数理逻辑第五次作业

201300035

第十章5 6 8, 第十一章1 2 3

5.

对于 "$\Rightarrow$":

我们有 mix 规则, 要推出 Cut 规则.

我们令 $\Delta = \Lambda \cup \{A\}, \Pi = \{A\} \cup \Gamma$, 即有 $\Delta^* = \Lambda, \Pi^* = \Gamma$

则对于 mix 规则有

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta \qquad \Pi \vdash \Lambda}{\Gamma, \Gamma \vdash \Lambda, \Lambda}$$

再由 CL 与 CR 规则可知

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma \vdash \Delta \qquad \Pi \vdash \Lambda}{\Gamma, \Gamma \vdash \Lambda, \Lambda}mix}{\Gamma \vdash \Lambda}CL, CR$$

则有切规则 $\dfrac{\Gamma \vdash \Lambda, A \qquad A, \Gamma \vdash \Lambda}{\Gamma \vdash \Lambda}$

对于 "$\Leftarrow$":

那么对于 $LK - Cut + mix$ 系统, 我们可以使用 CL, CR, Cut 推导出 mix.

设 Π 为 $A, \cdots, A, \Pi^*$, 且 Δ 为 $\Delta^*, A, \cdots, A$.

则我们有

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma \vdash \Delta^*, A, \cdots, A \qquad A, \cdots, A, \Pi^* \vdash \Lambda}{\dfrac{\dfrac{\Gamma \vdash \Delta^*, A}{\Pi^*, \Gamma \vdash \Delta^*, A, \Lambda}WL, WR}{\Pi^*, \Gamma \vdash \Lambda, \Delta^*, A}ER \qquad \dfrac{\dfrac{A, \Pi^* \vdash \Lambda}{\Gamma, A, \Pi^* \vdash \Lambda, \Delta^*}WL, WR}{A, \Pi^*, \Gamma \vdash \Lambda, \Delta^*}EL}CL, CR}{\dfrac{\Pi^*, \Gamma \vdash \Lambda, \Delta^*}{\Gamma, \Pi^* \vdash \Delta^*, \Lambda}EL, ER}Cut$$

可知也成立.

因此我们证明完毕, $LK - Cut + mix$ 系统等价于 LK 系统.

6.

由子公式集的定义可知, 若 $B \in sub(A), C \in sub(B)$, 则 $C \in sub(A)$

简单证明如下,

$\because B \in sub(A)$

由子公式集的归纳定义可知, 必定有 $sub(A) = sub(B) \cup \cdots \cup \{A\}$

$\because C \in sub(B)$

$\therefore C \in sub(A)$

证明成立.

并且对于任意一个公式 A, 我们均有 $sub(A) = sub(A) \cup \{A\}$, 由 $sub(A)$ 的归纳定义可知显然成立.

对于 LK 中的一个无切证明树, 我们进行如下归纳证明,

该证明树中的任意一步推理, 均有上矢列中出现的公式皆为下矢列中的某个公式的子公式成立:

对于结构规则:

上矢列中的 Γ, Δ, A 中的公式仍然是 Γ, Δ, A 中公式的子公式显然成立.

即任意公式 A 或 $A \in \Gamma$ 或 $A \in \Delta$, 均有 $A \in \{A\}$, 即 $A \in sub(A)$ 成立.

对于规则 $\neg$:

上矢列中的公式为 Γ, Δ, A, 下矢列中的公式为 $\Gamma, \Delta, \neg A$

其中上矢列的 Γ, Δ 中的公式仍然是下矢列中 Γ, Δ 中的公式的子公式, 显然成立.

而对于上矢列中的 A, 我们有下矢列中 $\neg A$ 的子公式集

$sub(\neg A) = sub(A) \cup \{\neg A\} = sub(A) \cup \{A\} \cup \{\neg A\}$

$\therefore A \in sub(\neg A)$, 即上矢列中 A 为下矢列中 $\neg A$ 的子公式.

对于规则 $*, * \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$:

上矢列中的公式为 Γ, Δ, A, B, 下矢列中的公式为 $\Gamma, \Delta, A * B$

其中上矢列的 Γ, Δ 中的公式仍然是下矢列中 Γ, Δ 中的公式的子公式, 显然成立.

而对于上矢列中的 A, B, 我们有下矢列中 $A * B$ 的子公式集

$sub(A * B) = sub(A) \cup sub(B) \cup \{A * B\} = sub(A) \cup \{A\} \cup sub(B) \cup \{B\} \cup \{A * B\}$

$\therefore A \in sub(A * B), B \in sub(A * B)$, 即上矢列中 A, B 为下矢列中 $A * B$ 的子公式.

对于规则 $P, P \in \{\forall, \exists\}$:

上矢列中的公式为 $\Gamma, \Delta, A(c)$, 下矢列中的公式为 $\Gamma, \Delta, P.x.A(x)$, 其中 $A(c)$ 可以是 $A(t)$ 或 $A(b)$, 即 c 为项.

其中上矢列的 Γ, Δ 中的公式仍然是下矢列中 Γ, Δ 中的公式的子公式, 显然成立.

而对于上矢列中的 $A(c)$, 我们有下矢列中 $P.x.A(x)$ 的子公式集

$sub(P.x.A(x)) = (\cup\{sub(A(t))|t \text{ 为项 }\}) \cup \{P.x.A(x)\} = (\cup\{sub(A(t))|t \text{ 为项 }\}) \cup sub(A(c)) \cup \{P.x.A(x)\} = (\cup\{sub(A(t))|t \text{ 为项 }\}) \cup sub(A(c)) \cup \{A(c)\} \cup \{P.x.A(x)\}$

$\therefore A(c) \in sub(P.x.A(x))$, 即上矢列中 $A(c)$ 为下矢列中 $P.x.A(x)$ 的子公式.

归纳证明成立.

对于证明树来说, 我们可知终矢列中的公式自然也是终矢列的公式的子公式.

而对于证明树中的其他公式, 均在终矢列的上方, 即要么是终矢列的上矢列, 要么是终矢列的上矢列的上矢列, 依次类推.

再由上方证明的, 若 $B \in sub(A), C \in sub(B)$, 则 $C \in sub(A)$

可知有无切证明树中出现的任何公式皆为终矢列中某个公式的子公式.

8.

假设 $P(a) \vdash Q(a)$ 在 LK 中可证, 即存在终矢列为 $P(a) \vdash Q(a)$ 的证明树, 由 Hauptsatz 可知, 也有一个无切证明树.

由第 6. 我们可以知道, 无切证明树中的任意一个公式均为终矢列中的某个公式的子公式.

终矢列 $P(a) \vdash Q(a)$ 中的公式为 $P(a), Q(a)$, 均为原子公式.

$\because sub(P(a)) = \{P(a)\}, sub(Q(a)) = \{Q(a)\}$

说明证明树中的公式只有 $P(a), Q(a)$ 两个.

由公理可知, 证明树最顶上的矢列只可能是 $P(a) \vdash P(a), Q(a) \vdash Q(a)$

我们还有公式的度 $d(P(a)) = 0, d(Q(a)) = 0$

对所有的逻辑规则分析可知, 上矢列的公式的度的和必定小于下矢列的公式的度的和.

例如规则 $\neg L$: $\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, A}{\neg A, \Gamma \vdash \Delta}$

我们可知 $d(\neg A) = d(A) + 1 > d(A)$, 上矢列和下矢列中的其他公式仍不变.

如果对 $P(a) \vdash Q(a)$, 那么就会产生度数小于 0 的公式, 而没有任何公式的度是小于 0 的, 所以我们不能对 $P(a) \vdash Q(a)$ 使用逻辑规则.

对于 Cut 规则: 因为是无切证明树, 所以我们也不用 Cut 规则.

对于弱 (Weakening) 规则:

假设对 $P(a) \vdash Q(a)$ 使用了弱规则, 那么就会有 $P(a) \vdash$ 或 $\vdash Q(a)$ 可证, 而这两者明显是不可证的, 矛盾, 所以不能用弱规则.

对于凝 (Contraction) 规则:

假设对 $P(a) \vdash Q(a)$ 使用了凝规则, 那么我们就会有

$P(a), \cdots, P(a) \vdash Q(a), \cdots, Q(a)$

这个矢列中的前件永远不可能出现 $Q(a)$, 后件永远不可能出现 $P(a)$, 即使用了其他规则也是一样, 不可能到达公理 $P(a) \vdash P(a)$ 或 $Q(a) \vdash P(a)$, 因此也不能用凝规则.

对于换 (Exchange) 规则:

矢列 $P(a) \vdash Q(a)$ 的前件和后件均只有一个公式, 使用了换规则之后也没有发生任何变化.

综上, 使用 LK 中任何的规则, 均不可能将 $P(a) \vdash Q(a)$ 推导到 $P(a) \vdash P(a)$ 或 $Q(a) \vdash P(a)$.

所以 $P(a) \vdash Q(a)$ 在 LK 中不可证.

1.

有紧性定理可知, 要证明 Γ 可满足, 我们可以证 Γ 的任何有穷子集可满足.

对于 $\Gamma = \{(x > S^n(0)) | n \in \mathbb{N}\}$ 的任意一个有穷子集 Δ,

由 AC 可知, 我们可以在 Δ 中找出一个公式 $x > S^m$, 满足 $m \geqslant n$ 对于 Δ 中所有公式 $x > S^n O$, 即 m 是这些 n 中的最大值.

我们可以构建模型中的赋值 $v(x) = S^{m+1}(0)$,

则我们有 $x > S^m(0)$ 即 $S^{m+1}(0) > S^m(0)$ 为 T,

并且由谓词 $>$ 的传递性可知, 对于 Δ 任何公式 $x > S^n(0)$ 即 $S^{m+1}(0) > S^n(0)$ 均为 T.

即对于 Γ 的任意有穷子集 Δ 均可满足, 由紧性定理可知

$\therefore \Gamma$ 可满足.

2.

假设有 $\Gamma \models \varphi$.

我们令 $\Gamma' = \Gamma \cup \{\neg\varphi\}$

我们又知道, 在 Γ 可满足的情况下, 即 Γ 内的公式均为 T 时, φ 必定也为 T, 即 $\neg\varphi$ 就为 F.

即 Γ' 不可满足.

紧性定理 "若 Γ 的任何有穷子集 Δ 可满足, 则 Γ 可满足" 的逆否命题是 "若 Γ 不可满足, 则存在有穷子集 Δ 不可满足".

我们有 Γ' 不可满足, 那么我们就能推出 Γ' 的有穷子集 Δ' 不可满足.

下面我们要证明 $\neg\varphi$ 也在 Δ' 中.

假设 $\neg\varphi$ 不在 Δ' 中, 那么我们可知 Δ' 是 Γ 的一个有穷子集, 且 Δ' 这个有穷子集不可满足.

然后由紧性定理我们可以推出 Γ 不可满足, 与题设 Γ 可满足矛盾, 说明我们的假设 $\neg\varphi$ 不在 Δ' 中是错误的.

所以 $\neg\varphi$ 在 Δ' 中.

我们令 $\Delta = \Delta' - \{\neg\varphi\}$, 则 Δ 是 Γ 的一个有穷子集, 且由紧性定理和 Γ 可满足推出 Δ 可满足.

而 Δ' 不可满足, 说明当 Δ 可满足时, Δ' 里除了 $\neg\varphi$ 以外的公式均为 T, 仅有 $\neg\varphi$ 为 F, 即 φ 为 T.

则我们有 $\Delta \models \varphi$

综上, 若 $\Gamma \models \varphi$, 则存在 Γ 的有穷子集 Δ 使 $\Delta \models \varphi$.

3.

我们先证明 Σ 是一个无穷句子集.

假设 Σ 是一个有穷句子集, 那么我们对里面的句子进行归纳找出 Σ 里的所有项集合 T.

因为 Σ 是有穷句子集且句子长度有限, 那么其所有项的集合 T 也是有穷集合.

我们使用模型将项映射到论域中, 即使每一个项都映射到论域中的不同元素, 论域仍然是有限的, 即论域的基数有一个最大值, 与题目中论域基数可为任意大自然数产生矛盾.

则我们证明 Σ 是一个无穷句子集完毕.