并 行 计 算

——结构•算法•编程

主讲教师： 谢磊

第三篇 并行数值算法

第八章 基本通讯操作

第九章 稠密矩阵运算

第十章 线性方程组的求解

第十一章 快速傅里叶变换

第九章 稠密矩阵运算

9.1 矩阵的划分

9.2 矩阵转置

9.3 矩阵-向量乘法

9.4 矩阵乘法

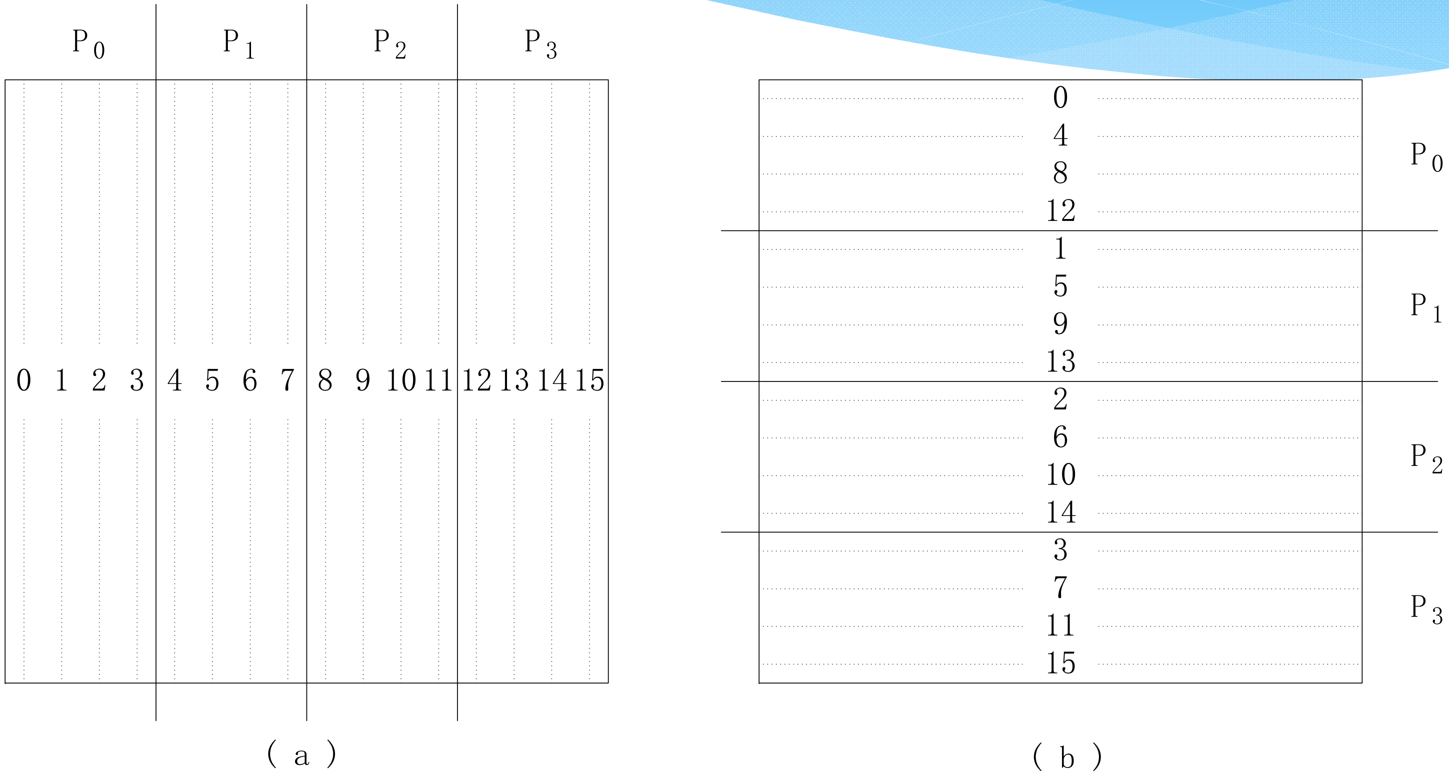
9.1 矩阵的划分

9.1.1 带状划分

9.1.2 棋盘划分

带状划分

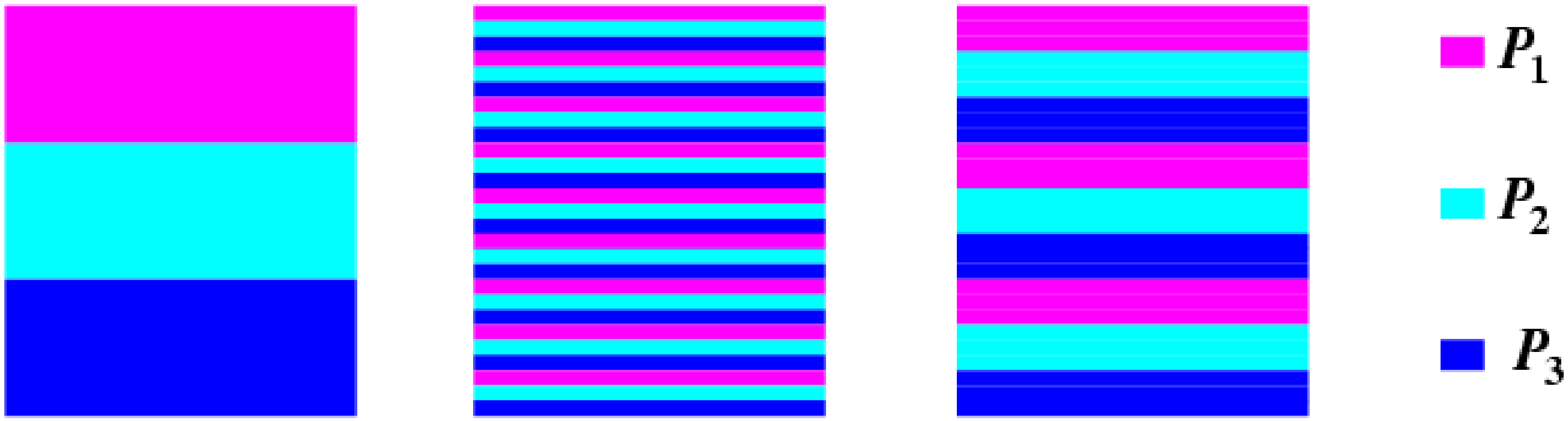
* 16×16阶矩阵，p=4



列块带状划分 图9.1 行循环带状划分

带状划分

* 示例：p＝3，27× 27矩阵的3种带状划分



(a) block (b) cyclic (c) block-cyclic

Striped row-major mapping of a 27×27 matrix on $p = 3$ processors.

9.1 矩阵的划分

9.1.1 带状划分

9.1.2 棋盘划分

棋盘划分

* 8×8阶矩阵，p=16

(0, 0) (0, 1) P_0 (1, 0) (1, 1)	(0, 2) (0, 3) P_1 (1, 2) (1, 3)	(0, 4) (0, 5) P_2 (1, 4) (1, 5)	(0, 6) (0, 7) P_3 (1, 6) (1, 7)
(2, 0) (2, 1) P_4 (3, 0) (3, 1)	(2, 2) (2, 3) P_5 (3, 2) (3, 3)	(2, 4) (2, 5) P_6 (3, 4) (3, 5)	(2, 6) (2, 7) P_7 (3, 6) (3, 7)
(4, 0) (4, 1) P_8 (5, 0) (5, 1)	(4, 2) (4, 3) P_9 (5, 2) (5, 3)	(4, 4) (4, 5) P_{10} (5, 4) (5, 5)	(4, 6) (4, 7) P_{11} (5, 6) (5, 7)
(6, 0) (6, 1) P_{12} (7, 0) (7, 1)	(6, 2) (6, 3) P_{13} (7, 2) (7, 3)	(6, 4) (6, 5) P_{14} (7, 4) (7, 5)	(6, 6) (6, 7) P_{15} (7, 6) (7, 7)

(a) 块棋盘划分

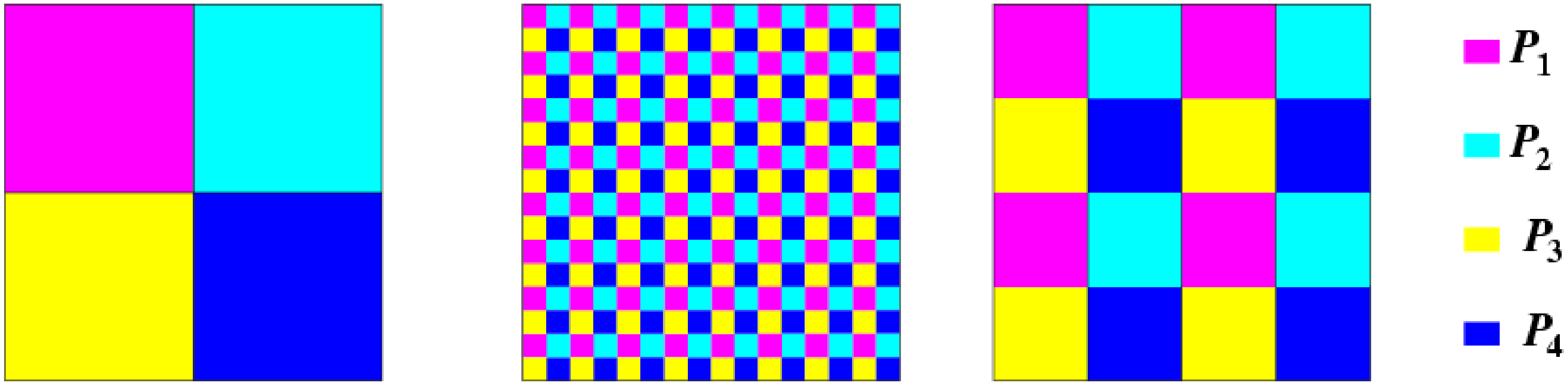
(0, 0) (0, 4) P_0 (4, 0) (4, 4)	(0, 1) (0, 5) P_1 (4, 1) (4, 5)	(0, 2) (0, 6) P_2 (4, 2) (4, 6)	(0, 3) (0, 7) P_3 (4, 3) (4, 7)
(1, 0) (1, 4) P_4 (5, 0) (5, 4)	(1, 1) (1, 5) P_5 (5, 1) (5, 5)	(1, 2) (1, 6) P_6 (5, 2) (5, 6)	(1, 3) (1, 7) P_7 (5, 3) (5, 7)
(2, 0) (2, 4) P_8 (6, 0) (6, 4)	(2, 1) (2, 5) P_9 (6, 1) (6, 5)	(2, 2) (2, 6) P_{10} (6, 2) (6, 6)	(2, 3) (2, 7) P_{11} (6, 3) (6, 7)
(3, 0) (3, 4) P_{12} (7, 0) (7, 4)	(3, 1) (3, 5) P_{13} (7, 1) (7, 5)	(3, 2) (3, 6) P_{14} (7, 2) (7, 6)	(3, 3) (3, 7) P_{15} (7, 3) (7, 7)

(b) 循环棋盘划分

图9.2

棋盘划分

* 示例：p＝4，16×16矩阵的3种棋盘划分



(a) block (b) cyclic (c) block cyclic

Checkerboard mapping of a 16×16 matrix on $p = 2 \times 2$ processors.

第九章 稠密矩阵运算

9.1 矩阵的划分

9.2 矩阵转置

9.3 矩阵-向量乘法

9.4 矩阵乘法

单处理机上的矩阵转置算法

* 算法9.1 单处理机上的矩阵转置算法
* 输入：$A_{n\times n}$
* 输出：$A^T{}_{n\times n}$

Begin
 for i=2 to n do
  for j=1 to i-1 do
   $a_{i,j} \leftrightarrow a_{j,i}$
  endfor
 endfor
End

运行时间：$(n^2-n)/2 = O(n^2)$

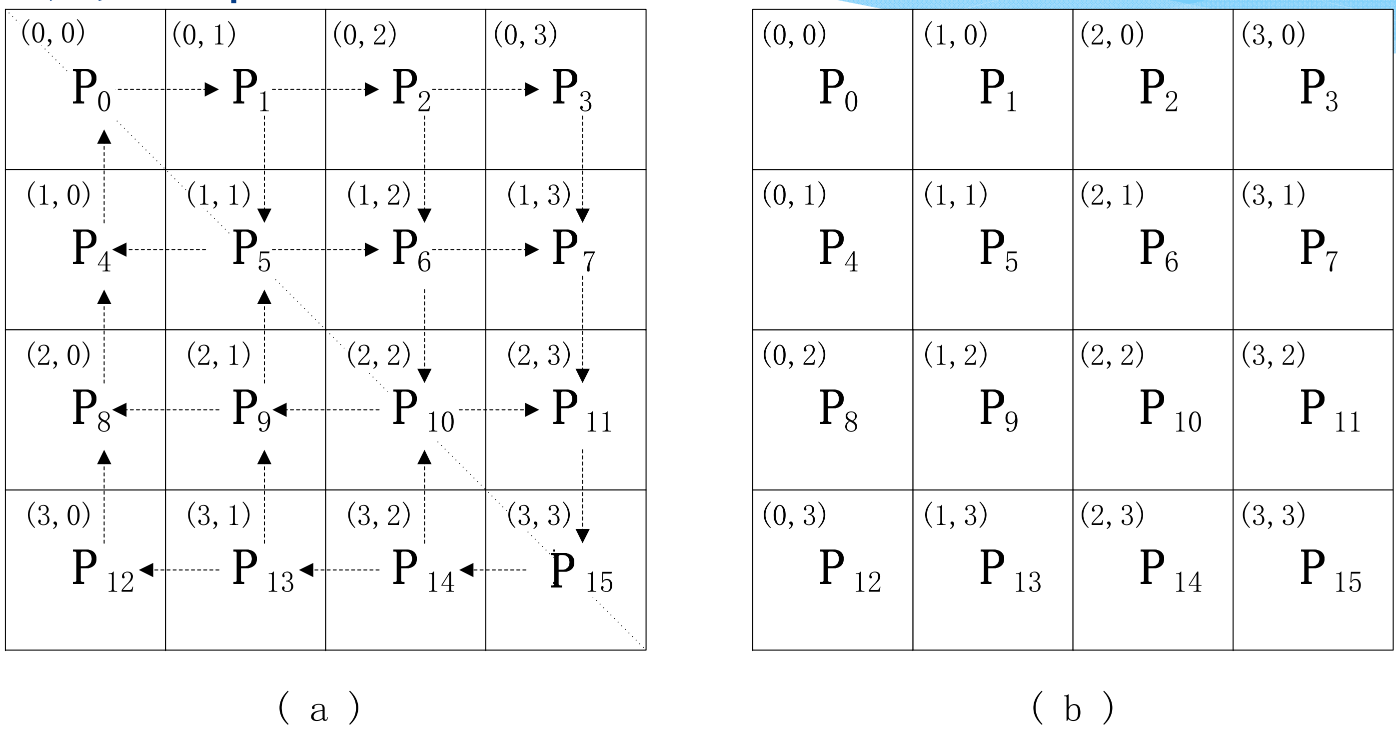
9.2 矩阵转置

9.2.1 棋盘划分的矩阵转置

9.2.2 带状划分的矩阵转置

棋盘划分的矩阵转置

* 网孔连接
  * 情形1：$p=n^2$。



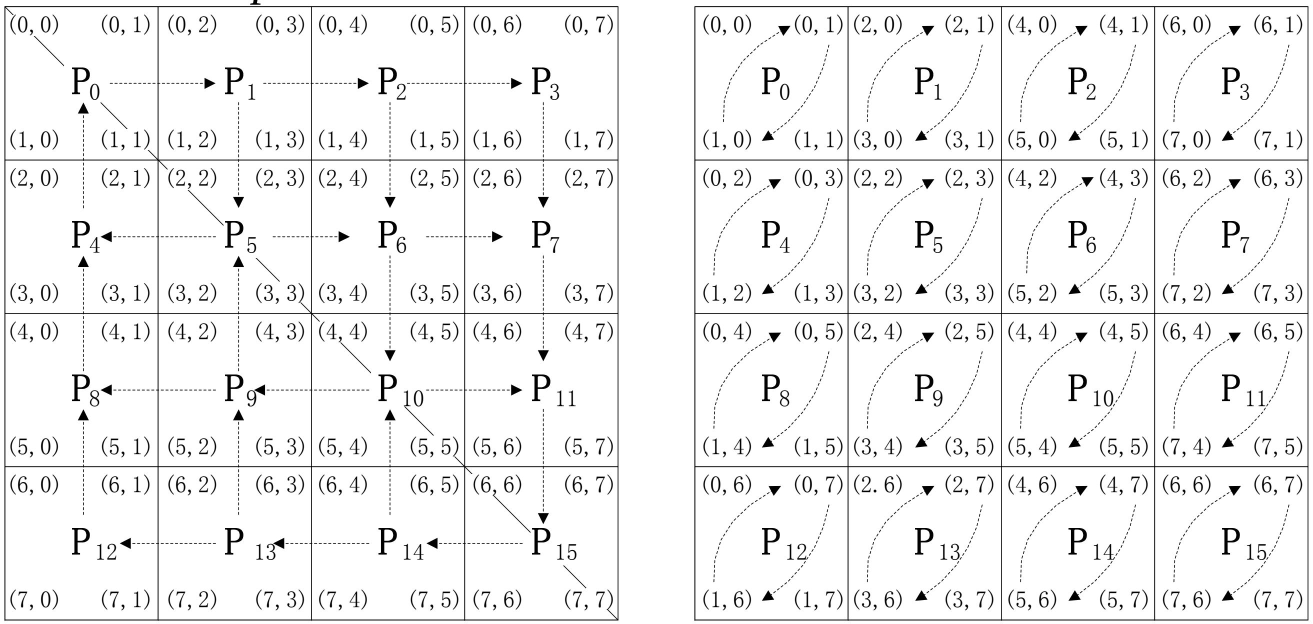
通讯步　　图9.3　　转置后

棋盘划分的矩阵转置

- 情形2: p<n²。
  - 划分: $A_{n\times n}$划分成p个大小为$\frac{n}{\sqrt{p}}\times\frac{n}{\sqrt{p}}$子块
  - 算法: ①按mesh连接进行块转置(不同处理器间) $// \ 2\sqrt{p}(t_s+t_w n^2/p)\cdots$通讯

    ②进行块内转置(同一处理器内) $// \ \frac{n^2}{2p}\cdots\cdots$计算

    $$T_p=\frac{n^2}{2p}+2t_s\sqrt{p}+2t_w n^2/\sqrt{p}\cdots\cdots$$运行时间



通讯步 (a)　　　　转置后 (b)

图9.4

棋盘划分的矩阵转置

* 超立方连接
  * 划分：$A_{n\times n}$划分成p个大小为$\frac{n}{\sqrt{p}}\times\frac{n}{\sqrt{p}}$子块
  * 算法：

①将$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$转置为$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}$

②对A_{ij}递归应用①进行转置，直至分块矩阵的元素处于同一处理器；

③进行同一处理器的内部转置。

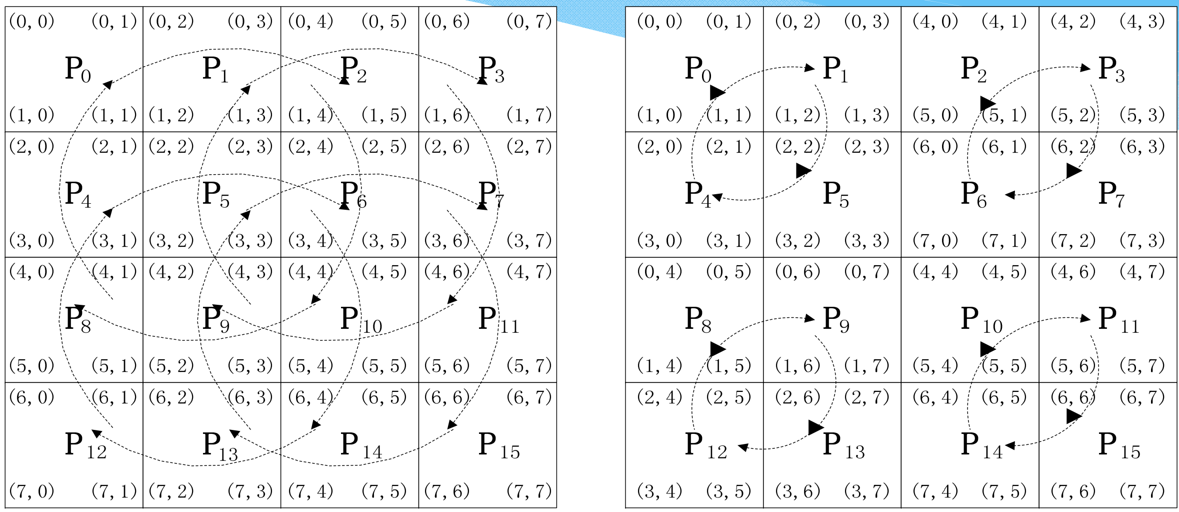
  * 运行时间：

$$T_p=\frac{n^2}{2p}+2(t_s+t_w\frac{n^2}{p})\log\sqrt{p} \quad //内部转置\frac{n^2}{2p},选路:2(t_s+t_w\frac{n^2}{p}),递归步:\log\sqrt{p}$$

$$=\frac{n^2}{2p}+(t_s+t_w\frac{n^2}{p})\log p$$

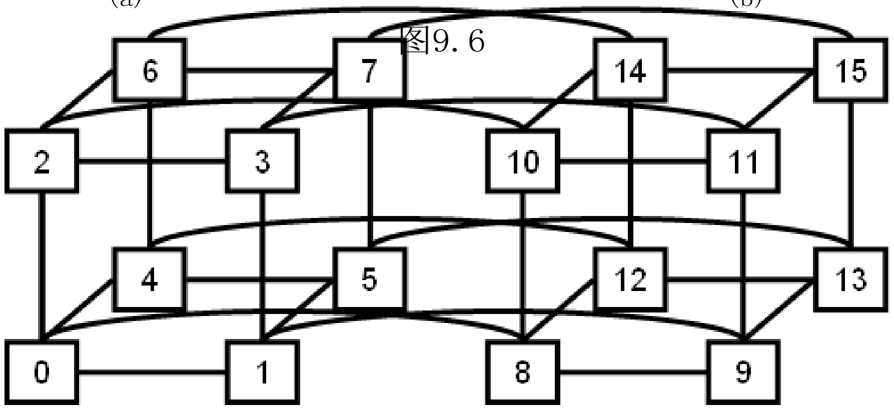
棋盘划分的矩阵转置

* 超立方连接：示例



(a) (b)

图9.6



9.2 矩阵转置

9.2.1 棋盘划分的矩阵转置

9.2.2 带状划分的矩阵转置

带状划分的矩阵转置

* 划分： A n×n分成p个(n/p)×n大小的带

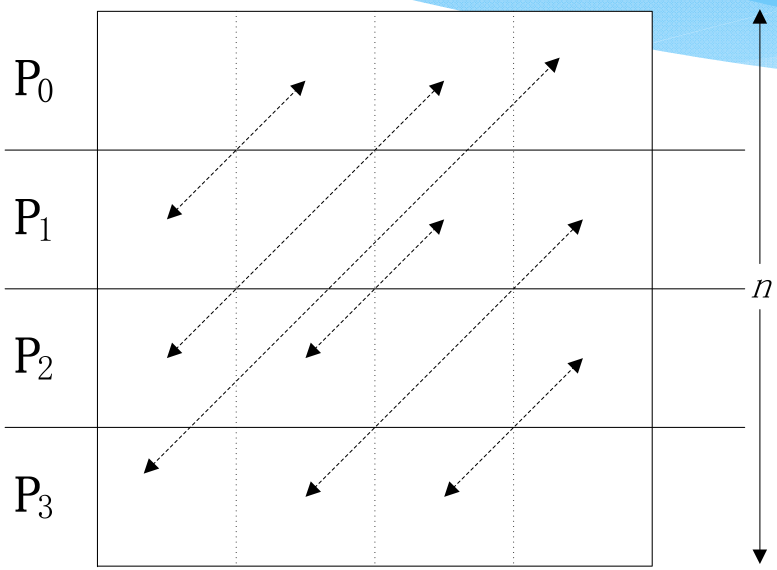


图9.7

* 算法：

①Pi有p-1个(n/p)×(n/p)大小子块发送到另外p-1个处理器中；

②每个处理器本地交换相应的元素

第九章 稠密矩阵运算

9.1 矩阵的划分

9.2 矩阵转置

9.3 矩阵-向量乘法

9.4 矩阵乘法

单处理机上的矩阵-向量乘法

- 算法9.2单处理机上的矩阵-向量乘法
- 输入：$A_{n\times n}$，$X_{n\times 1}$
- 输出：$Y_{n\times 1}$

Begin
 for i=0 to n-1 do
  $y_i = 0$
  for j=0 to n-1 do
   $y_i = y_i + a_{i,j} \times x_j$
  endfor
 endfor
End

- 算法运行时间为$O(n^2)$

9.3 矩阵-向量乘法

9.3.1 带状划分的矩阵-向量乘法

9.3.2 棋盘划分的矩阵-向量乘法

带状划分的矩阵-向量乘法

* 划分(行带状划分): P_i存放x_i和$a_{i,0},a_{i,1},\cdots,a_{i,n-1}$, 并输出$y_i$
* 算法: 对p=n情形

  ①每个P_i向其他处理器播送x_i(多到多播送);

  ②每个P_i计算;
* 注: 对p<n情形,算法中P_i要播送X中相应的n/p个分量

  (1)超立方连接的计算时间

$$T_p = \frac{n^2}{p} + t_s \log p + \frac{n}{p} t_w (p-1) \quad \text{// 前1项是乘法时间，后2项是多到多的播送时间}$$

$$= \frac{n^2}{p} + t_s \log p + n t_w \quad \text{// } p\text{充分大时}$$

  (2)网孔连接的计算时间

$$T_p = \frac{n^2}{p} + 2(\sqrt{p} - 1) t_s + \frac{n}{p} t_w (p-1) \quad \text{// 前1项是乘法时间，　后2项是多到多的播送时间}$$

$$= \frac{n^2}{p} + 2 t_s (\sqrt{p} - 1) + n t_w \quad \text{// } p\text{充分大时}$$

带状划分的矩阵-向量乘法

* 示例

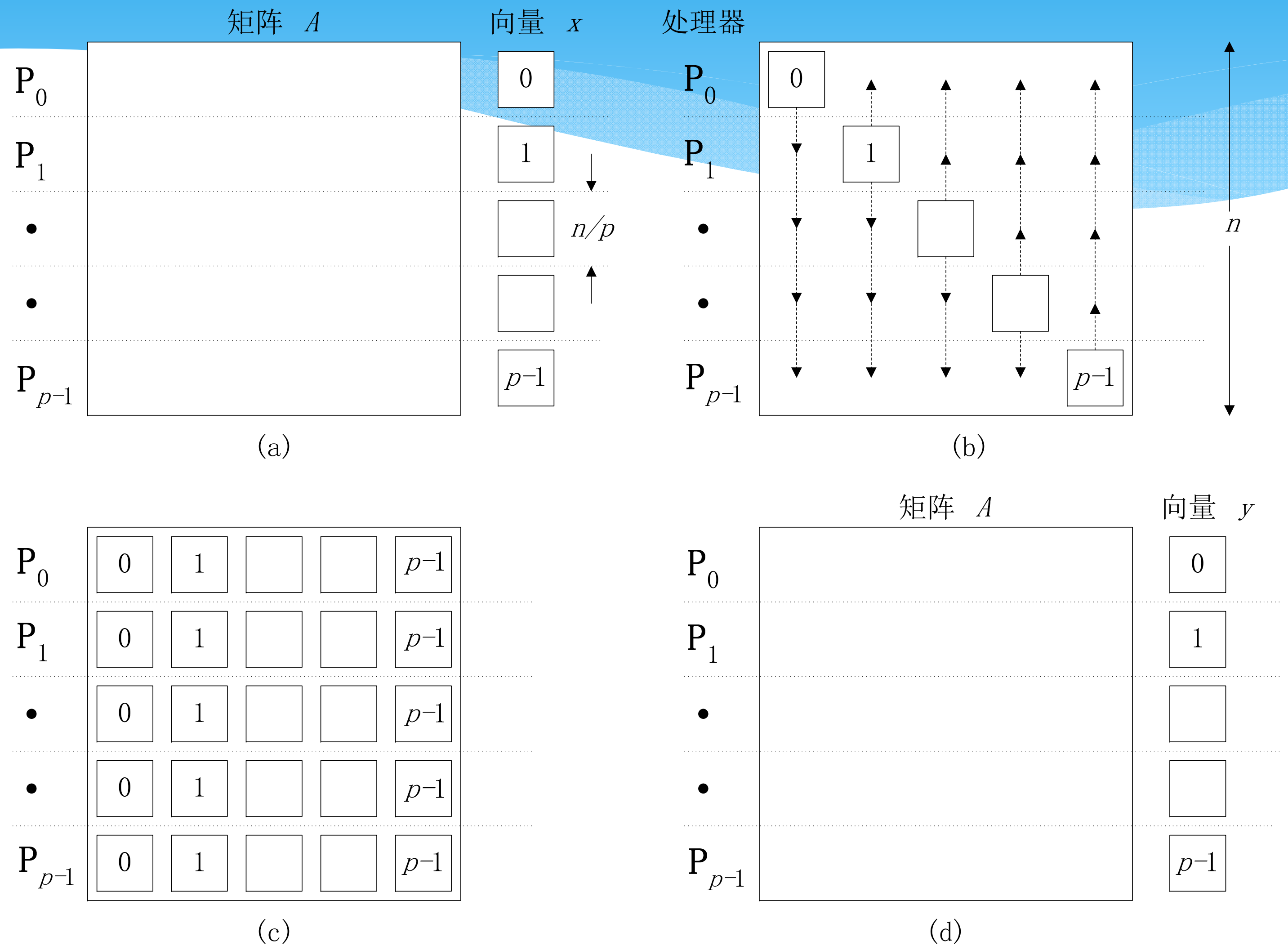


图9.8

9.3 矩阵-向量乘法

9.3.1 带状划分的矩阵-向量乘法

9.3.2 棋盘划分的矩阵-向量乘法

棋盘划分的矩阵-向量乘法

* 划分(块棋盘划分)：P_{ij}存放$a_{i,j}$, x_i置入$P_{i,i}$中
* 算法：对$p=n^2$情形

 ①每个$P_{i,i}$向$P_{j,i}$播送x_i(一到多播送)；

 ②按行方向进行乘-加与积累运算，最后一列$P_{i,n-1}$收集的结果为y_i；

* 注：对$p<n^2$情形,p个处理器排成$\sqrt{p}\times\sqrt{p}$的二维网孔，

 算法中$P_{i,i}$向$P_{j,i}$播送X中相应的$n/\sqrt{p}$个分量

 (1)网孔连接的计算时间T_p(CT)：$t_s+\frac{n}{\sqrt{p}}t_w+t_h\sqrt{p}$

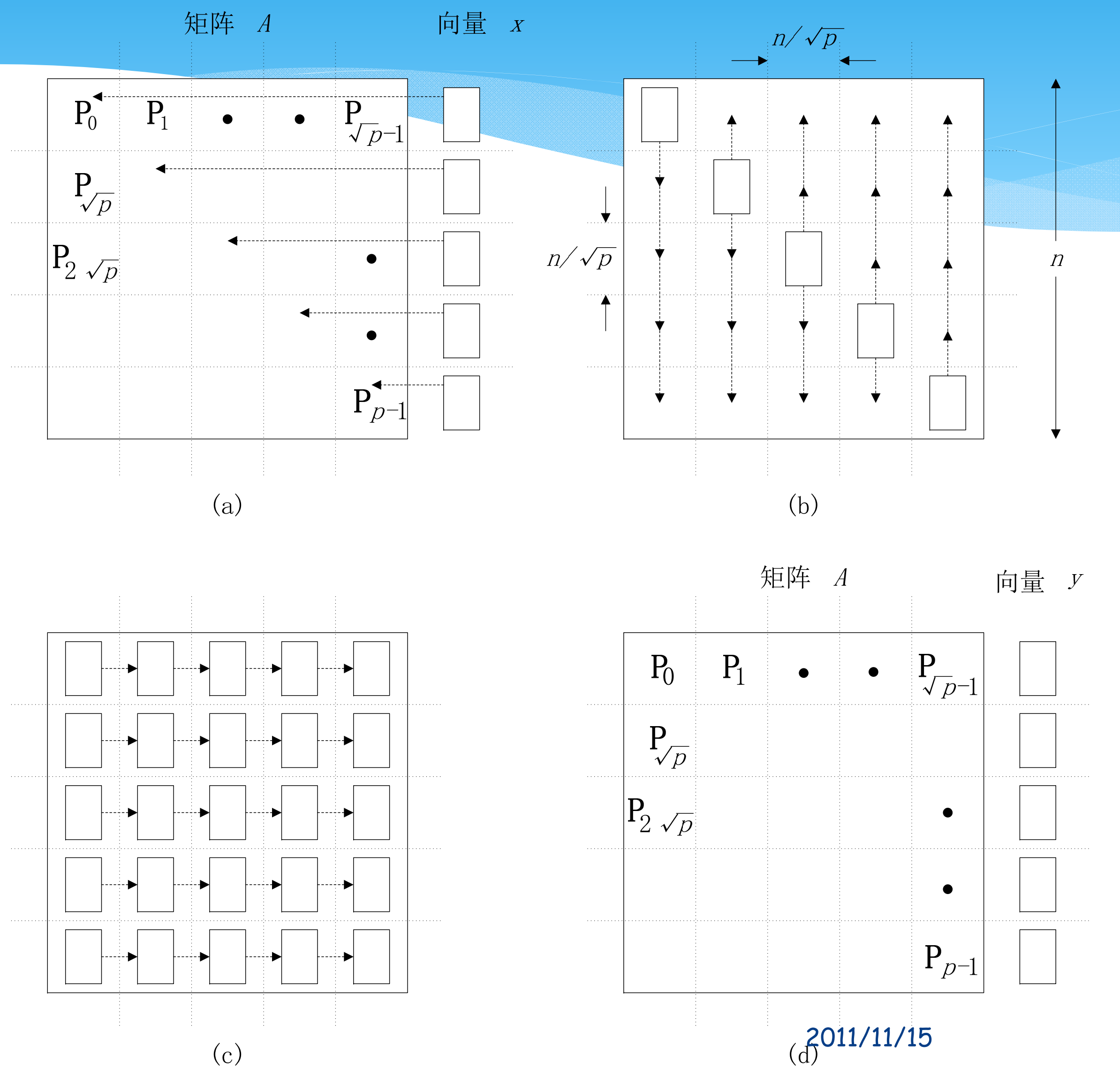
 .按列一到多播送时间：$(t_s+\frac{n}{\sqrt{p}}t_w)\log\sqrt{p}+t_h(\sqrt{p}-1)$

 .按行单点积累的时间：$(t_s+\frac{n}{\sqrt{p}}t_w)\log\sqrt{p}+t_h(\sqrt{p}-1)$

 .总运行时间为：$\therefore\ T_p\approx\frac{n^2}{p}+t_s\log p+\frac{n}{\sqrt{p}}t_w\log p+3t_h\sqrt{p}$

棋盘划分的矩阵-向量乘法

* 示例



带状与棋盘划分比较

* 以网孔链接为例
  * 网孔上带状划分的运行时间

$$T_p = \frac{n^2}{p} + 2t_s(\sqrt{p} - 1) + nt_w \qquad (9.5)$$

  * 网孔上棋盘划分的运行时间

$$T_p \approx \frac{n^2}{p} + t_s \log p + \frac{n}{\sqrt{p}} t_w \log p + 3t_h \sqrt{p} \qquad (9.6)$$

* 棋盘划分要比带状划分快。

第九章 稠密矩阵运算

9.1 矩阵的划分

9.2 矩阵转置

9.3 矩阵-向量乘法

9.4 矩阵乘法

9.4 矩阵乘法

9.4.1 简单并行分块乘法

9.4.2 Cannon乘法

9.4.3 Fox乘法

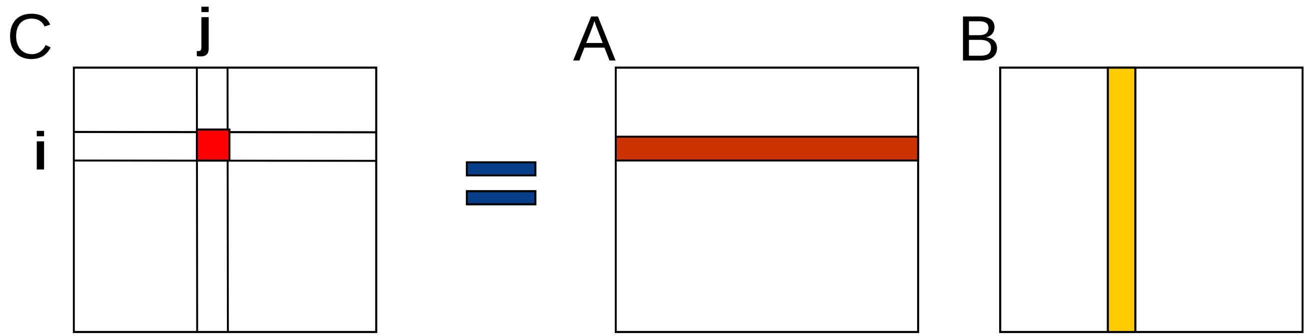
9.4.4 Systolic乘法

9.4.5 DNS乘法

矩阵乘法符号及定义

设$A=(a_{ij})_{n\times n}$　$B=(b_{ij})_{n\times n}$　$C=(c_{ij})_{n\times n}$，　$C=A\times B$

$$
\begin{pmatrix}
c_{0,0} & c_{0,1} & \cdots & c_{0,n-1} \\
c_{1,0} & c_{1,1} & & c_{1,n-1} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
c_{n-1,0} & c_{n-1,1} & \cdots & c_{n-1,n-1}
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
a_{0,0} & a_{0,1} & \cdots & a_{0,n-1} \\
a_{1,0} & a_{1,1} & & a_{1,n-1} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{n-1,0} & a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,n-1}
\end{pmatrix}
\cdot
\begin{pmatrix}
b_{0,0} & b_{0,1} & \cdots & b_{0,n-1} \\
b_{1,0} & b_{1,1} & & b_{1,n-1} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
b_{n-1,0} & b_{n-1,1} & \cdots & b_{n-1,n-1}
\end{pmatrix}
$$



$$c_{ij}=\sum_{k=0}^{n-1} a_{ik} b_{kj}$$

A中元素的第1下标与B中元素的第2下标相一致（对准）

单处理机上分块矩阵相乘

- 算法9.4单处理机上分块矩阵相乘算法
- 输入：$A_{n \times n}, B_{n \times n}$,子块大小为n/q *n/q
- 输出：$C_{n \times n}$

```
Begin
 for i=0 to q-1 do
  for j=1 to q-1 do
   C_{i,j} = 0
    for k=0 to q-1 do
     C_{i,j} = C_{i,j} + A_{i,k} × B_{k,j}
   endfor
 endfor
End
```

- 算法运行时间为$O(n^3)$.

矩阵乘法并行实现方法

* 计算结构：二维阵列
* 空间对准(元素已加载到阵列中)

  Cannon's， Fox's，DNS
* 时间对准(元素未加载到阵列中)

  Systolic

$A_{0,0}$ $B_{0,0}$	$A_{0,1}$ $B_{0,1}$	$A_{0,2}$ $B_{0,2}$	$A_{0,3}$ $B_{0,3}$
$A_{1,0}$ $B_{1,0}$	$A_{1,1}$ $B_{1,1}$	$A_{1,2}$ $B_{1,2}$	$A_{1,3}$ $B_{1,3}$
$A_{2,0}$ $B_{2,0}$	$A_{2,1}$ $B_{2,1}$	$A_{2,2}$ $B_{2,2}$	$A_{2,3}$ $B_{2,3}$
$A_{3,0}$ $B_{3,0}$	$A_{3,1}$ $B_{3,1}$	$A_{3,2}$ $B_{3,2}$	$A_{3,3}$ $B_{3,3}$

简单并行分块乘法

* **分块**：A、B和C分成$p=\sqrt{p}\times\sqrt{p}$的方块阵$A_{i,j}$、$B_{i,j}$和$C_{i,j}$，大小均为$\frac{n}{\sqrt{p}}\times\frac{n}{\sqrt{p}}$
  p个处理器编号为$(P_{0,0},\ldots,P_{0,\sqrt{p}-1},\ldots,P_{\sqrt{p}-1,\sqrt{p}-1})$，$P_{i,j}$存放$A_{i,j}$、$B_{i,j}$和$C_{i,j}$。
* **算法**：
  ①通讯：每行处理器进行A矩阵块的多到多播送(得到$A_{i,k}$，$k=0\sim\sqrt{p}-1$)
  每列处理器进行B矩阵块的多到多播送(得到$B_{k,j}$，$k=0\sim\sqrt{p}-1$)
  ②乘-加运算：$P_{i,j}$做$C_{ij}=\sum_{k=0}^{\sqrt{p}-1}A_{ik}\cdot B_{kj}$
* **运行时间**
  (1)超立方连接：
  ①的时间 $t_1=2(t_s\log\sqrt{p}+t_w\frac{n^2}{p}(\sqrt{p}-1))$
  ②的时间 $t_2=\sqrt{p}\times(\frac{n}{\sqrt{p}})^3=n^3/p$

简单并行分块乘法

* 运行时间

(2)二维环绕网孔连接：

①的时间： $t_1 = 2(t_s + \frac{n^2}{p} t_w)(\sqrt{p} - 1) = 2t_s\sqrt{p} + 2t_w \frac{n^2}{\sqrt{p}}$

②的时间 $t_2 = n^3/p$

$$\therefore \quad T_p = \frac{n^3}{p} + 2t_s\sqrt{p} + 2t_w \frac{n^2}{\sqrt{p}}$$

* 注

(1)本算法的缺点是对处理器的存储要求过大

每个处理器有 $2\sqrt{p}$ 个块，每块大小为 n^2/p,

所以需要 $O(n^2/\sqrt{p})$，p个处理器共需要 $O(n^2\sqrt{p})$，

是串行算法的 $\sqrt{p}$ 倍

(2) $p=n^2$ 时， $t(n)=O(n)$, $c(n)=O(n^3)$

9.4 矩阵乘法

- 9.4.1 简单并行分块乘法
- 9.4.2 Cannon乘法
- 9.4.3 Fox乘法
- 9.4.4 Systolic乘法
- 9.4.5 DNS乘法

Cannon乘法

* 分块：A、B和C分成 $p=\sqrt{p}\times\sqrt{p}$ 的方块阵$A_{i,j}$、$B_{i,j}$和$C_{i,j}$，大小 $\frac{n}{\sqrt{p}}\times\frac{n}{\sqrt{p}}$ 均为p个处理器编号为 $(P_{0,0},\ldots,P_{0,\sqrt{p}-1},\ldots,P_{\sqrt{p}-1,\sqrt{p}-1})$ ，$P_{i,j}$存放$A_{i,j}$、$B_{i,j}$和$C_{i,j}$(n >> p)

$\frac{n}{\sqrt{p}}$

$P_{0,0}$	$P_{0,1}$	$P_{0,2}$	$P_{0,3}$
$P_{1,0}$	$P_{1,1}$	$P_{1,2}$	$P_{1,3}$
$P_{2,0}$	$P_{2,1}$	$P_{2,2}$	$P_{2,3}$
$P_{3,0}$	$P_{3,1}$	$P_{3,2}$	$P_{3,3}$

n

$\sqrt{p}$

Cannon乘法

* 算法原理（非形式描述）

①所有块$A_{i,j}$($0 \leqslant i,j \leqslant \sqrt{p}-1$)向左循环移动i步(按行移位)；

所有块$B_{i,j}$($0 \leqslant i,j \leqslant \sqrt{p}-1$)向上循环移动j步(按列移位)；

②所有处理器$P_{i,j}$做执行$A_{i,j}$和$B_{i,j}$的乘-加运算；

③A的每个块向左循环移动一步；

B的每个块向上循环移动一步；

④转②执行$\sqrt{p}-1$次；

Cannon乘法

- 示例： $A_{4\times 4}$， $B_{4\times 4}$， p=16

Initial alignment of A

$A_{0,0}$	$A_{0,1}$	$A_{0,2}$	$A_{0,3}$
$A_{1,0}$	$A_{1,1}$	$A_{1,2}$	$A_{1,3}$
$A_{2,0}$	$A_{2,1}$	$A_{2,2}$	$A_{2,3}$
$A_{3,0}$	$A_{3,1}$	$A_{3,2}$	$A_{3,3}$

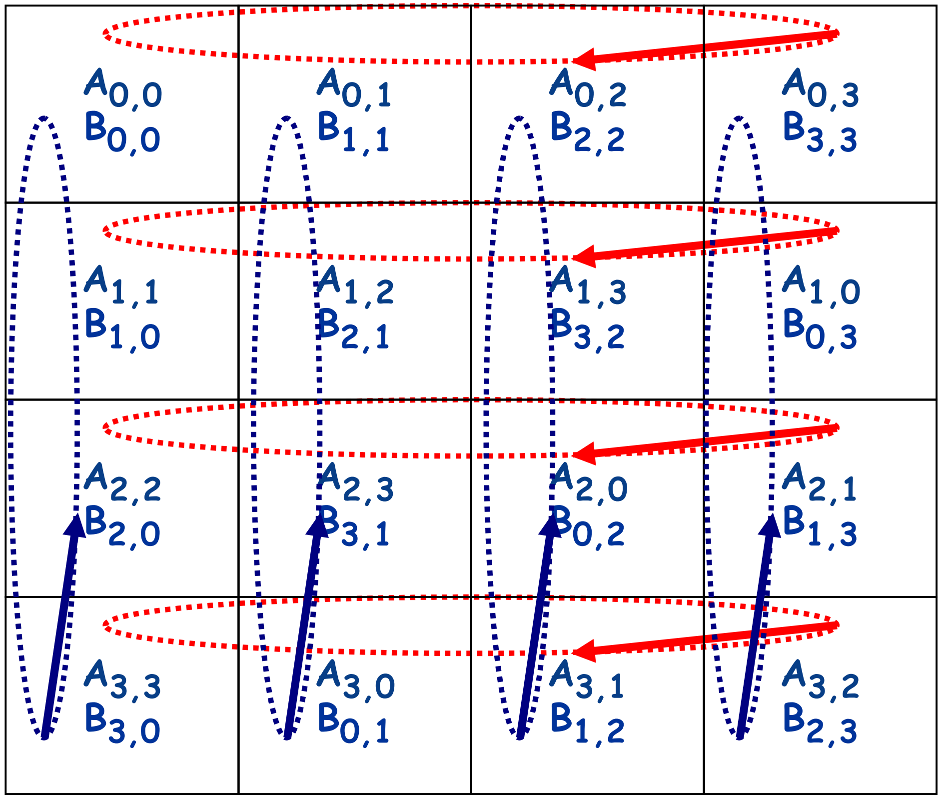
Initial alignment of B

$B_{0,0}$	$B_{0,1}$	$B_{0,2}$	$B_{0,3}$
$B_{1,0}$	$B_{1,1}$	$B_{1,2}$	$B_{1,3}$
$B_{2,0}$	$B_{2,1}$	$B_{2,2}$	$B_{2,3}$
$B_{3,0}$	$B_{3,1}$	$B_{3,2}$	$B_{3,3}$

Cannon乘法

- 示例：　$A_{4\times4}$，　$B_{4\times4}$，p=16

A and B after initial alignment and shifts after every step



Cannon乘法

* 示例： $A_{4\times4}$， $B_{4\times4}$，p=16

After first shift

$A_{0,1}$ $B_{1,0}$	$A_{0,2}$ $B_{2,1}$	$A_{0,3}$ $B_{3,2}$	$A_{0,0}$ $B_{0,3}$
$A_{1,2}$ $B_{2,0}$	$A_{1,3}$ $B_{3,1}$	$A_{1,0}$ $B_{0,2}$	$A_{1,1}$ $B_{1,3}$
$A_{2,3}$ $B_{3,0}$	$A_{2,0}$ $B_{0,1}$	$A_{2,1}$ $B_{1,2}$	$A_{2,2}$ $B_{2,3}$
$A_{3,0}$ $B_{0,0}$	$A_{3,1}$ $B_{3,1}$	$A_{3,2}$ $B_{2,2}$	$A_{3,3}$ $B_{3,3}$

After second shift

$A_{0,2}$ $B_{2,0}$	$A_{0,3}$ $B_{3,1}$	$A_{0,0}$ $B_{0,2}$	$A_{0,1}$ $B_{1,3}$
$A_{1,3}$ $B_{3,0}$	$A_{1,0}$ $B_{0,1}$	$A_{1,1}$ $B_{1,2}$	$A_{1,2}$ $B_{2,3}$
$A_{2,0}$ $B_{0,0}$	$A_{2,1}$ $B_{1,1}$	$A_{2,2}$ $B_{2,2}$	$A_{2,3}$ $B_{3,3}$
$A_{3,1}$ $B_{1,0}$	$A_{3,2}$ $B_{2,1}$	$A_{3,3}$ $B_{3,2}$	$A_{3,0}$ $B_{0,3}$

After third shift

$A_{0,3}$ $B_{3,0}$	$A_{0,0}$ $B_{0,1}$	$A_{0,1}$ $B_{1,2}$	$A_{0,2}$ $B_{2,3}$
$A_{1,0}$ $B_{0,0}$	$A_{1,1}$ $B_{1,1}$	$A_{1,2}$ $B_{2,2}$	$A_{1,3}$ $B_{3,3}$
$A_{2,1}$ $B_{1,0}$	$A_{2,2}$ $B_{2,1}$	$A_{2,3}$ $B_{3,2}$	$A_{2,0}$ $B_{0,3}$
$A_{3,2}$ $B_{2,0}$	$A_{3,3}$ $B_{3,1}$	$A_{3,0}$ $B_{0,2}$	$A_{3,1}$ $B_{1,3}$

Cannon乘法

* 算法描述：Cannon分块乘法算法

//输入：$A_{n\times n}$，$B_{n\times n}$；　输出：$C_{n\times n}$

Begin

(1)for k=0 to $\sqrt{p}-1$ do

for all $P_{i,j}$ par-do

(i) if i>k then

$A_{i,j} \leftarrow A_{i,(j+1)\bmod \sqrt{p}}$

endif

(ii)if j>k then

$B_{i,j} \leftarrow B_{(i+1)\bmod \sqrt{p},\, j}$

endif

endfor

endfor

(2)for all $P_{i,j}$ par-do $C_{i,j}$=0 endfor

(3)for k=0 to $\sqrt{p}-1$ do

for all $P_{i,j}$ par-do

(i) $C_{i,j}=C_{i,j}+A_{i,j}B_{i,j}$

(ii) $A_{i,j} \leftarrow A_{i,(j+1)\bmod \sqrt{p}}$

(iii) $B_{i,j} \leftarrow B_{(i+1)\bmod \sqrt{p},\, j}$

endfor

endfor

End

时间分析：

$$T_p(n) = T_1 + T_2 + T_3$$
$$= O(\sqrt{p}) + O(1) + O(\sqrt{p}\cdot(n/\sqrt{p})^3)$$
$$= O(n^3/p)$$

9.4 矩阵乘法

- 9.4.1 简单并行分块乘法
- 9.4.2 Cannon乘法
- 9.4.3 Fox乘法
- 9.4.4 Systolic乘法
- 9.4.5 DNS乘法

Fox乘法

* 分块：同Cannon分块算法
* 算法原理

①$A_{i,i}$向所在行的其他处理器进行一到多播送；

②各处理器将收到的A块与原有的B块进行乘-加运算；

③B块向上循环移动一步；

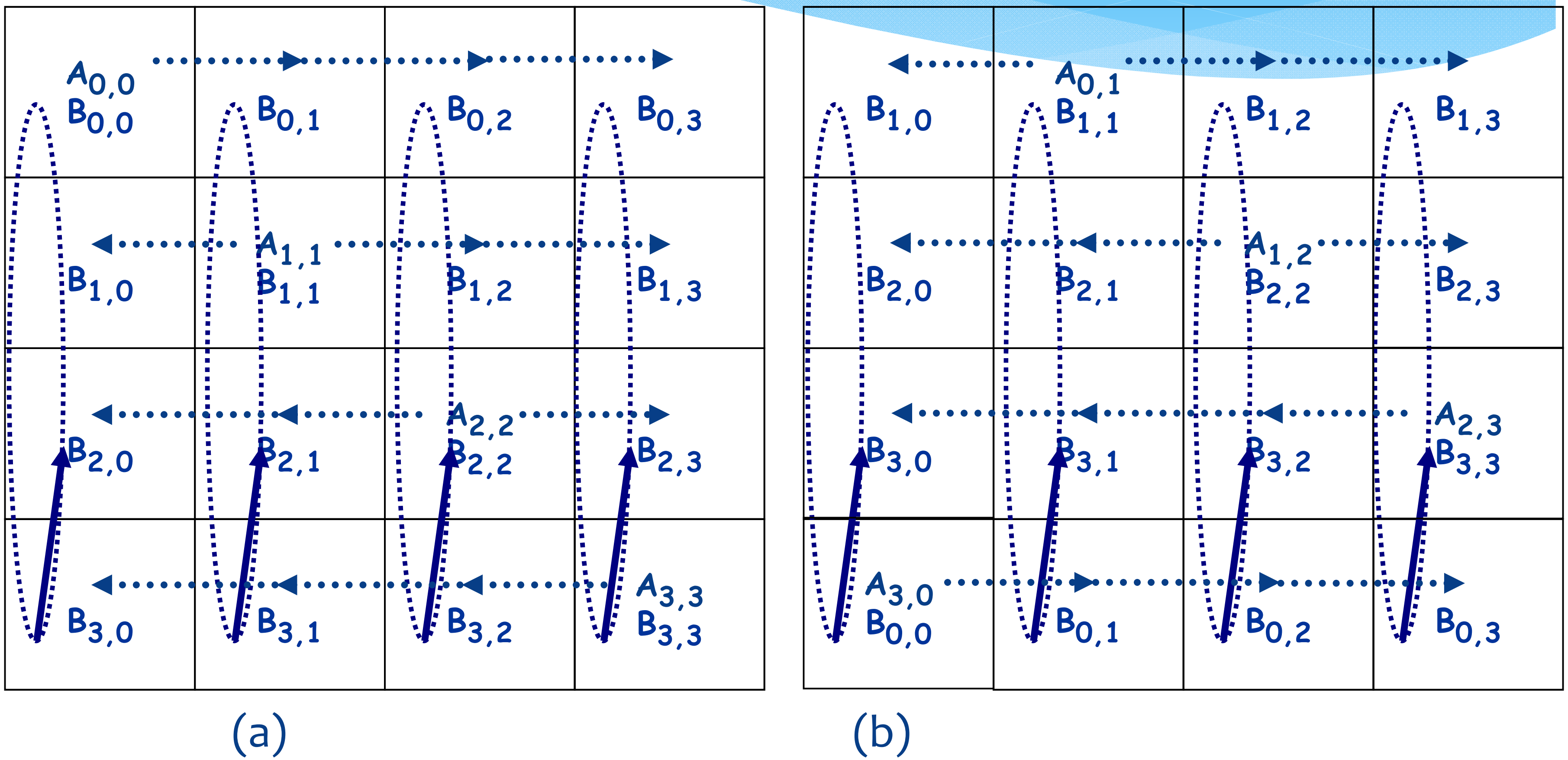
④如果$A_{i,j}$是上次第i行播送的块，本次选择$A_{i,(j+1)\bmod\sqrt{p}}$向所在行的其他处理器进行一到多播送；

⑤转②执行$\sqrt{p}-1$次；

$A_{0,0}$ $B_{0,0}$	$A_{0,1}$ $B_{0,1}$	$A_{0,2}$ $B_{0,2}$	$A_{0,3}$ $B_{0,3}$
$A_{1,0}$ $B_{1,0}$	$A_{1,1}$ $B_{1,1}$	$A_{1,2}$ $B_{1,2}$	$A_{1,3}$ $B_{1,3}$
$A_{2,0}$ $B_{2,0}$	$A_{2,1}$ $B_{2,1}$	$A_{2,2}$ $B_{2,2}$	$A_{2,3}$ $B_{2,3}$
$A_{3,0}$ $B_{3,0}$	$A_{3,1}$ $B_{3,1}$	$A_{3,2}$ $B_{3,2}$	$A_{3,3}$ $B_{3,3}$

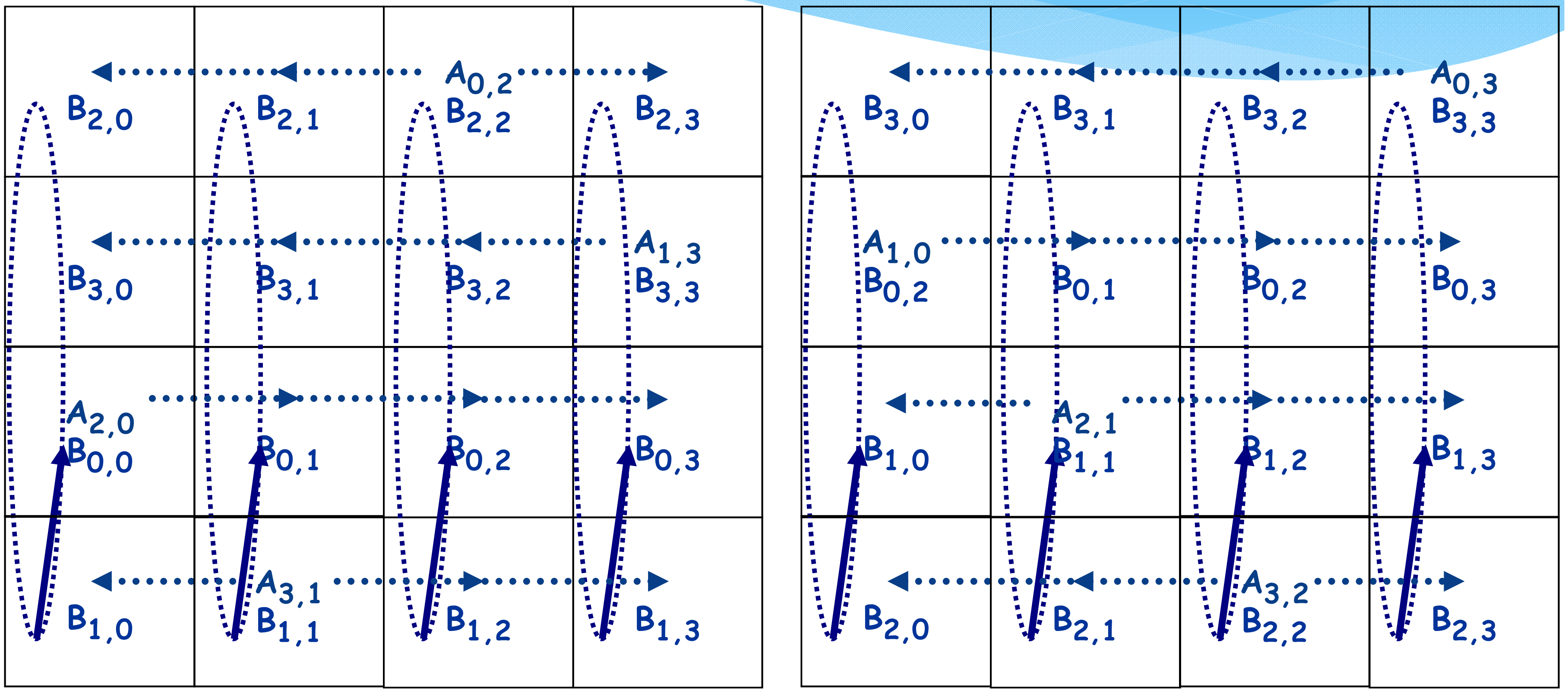
Fox乘法

* 示例： $A_{4\times 4}$， $B_{4\times 4}$, p=16



Fox乘法

* 示例： $A_{4\times4}$， $B_{4\times4}$，p=16



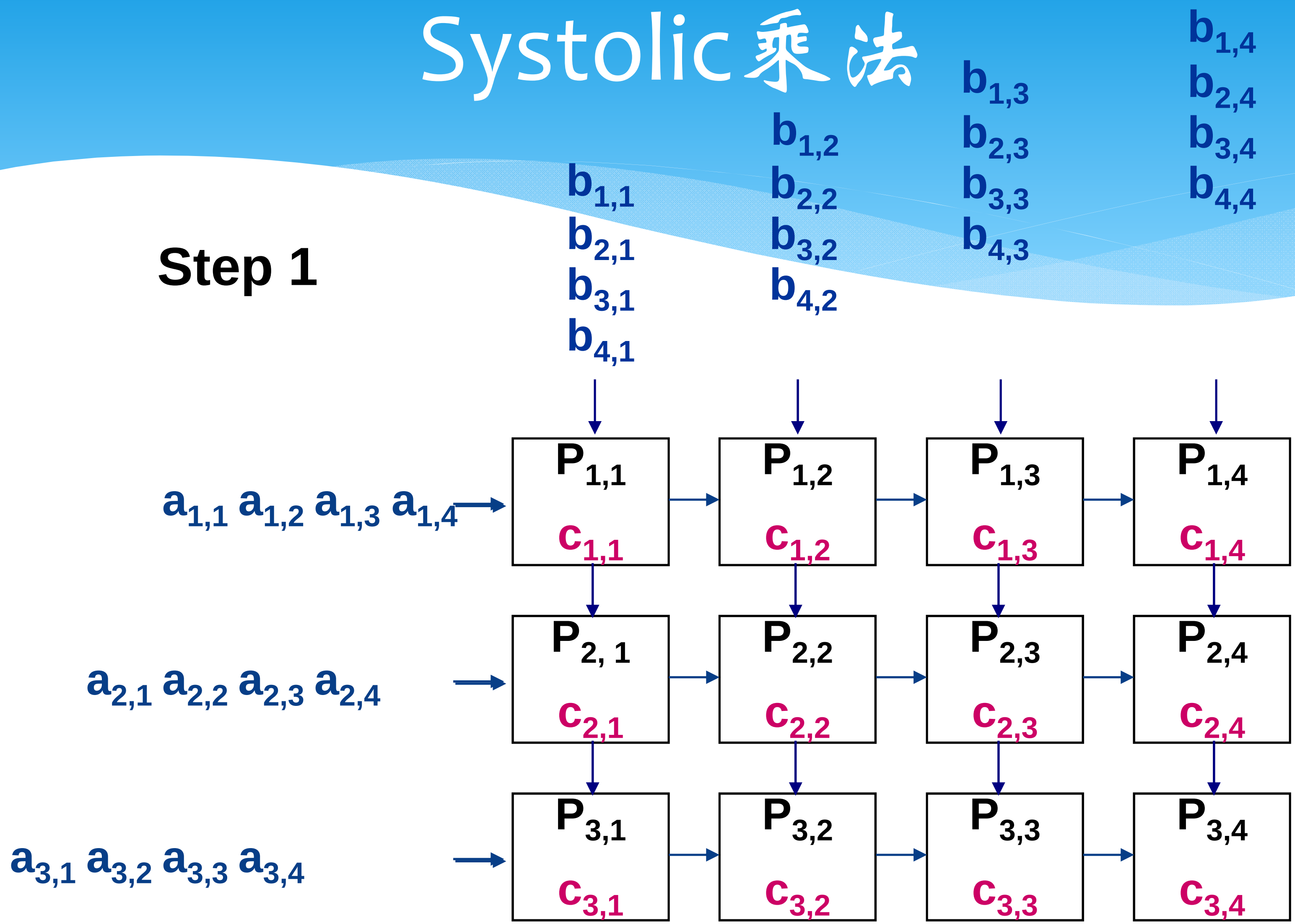
(c) (d)

9.4 矩阵乘法

- 9.4.1 简单并行分块乘法
- 9.4.2 Cannon乘法
- 9.4.3 Fox乘法
- 9.4.4 Systolic乘法
- 9.4.5 DNS乘法

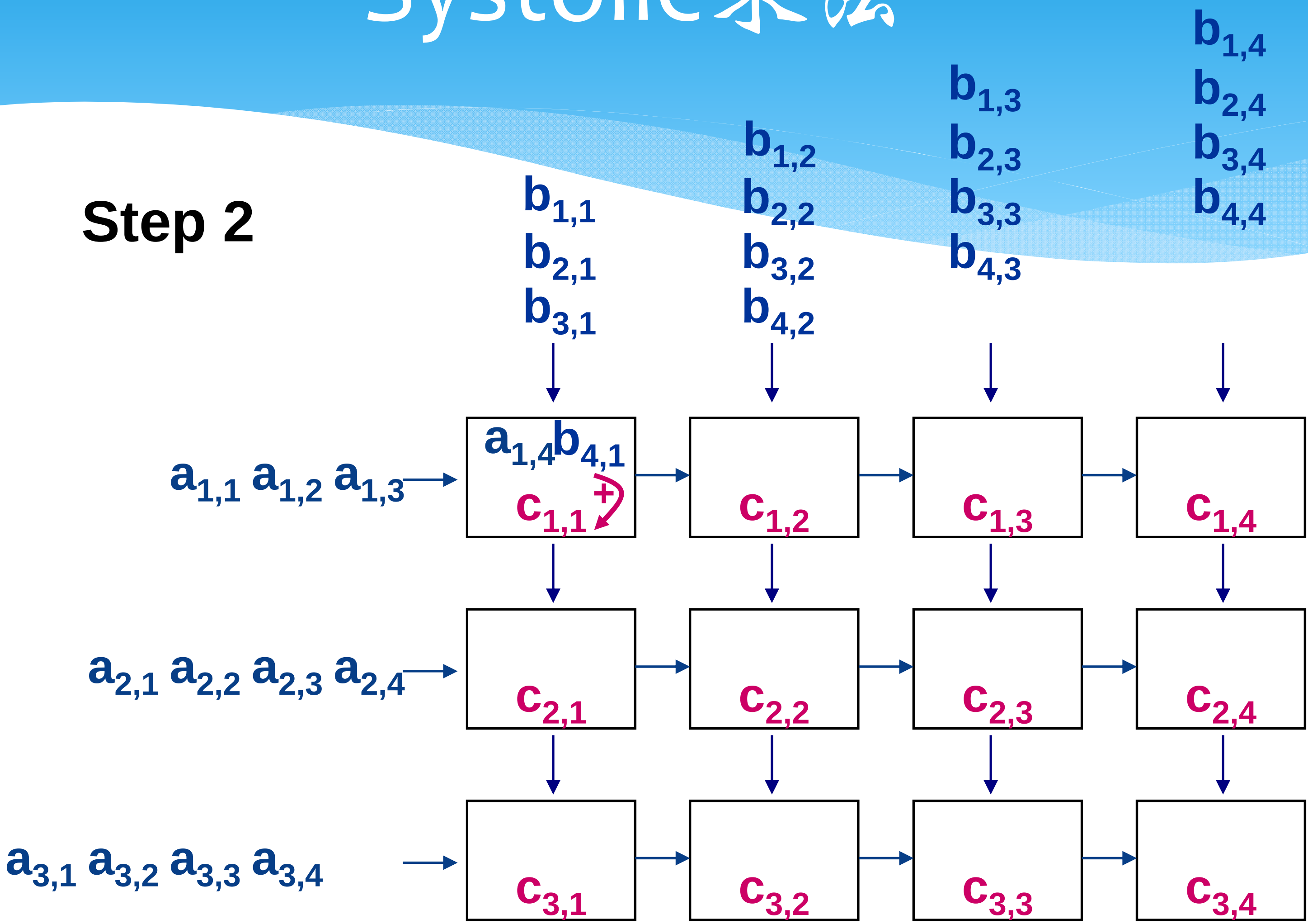
Systolic乘法

Step 1



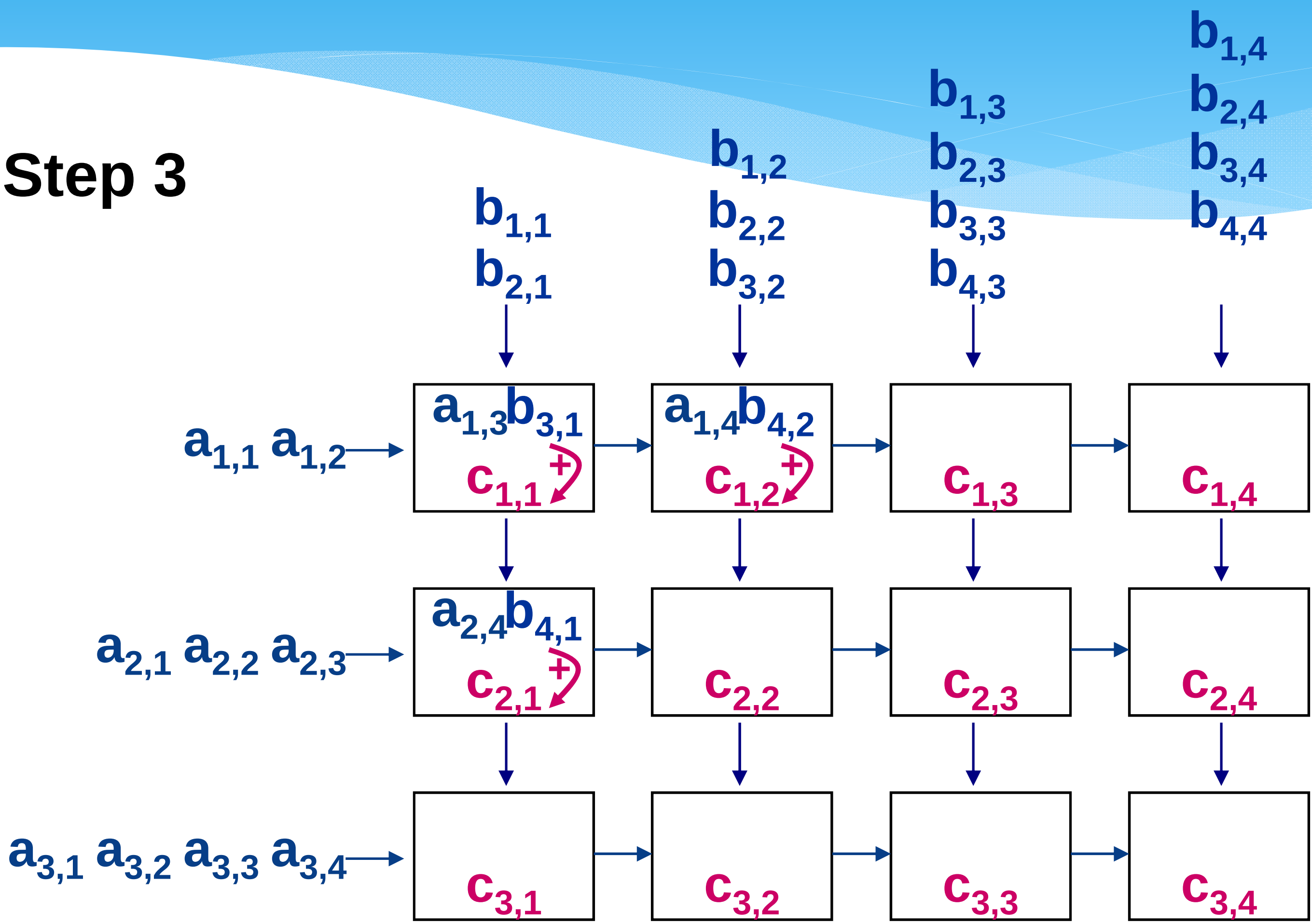
Systolic乘法

Step 2



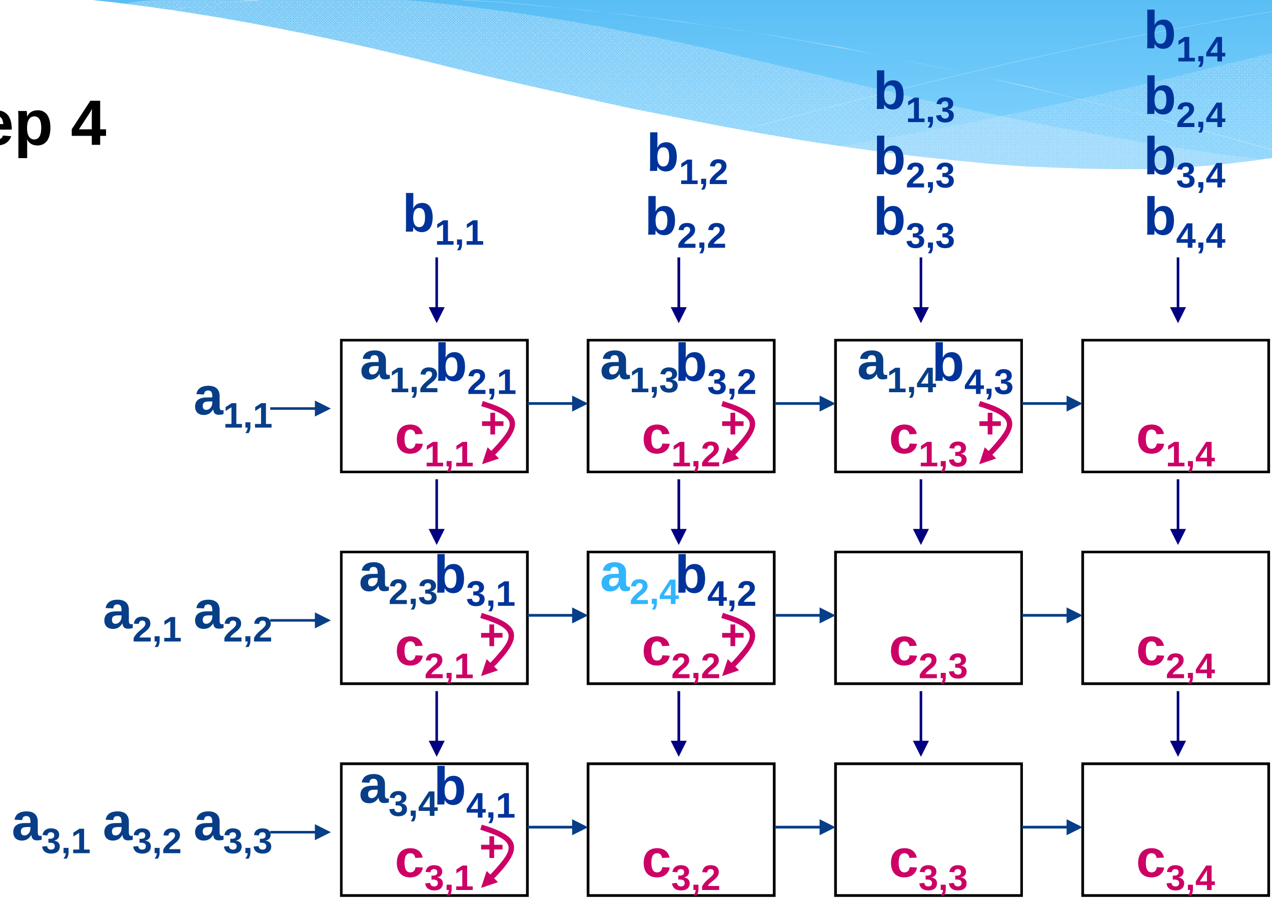
Systolic乘法

Step 3



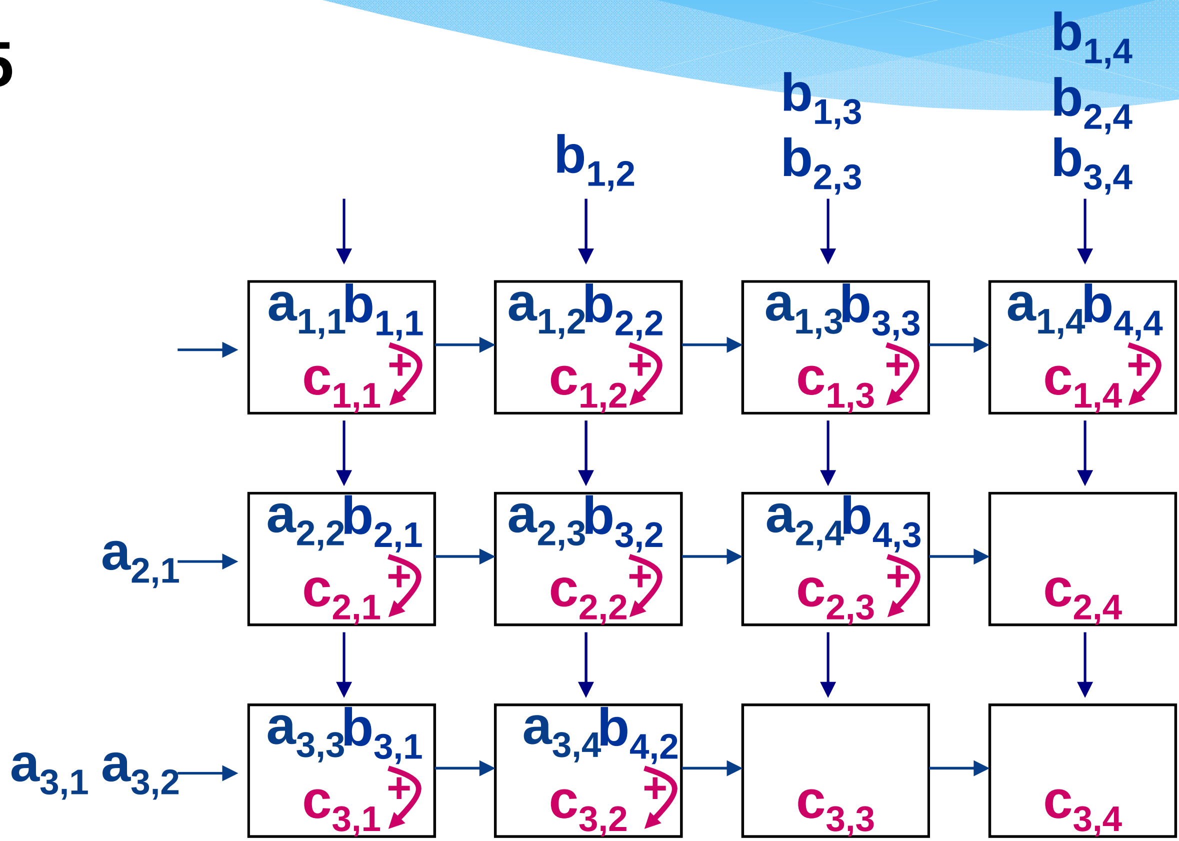
Systolic乘法

Step 4



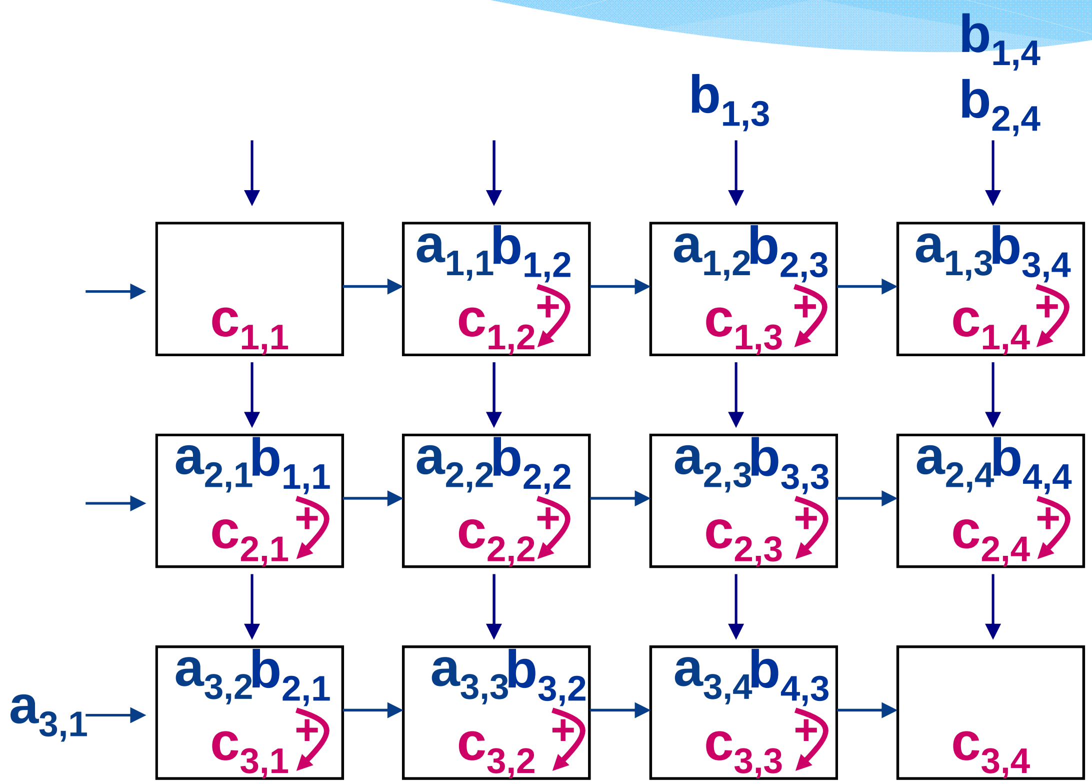
Systolic乘法

Step 5



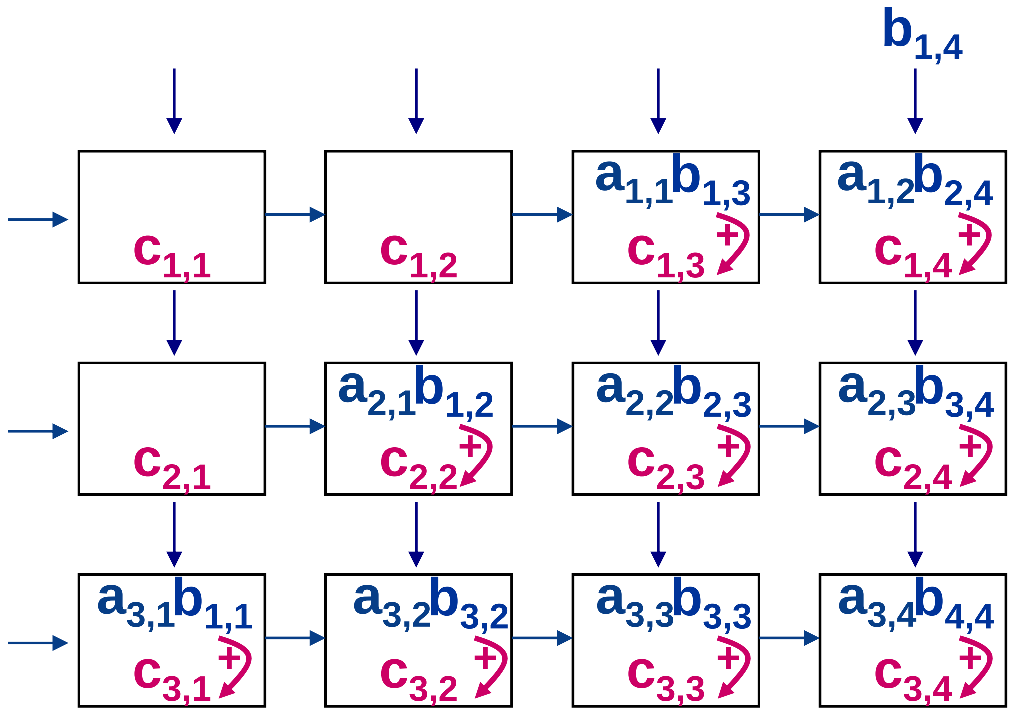
Systolic乘法

Step 6



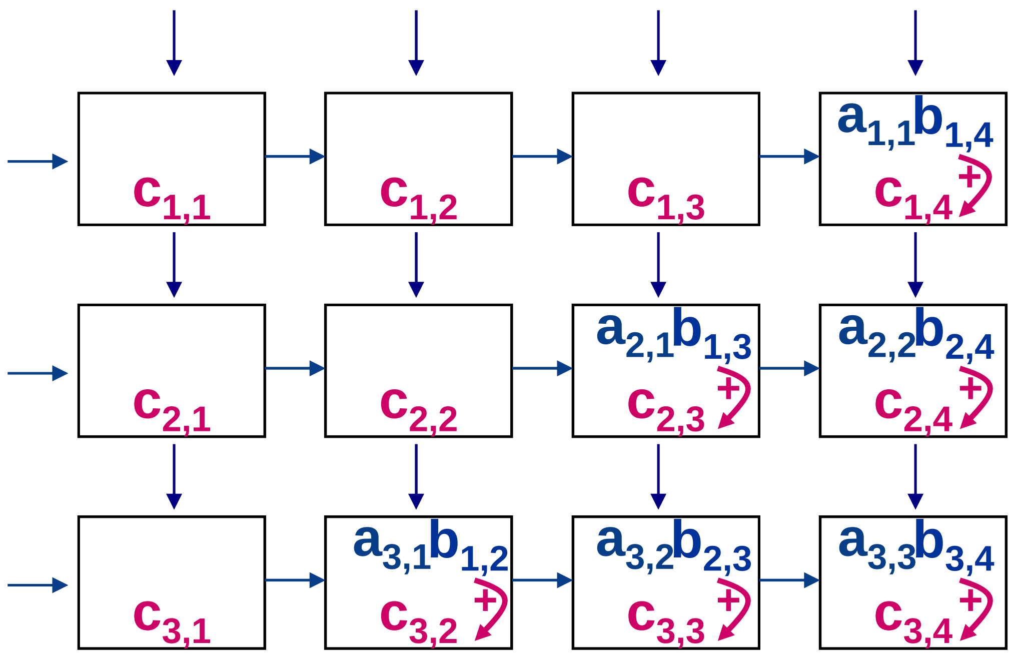
Systolic乘法

Step 7



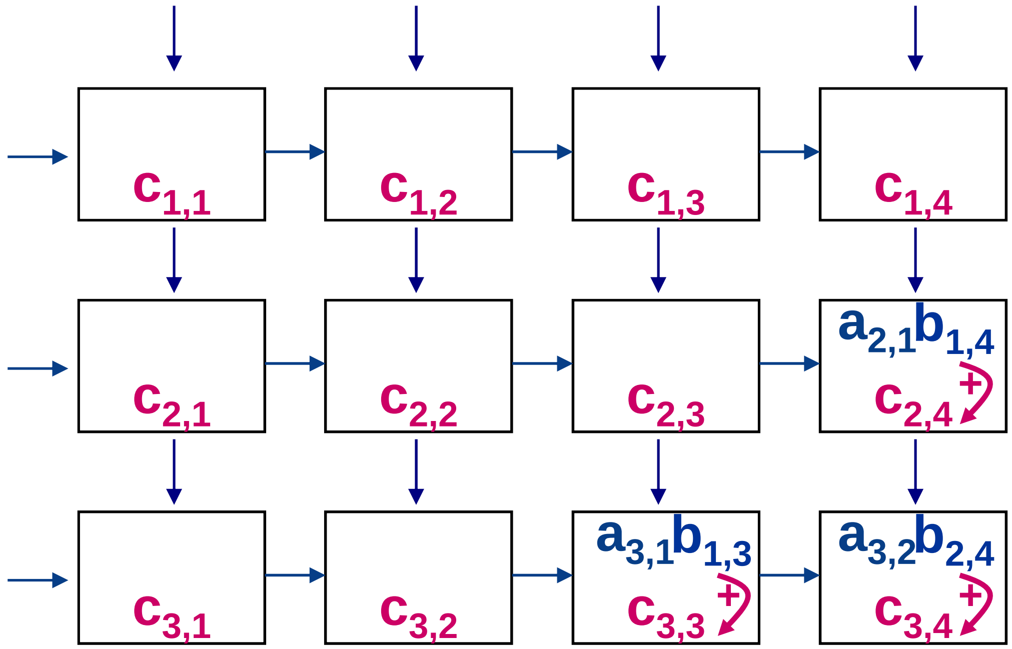
Systolic乘法

Step 8



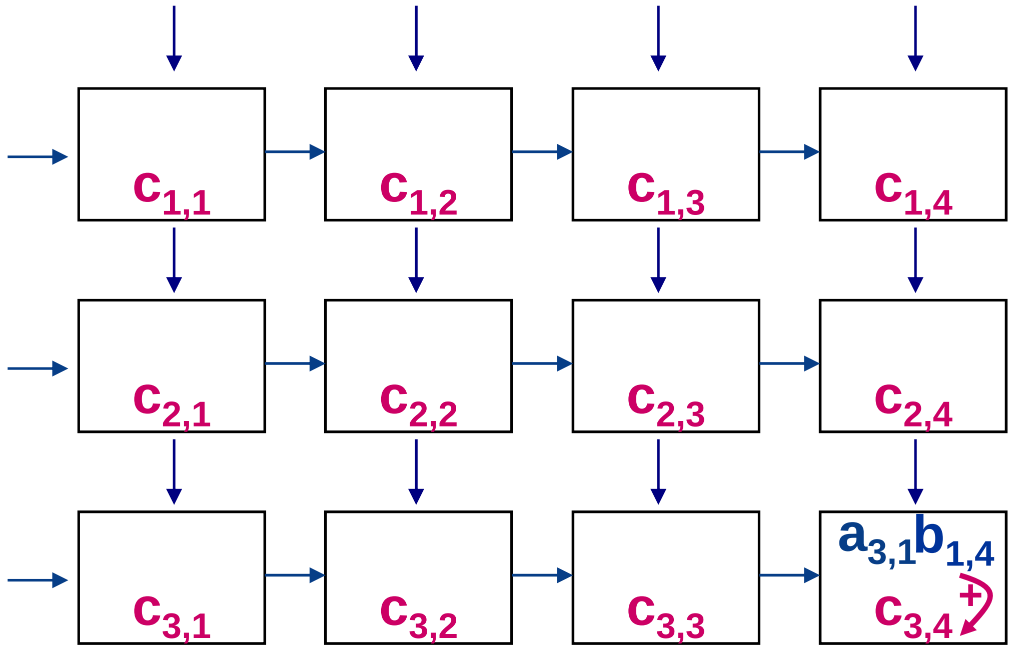
Systolic乘法

Step 9



Systolic乘法

Step 10



Systolic乘法

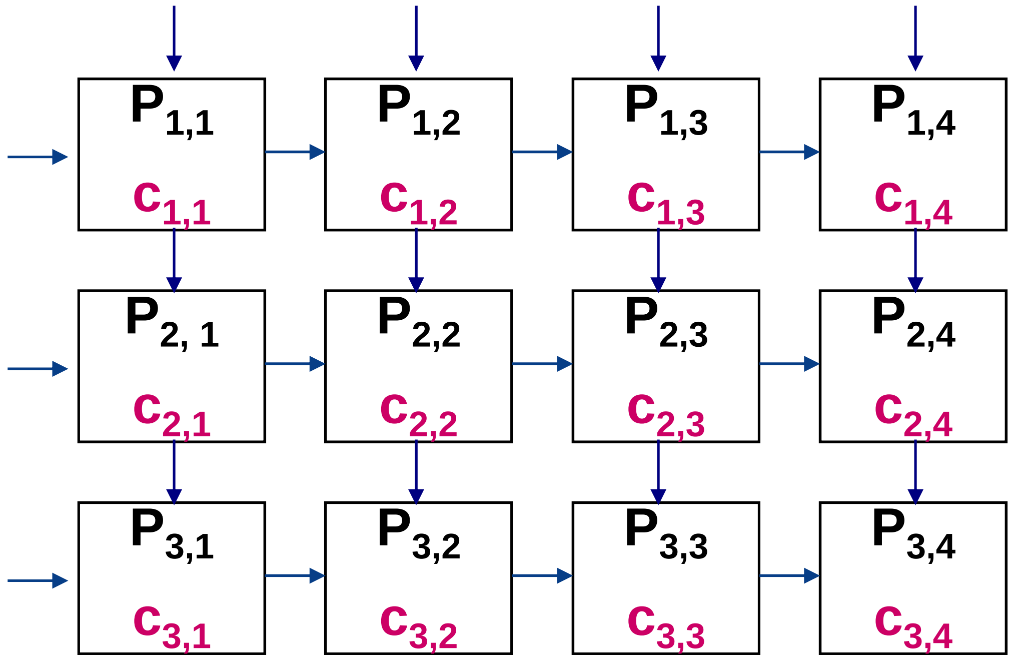
$$c_{1,1} = a_{1,1}\,b_{1,1} + a_{1,2}\,b_{2,1} + a_{1,3}\,b_{3,1} + a_{1,4}\,b_{4,1}$$

$$c_{1,2} = a_{1,1}\,b_{1,2} + a_{1,2}\,b_{2,2} + a_{1,3}\,b_{3,2} + a_{1,4}\,b_{4,2}$$

…………

Over

$$c_{3,4} = a_{3,1}\,b_{1,4} + a_{3,2}\,b_{2,4} + a_{3,3}\,b_{3,4} + a_{3,4}\,b_{4,4}$$



Systolic乘法

- Systolic算法

//输入: $A_{m\times n}$, $B_{n\times k}$;　　输出: $C_{m\times k}$

```
Begin
    for i=1 to m  par- do
        for j=1 to k  par-do
            (i) c_{i,j} = 0
            (ii) while P_{i,j} 收到a和b时 do
                    c_{i,j} = c_{i,j} +ab
                    if  i < m then 发送b给P_{i+1,j} endif
                    if  j < k  then 发送a给P_{i,j+1} endif
                 endwhile
        endfor
    endfor
End
```

9.4 矩阵乘法

9.4.1 简单并行分块乘法

9.4.2 Cannon乘法

9.4.3 Fox乘法

9.4.4 Systolic乘法

9.4.5 DNS乘法

DNS乘法

* 背景：由Dekel、Nassimi和Sahni提出的SIMD-CC上的矩阵乘法，处理器数目为n^3，运行时间为$O(\log n)$，是一种速度很快的算法。
* 基本思想：通过一到一和一到多的播送办法，使得处理器(k,i,j)拥有$a_{i,k}$和$b_{k,j}$，进行本地相乘，再沿k方向进行单点积累求和，结果存储在处理器(0,i,j)中。
* 处理器编号：处理器数$p=n^3=(2^q)^3=2^{3q}$，处理器P_r位于位置(k,i,j)，这里$r=kn^2+in+j$，$(0\leqslant i, j, k\leqslant n-1)$。位于(k,i,j)的处理器$P_r$的三个寄存器$A_r,B_r,C_r$分别表示为A[k,i,j]，B[k,i,j]和C[k,i,j]，初始时均为0。
* 算法：初始时$a_{i,j}$和$b_{i,j}$存储于寄存器A[0,i,j]和B[0,i,j];

  ①数据复制:A,B同时在k维复制(一到一播送);

  A在j维复制(一到多播送); B在i维复制(一到多播送);

  ②相乘运算:所有处理器的A、B寄存器两两相乘;

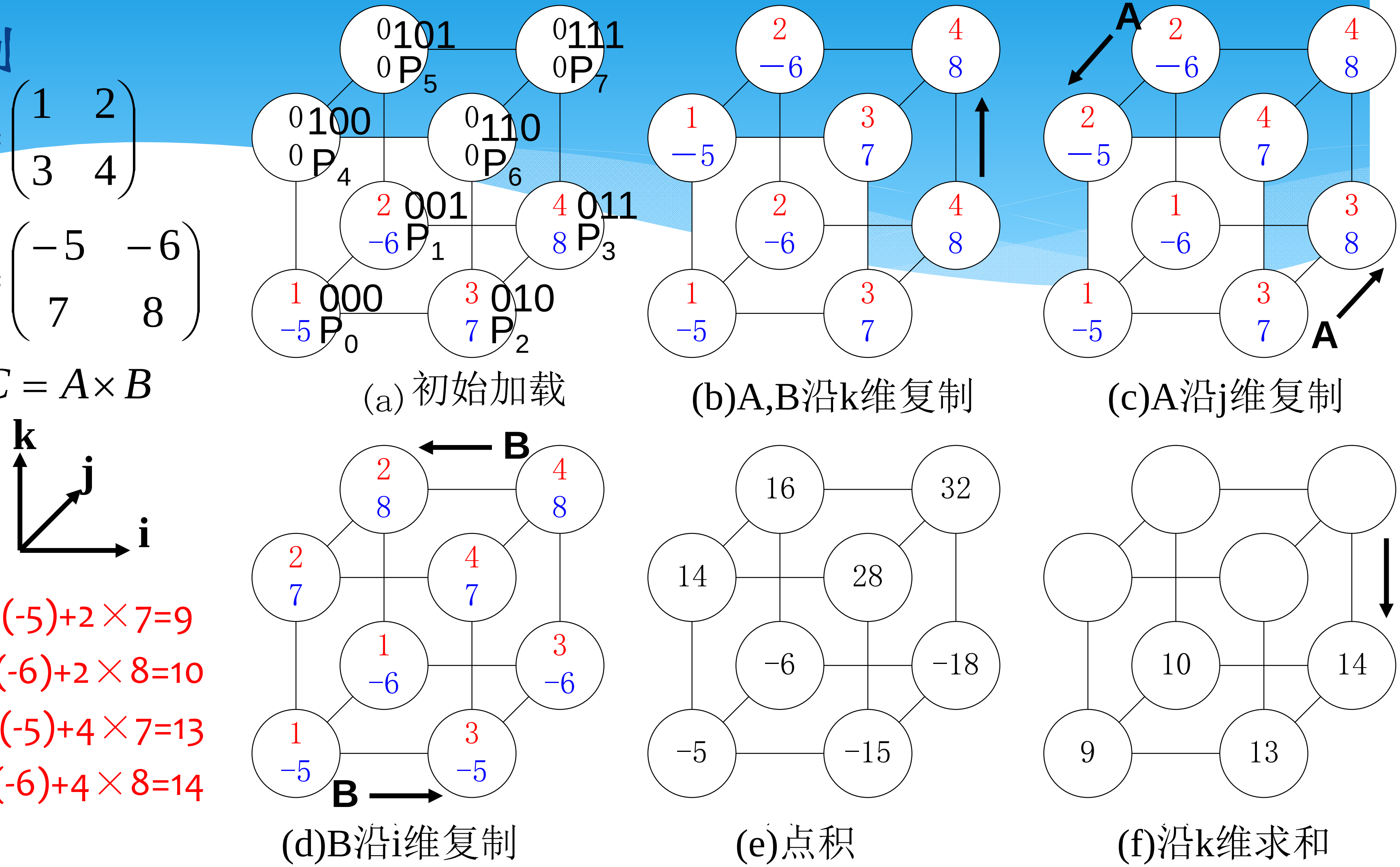
  ③求和运算:沿k方向进行单点积累求和;

* 示例

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} -5 & -6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$$

求 $C = A \times B$



C00=1×(-5)+2×7=9

C01=1×(-6)+2×8=10

C10=3×(-5)+4×7=13

C11=3×(-6)+4×8=14

图9. 12

DNS乘法

* 算法描述:

//令$r^{(m)}$表示r的第m位取反;

//{p, r_m=d}表示r(0≤r≤p-1)的集合, 这里r的二

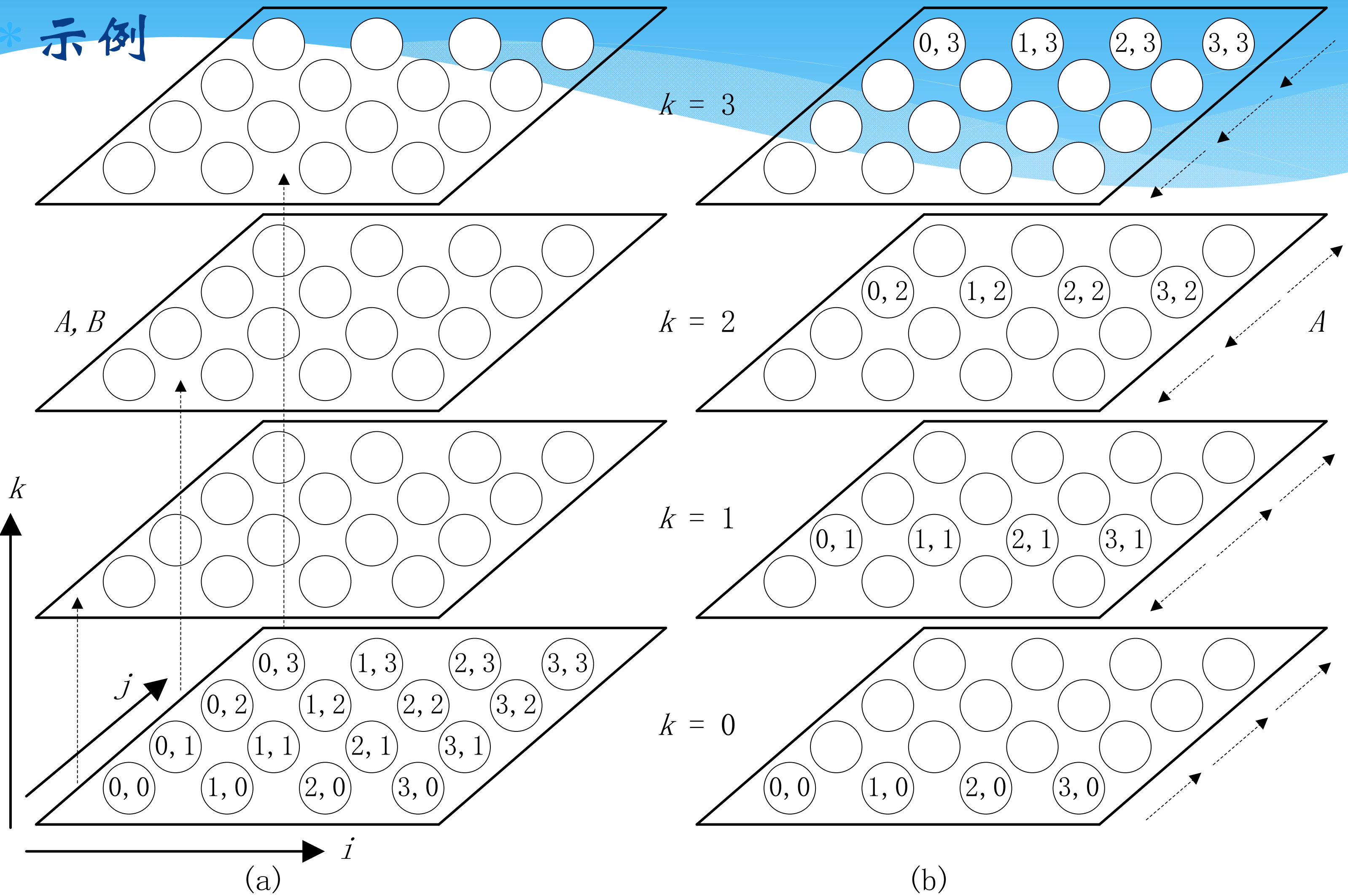
//进制第m位为d;

//输入: $A_{n\times n}$, $B_{n\times n}$; 输出: $C_{n\times n}$

```
Begin //以n=2, p=8=2^3举例, q=1, r=(r2r1r0)2
  (1)for m=3q-1 to 2q do //按k维复制A,B, m=2
       for all r in {p, rm=0} par-do //r2=0的r
         (1.1) Ar(m) ← Ar    //A(100)←A(000)等
         (1.2) Br(m) ← Br    //B(100)←B(000)等
       endfor
     endfor
  (2)for m=q-1 to 0 do    //按j维复制A, m=0
       for all r in {p, rm= r2q+m} par-do //r0=r2的r
         Ar(m) ← Ar  //A(001)←A(000),A(100)←A(101)
       endfor       //A(011)←A(010),A(110)←A(111)
     endfor
  (3)for m=2q-1 to q do  //按i维复制B,m=1
       for all r in {p, rm= rq+m} par-do//r1=r2的r
         Br(m)← Br  //B(010)←B(000),B(100)←B(110)
       endfor       //B(011)←B(001),B(101)←B(111)
     endfor
  (4)for r=0 to p-1 par-do    //相乘, all Pr
       Cr=Ar×Br
     endfor
  (5)for m=2q to 3q-1 do    //求和,m=2
       for r=0 to p-1 par-do
         Cr=Cr+Cr(m)
       endfor
     endfor
End
```

DNS乘法

* 示例



DNS乘法