第一讲

1.

假设 P_n 是字母表符号串长度为 n 集合.

Basis: 当 $n = 1$ 时, $P_1 = PS$, 显然 $|P_1| = |PS| = \aleph_0$.

I.H.: 设 $i < n$ 时, 大部分时候有 $|P_i| = \aleph_0$, 将 P_2, P_3 等看作 $\emptyset$, 此时 $|P_i| = 0$.

I.S.:

情况 $\neg$: P_n 的最外层联结词为 $\neg$

$\therefore P_n = \{(\neg A) | A \in P_{n-3}\}$

由 I.H. 可得 $|P_n| = |P_{n-3}| = \aleph_0$

情况 $*$: P_n 的最外层联结词为 $*$, 其中 $* \in \{\wedge, \vee, \to\}$

$$\therefore P_n = \bigcup_{* \in \{\wedge, \vee, \to\}} \{(A * B) | A \in P_1, B \in P_{n-4}\} \cup \{(A * B) | A \in P_2, B \in P_{n-5}\} \cup \cdots \cup \{(A * B) | A \in P_{n-4}, B \in P_1\}$$

对于 P_n 被并起来的单个集合 $S_k = \{(A * B) | A \in P_k, B \in P_{n-k-3}\}$ 分析

由 I.H. 有 $|P_k| = \aleph_0, |P_{n-k-3}| = \aleph_0, \quad$ (部分 $|P_k| = 0$)

$\therefore |S_k| = \aleph_0 \times \aleph_0 = \aleph_0, \quad$ (部分 $|S_k| = 0$)

$$\begin{aligned} \therefore |P_n| &= 3 \times (|S_1| + |S_2| + \cdots + |S_{n-4}|) \\ &= 3 \times (\aleph_0 + \aleph_0 + \cdots + \aleph_0) \\ &= 3 \times (n - 4 - j) \times \aleph_0 \\ &= \aleph_0 \end{aligned}$$

其中 $j \geq 0$.

最终我们有:

$\therefore PROP = P_1 \cup P_2 \cup \cdots$

$\therefore |PROP| = \aleph_0 \times \aleph_0 = \aleph_0$

归纳完成, $|PROP| = \aleph_0$

2.

即证: 若 $A \in PROP$, 则 A 中所有左括号个数 L_A 等于右括号个数 R_A.

Basis: 当 $A \in PS$ 时, 左括号数 L_A 与右括号数 R_A 均为 0, 即 $L_A = R_A = 0$.

I.H.: 设 A 为 B, C 时, 均有 $L_B = R_B, L_C = R_C$.

I.S.:

情况 $\neg$: A 为 $(\neg B)$

那么我们有 $L_A = L_B + 1, R_A = R_B + 1$, 满足 $L_A = R_A$

情况 $*$: $* \in \{\wedge, \vee, \to\}$, A 为 $(B * C)$

那么我们有 $L_A = L_B + L_C + 1, R_A = R_B + R_C + 1$, 满足 $L_A = R_A$

归纳完成, 故命题中的左括号数等于右括号数.

3.

先证明部分定理:

双重否定律: $\neg(\neg A) \simeq A$

幂定律: $(A \vee A) \simeq A, (A \wedge A) \simeq A$

排中律: $\models \neg A \vee A, \models A \vee \neg A$

列真值表如下:

A	$\neg(\neg A)$	$A \vee A$	$A \wedge A$	$\neg A \vee A$	$A \vee \neg A$
F	F	F	F	T	T
T	T	T	T	T	T

交换律: $(A \vee B) \simeq (B \vee A), (A \wedge B) \simeq (B \wedge A)$

列真值表如下:

A	B	$A \vee B$	$B \vee A$	$A \wedge B$	$B \wedge A$
F	F	F	F	F	F
F	T	T	T	F	F

A	B	$A \vee B$	$B \vee A$	$A \wedge B$	$B \wedge A$
T	F	T	T	F	F
T	T	T	T	T	T

蕴涵等值式: $(A \to B) \simeq ((\neg A) \vee B)$

A	B	$A \to B$	$(\neg A) \vee B$
F	F	T	T
F	T	T	T
T	F	F	F
T	T	T	T

德摩根律: $\neg(A \vee B) \simeq (\neg A) \wedge (\neg B), \neg(A \wedge B) \simeq (\neg A) \vee (\neg B)$

列真值表如下:

A	B	$\neg(A \vee B)$	$(\neg A) \wedge (\neg B)$	$\neg(A \wedge B)$	$(\neg A) \vee (\neg B)$
F	F	T	T	T	T
F	T	F	F	T	T
T	F	F	F	T	T
T	T	F	F	F	F

(a)

A	$A \to A$
F	T
T	T

$\therefore \models A \to A$

(b)

A	B	C	$A \to B$	$B \to C$	$(A \to B) \wedge (B \to C)$	$A \to C$	$((A \to B) \wedge (B \to C)) \to (A \to C)$
F	F	F	T	T	T	T	T

A	B	C	$A \to B$	$B \to C$	$(A \to B) \wedge (B \to C)$	$A \to C$	$((A \to B) \wedge (B \to C)) \to (A \to C)$
F	F	T	T	T	T	T	T
F	T	F	T	F	F	T	T
F	T	T	T	T	T	T	T
T	F	F	F	T	F	F	T
T	F	T	F	T	F	T	T
T	T	F	T	F	F	F	T
T	T	T	T	T	T	T	T

$\therefore \models ((A \to B) \wedge (B \to C) \to (A \to C))$

(c)

$\because \neg(A \wedge B) \to (\neg A \vee \neg B)$
$\simeq \neg(\neg(A \wedge B)) \vee (\neg A \vee \neg B)$ (蕴涵等值式)
$\simeq (A \wedge B) \vee (\neg A \vee \neg B)$ (双重否定律)
$\simeq (A \wedge B) \vee \neg(A \wedge B)$ (德摩根律)

由排中律可知

$\therefore \models \neg(A \wedge B) \to (\neg A \vee \neg B)$

(d)

$\because (\neg A \vee \neg B) \to \neg(A \wedge B) \simeq \neg(A \wedge B) \to (\neg A \vee \neg B)$ (德摩根律)

由 (c) 可知

$\therefore \models (\neg A \vee \neg B) \to \neg(A \wedge B)$

(e)

$\because \neg(A \vee B) \to (\neg A \wedge \neg B)$
$\simeq \neg(\neg(A \vee B)) \vee (\neg A \wedge \neg B)$ (蕴涵等值式)
$\simeq (A \vee B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$ (双重否定律)
$\simeq (A \vee B) \vee \neg(A \vee B)$ (德摩根律)

由排中律可知

$\therefore \models \neg(A \vee B) \to (\neg A \wedge \neg B)$

(f)

$\because (\neg A \wedge \neg B) \to \neg(A \vee B) \simeq \neg(A \vee B) \to (\neg A \wedge \neg B)$ (德摩根律)

由 (e) 可知

$\therefore \models (\neg A \wedge \neg B) \to \neg(A \vee B)$

4.

(a)

令 $v(A) = T, v(B) = T, v(C) = T$

得 $\hat{v}((A \to B) \wedge C) = T$

$\therefore (A \to B) \wedge C$ 可满足

(b)

令 $v(A) = T, v(B) = T, v(C) = T$

得 $\hat{v}((A \to B) \wedge C) = T$

$\therefore (A \vee B) \to C$ 可满足