随机过程

HW4

201300035 方盛俊 人工智能学院

Problem 1

设 Y 为 branching process 1 中每个体繁衍出的子代数目,

因此有 $X_{n+1} = \sum_{i=1}^{X_n} Y_i$ 以及 $E[Y] = m$, 则

$$
\begin{aligned}
& E[Z_{n+1} \mid Z_1, Z_2, ..., Z_n] \\
&= E\left[\frac{X_{n+1}}{m^{n+1}} \mid Z_1, Z_2, ..., Z_n\right] \\
&= E\left[\frac{\sum_{i=1}^{X_n} Y_i}{m^{n+1}} \mid Z_1, Z_2, ..., Z_n\right] \\
&= \frac{X_n}{m^{n+1}} E[Y] \\
&= \frac{X_n}{m^n} = Z_n
\end{aligned}
$$

因此 $\{Z_n, n \geq 1\}$ 是一个 martingale.

Problem 2

我们使用 $x = \dfrac{a}{p}$ 计算得到一个公平的博弈模型:

H	H	T	T	H	H
$\frac{1}{p}$	$\frac{1}{p^2}$	$\frac{1}{p^2 q}$	$\frac{1}{p^2 q^2}$	$\frac{1}{p^3 q^2}$	$\frac{1}{p^4 q^2}$

可见每个赌徒在每个时刻的期望获利为 0.

令 X_n 为赌场在 n 天后的获利, 则 $\{X_n, n \geq 1\}$ 是一个 martingale.

设首次出现 HHTTHH 的时间为 N, 则有

......	H	H	T	T	H	H
......	$N-5$	$N-4$	$N-3$	$N-2$	$N-1$	N

因此可以计算得到

$$
\begin{aligned}
X_n &= N - 6 - \left(\frac{1}{p^4 q^2} - 1\right) + 1 + 1 + 1 - \left(\frac{1}{p^2} - 1\right) - \left(\frac{1}{p} - 1\right) \\
&= N - \frac{1}{p^4 q^2} - \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p}
\end{aligned}
$$

使用 martingale stopping theorem 可得

$E[X_n]=E[X_1]=0$

而又有

$E[X_n]=E\left[N-\frac{1}{p^4q^2}-\frac{1}{p^2}-\frac{1}{p}\right]=E[N]-\frac{1}{p^4q^2}-\frac{1}{p^2}-\frac{1}{p}$

因此可得

$E[N]=\frac{1}{p^4q^2}+\frac{1}{p^2}+\frac{1}{p}$

Problem 3

由于 X 为可以进行的试验数目, 而第 i 个试验可以进行的的概率为 $\prod_{i\in A_j}p_i$, 则有

$\mu=E[X]=\sum_{j=1}^{m}\prod_{i\in A_j}p_i$

由于 X 只与 X_i 有关, 我们可以令 $X=h(X_1,...,X_n)$

我们设向量 $x=(x_1,...,x_n)$ 与 $y=(y_1,...,y_n)$ 仅有一处不同, 可以设为 $x_k\neq y_k$, 而其余相同.

我们不妨令 $x_k=0,y_k=1$, 反过来同理.

由于第 k 个部件最多只会被 3 个试验使用, 因此我们有 $h(y)\leq h(x)+3$, 则可得

$|h(x)-h(y)|\leq 3$

两边除以 3 即有

$\left|\frac{h(x)}{3}-\frac{h(y)}{3}\right|\leq 1$

我们应用 Azuma 不等式的引理可得

$P\left(X-\sum_{j=1}^{m}\prod_{i\in A_j}p_i\geq 3a\right)\leq \exp\left\{-\frac{a^2}{2n}\right\}$

以及

$P\left(X-\sum_{j=1}^{m}\prod_{i\in A_j}p_i\leq -3a\right)\leq \exp\left\{-\frac{a^2}{2n}\right\}$

Problem 4

令 $S_n = X_1 + \cdots + X_n, \psi(t) = E[e^{-tX}], g(t) = \dfrac{e^{-t(\mu-\epsilon)}}{\psi(t)}$

则 $g(0) = 1$ 且 $g'(0) = \dfrac{-(\mu-\epsilon)e^{-t(\mu-\epsilon)}\psi(t) - \psi'(t)e^{-t(\mu-\epsilon)}}{\psi^2(t)}|_{t=0} = -(\mu-\epsilon) - (-\mu) = \epsilon > 0$

可得存在 $t_0 > 0$ 使得 $g(t_0) > 1$

假设 $\dfrac{S_n}{n} \le \mu - \epsilon$ 也即 $-S_n \ge -n(\mu-\epsilon)$, 则有

$$\frac{e^{-t_0 S_n}}{\psi^n(t_0)} \ge \frac{e^{-t_0 n(\mu-\epsilon)}}{\psi^n(t_0)} = \left(\frac{e^{-t_0(\mu-\epsilon)}}{\psi(t_0)}\right)^n = g^n(t_0)$$

而由 $g(t_0) > 1$ 则有 $\lim\limits_{n\to\infty} g^n(t_0) \to \infty$

而我们知道由于 $E\left[\dfrac{e^{-t_0 X_i}}{\psi(t_0)}\right] = 1$ 可得

$$\frac{e^{-t_0 S_n}}{\psi^n(t_0)} = \frac{\prod_{i=1}^n e^{-t_0 X_i}}{\psi^n(t_0)} = \prod_{i=1}^n \frac{e^{-t_0 X_i}}{\psi(t_0)}$$

是一个 martingale, 这是因为对于任意 $E[Y_i] = 1$ 与 $Z_n = \prod_{i=1}^n Y_i$ 有

$$E[Z_{n+1} \mid Z_1, Z_2, ..., Z_n] = Z_n \cdot E[X_{n+1} \mid Z_1, Z_2, ..., Z_n] = Z_n \cdot E[X_{n+1}] = Z_n$$

因此由 martingale 收敛定理可知以概率 1 有 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{e^{-t_0 S_n}}{\psi^n(t_0)}$ 存在且有限.

因此由上述结论可以推出 $P\left(\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{S_n}{n} \le \mu - \epsilon\right) = 0$