第一章

1. 对任意的$x, y \in R^2$，$x=(x_1,x_2)$， $y=(y_1,y_2)$，定义x与y的和为

$$x \oplus y=(x_1+y_1, x_2+y_2+x_1y_1)$$

对于任意的数$k \in R$，定义k与x的数乘为

$$k \otimes x=(kx_1, kx_2+\frac{k(k-1)}{2}x_1^2)$$

问：对于上述定义的加法和数乘运算的集合R^2，是否构成线性空间，并说明理由。

2. 设T是$R^3 \to R^3$的线性映射，对于基$\{i,j,k\}$有

$$T(i+j+k)=j-k \quad T(j+k)=i \quad T(k)=2i+3j+5k$$

（1）确定T在基$\{i,j,k\}$下的矩阵；

（2）求该矩阵的零空间和像空间的维数。

提示：T在基$\{i,j,k\}$下的矩阵$\boldsymbol{A}$满足 $(T(i),T(j),T(k))=(i,j,k)\boldsymbol{A}$

3. 证明$det(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}^T)=1+\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{v}$。

4. 证明$tr(\boldsymbol{ABC})=tr(\boldsymbol{BCA})=tr(\boldsymbol{CAB})$。

5. 令矩阵$\boldsymbol{A}$的特征值为λ_i，证明 $\mathrm{eig}(\boldsymbol{I}+c\boldsymbol{A})=1+c\lambda_i$和 $\mathrm{eig}(\boldsymbol{A}-c\boldsymbol{I})=\lambda_i-c$。

6. 矩阵的秩在工程控制系统的设计中起着重要的作用。一个离散时间的控制系统的状态空间模型包括了差分方程

$$\boldsymbol{x}_{k+1}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_k+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}_k,\ k=0,1,\ldots$$

式中，$\boldsymbol{A} \in R^{n\times n}$，$\boldsymbol{B} \in R^{n\times m}$并且$\boldsymbol{x}_k \in R^{\mathrm{n}}$为描述系统在$k$时刻状态的向量，简称状态向量；而$\boldsymbol{u}_k \in R^m$为系统在$k$时刻的输入或控制向量。矩阵对$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$称为可控的，

若

$$\mathrm{rank}([\boldsymbol{B}, \boldsymbol{AB}, \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}, \dots, \boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{B}]) = n$$

若$(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$是可控的，则最多用$n$步可将系统控制到任意一个指定的状态$\boldsymbol{x}$。试确定以下矩阵对是否可控：

（1）$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0.9 & 1 & 0 \\ 0 & -0.9 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$;

（2）$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0.8 & -0.3 & 0 \\ 0.2 & 0.5 & 1 \\ 0 & 0 & -0.5 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$。

第二章

7.设矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -c & -1 & c \\ 4 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

求c值，使得$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$为对角矩阵。并求出矩阵$\boldsymbol{P}$和$\boldsymbol{B}$。

8.设

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \boldsymbol{P} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \psi \end{bmatrix}$$

为一正交变换，它将二次曲面方程

$$x^2 + ay^2 + z^2 + 2bxy + 2xz + 2yz = 4$$

化为椭圆柱面方程$\eta^2 + 4\psi^2 = 4$，求a, b的数值和正交矩阵$\boldsymbol{P}$。

9.一个n阶 Helmert 矩阵$\boldsymbol{H}_n$的第 1 行为$n^{-1/2}\mathbf{1}_n^{\mathrm{T}}$，其他$n-1$行具有分块形式

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}[\mathbf{1}_i^{\mathrm{T}}, -i, \mathbf{0}_{n-i-1}^{\mathrm{T}}],\ \lambda_i = i(i+1),\ i = 1, 2, \cdots, n-1$$

式中，$\mathbf{1}_i^{\mathrm{T}}$和$\mathbf{0}_i^{\mathrm{T}}$分别表示元素全部为 1 和 0 的$i$阶行向量。例如，

$$\boldsymbol{H}_4 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{4} & 1/\sqrt{4} & 1/\sqrt{4} & 1/\sqrt{4} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} & 0 \\ 1/\sqrt{12} & 1/\sqrt{12} & 1/\sqrt{12} & -3/\sqrt{12} \end{bmatrix}$$

将n阶 Helmert 矩阵分块为

$$\boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{h}^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{K} \end{bmatrix}$$

式中，$\boldsymbol{h} = n^{-1/2}\mathbf{1}$，而$\boldsymbol{K}$表示$\boldsymbol{H}$的最后$n-1$行。

（1） 证明$\boldsymbol{H}\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{I}_n$。

（2） 对于n阶向量$\boldsymbol{x}$，证明

$$n\overline{x}_n^2 = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{h}\boldsymbol{h}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$$

式中，$\overline{x}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$；并证明

$$S_n = \sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \sum_{k=1}^{n} x_k/n\right)^2$$

可以表示为

$$S_n = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}$$

提示：

$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x}_n)^2 = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}$，其中$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{I} - \frac{1}{n}\mathbf{1}_n\mathbf{1}_n^{\mathrm{T}}$为中心化矩阵。

（3） 推导递归公式

$$S_n = S_{n-1} + (1 - 1/n)(\overline{x}_{n-1} - x_n)^2$$

式中，$\overline{x}_{n-1} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1} x_i$。

10. 定义实反对称矩阵：$\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}} = -\boldsymbol{M}$，证明：

（1）若$\boldsymbol{A}$为实反对称矩阵，则$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{I}$非奇异。

（2）若$\boldsymbol{A}$为实反对称矩阵，则 Cayley 变换$\boldsymbol{T} = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{A})^{-1}$为正交矩阵。

（3）若$\boldsymbol{A}$为正交矩阵，且$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}$非奇异。证明：矩阵$\boldsymbol{A}$可表示为 Cayley 变换

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{S})(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{S})^{-1}$$

式中，$\boldsymbol{S}$为实反对称矩阵。

11. 证明：设a,b是$\boldsymbol{A}$的特征值，且$a\neq b$，x是$\boldsymbol{A}$的对应于特征值a的特征向量，y为$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$对应于特征值$b$的特征向量，则$x$与$y$正交，即$(x,y)=0$。

12. （选做）证明：对于每一个矩阵$\boldsymbol{A}$，都存在一个三角矩阵$\boldsymbol{T}$，使得$\boldsymbol{TA}$为酉矩阵。

提示：使用奇异值分解和 QR 分解。