数理逻辑定义汇总

2015-11-23 | Logic

逻辑学真是博大精深，
first-order logic， propositional logic， predicate logic，
mathematical logic， second-order Logic， intuitionistic logic，
modal logic， free logic， plural logic…

所涉及的内容也很广，
set theory， proof theory， model theory， recursion theory，
theory of computation， computability and decidability…

学习它，对**数学**，**计算机科学**或其他学科都有指导意义。

例如，哥德尔协调性定理指出了公理化方法的局限性，
它告诉我们，**在理论上就不能通过逻辑推理解决所有的问题**，
必要时，要通过构造模型来进行检验。
对软件进行测试，就是这样的一个例子。

例如，**类型系统**，相当于加在程序语言语法层面上的(谓词)逻辑，
类型系统的**可靠性**保证了语法正确的程序，
语义上也是满足规范的。

这样的例子还有很多，
实际工作中，只有**见多识广**，站在更高的角度，
才能做到庖丁解牛，**游刃有余。**

到此，我们还是从一阶谓词逻辑开始，慢慢打好基础吧。
以下摘自《数理逻辑》——李未

一阶语言的定义

每个一阶语言的字符集由两类符号集合组成。
一类称为逻辑符号集合，另一类称为非逻辑符号集合。

逻辑符号集合包括：
V：变元符号集合，$x_1, x_2, ..., x_n, ...$
C：逻辑连接词符号集合，$\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$
Q：量词符号集合，$\forall, \exists$
E：等词符号集合，$\doteq$
P：括号集合，$(,)$

非逻辑符号集合包括：
$\mathscr{L}_c$：常元符号集合，$c_1, c_2, ...$
$\mathscr{L}_f$：函数符号集合，$f_1, f_2, ...$
$\mathscr{L}_P$：谓词符号集合，$P_1, P_2, ...$

例子： 初等算术语言$\mathscr{A}$
初等算术语言是一个一阶语言，
它的常元符号集为$\{0\}$，
函数符号集为$\{S, +, \cdot\}$，
谓词符号集合为$\{<\}$。

项

一阶语言$\mathscr{L}$中的项被下述三个规则归纳的定义：
T_1：每一个常元是一个项
T_2：每一个变元是一个项
T_3：如果$t_1, ..., t_n$是项，而f是一个n元函数符号，那么，$ft_1 \cdots t_n$是一个项

此定义也可以表述成下述形式：
$t ::= c|x|ft_1 \cdots t_n$

例子： $\mathscr{A}$的项
$S0, Sx_1, +S0SSx, \cdot x_1 + Sx_1x_2$

逻辑公式

语言$\mathscr{L}$中的逻辑公式，简称**公式**，用大写字母$A, B, ...$表示，并用下述五条规则归纳的定义：

F_1：如果t_1和t_2为项，那么$t_1 \doteq t_2$是公式
F_2：如果$t_1, ..., t_n$为项，而R是一个n元谓词，那么$Rt_1 \cdots t_n$是公式
F_3：如果A是公式，则$\neg A$是公式
F_4：若A, B是公式，则$A \wedge B, A \vee B, A \rightarrow B, A \leftrightarrow B$都是公式
F_5：若A是公式并且x是一个变元，那么$\forall x A$和$\exists x A$也是公式，x称为**约束变元**

上述结构归纳定义的Backus范式为：
$A ::= t_1 \doteq t_2 | Rt_1 \cdots t_n | \neg A | A \wedge B | A \vee B | A \rightarrow B | A \leftrightarrow B | \forall x A | \exists x A$

例子：$\mathscr{A}$的公式
$\forall x \neg (Sx \doteq 0), \forall x \forall y (< xy \rightarrow (\exists (y \doteq +xz)))$

$\mathscr{L}$的结构

一阶语言$\mathscr{L}$的**结构**M是一个偶对，记为$M = (\mathbb{M}, I)$，其中，
（1）$\mathbb{M}$是一个非空集合，称为**论域**
（2）I是从$\mathscr{L}$到$\mathbb{M}$的映射，称为**解释**，记为$I : \mathscr{L} \rightarrow \mathbb{M}$，它满足下面三个条件
a) 对$\mathscr{L}$中的每一个常元符号c，$I(c)$是$\mathbb{M}$中的元素
b) 对$\mathscr{L}$中的每一个n元函数符号f，$I(f)$是$\mathbb{M}$上的n元函数
c) 对$\mathscr{L}$中的每一个n元谓词符号P，$I(P)$是$\mathbb{M}$上的一个n元关系

例子：$\mathscr{A}$的结构
$\mathscr{A}$的常元符号为0，
函数符号有$\{S, +, \cdot\}$，
谓词符号只有一个，它是$<$。

我们定义偶对$N = (\mathbb{N}, I)$，其中论域$\mathbb{N}$为自然数系。
令s为$\mathbb{N}$上的加1函数，即$s(x) = x + 1$，
$+, \cdot$代表$\mathbb{N}$上的加法和乘法，
$<$为$\mathbb{N}$上的小于关系。

我们定义解释映射I如下：
$I(0)=0, I(S)=s, I(+)=+, I(\cdot)=\cdot, I(<)=<$

解释映射I将常元符号0解释为自然数0，
将一元函数符号S解释为自然数集合上的加1运算s，
将二元函数符号$+$和·分别解释为自然数集合上的加法和乘法，
将二元谓词符号$<$解释为自然数集合上的小于关系，
而N是初等算术语言$\mathscr{A}$的一个结构。

赋值

赋值σ是一个定义域为变元集合V，值域为$\mathbb{M}$的一个映射，记为$\sigma: V \rightarrow \mathbb{M}$。
赋值σ把$\mathscr{L}$中的每一个变元x，赋以论域$\mathbb{M}$中的一个元素$a \in \mathbb{M}$，
记为$\sigma(x)=a$。

模型

给定一阶语言$\mathscr{L}$，以及它的结构M和赋值σ，
偶对(M, σ)称为$\mathscr{L}$的一个**模型**。

项的语义

给定一阶语言$\mathscr{L}$，结构$M=(\mathbb{M}, I)$和赋值$\sigma: V \rightarrow \mathbb{M}$。
在模型(M, σ)下，项t的语义是$\mathbb{M}$中的一个元素，它用$t_{M[\sigma]}$表示，并被归纳的定义：
（1）$x_{M[\sigma]}=\sigma(x)$，x为变元符号
（2）$c_{M[\sigma]}=c_M$，c为常元符号
（3）$(f t_1 \cdots t_n)_{M[\sigma]}=f_M((t_1)_{M[\sigma]}, \cdots(t_n)_{M[\sigma]})$

例子：$\mathscr{A}$项的语义
$(+x_1 S x_7)_{N[\sigma]}=(x_1)_{N[\sigma]}+(S x_7)_{N[\sigma]}=1+((x_7)_{N[\sigma]}+1)=1+(7+1)=9$

逻辑连接词符号的语义

为了避免逻辑连接词符号的多义性，我们把每一个逻辑连接词符号的语义都定义为一个真值函数，
此函数的定义域是一个真值集合或两个真值集合的笛卡尔积，而函数值是一个真假值。

对于一阶语言而言，逻辑连接词符号$\neg$的真值函数为$B_\neg$，
其自变量是X，X只能取T和F，
而函数值$B_\neg(X)$由下述真值表定义：
$B_\neg(T)=F, B_\neg(F)=T$

二元函数$B_\wedge, B_\vee, B_\rightarrow, B_\leftrightarrow$分别为逻辑连接词符号$\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$的真值函数。

公式的语义

设M和σ分别为一阶语言$\mathscr{L}$的结构和赋值，而A为$\mathscr{L}$的公式。
公式A在模型(M,σ)下的语义是一个真假值，用$A_{M[\sigma]}$表示，被归纳的定义如下：

(1) $(Pt_1\cdots t_n)_{M[\sigma]} = P_M((t_1)_{M[\sigma]},\cdots,(t_n)_{M[\sigma]})$

(2) $(t_1 \doteq t_2)_{M[\sigma]} = \begin{cases} T, & \text{if } (t_1)_{M[\sigma]} = (t_2)_{M[\sigma]} \\ F, & \text{otherwise} \end{cases}$

(3) $(\neg A)_{M[\sigma]} = B_\neg(A_{M[\sigma]})$

(4) $(A\vee B)_{M[\sigma]} = B_\vee(A_{M[\sigma]}, B_{M[\sigma]})$

(5) $(A\wedge B)_{M[\sigma]} = B_\wedge(A_{M[\sigma]}, B_{M[\sigma]})$

(6) $(A\rightarrow B)_{M[\sigma]} = B_\rightarrow(A_{M[\sigma]}, B_{M[\sigma]})$

(7) $(A\leftrightarrow B)_{M[\sigma]} = B_\leftrightarrow(A_{M[\sigma]}, B_{M[\sigma]})$

(8) $(\forall x_i A)_{M[\sigma]} = \begin{cases} T, & \forall a\in M, A_{M[\sigma[x_i:=a]]} = T \\ F, & \text{otherwise} \end{cases}$

(9) $(\exists x_i A)_{M[\sigma]} = \begin{cases} T, & \exists a\in M, A_{M[\sigma[x_i:=a]]} = T \\ F, & \text{otherwise} \end{cases}$

可满足性

给定一阶语言$\mathscr{L}$和它的公式A以及公式集合Γ。
如果存在模型(M,σ)，使得$A_{M[\sigma]}=T$成立，
那么称公式A关于模型(M,σ)是**可满足的**，
简称A可满足，也称为模型(M,σ)满足A，记为$M\models_\sigma A$。
如果A是一个语句，那么记为A，记为$M\models A$

如果Γ中的每一个公式关于模型(M,σ)都是可满足的，即，
$M\models_\sigma A$对于任意$A\in\Gamma$成立，
那么称为公式集合Γ关于模型(M,σ)可满足，
简称公式集合Γ可满足，

也称模型(M,σ)满足公式集合Γ，或(M,σ)是Γ的模型，记为$M\models_\sigma\Gamma$。
如果Γ是由语句组成的集合，那么记为$M\models\Gamma$。

永真性

称公式A是**永真的**或有效的，如果A对$\mathscr{L}$的任意模型(M,σ)均可满足，
即，对任意结构M和赋值σ，$M\models_\sigma A$成立，记为$\models A$。
称公式集合Γ是永真的或有效的，如果Γ中的每一个公式A都是永真的，记为$\models\Gamma$
永真公式，也称为重言式，是与模型无关的公式，它们在任何模型下都为真。

例子： 重言式
$A\vee\neg A,\forall x(x\doteq x)$

逻辑结论

设A为公式，Γ为公式集合，如果M为任意结构，σ为任意赋值，并且，
如果$M\models_\sigma\Gamma$成立，则有$M\models_\sigma A$成立，
那么称A是Γ的**逻辑结论**或语义结论，记为$\Gamma\models A$，也称$\Gamma\models A$有效。

注： 符号$\models$可以出现在4种不同类型的语义关系式中，它们是，
$M\models_\sigma A,M\models A,\models A,\Gamma\models A$
$\models$在每种语义关系式中的含义不同，
区别这些关系式的简单办法是，
当M和σ同时出现时，表示此式仅对给定的M和σ成立，
当σ不出现时，表示此式对任意σ成立，
当M及σ均不出现时，表示此式对任意M和任意σ成立。

$\Gamma\models A$也是一个语义关系式，它表示对任意M和任意σ，
如果Γ为真，那么A也为真。

序贯

设Γ,Δ为公式的有穷集合，$\Gamma\vdash\Delta$称为**序贯。**
Γ称为序贯的前提，Δ称为序贯的结论。

公理

设$\Gamma, \Delta, \Lambda, \Theta$为有穷公式集合，$A$为公式，

则序贯$\Gamma, A, \Delta \vdash \Lambda, A, \Theta$称为**公理。**

注：公理序贯之所以成立，是因为证明结论中至少有一个公式包含在公理序贯的前提之中。

G推理系统

（1）¬规则

$\neg - L : \frac{\Gamma,\Delta\vdash A,\Lambda}{\Gamma,\neg A,\Delta\vdash\Lambda}$

$\neg - R : \frac{A,\Gamma\vdash\Lambda,\Delta}{\Gamma\vdash\Lambda,\neg A,\Delta}$

（2）∨规则

$\vee - L : \frac{\Gamma,A,\Delta\vdash\Lambda \quad \Gamma,B,\Delta\vdash\Lambda}{\Gamma,A\vee B,\Delta\vdash\Lambda}$

$\vee - R : \frac{\Gamma\vdash\Lambda,A,B,\Theta}{\Gamma\vdash\Lambda,A\vee B,\Theta}$

（3）∧规则

$\wedge - L : \frac{\Gamma,A,B,\Delta\vdash\Lambda}{\Gamma,A\wedge B,\Delta\vdash\Lambda}$

$\wedge - R : \frac{\Gamma\vdash\Lambda,A,\Theta \quad \Gamma\vdash\Lambda,B,\Theta}{\Gamma\vdash\Lambda,A\wedge B,\Theta}$

（4）→规则

$\rightarrow -L : \frac{\Gamma,\Delta\vdash A,\Lambda \quad B,\Gamma,\Delta\vdash\Lambda}{\Gamma,A\rightarrow B,\Delta\vdash\Lambda}$

$\rightarrow -R : \frac{A,\Gamma\vdash B,\Lambda,\Theta}{\Gamma\vdash\Lambda,A\rightarrow B,\Theta}$

（5）∀规则

$\forall - L : \frac{\Gamma,A[t/x],\forall xA(x),\Delta\vdash\Lambda}{\Gamma,\forall xA(x),\Delta\vdash\Lambda}$

$\forall - R : \frac{\Gamma\vdash\Lambda,A[y/x],\Theta}{\Gamma\vdash\Lambda,\forall xA(x),\Theta}$

（6）∃规则

$\exists - L : \frac{\Gamma,A[y/x],\Delta\vdash\Lambda}{\Gamma,\exists xA(x),\Delta\vdash\Lambda}$

$\exists - L : \frac{\Gamma,A[y/x],\Delta\vdash\Lambda}{\Gamma,\exists xA(x),\Delta\vdash\Lambda}$

可靠性，紧致性，协调性，完全性

可靠性

如果序贯$\Gamma \vdash \Lambda$可证，那么$\Gamma \models \Lambda$成立。

紧致性

如果Γ是一个公式集合，A是一个公式，并且序贯$\Gamma \vdash A$可证，

那么必然存在有穷公式集合Δ，使得$\Delta \subseteq \Gamma$并且$\Delta \vdash A$可证。

协调性

设Γ为公式集合，如果不存在一个公式A使得序贯$\Gamma\vdash A$与$\Gamma\vdash\neg A$均可证，

那么称Γ是协调的。

完全性

令Γ为一个公式集合，A为一个公式，

如果$\Gamma\models A$成立，那么$\Gamma\vdash A$可证。

定理：令Γ为一个公式集合，A为一个公式，

（1）$\Gamma\models A$有效，当且仅当$\Gamma\vdash A$

（2）Γ可满足，当且仅当Γ协调

形式理论

设Γ是一阶语言$\mathscr{L}$的有穷或可数无穷的语句集合，

如果Γ协调，则称Γ是一阶语言的形式理论，简称**形式理论。**

而称Γ中的语句为Γ的**公理。**

如果Γ是一个形式理论，

那么称语句集合，$Th(\Gamma)=\{A|A$是$\mathscr{L}$的语句，并且$\Gamma\vdash A$可证$\}$，

为Γ的**理论闭包。**

如果$\Gamma=\emptyset$，那么，$Th(\emptyset)=\{A|A$是$\mathscr{L}$的语句，并且$\vdash A$可证$\}$，

是由全体重言式组成的集合。

如果M是$\mathscr{L}$的模型，并且$M\models\Gamma$，那么称M是Γ的模型。

关于模型的形式理论

如果M是一阶语言$\mathscr{L}$的模型，那么称语句集合，

$Th(M)=\{A|A$是$\mathscr{L}$的语句，并且$M\models A\}$

为$\mathscr{L}$关于模型M的形式理论。

形式理论的完全性

称形式理论Γ是完全的，如果对任意语句A，
$\Gamma \vdash A$及$\Gamma \vdash \neg A$中必有一个可证。

函数的可表示性

设$f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$是$\mathbb{N}$上的$k$元函数，
如果存在$\mathscr{A}$公式$A(x_1, ..., x_{k+1})$，使得对任意自然数$n_1, ..., n_{k+1}$，
如果$f(n_1, ..., n_k) = n_{k+1}$，那么$\Pi \vdash A[S^{n_1}0, ..., S^{n_{k+1}}0]$可证
如果$f(n_1, ..., n_k) \neq n_{k+1}$，那么$\Pi \vdash \neg A[S^{n_1}0, ..., S^{n_{k+1}}0]$可证
在这种情况下，称函数f在Π中**可表示**，
并称公式$A(x_1, ..., x_k, x_{k+1})$是函数$f$在$\Pi$中的**表示。**

定理：如果$f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$是$\mathbb{N}$上的$k$元可计算函数，
那么函数f在Π中可表示。

关系的可表示性

设r是$\mathbb{N}$上的k元关系，
如果存在$\mathscr{A}$公式$A(x_1, ..., x_{k+1})$，使得对任意自然数$n_1, ..., n_{k+1}$，有
如果$r(n_1, ..., n_k) = n_{k+1}$，那么$\Pi \vdash A[S^{n_1}0, ..., S^{n_{k+1}}0]$可证
如果$r(n_1, ..., n_k) \neq n_{k+1}$，那么$\Pi \vdash \neg A[S^{n_1}0, ..., S^{n_{k+1}}0]$可证
在这种情况下，称关系r在Π中**可表示**，
并称公式$A(x_1, ..., x_k, x_{k+1})$在$\Pi$中表示关系$r$。

定理：如果$r : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$是$\mathbb{N}$上的$k$元可判定关系，
那么r在Π中可表示。

哥德尔定理

哥德尔不完全性定理

如果Γ是一个有穷并包含初等算术Π的形式理论，
那么Γ是一个不完全的形式理论。

哥德尔协调性定理

如果形式理论Γ包含初等算术Π，

那么Π的协调性不能在Γ中被证明。

结语

以上，只是对谓词逻辑中用到的部分公式，进行了整理，
对建立**用证明论和模型论的观点来理解公理系统**，是很有帮助的。
然而，从更高的角度来看，有些观点很有可能就是**错误**的，
因此，此篇只是一个开始，督促我朝着更广阔的方向努力学习。

参考

数理逻辑
Teach Yourself Logic 2015
logic and structure

‹ 论证与直觉　　　　问题洁癖 ›