随机过程 **人工智能学院**

Homework 1

Instructor: 钱超 *Name:* 方盛俊, *StudentId:* 201300035

Problem 1

我们有泊松过程定义 1:

1. $N(0)=0$
2. 过程有独立增量
3. 任意长度为 t 的区间中发生的事件数是一个均值为 λt 的泊松分布. 也就是, 对于任意 $s,t \geq 0$ 有

$$P(N(s+t)-N(s)=n)=e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!},n=0,1,2,\cdots$$

要证明定义 2:

1. $N(0)=0$
2. 过程有独立增量
3. 过程有静态增量
4. $P(N(h)=1)=\lambda h+o(h)$
5. $P(N(h)\geq 2)=o(h)$

证明:

两个定义的 1. 和 2. 是相同的, 易得证明.

对于定义 2 的 3. 的证明:

由定义 1 中的 3. 易得, $N(t)$ 有静态增量, 即对于 $\forall s>0$ 有

$$N(t+s)-N(t)$$

对于所有的 t 有着相同的分布.

对于定义 2 的 4. 的证明:

由定义 1 的 1. 和 3. 有, 令 $s=0,t=h,n=1$, 则

$$\begin{aligned}P(N(h)=1)&=P(N(0+h)-N(0)=1)\\&=e^{-\lambda h}\frac{(\lambda h)^1}{1!}\\&=\lambda h(1-\lambda h+o(\lambda h))\\&=\lambda h+o(h)\end{aligned}$$

其中 $e^{-\lambda h}=1-\lambda h+o(\lambda h)$ 为泰勒展开.

对于定义 2 的 5. 的证明:

同理令 $s=0,t=h,n=0$, 则有

$$\begin{aligned}P(N(h)=1)&=P(N(0+h)-N(0)=0)\\&=e^{-\lambda h}\frac{(\lambda h)^0}{0!}\\&=1-\lambda h+o(h)\end{aligned}$$

则有

$$P(N(h)\geq 2)=1-P(N(h)=0)-P(N(h)=1)=o(h)$$

Problem 2

由于 X_n 是独立同分布且均值为 $1/\lambda$ 的指数随机变量, 且有

$$S_n=X_1+X_2+\cdots+X_n$$

因此由泊松过程定义 3 可知计数过程 $\{N(t),t\geq 0\}$ 是一个参数为 λ 的泊松过程, 即有

$$P(N(t)=n)=e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}$$

由 S_n 和 $N(t)$ 的定义我们可知, $N(t)\geq n$ 与 $S_n\leq t$ 是等价的, 即有

$$\begin{aligned}P(S_n\leq t)&=P(N(t)\geq n)\\&=\sum_{k=n}^{\infty}P(N(t)=k)\\&=\sum_{k=n}^{\infty}\frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}\end{aligned}$$

Problem 3

我们使用泊松过程定义 1:

1. $N(0)=0$: 易得 $N(0)=\sum_{i=1}^n N_i(0)=\sum_{i=1}^n 0=0$
2. 过程有独立增量: 由 $N_i(t)$ 之间相互独立且 $N_i(t)$ 是泊松过程可知, 事件发生相互独立, 事件发生数的增量也就独立, 即它们的和 $N(t)$ 也有着独立增量.
3. 任意长度为 t 的区间中发生的事件数是一个均值为 λt 的泊松分布. 也就是, 对于任意 $s,t\geq 0$ 有

$$P(N(s+t)-N(s)=n)=e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!},n=0,1,2,\cdots$$

下面证明 3.

首先我们先证明两个泊松过程的和为另一个泊松过程, 即参数分别为 λ_1 和 λ_2 的泊松过程 $N_1(t)$ 与 $N_2(t)$ 的和 $N(t)=N_1(t)+N_2(t)$ 为参数为 $\lambda_1+\lambda_2$ 的泊松过程.

记 $X=N_1(s+t)-N_1(s),Y=N_2(s+t)-N_2(s),Z=X+Y=N(s+t)-N(s)$, 则有 $X\sim\mathrm{Pois}(\lambda_1 t)$ 和 $Y\sim\mathrm{Pois}(\lambda_2 t)$, 要证 $Z\sim\mathrm{Pois}(\lambda_1 t)$ 和 $Y\sim\mathrm{Pois}((\lambda_1+\lambda_2)t)$.

证明如下:

$$
\begin{aligned}
P(Z=n) &= \sum_{j=0}^{n} P(X=j \wedge Y=n-j) \\
&= \sum_{j=0}^{n} P(X=j)P(Y=z-j) \\
&= \sum_{j=0}^{n} \frac{e^{-\lambda_1 t}(\lambda_1 t)^j}{j!} \frac{e^{-\lambda_2 t}(\lambda_2 t)^{n-j}}{(n-j)!} \\
&= e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t} \sum_{j=0}^{n} \frac{(\lambda_1 t)^j}{j!} \frac{(\lambda_2 t)^{n-j}}{(n-j)!} \\
&= e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t} \cdot \frac{(\lambda_1 t+\lambda_2 t)^n}{n!} \\
&= \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n}{n!}
\end{aligned}
$$

其中倒数第二步用了二项式公式 $(\lambda_1 t+\lambda_2 t)^n = \sum_{j=0}^{n} \frac{n!}{j!(n-j)!}(\lambda_1 t)^j(\lambda_2 t)^{n-j}$

因此我们证明了参数分别为 λ_1 和 λ_2 的泊松过程 $N_1(t)$ 与 $N_2(t)$ 的和 $N(t)=N_1(t)+N_2(t)$ 为参数为 $\lambda_1+\lambda_2$ 的泊松过程.

因此, 重复应用该结论, 我们就有 $N(t)=N_1(t)+N_2(t)+\cdots N_n(t)$ 是一个参数为 $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i$ 的泊松过程.

Problem 4

我们使用数学归纳法.

当 $n=0$ 时,

$$
\begin{aligned}
P_0(s+h) &= P(N(t+s+h)-N(t)=0) \\
&= P(N(t+s)-N(t)=0 \wedge N(t+s+h)-N(t+s)=0) \\
&= P_0(s)(1-\lambda(t+s)h+o(h))
\end{aligned}
$$

因此我们有

$$
P_0'(s) = \lim_{h\to 0}\frac{P_0(s+h)-P_0(s)}{h} = -\lambda(t+s)P_0(s)
$$

则有

$$
\frac{P_0'(s)}{P_0(s)} = -\lambda(t+s)
$$

两边积分则有

$$
\log P_0(s) = \int_0^s -\lambda(t+x)\mathrm{d}x
$$

两边取指数则有

$$P_0(s)=e^{-(m(t+s)-m(t))}$$

符合原式.

当 $n\geq 1$ 时,

$$\begin{aligned}
&P_n(s+h)\\
=&P(N(t+s+h)-N(t)=n)\\
=&P([N(t+s+h)-N(t)]-[N(t+s)-N(t)]=0,N(t+s)-N(t)=n)\\
&+P([N(t+s+h)-N(t)]-[N(t+s)-N(t)]=1,N(t+s)-N(t)=n-1)\\
&+P([N(t+s+h)-N(t)]-[N(t+s)-N(t)]\geq 2,N(t+s+h)-N(t)=n)\\
=&P_n(s)(1-\lambda(s+t)h)+P_{n-1}(s)\lambda(s+t)h+o(h)
\end{aligned}$$

两边除以 h 得

$$\frac{P_n(s+h)-P_n(s)}{h}=-\lambda(t+s)P_n(s)+\lambda(t+s)P_{n-1}(s)+\frac{o(h)}{h}$$

也即

$$P_n'(s)=-\lambda(t+s)P_n(s)+\lambda(t+s)P_{n-1}(s)$$

移项后两边乘上 $e^{m(t+s)-m(t)}$ 可得

$$e^{m(t+s)-m(t)}[P_n'(s)+\lambda(t+s)P_n(s)]=\lambda(t+s)e^{m(t+s)-m(t)}P_{n-1}(s)$$

可以凑成微分形式

$$\frac{\mathrm{d}e^{m(t+s)-m(t)}P_n(s)}{\mathrm{d}t}=\lambda(t+s)e^{m(t+s)-m(t)}P_{k-1}(s)$$

我们使用数学归纳法, 已知 $n=0$ 时奠基成立. 假设对于 $n\leq k-1$ 均成立, 则我们只需证明对于 $n=k,k\geq 1$ 有

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}e^{m(t+s)-m(t)}P_k(s)}{\mathrm{d}t}&=\lambda(t+s)e^{m(t+s)-m(t)}P_{k-1}(s)\\
&=\lambda(t+s)\frac{(m(t+s)-m(t))^{k-1}}{(k-1)!}
\end{aligned}$$

两边积分即有

$$e^{m(t+s)-m(t)}P_k(s)-P_k(0)=\frac{(m(t+s)-m(t))^k}{k!}$$

最后移项即有最终结果

$$P_k(s)=e^{-(m(t+s)-m(t))}\frac{(m(t+s)-m(t))^k}{k!}$$

Problem 5

我们证明定义 2:

1. $N'(0)=N(0)=0$.

2. 由于 $N(t)$ 有着独立的增量, 那么从 $N(t)$ 上采样得到的 $N'(t)$ 同样拥有独立的增量.
3. 在 $(t, t+s]$ 中发生的事件数遵从均值为 $m(t+s)-m(t)$ 的泊松分布, 也即

$$P(N'(t+s)-N'(t)=n)=e^{-(m(t+s)-m(t))}\frac{(m(t+s)-m(t))^n}{n!}$$

下面我们证明 3.

由泊松过程的性质可得, 若我们将 $N(u)$ 中发生的事件分别分类为 type-1 和 type-2, 当 $u \geq t$ 时, 其中的一个事件分类为 type-1 的概率为 $\frac{\lambda(u)}{\lambda}$, $u<t$ 时概率为零, 则我们有时间 t 之后的 type-1 事件发生的次数 $N''(u)$ 是均值为 λup 的泊松随机变量, 其中

$$p=\frac{1}{u}\int_t^u \frac{\lambda(x)}{\lambda}\mathrm{d}x=\frac{1}{\lambda u}(m(u)-m(t))$$

即 $N''(u)$ 是均值为 $m(u)-m(t)$ 的泊松随机变量. 因此我们有 $N''(t)=0$ 且有

$$P(N''(u)=n)=e^{-(m(u)-m(t))}\frac{(m(u)-m(t))^n}{n!}$$

由我们对 $N''(x)$ 的定义可知,

$$\begin{aligned}P(N'(t+s)-N'(t)=n)&=P(N''(t+s)-N''(t)=0)\\&=P(N''(t+s)=0)\\&=e^{-(m(t+s)-m(t))}\frac{(m(t+s)-m(t))^n}{n!}\end{aligned}$$

因此 $\{N'(t), t \geq 0\}$ 是一个参数为 $\lambda(t)$ 的非齐次泊松过程.

Problem 6

我们证明定义 2:

1. $N(0)=N^*(m(0))=N^*(\int_0^0 \lambda(x)\mathrm{d}x)=N^*(0)=0$.
2. 由于 $N^*(t)$ 有着独立的增量, 那么经过将时间域单调变换后得到的 $N^*(m(t))$ 同样拥有独立的增量.
3. 在 $(t, t+s]$ 中发生的事件数遵从均值为 $m(t+s)-m(t)$ 的泊松分布, 也即

$$P(N(t+s)-N(t)=n)=e^{-(m(t+s)-m(t))}\frac{(m(t+s)-m(t))^n}{n!}$$

下面我们证明 3.

我们知道比率为 1 的齐次泊松过程 $\{N^*(t), t \geq 0\}$ 满足

$$P(N^*(t+s)-N^*(t)=n)=e^{-t}\frac{t^n}{n!}=e^{-((t+s)-t)}\frac{((t+s)-t)^n}{n!}$$

因此我们有

$$\begin{aligned}P(N(t+s)-N(t)=n)&=P(N^*(m(t+s))-N^*(m(t))=n)\\&=e^{-(m(t+s)-m(t))}\frac{(m(t+s)-m(t))^n}{n!}\end{aligned}$$

因此 $\{N(t), t \geq 0\}$ 是一个参数为 $\lambda(t)$ 的非齐次泊松过程.

Problem 7

我们证明定义 2:

1. $N^*(0)=N(m^{-1}(0))=N^*(0)=0$.
2. 由于 $N(t)$ 有着独立的增量, 那么经过将时间域单调变换后得到的 $N^*(m^{-1}(t))$ 同样拥有独立的增量.
3. 在 $(s,s+t]$ 中发生的事件数遵从均值为 t 的泊松分布, 也即

$$P(N^*(s+t)-N^*(s)=n)=e^{-t}\frac{t^n}{n!}$$

下面我们证明 3.

我们知道参数为 $\lambda(t)$ 的非齐次泊松过程 $\{N(t),t\geq 0\}$ 满足

$$P(N(s+t)-N(s)=n)=e^{-(m(s+t)-m(s))}\frac{(m(s+t)-m(s))^n}{n!}$$

因此我们有

$$\begin{aligned}
&P(N^*(s+t)-N^*(s)=n)\\
=&P(N(m^{-1}(s+t))-N(m^{-1}(s))=n)\\
=&e^{-(m(m^{-1}(s+t))-m(m^{-1}(s)))}\frac{(m(m^{-1}(s+t))-m(m^{-1}(s)))^n}{n!}\\
=&e^{-((s+t)-s)}\frac{((s+t)-s)^n}{n!}\\
=&e^{-t}\frac{t^n}{n!}
\end{aligned}$$

因此 $\{N(t),t\geq 0\}$ 是一个比率为 1 的齐次泊松过程.