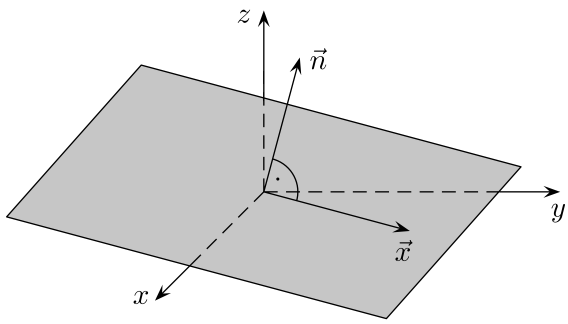
Normalenform der Ebene

Die Lage der Ebene, die durch den Ursprung verläuft, kann durch einen einzigen Vektor, den Normalenvektor $\vec{n}$, beschrieben werden, der senkrecht auf der Ebene steht.
Für einen Vektor $\vec{x}$, der zu einem Punkt auf der Ebene führt, gilt $\vec{n} \cdot \vec{x} = 0$, weil $\vec{x}$ auf $\vec{n}$ senkrecht steht.

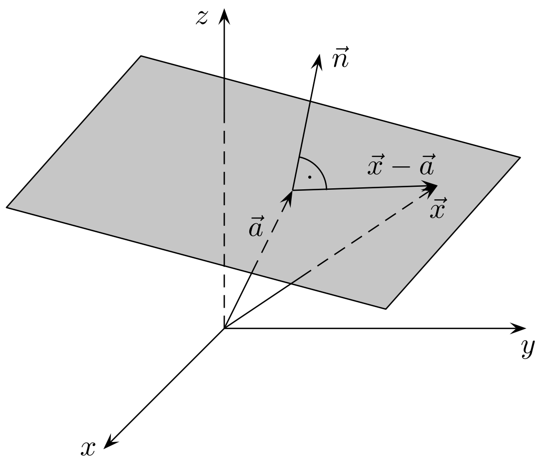


Beispiel für die *Normalenform* einer Ebene, die durch den Ursprung verläuft:

$$E: \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = 0$$

Die Lage einer beliebigen Ebene kann durch einen Normalenvektor $\vec{n}$ und einen Stützvektor $\vec{a}$ beschrieben werden.

Für einen Vektor $\vec{x}$, der zu einem Punkt auf der Ebene führt, gilt $\vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{a}) = 0$, weil $\vec{n}$ auf $\vec{x} - \vec{a}$ senkrecht steht.



Beispiel für die Normalenform:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \right] = 0 \qquad \text{oder} \qquad \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} \; - \; 14 = 0$$

1. Gegeben ist die Parameterform einer Ebene E:

   $$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

   Wie lautet die Normalenform?

Normalenform der Ebene

1. Gegeben ist die Parameterform einer Ebene E:

   $$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

   Wie lautet die Normalenform?

   Lösung:

   Der Normalenvektor, der senkrecht auf beiden Richtungsvektoren steht, wird mit dem Vektorprodukt ausgerechnet, der Stützvektor kann übernommen werden:

   $$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

   $$\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = 0 \qquad \text{oder:} \qquad \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} + 1 = 0$$

   Die (platzsparende) Koordinatenform lautet: $2x + y - 3z = 1$

Zur weiteren Übung:

2. Wie lautet die Normalenform?

   a) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

   b) $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$

Normalenform der Ebene

Zur weiteren Übung:

2. Wie lautet die Normalenform?

   a) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

   b) $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$

Lösungen:

2. a) $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - 3 = 0$

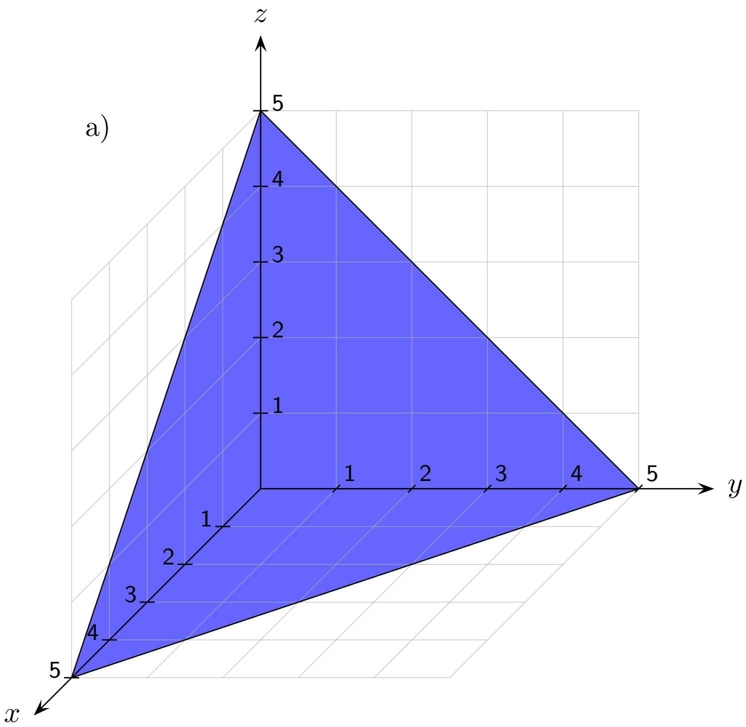
   beachte: $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

   b) $\begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - 15 = 0$

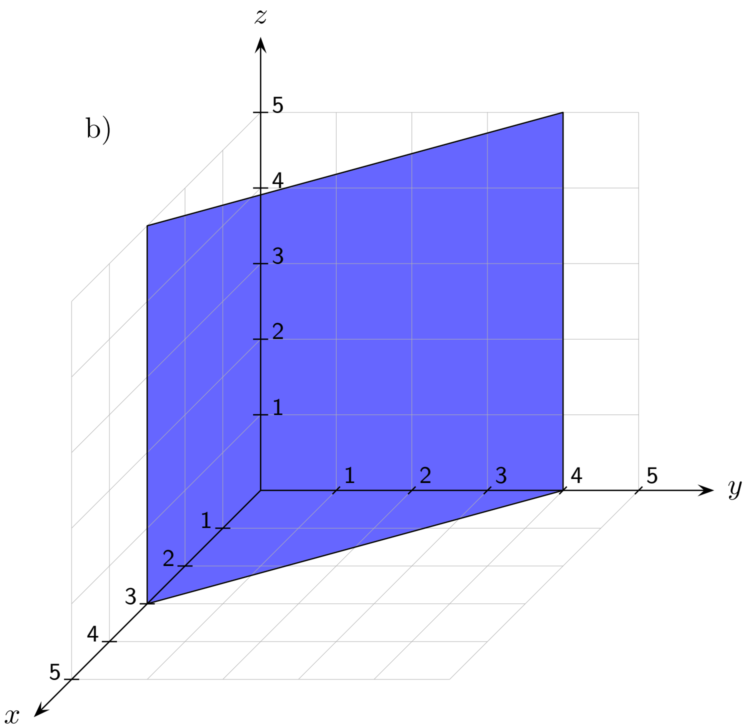
Ebenen

Ermittle die Ebenengleichung.

a)



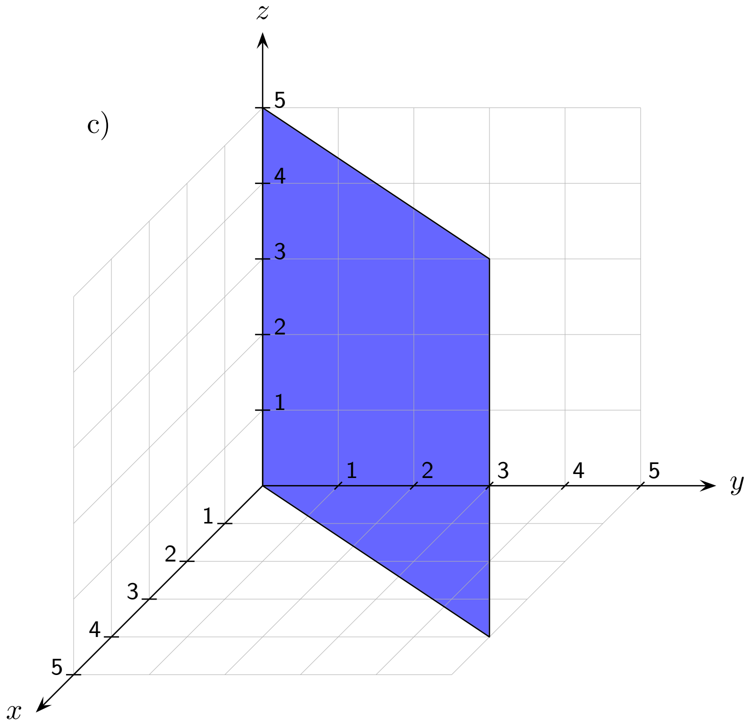
b)



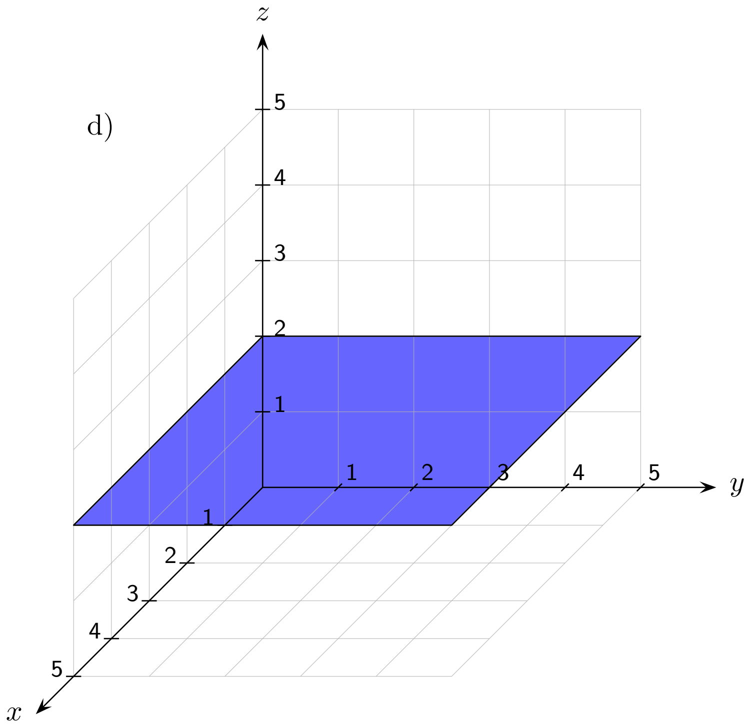
Ebenen

Ermittle die Ebenengleichung.

c)

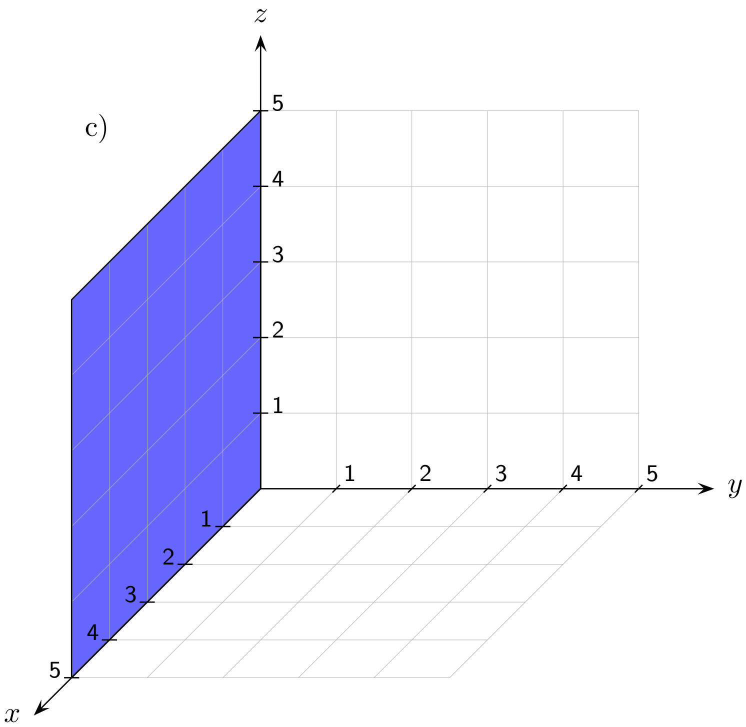


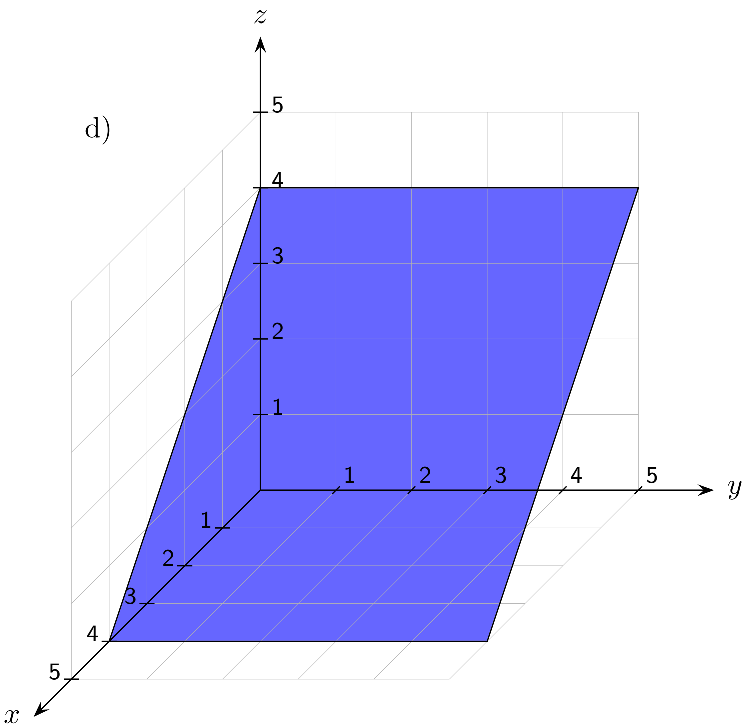
d)



Ebenen

Ermittle die Ebenengleichung.





Ebenen

Die Koordinatenformen - sie können leicht in die Normalenformen umgewandelt werden - lauten:

a) $x + y + z = 5$

b) $4x + 3y = 12$

c) $5x - 4y = 0$

d) $z = 2$

e) $y = 0$

f) $x + z = 4$

Normalenform in Parameterform umwandeln

Die Koordinatenform einer Ebene sei: $2x + y - 3z = 1$

2 Variablen können beliebig gewählt werden, die Dritte ist dann festgelegt.
Die Ebenengleichung wird nach einer Variablen umgestellt, z. B. $y = 1 - 2x + 3z$.

Die Ebene wird nun durch den Vektor $\begin{pmatrix} x \\ 1 - 2x + 3z \\ z \end{pmatrix}$ beschrieben, x und z sind frei wählbar.
Wir ordnen:

$$\begin{pmatrix} x \\ 1 - 2x + 3z \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und erhalten eine Parameterform:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Bei diesem Vorgehen liegt der Stützvektor stets auf einer Koordinatenachse
und die Richtungsvektoren liegen jeweils in einer Koordinatenebene.

Koordinatenform einer Ebene GTR

Für eine Ebene lautet die Koordinatenform

$$ax + by + cz = d$$

Sie kann mit einer Zahl ungleich Null multipliziert werden.
Für Ebenen, die nicht durch den Ursprung verlaufen, ist $d \neq 0$.
In <u>diesem</u> Fall kann die Koordinatenform, wenn 3 Punkte der Ebene gegeben sind, ohne Mühe mit dem GTR
ermittelt werden.
Die Koordinaten der Punkte werden in $ax + by + cz = 1$ eingesetzt, der GTR (rref) liefert die Lösung des Gleichungssystems. Statt 1 wäre jede Zahl ungleich Null möglich.

Gegeben sind 3 Punkte einer Ebene. Gesucht ist die Koordinatenform.

a) $A(3\,|\,-2\,|\,7)$, $B(1\,|\,-1\,|\,3)$, $C(2\,|\,0\,|\,1)$
$2x - 8y - 3z = 1$

b) $A(3\,|\,-2\,|\,7)$, $B(1\,|\,-1\,|\,3)$, $C(2\,|\,-2\,|\,1)$
$-\frac{6}{5}x - \frac{8}{5}y + \frac{1}{5}z = 1$ oder $6x + 8y - z = -5$

c) $A(4\,|\,1\,|\,-2)$, $B(3\,|\,-2\,|\,0)$, $C(1\,|\,2\,|\,-3)$
$\frac{1}{17}x - \frac{7}{17}y - \frac{10}{17}z = 1$ oder $x - 7y - 10z = 17$

Für eine Ebene, die durch den Ursprung verläuft, lautet die Koordinatenform

$$ax + by + cz = 0$$

Der obige Ansatz mit dem GTR führt auf einen Wiederspruch.
$d = 1$ wird daher durch $d = 0$ ersetzt. Aus der allgemeinen Lösung ist ein Normalenvektor zu erkennen.

Falls bekannt ist, dass die Ebene durch den Ursprung verläuft, muss lediglich ein Normalenvektor ermittelt werden.
Die Koordinaten zweier vom Ursprung verschiedener Punkte werden in $ax + by + 1z = 0$ eingesetzt, d. h. in $ax + by = -z$.

Gesucht ist die Koordinatenform der Ebene durch den Ursprung.

a) $A(3\,|\,2\,|\,-1)$, $B(1\,|\,3\,|\,-2)$
$-\frac{1}{7}x + \frac{5}{7}y + 1z = 0$ oder $x - 5y - 7z = 0$

b) $A(1\,|\,-4\,|\,0)$, $B(-2\,|\,0\,|\,-1)$
$-\frac{1}{2}x - \frac{1}{8}y + 1z = 0$ oder $4x + y - 8z = 0$