数理逻辑第五次作业

201300035 方盛俊

第 7 讲习题.

1.

$$
\begin{aligned}
& (\forall x \exists y \forall z \exists u P(x, y, z, u))^s \\
= & \forall x (\exists y \forall z \exists u P(x, y, z, u))^s \\
= & \forall x (\forall z \exists u P(x, y, z, u)[\frac{f_y(x)}{y}])^s \\
= & \forall x (\forall z \exists u P(x, f_y(x), z, u))^s \\
= & \forall x \forall z (\exists u P(x, f_y(x), z, u))^s \\
= & \forall x \forall z (P(x, f_y(x), z, u)[\frac{f_u(x, z)}{u}]) \\
= & \forall x \forall z P(x, f_y(x), z, f_u(x, z))
\end{aligned}
$$

其中 f_y 和 f_u 是新函数.

2.

记 $(\forall x P(x) \wedge \forall y Q(y)) \to \exists z P(z)$ 为 A, 则有

$$
\begin{aligned}
& \vdash A \leftrightarrow A \\
\Rightarrow & \vdash A \leftrightarrow (\forall x \forall u (P(x) \wedge Q(u)) \to \exists z P(z)) \\
\Rightarrow & \vdash A \leftrightarrow (\forall x \forall u \exists t ((P(x) \wedge Q(u)) \to P(t)))
\end{aligned}
$$

即 A 的前束形范式为 $\forall x \forall u \exists t ((P(x) \wedge Q(u)) \to P(t))$

其中 u, t 是新变元.

3.

只需证若 $FV(A) = S$, 则 $FV(A^s) = S$,

那么题目即成为了一种子情况: 若 $FV(A) = \emptyset$, 则 $FV(A^s) = \emptyset$

数学归纳法.

已知 A 呈前束形, 对 A 中量词个数 n 进行数学归纳, 其中 n 为 A 中量词的个数:

奠基 (Basic):

当 $n=0$ 时, A 中无量词, A^s 为 A, 自然有 $FV(A^s)=F(A)$ 成立.

归纳假设 (I.H.):

假设当 $n-1$ 时, 有 $FV(A^s)=F(A)$ 成立.

归纳步骤 (I.S.):

若是 $\forall x.A$ 的形式:

由 Skolem 范式的归纳定义, 我们有 $(\forall x.A)^s$ 为 $\forall x.(A^s)$

则 $FV((\forall x.A)^s)=FV(\forall x.(A^s))=FV(A^s)-\{x\}$

由归纳假设可知 $FV(A^s)=F(A)$

则 $FV(\forall x.A)=FV(A)-\{x\}=FV(A^s)-\{x\}$

即 $FV((\forall x.A)^s)=FV(\forall x.A)$

若是 $\exists x.A$ 的形式:

当 $FV(\exists x.A)=\emptyset$ 时,

由 Skolem 范式的归纳定义, 我们有 $(\exists x.A)^s$ 为 $(A[\frac{c}{x}])^s$, 这里 c 是新常元.

由归纳假设可知 $FV((A[\frac{c}{x}])^s)=F(A[\frac{c}{x}])$

则 $FV((\exists x.A)^s)=FV((A[\frac{c}{x}])^s)=FV(A[\frac{c}{x}])=FV(A)-\{x\}$

且 $FV(\forall x.A)=FV(A)-\{x\}$

即 $FV((\exists x.A)^s)=FV(\exists x.A)$

当 $FV(\exists x.A)\neq\emptyset$ 时,

由 Skolem 范式的归纳定义,

我们有 $(\exists x.A)^s$ 为 $(A[\frac{x_1,x_2,\cdots,x_n}{x}])^s$, 且 $FV(\exists x.A)=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$.

由归纳假设可知 $FV((A[\frac{x_1,x_2,\cdots,x_n}{x}])^s)=F(A[\frac{x_1,x_2,\cdots,x_n}{x}])$

则 $FV((\exists x.A)^s)=FV((A[\frac{x_1,x_2,\cdots,x_n}{x}])^s)=FV(A[\frac{x_1,x_2,\cdots,x_n}{x}])=FV(A)-\{x\}$

且 $FV(\forall x.A) = FV(A) - \{x\}$

即 $FV((\exists x.A)^s) = FV(\exists x.A)$

归纳成立, 即我们有 $FV(A^s) = F(A)$ 成立.

所以我们可知, 若 $FV(A) = \emptyset$, 则 $FV(A^s) = \emptyset$, 原题目得证.

4.

要证 $\models \exists x \forall y P(x,y) \to \forall y \exists x P(x,y)$, 由 Completeness 知

只需证 $\vdash \exists x \forall y P(x,y) \to \forall y \exists x P(x,y)$

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{P(t,u), \forall y P(t,y) \vdash P(t,u), \exists x P(x,u)}{P(t,u), \forall y P(t,y) \vdash \exists x P(x,u)}\exists R}{\forall y P(t,y) \vdash \exists x P(x,u)}\forall L}{\forall y P(t,y) \vdash \forall y \exists x P(x,y)}\forall R}{\exists x \forall y P(x,y) \vdash \forall y \exists x P(x,y)}\exists L}{\vdash \exists x \forall y P(x,y) \to \forall y \exists x P(x,y)} \to R
$$

$\therefore \vdash \exists x \forall y P(x,y) \to \forall y \exists x P(x,y)$

$\therefore \models \exists x \forall y P(x,y) \to \forall y \exists x P(x,y)$

5.

构造模型 $\mathbb{M}$, 其中论域 M 为 $\{0,1\}$, 谓词 $P(x,y)$ 为相等关系 $x \doteq y$.

我们可以看出, 对于前半部分 $\forall x \exists y P(x,y)$

当 $x = 0$ 时, 存在 $y = 0$ 满足 $P(x,y) = P(0,0) = T$

当 $x = 1$ 时, 存在 $y = 1$ 满足 $P(x,y) = P(1,1) = T$

即 $\forall x \exists y P(x,y) = T$

而对于后半部分 $\exists y \forall x P(x,y)$

当 $y = 0$ 时, 存在 $x = 1$ 使得 $P(x,y) = P(1,0) = F$, 不能使 $\forall x P(x,y)$

当 $y = 1$ 时, 存在 $x = 0$ 使得 $P(x,y) = P(0,1) = F$, 不能使 $\forall x P(x,y)$

即 $\exists y \forall x P(x,y) = F$

我们找出了反例模型, 所以 $\not\models \forall x \exists y P(x,y) \to \exists y \forall x P(x,y)$

6.

$\models \forall x P(x, f(x)) \rightarrow \forall x \exists y P(x, y)$

iff　对于任意模型 (M, σ) 均有 $B_{\rightarrow}($ 对于所有的 $x \in M$, 均有 $P(x, f(x))_{M[\sigma]} = T$, 对于所有的 $x \in M$, 存在 $y \in M$, 有 $P(x, y)_{M[\sigma]} = T)$

iff　对于任意模型 (M, σ), 若对于所有的 $x \in M$, 均有 $P(x, f(x))_{M[\sigma]} = T$, 则对于所有的 $x \in M$, 存在 $y \in M$, 有 $P(x, y)_{M[\sigma]} = T$

iff　对于任意模型 (M, σ), 对于所有的 $x \in M$, 若有 $P(x, f(x))_{M[\sigma]} = T$, 则存在 $y \in M$, 有 $P(x, y)_{M[\sigma]} = T$

iff　对于任意模型 (M, σ), 对于所有的 $x \in M$, 若有 $P(x, f(x))_{M[\sigma]} = T$, 只需取 $y = f(x)$, 则有 $P(x, y)_{M[\sigma]} = T$

所以我们可知 $\models \forall x P(x, f(x)) \rightarrow \forall x \exists y P(x, y)$ 成立

在这个证明过程中, 我们也可知 $\forall x P(x, f(x))$ 可满足, 则 $\forall x \exists y P(x, y)$ 可满足.

7.

$\forall x \exists y P(x, y)$ 可满足 $\Rightarrow \forall x P(x, f(x))$ 可满足, 即

若有 $\forall x \exists y P(x, y)$ 可满足, 即

存在模型 (M, σ) 使得 $\forall x \exists y P(x, y)_{M[\sigma]} = T$

我们令 $f(x) = y$, 其中 y 的取值为, 当 x 有具体的取值时, $\exists y P(x, y) = T$ 所对应的那个 y

那么我们就可以将 y 替换成 $f(x)$, 即有 $\forall x P(x, f(x))$

那么模型 (M, σ) 同样适用于 $\forall x P(x, f(x)) = T$

即有 $\forall x P(x, f(x))$ 可满足

$\therefore \forall x \exists y P(x, y)$ 可满足 $\Rightarrow \forall x P(x, f(x))$ 可满足

8.

对于公式 $P(f(c))$

$\therefore H_0 = \{c\}$, c 出现在 $P(f(c))$ 中

$\therefore H_1 = H_0 \cup \{f(c)\} = \{c, f(c)\}$

依次类推...

$\therefore H_{n+1} = H_n \cup \{f(t) | t \in H_n\}$

即 H_n 归纳定义为 $H_n = \begin{cases} \{c\}, & n = 0 \\ H_{n-1} \cup \{f(t)|t \in H_{n-1}\}, & n \geqslant 1 \end{cases}$

$\therefore H_A = \bigcup\{H_n|n \in \mathbb{N}\} = \{c, f(c), f(f(c)), \cdots\}$ 为 $P(f(c))$ 的 Herbrand 域.

9.

设 A 中有 k_1 个 1 元函数, 有 k_2 个 2 元函数, $\cdots$, k_m 个 m 元函数, 依次类推.

然后令 $K = 1 \cdot k_1 + 2 \cdot k_2 + \cdots + m \cdot k_m + \cdots$

因为公式长度是有限的, 函数个数肯定也是有限的, 所以易知 $K < \aleph_0$, 只是一个常数.

当 $K \neq 1$ 即 $K > 1$ 时, 数学归纳法.

奠基 (Basic):

当 $n = 0$ 时, $H_0 = \{c_0\}$ 或 $H_0 = \{c|c$ 为常元且出现在 A 中$\}$,

$\because$ 公式的长度是有限的, 常元个数也是有限的

$\therefore |H_0| < \aleph_0$, 且 $|H_0| \geqslant 1$, 不妨设 $|H_0| = a$

因为有 $|H_0| = (a + Ka + \dfrac{a}{K-1}) \cdot K^{0-1} - \dfrac{a}{K-1} = a$,

所以满足公式 $|H_n| = (a + Ka + \dfrac{a}{K-1}) \cdot K^{n-1} - \dfrac{a}{K-1}$

归纳假设 (I.H.):

假设当 $n-1$ 时, 有 $|H_{n-1}| < \aleph_0$

且 $|H_{n-1}| = (a + Ka + \dfrac{a}{K-1}) \cdot K^{n-2} - \dfrac{a}{K-1}$

归纳步骤 (I.S.):

记 $S_n = \{f(t_1, \cdots, t_m)|f$ 为 A 中的 m 元函数且 $t_1, \cdots, t_m \in H_{n-1}\}$

$\because H_n = H_{n-1} \cup S_n$

对于 H_{n-1} 中除了常元集 H_0 的任何一个元素均可以写成 $f(t_1, \cdots, t_m)$ 的形式, 即均是 S_n 中的一个元素.

$\therefore H_n = H_{n-1} \cup S_n = H_0 \cup S_n$, 且 $H_0 \cap S_n = \emptyset$

由归纳假设可知 $|H_{n-1}| = (a + Ka + \dfrac{a}{K-1}) \cdot K^{n-2} - \dfrac{a}{K-1}$

$$
\begin{aligned}
\therefore |H_n| &= |H_0| + |S_n| \\
&= |H_0| + K|H_{n-1}| \\
&= a + K \cdot (a + Ka + \frac{a}{K-1}) \cdot K^{n-2} - \frac{Ka}{K-1} \\
&= (a + Ka + \frac{a}{K-1}) \cdot K^{n-1} - \frac{a}{K-1} \\
&< \aleph_0
\end{aligned}
$$

其中这个递推关系的求法:

$\therefore |H_1| = |H_0| + K|H_0| = a + Ka$

$\because |H_{n+1}| = a + K|H_n|$

$\therefore |H_{n+1}| + \frac{a}{K-1} = K(|H_n| + \frac{a}{K-1})$

$\therefore |H_n| + \frac{a}{K-1} = (|H_1| + \frac{a}{K-1}) \cdot K^{n-1} = (a + Ka + \frac{a}{K-1}) \cdot K^{n-1}$

$\therefore |H_n| = (a + Ka + \frac{a}{K-1}) \cdot K^{n-1} - \frac{a}{K-1}$

则数学归纳成立.

对于任何 n, 我们均有 $|H_n| < \aleph_0$

$$
\begin{aligned}
|H_A| &= \left|\bigcup\{H_n | n \in \mathbb{N}\}\right| \\
&= \left|\lim_{n\to\infty} H_n\right| \\
&= \lim_{n\to\infty}[(a + Ka + \frac{a}{K-1}) \cdot K^{n-1} - \frac{a}{K-1}] \\
&= \aleph_0
\end{aligned}
$$

可知对于 $K > 1$ 已经可证.

当 $K = 1$ 时, 即只有一个一元函数时, 设常元个数为 m, 易知 $m < \aleph_0$ 为常数.

易知 $H_n = \{c_1, \cdots, c_m, f(c_1), \cdots, f(c_m), f(f(c_1)), \cdots\}$

即 $|H_n| = mn < \aleph_0$

而 $|H_A| = \lim_{n\to\infty} mn = \aleph_0$

$\therefore$ 对于任何 n, $|H_n| < \aleph_0$, 并且 $|H_A| = \aleph_0$.