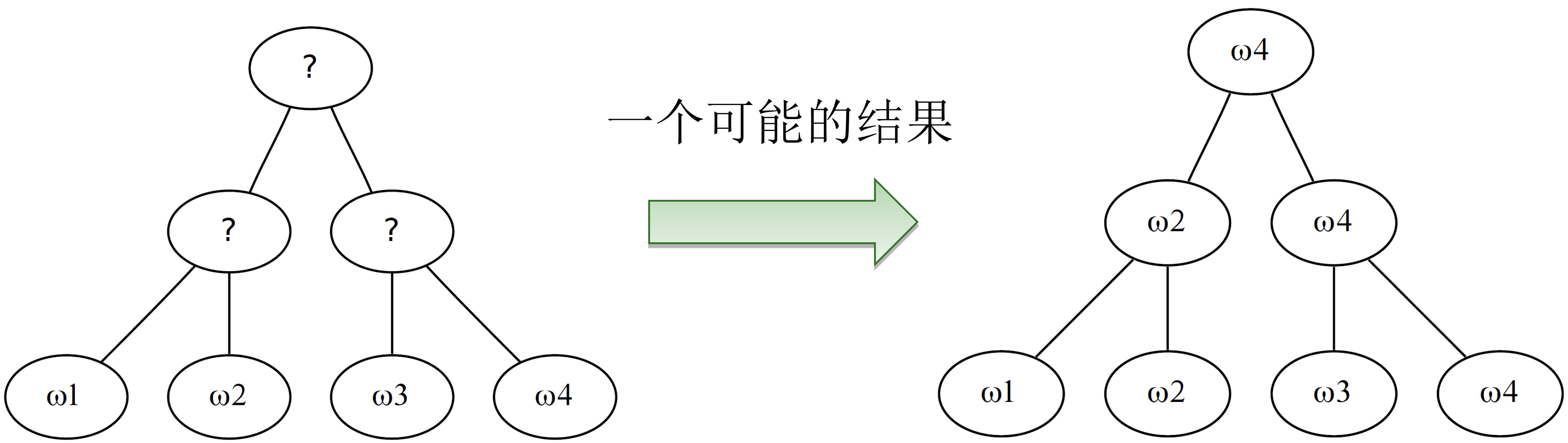
树状序列多数选举

例子：以平衡二叉树的方式组织选举议程：

（1）在ω_1和ω_2之间进行选举；

（2）在ω_3和ω_4之间进行选举；

（3）在（1）的胜者和（2）的胜者之间进行选举

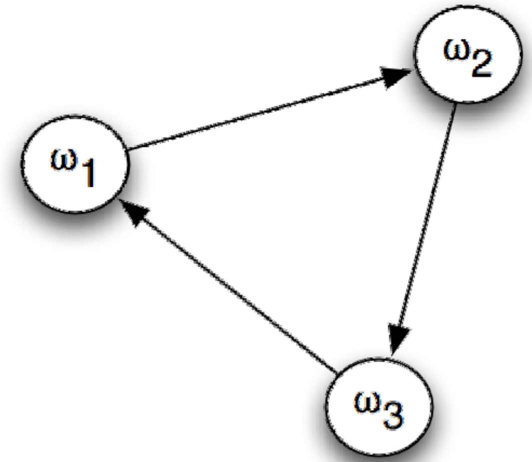


序列多数选举的问题

- 假设
  - 33个投票者的偏好是$\omega_1 \succ_i \omega_2 \succ_i \omega_3$
  - 33个投票者的偏好是$\omega_3 \succ_i \omega_1 \succ_i \omega_2$
  - 33个投票者的偏好是$\omega_2 \succ_i \omega_3 \succ_i \omega_1$

- 对任意一个候选者，我们可以固定一个选举议程使得其在序列多数选举中获胜！
  - 如果用选举议程$(\omega_3, \omega_2, \omega_1)$，则$\omega_1$胜
  - 如果用选举议程$(\omega_1, \omega_3, \omega_2)$，则$\omega_2$胜
  - 如果用选举议程$(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$，则$\omega_3$胜

多数图（Majority Graph）

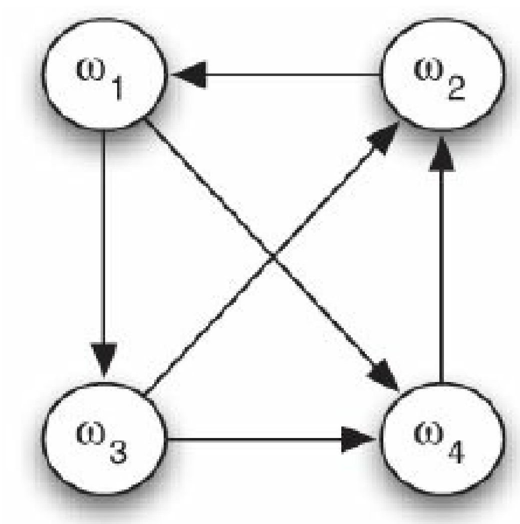


上一个例子的多数图

- 一种有向图
  - 节点：候选者
  - 边：如果大多数选民将ω排在ω'之前，那么有一条从ω指向ω'的边
- 多数图的性质：
  - 多数图是完全的（complete）
    - 对任意两个结果ω_i和ω_j，要么ω_i胜过ω_j，要么ω_j胜过ω_i
  - 多数图是不对称的（asymmetric）
    - 如果ω_i胜过ω_j，那么ω_j不会反过来胜过ω_i（对一条边而言）
  - 多数图是不自反的（irreflexive）
    - 一个结果不能战胜自己

多数图的另一个例子

- 多数图是投票者偏好的一种简洁的表示

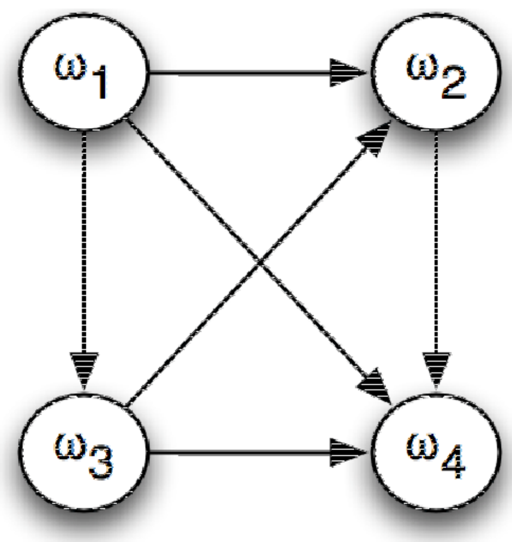


- 例子：通过设计不同的选举议程，每个候选者都可以成为最终赢家
  - 若议程为$(\omega_3,\omega_2,\omega_4,\omega_1)$，则$\omega_1$胜
  - 若议程为$(\omega_1,\omega_4,\omega_2,\omega_3)$，则$\omega_3$胜
  - 若议程为$(\omega_3,\omega_4,\omega_1,\omega_2)$，则$\omega_2$胜
  - 若议程为$(\omega_3,\omega_1,\omega_2,\omega_4)$，则$\omega_4$胜

如果存在议程使得某候选者为最终赢家，则称该候选者为一个可能的赢家（possible winner）

康多塞赢家

- 康多塞赢家：对任意议程，该候选者都是最终赢家



- 例子：康多塞赢家为ω_1

ω_1 wins with agenda ($\omega_1, \omega_3, \omega_4, \omega_2$)	ω_1 wins with agenda ($\omega_1, \omega_4, \omega_2, \omega_3$)	
ω_1 vs ω_3	ω_1 vs ω_4	
$\to\omega_1$ vs. ω_4	$\to\omega_1$ vs. ω_2	etc…
$\to\omega_1$ vs. ω_2	$\to\omega_1$ vs. ω_3	
$\to\omega_1$	$\to\omega_1$	

投票过程——波达计数（Borda Count）

- 多数制有较多问题的原因
  - 忽略了大多数选民的偏好顺序，只关注排名靠前的候选人

- 波达计数考虑了整个偏好顺序
  - 对于每个候选人，都有一个计数变量，计算支持这个候选人的强弱程度
  - 设$|\Omega| = k$，如果ω_i出现在偏好顺序中的第一位，那么为其计数变量增加$k-1$，为偏好顺序中的下一个的计数变量增加$k-2$，以此类推，直到为偏好顺序中的最后一个增加0
  - 对所有投票者的偏好进行上述操作，给出候选者排名

波达计数的例子1

Position	Point
1^{st}	$k-1$
2^{nd}	$k-2$
3^{rd}	$k-3$
⋮	⋮
k^{th}	0

- 假设有3个投票者和3个候选者，3个投票者的偏好顺序如下：

$$\omega_2 \succ_1 \omega_1 \succ_1 \omega_3$$
$$\omega_3 \succ_2 \omega_2 \succ_2 \omega_1$$
$$\omega_1 \succ_3 \omega_2 \succ_3 \omega_3$$

- 按照波达计数的规则，候选者ω_2的最终得分为4
  - ω_2出现在第1个偏好顺序中的第1位，计数变量增加2
  - ω_2出现在第2、3个偏好顺序中的第2位，计数变量各增加1
- 思考：候选者ω_1、ω_3的最终得分各为多少呢？

波达计数的例子2

Hillary > Carly > Bernie > Jeb	(30 votes)
Jeb > Carly > Bernie > Hillary	(28 votes)
Bernie > Carly > Jeb > Hillary	(25 votes)
Carly > Bernie > Jeb > Hillary	(12 votes)
Carly > Jeb > Hillary > Bernie	(5 votes)

Hillary Clinton

Bernie Sanders

Jeb Bush

Carly Fiorina

- 按照波达计数的规则，计算四位候选者的最终得分：

$$\text{Hillary} = (3)(30) + (0)(28 + 25 + 12) + (1)(5) \quad = 95$$

$$\text{Carly} = (2)(30 + 28 + 25) + (3)(12 + 5) = 217$$

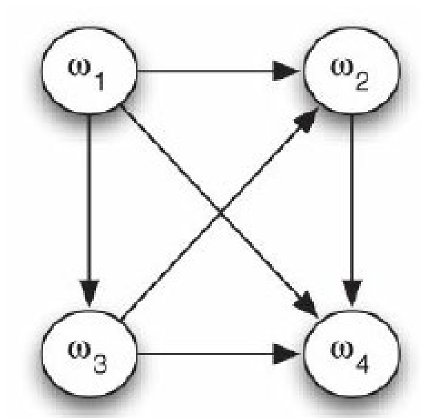
$$\text{Bernie} = (1)(30 + 28) + (3)(25) + (2)(12) + (0)(5) = 157$$

$$\text{Jeb} = (0)(30) + (3)(28) + (1)(25 + 12) + (2)(5) = 131$$

投票过程——斯莱特排序（Slater Ranking）

- 考虑如下的NP-难问题：找到一个一致排序（不包含环），使它尽可能接近**多数图**
  - 使得排序和多数图的不一致程度最小
  - 不一致程度：为了使对应的排序与多数图一致，图中有多少条边需要被“翻转”

例子1：

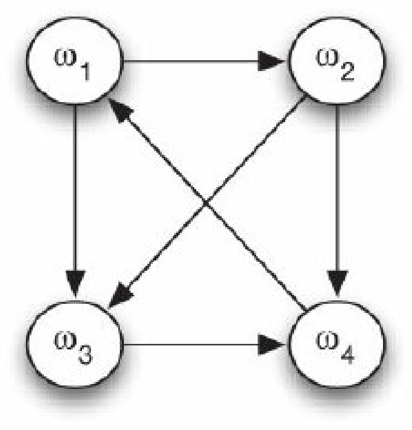


无环

排序$\omega_1 \succ^* \omega_3 \succ^* \omega_2 \succ^* \omega_4$与多数图一致

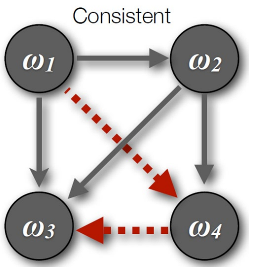
投票过程——斯莱特排序（续）

例子2：

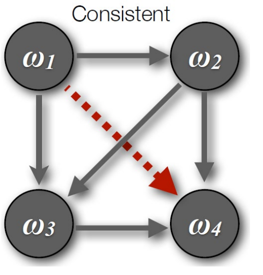


有环

- 考虑排序$\omega_1 \succ^* \omega_2 \succ^* \omega_4 \succ^* \omega_3$
  - 与多数图的不一致程度为2



- 考虑排序$\omega_1 \succ^* \omega_2 \succ^* \omega_3 \succ^* \omega_4$
  - 与多数图的不一致程度为1
  - 不一致程度最小，因此为斯莱特排序



制定群组决策

- 社会选择理论
- 投票过程
- **投票过程的性质**
- 策略性操纵

投票过程的性质

- 一个“好的”投票过程应该具有怎样的性质？
- 三个关键的性质：
  - 帕累托条件（Pareto condition）
  - 康多塞赢家条件（Condorcet winner condition）
  - 无关选项独立性（Independence of irrelevant alternatives, IIA）
- 同时还应该**避免**独裁性（dictatorship）！

帕累托条件

- 回顾4.1节的帕累托最优或帕累托效率：

  一个结果ω被称为帕累托最优，当没有其他结果可以在不使任何人情况变坏的前提下，使得至少一个人情况变得更好。

- 对于投票过程来说，帕累托条件就是：

  如果每个投票者都将ω_i排在ω_j前面，那么一定有$\omega_i \succ^* \omega_j$。

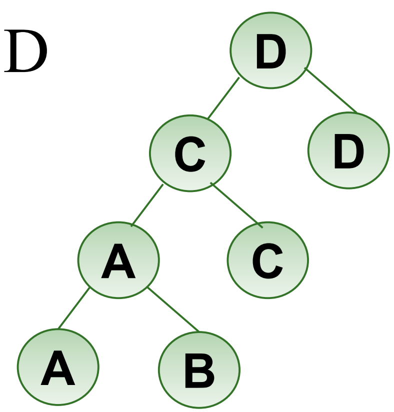
- 多数制和波达计数满足帕累托条件，而序列多数选举不满足

帕累托条件（续）

- 例：序列多数选举不满足帕累托条件

C > A > B > D	(10 votes)
A > B > D > C	(15 votes)
B > D > C > A	(12 votes)

选举议程：A, B, C, D



得到的结果

$$D \succ^* C \succ^* A \succ^* B$$

而所有选民都有$B \succ D$！

康多塞赢家条件

- 康多塞赢家
  - 在任何选举议程下都是最终赢家，换句话说，在任何成对选举中都能获胜的候选者
- 康多塞赢家条件

如果ω_i是一个康多塞赢家，那么ω_i在社会选择中排名第一，或者最终选择的是ω_i。

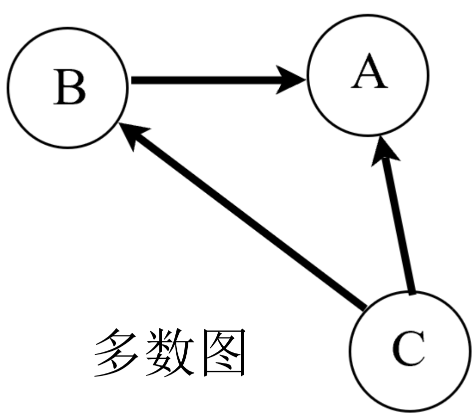
  - 看似是一个显然的性质，但在前面介绍的投票过程中，**只有序列多数选举满足**

康多塞赢家条件（续）

- 例：多数制不满足康多塞赢家条件

A > C > B	**(49 votes)**
C > B > A	**(48 votes)**
B > C > A	**(3 votes)**

- 根据多数制，A获胜
- 而C是康多塞赢家



多数图

无关选项独立性

- 无关选项独立性（IIA）：

两个候选项的社会排序仅依赖于二者在投票者偏好中的相对关系，与其他候选项无关。

- 举例说明：

假设候选者包括ω_i和ω_j，投票结果是$\omega_i \succ^* \omega_j$，这时有人改变了自己的偏好，但其对$\omega_i$和$\omega_j$的相对排序不变，仍然有$\omega_i \succ^* \omega_j$。

- 多数制、波达计数和序列多数选举都不满足IIA

例：多数制不满足IIA

A和B在投票者偏好中的相对排序没变

A > C > B	**(49 votes)**
C > B > A	**(48 votes)**
B > C > A	**(3 votes)**

A > C > B	**(49 votes)**
B > C > A	**(48 votes)**
B > C > A	**(3 votes)**

- 根据多数制，A获胜
- 根据多数制，B获胜

例：波达计数不满足IIA

Jeb和Bernie在投票者偏好中的相对排序没变

Hillary > Carly > Bernie > Jeb (30 votes)
Jeb > Carly > Bernie > Hillary (28 votes)
Bernie > Carly > Jeb > Hillary (25 votes)
Carly > Bernie > Jeb > Hillary (12 votes)
Carly > Jeb > Hillary > Bernie (5 votes)

Hillary > Carly > Bernie > Jeb (30 votes)
Jeb > Carly > Hillary > Bernie (28 votes)
Bernie > Carly > Jeb > Hillary (25 votes)
Carly > Bernie > Jeb > Hillary (12 votes)
Carly > Jeb > Hillary > Bernie (5 votes)

$\text{Hillary} = (3)(30) + (0)(28+25+12) + (1)(5) = 95$

$\text{Carly} = (2)(30+28+25) + (3)(12+5) = 217$

$\text{Bernie} = (1)(30+28) + (3)(25) + (2)(12) + (0)(5) = 157$

$\text{Jeb} = (0)(30) + (3)(28) + (1)(25+12) + (2)(5) = 131$

$\text{Hillary} = (3)(30) + (1)(28+5) + (0)(25+12) = 123$

$\text{Carly} = (2)(30+28+25) + (3)(12+5) = 217$

$\text{Bernie} = (1)(30) + (0)(28+5) + (3)(25) + (2)(12) = 129$

$\text{Jeb} = (0)(30) + (3)(28) + (1)(25+12) + (2)(5) = 131$

$$Carly \succ^* \underline{Bernie \succ^* Jeb} \succ^* Hillary$$

$$Carly \succ^* \underline{Jeb \succ^* Bernie} \succ^* Hillary$$

Jeb和Bernie的最终社会排序发生了变化

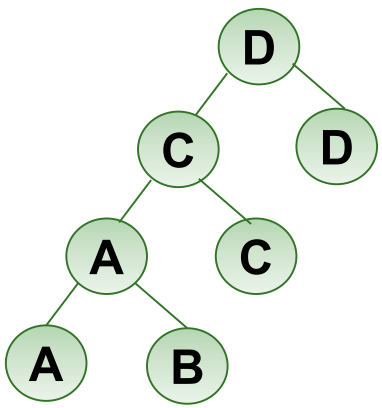
例：序列多数选举不满足IIA

B和D在投票者偏好中的相对排序没变

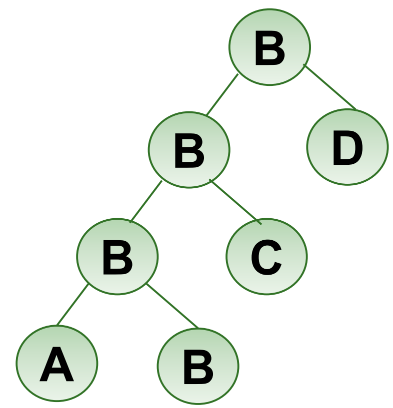
C > A > B > D	**(10 votes)**
A > B > D > C	**(15 votes)**
B > D > C > A	**(12 votes)**

C > B > A > D	**(10 votes)**
A > B > D > C	**(15 votes)**
B > D > C > A	**(12 votes)**

选举议程：A, B, C, D



选举议程：A, B, C, D



得到的结果

$D \succ^* C \succ^* A \succ^* B$

B和D的最终社会排序发生了变化

得到的结果

$B \succ^* D \succ^* C \succ^* A$

独裁性

- 如果对某个投票者i有：$f(\overline{\omega}_1,\cdots,\overline{\omega}_n) = \overline{\omega}_i$，那么该投票过程具有独裁性
- 具有独裁性的投票过程只输出某一个投票者的偏好，而忽略了其他投票者的偏好！

这显然是一个不希望看到的性质！

- 前面介绍的投票过程都不具有独裁性，但是具有独裁性的过程满足帕累托条件和IIA这两个好的性质

阿罗定理（Arrow’s Theorem）

- 也称为阿罗不可能定理（Arrow’s impossibility theorem）：

对于两个以上候选人的选举，唯一满足帕累托条件和IIA的投票程序是独裁，其社会结果实际上是简单地由一个选民选择。

Kenneth J. Arrow
(1921 -2017)

"If we exclude the possibility of interpersonal comparisons of utility, then the only methods of passing from individual tastes to social preferences which will be satisfactory and which will be defined for a wide range of sets of individual orderings are either imposed or dictatorial." **[Arrow 1950]**

若排除人际效用的可比性，而且在一个相当广的范围内对任何个人偏好排序集合都有定义，那么把个人偏好总合为社会偏好的最理想的方法，要么是强加的，要么是独裁的。

阿罗定理（续）

- 有m个决策者，他们每个人都有N种选择，并对这N个选择有一个从优至劣的排序。要设计一种选举法则，使得将这m个排序的信息汇总成一个新的排序，即投票结果。我们希望这种法则满足以下条件：
  - **帕累托条件：** 如果所有的m个决策者都认为选择a优于b，那么在投票结果中，a也优于b。
  - **非独裁：** 不存在一个决策者X，使得投票结果总是等同于X的排序。
  - **无关选项独立性：** 如果现在一些决策者改了主意，但是在每个决策者的排序中，a和b的相对位置不变，那么在投票结果中a和b的相对位置也不变。
- 那么，如果$N \geq 3$，我们不可能设计出这种法则。

制定群组决策

- 社会选择理论
- 投票过程
- 投票过程的性质
- **策略性操纵**

可操纵性（Manipulation）

- 我们已经看到，有时候，选民可以通过从战术上歪曲他们的偏好（即策略性投票）而受益

- 给定一个社会选择函数f，对一组选民偏好排序$\bar{\omega}_1,\cdots \bar{\omega}_i,\cdots,\bar{\omega}_n$和选民$i$，如果存在偏好排序$\bar{\omega}_i'$，使得

$$f(\bar{\omega}_1,\cdots \bar{\omega}_i',\cdots,\bar{\omega}_n) \succ_i f(\bar{\omega}_1,\cdots \bar{\omega}_i,\cdots,\bar{\omega}_n)$$

则该过程是可操纵的（munipulable），即选民可以通过单方面改变自己的偏好来获得更好的结果

策略性操纵

- 从某种意义上来说，我们不希望投票过程具有可操纵性
- 是否存在无法操纵的投票过程？ **Yes，独裁投票**
- 除了独裁投票，是否存在其他满足帕累托条件的不可被操纵的投票过程？

No，根据Gibbard-Satterthwaite定理

  - 虽然该结论较为悲观，但是可以通过提升操纵的难度来优化投票过程

容易计算 & 容易操纵

- 容易计算（easy to compute）：

  函数f对应的算法可以在关于投票者和候选者数的多项式时间内运行结束。

  - 斯莱特排序不容易计算，其他已经介绍的投票过程都是容易计算的

- 容易操纵（easy to manipulate）：

  如果存在一个并非出于本意的偏好排序ϖ_i'使得投票结果更令投票者i满意，则可以在多项式时间内计算出来。

策略性操纵的复杂度

- 是否存在非独裁投票过程，容易计算且满足帕累托条件，但是不容易操纵？

Yes，例：second-order Copeland投票过程

- 计算复杂度（computational complexity）在此处成为正面的性质

- 依然存在问题：可能会有一些启发式的操纵算法在实际选举中表现较好，影响投票过程

小结

- 社会选择理论
  - 理论模型、社会福利/选择函数
- 投票过程
  - 多数制、序列多数选举、波达计数、斯莱特排序
- 投票过程的性质
  - 帕累托条件、康多塞赢家、条件无关选项独立性、独裁性
  - 阿罗定理
- 策略性操纵
  - 可操纵性、计算复杂度（容易计算、容易操纵）

内容安排

形成联盟

- **合作博弈概览**
- 收益公平分配：夏普利值
- 模块化表示
- 简单博弈及其表示
- 联盟结构的形成

因徒困境 vs. 合作博弈（Cooperative/Coalitional Game）

- 在4.1节，我们从博弈论的角度介绍了多Agent交互
  - **因徒困境**中不会出现合作，其原因是
    - 没有制定具有约束力的协议
    - 收益是由于个体行为而直接给予个体的

因徒困境及其收益矩阵

	i 揭发（D）	i 沉默（C）
j 揭发（D）	-5 -5	-10 0
j 沉默（C）	0 -10	-1 -1

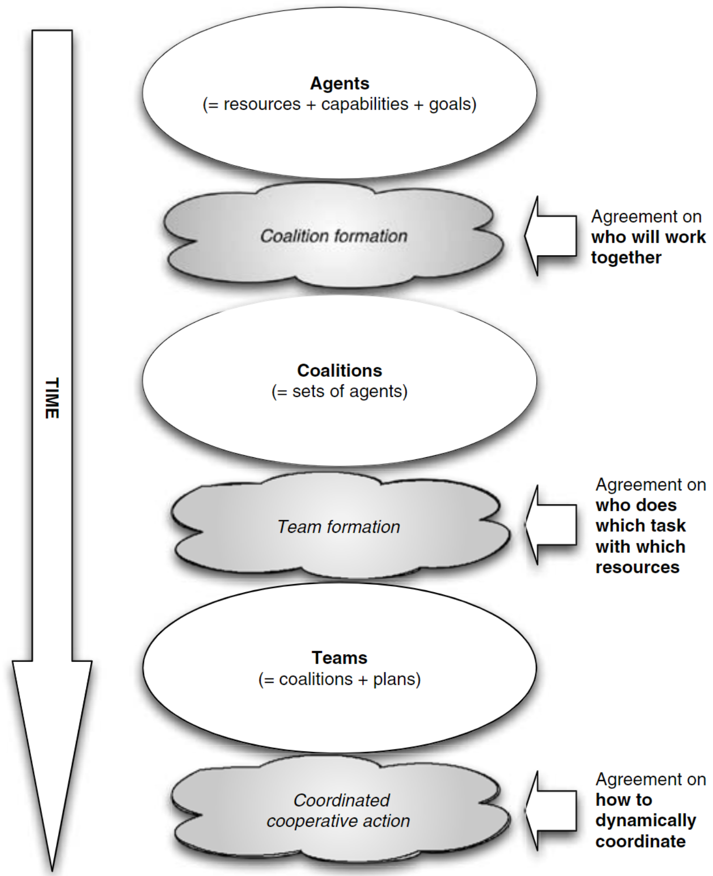
- 合作博弈建模Agent能通过合作获利的情景
  - 特点1：使用合同等与其他Agent制定具有约束力的协议
  - 特点2：收益不直接分配给个体，而是集体

合作博弈的三个阶段

- 联盟结构的生成
  - **决定了哪些Agent之间合作**
  - 基本问题：我应该加入哪个联盟？
  - 结果：划分出来多个联盟，每个Agent只属于其中一个联盟
  - 整个划分是一个联盟结构
- 求解每个联盟的最优化问题
  - **决定联盟内部如何合作**
  - 求解一个联盟的联合问题：
    - 最大化联盟本身的效用，通常涉及联合规划等方法

合作博弈的三个阶段（续）

- 划分利益
  - **决定联盟的成员获得多少效用**
  - 联盟成员不能忽略彼此的偏好
    - 如果分到的收益不够好，成员会选择离开
  - 涉及分配的公平问题



合作博弈的生命周期

合作博弈 & 联盟

- 合作博弈

$$\mathcal{G} = \langle Ag, \nu \rangle$$

  - $Ag = \{1,2,\ldots,n\}$：Agent的集合
  - $\nu: 2^{Ag} \rightarrow \mathbb{R}$：合作博弈的特征函数，它表示一个联盟可以获得的收益

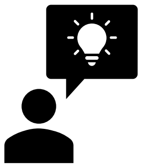
```
% Representation of a Simple
% Characteristic Function Game

% List of Agents
1,2,3
% Characteristic Function
1 = 5
2 = 5
3 = 5
1,2 = 10
1,3 = 10
2,3 = 10
1,2,3 = 25
```

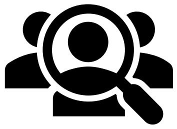
- 联盟（coalition）
  - 将Ag的子集称为联盟，用C表示，$C \subseteq Ag$
  - 大联盟（grand coalition）：包含所有Agent的联盟，此时$C = Ag$
  - $\nu(C) = k$：联盟C通过合作可以获得k的效用

加入哪个联盟？

- 例子



- 一个人可以通过自己工作赚取一定数量的钱。



- 但是，通过合作，有可能获得额外收益。那么选择加入哪个联盟一起工作？

- 答案当然是选择收入尽可能多的联盟一起工作。但是必须意识到系统中所有Agent都以相同的方式思考。

- 不能简单地加入任何联盟，只有联盟中地所有人都愿意才可以。特别地，只有在没有一个人可以通过另外组建联盟获得更大收益的情况下，才形成联盟，这样才稳定。

“加入哪个联盟？”转变为“联盟是否稳定？”

加入哪个联盟？（续）

- 已知特征函数和收益向量，一个Agent应该加入哪个联盟？
  - 联盟C的收益向量$x = \langle x_1, \ldots, x_k \rangle$：分配给联盟$C$中每一个成员的收益组成的向量
  - 收益向量是高效的（efficient），如果满足：

$$v(C) = \sum_{i \in C} x_i$$

例：如果$v(\{1,2\}) = 20$，那么可能的结果是：
$\langle 20,0 \rangle, \langle 19,1 \rangle, \langle 18,2 \rangle, \ldots, \langle 1,19 \rangle, \langle 0,20 \rangle$

加入哪个联盟？（续）

- 一个Agent应该只加入满足下列条件的联盟C：
  - 可行的（feasible）：它不反对联盟C的收益向量
  - 高效的（efficient）：联盟C的所有收益都得到了分配
- 然而，可以有多个满足条件的联盟：
  - 每个联盟有不同的特征函数
- Agent如何选择？
  - 加入能带来最大收益的联盟

核心（Core）

- 合作博弈的核心：对所有成员（大联盟）的收益的可行分配集合，使得没有任何子联盟反对
- 直觉上，如果存在一个结果使得联盟中所有成员都获得更高的收益，那么该联盟反对原来的结果
- 如果存在针对联盟$C \subseteq Ag$的效益分配$\langle x_1', \ldots, x_k' \rangle$，使得：

$$x_i' > x_i \quad 对于所有 i \in C$$

那么，C会反对大联盟的收益分配结果$\langle x_1, \ldots, x_n \rangle$

核心（续）

- 如果有人反对，结果就不会发生！
  - 如果核心为空集，则无法形成联盟
- 如果核心是非空集，则大联盟是稳定的，因为没有人可以从叛离中获利
- 等价的问题
  - 大联盟稳定吗？
  - 核心是非空集吗？

核心与公平收益

- 有时核心非空，但是并不公平
  - 假设$Ag = \{1,2\}$，并且有如下的特征函数：
    - $\nu(\{1\}) = 5$
    - $\nu(\{2\}) = 5$
    - $\nu(\{1,2\}) = 20$
  - 结果$\langle 20,0 \rangle$不在核心中，因为子联盟$\{2\}$会对此进行反对
  - 然而，结果$\langle 14,6 \rangle$在核心中，因为$\{2\}$并不能得到比6更高的收益，也就不会反对
  - 但是，Agent 2仅获得大小为6的收益，而Agent 1获得14的收益，这可能不公平！

课后作业4-4

- 一些朋友计划一起去看一场电影，每个人对想看电影的类型进行了投票。以下为偏好排序及相应的票数：

Votes	3	2	5	3
First Choice	action	romance	comedy	drama
Second Choice	drama	drama	action	romance
Third Choice	comedy	comedy	drama	action
Forth Choice	romance	action	romance	comedy

基于这些数据，分别用多数制和波达计数这样两种投票过程，计算出获胜的电影类型。

课后作业4-5

- 已知候选集合$\Omega = \{\omega_a, \omega_b, \omega_c, \omega_d\}$，一个线性序列成对选举的过程及结果如下：

$$
\begin{aligned}
\{\omega_a, \omega_b\} &\longrightarrow \omega_a \\
\{\omega_a, \omega_c\} &\longrightarrow \omega_c \\
\{\omega_a, \omega_d\} &\longrightarrow \omega_a \\
\{\omega_b, \omega_c\} &\longrightarrow \omega_b \\
\{\omega_b, \omega_d\} &\longrightarrow \omega_d \\
\{\omega_c, \omega_d\} &\longrightarrow \omega_c
\end{aligned}
$$

（a）画出表示这些结果的多数图。

（b）如果存在，给出一个导致结果为ω_a的选举议程；否则，解释为什么不存在。

（c）如果存在，给出一个导致结果为ω_c的选举议程；否则，解释为什么不存在。

（d）给出康多塞赢家的定义。在这个线性序列成对选举中，存在康多塞赢家吗？如果存在，它是什么；否则，解释为什么不存在。

（e）如果你希望让ω_a成为康多塞赢家，应该修改哪个成对选举的结果，为什么？