矩阵计算 **人工智能学院**

Homework 2

Instructor: 李宇峰 *Name:* 方盛俊, *StudentId:* 201300035

1.

对于 $\forall \alpha, \beta \in R, \forall x, y \in R^2$ 有

$$
\begin{aligned}
& \alpha \otimes (x \oplus y) \\
&= (\alpha(x_1 + y_1), \alpha(x_2 + y_2 + x_1 y_1) + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}(x_1 + y_1)^2) \\
&= (\alpha(x_1 + y_1), \alpha(x_2 + y_2) + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}(x_1^2 + y_1^2) + \alpha x_1 y_1 + \alpha(\alpha-1) x_1 y_1) \\
&= (\alpha x_1 + \alpha y_1, \alpha x_2 + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x_1^2 + \alpha y_2 + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} y_1^2 + \alpha^2 x_1 y_1) \\
&= (\alpha x_1, \alpha x_2 + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x_1^2) \oplus (\alpha y_1, \alpha y_2 + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} y_1^2) \\
&= (\alpha \otimes x) \oplus (\alpha \otimes y)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& (\alpha + \beta) \otimes x \\
&= ((\alpha+\beta) x_1, (\alpha+\beta) x_2 + \frac{(\alpha+\beta)((\alpha+\beta)-1)}{2} x_1^2) \\
&= ((\alpha+\beta) x_1, \alpha x_2 + \beta x_2 + \frac{\alpha(\alpha-1) + \beta(\beta-1) + 2\alpha\beta}{2} x_1^2) \\
&= (\alpha x_1 + \beta x_1, \alpha x_2 + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x_1^2 + \beta x_2 + \frac{\beta(\beta-1)}{2} x_1^2 + \alpha\beta x_1^2) \\
&= (\alpha x_1, \alpha x_2 + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x_1^2) \oplus (\beta x_1, \beta x_2 + \frac{\beta(\beta-1)}{2} x_1^2) \\
&= (\alpha \otimes x) \oplus (\beta \otimes x)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& \alpha \otimes (\beta \otimes x) \\
&= \alpha \otimes (\beta x_1, \beta x_2 + \frac{\beta(\beta-1)}{2} x_1^2) \\
&= (\alpha\beta x_1, \alpha(\beta x_2 + \frac{\beta(\beta-1)}{2} x_1^2) + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}(\beta x_1)^2) \\
&= (\alpha\beta x_1, \alpha\beta x_2 + \frac{\alpha\beta^2 - \alpha\beta}{2} x_1^2 + \frac{\alpha^2\beta^2 - \alpha\beta^2}{2} x_1^2) \\
&= (\alpha\beta x_1, \alpha\beta x_2 + \frac{\alpha^2\beta^2 - \alpha\beta}{2} x_1^2) \\
&= (\alpha\beta x_1, \alpha\beta x_2 + \frac{\alpha\beta(\alpha\beta-1)}{2} x_1^2) \\
&= (\alpha\beta) \otimes x
\end{aligned}
$$

综上, 对于上述定义的加法和数乘运算的集合 R^2, 构成线性空间.

2.

(1)

由 T 是 $R^3 \to R^3$ 的线性映射可知

$$T(i) = T((i+j+k)-(j+k)) = T(i+j+k) - T(j+k) = -i+j-k$$

$$T(j) = T((j+k)-k) = T(j+k) - T(k) = i - (2i+3j+5k) = -i-3j-5k$$

由于 T 在基 $\{i,j,k\}$ 下的矩阵 A 满足

$$\begin{bmatrix} T(i) & T(j) & T(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i & j & k \end{bmatrix} A$$

因此我们有

$$\begin{bmatrix} -i+j-k & -i-3j-5k & 2i+3j+5k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i & j & k \end{bmatrix} A$$

不妨令 $i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}, j = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}, k = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, 则有

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 3 \\ -1 & -5 & 5 \end{bmatrix}$$

(2)

由于矩阵 A 的行列式不为零

$$\det(\begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 3 \\ -1 & -5 & 5 \end{bmatrix}) = -8 \neq 0$$

因此 A 是一个满秩矩阵, 则该矩阵的零空间为 $\{\mathbf{0}\}$, 零空间维度是 0; 像空间为 R^3, 像空间维度为 3.

3.

由于 uv^{T} 与 $u^{\mathrm{T}}v$ 有相同的非零特征值, 且 1×1 的矩阵 $u^{\mathrm{T}}v$ 的特征值就是它自身, 所不同的是零特征值的重数不同.

因此 uv^{T} 的一个特征值是是 $u^{\mathrm{T}}v$, 重数为 1, 剩下的特征值为 0, 且重数为 $n-1$.

将 uv^{T} 的特征值带入特征多项式有

$$\det(\lambda I - uv^{\mathrm{T}}) = \prod_{i=1}^{n} (\lambda - \lambda_i) = \lambda^{n-1}(\lambda - u^{\mathrm{T}}v)$$

带入 $\lambda = -1$ 有

$$\det(-I - uv^{\mathrm{T}}) = (-1)^{n-1}(-1 - u^{\mathrm{T}}v) = (-1)^n(1 + u^{\mathrm{T}}v)$$

因此有

$$\det(I + uv^{\mathrm{T}}) = (-1)^n \det(-I - uv^{\mathrm{T}}) = 1 + u^{\mathrm{T}}v$$

4.

我们先证明 $\mathrm{tr}(AB)=\mathrm{tr}(BA)$, 由迹的定义可得

$$\mathrm{tr}(AB)=\sum_{i=1}^{m}(AB)_{ii}=\sum_{i=1}^{m}(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{ji})$$

$$\mathrm{tr}(BA)=\sum_{j=1}^{n}(BA)_{jj}=\sum_{j=1}^{n}(\sum_{i=1}^{m}b_{ji}a_{ij})$$

交换求和顺序即可得 $\mathrm{tr}(AB)=\mathrm{tr}(BA)$.

因此我们有

$$\mathrm{tr}(ABC)=\mathrm{tr}((AB)C)=\mathrm{tr}(C(AB))=\mathrm{tr}(CAB)$$

$$\mathrm{tr}(CAB)=\mathrm{tr}((CA)B)=\mathrm{tr}(B(CA))=\mathrm{tr}(BCA)$$

因此 $\mathrm{tr}(ABC)=\mathrm{tr}(BCA)=\mathrm{tr}(CAB)$.

5.

(1)

设 A 特征值 λ_i 对应的特征向量为 u_i, 则有

$$Au_i=\lambda_i u_i$$

并且我们有

$$Iu_i=u_i$$

则有

$$Iu_i+cAu_i=(I+cA)u_i=u_i+c\lambda_i u_i=(1+c\lambda_i)u_i$$

因此有

$$\mathrm{eig}(I+cA)=1+c\lambda_i$$

(2)

同理我们有

$$Au_i-cIu_i=(A-cI)u_i=\lambda_i u_i-cu_i=(\lambda_i-c)u_i$$

因此有

$$\mathrm{eig}(A-cI)=\lambda_i-c$$

6.

(1)

可控性矩阵 $P_c = [B, AB, A^2B, \cdots, A^{n-1}B]$. 由于

$$AB = \begin{bmatrix} 0.9 & 1 & 0 \\ 0 & -0.9 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -0.9 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

$$A^2B = \begin{bmatrix} 0.9 & 1 & 0 \\ 0 & -0.9 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -0.9 \\ 0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.81 \\ 0.25 \end{bmatrix}$$

则有

$$P_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -0.9 & 0.81 \\ 1 & 0.5 & 0.25 \end{bmatrix}$$

由于

$$\det(P_c) = \det(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -0.9 & 0.81 \\ 1 & 0.5 & 0.25 \end{bmatrix}) = \frac{14}{25} \neq 0$$

因此 $\mathrm{rank}(P_c) = 3$, 则 (A, B) 是可控的.

(2)

可控性矩阵 $P_c = [B, AB, A^2B, \cdots, A^{n-1}B]$. 由于

$$AB = \begin{bmatrix} 0.8 & -0.3 & 0 \\ 0.2 & 0.5 & 1 \\ 0 & 0 & -0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.7 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A^2B = \begin{bmatrix} 0.8 & -0.3 & 0 \\ 0.2 & 0.5 & 1 \\ 0 & 0 & -0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.7 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.19 \\ 0.45 \\ 0 \end{bmatrix}$$

则有

$$P_c = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 & 0.19 \\ 1 & 0.7 & 0.45 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

由于

$$\det(P_c) = \det(\begin{bmatrix} 1 & 0.5 & 0.19 \\ 1 & 0.7 & 0.45 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}) = 0$$

因此 $\mathrm{rank}(P_c) \neq 3$, 则 (A, B) 是不可控的.

7.

矩阵 A 的特征多项式为

$$\det(\lambda I-A)=\det(\begin{bmatrix}\lambda-3 & -2 & 2\\ c & \lambda+1 & -c\\ -4 & -2 & \lambda+3\end{bmatrix})=(\lambda-1)(\lambda+1)^2$$

因此矩阵 A 的特征值为 -1 和 1, 其中特征值 -1 的代数重数为 2, 特征值 1 的代数重数为 1.

要使得 A 可对角化, 则需要特征值 -1 的几何重数为 2.

我们带入 $\lambda=-1$ 可得

$$\lambda I-A=\begin{bmatrix}-4 & -2 & 2\\ c & 0 & -c\\ -4 & -2 & 2\end{bmatrix}$$

想要让其几何重数为 2, 则要让矩阵 $\lambda I-A$ 的基础解系的向量个数为 2 (即解空间维度为 2), 即矩阵 $\lambda I-A$ 的秩为 $3-2=1$, 由此可得 $c=0$.

因此矩阵 A 为

$$A=\begin{bmatrix}3 & 2 & -2\\ 0 & -1 & 0\\ 4 & 2 & -3\end{bmatrix}$$

对其进行特征值分解可得

带入 $\lambda=-1$ 可得 $\lambda I-A$ 基础解系 $\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}\\ 1\\ 0\end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\ 0\\ 1\end{bmatrix}$, 也就是 -1 对应的特征向量.

带入 $\lambda=1$ 可得 $\lambda I-A$ 基础解系 $\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 1\end{bmatrix}$, 也就是 1 对应的特征向量.

因此借助特征值分解可得

$$B=P^{-1}AP=\begin{bmatrix}1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}3 & 2 & -2\\ 0 & -1 & 0\\ 4 & 2 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}$$

也即 $P=\begin{bmatrix}1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$ 与 $B=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}$.

8.

该二次曲面方程改写成二次型形式为

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} 1 & b & 1 \\ b & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 4$$

而椭圆柱面方程的二次型形式为

$$\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \psi \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \psi \end{bmatrix} = 4$$

由于正交变换 P 满足

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \psi \end{bmatrix}$$

因此带入有

$$\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \psi \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \left(P^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} 1 & b & 1 \\ b & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} P \right) \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \psi \end{bmatrix} = 4$$

即有

$$P^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} 1 & b & 1 \\ b & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

令 $A = \begin{bmatrix} 1 & b & 1 \\ b & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ 与 $\Sigma = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$, 则由上式与对称矩阵的性质我们可知 Σ 是 A 进行特征值分解后得到的对角阵, 而 $0, 1, 4$ 分别为 A 的三个不同的特征值.

对 A 进行特征值分解有特征多项式

$$\det(\lambda I - A) = -a\lambda^2 + 2a\lambda - b^2\lambda + b^2 - 2b + \lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 1 = 0$$

将 $0, 1, 4$ 分别带入 λ 可得

$$\begin{cases} b^2 - 2b + 1 = 0 \\ a - 2b - 1 = 0 \\ -8a - 3b^2 - 2b + 29 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 1 \end{cases}$$

即有 $a = 3$ 与 $b = 1$ 以及原二次曲面方程

$$x^2 + 3y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz = 4$$

带入 $\lambda_1 = 0$ 解 $(\lambda_1 I - A)u_1 = 0$ 可得特征向量 $u_1 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$.

带入 $\lambda_2 = 1$ 解 $(\lambda_2 I - A)u_2 = 0$ 可得特征向量 $u_2 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$.

带入 $\lambda_3 = 4$ 解 $(\lambda_3 I - A)u_3 = 0$ 可得特征向量 $u_3 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{2\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{6} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$.

因此可得正交矩阵 P 为

$$P = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{3} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} \end{bmatrix}$$

9.

(1)

要证 $HH^{\mathrm{T}} = I_n$, 即证 H 是一个正交矩阵.

首先证明 H 的相同行向量的内积为 1:

$h^{\mathrm{T}}h = n^{-\frac{1}{2}} \cdot n^{-\frac{1}{2}} \cdot 1_n^{\mathrm{T}} 1_n = n^{-1} \cdot n = 1$

$K_i K_i^{\mathrm{T}} = \dfrac{1}{\sqrt{\lambda_i}} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{\lambda_i}} (1_i^{\mathrm{T}} 1_i + (-i)^2) = 1$

其次证明 H 的不同行向量的内积为 0:

$h^{\mathrm{T}} K_i^{\mathrm{T}} = n^{-\frac{1}{2}} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{\lambda_i}} \cdot 1_i^{\mathrm{T}} 1_i + n^{-\frac{1}{2}} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{\lambda_i}} \cdot (-i) = 0$

不妨令 $j > i$, 则有

$K_i^{\mathrm{T}} K_j = \dfrac{1}{\sqrt{\lambda_i}} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{\lambda_i}} (1_i^{\mathrm{T}} 1_i + (-i) \cdot 1 + 0) = 0$

因此我们有 $HH^{\mathrm{T}} = I_n$.

(2)

首先证明

$$n\bar{x}_n^2 = x^{\mathrm{T}} h h^{\mathrm{T}} x = (n^{-\frac{1}{2}} 1_n^{\mathrm{T}} x)^{\mathrm{T}} n^{-\frac{1}{2}} 1_n^{\mathrm{T}} x = \frac{1}{n} (\sum_{i=1}^{n} x_i)^2 = n(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i)^2$$

其次证明 $S_n = x^{\mathrm{T}} K^{\mathrm{T}} K x$.

由于 H 是正交矩阵, 因此也有

$$H^{\mathrm{T}} H = \begin{bmatrix} h & K^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h^{\mathrm{T}} \\ K \end{bmatrix} = hh^{\mathrm{T}} + K^{\mathrm{T}} K = I_n$$

则有

$$K^{\mathrm{T}} K = I_n - hh^{\mathrm{T}}$$

因此我们有

$$
\begin{aligned}
x^{\mathrm{T}}K^{\mathrm{T}}Kx &= x^{\mathrm{T}}(I_n - hh^{\mathrm{T}})x \\
&= x^{\mathrm{T}}I_n x - x^{\mathrm{T}}hh^{\mathrm{T}}x \\
&= (\sum_{i=1}^{n} x_i^2) - n\bar{x}_n^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}_n)^2 \\
&= S_n
\end{aligned}
$$

(3)

根据 K_n 和 K_{n-1} 的关系

$$
K_n = \begin{bmatrix} K_{n-1} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{\lambda_{n-1}}}1_{n-1} & \frac{-(n-1)}{\sqrt{\lambda_{n-1}}} \end{bmatrix}
$$

我们令 $u = \dfrac{1}{\sqrt{\lambda_{n-1}}}\begin{bmatrix} 1_{n-1} & -(n-1) \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ 且 $K = K_n$, 则可知

$$
\begin{aligned}
S_{n-1} &= x^{\mathrm{T}}K^{\mathrm{T}}Kx - x^{\mathrm{T}}uu^{\mathrm{T}}x \\
&= S_n - (\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{\lambda_{n-1}}}x_i - \frac{n-1}{\sqrt{\lambda_{n-1}}}x_n)^2 \\
&= S_n - (\frac{n-1}{n})(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}x_i - x_n)^2 \\
&= S_n - (1 - \frac{1}{n})(\bar{x}_{n-1} - x_n)^2
\end{aligned}
$$

因此我们有

$$
S_n = S_{n-1} + (1 - \frac{1}{n})(\bar{x}_{n-1} - x_n)^2
$$

10.

(1)

由于 A 为实反对称矩阵, 则有 $A^{\mathrm{T}} = -A$.

因此有对于任意 x 有

$$
x^{\mathrm{T}}Ax = (x^{\mathrm{T}}Ax)^{\mathrm{T}} = x^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}x = -x^{\mathrm{T}}Ax
$$

因此有

$$
x^{\mathrm{T}}Ax = 0
$$

要证明 $A + I$ 非奇异, 即证明 $(A + I)x = 0$ 只有零解, 由于 $(A + I)x = 0$ 我们有

$$
x^{\mathrm{T}}(A + I)x = 0
$$

且我们有

$$x^{\mathrm{T}}(A+I)x = x^{\mathrm{T}}Ax + x^{\mathrm{T}}Ix = x^{\mathrm{T}}x$$

因此可得 $x^{\mathrm{T}}x = 0$, 即有 $x = 0$.

因此可以说明 $A+I$ 非奇异.

(2)

要证 $T = (I-A)(I+A)^{-1}$ 为正交矩阵, 即证 $T^{\mathrm{T}}T = I$ 与 $TT^{\mathrm{T}} = I$.

首先我们证明 $(I+A)(I-A) = (I-A)(I+A)$

$$(I+A)(I-A) = I - AA = (I-A)(I+A)$$

然后我们有

$$\begin{aligned} T^{\mathrm{T}}T &= ((I-A)(I+A)^{-1})^{\mathrm{T}}(I-A)(I+A)^{-1} \\ &= ((I+A)^{\mathrm{T}})^{-1}(I-A)^{\mathrm{T}}(I-A)(I+A)^{-1} \\ &= (I-A)^{-1}(I+A)(I-A)(I+A)^{-1} \\ &= (I-A)^{-1}(I-A)(I+A)(I+A)^{-1} \\ &= I \end{aligned}$$

由于 T 是方阵, 且 $T^{\mathrm{T}}T$ 说明 T 的列向量两两正交, 则有 T 满秩, 一定有 T 可逆, 设逆矩阵为 B, 且满足 $BT = TB = I$, 则有 $B = T^{\mathrm{T}}$, 带入可得

$$TT^{\mathrm{T}} = I$$

因此 T 为正交矩阵.

(3)

对 $A = (I-S)(I+S)^{-1}$ 转换以求解 S 可得

$$A(I+S) = I - S \Rightarrow A + AS = I - S \Rightarrow (A+I)S = I - A$$

因此有

$$S = (I+A)^{-1}(I-A)$$

下面证明 S 是实反对称矩阵

$$\begin{aligned} S^{\mathrm{T}} &= (I-A^{\mathrm{T}})(I+A^{\mathrm{T}})^{-1} \\ &= (I+A^{\mathrm{T}})^{-1} - A^{\mathrm{T}}(I+A^{\mathrm{T}})^{-1} \\ &= (I+A^{\mathrm{T}})^{-1}A^{-1}A - A^{-1}(I+A^{\mathrm{T}})^{-1} \\ &= (A(I+A^{\mathrm{T}}))^{-1}A - ((I+A^{\mathrm{T}})A)^{-1} \\ &= (A+I)^{-1}A - (A+I)^{-1} \\ &= -(A+I)^{-1}(I-A) \\ &= -S \end{aligned}$$

11.

由题意可知

$$\begin{cases} Ax = ax \\ A^{\mathrm{T}}y = by \\ a - b \neq 0 \end{cases}$$

因此我们有

$$x^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}y = (Ax)^{\mathrm{T}}y = ax^{\mathrm{T}}y$$

以及

$$x^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}y = x^{\mathrm{T}}(A^{\mathrm{T}}y) = bx^{\mathrm{T}}y$$

两式相减则有

$$ax^{\mathrm{T}}y - bx^{\mathrm{T}}y = (a-b)x^{\mathrm{T}}y = 0$$

由于 $a - b \neq 0$, 则有 x 和 y 的内积

$$x^{\mathrm{T}}y = 0$$

因此 x 和 y 正交.