数理逻辑第四次作业

201300035 方盛俊

第六讲习题.

1.

(1)

对于任何 $\Phi \cap \Psi$ 的有穷子集 Δ

$\because \Delta \subseteq \Phi \cap \Psi$

$\therefore \Delta \subseteq \Phi$, 即 Δ 也为 Φ 的有穷子集

$\because Con(\Phi)$

$\therefore \Delta \vdash$ 在 G 中不可证

$\therefore Con(\Phi \cap \Psi)$

(2)

令 $\Phi = \{A\}, \Psi = \{\neg A\}$

易知 Φ 的有穷子集 Δ 即为 $\{A\}$ 和 $\emptyset$

并且我们知道 $A \vdash$ 和 $\vdash$ 在 G 中不可证.

同理 Ψ 的有穷子集 Δ 即为 $\{\neg A\}$ 和 $\emptyset$

并且我们知道 $\neg A \vdash$ 和 $\vdash$ 在 G 中不可证.

而 $\Phi \cup \Psi = \{A, \neg A\}$

取 $\Delta = \{A, \neg A\}$

我们有 $\dfrac{A \vdash A}{A, \neg A \vdash} \neg L$

即 $A, \neg A \vdash$ 在 G 中可证

所以此时 $Con(\Phi \cup \Psi)$ 不成立

即有 $Con(\Phi \cup \Psi)$ 未必成立

2.

(1)

$\because \dfrac{A \vdash A, B \quad A, B \vdash B}{A, A \to B \vdash B} \to L$

$\therefore$ 存在 Φ 的有穷子集 $\{A, A \to B\}$ 使得 $\Delta \vdash B$ 可证

由命题 6.7 可知

$\therefore B \in \Phi$

(2)

对于任何项 t

$\because \dfrac{A[\frac{t}{x}], \forall x.A \vdash A[\frac{t}{x}]}{\forall x.A \vdash A[\frac{t}{x}]} \forall L$

$\therefore$ 存在 Φ 的有穷子集 $\{\forall x.A\}$ 使得 $\Delta \vdash A[\frac{t}{x}]$ 可证

由命题 6.7 可知

$\therefore A[\frac{t}{x}] \in \Phi$

3.

先证明项是可数的, 即项的势为 $\aleph_0$, 对项 t_n 的函数嵌套深度 n 进行数学归纳, 记 t_n 组成的集合为 S_n:

奠基 (Basic):

嵌套深度 $n=0$ 时, 即项 t 为变元符 x 或常元符 c 时,

易知 $S_0 = V \cup \mathcal{L}_c$, 而变元集的势 $|V| = \aleph_0$, 常元符的势 $|\mathcal{L}_c| = \aleph_0$

则有 $|S_0| = |V| + |\mathcal{L}_c| = \aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$

归纳假设 (I.H.):

假设对于 $n-1$ 满足 $|S_{n-1}| = \aleph_0$

归纳步骤 (I.S.):

我们记 S_n^i 为由元数为 i 的函数作为最外层函数的项 t_n 组成的集合.

我们已知元数为 i 的函数个数是可数的, 我们对其中一个函数 f_{ij}, 对应 t_n 集合为 S_n^{ij}

对于 $t_n = f_{ij}(t_{k_1}, t_{k_2}, \cdots, t_{k_i})$, 其中 $0 \leqslant k_i \leqslant n-1$, f_i 的元数为 i

由归纳假设可知 $S_k = \aleph_0, 0 \leqslant k \leqslant n-1$

$\therefore |S_n^{ij}| = \sum\limits_{k_1=0}^{n-1} \sum\limits_{k_2=0}^{n-1} \cdots \sum\limits_{k_i=0}^{n-1} |S_{k_1}| \times |S_{k_2}| \times \cdots \times |S_{k_2}| = \aleph_0$

$\therefore |S_n^i| = \sum\limits_{j=0}^{\infty} |S_n^{ij}| = \aleph_0$

$\therefore |S_n| = \sum\limits_{i=0}^{\infty} |S_n^i| = \aleph_0$

归纳成立.

$\because \{t | t \text{ is term}\} = S_0 \cup S_1 \cup \cdots \cup S_n \cup \cdots$

$\therefore |\{t | t \text{ is term}\}| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} |S_n| = \aleph_0$

则我们可以证明出项的势为 $\aleph_0$, 是可数的.

再证明公式是可数的, 即公式的势为 $\aleph_0$

和项的推导过程一样, 我们可以证明出原子公式, 即只由谓词 $P(t_1, t_2, \cdots, t_n)$ 组成的公式的势是 $\aleph_0$.

再对公式的逻辑连接词深度 n 进行数学归纳, 记深度为 n 的公式集合为 S_n:

奠基 (Basic): 已经有 S_0 为原子公式集合, 则 $|S_0| = \aleph_0$

归纳假设 (I.H.): 假设 $S_{n-1} = \aleph_0$

归纳步骤 (I.S.):

若最外层连接词为 $\neg$: 对于 $\neg A$ 有 $|S_n| = |S_{n-1}| = \aleph_0$

若最外层连接词为 $*$, $* \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$: 对于 $A * B$ 有 $|S_n| = \sum_{k=0}^{n-1} |S_{n-1}| \times |S_k| = \aleph_0$

可知归纳成立.

则我们可知公式集合 $S_0 \cup S_1 \cup \cdots$ 的势为 $\aleph_0$,

即**一阶语言 $\mathcal{L}$ 的所有公式组成的集合是可数的.**

假设所有公式组成的集合为 $\{A_1, A_2, \cdots\}$, $\mathcal{L}$ 的任意一个协调公式集为 Γ, 下面证其可以扩张为一个极大协调公式集 Γ'

进行数学归纳:

奠基 (Basic): 当 $n = 0$ 时, $\Gamma_0 = \Gamma$, 易知 $Con(\Gamma_0)$

归纳假设 (I.H.): 假设当 $n-1$ 时, 有 $Con(\Gamma_{n-1})$

归纳步骤 (I.S.):

由归纳假设可知 $Con(\Gamma_{n-1})$

若 $Con(\Gamma_{n-1} \cup \{A_n\})$, 则令 $\Gamma_n = \Gamma_{n-1} \cup \{A_n\}$

若 $Incon(\Gamma_{n-1} \cup \{A_n\})$, 则令 $\Gamma_n = \Gamma_{n-1}$

所以可知 $Con(\Gamma_n)$

归纳成立.

令 $\Gamma' = \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \cdots \cup \Gamma_n \cup \cdots$

下面证明 Γ' 极大协调.

由归纳的步骤我们可知, 对于任何一个公式 A_n:

$Con(\Gamma' \cup \{A_n\}) \Rightarrow Con(\Gamma_{n-1} \cup \{A_n\}) \Rightarrow A_n \in \Gamma_n \Rightarrow A_n \in \Gamma'$

即对任何公式 A 均有若 $Con(\Gamma' \cup \{A\})$ 则 $A \in \Gamma'$

所以 Γ' 极大协调, 即

一阶语言 $\mathcal{L}$ 的一个协调公式集 Γ 均可扩张为 $\mathcal{L}$ 的一个极大协调公式集 Γ'.

4.

(2)

令谓词 $p(x) : x \doteq s$, 则原式可以变为 $\vdash (s \doteq t) \rightarrow p(t)$

$$\cfrac{\cfrac{s \doteq t, p(s) \vdash p(t) \quad \vdash p(s)}{s \doteq t \vdash p(t)}Cut}{\vdash (s \doteq t) \rightarrow p(t)} \rightarrow R$$

由等词公理 (1) 可知 $\vdash p(s)$ 可证, 等词公理 (3) 可知 $s \doteq t, p(s) \vdash p(t)$ 可证,

则 $\vdash (s \doteq t) \rightarrow (t \doteq s)$ 可证.

(3)

令谓词 $p(x) : s \doteq x$, 则原式可以变为 $\vdash p(t) \rightarrow (t \doteq u \rightarrow p(u))$

$$\cfrac{\cfrac{t \doteq u, p(t) \vdash p(u)}{p(t) \vdash t \doteq u \rightarrow p(u)} \rightarrow R}{\vdash p(t) \rightarrow (t \doteq u \rightarrow p(u))} \rightarrow R$$

由等词公理 (3) 可知 $t \doteq u, p(t) \vdash p(u)$ 可证,

则 $\vdash (s \doteq t) \to (t \doteq u \to s \doteq u)$ 可证.

5.

设 t 为项, 对 t 进行结构归纳定义 $D(t)$ 如下:

1. $D(x) = \{\sigma(x)\}$, 这里 $x \in V$
2. $D(c) = \{c_M\}$, 这里 $c \in \mathcal{L}_c$
3. $D(f(t_1, \cdots, t_n)) = \bigcup\limits_{i=1}^{n} D(t_i)$

设 A 为项, 对 A 进行结构归纳定义 $D(t)$ 如下:

1. $D(t_1 \doteq t_2) = D(t_1) \cup D(t_2)$
2. $D(P(t_1, \cdots, t_n)) = \bigcup\limits_{i=1}^{n} D(t_i)$
3. $D(\neg A) = D(A)$
4. $D(A * B) = D(A) \cup D(B), * \in \{\vee, \wedge, \to\}$

设 Γ 为公式集 $\{A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots\}$, 对 Γ 归纳定义如下:

1. $D(\Gamma) = \bigcup\limits_{i=1} D(A_i)$

$\because \Phi$ 为一个有模型的公式集合

$\therefore \Phi$ 有对应的结构 (M, I) 和赋值 σ

所以我们由 $D(\Phi)$ 的归纳定义可知, $D(\Phi) \subseteq M$, 并且 Φ 中的公式只使用到了论域 M 的这个子集 $D(\Phi)$

又由我们的归纳步骤可知, $D(\Phi)$ 中的单独元素仅由 $D(x)$ 和 $D(c)$ 生成, 即有

$|D(\Phi)| \leqslant |V| + |\mathcal{L}_c| = \aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$

即我们有 $D(\Phi)$ 是可数的.

我们将 $D(\Phi)$ 作为 Φ 的一个新模型 $(D(\Phi), I)$ 与赋值 σ 的论域.

即我们证明了, 当 $\mathcal{L}$ 为可数的一阶语言, 若 Φ 有模型, 则 Φ 有论域为可数集的模型.

6.

$\because \Gamma, A[\frac{c}{x}] \models B, c$ 为新常元

由 Completeness 可知

$\therefore \Gamma, A[\frac{c}{x}] \vdash B, c$ 为新常元

令其证明树为 T, 在 T 中将 c 替换成新变元 y, 从而有

$\therefore \Gamma, A[\frac{y}{x}] \vdash B$

$\because \dfrac{\Gamma, A[\frac{y}{x}] \vdash B}{\Gamma, \exists x.A \vdash B} \exists L$

$\therefore \Gamma, \exists x.A \vdash B$

由 Completeness 可知

$\therefore \Gamma, \exists x.A \models B$

7.

(1)

令论域 $M=\{0,1\}$, 定义谓词 $P(0)=F, P(1)=T$

则其是 $\forall x(P(x)\to\forall yP(y))$ 的一个反例模型.

当 $x=1, y=0$ 时, $P(x)=T$, $P(y)=F$, 因此 $\forall x(P(x)\to\forall yP(y))$ 不成立

$\therefore \forall x(P(x)\to\forall yP(y))$ 不可证

(2)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{P(r)\vdash P(r),\exists xP(x),Q(r)}{P(r)\vdash \exists xP(x),Q(r)}\exists R \quad \dfrac{Q(r),\forall yQ(y),P(r)\vdash Q(r)}{\forall yQ(y),P(r)\vdash Q(r)}\forall L}{\exists xP(x)\to\forall yQ(y),P(r)\vdash Q(r)}\to L}{\exists xP(x)\to\forall yQ(y)\vdash P(r)\to Q(r)}\to R}{\exists xP(x)\to\forall yQ(y)\vdash \forall z(P(z)\to Q(z))}\forall R}{\vdash(\exists xP(x)\to\forall yQ(y))\to\forall z(P(z)\to Q(z))}\to R$$

$\therefore (\exists xP(x)\to\forall yQ(y))\to\forall z(P(z)\to Q(z))$ 可证

(3)

令论域 $M=\{0,1\}$, 定义谓词 $P(0)=F, P(1)=T, Q(0)=F, Q(1)=T$

则其是 $\forall z(P(z)\to Q(z))\to(\exists xP(x)\to\forall yQ(y))$ 的一个反例模型.

易知, 对于该模型来说, $\forall z(P(z)\to Q(z))$ 是成立的, 只需要证明 $\exists xP(x)\to\forall yQ(y)$ 是错误的.

可以看出, 当 $x=1$ 时, $P(x)=T$, 即 $\exists xP(x)$ 是成立的, 只需证 $\forall yQ(y)$ 是错误的.

当 $y=0$ 时, $Q(0)=F$, 因此 $\forall yQ(y)$ 是错误的.

$\therefore \forall z(P(z)\to Q(z))\to(\exists xP(x)\to\forall yQ(y))$ 不可证

(4)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{R(z,z)\vdash R(z,z)}{\vdash\neg R(z,z),R(z,z)}\neg R \quad R(z,z)\vdash R(z,z)}{\neg R(z,z)\to R(z,z)\vdash R(z,z)}\to L \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{R(z,z)\vdash R(z,z)}{\vdash\neg R(z,z),R(z,z)}\neg R \quad R(z,z)\vdash R(z,z)}{\neg R(z,z)\to R(z,z)\vdash R(z,z)}\to L}{\neg R(z,z),(\neg R(z,z)\to R(z,z))\vdash}\neg L}{(R(z,z)\to\neg R(z,z)),(\neg R(z,z)\to R(z,z))\vdash}\to L}{(R(z,z)\to\neg R(z,z))\wedge(\neg R(z,z)\to R(z,z))\vdash}\wedge L}{\forall x((R(x,z)\to\neg R(x,x))\wedge(\neg R(x,x)\to R(x,z)))\vdash}\forall L}{\exists y\forall x((R(x,y)\to\neg R(x,x))\wedge(\neg R(x,x)\to R(x,y)))\vdash}\exists L}{\vdash\neg\exists y\forall x((R(x,y)\to\neg R(x,x))\wedge(\neg R(x,x)\to R(x,y)))}$$

$\therefore \neg\exists y\forall x((R(x,y)\to\neg R(x,x))\wedge(\neg R(x,x)\to R(x,y)))$ 可证