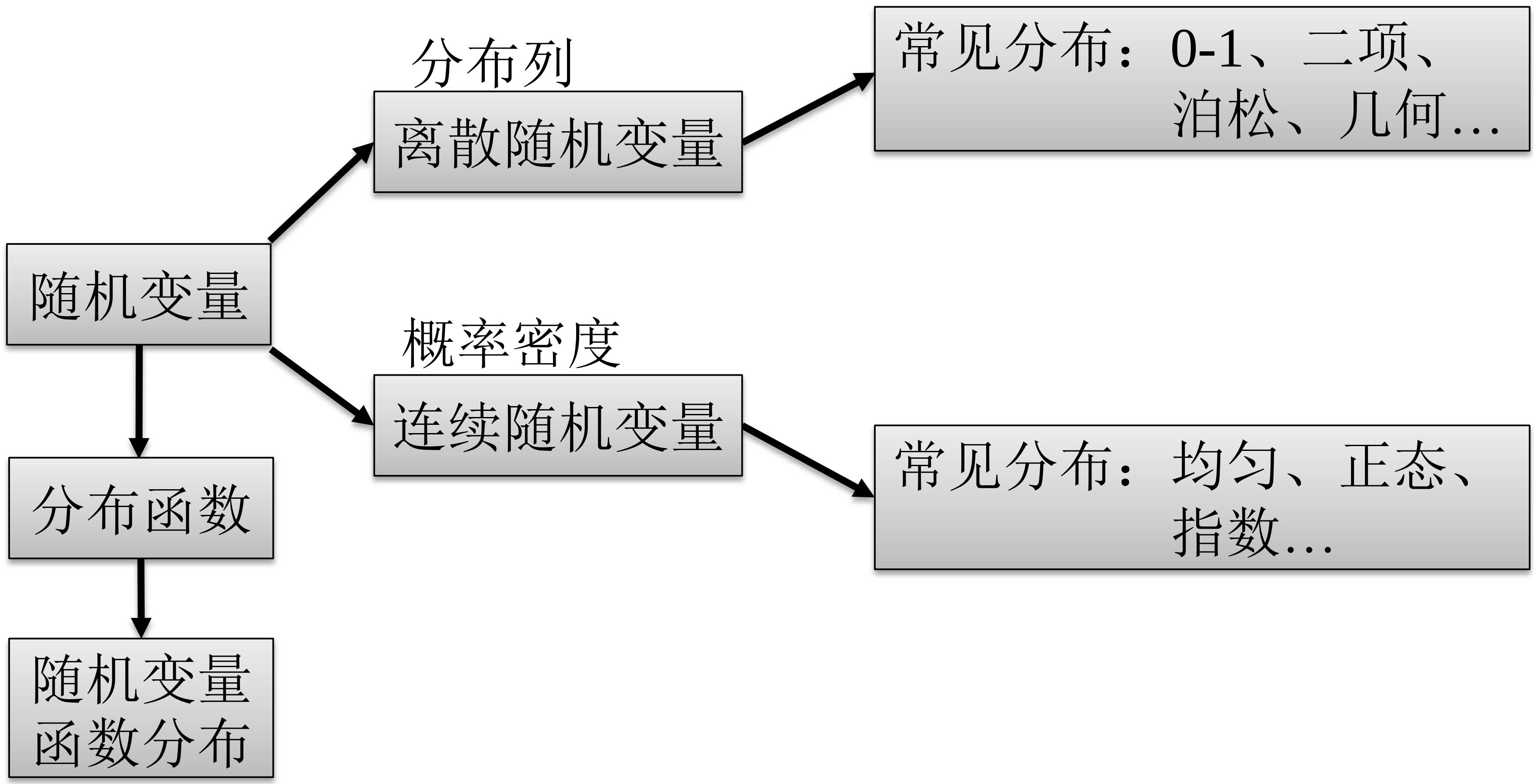
第二章 随机变量及其分布

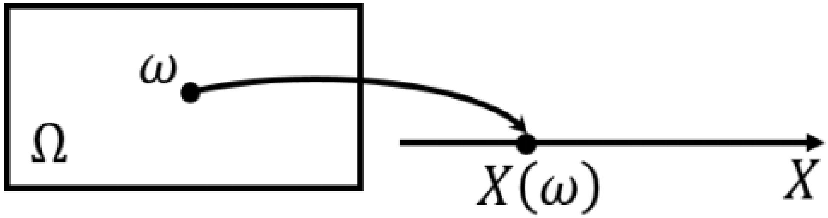
高 尉

知识结构


分布列
概率密度
随机变量
离散随机变量
连续随机变量
常见分布：0-1、二项、
泊松、几何…
常见分布：均匀、正态、
指数…
分布函数
随机变量
函数分布

随机变量

将样本空间Ω中每个样本点ω与一实数$X(\omega)$ 相对应，$X(\omega)$是ω的实值函数, 称实值函数 $X(\omega)\colon \Omega \to \mathrm{R}$为随机变量, 简记$X$



给定任意随机变量X和实数x, 函数

$$F(x) = P(X \le x)$$

称为随机变量X的**分布函数**, 分布函数的本质是概率

- 单调性: 若$x_1 < x_2$, 则$F(x_1) \le F(x_2)$
- 规范性: $F(x) \in [0,1]$且$F(-\infty) = 0, F(+\infty) = 1$
- 右连续性: $F(x+0) = F(x)$

分布函数可由这三条性质完全刻画

- 对任意实数$x_1 < x_2$, $P(x_1 < X \le x_2) = F(x_2) - F(x_1)$

$$P(X = x_2) = F(x_2) - F(x_2 - 0)$$

例题

性质：若$F_1(x), F_2(x)$是分布函数，则$aF_1(x)+(1-a)F_2(x)$也是分布函数，其中$a\in(0,1)$

例：设随机变量X的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0 & x\le a\\ x^2-b & a<x\le\sqrt{2}\\ c & x>\sqrt{2}\end{cases}$$

求P$(X=a)$和P$[1<X<3]$

离散型随机变量

离散型随机变量：随机变量的取值是有限的、或无限可列的。

假设其取值为$x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$, 事件$X = x_k$的概率记为

$$p_k = P(X = x_k) \qquad k = 1, 2, \cdots$$

称之为**随机变量X的分布列**，分布列包含随机变量的取值和概率，完全刻画其概率属性

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	$\cdots$
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	$\cdots$

性质： 随机变量X的分布列$P(X = x_k) = p_k \ (k \geq 1)$ 满足$p_k \geq 0$ 且$\sum_k p_k = 1$

例:若随机变量X的分布列$P(X = k) = c/4^k \ (k \geq 0)$, 求$P(X = 1)$

均匀/0-1分布

设随机变量X的取值为$x_1, x_2, \cdots, x_n$, 且$P(X = x_i) = 1/n$, 称X服从离散 **均匀分布**

期望：$E(X) = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{n}$　　方差: $E(X) = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{n} - \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{n}\right)^2$

德国坦克数量问题：假设德国生产N辆坦克, 编号为$1, 2, \cdots, N$, 盟军战斗中随机击毁 k辆, 被随机击毁坦克编号分别为$x_1, x_2, \ldots, x_k$, 如何估计N的大小

随机变量X的取值为 $\{0, 1\}$, 其分布列$P(X = 1) = p$，称X服从参数为p的**$0 - 1$分布**, 或 **Bernoulli 分布**, 记 $\boldsymbol{X \sim \mathrm{Ber}(p)}$

若 $X \sim \mathrm{Ber}(p)$，则 $E(X) = p$ 和 $\mathrm{Var}(X) = p(1 - p)$

二项/几何分布

用随机变量X表示n重Bernoulli试验中事件A发生的次数, 则X的取值为$0,1,\cdots,n$, 其分布列为

$$P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} \quad k\in\{0,1,2,\ldots,n\}$$

称随机变量X服从参数为n和p的**二项分布 (binomial distribution)**, 记 $\boldsymbol{X\sim B(n,p)}$

对随机变量 $X\sim B(n,p)$ 有$E(X)=np$ 和 $\mathrm{Var}(X)=np(1-p)$

用随机变量X表示事件A首次发生时的试验次数, 则X的取值为$1,2,\cdots$, 其分布列为$P(X=k)=(1-p)^{k-1}p \quad (k\geq 1)$

称**X服从参数为p的几何分布**, 记为 $\boldsymbol{X\sim G(p)}$

【无记忆性】$P(X>m+n\mid X>m)=P(X>n)$

若随机变量$X\sim G(p)$, 则有$\mathrm{E}(X)=1/p$和$\mathrm{Var}(X)=(1-p)/p^2$

负二项分布 (Pascal分布)

用X表示事件A第r次成功时发生的试验次数，则X取值$r, r+1, r+2, \cdots$, 其分布列为

$$P(X=n)=\binom{n-1}{r-1}p^{r-1}(1-p)^{n-r}\cdot p \quad (n \geq r)$$

称***X*服从参数为*r*和*p*的负二项分布，又称 Pascal分布**

设随机变量X服从参数为$p \in (0,1)$ 和$r > 0$的负二项分布，则有 $\mathrm{E}(X) = r/p$和$\mathrm{Var}(X) = r(1-p)/p^2$

泊松定理

若随机变量X的分布列为$P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\ (k\geq 0)$其中$\lambda>0$是常数, 称随机变量$X$**服从参数为λ的泊松分布**, 记**为 $X\sim P(\lambda)$**

若 $X\sim P(\lambda)$, 则$E(X)=\lambda$ 和$\mathrm{Var}\ (X)=\lambda$

泊松定理：对任意常数$\lambda>0$, n为任意正整数, 设$np_n=\lambda$, 则对任意给定的非负整数k, 有 $\lim\limits_{n\to+\infty}\binom{n}{k}p_n^k(1-p_n)^{n-k}=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$

泊松分布的应用: 若随机变量$X\sim B(n,p)$, 当n比较大而p比较小时, 令$\lambda=np$, 有$P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}\ \approx\ \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$

即利用**泊松分布近似计算二项分布**

常见分布

- 0/1分布：$X \sim Ber(p)$，$E(X) = p \qquad Var(X) = p(1-p)$
- 二项分布：$X \sim B(n,p)$，$E(X) = np \qquad Var(X) = np(1-p)$
- 几何分布：$X \sim G(p)$，$\mathrm{E}(X) = \frac{1}{p} \qquad \mathrm{Var}(X) = \frac{1-p}{p^2}$

  - 无记忆性：$P(X > m+n \mid X > m) = P(X > n)$

- 负二项分布： X服从参数为r和p的负二项分布

$$\mathrm{E}(X) = \frac{r}{p} \qquad 和 \qquad \mathrm{Var}(X) = \frac{r(1-p)}{p^2}$$

- 泊松分布：$X \sim P(\lambda)$, $E(X) = \lambda \qquad \mathrm{Var}\,(X) = \lambda$

  - 泊松定理：$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$

例题

设随机变量$X \sim \mathrm{U}(2,5)$, 若对X进行三次独立观测，求至少两次观察值大于3的概率。

概率密度函数

设随机变量X的分布函数为$F(x)$, 如果存在可积函数$f(x)$, 使得对任意实数x有$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$成立, 则称$X$为连续型随机变量, 函数$f(x)$为随机变量$X$的**概率密度函数**, 简称**概率密度**

概率密度函数$f(x)$满足

- 非负性：$f(x) \geq 0$
- 规范性：$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1$

概率密度

- 任意$x_1 < x_2$，有$P(x_1 \leq X \leq x_2) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt, P(X = x_2) = 0$
- $F(x)$在$(-\infty, +\infty)$连续
- 若$f(x)$在x_0连续，则$F(x)$在x_0可导，且有$f(x_0) = F'(x_0)$
- 若$f(x)$为偶函数，则有$F(x) + F(-x) = 1$

例题

1) 若X的概率密度函数为$f(x)$，则以下为概率密度函数的有(　　)

A) $f(2x)$　　B) $f^2(x)$　　C) $2xf(x^2)$　　D) $3x^2f(x^3)$

2) 若X与$-X$具有相同的概率密度函数，则$F(x)+F(-x)=1$

3) 若X的概率密度函数为偶函数，则$F(-x)=\frac{1}{2}-\int_0^x f(t)dt$

均匀分布和指数分布

若随机变量X的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a} & x\in[a,b]\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$，称$\boldsymbol{X}$服从区间$[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$上的均匀分布, 记$\boldsymbol{X}\sim\boldsymbol{U}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$

若$X\sim U(a,b)$,则$E(X)=(a+b)/2$, $\mathrm{Var}(X)=(b-a)^2/12$

给定常数$\lambda>0$, 若随机变量X的密度函数$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & x\geq 0\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$

称X服从参数为λ的指数分布, 记 $X\sim e(\lambda)$

若随机变量$X\sim e(\lambda)$, 则$E(X)=1/\lambda$和$\mathrm{Var}(X)=1/\lambda^2$

唯一具有无记忆性的连续随机变量：若随机变量$X\sim e(\lambda)$, 则对任意$s>0,t>0$, 有$P(X>s+t|X>t)=P(X>s)$

例题

1）设随机变量$\xi \sim U(-3,6)$，试求方程$4x^2 + 4\xi x \ + \xi + 2 = 0$有实根的概率

2）已知随机变量$Y \sim e(1)$, 对任意$a > 0$求$P[Y \le a + 1|Y > a]$

3）随机变量$X \sim e(\lambda)$, 且X落入$(1,3)$内的概率达到最大，求λ

正态分布

给定$u \in (-\infty, +\infty)$和$\sigma > 0$, 随机变量X的概率密度为

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \qquad x \in (-\infty, +\infty)$$

称X服从参数为μ, σ^2的正态分布，$N(0,1)$为标准正态分布

性质：

- 若$X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$, 则$\mathrm{E}(X) = \mu$和$\mathrm{Var}(X) = \sigma^2$
- 若$X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$, 则$\frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$
- 若$X \sim N(0,1)$, 则$\sigma X + \mu \sim N(\mu, \sigma^2)$
- 标准正态分布$N(0,1)$的分布函数$\Phi(x) = P(X \leq x)$，偶函数
- 标准正态分布的α分位数u_α满足$P(X > u_\alpha) = \alpha, u_{1-\alpha} = -u_\alpha$

例题

1) X服从正态分布$N(0,1)$，给定$\alpha \in (0,1)$，数u_α满足$P(X > u_\alpha) = \alpha$，若$P(|X| \le x) = \alpha$，则x等于 (　)

A) $u_{\alpha/2}$　　B) $u_{1-\alpha/2}$　　C) $u_{(1-\alpha)/2}$　　D) $u_{1-\alpha}$

2) 设$f_1(x)$是$N(0,1)$的概率密度函数， $f_2(x)$是$[-1,3]$均匀分布的概率密度函数，若

$$f(x) = \begin{cases} \mathrm{a}f_1(x) & x \le 0 \\ \mathrm{b}f_2(x) & x > 0 \end{cases}$$

为概率密度函数，则a, b应满足什么条件

随机变量函数的概率分布

离散随机变量：X的分布列为$P(X=x_i)=p_i$，则$Y=g(X)$的分布列$P(\mathrm{Y}=g(x_i))=p_i$ (若值相同则需要合并)

X的分布列为$P(X=\mathrm{n})=1/2^n(n=1,2\ldots)$，求$Y=\sin(X\pi/2)$的分布函数

随机变量函数的概率分布

已知连续随机变量X的概率密度为$f_X(x)$，求新随机变量$Y = g(X)$的概率密度$f_Y(y)$？

求解步骤：1）求解Y=g(X)的分布函数

$$F_Y(y) = P(Y \le y) = P(g(X) \le y) = \int_{g(x)\le y} f_X(x)dx$$

2）利用分布函数和概率密度关系求解密度函数$f_Y(y) = F_Y'(y)$

数学工具 — 积分求导公式

$$F(y) = \int_{\psi(y)}^{\varphi(y)} f(x)dx$$

$$F'(y) = f\big(\varphi(y)\big)\varphi'(y) - f\big(\psi(y)\big)\psi'(y)$$

例题

已知X的分布函数$F_X(x)$，求$Y = 2X + 1$的分布函数

已知X服从均匀分布$U(-\pi/2, \pi/2)$，求$Y = \sin(x)$的概率密度

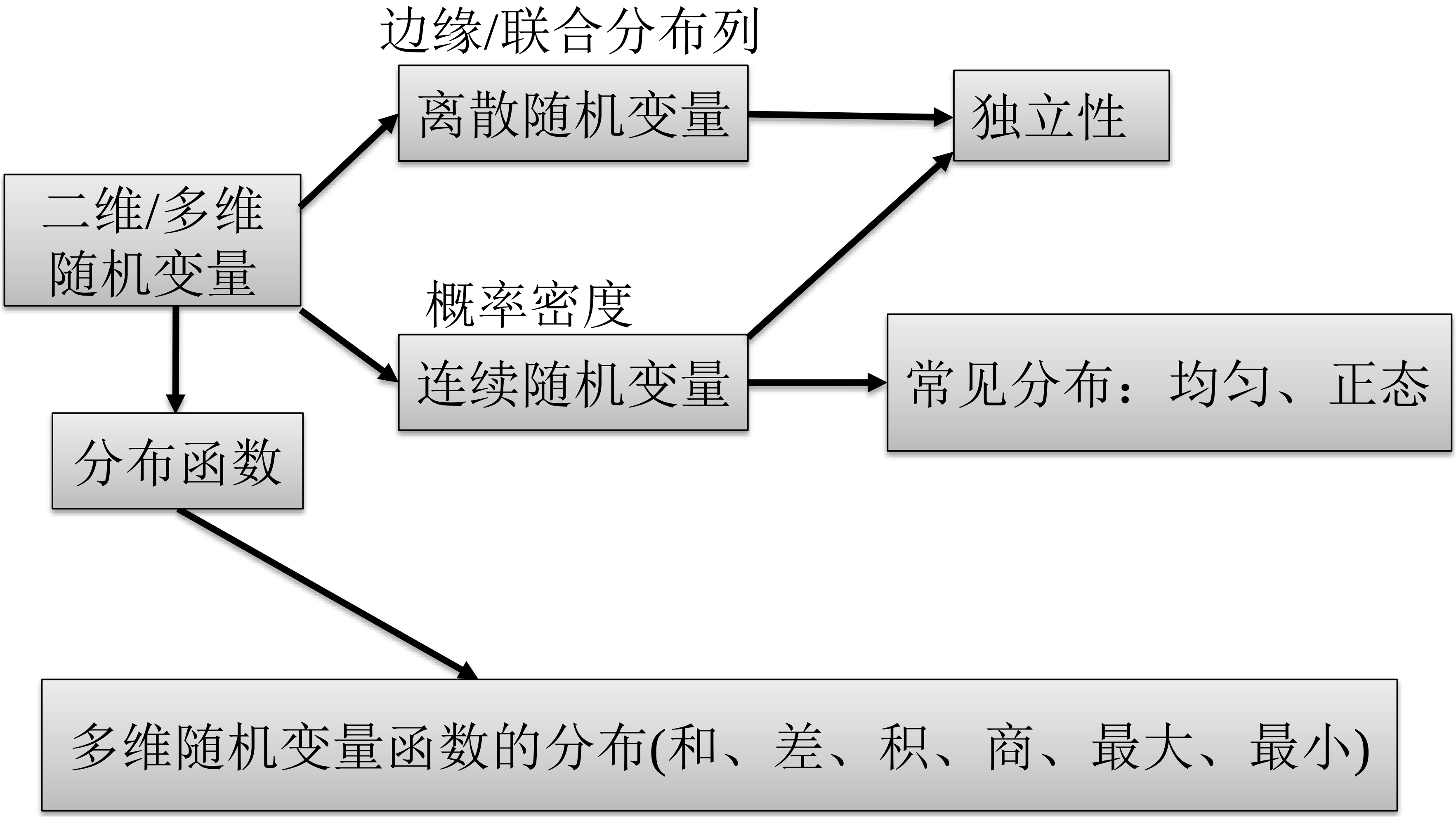
练习题：

1) 若$X \sim N(0,1)$，求$Y = e^X, Y = |X|, Y = X^2 + 1$的概率密度

2)若$X \sim e(1)$，求$Y = \mathrm{e}^{\mathrm{X}}$的概率密度

第三章 多维随机变量

知识结构



边缘/联合分布列
离散随机变量
独立性
二维/多维
随机变量
概率密度
连续随机变量
常见分布：均匀、正态
分布函数
多维随机变量函数的分布(和、差、积、商、最大、最小)

二维随机变量

设$X = X(\omega)$和$Y = Y(\omega)$为定义在样本空间Ω上的随机变量，由它们构成的向量(X, Y)称为**二维随机向量**

设(X, Y)为二维随机变量，对任意实数$x \in (-\infty, +\infty)$和$y \in (-\infty, +\infty)$，称$F(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y)$为**二维随机变量$(X, Y)$的分布函数**, 或称为**随机变量$X$和$Y$的联合分布函数**

- 分布函数$F(x, y)$对每个变量单调不减
  - 固定y, 当$x_1 > x_2$时有$F(x_1, y) \geq F(x_2, y)$
  - 固定x, 当$y_1 > y_2$时有$F(x, y_1) \geq F(x, y_2)$
- 对任意$x \in (-\infty, +\infty)$和$y \in (-\infty, +\infty)$，分布函数$F(x, y) \in [0,1]$, 且$F(+\infty, +\infty) = 1$和

$$F(-\infty, y) = F(x, -\infty) = F(-\infty, -\infty) = 0$$

- 分布函数$F(x, y)$关于每个变量右连续

边缘分布与独立性

设二维随机变量(X,Y)的联合分布函数为$F(x,y)$, 称

$$F_X(x) = P(X \le x) = P(X \le x, y < +\infty) = \lim_{y\to+\infty} F(x,y)$$

为随机变量X的边缘分布函数.

同理定义随机变量Y的边缘分布函数为:

$$F_Y(y) = P(Y \le y) = P(Y \le y, x < +\infty) = \lim_{x\to+\infty} F(x,y)$$

$X \le x$和$Y \le y$相互独立, $P(X \le x, Y \le y) = P(X \le x)P(Y \le y)$，
等价于$F(x,y) = F_X(x)\,F_Y(y)$，则称随机变量***X*与*Y*相互独立**

随机事件的独立性：$P(AB) = P(A)P(B)$

随机变量的独立性

例题：设二维随机变量(X,Y)的联合分布函数为

$$F(x,y)=\begin{cases}A(B+\arctan x)(C-e^{-y}) & x\in R, y>0\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

求$F(0,1)$

二维离散型随机变量

若二维随机变量 (X,Y) 的取值是有限个或无限可列的, 称 (X,Y) 为二维离散型随机变量

设离散型随机变量(X,Y)的取值分别为(x_i,y_j), $i,j=1,2,\cdots$, 则称

$$p_{ij}=P(X=x_i,Y=y_j)$$

为**(X,Y)的联合分布列**

$X \backslash Y$	y_1	y_2	$\cdots$	y_j	$\cdots$
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1j}	$\cdots$
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2j}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	
x_i	p_{i1}	p_{i2}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\ddots$

性质：$p_{ij}\geq 0$和$\sum_{i,j}p_{ij}=1$

边缘分布列

根据二维随机变量(X,Y)的联合分布列p_{ij}

随机变量X的边缘分布列

$$P(X=x_i)=\sum_{j=1}^{+\infty}P(X=x_i,Y=y_j)=\sum_{j=1}^{+\infty}p_{ij}=p_{i\cdot}$$

随机变量Y的边缘分布列

$$P(Y=y_i)=\sum_{i=1}^{+\infty}P(X=x_i,Y=y_j)=\sum_{i=1}^{+\infty}p_{ij}=p_{\cdot j}$$

边缘分布列

二维随机变量联合和边缘分布表示在同一个表格

$X \backslash Y$	y_1	y_2	$\cdots$	y_j	$\cdots$	$p_{i\cdot}$
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1j}	$\cdots$	$p_{1\cdot}$
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2j}	$\cdots$	$p_{2\cdot}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
x_i	p_{i1}	p_{i2}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$	$p_{i\cdot}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$p_{\cdot j}$	$p_{\cdot 1}$	$p_{\cdot 2}$	$\cdots$	$p_{\cdot j}$	$\cdots$	1

例题

有三个数1,2,3，随机变量X表示从这三个数中随机地抽取一个数，随机变量Y表示从1到X中随机抽取一个数．求(X,Y)的联合分布列和边缘分布列

离散随机变量的独立性

对离散型随机变量(X, Y), 若对所有(x_i, y_j)有

$$P\left(X = x_i, Y = y_j\right) = P(X = x_i)P\left(Y = y_j\right)$$

即$p_{ij} = p_{i\cdot}\, p_{\cdot j}$，称**离散随机变量X与Y相互独立**

定理：对离散型随机变量(X, Y), 以下两种定义等价

$$p_{ij} = p_{i\cdot}\, p_{\cdot j} \leftrightarrow F\left(x_i, y_j\right) = F_X(x_i)\, F_Y\left(y_j\right)$$

离散随机变量的独立性

定理： 设离散随机变量X和Y独立, 则对任意集合$A \in \mathrm{R}$, $B \in \mathrm{R}$, 有事件$X \in A$和$Y \in B$独立

例题： 设离散型随机变量X, Y独立, 求解(X, Y)的联合分布列

$X \backslash Y$	y_1	y_2	y_3	$p_{i\cdot}$
x_1		$1/8$		
x_2	$1/8$			
$p_{\cdot j}$	$1/6$			

例题

将两个球A,B放入编号为1,2,3的三个盒子中, 用随机变量X放入1号盒的球数, 用随机变量Y表示放入2号盒的球数, 判断X和Y是否独立