Unifikation

Contents

Unifikation

Was ist ein Unifikator?

Unifikator ist die Subsution von Variablen, die alle Gleichungen erfüllt

Was ist ein allgemeinsten Unifikator (mgu)?

mgu (most general unifier) ist ein Unifikator, der so wenig Variablen wie Möglich instanziiert

Was bedeutet Kreis-Symbol?

Mathematische Verkettung: (f o g)(x) = f(g(x))
[X1-> a] o [X2-> a] o [X3 -> f(X2, X1)] = [X1-> a, X2-> a, X3 -> f(a, a)]

Wie berechnet man mgu?

Alle Regeln in unify-Algorithmus passen. Ausgabeliste von unify-Algorithmus ist mgu.

Wie funktioniert unify()?

Zuerst soll man alle Regeln sortieren (nach schwierigkeit) und in unify übergeben.
Dann werden:

1. Die einfache Regeln in Form X=Y aus unify genommen und als Substitutionen [X->Y] rechts verketten.
2. Die Substitutionen soll man auf innere Menge von unify() anwenden
3. Man kann mehrere Substitutionen mergen: [Y->a] o [X->Y] = [Y->a, X->a]
4. Komplexe Terme in unify() kann man zerlegen
5. Am ende muss man eine unifizierte und minimale Liste von Substitutionen haben

```
Term: a(t1, a(X3, X4)) = a(X1, X2)
Zerlegung: X1 = t1, X2 = a (X3, X4)
```

Wie kann man beweisen, dass ein Unifikator kein allgemeinster Unifikator ist?

(c) Auch σ_3 ist ein Unifikator, denn es gilt

$$\sigma_3 = [\mathtt{X}_3 \Rightarrow \mathtt{a}] \circ \sigma_2.$$

σ_3 ist allerdings kein allgemeinster Unifikator: Gäbe es eine Substitution δ sodass

$$\sigma_2 = \delta \circ \sigma_3,$$

dann müsste gelten

$$\mathtt{X}_3 = \sigma_2(\mathtt{X}_3) = \delta(\sigma_3(\mathtt{X}_3)) = \delta(\mathtt{a}) = \mathtt{a}.$$

Ein Widerspruch.

Wie kann man am besten den allgemeinsten Unifikator für ein Gleichungssystem berechnen für einem Herleitungsbaum?

Beispiele

Unifikator vs mgu

```
f(a, D) = Y
X = g(B)
g(Z) = X
```

-> u = [Y -> f(a,b), D -> b, X -> g(b), Z -> b]
-> mgu = [Y -> f(a,D), X -> g(b), Z -> b]

Unify klappt

Berechnen Sie für das folgende Gleichungssystem einen allgemeinsten Unifikator:

$$\begin{aligned} \mathtt{a}(\mathtt{t}_1, \mathtt{a}(\mathtt{X}_3, \mathtt{X}_4)) &= \mathtt{a}(\mathtt{X}_1, \mathtt{X}_2) \\ \mathtt{X}_3 &= \mathtt{t}_2 \\ \mathtt{X}_4 &= \mathtt{X}_1 \end{aligned}$$

Rechnen Sie den Unifikator vollständig aus, d.h. geben Sie ihn in der Form

$$[\mathtt{X}_1 \Rightarrow \ldots, \mathtt{X}_2 \Rightarrow \ldots, \mathtt{X}_3 \Rightarrow \ldots, \mathtt{X}_4 \Rightarrow \ldots]$$

Lösung (kompakte Variante):

$$\begin{aligned} & \mathit{unify}(\{\mathtt{a}(\mathtt{t}_1, \mathtt{a}(\mathtt{X}_3, \mathtt{X}_4)) = \mathtt{a}(\mathtt{X}_1, \mathtt{X}_2),\ \mathtt{X}_3 = \mathtt{t}_2,\ \underline{\mathtt{X}_4 = \mathtt{X}_1}\}) \\ = {} & \mathit{unify}(\{\mathtt{a}(\mathtt{t}_1, \mathtt{a}(\mathtt{X}_3, \mathtt{X}_1)) = \mathtt{a}(\mathtt{X}_1, \mathtt{X}_2),\ \underline{\mathtt{X}_3 = \mathtt{t}_2}\}) \circ [\mathtt{X}_4 \Rightarrow \mathtt{X}_1] \\ = {} & \mathit{unify}(\{\underline{\mathtt{a}(\mathtt{t}_1, \mathtt{a}(\mathtt{t}_2, \mathtt{X}_1)) = \mathtt{a}(\mathtt{X}_1, \mathtt{X}_2)}\}) \circ [\mathtt{X}_3 \Rightarrow \mathtt{t}_2, \mathtt{X}_4 \Rightarrow \mathtt{X}_1] \\ = {} & \mathit{unify}(\{\underline{\mathtt{t}_1 = \mathtt{X}_1}, \mathtt{a}(\mathtt{t}_2, \mathtt{X}_1) = \mathtt{X}_2\}) \circ [\mathtt{X}_3 \Rightarrow \mathtt{t}_2, \mathtt{X}_4 \Rightarrow \mathtt{X}_1] \\ = {} & \mathit{unify}(\{\underline{\mathtt{a}(\mathtt{t}_2, \mathtt{t}_1) = \mathtt{X}_2}\}) \circ [\mathtt{X}_1 \Rightarrow \mathtt{t}_1, \mathtt{X}_3 \Rightarrow \mathtt{t}_2, \mathtt{X}_4 \Rightarrow \mathtt{t}_1] \\ = {} & [\mathtt{X}_1 \Rightarrow \mathtt{t}_1, \mathtt{X}_2 \Rightarrow \mathtt{a}(\mathtt{t}_2, \mathtt{t}_1), \mathtt{X}_3 \Rightarrow \mathtt{t}_2, \mathtt{X}_4 \Rightarrow \mathtt{t}_1] \end{aligned}$$

Bemerkungen:
a(t1, a(X3, X4)) = a(X1, X2)
-> X1 = t1, X2 = a (X3, X4)

Unify fails

Gegeben sei die einelementige Menge von Gleichungen $C = \{$

$$\begin{aligned} & \mathtt{node}(\mathtt{node}(\mathtt{T}, 2, \mathtt{leaf}), 4, \mathtt{R}) \\ = \; & \mathtt{node}(\mathtt{node}(\mathtt{node}(\mathtt{R}, 1, \mathtt{leaf}), \mathtt{V}, \mathtt{T}), 4, \mathtt{leaf}) \end{aligned}$$

$\}$

über den Variablen $\mathtt{T}, \mathtt{R}$ und $\mathtt{V}$.

Führen Sie den Unifikationsalgorithmus nach Robinson (siehe Skript S. 293) zur Berechnung von `unify`(C) aus. Geben Sie bei jedem rekursiven Aufruf von `unify` die erzeugte Substitution sowie die noch zu unifizierende Menge an.

Beispiellösung:

$\mathtt{unify}(C)$
$= \mathtt{unify}(\{\mathtt{node}(\mathtt{T}, 2, \mathtt{leaf}) = \mathtt{node}(\mathtt{node}(\mathtt{R}, 1, \mathtt{leaf}), \mathtt{V}, \mathtt{T}), 4 = 4, \mathtt{R} = \mathtt{leaf}\})$
$= \mathtt{unify}(\{4 = 4, \mathtt{R} = \mathtt{leaf}, \mathtt{T} = \mathtt{node}(\mathtt{R}, 1, \mathtt{leaf}), 2 = \mathtt{V}, \mathtt{leaf} = \mathtt{T}\})$
$= \mathtt{unify}(\{\mathtt{R} = \mathtt{leaf}, \mathtt{T} = \mathtt{node}(\mathtt{R}, 1, \mathtt{leaf}), 2 = \mathtt{V}, \mathtt{leaf} = \mathtt{T}\})$
$= \mathtt{unify}(\{\mathtt{T} = \mathtt{node}(\mathtt{leaf}, 1, \mathtt{leaf}), 2 = \mathtt{V}, \mathtt{leaf} = \mathtt{T}\}) \circ [\mathtt{R} \Leftarrow \mathtt{leaf}]$
$= \mathtt{unify}(\{2 = \mathtt{V}, \mathtt{leaf} = \mathtt{node}(\mathtt{leaf}, 1, \mathtt{leaf})\}) \circ [\mathtt{T} \Leftarrow \mathtt{node}(\mathtt{leaf}, 1, \mathtt{leaf})] \circ [\mathtt{R} \Leftarrow \mathtt{leaf}]$
$= \mathtt{unify}(\{\mathtt{leaf} = \mathtt{node}(\mathtt{leaf}, 1, \mathtt{leaf})\}) \circ [\mathtt{V} \Leftarrow 2] \circ [\mathtt{T} \Leftarrow \mathtt{node}(\mathtt{leaf}, 1, \mathtt{leaf})] \circ [\mathtt{R} \Leftarrow \mathtt{leaf}]$
$= \mathbf{fail}$

C ist also nicht unifizierbar.

--> Gleichungen sind nicht immer unfizierbar.
Hinweis: male einen Baum, um die Idee zu bekommen