UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TORINO

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA GIUSEPPE PEANO

SCUOLA DI SCIENZE DELLA NATURA

Corso di Laurea in Matematica

Tesi di Laurea Triennale

FUNZIONI RICORSIVE

Relatore: Alessandro Andretta

Candidato: Orazio Nicolosi

ANNO ACCADEMICO: 2021/2022

Indice

Sommario

In questa tesi sono raggruppati i principali risultati sulle funzioni e relazioni ricorsive con un particolare approfondimento alle seguenti famiglie di funzioni:

1. elementari ricorsive
2. primitive ricorsive
3. generali ricorsive
4. generali ricorsive parziali

L'obbiettivo è quello di dare alcuni esempi di funzioni calcolabili e le possibili caratterizzazioni delle quattro famiglie, partendo dalle elementari ed estendendo la famiglia fino alle funzioni primitive ricorsive (caratterizzate dal teorema di Raphael M. Robinson) aggiungendo lo schema di ricorsione primitiva e poi fino alle generali ricorsive (caratterizzate invece dal teorema di Julia Robinson) ammettendo la minimalizzazione, ma vincolandola a dare funzioni totali e arrivando, infine, alle ricorsive parziali (caratterizzate dal teorema della forma normale di Kleene) ottenute considerando la minimalizzazione senza il vincolo di totalità. In parallelo vengono mostrate le proprietà delle rispettive relazioni associate ad ogni famiglia di funzioni e lo strumento di aritmetizzazione sia per scomposizione in fattori primi che tramite la funzione beta di Gödel.

1 Preliminari

Definizione 1.1. *Una **relazione** m-aria (con $m > 0$) sui numeri naturali è un sottoinsieme $R \subseteq \mathbb{N}^m$.*

Definizione 1.2. *Un'**operazione** su $\mathbb{N}$ è una funzione a valori naturali di più variabili naturali, ovvero una funzione m-aria a valori in $\mathbb{N}$ (con $m \in \mathbb{N}$):*

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N}^m = \overbrace{\mathbb{N} \times \cdots \times \mathbb{N}}^{m} &\longrightarrow \mathbb{N} \\ \overline{x} = (x_0, \ldots, x_{m-1}) &\longmapsto f(x_0, \ldots, x_{m-1}) \end{aligned}$$

Le operazioni/funzioni 0-arie sono funzioni della forma $f() = c$ con $c \in \mathbb{N}$ e quindi coincidono con le costanti (cioè sono i numeri naturali).

Definizione 1.3. *Un'**operatore** su $\mathbb{N}$ è una funzione k-aria a valori nell'insieme delle operazioni su $\mathbb{N}$ (con $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$).*

In questa tesi verranno considerate esclusivamente relazioni, funzioni/operazioni e operatori su $\mathbb{N}$.

1.1 Alcune operazioni su $\mathbb{N}$

Per facilitare l'esposizione e la fruizione degli argomenti successivi si è scelto di definire anticipatamente alcune delle operazioni sui numeri naturali che si utilizzeranno in aggiunta alle usuali operazioni binarie di addizione, sottrazione e moltiplicazione.

Definizione 1.4. *La **distanza** è l'operazione binaria:*

$$\begin{aligned} |* - *| : \mathbb{N} \times \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{N} \\ (x_0, x_1) &\longmapsto |x_0 - x_1| = \begin{cases} x_0 - x_1 & \text{se } x_0 \geqslant x_1 \\ x_1 - x_0 & \text{se } x_0 < x_1 \end{cases} \end{aligned}$$

Definizione 1.5. *Definiamo induttivamente la funzione **minimo** nel seguente modo:*

Caso base: *consideriamo l'operazione binaria*

$$\begin{aligned} \min\nolimits_2 : \mathbb{N} \times \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{N} \\ (x_0, x_1) &\longmapsto \min\nolimits_2(x_0, x_1) = \begin{cases} x_0 & \textit{se } x_0 \leqslant x_1 \\ x_1 & \textit{se } x_0 > x_1 \end{cases} \end{aligned}$$

Passo induttivo: *definiamo*

$$\begin{aligned} \min\nolimits_k : \mathbb{N}^k &\longrightarrow \mathbb{N} \\ (x_0, \ldots, x_{k-1}) &\longmapsto \min\nolimits_k(x_0, \ldots, x_{k-1}) = \min\nolimits_2(\min\nolimits_{k-1}(x_0, \ldots, x_{k-2}), x_{k-1}) \end{aligned}$$

Una definizione analoga vale per la funzione ***massimo*** *(ovviamente ponendo x_1 se $x_0 \leqslant x_1$ e x_0 altrimenti nel caso base).*

Definizione 1.6. *La* ***parte intera della divisione*** *è la funzione binaria:*

$$\begin{aligned} \lfloor * / * \rfloor : \mathbb{N} \times \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{N} \\ (x_0, x_1) &\longmapsto \lfloor x_0 / x_1 \rfloor = \begin{cases} \max\{k \in \mathbb{N} \mid x_1 \cdot k \leqslant x_0\} & \textit{se } x_1 \neq 0 \\ 0 & \textit{se } x_1 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Definizione 1.7. *La funzione* ***resto*** *è la funzione binaria:*

$$\begin{aligned} \mathrm{rem} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{N} \\ (x_0, x_1) &\longmapsto \mathrm{rem}(x_0, x_1) = \begin{cases} x_0 - \lfloor x_0 / x_1 \rfloor \cdot x_1 & \textit{se } x_1 > 0 \\ 0 & \textit{se } x_1 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Definizione 1.8. *La* ***differenza troncata*** *è l'operazione binaria:*

$$\begin{aligned} * \dot{-} * : \mathbb{N} \times \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{N} \\ (x_0, x_1) &\longmapsto x_0 \dot{-} x_1 = \begin{cases} x_0 - x_1 & \textit{se } x_0 \geqslant x_1 \\ 0 & \textit{se } x_0 < x_1 \end{cases} \end{aligned}$$

Definizione 1.9. *Dato $n \in \mathbb{N}$, per ogni $k < n$ si dice* ***k-proiezione*** *la funzione:*

$$\begin{aligned} I^n_k : \mathbb{N}^n &\longrightarrow \mathbb{N} \\ \overline{x} &\longmapsto x_k \end{aligned}$$

Osservazione. *La funzione identità sull'insieme $\mathbb{N}$ coincide con la funzione I^1_0.*

Definizione 1.10. *Dato $k \in \mathbb{N}$, la funzione* ***costante*** *è la funzione unaria:*

$$\begin{aligned} c_k : \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{N} \\ n &\longmapsto k \end{aligned}$$

Definizione 1.11. *Definiamo le funzioni unarie:*

1. ***segno:*** $\mathrm{sgn}(n) = \begin{cases} 0 & \textit{se } n = 0 \\ 1 & \textit{se } n > 0 \end{cases} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$

2. $\overline{\mathrm{sgn}}(n) = 1 - \mathrm{sgn}(n) = \begin{cases} 1 & \textit{se } n = 0 \\ 0 & \textit{se } n > 0 \end{cases} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$

Definizione 1.12. *Definiamo le operazioni unarie:*

1. ***predecessore***:

$$\begin{aligned} P : \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{N} \\ n &\longmapsto P(n) = n \dot{-} 1 = \begin{cases} 0 & \textit{se } n = 0 \\ n-1 & \textit{se } n > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

2. ***successore***:

$$\begin{aligned} S : \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{N}\backslash\{0\} \\ n &\longmapsto S(n) = n+1 \end{aligned}$$

Definizione 1.13. *La* ***radice quadrata intera*** *è la funzione:*

$$\begin{aligned} \lfloor\sqrt{*}\rfloor : \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{N} \\ x &\longmapsto \lfloor\sqrt{x}\rfloor = \max\{n \in \mathbb{N} \mid n^2 \leqslant x\} \end{aligned}$$

Definizione 1.14. *L'* ***eccesso quadratico*** *è la funzione:*

$$\begin{aligned} \mathrm{Exc} : \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{N} \\ x &\longmapsto \mathrm{Exc}(x) = x - (\lfloor\sqrt{x}\rfloor)^2 \end{aligned}$$

Definizione 1.15. *Data R relazione m-aria sui numeri naturali, la* ***funzione caratteristica*** *di R è la funzione m-aria:*

$$\begin{aligned} \chi_R : \mathbb{N}^m &\longrightarrow \{0,1\} \subset \mathbb{N} \\ \overline{x} &\longrightarrow \chi_R(\overline{x}) = \begin{cases} 0 & \textit{se } \overline{x} \notin R \\ 1 & \textit{se } \overline{x} \in R \end{cases} \end{aligned}$$

Definizione 1.16. *La funzione* ***caratteristica dei quadrati*** *è la funzione unaria:*

$$\begin{aligned} Q : \mathbb{N} &\longrightarrow \{0,1\} \subset \mathbb{N} \\ x &\longmapsto \begin{cases} 1 & \textit{se } \exists\, q \in \mathbb{N}\,(q^2 = x) \\ 0 & \textit{se } \forall\, q \in \mathbb{N}\,(q^2 \neq x) \end{cases} \end{aligned}$$

Definizione 1.17. *La funzione di* ***enumerazione*** *di un insieme infinito $I \subseteq \mathbb{N}$ è una funzione che ad ogni naturale $n \in \mathbb{N}$ associa l'n-esimo elemento di I in ordine crescente, ovvero:*

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_I : \mathbb{N} &\longrightarrow I \subseteq \mathbb{N} \\ n &\longmapsto \mathbf{e}_I(n) = i_n \end{aligned}$$

con: $\{i_n\}_{n\in\mathbb{N}} = I$ *e* $i_n < i_{n+1} \;\; \forall\, n \in \mathbb{N}$.

Definizione 1.18. *Detto $\mathbb{P}$ l'insieme dei numeri primi, indichiamo con $\mathbf{p}$ la funzione di* ***enumerazione dei numeri primi***:

$$\begin{aligned} \mathbf{p} : \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{P} \subset \mathbb{N} \\ n &\longmapsto \mathbf{p}(n) = p_n \end{aligned}$$

Definizione 1.19. *La funzione* ***esponente del fattore primo*** *è la funzione binaria:*

$$\begin{aligned} (*)_* : \mathbb{N} \times \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{N} \\ (x_0, x_1) &\longmapsto (x_0)_{x_1} = \begin{cases} 0 & \textit{se } x_0 = 0 \\ \max\{k \in \mathbb{N} \mid \exists\, n \in \mathbb{N}\,(p_{x_1}^k \cdot n = x_0)\} & \textit{se } x_0 \neq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

2 Funzioni elementari ricorsive

2.1 Funzioni elementari ricorsive

Definizione 2.1. *Dati $n, m \in \mathbb{N}$, una funzione m-aria f e le funzioni n-arie $g_0, \dots, g_{m-1}$, la* ***composizione*** *di f con $g_0, \dots, g_{m-1}$ è la funzione:*

$$\begin{aligned} K_n^m(f, g_0, \dots, g_{m-1}) : \mathbb{N}^n &\longrightarrow \mathbb{N} \\ \overline{x} &\longmapsto f(g_0(\overline{x}), \dots, g_{m-1}(\overline{x})) \end{aligned}$$

K_n^m è detto ***operatore di composizione***[1]*.*

Osservazione. *Osserviamo che grazie alle funzioni proiezione è possibile estendere l'operatore di composizione a funzioni $g_0, \dots, g_{m-1}$ di diversa arietà, o aventi un diverso ordine delle variabili.*

Definizione 2.2. *Dato $m \in \mathbb{N}$ e una funzione $(m+1)$-aria definiamo:*

1. *la* ***somma generalizzata*** *di f come:*

$$\begin{aligned} \sum f : \mathbb{N}^{m+1} &\longrightarrow \mathbb{N} \\ \overline{x} &\longmapsto \sum f(\overline{x}) = \begin{cases} \sum\limits_{y<x_m} f(x_0, \dots, x_{m-1}, y) & \text{se } x_m > 0 \\ 0 & \text{se } x_m = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

   $\sum$ è detto ***operatore somma****.*

2. *il* ***prodotto generalizzato*** *di f come:*

$$\begin{aligned} \prod f : \mathbb{N}^{m+1} &\longrightarrow \mathbb{N} \\ \overline{x} &\longmapsto \prod f(\overline{x}) = \begin{cases} \prod\limits_{y<x_m} f(x_0, \dots, x_{m-1}, y) & \text{se } x_m > 0 \\ 1 & \text{se } x_m = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

   $\prod$ è detto ***operatore prodotto****.*

Definizione 2.3. *Dato un insieme di funzioni sui naturali $\mathcal{F}$ e un insieme di operatori $\mathcal{O}$, definiamo la* ***chiusura*** *di $\mathcal{F}$ rispetto a $\mathcal{O}$ ($\mathrm{Clos}(\mathcal{F}, \mathcal{O})$) come l'intersezione di tutte le famiglie di operazioni contenenti $\mathcal{F}$ e chiuse rispetto agli operatori di $\mathcal{O}$.*

Definizione 2.4. *La famiglia delle* ***funzioni elementari ricorsive*** *$\mathcal{E}$ è l'intersezione di tutte le famiglie di operazioni contenenti:*

1. *l'addizione*
2. *la moltiplicazione*
3. *la distanza*
4. *la parte intera della divisione*
5. *le funzioni proiezioni*

e chiuse rispetto alla:

a. *composizione di funzioni*
b. *somma generalizzata*
c. *prodotto generalizzato*

Equivalentemente: $\mathcal{E} := \mathrm{Clos}(\{* + *, * \cdot *, |* - *|, \lfloor */* \rfloor, I_k^n\}, \{K_n^m, \sum, \prod\})$.

[1]Nel seguito, per alleggerire la notazione date due funzioni f e g con g unaria scriveremo anche $g \circ f$ al posto di $K_m^1(g, f)$.

Proposizione 2.1. *Un'operazione f su $\mathbb{N}$ è una funzione elementare ricorsiva se e solo se esiste una sequenza finita $(g_0, \dots, g_{k-1})$ di operazioni su $\mathbb{N}$ tale che* [2]*:*

1. $g_{k-1} \equiv f$
2. $\forall\ i < k$ *vale una delle seguenti condizioni:*
   (a) $g_i \equiv * + *$
   (b) $g_i \equiv * \cdot *$
   (c) $g_i \equiv |* - *|$
   (d) $g_i \equiv \lfloor */* \rfloor$
   (e) $g_i \equiv I^n_k$ *per un certo* $n \in \mathbb{N}$ *e* $k < n$
   (f) g_i *è* n*-aria ed* $\exists\ m > 0$, $\exists\ j < i, k_0, \dots, k_{m-i} < i$ *t.c.* g_j *è* m*-aria, le* $g_{k_0}, \dots, g_{k_{m-1}}$ *sono* n*-arie e* $g_i \equiv K^m_n(g_j, g_{k_0}, \dots, g_{k_{m-1}})$ *(cioè* g_i *è ottenuta dalle funzioni precedenti tramite composizione)*
   (g) $\exists\ j < i$ *t.c.* $g_i \equiv \sum g_j$
   (h) $\exists\ j < i$ *t.c.* $g_i \equiv \prod g_j$

Dimostrazione. Sia $\mathcal{F}$ l'insieme di tutte le funzioni f su $\mathbb{N}$ per cui esiste una sequenza finita che soddisfi le condizioni *1.* e *2.*

$\Longrightarrow$ Osserviamo che:

- Considerando le sequenze composte da un solo termine abbiamo che le funzioni:
$$* + * \qquad * \cdot * \qquad |* - *| \qquad \lfloor */* \rfloor \qquad I^n_k$$
sono in $\mathcal{F}$.
- $\mathcal{F}$ è chiusa rispetto alla composizione, infatti: siano $f \in \mathcal{F}$ m-aria e $h_0, \dots, h_{m-1} \in \mathcal{F}$ n-arie. Sia $(g_0, \dots, g_{k-1})$ la sequenza relativa a f che soddisfa *1.* e *2.*, mentre per ogni $j < m$ prendiamo la sequenza finita $(l_{j,0}, \dots, l_{j,a_j})$ relativa a h_j che soddisfa *1.* e *2.*.
Dunque la sequenza:
$$(g_0, \dots, g_{k-1}, l_{0,0}, \dots, l_{0,a_0}, \dots, l_{m-1,0}, \dots, l_{m-1,a_{m-1}}, K^m_n(f, h_0, \dots, h_{m-1}))$$
mostra che $K^m_n(f, h_0, \dots, h_{m-1}) \in \mathcal{F}$.
- $\mathcal{F}$ è chiusa rispetto alla somma generalizzata e al prodotto generalizzato, infatti: prese $f \in \mathcal{F}$ e $(g_0, \dots, g_{k-1})$ la rispettiva sequenza che soddisfa *1.* e *2.*, le sequenze:
$$(g_0, \dots, g_{k-1}, \textstyle\sum f) \qquad\qquad (g_0, \dots, g_{k-1}, \textstyle\prod f)$$
testimoniano che $\sum f, \prod f \in \mathcal{F}$.

Quindi tutte le funzioni elementari sono in $\mathcal{F}$ (cioè $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{F}$).

$\Longleftarrow$ Siano $f \in \mathcal{F}$ e $(g_0, \dots, g_{k-1})$ la rispettiva sequenza che soddisfa *1.* e *2.*.
Per induzione su $i \in \{0, \dots, k-1\}$ abbiamo che g_i è elementare ricorsiva $\forall\ i < k$.
Quindi anche $f \equiv g_{k-1} \in \mathcal{E}$.

CVD

[2] Seguiamo le seguenti convenzioni:

- Date due funzioni m-arie sui naturali f, g, scriviamo $f \equiv g$ se il dominio di definizione delle due funzioni è lo stesso insieme $D = \mathrm{Dom}(f) = \mathrm{Dom}(g)$ e inoltre $f(\overline{x}) = g(\overline{x}) \quad \forall\ \overline{x} \in D \subseteq \mathbb{N}^m$.
Equivalentemente: se $f(\overline{x}) = y \Leftrightarrow g(\overline{x}) = y \quad \forall\ (\overline{x}, y) \in \mathbb{N}^{m+1}$
- Analogamente date due relazioni m-arie R, S, scriviamo $R \equiv S$ al posto di $\overline{x} \in R \Leftrightarrow \overline{x} \in S \quad \forall\ \overline{x} \in \mathbb{N}^m$

2.2 Esempi di funzioni elementari ricorsive

Proposizione 2.2. *Sia $\mathcal{F} \supseteq \mathcal{E}$ una famiglia di funzioni chiusa rispetto alla composizione di funzioni e alla somma e al prodotto generalizzati, $f \in \mathcal{F}$ una funzione m-aria e π una permutazione dell'insieme $\{0, \dots, m-1\}$. Allora la funzione m-aria g definita come:*

$$g(x_0, \dots, x_{m-1}) = f\big(x_{\pi(0)}, \dots, x_{\pi(m-1)}\big) \quad \forall\, x_0, \dots, x_{m-1} \in \mathbb{N}$$

appartiene a $\mathcal{F}$.

Dimostrazione. Il risultato è immediato in quanto: $g \equiv K^m_m\big(f, I^m_{\pi(0)}, \dots, I^m_{\pi(m-1)}\big)$ CVD

Proposizione 2.3 (sull'identificazione delle variabili)**.** *Sia $\mathcal{F} \supseteq \mathcal{E}$ una famiglia di funzioni chiusa rispetto alla composizione di funzioni e alla somma e al prodotto generalizzati e $f \in \mathcal{F}$ una funzione m-aria (con $m > 1$). Allora la funzione $(m-1)$-aria g definita come:*

$$g(x_0, \dots, x_{m-2}) = f(x_0, \dots, x_{m-2}, x_0) \quad \forall\, x_0, \dots, x_{m-2} \in \mathbb{N}$$

appartiene a $\mathcal{F}$.

Dimostrazione. Il risultato è immediato in quanto: $g \equiv K^m_{m-1}\big(f, I^{m-1}_0, \dots, I^{m-1}_{m-2}, I^{m-1}_0\big)$ CVD

Proposizione 2.4 (sull'aggiunta apparente di variabili)**.** *Sia $\mathcal{F} \supseteq \mathcal{E}$ una famiglia di funzioni chiusa rispetto alla composizione di funzioni e alla somma e al prodotto generalizzati e $f \in \mathcal{F}$ una funzione m-aria. Allora la funzione $(m+1)$-aria g definita come:*

$$g(x_0, \dots, x_m) = f(x_0, \dots, x_{m-1}) \quad \forall\, x_0, \dots, x_m \in \mathbb{N}$$

appartiene a $\mathcal{F}$.

Dimostrazione. Il risultato è immediato in quanto: $g \equiv K^m_{m+1}\big(f, I^{m+1}_0, \dots, I^{m+1}_{m-1}\big)$ CVD

Lemma 2.5. *Le seguenti funzioni sono elementari ricorsive:*

- *la funzione costante c_k* $\quad \forall\, k \in \mathbb{N}$
- *le funzioni* sgn *e* $\overline{\operatorname{sgn}}$
- *le funzioni successore S e predecessore P*
- *l'esponenziale e il fattoriale*

Dimostrazione. Questi risultati seguono dal fatto che:

1. $c_0(x) = |x - x| \quad \forall\, x \in \mathbb{N}$
2. $\overline{\operatorname{sgn}}(x) = \prod\limits_{y<x} c_0(y) \quad \forall\, x \in \mathbb{N}$
3. $\operatorname{sgn} \equiv K^1_1(\overline{\operatorname{sgn}}, \overline{\operatorname{sgn}}) \equiv \overline{\operatorname{sgn}} \circ \overline{\operatorname{sgn}}$
4. $c_1 \equiv K^1_1(\overline{\operatorname{sgn}}, c_0) \equiv \overline{\operatorname{sgn}} \circ c_0$
5. $c_{m+1} \equiv K^2_1(* + *, c_m, c_1) \equiv c_m + c_1$
   (per induzione su m)
6. $S(x) = x + c_1(x) \quad \forall\, x \in \mathbb{N}$
7. $x^y = \prod\limits_{z<y} x \quad \forall\, x, y \in \mathbb{N}$
8. $x! = \prod\limits_{z<x} S(z) \quad \forall\, x \in \mathbb{N}$
9. $P(x) = |x - c_1(x)| \cdot \operatorname{sgn}(x) \quad \forall\, x \in \mathbb{N}$

CVD

2.3 Relazioni e insiemi elementari ricorsivi

Definizione 2.5. *Una relazione m-aria R sui numeri naturali, è una **relazione** (o insieme) **elementare ricorsiva** se la sua funzione caratteristica χ_R è elementare ricorsiva.*

Questa definizione può essere estesa ad una qualsiasi famiglia di operazioni nel seguente modo:

Definizione 2.6. *Data una famiglia di operazioni $\mathcal{F}$ su $\mathbb{N}$, diciamo che una relazione m-aria R sui numeri naturali è una $\mathcal{F}$-relazione se $\chi_R \in \mathcal{F}$.*

Proposizione 2.6. *Si ha che:*

1. *$\varnothing$ e $\mathbb{N}$ sono insiemi elementari ricorsivi.*
2. *Preso $x \in \mathbb{N}$, allora l'insieme $\{x\}$ è elementare ricorsivo.*

Dimostrazione.

1. Seguono dal fatto che: $\chi_\varnothing \equiv c_0$ e $\chi_\mathbb{N} \equiv c_1$
2. Preso $x \in \mathbb{N}$, si ha che $\forall\, y \in \mathbb{N}$:

$$\chi_{\{x\}}(y) = \overline{\text{sgn}}(|x-y|) = \overline{\text{sgn}}(\left|c_x(y) - I_0^1(y)\right|)$$

CVD

Lemma 2.7. *Se $\mathcal{F} \supseteq \mathcal{E}$ è una famiglia di funzioni chiusa rispetto alla composizione di funzioni e alla somma e al prodotto generalizzati, allora per ogni funzione m-aria $f \in \mathcal{F}$, il grafico:*

$$\text{Gr}(f) := \{(x_0, \dots, x_{m-1}, x_m) \mid f(x_0, \dots, x_{m-1}) = x_m\}$$

è una $\mathcal{F}$-relazione $(m+1)$-aria.

Dimostrazione. La tesi segue dal fatto che:

$$\chi_{\text{Gr}(f)}(x_0, \dots, x_{m-1}, x_m) = \overline{\text{sgn}}(|f(x_0, \dots, x_{m-1}) - x_m|) \quad \forall\, \overline{x} \in \mathbb{N}^{m+1}$$

CVD

Proposizione 2.8. *Se $\mathcal{F} \supseteq \mathcal{E}$ è una famiglia di funzioni chiusa rispetto alla composizione di funzioni e alla somma e al prodotto generalizzati, allora:*

1. *se R è una $\mathcal{F}$-relazione m-aria e $f_0, \dots, f_{m-1} \in \mathcal{F}$ sono k-arie, allora $S \equiv R(f_0, \dots, f_{m-1})$ è una $\mathcal{F}$-relazione k-aria.*
2. *se R ed S sono $\mathcal{F}$-relazioni m-arie, allora $R \cap S$ e $\neg R := \mathbb{N}^m \backslash R$ sono $\mathcal{F}$-relazioni.* ***In particolare:*** *anche $R \cup S$, $S \backslash R$, $R \Rightarrow S$ e $R \Leftrightarrow S$ sono $\mathcal{F}$-relazioni.*

Dimostrazione.

1. Segue dal fatto che la funzione caratteristica di S è: $\chi_S \equiv K_k^m(\chi_R, f_0 \dots, f_{m-1})$.
2. Osserviamo che:

$$\chi_{R \cap S} \equiv K_m^2(* \cdot *, \chi_R, \chi_S) \equiv \chi_R \cdot \chi_S \qquad \chi_{\neg R} \equiv K_m^1(\overline{\text{sgn}}, \chi_R) \equiv \overline{\text{sgn}} \circ \chi_R$$

mentre le altre affermazioni seguono dal fato che:

$$R \cup S \equiv \mathbb{N}^m \backslash ((\mathbb{N}^m \backslash R) \cap (\mathbb{N}^m \backslash S)) \qquad S \backslash R \equiv S \cap \neg R$$
$$R \Rightarrow S \equiv \neg R \cup S \qquad R \Leftrightarrow S \equiv (\neg R \cup S) \cap (R \cup \neg S)$$

CVD

Corollario 2.9. *Ogni sottoinsieme finito (o cofinito) di $\mathbb{N}$ è elementare ricorsivo.*

Lemma 2.10. *Le relazioni binarie sui numeri naturali $\leqslant, <, \geqslant, >, =, \neq$ sono elementari ricorsive.*

Dimostrazione. La tesi segue in quanto:

- Per ogni $x_0, x_1 \in \mathbb{N}$ si ha che:

$$\chi_<(x_0, x_1) = \overline{\mathrm{sgn}}(\lfloor S(x_0)/S(x_1) \rfloor) = \overline{\mathrm{sgn}}(\lfloor S(I_0^2(x_0, x_1)/S(I_1^2(x_0, x_1)) \rfloor)$$

- Per ogni $x_0, x_1 \in \mathbb{N}$ si ha che:

$$\chi_{\neq}(x_0, x_1) = \mathrm{sgn}(|x - y|)$$

- infine, nei casi restanti, basta applicare la proposizione 2.8 in quanto:
  - $=$ è equivalente a $\mathbb{N}^2 \setminus \neq$
  - $\leqslant$ è equivalente a $< \cup =$
  - $\geqslant$ è equivalente a $\mathbb{N}^2 \setminus <$
  - $>$ è equivalente a $\mathbb{N}^2 \setminus \leqslant$

CVD

Definizione 2.7. *Data la relazione $(m+1)$-aria R sui naturali, le relazioni ottenute da R tramite* ***quantificazione vincolata*** *sono le seguenti relazioni $(m+1)$-arie:*

- $\forall\, z < y\ R(\overline{x}, z) := \{(\overline{x}, y) \in \mathbb{N}^{m+1} \mid \forall\, z(z < y \Rightarrow (\overline{x}, z) \in R)\}$
- $\forall\, z \leqslant y\ R(\overline{x}, z) := \{(\overline{x}, y) \in \mathbb{N}^{m+1} \mid \forall\, z(z \leqslant y \Rightarrow (\overline{x}, z) \in R)\}$
- $\exists\, z < y\ R(\overline{x}, z) := \{(\overline{x}, y) \in \mathbb{N}^{m+1} \mid \exists\, z(z < y \wedge (\overline{x}, z) \in R)\}$
- $\exists\, z \leqslant y\ R(\overline{x}, z) := \{(\overline{x}, y) \in \mathbb{N}^{m+1} \mid \exists\, z(z \leqslant y \wedge (\overline{x}, z) \in R)\}$

Proposizione 2.11 (sulla quantificazione vincolata)**.** *Se $\mathcal{F} \supseteq \mathcal{E}$ è una famiglia di funzioni chiusa rispetto alla composizione di funzioni e alla somma e al prodotto generalizzati e R è una $\mathcal{F}$-relazione $(m+1)$-aria, allora:*

1. $\forall\, z < y\ R(\overline{x}, z)$
2. $\forall\, z \leqslant y\ R(\overline{x}, z)$
3. $\exists\, z < y\ R(\overline{x}, z)$
4. $\exists\, z \leqslant y\ R(\overline{x}, z)$

sono $\mathcal{F}$-relazioni.

Dimostrazione. Abbiamo che:

1. La tesi segue in quanto la sua funzione caratteristica è:

$$\chi_{\forall\, z<y\, R(\overline{x},z)}(\overline{x}, y) = \prod_{k<y} \chi_R(\overline{x}, k) \qquad \forall\, \overline{x} \in \mathbb{N}^m,\ \forall\, y \in \mathbb{N}$$

2. È analogo al caso 1.
3. Ci si riconduce al caso 1. in quanto:

$$\begin{aligned} \exists\, z < y\ R(\overline{x}, z) &\equiv \neg\{(\overline{x}, y) \in \mathbb{N}^{m+1} \mid \forall\, z(z < y \Rightarrow (\overline{x}, z) \notin R)\} \\ &\equiv \neg\{(\overline{x}, y) \in \mathbb{N}^{m+1} \mid \forall\, z(z < y \Rightarrow (\overline{x}, z) \in \neg R)\} \end{aligned}$$

4. È analogo al caso 3.

CVD

2.3.1 Ulteriori esempi di funzioni elementari ricorsive

Definizione 2.8. *Data la relazione $(m+1)$-aria R sui naturali, l'**operatore di minimalizzazione limitata** della relazione R è la operazione $(m+1)$-aria:*

$$\mu_{z\leqslant *}R(*,z) : \mathbb{N}^{m+1} \longrightarrow \mathbb{N}$$
$$(\overline{x},y) \longrightarrow \mu_{z\leqslant y}R(\overline{x},z) = \begin{cases} \min\{z\leqslant y \mid (\overline{x},z)\in R\} & \text{se } \{z\leqslant y \mid (\overline{x},z)\in R\} \neq \varnothing \\ 0 & \text{se } \{z\leqslant y \mid (\overline{x},z)\in R\} = \varnothing \end{cases}$$

Proposizione 2.12 (sulla minimalizzazione limitata)**.** *Se $\mathcal{F} \supseteq \mathcal{E}$ è una famiglia di funzioni chiusa rispetto alla composizione di funzioni e alla somma e al prodotto generalizzati e R è una $\mathcal{F}$-relazione $(m+1)$-aria, allora la funzione $\mu_{z\leqslant *}R(*,z)$ appartiene ad $\mathcal{F}$.*

Dimostrazione. Consideriamo la seguente funzione:

$$g(\overline{x},i) = \overline{\mathrm{sgn}}\Bigg(\sum_{z<S(i)} \chi_R(\overline{x},z)\Bigg) = \begin{cases} 1 & \text{se } \forall\, z\leqslant i\,\big((\overline{x},z)\notin R\big) \\ 0 & \text{se } \exists\, z\leqslant i\,\big((\overline{x},z)\in R\big) \end{cases} \qquad \forall\,(\overline{x},i)\in\mathbb{N}^{m+1}$$

dunque, per la proposizione 2.11, $g\in\mathcal{F}$ e inoltre si ha che:

$$h(\overline{x},z) = \sum_{i<z} g(\overline{x},i) = \begin{cases} \mu_{z\leqslant y}R(\overline{x},z) & \text{se } \exists\, z\leqslant y\,\big((\overline{x},z)\in R\big) \\ y & \text{se } \forall\, z\leqslant y\,\big((\overline{x},z)\notin R\big) \end{cases} \qquad \forall\,(\overline{x},z)\in\mathbb{N}^{m+1}$$

Quindi anche $h\in\mathcal{F}$ e:

$$\mu_{z\leqslant y}R(\overline{x},z) = \overline{\mathrm{sgn}}(g(\overline{x},y))\cdot h(\overline{x},y) \qquad \forall\,(\overline{x},y)\in\mathbb{N}^{m+1}$$

Pertanto segue la tesi. CVD

Corollario 2.13. *Se $\mathcal{F} \supseteq \mathcal{E}$ è una famiglia di funzioni chiusa rispetto alla composizione di funzioni e alla somma e al prodotto generalizzati, R è una $\mathcal{F}$-relazione $(m+1)$-aria e $l\in\mathcal{F}$ è una funzione k-aria, allora la funzione:*

$$f : \mathbb{N}^m \times \mathbb{N}^k \longrightarrow \mathbb{N}$$
$$(\overline{x},\overline{y}) \longmapsto \mu_{z\leqslant l(\overline{y})}R(\overline{x},z)$$

appartiene ad $\mathcal{F}$.

Dimostrazione. Basta osservare che (rispetto alla notazione della dimostrazione precedente):

$$f(\overline{x},\overline{y}) = \overline{\mathrm{sgn}}(g(\overline{x},l(\overline{y})))\cdot h(\overline{x},l(\overline{y})) \qquad \forall\,(\overline{x},\overline{y})\in\mathbb{N}^{m+k}$$

CVD

Corollario 2.14. *Le seguenti operazioni unarie sono elementari ricorsive:*

1. *la radice quadrata intera*
2. *l'eccesso quadratico*
3. *la funzione caratteristica dei quadrati*

Dimostrazione.

1. Osserviamo che poiché $n \leqslant n^2 \;\; \forall\, n \in \mathbb{N}$:

$$\lfloor \sqrt{x} \rfloor = \max\{n \in \{0, \ldots, x\} \mid n^2 \leqslant x\} = \min\{n \in \{0, \ldots, x\} \mid x < (n+1)^2\}$$

   Dunque considerata la relazione R definita come:

$$(x, y) \in R \;\Leftrightarrow\; x < \underbrace{(y+1)^2}_{=S(y)\cdot S(y)}$$

   abbiamo che R è una relazione elementare ricorsiva, in quanto:

$$\chi_R(x, y) = \chi_<(x, (y+1)^2) = \chi_<(x, S(y) \cdot S(y)) \quad \forall\, x, y \in \mathbb{N}$$

   cioè $K^2_2(\chi_<, I^2_0, S \circ I^2_1 \cdot S \circ I^2_1) \in \mathcal{E}$ e dunque, per la proposizione 2.12, la funzione $f(x, y) = \mu_{n \leqslant y} R(x, n) \;\; \forall\, x, y \in \mathbb{N}$ è elementare ricorsiva e inoltre:

$$\lfloor \sqrt{x} \rfloor = f(x, x) = \mu_{n \leqslant x} R(x, n) \quad \forall\, x \in \mathbb{N}$$

   cioè $K^2_1(f, I^2_0, I^2_0) \in \mathcal{E}$

2. Segue dal punto precedente in quanto $\lfloor \sqrt{n} \rfloor < n \;\; \forall\, n \in \mathbb{N}$ e quindi:

$$\mathrm{Exc}(x) = x - (\lfloor \sqrt{x} \rfloor)^2 = x \dot{-} (\lfloor \sqrt{x} \rfloor)^2 \quad \forall\, x \in \mathbb{N}$$

3. Segue dal fatto che:

$$Q(x) = \overline{\mathrm{sgn}}(\mathrm{Exc}(x)) \quad \forall\, x \in \mathbb{N}$$

CVD

Proposizione 2.15. *Le seguenti relazioni sono elementari ricorsive:*

1. *La relazione di divisibilità:*

$$| = \{(x_0, x_1) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x_0 | x_1\} = \{(x_0, x_1) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid \exists\, k \in \mathbb{N}\, (x_0 \cdot k = x_1)\}$$

2. *L'insieme dei numeri primi (positivi)* $\mathbb{P}$

Dimostrazione.

1. Per definizione di divisibilità abbiamo che:

$$x_0 | x_1 \Leftrightarrow \exists\, k \in \mathbb{N}\, (x_1 = x_0 \cdot k) \Leftrightarrow \exists\, k \leqslant x_1\, (x_1 = x_0 \cdot k)$$

   dunque, per la proposizione 2.11 sulla quantificazione vincolata, $|$ è una relazione elementare ricorsiva.

2. Per definizione di numero primo abbiamo che:

$$p \in \mathbb{P} \Leftrightarrow \forall\, x < p\, (x \nmid p \vee x = 1) \wedge p \neq 0 \wedge p \neq 1$$

   e analogamente al punto precedente, per la proposizione 2.11, $\mathbb{P}$ è un insieme elementare ricorsivo.

CVD

Corollario 2.16. *Le seguenti funzioni sono elementari ricorsive:*

1. *la funzione di enumerazione dei numeri primi* $\mathbf{p}$
2. *la funzione esponente del fattore primo* $(*)_*$

Dimostrazione.

1. Osserviamo che:
$$p_k \leqslant 2^{2^k} \qquad \forall\ k \in \mathbb{N}$$
tale disuguaglianza si dimostra per induzione su k:

   Base dell'induzione: $p_0 = 2 = 2^1 = 2^{2^0}$

   Passo induttivo: supponiamo che il risultato sia valido per ogni $n \leqslant k$, dunque per $n = k+1$ abbiamo che:
$$p_{k+1} \overset{\substack{\text{conseguenza del}\\ \text{teorema di Euclide}\\ \text{sull'infinità dei}\\ \text{numeri primi}}}{\leqslant} p_0 \cdot \ldots \cdot p_k - 1 \underset{\text{ipotesi induttiva}}{\leqslant} 2^{2^0} \cdot \ldots \cdot 2^{2^k} - 1 = 2^{\sum_{i=0}^{k} 2^i} - 1 = 2^{\frac{1-2^{k+1}}{1-2}} - 1 = 2^{2^{k+1}-1} - 1 \leqslant 2^{2^{k+1}}$$

   Sia:
$$Pr := \{(x,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x = p_k\}$$
dato che:
$$(x,k) \in Pr \Leftrightarrow x \in \mathbb{P} \wedge \sum_{i=0}^{x} \chi_{\mathbb{P}}(i) = k$$
Pr è elementare ricorsivo. Inoltre abbiamo che:
$$\mathbf{p}(k) = \mu_{x \leqslant 2^{2^k}} Pr(x,k) \qquad \forall\ k \in \mathbb{N}$$
e dunque per il corollario 2.13 abbiamo che $\mathbf{p}$ è elementare ricorsiva.

2. Osserviamo che:
$$(x_0)_{x_1} = \mu_{z \leqslant x_0}(p_{x_1}^z \mid x_0 \wedge p_{x_1}^{z+1} \nmid x_0) \qquad \forall\ (x_0, x_1) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$$
e dunque per il punto precedente e la proposizione 2.12 abbiamo che $(*)_*$ è elementare ricorsiva.

CVD

Definizione 2.9. *Data la funzione $(m+1)$-aria f sui naturali, l'**operatore di k-minimalizzazione limitata** della funzione f per un certo $k \in \mathbb{N}$ è la funzione $(m+1)$-aria:*

$$\begin{aligned} \mu_{f,k} &: \mathbb{N}^{m+1} \longrightarrow \mathbb{N} \\ &(\overline{x}, y) \longrightarrow \mu_{f,k}(\overline{x}, y) = \begin{cases} \min\{z \leqslant y \mid f(\overline{x}, z) = k\} & \textit{se } \{z \leqslant y \mid f(\overline{x}, z) = k\} \neq \varnothing \\ 0 & \textit{se } \{z \leqslant y \mid f(\overline{x}, z) = k\} = \varnothing \end{cases} \end{aligned}$$

Corollario 2.17. *Se $\mathcal{F} \supseteq \mathcal{E}$ è una famiglia di funzioni chiusa rispetto alla composizione di funzioni e alla somma e al prodotto generalizzati e $f \in \mathcal{F}$ è una funzione $(m+1)$-aria, allora la funzione $\mu_{f,k}$ appartiene ad $\mathcal{F}$.*

Dimostrazione. Osserviamo che detta R_k la relazione $(m+1)$-aria:

$$R_k := \{(\overline{x}, y) \in \mathbb{N}^{m+1} \mid f(\overline{x}, y) = k\}$$

che corrisponde alla controimmagine del valore k della funzione f, abbiamo che:

$$\mu_{f,k}(\overline{x}, y) = \mu_{z \leqslant y} R_k(\overline{x}, y)$$

R_k è una $\mathcal{F}$-relazione per la proposizione 2.8 in quanto $R_k(\overline{x}, y) = \mathrm{Gr}(f)(\overline{x}, y, c_k(y)) \ \ \forall\, (\overline{x}, y) \in \mathbb{N}^{m+1}$, dunque basta applicare la proposizione 2.12. CVD

Proposizione 2.18. *Data $\mathcal{F} \supseteq \mathcal{E}$ una famiglia di funzioni chiusa rispetto alla composizione di funzioni e alla somma e al prodotto generalizzati, siano f, g due funzione m-arie, tali che:*

$$\mathrm{Gr}(f) \text{ è una } \mathcal{F}\text{-relazione} \wedge g \in \mathcal{F} \wedge \ \forall\, \overline{x} \in \mathbb{N}^k \left(f(\overline{x}) \leqslant g(\overline{x})\right)$$

Allora $f \in \mathcal{F}$.

Dimostrazione. Il risultato segue dal fatto che:

$$f(\overline{x}) = \mu_{y \leqslant g(\overline{x})} \mathrm{Gr}(f)(\overline{x}, y) \quad \forall\, \overline{x} \in \mathbb{N}^m$$

CVD

Osservazione. *La proposizione 2.18 è, in parte, il viceversa del lemma 2.7.*

2.4 Funzioni definite per casi

Lemma 2.19 (sulle funzioni definite per casi)**.** *Data $\mathcal{F} \supseteq \mathcal{E}$ una famiglia di funzioni chiusa rispetto alla composizione di funzioni e alla somma e al prodotto generalizzati, siano $g_0, \dots, g_{m-1} \in \mathcal{F}$ funzioni n-arie e $R_0, \dots, R_{m-1}$ $\mathcal{F}$-relazioni n-arie a due a due disgiunte e tali che $\bigcup_{i<m} R_i = \mathbb{N}^n$, allora la funzione f definita come:*

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N}^n &\longrightarrow \mathbb{N} \\ \overline{x} &\longmapsto f(\overline{x}) = \begin{cases} g_0(\overline{x}) & se\ \overline{x} \in R_0 \\ g_1(\overline{x}) & se\ \overline{x} \in R_1 \\ \vdots & \\ g_{m-1}(\overline{x}) & se\ \overline{x} \in R_{m-1} \end{cases} \end{aligned}$$

appartiene ad $\mathcal{F}$.

Dimostrazione. La tesi segue in quanto: $f(\overline{x}) = g_0(\overline{x})\chi_{R_0}(\overline{x}) + \cdots + g_{m-1}(\overline{x})\chi_{R_{m-1}}(\overline{x}) \quad \forall\, \overline{x} \in \mathbb{N}^n$. CVD

Corollario 2.20. *Le seguenti funzioni sono elementari ricorsive:*

1. *la differenza troncata*
2. *la funzione minimo* $\min_k \ \ \forall\, k \in \mathbb{N}$
3. *la funzione massimo* $\max_k \ \ \forall\, k \in \mathbb{N}$
4. *la funzione resto*

3 Funzioni primitive ricorsive

3.1 Ricorsione e iterazione

Definizione 3.1 (Ricorsione primitiva)**.** *Date le funzioni f m-aria e g $(m+2)$-aria, si dice che la funzione $(m+1)$-aria h definita da:*

$$\begin{cases} h(\overline{x},0) = f(\overline{x}) \\ h(\overline{x},S(n)) = g(\overline{x},n,h(\overline{x},n)) \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \end{cases} \qquad \forall\, \overline{x} \in \mathbb{N}^m$$

è ottenuta tramite:

1. ***ricorsione primitiva*** *da f e g se $m > 0$ e in tal caso le variabili $\overline{x}$ da cui dipendono f e g sono dette **parametri della ricorsione**. (Scriviamo $h \equiv \mathbf{R}^m(f,g)$).*
2. ***ricorsione primitiva senza parametri*** *da $f() = a \in \mathbb{N}$ e g binaria se $m = 0$. (Scriviamo $h \equiv \mathbf{R}^0(f,g) \equiv \mathbf{R}^0(a,g)$).*

Definizione 3.2 (Schemi di ricorsione)**.** *Data una funzione $(m+1)$-aria h ottenuta tramite ricorsione primitiva con m parametri da f e g, diciamo che h è ottenuta tramite:*

1. ***ricorsione mista*** *da f e g se $g(\overline{x},y,z)$ dipende da $\overline{x}$, y e z.*

2. ***iterazione mista*** *da f e g se $g(\overline{x},y,z)$ non dipende dai parametri $\overline{x}$ e quindi:*

$$\begin{cases} h(\overline{x},0) = f(\overline{x}) \\ h(\overline{x},S(n)) = g(n,h(\overline{x},n)) \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \end{cases} \qquad \forall\, \overline{x} \in \mathbb{N}^m$$

   (Scriviamo $h \equiv \mathbf{I}^m(f,g)$).

3. ***pura ricorsione*** *da f e g se $g(\overline{x},y,z)$ non dipende dalla variabile y e quindi:*

$$\begin{cases} h(\overline{x},0) = f(\overline{x}) \\ h(\overline{x},S(n)) = g(\overline{x},h(\overline{x},n)) \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \end{cases} \qquad \forall\, \overline{x} \in \mathbb{N}^m$$

   (Scriviamo $h \equiv \mathbf{R}_p^m(f,g)$).

4. ***pura iterazione*** *da f e g se $g(\overline{x},y,z)$ dipende esclusivamente dalla variabile z e quindi:*

$$\begin{cases} h(\overline{x},0) = f(\overline{x}) \\ h(\overline{x},S(n)) = g(h(\overline{x},n)) \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \end{cases} \qquad \forall\, \overline{x} \in \mathbb{N}^m$$

   (Scriviamo $h \equiv \mathbf{I}_p^m(f,g)$).

Osservazione. *Osserviamo che grazie alle funzioni proiezione i vari schemi sono inclusi nello schema di ricorsione mista.*

Osservazione. *Nel caso della ricorsione primitiva senza parametri abbiamo che gli schemi sopraelencati si riducono a due, in quanto non c'è distinzione tra la ricorsione e l'iterazione.*
Essi sono:

1. ***ricorsione mista*** *da $a \in \mathbb{N}$ e g:*

$$\begin{cases} h(0) = a \\ h(S(n)) = g(n,h(n)) \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

2. ***ricorsione pura*** *da $a \in \mathbb{N}$ e g:*

$$\begin{cases} h(0) = a \\ h(S(n)) = g(h(n)) \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

3.2 Funzioni primitive ricorsive

Definizione 3.3. *La famiglia delle* ***funzioni primitive ricorsive*** $\mathcal{P}$ *è l'intersezione di tutte le famiglie di operazioni contenenti:*

1. *le funzioni proiezioni*

2. *la funzione successore*

e chiuse rispetto alla:

a. *composizione di funzioni*

b. *ricorsione primitiva (con e senza parametri)*

Equivalentemente: $\mathcal{P} := \mathrm{Clos}(\{I_k^n, S\}, \{K_n^m, \mathbf{R}^m\})$.

Proposizione 3.1. *Un'operazione f su $\mathbb{N}$ è una funzione primitiva ricorsiva se e solo se esiste una sequenza finita $(g_0, \dots, g_{k-1})$ di operazioni su $\mathbb{N}$ tale che:*

1. $g_{k-1} \equiv f$

2. $\forall\ i < k$ *vale una delle seguenti condizioni:*

   (a) $g_i \equiv S$

   (b) $g_i \equiv I_k^n$ *per un certo* $n \in \mathbb{N}$ *e* $k < n$

   (c) g_i *è* n*-aria ed* $\exists\ m > 0,\ \exists\ j < i, k_0, \dots, k_{m-i} < i$ *t.c.* g_j *è* m*-aria, le* $g_{k_0}, \dots, g_{k_{m-1}}$ *sono* n*-arie e* $g_i \equiv K_n^m(g_j, g_{k_0}, \dots, g_{k_{m-1}})$ *(cioè* g_i *è ottenuta dalle funzioni precedenti tramite composizione)*

   (d) g_i *è* m*-aria ed* $\exists\ j, h < i, m \in \mathbb{N}$ *t.c.* g_j *è* m*-aria,* g_h *è* $(m+2)$*-aria e* $g_i \equiv \mathbf{R}^m(g_i, g_h)$ *(cioè* g_i *è ottenuta dalle funzioni precedenti tramite ricorsione primitiva)*

Dimostrazione. La dimostrazione è analoga a quella della proposizione 2.1. CVD

3.3 Esempi di funzioni primitive ricorsive

Proposizione 3.2. *Se $\mathcal{F} \supseteq \mathcal{P}$ è una famiglia di funzioni chiusa rispetto alla composizione di funzioni e alla ricorsione primitiva (con e senza parametri) allora essa contiene tutte le funzioni elementari ricorsive ed è chiusa rispetto alla somma e al prodotto generalizzati.*
In particolare: *ogni funzione elementare ricorsiva è primitiva ricorsiva (e quindi $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}$).*

Dimostrazione. La tesi segue dal fatto che:

1. $P \equiv \mathbf{R}^0(0, I_0^2)$ infatti:

$$\begin{cases} P(0) = 0 \\ P(S(n)) = I_0^2(n, P(n)) \quad \forall\ n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

2. $* \dot{-} * \equiv \mathbf{R}^1(I_0^1, K_3^1(P, I_2^3))$ infatti:

$$\begin{cases} x \dot{-} 0 = I_0^1(x) \\ x \dot{-} S(n) = P(I_2^3(x, n, x \dot{-} n)) \quad \forall\ n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

3. $c_0 \equiv \mathbf{R}_p^0(0, I_0^1)$ in quanto:

$$\begin{cases} c_0(0) = 0 \\ c_0(S(x)) = I_0^1(c_0(n)) \quad \forall\ n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

4. $* + * \equiv \mathbf{R}^1(I_0^1, K_3^1(S, I_2^3))$ infatti:

$$\begin{cases} x + 0 = I_0^1(x) \\ x + S(n) = S(I_2^3(x, n, x+n)) \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

5. $* \cdot * \equiv \mathbf{R}^1(c_0, K_3^2(* + *, I_2^3, I_0^3))$ infatti:

$$\begin{cases} x \cdot 0 = c_0(x) \\ x \cdot S(n) = x \cdot n + x = I_2^3(x, n, x \cdot n) + I_0^3(x, n, x \cdot n) \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

6. $|* - *| \in \mathcal{P}$ in quanto:

$$|x_0 - x_1| = (x_0 \dot{-} x_1) + (x_1 \dot{-} x_0) \quad \forall\, x_0, x_1 \in \mathbb{N}$$

7. $\overline{\text{sgn}} \in \mathcal{P}$ in quanto:

$$\overline{\text{sgn}}(x) = 1 \dot{-} x \quad \forall\, x \in \mathbb{N}$$

8. $\text{sgn} \in \mathcal{P}$ in quanto:

$$\text{sgn}(x) = \overline{\text{sgn}}(\overline{\text{sgn}}(x)) \quad \forall\, x \in \mathbb{N}$$

9. $\text{rem} \equiv \mathbf{R}_p^1(c_0, g)$ con $g(x, z) = S(z) \cdot \text{sgn}\,(|x - S(z)|)$, infatti:

$$\begin{cases} \text{rem}(x, 0) = c_0(x) \\ \text{rem}(x, S(n)) = S(\text{rem}(x, n)) \cdot \text{sgn}\,(|x - S(\text{rem}(x, n))|) \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

10. $\lfloor */* \rfloor \equiv \mathbf{R}^1(c_0, g)$ con $g(x, y, z) = z + \overline{\text{sgn}}(|x - S(\text{rem}(x, y))|)$ infatti:

$$\begin{cases} \lfloor x/0 \rfloor = c_0(x) \\ \lfloor x/S(n) \rfloor = \lfloor x/n \rfloor + \overline{\text{sgn}}(|x - S(\text{rem}(x, n))|) \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

11. $\mathcal{F}$ è chiuso rispetto alla somma generalizzata, infatti siano $f \in \mathcal{F}$ m-aria e consideriamo $\sum f$, abbiamo che:

$$\begin{cases} \sum\limits_{y<0} f(x_0, \ldots, x_{m-2}, y) = c_0(I_0^{m-1}(x_0, \ldots, x_{m-2})) \\ \sum\limits_{y<S(n)} f(x_0, \ldots, x_{m-2}, y) = \sum\limits_{y<n} f(x_0, \ldots, x_{m-2}, y) + f(x_0, \ldots, x_{m-2}, n) \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

ovvero $\sum f = \mathbf{R}^{m-1}(c_0 \circ I_0^{m-1}, g)$ con $g(x_0, \ldots, x_{m-2}, y, z) = z + f(x_0, \ldots, x_{m-2}, y)$.

12. $\mathcal{F}$ è chiuso rispetto al prodotto generalizzato, infatti siano $f \in \mathcal{F}$ m-aria e consideriamo $\prod f$, abbiamo che:

$$\begin{cases} \prod\limits_{y<0} f(x_0, \ldots, x_{m-2}, y) = S(c_0(I_0^{m-1}(x_0, \ldots, x_{m-2}))) \\ \prod\limits_{y<S(n)} f(x_0, \ldots, x_{m-2}, y) = \prod\limits_{y<n} f(x_0, \ldots, x_{m-2}, y) \cdot f(x_0, \ldots, x_{m-2}, n) \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

ovvero $\prod f = \mathbf{R}^{m-1}(S \circ c_0 \circ I_0^{m-1}, g)$ con $g(x_0, \ldots, x_{m-2}, y, z) = z \cdot f(x_0, \ldots, x_{m-2}, y)$.

CVD

Osservazione. *Osserviamo che tale inclusione è stretta in quanto la funzione* a *definita dallo schema:*

$$\begin{cases} \text{a}(m, 0) = m \\ \text{a}(m, S(n)) = m^{\text{a}(m,n)} \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

è un esempio di funzione primitiva ricorsiva che non è elementare ricorsiva.

3.4 Aritmetizzazione e funzioni ricorsive primitive

3.4.1 Il metodo di aritmetizzazione

Richiamiamo il seguente risultato di algebra:

Teorema (fondamentale dell'aritmetica). *Ogni numero naturale $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$ si può scrivere come prodotto di numeri primi positivi. Tale scrittura è unica, a meno dell'ordine in cui compaiono i fattori.*

Dunque data una sequenza finita $(x_1, \dots, x_n)$ di n numeri naturali, essa può essere codificata in maniera univoca sfruttando l'unicità della fattorizzazione in fattori primi e quindi ponendo:

$$\langle (x_1, \dots, x_n) \rangle = p_0^n \cdot p_1^{x_1} \cdot \dots \cdot p_n^{x_n}$$

Osservazione. *In realtà sono possibili anche altre codifiche, ad esempio la sequenza $(x_0, \dots, x_n)$ di $n+1$ numeri naturali la si può codificare univocamente considerando:*

$$\langle (x_0, \dots, x_n) \rangle = p_0^{x_0+1} \cdot \dots \cdot p_n^{x_n+1}$$

Il sistema di decodifica per tale metodo è dato dalle seguenti funzioni e predicati (tutti primitivi ricorsivi):

- la funzione che dà la **k-esima componente** di una codifica x: $(x)_k$ con $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$
- la funzione **lunghezza** della codifica x: $\mathrm{len}(x) = (x)_0$
- la relazione che verifica se un numero corrisponde ad una possibile codifica:

  $$\mathrm{Seq}(x) \Leftrightarrow \ \forall\, k \leqslant x \left((k > 0 \wedge (x)_k \neq 0) \Rightarrow k \leqslant \mathrm{len}(x) \right)$$

  Se per un certo x vale che $x \in \mathrm{Seq}$, diciamo che x è un **numero di sequenza** e, in tal caso, la sequenza originale si ottiene tramite:

  $$((x)_1, \dots, (x)_{\mathrm{len}(x)})$$

  In generale scriviamo: $x = \langle ((x)_1, \dots, (x)_{\mathrm{len}(x)}) \rangle$.

Definizione 3.4. *Definiamo l'operazione di **concatenazione** di due sequenze come:*

$$\begin{aligned} * \frown * : \mathbb{N} \times \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{N} \\ (x,y) &\longmapsto x \frown y = \begin{cases} p_0^{\mathrm{len}(x)+\mathrm{len}(y)} \cdot p_1^{(x)_1} \cdot \dots \cdot p_{\mathrm{len}(x)}^{(x)_{\mathrm{len}(x)}} \cdot p_{\mathrm{len}(x)+1}^{(y)_1} \cdot \dots \cdot p_{\mathrm{len}(x)+\mathrm{len}(y)}^{(y)_{\mathrm{len}(y)}} & \textit{se } x,y \in \mathrm{Seq} \\ 0 & \textit{se } x \notin \mathrm{Seq} \vee y \notin \mathrm{Seq} \end{cases} \end{aligned}$$

Osservazione. *Se x e y corrispondono (rispettivamente) ai numeri di sequenza delle sequenze finite $(x_1, \dots, x_n)$ e $(y_1, \dots, y_m)$, allora $x \frown y$ corrisponde alla sequenza $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$.*

Osservazione. *Dal corollario 2.16 e dal lemma 2.19 sulla definizione per casi, segue che le operazioni di codifica, decodifica e concatenazione sono elementari ricorsive.*

3.4.2 La ricorsione del corso dei valori

Definizione 3.5. *Data una funzione $(m+1)$-aria f, chiamiamo la **funzione di cronologia** la funzione $(m+1)$-aria $\tilde{f}$:*

$$\begin{aligned} \tilde{f} : \mathbb{N}^{m+1} &\longrightarrow \mathbb{N} \\ (\overline{x}, y) &\longmapsto \tilde{f}(\overline{x}, y) = p_0^{y+1} \cdot p_1^{f(\overline{x},0)} \cdot \dots \cdot p_{y+1}^{f(\overline{x},y)} \end{aligned}$$

Osservazione. *Osserviamo che* $\forall\ (\overline{x}, y) \in \mathbb{N}^{m+1}$ *il valore* $\tilde{f}(\overline{x}, y)$ *codifica la sequenza:*

$$(f(\overline{x}, 0), \ldots, f(\overline{x}, y))$$

Lemma 3.3. *Data* $\mathcal{F} \supseteq \mathcal{P}$ *una famiglia di funzioni chiusa rispetto alla composizione di funzioni e alla ricorsione primitiva, allora:*

$$f \in \mathcal{F} \Leftrightarrow \tilde{f} \in \mathcal{F}$$

Dimostrazione.

$\Longrightarrow$ Osserviamo che $\tilde{f}$ è data dal seguente schema di ricorsione mista:

$$\begin{cases} \tilde{f}(\overline{x}, 0) = p_0^1 \cdot p_1^{f(\overline{x},0)} \\ \tilde{f}(\overline{x}, S(n)) = p_0^{S(n)+1} \cdot p_1^{f(\overline{x},0)} \cdot \ldots \cdot p_{S(n)+1}^{f(\overline{x},S(n))} = \tilde{f}(\overline{x}, n) \cdot p_0^1 \cdot p_{S(n)+1}^{f(\overline{x},S(n))} \quad \forall\ n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

e dunque segue la tesi.

$\Longleftarrow$ Segue dal fatto che:

$$f(\overline{x}, y) = (\tilde{f}(\overline{x}, y))_{y+1} \quad \forall\ (\overline{x}, y) \in \mathbb{N}^{m+1}$$

CVD

Teorema 3.4 (sulla ricorsione del corso dei valori)**.** *Data* $\mathcal{F} \supseteq \mathcal{P}$ *famiglia di funzioni chiusa rispetto alla composizione di funzioni e alla ricorsione primitiva,* f *funzione* $(m+1)$*-aria e* $h \in \mathcal{F}$ *una funzione* $(m+2)$*-aria tale che:*

$$f(\overline{x}, y) = h(\overline{x}, y, \tilde{f}(\overline{x}, y)) \quad \forall\ (\overline{x}, y) \in \mathbb{N}^{m+1}$$

allora $f \in \mathcal{F}$

Dimostrazione. Per il lemma precedente è sufficiente dimostrare che $\tilde{f} \in A$.
Osserviamo che analogamente alla prima parte della dimostrazione di tale lemma si ha che:

$$\begin{cases} \tilde{f}(\overline{x}, 0) = p_0^1 \cdot p_1^{h(\overline{x},0,\tilde{f}(\overline{x},0))} \\ \tilde{f}(\overline{x}, S(n)) = \tilde{f}(\overline{x}, n) \cdot p_0^1 \cdot p_{S(n)+1}^{h(\overline{x},S(n),\tilde{f}(\overline{x},S(n)))} \quad \forall\ n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

e dunque, poiché $h \in \mathcal{F}$, segue la tesi. CVD

3.5 Caratterizzazione delle funzioni ricorsive primitive

3.5.1 Riduzione degli schemi di ricorsione a schemi iterativi

Definizione 3.6. *Una funzione* $J : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ *biettiva è detta* ***funzione coppia****.*
Denotiamo con $R, L : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ *le funzioni inverse di* J *definite dall'equazione:*

$$J(R(n), L(n)) = n \quad \forall\ n \in \mathbb{N}$$

Osservazione (sulle funzioni coppia)**.** *Data una funzione coppia* $J : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ *le rispettive mappe inverse* $R, L : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ *soddisfano le seguenti equazioni:*

$$R(J(x, y)) = x \quad \forall\ x, y \in \mathbb{N} \qquad\qquad L(J(x, y)) = y \quad \forall\ x, y \in \mathbb{N}$$

Lemma 3.5. *Data una funzione ricorsiva primitiva* $(m+1)$*-aria (con* $m \geqslant 1$*)* $h \equiv \mathbf{R}^m(f, g)$ *ottenuta tramite lo schema di ricorsione mista da* f m*-aria e* g $(m+2)$*-aria:*

$$\begin{cases} h(\overline{x}, 0) = f(\overline{x}) \\ h(\overline{x}, S(n)) = g(\overline{x}, n, h(\overline{x}, n)) \quad \forall\ n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

si ha che:

$$h \in \mathrm{Clos}(\{I_k^n, S, * + *, * \dot{-} *, *^2, \lfloor\sqrt{*}\rfloor\}, \{K_n^m, \mathbf{I}_p^1\})$$

Dimostrazione. Consideriamo come funzione coppia e rispettive funzioni inverse le funzioni:

$$J(x,y) = (x+y)^2 + x \qquad R(x) = \mathrm{Exc}(x) \qquad L(x) = \lfloor\sqrt{x}\rfloor - \mathrm{Exc}(x)$$

Consideriamo il caso in cui $m = 2$, lo schema di ricorsione mista diventa:

$$\begin{cases} h(x_0, x_1, 0) = f(x_0, x_1) \\ h(x_0, x_1, S(n)) = g(x_0, x_1, n, h(x_0, x_1, n)) \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

abbiamo che la funzione $h'(x_0, n) = h(R(x_0), L(x_0), n)$ è ottenibile tramite lo schema di ricorsione mista con un parametro ($h' \equiv \mathbf{R}^1(f', g')$):

$$\begin{cases} h'(x_0, 0) = f'(x_0) \\ h'(x_0, S(n)) = g'(x_0, n, h'(x_0, n)) \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

dove:

$$f'(x_0) = f(R(x_0), L(x_0)) \qquad g'(x_0, y, z) = g(R(x_0), L(x_0), y, z)$$

dunque $h(x_0, x_1, n) = h'(J(x_0, x_1), n)$.
Quindi ci siamo ricondotti al caso in cui $m = 1$ e la funzione è definita con lo schema di ricorsione mista, osserviamo che se per m generico basterebbe applicare questo passaggio $m - 1$ volte.
Consideriamo quindi la funzione $h''(x_0, n) = J(x_0, h'(x_0, n))$, essa è ottenibile tramite lo schema di iterazione mista con un parametro ($h'' \equiv \mathbf{I}^1(f'', g'')$):

$$\begin{cases} h''(x_0, 0) = f''(x_0) \\ h''(x_0, S(n)) = g''(n, h''(x_0, n)) \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

con:

$$f''(x_0) = J(x_0, f'(x_0)) \qquad g''(y, z) = J(R(z), g'(R(z), y, L(z)))$$

quindi $h'(x_0, n) = L(h''(x_0, n))$.
Infine, presa la funzione $\tilde{h}(x_0, n) = J(n, h''(x_0, n))$, abbiamo che $\tilde{h} \equiv \mathbf{I}^1_p(\tilde{f}, \tilde{g})$:

$$\begin{cases} \tilde{h}(x_0, 0) = \tilde{f}(x_0) \\ \tilde{h}(x_0, S(n)) = \tilde{g}(\tilde{h}(x_0, n)) \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

dove:

$$\tilde{f}(x_0) = J(0, f''(x_0)) \qquad \tilde{g}(z) = J(S(R(z)), g''(R(z), L(z)))$$

pertanto $h''(x_0, n) = L(\tilde{h}(x_0, n))$.
Dato che le funzioni J, R e L scelte sono esprimibili tramite composizioni a partire da:

$$I^n_k \quad c_0 \quad S \quad * + * \quad * \dot{-} * \quad *^2 \quad \lfloor\sqrt{*}\rfloor$$

e che $c_0 \equiv \mathbf{R}^0_p(0, I^1_0)$ abbiamo che segue la tesi. CVD

Lemma 3.6. *Data una funzione ricorsiva primitiva $(m+1)$-aria (con $m \geqslant 0$) $h \equiv \mathbf{R}^m(f, g)$ ottenuta tramite lo schema di ricorsione mista da f m-aria e g $(m+2)$-aria:*

$$\begin{cases} h(\overline{x}, 0) = f(\overline{x}) \\ h(\overline{x}, S(n)) = g(\overline{x}, n, h(\overline{x}, n)) \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

si ha che:

$$h \in \mathrm{Clos}(\{I^n_k, S, * + *, * \dot{-} *, *^2, \lfloor\sqrt{*}\rfloor, * \cdot *, \overline{\mathrm{sgn}}\}, \{K^m_n, \mathbf{R}^0_p(0, *)\})$$

Dimostrazione. Consideriamo come funzione coppia e rispettive funzioni inverse le funzioni:

$$J(x,y) = ((x+y)^2+x)^2+y \qquad R(x) = \mathrm{Exc}(\lfloor\sqrt{x}\rfloor) \qquad L(x) = \mathrm{Exc}(x)$$

tale scelta è giustificata dal fatto che esse soddisfano le seguenti proprietà:

- $J(0,0) = 0$ (e quindi $R(0) = 0$ e $L(0) = 0$)
- $L(S(x)) \neq 0 \Rightarrow \big(R(S(x)) = R(x) \wedge L(S(x)) = S(L(x))\big) \quad \forall\, x \in \mathbb{N}$
  Infatti:
  - da $\mathrm{Exc}(S(x)) \neq 0$ segue che $\mathrm{Exc}(S(x)) = S(\mathrm{Exc}(x))$
  - preso $y \in \mathbb{N}$ tale che $x = y^2 + \mathrm{Exc}(x) < (y+1)^2$ abbiamo che:

    $$y^2 \leqslant x < (y+1)^2 \ \wedge\ y^2 \leqslant x+1 < (y+1)^2$$

    da cui segue che $y = \lfloor\sqrt{x}\rfloor = \lfloor\sqrt{S(x)}\rfloor$

Queste funzioni, come quelle del lemma precedente, sono esprimibili tramite composizioni a partire da:

$$I^n_k \quad c_0 \quad S \quad *+* \quad *\dot{-}* \quad *^2 \quad \lfloor\sqrt{*}\rfloor$$

(Ricordiamo che $c_0 \equiv \mathbf{R}^0_p(0, I^1_0)$).
Per quanto mostrato nella dimostrazione del lemma precedente abbiamo che l'iterazione mista con un parametro con l'aggiunta delle funzioni sopraelencate e la composizione è sufficiente per definire una qualsiasi funzione ricorsiva primitiva. Dunque partiamo da una funzione $h \equiv \mathbf{I}^1(f,g)$ ottenuta con tale schema:

$$\begin{cases} h(x_0, 0) = f(x_0) \\ h(x_0, S(n)) = g(n, h(x_0, n)) \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

tale schema può essere ulteriormente semplificato considerando la funzione $\dot{h}$ tale che $h(x_0, n) = \dot{h}(f(x_0), n)$ la quale è ottenuta da:

$$\begin{cases} \dot{h}(x_0, 0) = x_0 = I^1_0(x_0) \\ \dot{h}(x_0, S(n)) = g(n, \dot{h}(x_0, n)) \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Osserviamo che $h'(n) = \dot{h}(R(n), L(n))$ è ottenibile tramite lo schema di ricorsione/iterazione mista senza parametri $h' \equiv \mathbf{R}^0(0, g')$:

$$\begin{cases} h'(0) = 0 \\ h'(S(n)) = g'(n, h'(n)) \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

con:

$$g'(y,z) = \begin{cases} R(S(y)) & \text{se } L(S(y)) = 0 \\ g(L(y), z) & \text{se } L(S(y)) \neq 0 \end{cases} = \overline{\mathrm{sgn}}(L(S(y))) \cdot R(S(y)) + \mathrm{sgn}(L(S(y))) \cdot g(L(y), z)$$

(tale definizione è possibile per le proprietà della funzione coppia scelta).
Dunque $\dot{h}(x_0, n) = h'(J(x_0, n))$.
Osserviamo che per definire la funzione g' è necessario aggiungere $* \cdot *$ e $\overline{\mathrm{sgn}}$ (poiché $\mathrm{sgn} \equiv \overline{\mathrm{sgn}} \circ \overline{\mathrm{sgn}}$).
Analogamente alla dimostrazione del lemma precedente abbiamo che la funzione $\tilde{h}(n) = J(n, h'(n))$ è ottenibile tramite lo schema di ricorsione/iterazione pura senza parametri $\tilde{h} = \mathbf{R}^0_p(0, \tilde{g})$:

$$\begin{cases} \tilde{h}(0) = 0 \\ \tilde{h}(S(n)) = \tilde{g}(\tilde{h}(n)) \end{cases}$$

dove:

$$\tilde{g}(z) = J(S(R(z)), g'(R(z), L(z)))$$

quindi $h'(n) = L(\tilde{h}(x))$ e pertanto segue la tesi. CVD

Osservazione. *Dato che:*

$$x_0 \cdot x_1 = \lfloor ((x_0 + x_1)^2 \dot{-} x_0^2 \dot{-} x_1^2)/2 \rfloor \quad \forall\ (x_0, x_1) \in \mathbb{N}^2$$

nelle funzioni del lemma precedente si può sostituire $* \cdot *$ *con* $\lfloor */2 \rfloor$.

3.5.2 Caratterizzazione delle funzioni ricorsive primitive

Teorema 3.7 (di Raphael M. Robinson)**.** *Considerata la famiglia delle funzioni primitive ricorsive* $\mathcal{P}$ *si ha che:*

1. $\mathcal{P} = \mathrm{Clos}(\{I_k^n, S\}, \{K_n^m, \mathbf{R}^1\})$
2. $\mathcal{P} = \mathrm{Clos}(\{I_k^n, S\}, \{K_n^m, \mathbf{I}^1\})$
3. $\mathcal{P} = \mathrm{Clos}(\{I_k^n, S, P\}, \{K_n^m, \mathbf{R}_p^1\})$
4. $\mathcal{P} = \mathrm{Clos}(\{I_k^n, S, Q\}, \{K_n^m, \mathbf{I}_p^1\})$
5. $\mathcal{P} = \mathrm{Clos}(\{I_k^n, S, * + *, Q\}, \{K_n^m, \mathbf{R}^0(0, *)\})$
6. $\mathcal{P} = \mathrm{Clos}(\{I_k^n, S, * + *, \mathrm{Exc}\}, \{K_n^m, \mathbf{R}_p^0(0, *)\})$

Tabella 1: Tabella riassuntiva

	Un parametro		Nessun parametro e $a = 0$
	Ricorsione	Iterazione	
Mista	I_k^n, S	I_k^n, S	$I_k^n, S, * + *, Q$
Pura	I_k^n, S, P	I_k^n, S, Q	$I_k^n, S, * + *, \mathrm{Exc}$

Osservazione.

Dimostrazione. Per il lemma 3.5 è sufficiente mostrare che le funzioni:

$$* + * \qquad * \dot{-} * \qquad *^2 \quad \lfloor \sqrt{*} \rfloor \quad \lfloor */2 \rfloor \quad \overline{\mathrm{sgn}}$$

sono definibili tramite ciascuno degli schemi considerati a partire dalle relative funzioni aggiunte.

1. 2. $* + *$**:** Abbiamo che $* + * \equiv \mathbf{I}_p^1(I_0^1, S)$, infatti:

$$\begin{cases} x + 0 = I_0^1(x) \\ x + S(n) = S(x + n) \quad \forall\ n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$* \dot{-} *$**:** Come visto nella dimostrazione della proposizione 3.2 la funzione predecessore è ottenibile come $P \equiv \mathbf{R}^0(0, I_0^2)$, e che la differenza troncata (analogamente alla somma) è $* \dot{-} * \equiv \mathbf{I}_p^1(I_0^1, P)$:

$$\begin{cases} x \dot{-} 0 = I_0^1(x) \\ x \dot{-} S(n) = P(x \dot{-} n) \quad \forall\ n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$*^2$**:** Abbiamo che $*^2 \equiv \mathbf{R}^0(0, g)$ con $g(y,z) = z + 2y + 1$ [3]:

$$\begin{cases} 0^2 = 0 \\ (S(n))^2 = n^2 + 2n + 1 \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$\overline{\text{sgn}}$**:** Osserviamo che $\overline{\text{sgn}} \equiv \mathbf{R}^0_p(1, c_0)$:

$$\begin{cases} \overline{\text{sgn}}(0) = 1 \\ \overline{\text{sgn}}(S(n)) = c_0(n) \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$\lfloor */2 \rfloor$**:** Consideriamo la funzione $\text{rem}(*, 2) \equiv \mathbf{R}^0_p(0, \overline{\text{sgn}})$:

$$\begin{cases} \text{rem}(0,2) = 0 \\ \text{rem}(S(n), 2)) = \overline{\text{sgn}}(\text{rem}(n,2)) \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

dunque abbiamo $\lfloor */2 \rfloor \equiv \mathbf{R}^0(0, g)$ con $g(y,z) = \text{rem}(y,2) + z$:

$$\begin{cases} \lfloor 0/2 \rfloor = 0 \\ \lfloor S(n)/2 \rfloor = \text{rem}(n,2) + \lfloor n/2 \rfloor \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$\lfloor \sqrt{*} \rfloor$**:** Abbiamo che $\lfloor \sqrt{*} \rfloor \equiv \mathbf{R}^0(0, g)$ con $g(y,z) = z + \overline{\text{sgn}}((S(z))^2 \dot{-} S(y))$:

$$\begin{cases} \lfloor \sqrt{0} \rfloor = 0 \\ \lfloor \sqrt{S(n)} \rfloor = \lfloor \sqrt{n} \rfloor + \overline{\text{sgn}}((S(\lfloor \sqrt{n} \rfloor))^2 \dot{-} S(n)) \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

3. $* + *$**:** Identica al caso 1.

   $* \dot{-} *$**:** Dato che la funzione predecessore P è tra quelle aggiunte, si procede definendo $* \dot{-} *$ come nel caso 1.

   $*^2$**:** Osserviamo che $* \cdot * \equiv \mathbf{R}^1_p(c_0, g)$ con $g(x,z) = x + z$:

$$\begin{cases} x \cdot 0 = c_0(x) \\ x \cdot S(n) = x \cdot n + x \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

   dunque abbiamo anche $x^2 = x \cdot x$.

   $\overline{\text{sgn}}$**:** Identica al caso 1.

   $\lfloor */2 \rfloor$**:** Consideriamo la funzione $\text{rem}(*, 3) \equiv \mathbf{R}^0_p(0, g)$ con $g(z) = \overline{\text{sgn}}(z) + 2\overline{\text{sgn}}((z \dot{-} 1) + (1 \dot{-} z))$:

$$\begin{cases} \text{rem}(0,3) = 0 \\ \text{rem}(S(n), 3)) = \overline{\text{sgn}}(\text{rem}(n,3)) + 2\overline{\text{sgn}}((\text{rem}(n,3) \dot{-} 1) + (1 \dot{-} \text{rem}(n,3))) \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

   dunque posta $\tilde{h} \equiv \mathbf{R}^0_p(0, \tilde{g})$ con $\tilde{g}(z) = S(z) + \text{rem}(z,3)$ abbiamo che:

$$\lfloor x/2 \rfloor = \tilde{h}(x) \dot{-} x \quad \forall\, x \in \mathbb{N}$$

[3]In questa dimostrazione per semplificare la leggibilità delle funzioni usiamo le seguenti convenzioni:

(a) fissato un numero $n \in \mathbb{N}$, nx significa $\underbrace{x + x + \cdots + x}_{n\text{-volte}}$

(b) $* + * + \cdots + *$ significa $* + (* + \cdots (* + *) \cdots)$

$\lfloor\sqrt{*}\rfloor$**:** Consideriamo la funzione $h(x) = x + 2\lfloor\sqrt{x}\rfloor$, abbiamo che:

$$h(S(x)) = S(h(x)) + 2Q(S(x)) \quad \forall\, x \in \mathbb{N}$$

Osserviamo che valgono le seguenti equivalenze:

$$\begin{aligned}\exists\, q \in \mathbb{N}\,(q^2 = S(x)) &\Leftrightarrow \exists\, n \in \mathbb{N}\,(x = n^2 + 2n)\\ &\Leftrightarrow \exists\, m \in \mathbb{N}\,(h(x) = m^2 + 4m) \Leftrightarrow \exists\, p \in \mathbb{N}\,(p^2 = h(x) + 4)\end{aligned}$$

e dunque $Q(S(x)) = Q(h(x) + 4)$.
Pertanto la funzione $h \equiv \mathbf{R}^0_p(0, g)$ con $g(z) = S(z) + 2Q(z + 4)$:

$$\begin{cases} h(0) = 0 \\ h(S(n)) = S(h(n)) + 2Q(h(n) + 4) \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Inoltre si ha che $\lfloor\sqrt{x}\rfloor = \lfloor(h(x) - x)/2\rfloor$ e quindi per provare la tesi è sufficiente mostrare che la funzione Q è definibile a partire dalla funzione predecessore P.
Consideriamo la funzione $h' \equiv \mathbf{R}^1_p(0, g')$ con $g'(x, z) = S(z) + \overline{\mathrm{sgn}}((z^2 \dot{-} x) + (x \dot{-} z^2))$:

$$\begin{cases} h'(x, 0) = 0 \\ h'(x, S(n)) = S(h'(x, n)) + \overline{\mathrm{sgn}}(((h'(x, n))^2 \dot{-} x) + (x \dot{-} (h'(x, n))^2)) \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Osserviamo che:

$$h'(x, y) = \begin{cases} y & \text{se } y^2 \leqslant x \\ y + Q(x) & \text{se } y^2 > x \end{cases}$$

Quindi segue che $Q(x) = h(x, S(x)) \dot{-} S(x)$.

4. $* + *$**:** Identica al caso 1.

   $*^2$**:** Essendo la funzione caratteristica dei quadrati Q tra quelle aggiunte si può definire $*^2$ come fatto nel caso 3 per la funzione $\lfloor\sqrt{*}\rfloor$, infatti possiamo definire la funzione $h(x) = x + 2\lfloor\sqrt{x}\rfloor$ da cui abbiamo che $*^2 \equiv \mathbf{R}^0_p(0, K^1_1(S, h))$:

$$\begin{cases} 0^2 = 0 \\ (S(n))^2 = S(h(n)) \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

   $* \dot{-} *$**:** Una volta ricavata la funzione predecessore P a partire dalla funzione caratteristica dei quadrati Q, si procede definendo $* \dot{-} *$ come nel caso 1. Dunque consideriamo la funzione binaria $h(x, y) = x \cdot \overline{\mathrm{sgn}}(y)$, osserviamo che $h \equiv \mathbf{I}^1_p(I^1_0, c_0)$:

$$\begin{cases} h(x, 0) = I^1_0(x) \\ h(x, S(n)) = c_0(n) \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Dunque considerata $\mathrm{rem}(*, 2) \equiv \mathbf{R}^0_p(0, h(1, *)) \equiv \mathbf{R}^0_p(0, \overline{\mathrm{sgn}})$ e $j(x) = h(1, Q(x)) = \overline{\mathrm{sgn}}(Q(x))$ possiamo definire la funzione caratteristica dei quadrati dei numeri dispari:

$$\mathrm{rem}(x, 2) \cdot Q(x) = h(\mathrm{rem}(x, 2), j(x)) \quad \forall\, x \in \mathbb{N}$$

Consideriamo inoltre $\tilde{f}(x) = x^2 + x + 1$ e:

$$\tilde{g}(z) = S(S(z)) \cdot \overline{\mathrm{sgn}}(\mathrm{rem}(z, 2) \cdot Q(z)) = \begin{cases} 0 & \text{se } z \text{ è il quadrato di un numero dispari} \\ z + 2 & \text{se } z \text{ altrimenti} \end{cases}$$

da cui definiamo $\tilde{h} \equiv \mathbf{I}^1_p(\tilde{f}, \tilde{g})$.

Osserviamo che, dato un numero x pari e diverso da 0, $\tilde{h}(x) = x - 2$ in quanto:

- Da $x^2 + x + 1$ le prime $\dfrac{x}{2}$ addizioni di 2 (ovvero applicazioni di $\tilde{g}$) portano ad ottenere $x^2 + 2 \cdot x + 1 = (x+1)^2$ che è il quadrato del successore di x
- la successiva applicazione di $\tilde{g}$ dà 0
- infine le ultime $\dfrac{x}{2} - 1$ applicazioni di $\tilde{g}$ danno $x - 2$

Dunque è possibile definire:

$$P(x) = \overline{\mathrm{sgn}}(\overline{\mathrm{sgn}}(x)) \cdot \overline{\mathrm{sgn}}(\mathrm{rem}(x,2)) \cdot S(\tilde{h}(x)) + \mathrm{rem}(x,2) \cdot \tilde{h}(S(n)) \qquad \forall\, x \in \mathbb{N}$$

osserviamo che entrambi i termini di tale somma sono definibili tramite composizioni delle funzioni sopradefinite.

$\overline{\mathrm{sgn}}$: Identica al caso 1.

$\lfloor */2 \rfloor$: Identica al caso 3.

$\lfloor \sqrt{*} \rfloor$: Essendo la funzione Q tra quelle aggiunte la si può definire come nel caso 3.

5. **$* + *$:** La funzione è tra quelle aggiunte.

$\overline{\mathrm{sgn}}$: Osserviamo che $\mathrm{sgn} \equiv \mathbf{R}^0_p(0, S \circ c_0)$ in quanto:

$$\begin{cases} \mathrm{sgn}(0) = 0 \\ \mathrm{sgn}(S(n)) = S(c_0(\mathrm{sgn}(n))) \qquad \forall\, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

dunque usando la funzione Q abbiamo che:

$$\overline{\mathrm{sgn}}(n) = Q(S(\mathrm{sgn}(n))) \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

$*^2$: Identica al caso 1.

$\lfloor \sqrt{*} \rfloor$: Identica al caso 1.

$* \dot{-} *$: Definita la funzione $\mathrm{rem}(*, 2) \equiv \mathbf{R}^0_p(0, \overline{\mathrm{sgn}})$, consideriamo la funzione $h \equiv \mathbf{R}^0(0, g)$ con $g(y,z) = P(z + 2\,\mathrm{rem}(\lfloor \sqrt{y} \rfloor, 2))$:

$$\begin{cases} h(0) = 0 \\ h(S(n)) = P(h(n) + 2\,\mathrm{rem}(\lfloor \sqrt{n} \rfloor, 2)) \qquad \forall\, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

(osserviamo che la funzione g è mediante composizioni a partire da $P, \mathrm{rem}(*, 2), * + *, \lfloor \sqrt{*} \rfloor$ che sono tutte definibili tramite la ricorsione mista senza parametro).
È facile notare che:

$$h(S(n)) = \begin{cases} P(h(n)) & \text{se } \lfloor \sqrt{n} \rfloor \text{ è pari} \\ S(h(n)) & \text{se } \lfloor \sqrt{n} \rfloor \text{ è dispari} \end{cases}$$

quindi $h(n) = \mathrm{Exc}(n)$ se $\lfloor \sqrt{n} \rfloor$ è dispari e pertanto:

$$h((2x_0 + 2x_1)^2 + 5x_0 + 3x_1 + 1) = x_0 - x_1 \quad \text{se } x_0 \geqslant x_1$$ [4]

dato che il precedente quadrato di $(2x_0+2x_1)^2+5x_0+3x_1+1$ è $(2x_0+2x_1)^2+4x_0+4x_1+1$.

$\lfloor */2 \rfloor$: Identica al caso 1.

[4] Per semplicità ci limitiamo a trovare una funzione differenza $* - *$ e non la differenza troncata $* \dot{-} *$ definibile a partire da essa.

6. $* + *$: La funzione è tra quelle aggiunte.

   $\overline{\text{sgn}}$: Definiamo la funzione sgn allo stesso modo del punto 5., quindi usando $*+*$ e Exc abbiamo che:

$$\overline{\text{sgn}}(n) = \text{Exc}(2 + 2\ \text{sgn}(n)) \qquad \forall\ n \in \mathbb{N}$$

   $*^2$: Definita $Q \equiv \overline{\text{sgn}} \circ \text{Exc}$ (cioè a partire da $* + *$ e Exc) possiamo definire $*^2$ come nel caso 4.

   $* \dot{-} *$: Analogamente nel caso 5 è possibile definire la funzione $* \dot{-} *$ a partire da $* + *$ e Exc in quanto:

$$\text{Exc}((x + y)^2 + 3x + y + 1) = x - y \quad \text{se } x \geqslant y$$

   dato che, in tal caso, il precedente quadrato di $(x+y)^2+3x+y+1$ è $(x+y)^2+2x+2y+1$.

   $\lfloor */2 \rfloor$: Identica al caso 3.

   $\lfloor \sqrt{*} \rfloor$: Essendo la funzione caratteristica dei quadrati Q ricavabile a partire da quelle date si può procedere come nel caso 3.

CVD

Osservazione. *Come mostrato da M.D. Gladstone* [5] *sono possibili ulteriori miglioramenti e ampliamenti nel teorema precedente riassumibili tramite la seguente tabella:*

Tabella 2: Tabella riassuntiva

	Un parametro		Nessun parametro	
	Ricorsione	Iterazione	a generico	$a = 0$
Mista	I_k^n, S	I_k^n, S	$I_k^n, S, * + *$	$I_k^n, S, * + *, Q$
Pura	I_k^n, S	I_k^n, S	$I_k^n, S, * + *, \text{Exc}$	$I_k^n, S, * + *, \text{Exc}$

tuttavia non sono riportate le dimostrazioni in quanto al di fuori degli obiettivi di questa tesi.

[5] Tali risultati sono riportati nei seguenti articoli:

1. Gladstone, M. D. «A Reduction of the Recursion Scheme». In: *The Journal of Symbolic Logic* 32, no. 4 (1967), pp. 505–8. URL: https://doi.org/10.2307/2270177.

2. Gladstone, M. D. «Simplifications of the Recursion Scheme». In: *The Journal of Symbolic Logic* 36, no. 4 (1971), pp. 653–65. URL: https://doi.org/10.2307/2272468.

3.6 Caratterizzazione delle funzioni ricorsive primitive unarie

Definizione 3.7. *Indichiamo con $\mathcal{P}_1$ la famiglia delle **funzioni primitive ricorsive unarie**:*

$$\mathcal{P}_1 := \mathcal{P} \cap \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$$

dove $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} := \{f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}\}$ è l'insieme delle operazioni unarie sui numeri naturali.

Proposizione 3.8. *Considerata la famiglia delle funzioni primitive ricorsive $\mathcal{P}$ si ha che:*

$$\mathcal{P} = \mathrm{Clos}(\mathcal{P}_1 \cup \{* + *, I_k^n\}, \{K_n^m\})$$

Dimostrazione. Consideriamo come funzione coppia e rispettive funzioni inverse le funzioni[6]:

$$J(x,y) = (x+y)^2 + x \qquad R(x) = \mathrm{Exc}(x) \qquad L(x) = \lfloor\sqrt{x}\rfloor - \mathrm{Exc}(x)$$

Presa la funzione ricorsiva primitiva binaria h, sia:

$$h'(x) = h(R(x), L(x)) \quad \forall\, x \in \mathbb{N}$$

essa, come mostrato nei lemmi 3.5 e 3.6, è una funzione funzione ricorsiva primitiva unaria e inoltre $h \equiv K_2^1(h', J)$. Quindi h è ottenuta tramite composizione a partire dalle funzioni:

$$h' \quad *^2 \quad * + * \quad I_0^2$$

e pertanto segue la tesi per le funzioni binarie.
Per le funzioni di $m > 2$ variabili è sufficiente applicare lo stesso ragionamento $m-1$ volte. CVD

Teorema 3.9 (Teorema A)**.** *Dato un insieme di funzioni $\mathcal{I}$, si ha che:*

$$\mathrm{Clos}(\mathcal{I}, \{K_n^m, \mathbf{R}_p^0\}) \cap \mathbb{N}^{\mathbb{N}} = \mathrm{Clos}(\mathcal{I}, \{K_1^m, \mathbf{R}_p^0\}) \cap \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$$

Dimostrazione. Detti:

- $\mathcal{F}_1 := \mathrm{Clos}(\mathcal{I}, \{K_1^m, \mathbf{R}_p^0\})$
- $\mathcal{F}_2 := \mathrm{Clos}(\mathcal{I}, \{K_n^m, \mathbf{R}_p^0\})$

dobbiamo dimostrare che: $\mathcal{F}_2 \cap \mathbb{N}^{\mathbb{N}} = \mathcal{F}_1 \cap \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$:

$\supseteq$: Ovvio.

$\subseteq$: Considerato $\mathcal{G} := \mathrm{Clos}(\mathcal{F}_1, \{K_n^m\})$ abbiamo che:

1. $\mathcal{G} \cap \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}_1$ infatti: osserviamo che nel definire una funzione unaria per successive composizioni, se le composizioni più interne vengono svolte per prime, si necessita di definire per composizione solo funzioni unarie; dunque una funzione unaria definita per composizione a partire da funzioni in $\mathcal{F}_1$ appartiene ancora a $\mathcal{F}_1$.
2. $\mathcal{F}_2 \subseteq \mathcal{G}$ infatti: $\mathcal{G}$ contiene tutte le funzioni di $\mathcal{I}$ ed è chiusa rispetto alla composizione; inoltre è chiusa anche rispetto allo schema di ricorsione pura per $a \in \mathbb{N}$ e $g \in \mathcal{F}_1$ (e quindi per il punto precedente per $g \in \mathcal{G} \cap \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$) quindi $\mathcal{G}$ contiene tutte le funzioni di $\mathcal{F}_2$

Quindi segue la tesi.

CVD

[6]Sono le stesse funzioni considerate nella dimostrazione del lemma 3.5.

Teorema 3.10 (Teorema B). *Dato un insieme di funzioni $\mathcal{I} \supseteq \{I_k^n, * + *\}$ in cui a parte I_k^n e $* + *$ tutte le funzioni sono unarie, si ha che:*

$$\mathrm{Clos}(\mathcal{I}, \{K_n^m, \mathbf{R}_p^0\}) \cap \mathbb{N}^{\mathbb{N}} = \mathrm{Clos}(\mathcal{I} \cap \mathbb{N}^{\mathbb{N}}, \{* + *, K_1^1, \mathbf{R}_p^0\})$$

Dimostrazione. Detti:

- $\mathcal{F} := \mathrm{Clos}(\mathcal{I}, \{K_n^m, \mathbf{R}_p^0\}) \cap \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$
- $\mathcal{G} := \mathrm{Clos}(\mathcal{I} \cap \mathbb{N}^{\mathbb{N}}, \{* + *, K_1^1, \mathbf{R}_p^0\})$

dobbiamo dimostrare che $\mathcal{F} = \mathcal{G}$

$\supseteq$: Ovvio.

$\subseteq$: Per il teorema 3.9 per ottenere $\mathcal{F}$ è sufficiente usare la composizione per definire funzioni unarie (cioè K_1^m al posto della composizione generica).
Dunque abbiamo che:

- date $f_0, \ldots, f_{n-1} \in \mathcal{I} \cap \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}$ allora $K_1^n(I_k^n, f_0, \ldots, f_{n-1}) = f_k \in \mathcal{G}$
- date $f, g \in \mathcal{I} \cap \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}$ allora $K_1^2(* + *, f, g) = f + g \in \mathcal{G}$
- date $f, g \in \mathcal{I} \cap \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}$ allora $K_1^1(f, g) \in \mathcal{G}$

CVD

Osservazione. *I teoremi 3.9 e 3.10 sono validi anche se si considera lo schema di ricorsione pura senza parametri $\mathbf{R}_p^0(0, *)$ al posto dello schema di ricorsione pura senza parametri generico.*

Teorema 3.11 (Teorema C). *Considerata la famiglia delle funzioni primitive ricorsive unarie $\mathcal{P}_1$ si ha che:*

$$\mathcal{P}_1 = \mathrm{Clos}(\{S, \mathrm{Exc}\}, \{* + *, K_1^1, \mathbf{R}_p^0(0, *)\})$$

Dimostrazione. Diciamo:

$$\mathcal{F} := \mathrm{Clos}(\{S, \mathrm{Exc}\}, \{* + *, K_1^1, \mathbf{R}_p^0(0, *)\})$$

Osserviamo che la funzione identità $I_0^1 = \mathbf{R}_p^0(0, S)$ in quanto:

$$\begin{cases} I_0^1(0) = 0 \\ I_0^1(S(n)) = S(I_0^1(n)) \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

quindi $I_0^1 \in \mathcal{F}$ e per il teorema 3.10 abbiamo che:

$$\mathcal{F} = \mathrm{Clos}(\{I_k^n, S, * + *, \mathrm{Exc}\}, \{K_n^m, \mathbf{R}_p^0(0, *)\}) \cap \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$$

ma per il teorema 3.7 di R. M. Robinson abbiamo che $\mathrm{Clos}(\{I_k^n, S, * + *, \mathrm{Exc}\}, \{K_n^m, \mathbf{R}_p^0(0, *)\}) = \mathcal{P}$ e quindi $\mathcal{F} = \mathcal{P}_1$. CVD

4 Funzioni generali ricorsive

4.1 L'operatore di minimalizzazione (non limitata)

Definizione 4.1. *Data la relazione $(m+1)$-aria R sui naturali, l'**operatore di minimalizzazione (non limitata)** della relazione R è la funzione m-aria:*

$$\begin{aligned} \mu_y R(*, y) : D \subseteq \mathbb{N}^m &\longrightarrow \mathbb{N} \\ \overline{x} &\longrightarrow \mu_y R(\overline{x}, y) = \min\{y \in \mathbb{N} \mid (\overline{x}, y) \in R\} \end{aligned}$$

con $D = \{\overline{x} \in \mathbb{N}^m \mid \exists\, y \in \mathbb{N} : (\overline{x}, y) \in R\}$.

Definizione 4.2. *Data la funzione $(m+1)$-aria f sui naturali, l'**operatore di k-minimalizzazione (non limitata)** della funzione f per un certo $k \in \mathbb{N}$ è la funzione m-aria:*

$$\begin{aligned} \mu_{f,k} : D \subseteq \mathbb{N}^m &\longrightarrow \mathbb{N} \\ \overline{x} &\longrightarrow \mu_{f,k}(\overline{x}) = \mu_y(f(\overline{x}, y) = k) = \min\{y \in \mathbb{N} \mid f(\overline{x}, y) = k\} \end{aligned}$$

con $D = \{\overline{x} \in \mathbb{N}^m \mid \exists\, y \in \mathbb{N} : f(\overline{x}, y) = k\}$.
*In generale diremo **operatore di minimalizzazione (non limitata)** della funzione f per indicare $\mu_{f,0}$.*

4.1.1 Funzioni totali e funzioni parziali

Definizione 4.3. *Una funzione m-aria a valori naturali di più variabili naturali è detta **parziale** se il suo dominio di definizione $D = \mathrm{Dom}(f)$ è un sottoinsieme di $\mathbb{N}^m$:*

$$\begin{aligned} f : D \subseteq \mathbb{N}^m &\longrightarrow \mathbb{N} \\ \overline{x} &\longmapsto f(\overline{x}) \end{aligned}$$

*Se il dominio di definizione D coincide con $\mathbb{N}^m$ allora f è detta **totale**[7].*

Osservazione. *In generale, data una relazione $(m+1)$-aria R, non è detto che l'operatore di minimalizzazione della relazione sia una funzione totale in quanto potrebbe esistere un $\overline{x} \in \mathbb{N}$ tale che $\forall\, y \in \mathbb{N}$ si ha che $(\overline{x}, y) \notin R$. Per esempio si consideri il seguente caso:*

Esempio 4.1. *Presa la relazione binaria $R \equiv >$ si ha che:*

$$\begin{aligned} \mu_y(* > y) : \mathbb{N}\backslash\{0\} &\longrightarrow \mathbb{N} \\ x &\longrightarrow \min\{y \in \mathbb{N} \mid x > y\} \end{aligned}$$

In quanto: $0 \leqslant n \ \ \forall\, n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow 0 \not> n \ \ \forall\, n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow (0, n) \notin R \ \ \forall\, n \in \mathbb{N}$.

Osservazione. *Osserviamo che, analogamente a quanto fatto nella definizione 2.8 dell'operatore di minimalizzazione limitata per una relazione R, si potrebbe estendere la definizione di operatore di minimalizzazione (non limitata) di una relazione R ad una funzione totale:*

$$\begin{aligned} \varepsilon_y R(*, y) : \mathbb{N}^m &\longrightarrow \mathbb{N} \\ \overline{x} &\longmapsto \varepsilon_y R(\overline{x}, y) = \begin{cases} \min\{y \in \mathbb{N} \mid (\overline{x}, y) \in R\} & \text{se } \exists\, y \in \mathbb{N}\, \big((\overline{x}, y) \in R\big) \\ 0 & \text{se } \forall\, y \in \mathbb{N}\, \big((\overline{x}, y) \notin R\big) \end{cases} \end{aligned}$$

Ma questa estensione essenzialmente non cambia le proprietà dell'operatore di minimalizzazione.

[7]In questa sezione, se non specificato diversamente, col termine funzione si intenderà sempre una funzione totale.

4.2 Funzioni generali ricorsive

Definizione 4.4. *Una funzione $(m+1)$-aria f è detta* ***speciale*** *se il relativo operatore di minimalizzazione $\mu_{f,0}$ è una funzione totale, ovvero se:*

$$\forall\, \overline{x} \in \mathbb{N}^m, \exists\, y \in \mathbb{N} \left(f(\overline{x}, y) = 0 \right)$$

Indichiamo con $\mathcal{S}$ l'insieme delle funzioni speciali.

Definizione 4.5. *La famiglia delle* ***funzioni generali ricorsive*** *$\mathcal{G}$ è l'intersezione di tutte le famiglie di operazioni contenenti:*

1. *le funzioni proiezioni*
2. *la funzione successore*

e chiuse rispetto alla:

a. *composizione di funzioni*

b. *ricorsione primitiva (con e senza parametri)*

c. *minimalizzazione (applicata alle funzioni speciali)*

Equivalentemente: $\mathcal{G} \coloneqq \mathrm{Clos}(\{I_k^n, S\}, \{K_n^m, \mathbf{R}^m, \mu_{f,0}|_{\mathcal{S}}\})$

4.3 Funzioni generali ricorsive e funzioni primitive ricorsive

Dalla definizione 4.5 di funzione generale ricorsiva e dalla definizione 3.3 di funzione primitiva ricorsiva risulta evidente che vale il seguente:

Teorema 4.1. *Sia $\mathcal{F} \supseteq \mathcal{G}$ è una famiglia di funzioni chiusa rispetto alla composizione di funzioni, alla ricorsione primitiva (con e senza parametri) e alla minimalizzazione (applicata alle funzioni speciali) allora essa contiene tutte le funzioni primitive ricorsive.*
In particolare: *ogni funzione primitiva ricorsiva è generale ricorsiva (e quindi $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{G}$).*

Osservazione. *Osserviamo che tale inclusione è stretta in quanto la funzione di Ackermann* Ack *definita come:*

$$\begin{aligned} \mathrm{Ack} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{N} \\ (x_0, x_1) &\longmapsto \mathrm{Ack}(x_0, x_1) = \begin{cases} x_1 + 1 & \textit{se } x_0 = 0 \\ \mathrm{Ack}(x_0 - 1, 1) & \textit{se } x_0 > 0 \wedge x_1 = 0 \\ \mathrm{Ack}(x_0 - 1, \mathrm{Ack}(x_0, x_1 - 1)) & \textit{se } x_0 > 0 \wedge x_1 > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

è un esempio di funzione generale ricorsiva che non è primitiva ricorsiva.

Teorema 4.2. $|\mathcal{G}| = \aleph_0$

Dimostrazione. Procediamo definendo induttivamente i seguenti insiemi:

Base dell'induzione: Sia $A_0 = \{S, I_k^n\}$, abbiamo che $|A_0| = \aleph_0$.

Passo induttivo: Definito A_n sia A_{n+1} l'insieme di tutti gli elementi di A_n insieme a tutte le funzioni ottenibili a partire dagli elementi di A_n con una sola applicazione dell'operatore di composizione, ricorsione primitiva o minimalizzazione (applicata alle funzioni speciali).
Dunque se $|A_n| = \aleph_0$ segue che $|A_{n+1}| = \aleph_0$.

Quindi dato che $\mathcal{G} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ abbiamo che $|\mathcal{G}| = \left| \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right| = \aleph_0$. CVD

Corollario 4.3. *Esistono funzioni sui naturali che non sono generali ricorsive.*

4.4 Relazioni e insiemi generali ricorsivi

Riprendendo la definizione 2.6 di $\mathcal{F}$-relazione diciamo che:

Definizione 4.6. *Una relazione m-aria R sui numeri naturali, è una relazione (o insieme)* ***generale ricorsiva*** *se la sua funzione caratteristica χ_R è generale ricorsiva.*

Proposizione 4.4. *Se R è una relazione $(m+1)$-aria generale ricorsiva, tale che:*

$$\forall\, \overline{x} \in \mathbb{N}^m,\, \exists\, y \in \mathbb{N}\,\big((\overline{x}, y) \in R\big)$$

allora l'operatore di minimalizzazione della relazione R, $\mu_y R(*, y)$, è una funzione generale ricorsiva.

Dimostrazione.
Il risultato è immediato in quanto: $\mu_y R(\overline{x}, y) = \mu_y(1 \dot{-} \chi_R(\overline{x}, y) = 0) = \mu_{1 \dot{-} \chi_R, 0}(\overline{x}) \quad \forall\, \overline{x} \in \mathbb{N}^m$. CVD

Lemma 4.5. *Data una funzione f abbiamo che:*

$$f \text{ funzione } m\text{-aria generale ricorsiva} \Leftrightarrow \mathrm{Gr}(f) \text{ relazione } (m+1)\text{-aria generale ricorsiva}$$

Dimostrazione.

- $\Longrightarrow$ Già dimostrato dal lemma 2.7.
- $\Longleftarrow$ Data la relazione $\mathrm{Gr}(f)$, per ottenere $f(\overline{x})$ preso il valore $\overline{x}$ dobbiamo associargli il più piccolo (e unico in quanto f è una funzione) y tale che $(\overline{x}, y) \in \mathrm{Gr}(f)$. Più formalmente:

$$f(\overline{x}) = \mu_y(1 \dot{-} \chi_{\mathrm{Gr}(f)}(\overline{x}, y) = 0) = \mu_{1 \dot{-} \chi_{\mathrm{Gr}(f)}, 0}(\overline{x}) \quad \forall\, \overline{x} \in \mathbb{N}^m$$

CVD

4.4.1 La funzione enumerazione

Teorema 4.6 (Caratterizzazione delle relazioni generali ricorsive unarie)**.** *Sia $I \subseteq \mathbb{N}$ un insieme infinito e $\mathbf{e}_I$ la relativa funzione di enumerazione, allora:*

$$I \text{ è generale ricorsivo} \Leftrightarrow \mathbf{e}_I \text{ è generale ricorsiva}$$

Dimostrazione.

- $\Longrightarrow$ Osserviamo che detta $g(z) = \mu_y(y \in I \;\wedge\; y > z)$ abbiamo $\mathbf{e}_I \equiv \mathbf{R}^0_p(\min(A), g)$:

$$\begin{cases} \mathbf{e}_I(0) = \min(A) \\ \mathbf{e}_I(S(n)) = g(\mathbf{e}_I(n)) = \mu_y(y \in I \;\wedge\; y > \mathbf{e}_I(n)) \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

  e dunque poiché per la proposizione 4.4 $g \in \mathcal{G}$, in quanto g è l'operatore di minimalizzazione dell'intersezione di una relazione generale ricorsiva I con una relazione elementare ricorsiva $>$ (che per la proposizione 2.8 è ancora generale ricorsiva), segue la tesi.
  (Il $\min(A)$ esiste per il principio del buon ordinamento).

- $\Longleftarrow$ Segue dal fatto che:

$$i \in I \Leftrightarrow \;\exists\, n \leqslant i\,(\mathbf{e}_I(n) = i)$$

  e dunque dato che per il lemma 4.5 $\mathrm{Gr}(\mathbf{e}_I)$ è una relazione generale ricorsiva, per la proposizione 2.11 sulla quantificazione vincolata abbiamo che $\exists\, n \leqslant i\,(\mathbf{e}_I(n) = i)$ è una relazione generale ricorsiva.

CVD

Osservazione. *Il teorema 4.6 non si può estendere né alla famiglia delle funzioni elementari ricorsive* $\mathcal{E}$*, né alla famiglia delle funzioni primitive ricorsive* $\mathcal{P}$*.*

Proposizione 4.7. *Siano A e B due insiemi infiniti che partizionano $\mathbb{N}$ e $\mathbf{e}_A$ e $\mathbf{e}_B$ le rispettive funzioni di enumerazione. Dunque, per $\mathcal{F} = \mathcal{E}$ o $\mathcal{F} = \mathcal{P}$, se $\mathrm{Gr}(\mathbf{e}_A) \in \mathcal{F}$ allora $\mathrm{Gr}(\mathbf{e}_B), A$ e $B \in \mathcal{F}$.*

Dimostrazione.

- Osserviamo che:

  $$(x, y) \in \mathrm{Gr}(\mathbf{e}_B) \Leftrightarrow x = y < \mathbf{e}_A(0) \vee \\ (\exists\, u, v < y((u, v) \in \mathrm{Gr}(\mathbf{e}_A) \wedge \nexists z, w < y(u < z \wedge (z, w) \in \mathrm{Gr}(\mathbf{e}_A)) \wedge y = x + u))$$

  dunque per la proposizione 2.11 sulla quantificazione vincolata e la proposizione 2.8 abbiamo che $\mathrm{Gr}(\mathbf{e}_B) \in \mathcal{F}$.

- Dalle stesse proposizioni segue che: $A = \{y \in \mathbb{N} \mid \exists\, x \leqslant y((x, y) \in \mathrm{Gr}(\mathbf{e}_A))\} \in \mathcal{F}$.

- Infine segue che: $B = \mathbb{N} \backslash A \in \mathcal{F}$.

CVD

4.5 Aritmetizzazione e funzioni ricorsive generali

4.5.1 Il teorema della forma normale di Kleene

Teorema 4.8 (della forma normale di Kleene per funzioni ricorsive totali)**.** *Esistono una funzione primitiva ricorsiva unaria u e, per ogni $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, una relazione primitiva ricorsiva $(n + 2)$-aria T_n tale che per ogni funzione generale ricorsiva n-aria f esiste un numero e (detto **indice** di f) per cui valgono le seguenti proprietà:*

1. $\forall\, x_0 \ldots \forall\, x_{n-1}\, \exists\, y\, T_n(e, x_0, \ldots, x_{n-1}, y)$
2. $f(x_0, \ldots, x_{n-1}) = u\big(\mu_y T_n(e, x_0, \ldots, x_{n-1}, y)\big) \quad \forall\, x_0, \ldots, x_{n-1} \in \mathbb{N}$

Dimostrazione. L'idea della dimostrazione è di associare dei numeri alle funzioni e agli operatori in maniera tale che la relazione $T_n(e, x_0, \ldots, x_{n-1}, y)$ sia valida se e solo se vale l'affermazione *y è il numero del calcolo del valore della funzione associata al numero e dati gli argomenti $x_0, \ldots, x_{n-1}$.* Fatto ciò $\mu_y T_n(e, x_0, \ldots, x_{n-1}, y)$ darà il numero associato ad un tale calcolo e la funzione u estrarrà il corrispettivo valore $f(x_0, \ldots, x_{n-1})$.

PASSO 1: associare numeri alle funzioni generali ricorsive

Procediamo induttivamente associando i numeri alle funzioni e agli operatori iniziali che generano tutte le funzioni generali ricorsive. In particolare associamo:

- $\langle(1)\rangle$ ad S
- $\langle(2, n, k)\rangle$ a $I^n_k \;\; \forall\, k, n \in \mathbb{N}\; i < n$
- $\langle(3, b_0, \ldots, b_{m-1}, a)\rangle$ a $K^m_n(g, h_0, \ldots, h_{m-1})$ dove $b_0, \ldots, b_{m-1}, a$ sono i numeri associati (rispettivamente) a $h_0, \ldots, h_{m-1}, g$
- $\langle(4, a, b)\rangle$ a $\mathbf{R}^n(g, h)$ dove a e b sono i numeri associati (rispettivamente) a g e h
- $\langle(5, a)\rangle$ a $\mu_{f,0}$ se f funzione speciale e con a numero associato a f

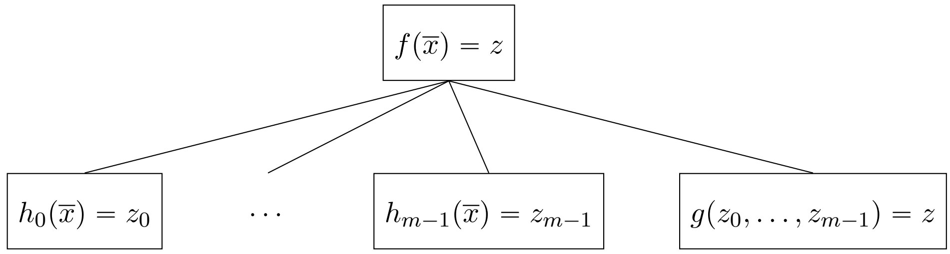
La codifica dei numeri così associati ad una funzione generale ricorsiva è detta **indice** della funzione.

PASSO 2: mettere le valutazioni delle funzioni generali ricorsive in forma canonica

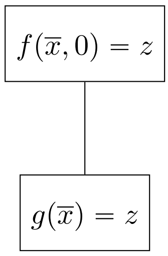
Uno strumento utile per l'organizzazione del calcolo dei valori di di una funzione generale ricorsiva è l'**albero di calcolo**.

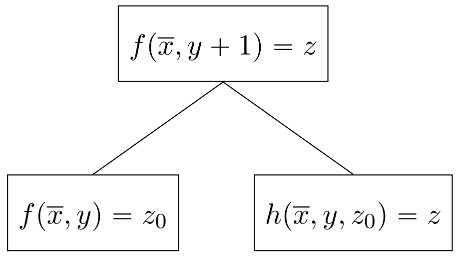
Ogni nodo di tale albero specifica come un valore cercato possa essere ottenuto induttivamente, in particolare abbiamo:

- i nodi senza predecessori:
  - $f(x) = x + 1$ se $f \equiv S$
  - $f(\overline{x}) = x_k$ se $f \equiv I_k^n$
- se $f \equiv K_n^m(g, h_0, \ldots, h_{m-1})$ allora il nodo $f(\overline{x}) = z$ ha $m + 1$ predecessori:

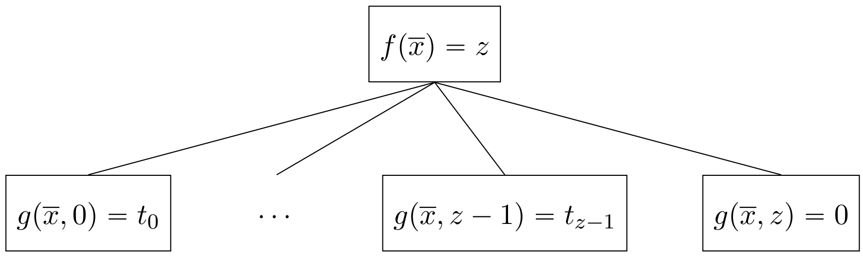


- se $f \equiv \mathbf{R}^n(g, h)$ per il nodo $f(\overline{x}, y) = z$ ci sono due possibili casi:
  - con un predecessore:
  - con due predecessori:





- se $f \equiv \mu_{g,0}$ non c'è uno schema fisso per i predecessori di $f(\overline{x}) = z$ ma si ha che:



  con $t_0, \ldots, t_{z-1} \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$

PASSO 3: associare numeri alle valutazioni delle funzioni

Anche in questo caso procediamo induttivamente sulla costruzione degli alberi di calcolo. Assegniamo dunque i numeri ai:

Nodi: Dato che i nodi sono espressioni della forma $f(\overline{x}) = z$. ad essi gli associamo i numeri:

$$\langle (e, \langle (x_0, \ldots, x_{n-1}) \rangle, z) \rangle$$

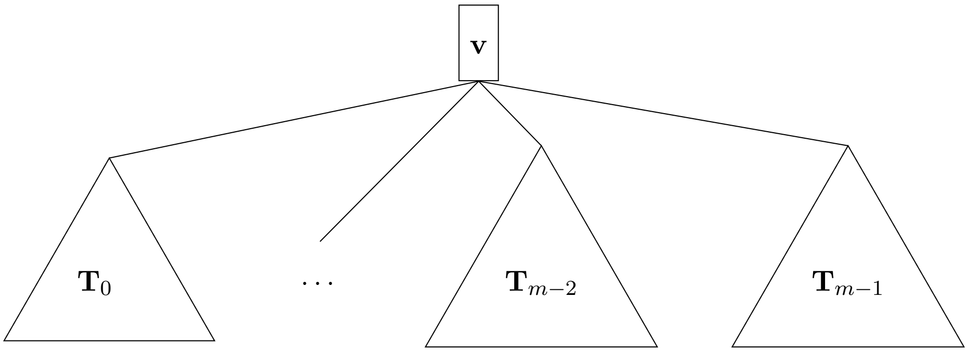
dove e è un indice di f. Dunque un nodo è rappresentato da tre numeri che corrispondono (rispettivamente) alla funzione, ai valori su cui viene calcolata e al valore ottenuto.

Alberi: Ogni albero $\mathbf{T}$ consiste di un vertice $\mathbf{v}$ con associato un numero v e di un certo numero (finito ed eventualmente nullo) di predecessori ordinati, ognuno dei quali è un sottoalbero $\mathbf{T}_i$. Per induzione assegniamo all'albero $\mathbf{T}$ il numero:

$$\hat{\mathbf{T}} = \langle (v, \hat{\mathbf{T}}_0, \ldots, \hat{\mathbf{T}}_{m-1}) \rangle$$

dove $\hat{\mathbf{T}}_i$ è il numero assegnato al sottoalbero $\mathbf{T}_i$.

In particolare, se il vertice $\mathbf{v}$ non ha predecessori, esso, visto come albero, ha numero $\langle(v)\rangle$.



Esempio di albero di calcolo $\mathbf{T}$ con vertice $\mathbf{v}$ e sottoalberi $\mathbf{T}_0, \ldots, \mathbf{T}_{m-1}$

PASSO 4: tradurre in una relazione primitiva ricorsiva $T(y)$ la proprietà: "y è un numero che codifica un albero di calcolo"

Osserviamo che detto y il numero che codifica la sequenza $(v, \hat{\mathbf{T}}_0, \ldots, \hat{\mathbf{T}}_{m-1})$ abbiamo che:

- $(y)_1 = \langle(e, \langle(x_0, \ldots, x_{n-1})\rangle, z)\rangle$
- $(y)_{1,1}$ = le possibili codifiche a seconda di e[8]
- $(y)_{1,2} = \langle(x_0, \ldots, x_{n-1})\rangle$
- $(y)_{1,3} = z$
- $(y)_{i+1} = \hat{\mathbf{T}}_i$
- $(y)_{i+1,i}$ = numero del vertice del sottoalbero $\mathbf{T}_i$

Poniamo:

$$A(y) \Leftrightarrow \mathrm{Seq}(y) \wedge \mathrm{Seq}((y)_1) \wedge \mathrm{len}((y)_1) = 3 \wedge \mathrm{Seq}((y)_{1,1}) \wedge \mathrm{Seq}((y)_{1,2})$$

$y \in A$ esprime che y è effettivamente un numero che codifica una sequenza.
Dunque abbiamo quattro casi (in analogia con il PASSO 2):

- per le funzioni iniziali ci sono due possibilità per $v = \langle(y)_1\rangle$:
  - $\langle(\langle(1)\rangle, \langle(x)\rangle, x+1)\rangle$ per il successore
  - $\langle(\langle(2,n,k)\rangle, \langle(x_0, \ldots, x_{n-1})\rangle, x_k)\rangle$ per le proiezioni

  e quindi poniamo:

$$\begin{aligned} B(y) \Leftrightarrow\ & \mathrm{len}(y) = 1 \wedge \\ & \Big(\big((y)_{1,1} = \langle(0)\rangle \wedge \mathrm{len}((y)_{1,2}) = 1 \wedge (y)_{1,3} = 0\big) \vee \\ & \big((y)_{1,1} = \langle(1)\rangle \wedge \mathrm{len}((y)_{1,2}) = 1 \wedge (y)_{1,3} = (y)_{1,2,1} + 1\big) \vee \\ & \big(\mathrm{len}((y)_{1,1}) = 3 \wedge (y)_{1,1,1} = 2 \wedge (y)_{1,1,2} = \mathrm{len}((y)_{1,2}) \wedge \\ & 1 \leqslant (y)_{1,1,3} \leqslant (y)_{1,1,2} \wedge (y)_{1,3} = (y)_{1,2,(y)_{1,1,3}}\big)\Big) \end{aligned}$$

[8] Per migliorare la leggibilità scriviamo $(a)_{i,j}$ al posto di $((a)_i)_j$ per successive applicazioni di $(*)_*$.

- per la composizione dato che l'albero di calcolo diventa:

$$\langle(\langle(3, b_0, \ldots, b_{m-1}, a)\rangle, \langle(x_0, \ldots, x_{n-1})\rangle, z)\rangle$$

$$\begin{array}{cccc} \langle(b_0, \langle(x_0, \ldots, x_{n-1})\rangle, z_1)\rangle & \cdots & \langle(b_{m-1}, \langle(x_0, \ldots, x_{n-1})\rangle, z_{m-1})\rangle & \langle(a, \langle(z_0, \ldots, z_{m-1})\rangle, z)\rangle \\ = (y)_{2,1} & & = (y)_{m,1} & = (y)_{m+1,1} \end{array}$$

poniamo:

$$\begin{aligned} C(y) \Leftrightarrow\ & \mathrm{len}((y)_{1,1}) \geqslant 3 \wedge (y)_{1,1,1} = 3 \wedge \mathrm{len}(y) = \mathrm{len}((y)_{1,1}) \wedge \\ & \quad \forall\ i \in \{2, \ldots, \mathrm{len}(y) - 1\} \big((y)_{i,1,1} = (y)_{1,1,i} \wedge (y)_{i,1,2} = (y)_{1,2}\big) \wedge \\ & \quad (y)_{\mathrm{len}(y),1,1} = (y)_{1,1,\mathrm{len}(y)} \wedge (y)_{\mathrm{len}(y),1,2} = ((y)_{2,1,3}, \ldots, (y)_{\mathrm{len}(y)-1,1,3}) \wedge (y)_{\mathrm{len}(y),1,3} = (y)_{1,3} \end{aligned}$$

- per la ricorsione primitiva, essendo l'albero di calcolo:

$$\langle(\langle(4, a, b)\rangle, \langle(x_0, \ldots, x_{n-1}, 0)\rangle, z)\rangle$$

$$\begin{array}{c} \langle(a, \langle(x_0, \ldots, x_{n-1})\rangle, z)\rangle \\ = (y)_{2,1} \end{array}$$

$$\langle(\langle(4, a, b)\rangle, \langle(x_0, \ldots, x_{n-1}, y + 1)\rangle, z)\rangle$$

$$\begin{array}{cc} \langle(\langle(4, a, b)\rangle, \langle(\overline{x}, y)\rangle, z_1)\rangle & \langle(\langle(b)\rangle, \langle(\overline{x}, y, z_1)\rangle, z)\rangle \\ = (y)_{2,1} & = (y)_{3,1} \end{array}$$

poniamo:

$$\begin{aligned} D(y) \Leftrightarrow\ & \mathrm{len}((y)_{1,1}) = 3 \wedge (y)_{1,1,1} = 4 \wedge \\ & \Big(\big((y)_{1,2,\mathrm{len}((y)_{1,2})} = 0 \wedge \mathrm{len}(y) = 2 \wedge (y)_{2,1,1} = (y)_{1,1,2} \wedge \\ & (y)_{2,1,2} \frown \langle(0)\rangle = (y)_{1,2} \wedge (y)_{2,1,3} = (y)_{1,3}\big) \vee \\ & \big((y)_{1,2,\mathrm{len}((y)_{1,2})} > 0 \wedge \mathrm{len}(y) = 3 \wedge (y)_{2,1,1} = (y)_{1,1} \wedge \\ & \mathrm{len}((y)_{2,1,2}) = \mathrm{len}((y)_{1,2}) \wedge\ \forall\ i \in \{1, \ldots, \mathrm{len}((y)_{1,2})\} \, ((y)_{2,1,2,i} = (y)_{1,2,i}) \wedge \\ & (y)_{2,1,2,\mathrm{len}((y)_{1,2})} + 1 = (y)_{1,2,\mathrm{len}((y)_{1,2,i})} \wedge (y)_{3,1,1} = \langle((y_{1,1,3}))\rangle \wedge \\ & (y)_{3,1,3} = (y)_{1,3} \wedge (y)_{3,1,2} = (y)_{2,1,2} \frown \langle((y)_{2,1,3})\rangle\big)\Big) \end{aligned}$$

- infine, per la minimalizzazione di funzioni speciali, dato che:

$$\langle(\langle(5, a)\rangle, \langle(x_0, \ldots, x_{n-1})\rangle, z)\rangle$$

$$\begin{array}{cccc} \langle(a, \langle(\overline{x}, 0)\rangle, t_0)\rangle & \cdots & \langle(a, \langle(\overline{x}, z - 1)\rangle, t_{z-1})\rangle & \langle(a, \langle(\overline{x}, z)\rangle, 0)\rangle \\ = (y)_{2,1} & & = (y)_{z+1,1} & = (y)_{z+2,1} \end{array}$$

si pone:

$$\begin{aligned} E(y) \Leftrightarrow\ & \mathrm{len}((y)_{1,1}) = 2 \wedge (y)_{1,1,1} = 5 \wedge \mathrm{len}(y) \geqslant 2 \wedge (y)_{1,3} = \mathrm{len}(y) - 2 \wedge \\ & \quad \forall\ i \in \{2, \ldots, \mathrm{len}(y)\} \big((y)_{i,1,1} = (y)_{1,1,2} \wedge (y)_{i,1,2} = (y)_{1,2} \frown \langle(i - 2)\rangle\big) \wedge \\ & \quad \forall\ i \in \{2, \ldots \mathrm{len}(y) - 1\} \big((y)_{i,1,3} \neq 0\big) \wedge (y)_{\mathrm{len}(y),1,3} = 0 \end{aligned}$$

Dato che questi sono tutti i casi possibili, possiamo definire:

$$T(y) \Leftrightarrow A(y) \wedge \big(B(y) \vee C(y) \vee D(y) \vee E(y)\big) \wedge \big(\operatorname{len}(y) > 1 \Rightarrow \ \forall\, i \in \{2, \ldots, \operatorname{len}(y)\}\ T((y)_i)\big)$$

Osserviamo che T è una relazione primitiva ricorsiva in quanto ottenuta tramite congiunzione, disgiunzione e implicazione di relazioni primitive ricorsive (proposizione 2.8) e valori precedenti della stessa (in quanto $(y)_i < y \ \forall\ i \in \mathbb{N}$). Quindi la funzione caratteristica χ_T è definita per ricorsione del corso dei valori e pertanto è primitiva ricorsiva (teorema 3.4).

PASSO 5: definizione di T_n e u

Poniamo per ogni $n \in \mathbb{N}$:

- $T_n(e, x_0, \ldots, x_{n-1}, y) \Leftrightarrow T(y) \wedge (y)_{1,1} = e \wedge (y)_{1,2} = \langle (x_0, \ldots, x_{n-1}) \rangle$
- $u(y) = (y)_{1,3}$

esse sono primitive ricorsive.
Sia f una funzione generale ricorsiva n-aria con indice e. Dato che f è totale, per ogni $x_0, \ldots, x_{n-1}$ esiste un albero di calcolo per $f(x_0, \ldots, x_{n-1})$ relativo alla procedura di calcolo codificata da e; ciò è espresso formalmente da:

$$\forall\, x_0 \ldots \forall\, x_{n-1}\ \exists\, y\, T_n(e, x_0, \ldots, x_{n-1}, y)$$

Inoltre, da ogni albero di calcolo (e in particolare dall'albero con il numero di codifica minore) possiamo estrarre il valore della funzione guardando la terza componente del suo vertice; ciò equivale formalmente a:

$$f(x_0, \ldots, x_{n-1}) = u(\mu_y T_n(e, x_0, \ldots, x_{n-1}, y))$$

CVD

4.6 L'inversione

Definizione 4.7. *Data una funzione unaria e suriettiva $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, l'**inversione** di f è l'operazione:*

$$\begin{aligned} f^{-1} : \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{N} \\ x &\longmapsto \mu_y(f(y) = x) \end{aligned}$$

Indichiamo con $\mathfrak{S}$ l'insieme delle funzioni unarie e suriettive.

Osservazione (La funzione coppia di Cantor). *La seguente funzione coppia è detta **funzione coppia di Cantor**:*

$$J(x, y) = \binom{x + y + 1}{2} + x = \frac{1}{2}(x + y + 1) \cdot (x + y) + x \qquad \forall\, x, y \in \mathbb{N}$$

osserviamo che:

- *J assume solo valori in $\mathbb{N}$ e dunque possiamo scrivere:*

$$J(x, y) = \left\lfloor \frac{(x + y) \cdot (x + y + 1)}{2} \right\rfloor + x = \left\lfloor \frac{(x + y)^2 + 3x + y}{2} \right\rfloor \qquad \forall\, x, y \in \mathbb{N}$$

- *J è strettamente crescente rispetto a entrambe le variabili*

- *J è biettiva in quanto per ogni $z \in \mathbb{N}$ esistono (unici) $x, y \in \mathbb{N}$ tali che:*

$$z = J(x, y) = \frac{1}{2}(x + y + 1) \cdot (x + y) + x$$

infatti, posti:

$$w = x + y \qquad t = \frac{1}{2} w\,(w + 1)$$

abbiamo che: $z = t + x$.
Riscritta la seconda equazione come $w^2 + w - 2t = 0$ possiamo ottenere w in funzione di t:

$$w = \frac{\sqrt{8t + 1} - 1}{2}$$

poiché tale funzione è strettamente crescente e dato che:

$$t \leqslant \underbrace{t + x}_{=z} < t + (w + 1) = \frac{w^2 + w + 2(w + 1)}{2} = \frac{(w + 1)^2 + (w + 1)}{2}$$

si ottiene che:

$$\begin{aligned} w \leqslant \frac{\sqrt{8z + 1} - 1}{2} &< \frac{\sqrt{8(t + w + 1) + 1} - 1}{2} \\ &= \frac{\sqrt{4(w + 1)^2 + 4(w + 1) + 1} - 1}{2} = \frac{\big(2(w + 1) + 1\big) - 1}{2} = w + 1 \end{aligned}$$

e quindi, poiché $w \in \mathbb{N}$:

$$w = \left\lfloor \frac{\sqrt{8z + 1} - 1}{2} \right\rfloor$$

e quindi:

$$x = z - t = z - \frac{w^2 + w}{2} \qquad y = w - x = \frac{w^2 + 3w}{2} - z$$

In particolare abbiamo trovato le funzioni inverse L ed R.

Osserviamo dunque che, le funzioni J, R e L così definite sono esprimibili tramite composizioni a partire dalle funzioni elementari ricorsive:

$$I^n_k \quad c_0 \quad S \quad * + * \quad * \dot{-} * \quad *^2 \quad \lfloor\sqrt{*}\rfloor \quad \lfloor */2 \rfloor$$

e quindi sono elementari ricorsive.

Lemma 4.9. *Considerata la famiglia delle funzioni generali ricorsive $\mathcal{G}$ si ha che:*

$$\mathcal{G} = \mathrm{Clos}(\{I^n_k, S\}, \{K^m_n, \mathbf{R}^m, \mu_{f,0}|_{\mathcal{S} \cap \mathbb{N}^{\mathbb{N}}}\})$$

Dimostrazione. Consideriamo la funzione coppia di Cantor J con le rispettive funzioni inverse R e L. Partiamo dal caso in cui abbiamo una funzione binaria f ottenuta tramite minimalizzazione a partire da una funzione g:

$$f(x_0, x_1) = \mu_{g,0}(x_0, x_1) = \mu_y(g(x_0, x_1, y) = 0)$$

Osserviamo che poste:

$$\tilde{g}(x, y) = g(R(x), L(x), y) \qquad \tilde{f}(x) = \mu_{\tilde{g},0}(x) = \mu_y(\tilde{g}(x, y) = 0)$$

segue che:

$$f(x_0, x_1) = \tilde{f}(J(x_0, x_1))$$

Applicando lo stesso procedimento per $n - 1$ volte possiamo ridurre il numero di componenti che occorrono nell'applicazione della minimalizzazione da n ad uno.
Dato che le funzioni J, R e L scelte sono primitive ricorsive, abbiamo che segue la tesi. CVD

Proposizione 4.10. *Considerata la famiglia delle funzioni generali ricorsive $\mathcal{G}$ si ha che:*

$$\mathcal{G} = \text{Clos}(\{I_k^n, S\}, \{K_n^m, \mathbf{R}^m, *^{-1}|_{\mathfrak{S}}\})$$

Dimostrazione.

- $\supseteq$ È sufficiente dimostrare che presa $f \in \mathcal{G} \cap \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ abbiamo che $f^{-1} \in \mathcal{G} \cap \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Infatti se f è una funzione generale ricorsiva, anche $f(x) = y$ è una relazione generale ricorsiva e quindi per la proposizione 4.4 segue la tesi.

- $\subseteq$ Consideriamo la funzione coppia di Cantor J e le rispettive inverse R e L.
  Per il lemma precedente è sufficiente dimostrare che una funzione unaria:

  $$f(x) = \mu_{g,0} = \mu_y(g(x, y) = 0)$$

  è ottenibile a partire da un'inversione e successive composizioni con funzioni primitive ricorsive.
  Osserviamo che:
  $$f(x) = L(\mu_z(g(R(z), L(z)) = 0 \wedge R(z) = x))$$
  in quanto l'equazione $z = J(x, y)$, con x fissato, stabilisce una biezione tra gli insiemi $\{y \in \mathbb{N} \mid g(x, y) = 0\}$ e $\{z \in \mathbb{N} \mid g(R(z), L(z)) = 0 \wedge R(z) = x)\}$ e quindi, poiché la funzione di Cantor è crescente strettamente rispetto a entrambe le variabili, il minimo del primo insieme corrisponde col minimo del secondo. Pertanto segue che:

  $$L(\mu_z(\overline{\text{sgn}}(g(R(z), L(z))) \cdot R(z) = x))) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

  Poste dunque:

  $$\tilde{g}(z) = \overline{\text{sgn}}(g(R(z), L(z))) \cdot R(z) \qquad \tilde{f}(x) = \tilde{g}^{-1}(x) = \mu_z(\tilde{g}(z) = x)$$

  segue che:
  $$f(x) = L(\tilde{f}(x)) + \overline{\text{sgn}}(x) \cdot f(0)$$
  e dunque segue la tesi.

CVD

4.7 Caratterizzazione delle funzioni ricorsive generali

4.7.1 Aritmetizzazione con la funzione β di Gödel

Definizione 4.8. *Fissato $c \in \mathbb{N}$ la relazione **congruenza modulo** c, è:*

$$a \equiv_c b \;\Leftrightarrow\; \text{rem}(a - b) = c \qquad \forall\, a, b \in \mathbb{N}$$

Richiamiamo il seguente risultato di algebra:

Teorema (cinese dei resti)**.** *Dati $c_0, \ldots, c_{n-1} \in \mathbb{N}\backslash\{0, 1\}$ numeri a due a due coprimi e $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{N}$, allora esiste un unico $x \in \mathbb{N}$ con $0 \leqslant x < \prod_{i<n} c_i$ tale che $x \equiv_{c_i} a_i \;\; \forall\, i = 0, \ldots, n-1$.*

Considerati dunque i seguenti risultati:

Lemma 4.11. *Dato $y \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ tale che $i \mid y \;\; \forall\, i = 1, 2, \ldots, n-1$, siano:*

$$c_i = 1 + (i + 1) \cdot y$$

abbiamo che $c_0, \ldots, c_{n-1}$ sono a due a due coprimi.
Inoltre se $y \geqslant \max\{a_0, \ldots, a_{n-1}\}$, segue che: $a_i < c_i \quad \forall\, i = 0, \ldots, n-1$

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che: $\exists\, p \in \mathbb{P}$ tale che $p \mid c_i \wedge p \mid c_j$ con $i < j < n$.
Quindi:

$$p \mid (c_j - c_i) = (j-i) \cdot y \overset{\text{poiché } p \text{ primo}}{\Rightarrow} p \mid (j-i) \;\vee\; p \mid y$$

Dato che $(j-i) < n$ e, quindi, $(j-i) \mid y$, segue che in entrambi i casi $p \mid y$ e quindi $c_i \equiv_p 1$ assurdo. ↯ CVD

Definizione 4.9. *La* ***funzione*** β ***di Gödel*** *è l'operazione binaria:*

$$\begin{aligned} \beta : \mathbb{N} \times \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{N} \\ (x_0, x_1) &\longmapsto \operatorname{rem}(R(x_0), 1 + (x_1 + 1) \cdot L(x_0)) \end{aligned}$$

dove R e L sono le funzioni inverse della funzione coppia di Cantor.

Abbiamo il seguente:

Corollario 4.12 (della funzione β di Gödel)**.** *Per ogni $n > 0$ e ogni $(a_0, \ldots, a_{n-1})$ esiste un $m \in \mathbb{N}$ tale che:*

$$\beta(m, i) = a_i \quad \forall\, i = 0, \ldots, n-1$$

Dimostrazione. Preso $y \geqslant \max\{a_0, \ldots, a_{n-1}\}$ generiamo i corrispettivi c_i secondo il lemma 4.11. Quindi per il teorema cinese dei resti esiste un unico $x \in \mathbb{N}$ tale che:

$$\begin{cases} x \equiv_{c_0} a_0 \\ \vdots \\ x \equiv_{c_{n-1}} a_{n-1} \end{cases}$$

Dunque posto $m = J(x, y)$, abbiamo che:

$$\beta(m, i) = \operatorname{rem}(R(m), 1 + (i+1) \cdot L(m)) = \operatorname{rem}(x, c_i) = a_i \quad \forall\, i = 0, \ldots, n-1$$

CVD

Dunque data una sequenza finita $(x_1, \ldots, x_n)$ di n numeri naturali, essa può essere codificata in maniera univoca ponendo:

$$\langle (x_1, \ldots, x_n) \rangle = \mu_m\big(\beta(m, 0) = n \wedge \forall\, i \in \{1, \ldots, n\} (\beta(m, i) = a_i)\big)$$

Osservazione. *Dal corollario 2.20 sulle funzioni definite per casi e dall'osservazione 4.6 sulla funzione coppia di Cantor, segue che la funzione β di Gödel è elementare ricorsiva e dunque l'operazione di codifica è una funzione generale ricorsiva (in quanto definita tramite l'operatore di minimalizzazione).*

Analogamente a quanto visto per l'aritmetizzazione mediante la scomposizione in fattori primi abiamo che il sistema di decodifica è dato dalle seguenti funzioni e predicati:

- la funzione che dà la **k-esima componente** di una codifica x: $\beta(x, k)$ con $k \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$
- la funzione **lunghezza** della codifica x: $\operatorname{len}(x) = \beta(x, 0)$
- la relazione che verifica se un numero corrisponde ad una possibile codifica:

$$\operatorname{Seq}(x) \Leftrightarrow \nexists k \leqslant x \big(\operatorname{len}(x) = \operatorname{len}(k) \wedge \forall\, i < \operatorname{len}(x) \, (\beta(x, i) = \beta(k, i))\big)$$

4.7.2 Eliminazione della ricorsione

Lemma 4.13. *Considerata la famiglia delle funzioni generali ricorsive $\mathcal{G}$ e le funzioni inverse della funzione coppia di Cantor, si ha che:*

$$\mathcal{G} = \mathrm{Clos}(\{I_k^n, S, * + *, * \dot{-} *, * \cdot *, \overline{\mathrm{sgn}}, \lfloor */* \rfloor, \mathrm{rem}, R, L\}, \{K_n^m, \mu_{*,0}|_{\mathcal{S}}\})$$

Dimostrazione. Presa $h = \mathbf{R}^m(f,g)$, sia w il numero che codifica la sequenza di numeri:

$$(h(\overline{x},0),\ldots,h(\overline{x},n))$$

usando la funzione β di Gödel. Dunque, scelto il più piccolo w che codifica tale sequenza abbiamo che:

$$h(\overline{x},n) = \beta\Big(\mu_w\Big(\beta(w,1) = f(\overline{x}) \wedge \bigwedge_{r\in\mathbb{N}} \big(r < n \Rightarrow \beta(w,S(r)) = g(\overline{x},r,\beta(w,r))\big)\Big), n\Big)$$

che si può riscrivere equivalentemente come:

$$h(\overline{x},n) = \beta\Big(\mu_w\Big(\beta(w,1) = f(\overline{x}) \wedge \mu_r\big(\beta(w,S(r)) \neq g(\overline{x},r,\beta(w,r)) \vee r = n\big) = n\Big), n\Big)$$

Dunque la funzione h può essere ottenuta a partire dalle funzioni f, g e β tramite due applicazioni dell'operatore di minimalizzazione applicato ad una relazione.
Tuttavia dobbiamo ricondurci all'applicazione dell'operatore di 0-minimalizzazione su di una funzione. Per fare questo osserviamo che, analogamente alla dimostrazione della proposizione 4.4 detti:

$$A := \big\{(\overline{x},n,w,r) \in \mathbb{N}^{m+3} \mid \beta(w,S(r)) \neq g(\overline{x},r,\beta(w,r)) \vee r = n\big\}$$

e

$$B := \Big\{(\overline{x},n,w) \in \mathbb{N}^{m+2} \,\Big|\, \beta(w,1) = f(\overline{x}) \wedge \mu_r A(\overline{x},n,w,r) = n\Big\} \equiv \mathrm{Gr}(f)(\overline{x},\beta(w,1)) \cap \mathrm{Gr}(\mu_r A)(\overline{x},n,w,n)$$

abbiamo che:

$$\mu_w B(\overline{x},n,w) = \mu_w(1 \dot{-} \chi_B(\overline{x},n,w) = 0) \quad \forall\ (\overline{x},n) \in \mathbb{N}^{m+1}$$

e dato che:

$$\chi_B(\overline{x},n,w) = \chi_{\mathrm{Gr}(f)}(\overline{x},\beta(w,1)) \cdot \chi_{\mathrm{Gr}(\mu_r A)}(\overline{x},n,w,n)$$

con $\chi_{\mathrm{Gr}(f)}(x_0,\ldots,x_{m-1},x_m) = \overline{\mathrm{sgn}}(|f(x_0,\ldots,x_{m-1}) - x_m|)$ $\forall\, \overline{x} \in \mathbb{N}^m$ (come visto nella dimostrazione del lemma 2.7) si ha che $\mu_w B$ è ottenibile tramite 0-minimalizzazione e composizioni a partire dalle funzioni $* \cdot *$, $\overline{\mathrm{sgn}}$, $* \dot{-} *$, $|* - *|$, β, f e $\mu_r A$. Inoltre osserviamo che:

- la distanza $|* - *|$ è ottenibile tramite composizioni di $* \dot{-} *$, $* \cdot *$ e $* + *$, S e $\lfloor */* \rfloor$ (in quanto definita per casi a partire da $* \dot{-} *$ sfruttando le relazioni $\geqslant$ e $<$ viste nel lemma 2.10)
- la funzione β è ottenibile tramite composizione a partire dalle funzioni R, L, rem e S (per definizione)
- analogamente a quanto fatto per la relazione B abbiamo che:

  $$\mu_r A(\overline{x},n,w,r) = \mu_r(1 \dot{-} \chi_A(\overline{x},n,w,r) = 0) \quad \forall\ (\overline{x},n,w) \in \mathbb{N}^{m+2}$$

  con:

  $$A \equiv \neg\, \mathrm{Gr}(g)(\overline{x},r,\beta(w,r),\beta(w,S(r))) \cup (r = n) \equiv \neg\big(\mathrm{Gr}(g)(\overline{x},r,\beta(w,r),\beta(w,S(r))) \cap (r \neq n)\big)$$

  e dunque come visto nella dimostrazione della proposizione 2.8 sulle operazioni tra relazioni:

  $$\begin{aligned}\chi_A(\overline{x},n,w,r) &= \overline{\mathrm{sgn}} \circ \chi_{\neg A}(\overline{x},n,w,r)\\ &= \overline{\mathrm{sgn}}\big(\chi_{\mathrm{Gr}(g)}(\overline{x},r,\beta(w,r),\beta(w,S(r))) \cdot \chi_{\neq}(r,n)\big) \quad \forall\ (\overline{x},n,w,r) \in \mathbb{N}^{m+3}\end{aligned}$$

  pertanto $\mu_r A$ è ottenibile tramite 0-minimalizzazione e composizioni a partire dalle funzioni dalle funzioni già considerate per $\mu_w B$.

Quindi per eliminare la ricorsione è sufficiente aggiungere $* + *$, $* \dot{-} *$, $* \cdot *$, $\lfloor */* \rfloor$, $\overline{\mathrm{sgn}}$, R, L e rem alle funzioni iniziali. CVD

Lemma 4.14. *Considerata la famiglia delle funzioni generali ricorsive $\mathcal{G}$ e la funzione coppia di Cantor con le relative inverse, si ha che:*

$$\mathcal{G} = \text{Clos}(\{I_k^n, S, * + *, * \dot{-} *, * \cdot *, \overline{\text{sgn}}, \lfloor */* \rfloor, \text{rem}, J, R, L\}, \{K_n^m, *^{-1}|_{\mathfrak{S}}\})$$

Osservazione. *Dato che, come visto nella dimostrazione della proposizione 4.10, la minimalizzazione è ottenibile dall'inversione grazie all'utilizzo della funzione coppia di Cantor, il lemma 4.14 si dimostra in maniera analoga al lemma 4.13.*

4.7.3 Caratterizzazione delle funzioni ricorsive generali

Teorema 4.15 (di Julia Robinson)**.** *Considerata la famiglia delle funzioni generali ricorsive $\mathcal{G}$ si ha che:*

1. $\mathcal{G} = \text{Clos}(\{I_k^n, S, * + *, Q\}, \{K_n^m, \mu_{*,0}|_{\mathcal{S}}\})$
2. $\mathcal{G} = \text{Clos}(\{I_k^n, S, * + *, \text{Exc}\}, \{K_n^m, *^{-1}|_{\mathfrak{S}}\})$

Dimostrazione.

1. Per il lemma 4.13 è sufficiente mostrare che si possono ricavare le funzioni $\lfloor */2 \rfloor$, $\lfloor \sqrt{*} \rfloor$, $* \dot{-} *$, $* \cdot *$, $\lfloor */* \rfloor$, $\overline{\text{sgn}}$, R, L e rem a partire dalle funzioni iniziali mediante composizione e 0-minimalizzazione.

   $\overline{\text{sgn}}$: Osserviamo che:
   $$\overline{\text{sgn}}(x) = Q(S(S(Q(x) + Q(S(x))))) \quad \forall\, x \in \mathbb{N}$$

   Definiamo provvisoriamente la funzione[9]:

   $$_Q\sqrt{x} = \mu_y(Q(x + 2y + 1) = 1) = \mu_y(\overline{\text{sgn}}(Q(S(x + y + y))) = 0) \quad \text{se } \exists\, q \in \mathbb{N}\,(q^2 = x)$$

   osserviamo che questa, in generale, non è una funzione generale ricorsiva in quanto per numeri naturali che non sono quadrati non dà alcun risultato.
   Ricordiamo il seguente risultato di teoria dei numeri:

   Quattro termini consecutivi di una progressione aritmetica non possono essere tutti quadrati distinti.

   Usando questo fatto quindi possiamo definire la funzione $*^2$ come segue:

   $$\begin{aligned} x^2 = \mu_y\big(&Q(y) = 1 \wedge Q(y + 3\,_Q\sqrt{y} + x + 4) = 1 \wedge \\ &Q(y + 2\,_Q\sqrt{y} + 2x + 4) = 1 \wedge Q(y + {}_Q\sqrt{y} + 3x + 4) = 1\big) \quad \forall\, x \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

   Osserviamo che tale funzione è ben definita in quanto: se y soddisfa la condizione $Q(y) = 1$, allora è un quadrato e quindi $_Q\sqrt{y}$ è ben definita e coincide con la radice quadrata di y.
   In tal caso, inoltre, anche $y + 4\,_Q\sqrt{y} + 4$ è un quadrato e dunque le quattro condizioni richiedono quattro quadrati che siano consecutivi in una progressione aritmetica.
   Dato che questo è impossibile si ha che essi devono coincidere e quindi $_Q\sqrt{y} = x$ (o equivalentemente $y = x^2$), cioè x^2 è l'unico y che le soddisfa.
   Osserviamo che presi $a, b \in \mathbb{N}$:

   - $a = 0 \wedge b = 0 \;\Leftrightarrow\; a + b = 0$
   - $a \neq 0 \;\Leftrightarrow\; \overline{\text{sgn}}(a) = 0$

[9] In questa dimostrazione usiamo le stesse convenzioni usate nel teorema 3.7 di Raphal M. Robinson:

(a) fissato un numero $n \in \mathbb{N}$, nx significa $\underbrace{x + x + \cdots + x}_{n\text{-volte}}$

(b) $* + * + \cdots + *$ significa $* + (* + \cdots (* + *) \cdots)$

dunque abbiamo che:

$$\begin{array}{c} Q(y) = 1 \wedge Q(y + 3\,{}_Q\sqrt{y} + x + 4) = 1 \wedge \\ Q(y + 2\,{}_Q\sqrt{y} + 2x + 4) = 1 \wedge \\ Q(y + {}_Q\sqrt{y} + 3x + 4) = 1 \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{c} \overline{\mathrm{sgn}}(Q(y)) + \overline{\mathrm{sgn}}(Q(y + 3\,{}_Q\sqrt{y} + x + 4)) + \\ \overline{\mathrm{sgn}}(Q(y + 2\,{}_Q\sqrt{y} + 2x + 4)) + \\ \overline{\mathrm{sgn}}(Q(y + {}_Q\sqrt{y} + 3x + 4)) = 0 \end{array}$$

e quindi $*^2$ è definibile mediante 0-minimalizzazione:

$$\begin{aligned} x^2 = \mu_y\big(&\overline{\mathrm{sgn}}(Q(y)) + \overline{\mathrm{sgn}}(Q(y + 3\,{}_Q\sqrt{y} + x + 4)) + \\ &\overline{\mathrm{sgn}}(Q(y + 2\,{}_Q\sqrt{y} + 2x + 4)) + \overline{\mathrm{sgn}}(Q(y + {}_Q\sqrt{y} + 3x + 4)) = 0\big) \quad \forall\, x \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

infine abbiamo che:

$$\begin{aligned} x_0 - x_1 &= \mu_y\big(Q((x_0 + x_1)^2 + x_0 + 3x_1 + 1 + y) = 1\big) \\ &= \mu_y\big(\overline{sgn}(Q((x_0 + x_1)^2 + x_0 + 3x_1 + 1 + y)) = 0\big) \quad \text{se } x_0 \geqslant x_1 \end{aligned}$$

$\lfloor */2 \rfloor$: osserviamo:

$$\lfloor x/2 \rfloor = \mu_y(2S(y) - x > 0) = \mu_y(2S(y) - x \neq 0) = \mu_y(\overline{\mathrm{sgn}}(2S(y) - x) = 0) \quad \forall\, x \in \mathbb{N}$$

$\lfloor \sqrt{*} \rfloor$: analogamente si ha:

$$\lfloor \sqrt{x} \rfloor = \mu_y\big((S(y))^2 - x > 0\big) = \mu_y\big(\overline{\mathrm{sgn}}((S(y))^2 - x) = 0\big) \quad \forall\, x \in \mathbb{N}$$

$* \cdot *$: come precedentemente osservato si ha che:

$$x_0 \cdot x_1 = \lfloor (((x_0 + x_1)^2 - x_0^2) - x_1^2)/2 \rfloor \quad \forall\, (x_0, x_1) \in \mathbb{N}^2$$

R e L: esse sono esprimibili tramite composizioni delle funzioni precedenti (come visto nell'osservazione sulla funzione coppia di Cantor).

$\lfloor */* \rfloor$: si ha:

$$\begin{aligned} \lfloor x_0/x_1 \rfloor &= \mu_y(x_1 \cdot S(y) > x_0 \vee x_1 = 0) \\ &= \mu_y\big((x_1 \cdot S(y)) - x_0 > 0 \vee x_1 = 0\big) \\ &= \mu_y\big(\overline{\mathrm{sgn}}((x_1 \cdot S(y)) - x_0) = 0 \vee x_1 = 0\big) \quad \forall\, (x_0, x_1) \in \mathbb{N}^2 \end{aligned}$$

osserviamo che presi $a, b \in \mathbb{N}$:

$$a = 0 \vee b = 0 \;\Leftrightarrow\; a \cdot b = 0$$

e dunque:

$$\lfloor x_0/x_1 \rfloor = \mu_y\big(\overline{\mathrm{sgn}}(x_1 \cdot S(y)) - x_0) \cdot x_1 = 0\big) \quad \forall\, (x_0, x_1) \in \mathbb{N}^2$$

$* \dot{-} *$: come mostrato nella dimostrazione del lemma 2.10 si ha:

$$\chi_{\geqslant}(x_0, x_1) = \overline{\mathrm{sgn}}\big(\overline{\mathrm{sgn}}(\lfloor S(x_0)/S(x_1) \rfloor)\big) \quad \forall\, (x_0, x_1) \in \mathbb{N}^2$$

e di conseguenza possiamo definire:

$$x_0 \dot{-} x_1 = (x_0 - x_1) \cdot \chi_{\geqslant}(x_0, x_1) \quad \forall\, (x_0, x_1) \in \mathbb{N}^2$$

rem: usando la definizione abbiamo che:

$$\mathrm{rem}(x_0, x_1) = (x_0 \dot{-} x_1 \cdot \lfloor x_0/x_1 \rfloor) \cdot \mathrm{sgn}(x_1) \quad \forall\, (x_0, x_1) \in \mathbb{N}^2$$

2. Per il lemma 4.14 è sufficiente mostrare che si possono ricavare le funzioni $\lfloor */2 \rfloor$, $\lfloor \sqrt{*} \rfloor$, $* \dot{-} *$, $* \cdot *$, $\lfloor */* \rfloor$, $\overline{\mathrm{sgn}}$, J, R, L e rem a partire dalle funzioni iniziali mediante composizione e inversione. Osserviamo che:

$$\mathrm{Exc}^{-1}(2\,x) = x^2 + 2\,x \quad \forall\, x \in \mathbb{N}$$

e dunque segue che:

$$\mathrm{Exc}\left(\mathrm{Exc}^{-1}(2\,x_0 + 2\,x_1) + 3\,x_0 + x_1 + 4\right) = x_0 - x_1 \quad \text{se } x_0 \geqslant x_1$$

e inoltre:

$$x^2 = \mathrm{Exc}^{-1}(2\,x) - 2\,x \quad \forall\, x \in \mathbb{N}$$

$\overline{\mathrm{sgn}}$: dato che:

$$\mathrm{sgn}(x) = \mathrm{Exc}(S(x^2)) \quad \forall\, x \in \mathbb{N}$$

possiamo definire analogamente a quanto fatto nel teorema 3.7 di Raphael M. Robinson:

$$\overline{\mathrm{sgn}}(x) = \mathrm{Exc}(2 + 2\ \mathrm{sgn}(x)) \quad \forall\, x \in \mathbb{N}$$

$\lfloor */2 \rfloor$: dato che la funzione $\mathrm{Exc} \circ S \circ S \circ \mathrm{Exc}^{-1}$ è la funzione caratteristica dei numeri pari positivi $2\mathbb{N} = \{n \in \mathbb{N} \mid 2|n\}$ e che $\mathrm{Exc}\big(2\mathbb{N}\big) = \mathbb{N}$ allora:

$$\lfloor x/2 \rfloor = \mathrm{Exc}\left(\mu_y(2\ \mathrm{Exc}(y) + \mathrm{Exc} \circ S \circ S \circ \mathrm{Exc}^{-1}(y) = x)\right) \quad \forall\, x \in \mathbb{N}$$

$\lfloor \sqrt{*} \rfloor$: osserviamo che la funzione predecessore è esprimibile come:

$$P(x) = \mathrm{Exc}\left(\mu_y(\mathrm{Exc}(S(y)) = x)\right) \quad \forall\, x \in \mathbb{N}$$

dunque:

$$_Q\sqrt{x} = \lfloor \mathrm{Exc}(P(x))/2 \rfloor + \mathrm{sgn}(x) \quad \text{se } \exists\, q \in \mathbb{N}\,(q^2 = x)$$

pertanto possiamo definire:

$$\lfloor \sqrt{x} \rfloor = {}_Q\sqrt{x - \mathrm{Exc}(x)} \quad \forall\, x \in \mathbb{N}$$

$* \cdot *$: identica al punto 1.

J, R e L: esse sono esprimibili tramite composizioni delle funzioni precedenti (come visto nell'osservazione sulla funzione coppia di Cantor).

$\lfloor */* \rfloor$: come osservato al punto 1. abbiamo che:

$$\lfloor x_0/x_1 \rfloor = \mu_y\big(\overline{\mathrm{sgn}}(x_1 \cdot S(y)) - x_0) \cdot x_1 = 0\big) \quad \forall\, (x_0, x_1) \in \mathbb{N}^2$$

ripercorrendo la dimostrazione della proposizione 4.10 notiamo che per definirla tramite l'inversione dobbiamo utilizzare composizioni delle funzioni $\overline{\mathrm{sgn}}$, $* + *$, $* \cdot *$, J, R e L che abbiamo già definito.

$* \dot{-} *$: identica al punto 1.

rem: identica al punto 1.

CVD

4.8 Caratterizzazione delle funzioni ricorsive generali unarie

Definizione 4.10. *Indichiamo con $\mathcal{G}_1$ la famiglia delle **funzioni generali ricorsive unarie**:*

$$\mathcal{G}_1 := \mathcal{G} \cap \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$$

Teorema 4.16 (Teorema A)**.** *Dato un insieme di funzioni $\mathcal{I}$, si ha che:*

$$\mathrm{Clos}(\mathcal{I}, \{K_n^m, *^{-1}|_{\mathfrak{S}}\}) \cap \mathbb{N}^{\mathbb{N}} = \mathrm{Clos}(\mathcal{I}, \{K_1^m, *^{-1}|_{\mathfrak{S}}\}) \cap \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$$

Teorema 4.17 (Teorema B)**.** *Dato un insieme di funzioni $\mathcal{I} \supseteq \{I_k^n, * + *\}$ in cui a parte I_k^n e $* + *$ tutte le funzioni sono unarie, si ha che:*

$$\mathrm{Clos}(\mathcal{I}, \{K_n^m, *^{-1}|_{\mathfrak{S}}\}) \cap \mathbb{N}^{\mathbb{N}} = \mathrm{Clos}(\mathcal{I} \cap \mathbb{N}^{\mathbb{N}}, \{* + *, K_1^1, *^{-1}|_{\mathfrak{S}}\})$$

Osservazione. *Omettiamo le dimostrazioni dei teoremi A e B per le funzioni generali ricorsive (teoremi 4.16 e 4.17) in quanto sono essenzialmente identiche a quelle dei teoremi A e B per le funzioni primitive ricorsive (teoremi 3.9 e 3.10).*

Teorema 4.18 (Teorema C)**.** *Considerata la famiglia delle funzioni primitive ricorsive unarie $\mathcal{G}_1$ si ha che:*

$$\mathcal{G}_1 = \mathrm{Clos}(\{S, \mathrm{Exc}\}, \{* + *, K_1^1, *^{-1}|_{\mathfrak{S}}\})$$

Dimostrazione. Osserviamo che la funzione identità $I_0^1 \equiv K_1^1(\mathrm{Exc}, \mathrm{Exc}^{-1})$ dunque abbiamo che:

$$\mathrm{Clos}(\{I_0^1, S, \mathrm{Exc}\}, \{* + *, K_1^1, *^{-1}|_{\mathfrak{S}}\}) \overset{\text{teorema 4.17}}{=} \mathrm{Clos}(\{I_k^n, S, * + *, \mathrm{Exc}\}, \{K_n^m, *^{-1}|_{\mathfrak{S}}\}) \cap \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \underset{\substack{\text{teorema 4.15} \\ \text{di Julia Robinson}}}{=} \mathcal{G} \cap \mathbb{N}^{\mathbb{N}} = \mathcal{G}_1$$

CVD

Teorema 4.19. *Considerata la famiglia delle funzioni primitive ricorsive unarie $\mathcal{G}_1$ si ha che:*

$$\mathcal{G}_1 \neq \mathrm{Clos}(\{f\}, \{K_1^m, *^{-1}|_{\mathfrak{S}}\}) \quad \forall\, f \in \mathcal{G}$$

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che esista una funzione f tale che:

$$\mathcal{G}_1 = \mathrm{Clos}(\{f\}, \{K_1^m, *^{-1}|_{\mathfrak{S}}\}) \quad \forall\, f \in \mathcal{G}$$

Osserviamo che:

1. f deve essere suriettiva, poiché altrimenti le funzioni suriettive non potrebbero essere ottenute tramite la composizione e l'inversione.

2. f non può essere una biezione di $\mathbb{N}$ in sé, in quanto se lo fosse sarebbero definibili solo le funzioni biettive.

Quindi f deve essere una funzione suriettiva ed assumere alcuni valori del codominio più di una volta. Mostriamo che le uniche funzioni suriettive ottenibili a partire da f sono $f^0 \equiv I_0^1$, f, f^2, f^3, …[10] e quindi che l'inversione è possibile solo sulle potenze di f.
Per farlo è sufficiente mostrare che:

$$F = f^k \circ (f^l)^{-1} \circ f^m \circ (f^n)^{-1} \circ \cdots \circ f^p \circ (f^q)^{-1}$$

è suriettiva solo se è una "potenza" di f.

[10] Per semplificare la notazione usiamo la notazione con l'esponente per indicare la composizione ripetuta:

- $f^0 \equiv I_0^1$ è l'identità
- $f^{n+1} = K_1^1(f^n, f) = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{(n+1)\text{-volte}}$

Partendo dai primi due termini della composizione osserviamo che:

- se $k < l$ allora F non è suriettiva dato che anche $f^k \circ (f^l)^{-1}$ non lo è, infatti sappiamo che $f^{(l-k)}$ assume qualche valore almeno due volte; quindi se per assurdo $f^k \circ (f^l)^{-1}$ fosse suriettiva, allora l'identità $I_0^1 = f^{(l-k)} f^k \circ (f^l)^{-1}$ dovrebbe assume uno stesso valore due volte. $\lightning$

- dunque si ha $k \geqslant l$ e in tal caso $f^k \circ (f^l)^{-1} = f^{(k-l)} \circ f^l \circ (f^l)^{-1} = f^{(k-l)}$ e quindi la scrittura di f può essere semplificata.

Procedendo allo stesso modo sugli altri termini della composizione otteniamo che se F è suriettiva allora deve essere una "potenza" di f. Tuttavia in questo modo l'unica biezione ottenibile è l'identità. $\lightning$
Ciò è assurdo perché, ad esempio, per il lemma 2.19 la funzione:

$$\begin{aligned} g : \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{N} \\ n &\longmapsto g(n) = \begin{cases} n & \text{se } n \neq a \wedge n \neq b \\ a & \text{se } n = b \\ b & \text{se } n = a \end{cases} \end{aligned}$$

è elementare ricorsiva (e quindi generale ricorsiva). CVD

5 Funzioni ricorsive parziali

Come osservato nella sezione precedente non è detto che la funzione ottenuta tramite l'operatore di minimalizzazione illimitata da una relazione sia una funzione totale.
In questa sezione approfondiremo quindi la possibilità di lavorare con funzioni parziali estendendo la definizione di funzione generale ricorsiva a quella di funzione generale ricorsiva parziale[11].
Per semplificare l'esposizione introduciamo i seguenti simboli:

- Date due funzioni parziali sui naturali m-arie f e g ed un certo $\overline{x} \in \mathbb{N}^m$ scriviamo:

$$f(\overline{x}) \simeq g(\overline{x})$$

  per indicare che f è definita in $\overline{x}$ se e solo se g è definita in $\overline{x}$ e tal caso $f(\overline{x}) = g(\overline{x})$.

- Data una funzione parziale m-aria f e $\overline{x} \in \mathbb{N}^m$ scriviamo:
  - $f(\overline{x})\downarrow$ se f è definita in $\overline{x}$
  - $f(\overline{x})\uparrow$ altrimenti.

5.1 Funzioni ricorsive parziali

Osservazione (Ridefinizione degli operatori). *Volendo estendere la definizione di funzione generale ricorsiva alle funzioni parziali dobbiamo innanzitutto estendere a tali funzioni gli operatori coinvolti nella definizione 4.5:*

Definizione 5.1. *Dati $n, m \in \mathbb{N}$, una funzione parziale m-aria f e le funzioni parziali n-arie $g_0, \dots, g_{m-1}$, la **composizione** di f con $g_0, \dots, g_{m-1}$ è la funzione parziale $h \equiv K^m_n(f, g_0, \dots, g_{m-1})$ tale che:*

$$h(\overline{x}) \simeq f(g_0(\overline{x}), \dots, g_n(\overline{x})) \quad \forall\, \overline{x} \in \mathbb{N}^n$$

Definizione 5.2 (Ricorsione primitiva). *Date le funzioni parziali f m-aria e g $(m+2)$-aria, si dice che la funzione parziale $(m+1)$-aria h definita da:*

$$\begin{cases} h(\overline{x}, 0) \simeq f(\overline{x}) \\ h(\overline{x}, S(n)) \simeq g(\overline{x}, n, h(\overline{x}, n)) \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \end{cases} \qquad \forall\, \overline{x} \in \mathbb{N}^m$$

è ottenuta tramite:

1. ***ricorsione primitiva** da f e g se $m > 0$ e in tal caso le variabili $\overline{x}$ da cui dipendono f e g sono dette **parametri della ricorsione**. (Scriviamo $h \equiv \mathbf{R}^m(f, g)$).*
2. ***ricorsione primitiva senza parametri** da $f() = a \in \mathbb{N}$ e g binaria se $m = 0$. (Scriviamo $h \equiv \mathbf{R}^0(f, g) \equiv \mathbf{R}^0(a, g)$).*

Definizione 5.3. *Data la funzione parziale $(m+1)$-aria f sui naturali di dominio $D = \mathrm{Dom}(f)$, l'**operatore di minimalizzazione (non limitata)** della funzione f è la funzione parziale m-aria $h \equiv \mu_f$
tale che:*

$$\begin{aligned} h(\overline{x}) &= \min\{y \in \mathbb{N} \mid \ \forall\, z \leqslant y\big((\overline{x}, z) \in D\big) \wedge f(\overline{x}, y) = 0\} \\ &= \min\{y \in \mathbb{N} \mid \ \forall\, z \leqslant y\big(f(\overline{x}, z)\downarrow\big) \wedge f(\overline{x}, y) = 0\} \quad \forall\, \overline{x} \in \mathbb{N}^m \end{aligned}$$

[11]In questa sezione per brevità scriveremo *funzioni ricorsive parziali* al posto di *funzioni generali ricorsive parziali*.

Definizione 5.4. *La famiglia delle* ***funzioni ricorsive parziali*** $\mathcal{R}$ *è l'intersezione di tutte le famiglie di funzioni parziali contenenti:*

1. *le funzioni proiezioni*
2. *la funzione successore*

e chiuse rispetto alla:

a. *composizione di funzioni*

b. *ricorsione primitiva (con e senza parametri)*

c. *minimalizzazione*

Dalla definizione 5.4 di funzione ricorsiva parziale e dalla definizione 4.5 di funzione generale ricorsiva risulta evidente che vale il seguente:

Teorema 5.1. *Ogni funzione generale ricorsiva è ricorsiva parziale (e quindi* $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{R}$*).*

Teorema 5.2 (della forma normale di Kleene per funzioni ricorsive parziali)**.** *Esistono una funzione primitiva ricorsiva unaria* u *e, per ogni* $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$*, una relazione primitiva ricorsiva* $(n+2)$*-aria* T_n *tale che per ogni funzione ricorsiva parziale* n*-aria* f *esiste un numero* e *(detto* ***indice*** *di* f*) per cui valgono le seguenti proprietà:*

1. $f(x_0, \dots, x_{n-1})\downarrow \Leftrightarrow \exists\, y\, T_n(e, x_0, \dots, x_{n-1}, y) \quad \forall\, x_0, \dots, x_{n-1} \in \mathbb{N}$
2. $f(x_0, \dots, x_{n-1}) \simeq u\big(\mu_y T_n(e, x_0, \dots, x_{n-1}, y)\big) \quad \forall\, x_0, \dots, x_{n-1} \in \mathbb{N}$

Dimostrazione. La dimostrazione è essenzialmente identica a quella del teorema 4.8 della forma normale per le funzioni ricorsive totali a patto di associare l'indice $\langle(5, a)\rangle$ a μ_f (con a indice associato a f). Infatti, per come abbiamo definito la minimalizzazione delle funzioni parziali, abbiamo che l'albero di calcolo di μ_f usa solo i valori $f(\overline{x}, z)$ per $z \leqslant y$. CVD

Corollario 5.3. *Data* $f \in \mathcal{R}$*, se* f *è totale allora* $f \in \mathcal{G}$*.*
In particolare: *Le funzioni ricorsive parziali che sono totali sono esattamente le funzioni generali ricorsive.*

Dimostrazione. Data $f \in \mathcal{G}$, per il teorema 5.2 della forma normale di Kleene, esiste un certo $e \in \mathbb{N}$ per cui:

$$f(x_0, \dots, x_{m-1}) \simeq u(\mu_y T_m(e, x_0, \dots, x_{m-1}, y)) \quad \forall\, \overline{x} \in \mathbb{N}^m$$

Dato che f è totale, $\forall\, \overline{x} \in \mathbb{N}^m\, (f(\overline{x})\downarrow)$, ovvero $\forall\, \overline{x} \in \mathbb{N}^m\, \exists\, y \in \mathbb{N}\, T_m(e, x_0, \dots, x_{m-1}, y)$ e pertanto l'operatore di minimalizzazione su T_m dà una funzione generale ricorsiva totale (proposizione 4.4). Quindi segue la tesi. CVD

Osservazione. *Il teorema della forma normale di Kleene afferma che ad ogni funzione ricorsiva parziale è associato un indice (affermazione valida anche per le funzioni generali ricorsive).*
Il vantaggio del teorema per le funzioni ricorsive parziali si ritrova nel fatto che vale anche il viceversa, infatti si può considerare ogni numero $e \in \mathbb{N}$ *come l'indice della funzione ricorsiva parziale:*

$$u(\mu_y T_m(e, x_0, \dots, x_{m-1}, y)) \quad \forall\, \overline{x} \in \mathbb{N}^m$$

dato che l'applicazione dell'operatore di minimalizzazione μ *non è vincolato a dare funzioni totali.*

Per questo motivo diamo la seguente definizione (che risulta quindi ben definita):

Definizione 5.5. *Dati $e \in \mathbb{N}$ ed $m \in \mathbb{N}$, definiamo:*

- φ_e^m *come l'e-esima funzione ricorsiva parziale di m variabili:*

$$\varphi_e^m(\overline{x}) \simeq u(\mu_y T_m(e, \overline{x}, y)) \quad \forall\, \overline{x} \in \mathbb{N}^m$$

- $\varphi_{e,s}^m$ *come l'approssimazione finita (di livello s) di* φ_e^m*:*

$$\varphi_{e,s}^m(\overline{x}) \simeq \begin{cases} \varphi_e^m(\overline{x}) & \text{se } \exists\, y < s(T_m(e, \overline{x}, y)) \\ \text{indefinita} & \text{se } \nexists\, y < s(T_m(e, \overline{x}, y)) \end{cases}$$

Teorema 5.4 (di Enumerazione). *Fissato $m \in \mathbb{N}$, la successione di funzioni $\{\varphi_e^m\}_{e \in \mathbb{N}}$ è un'enumerazione ricorsiva parziale delle funzioni ricorsive parziali m-arie, ovvero:*

1. $\forall\, e \in \mathbb{N}$, φ_e^m *è una funzione ricorsiva parziale m-aria*
2. *se f è una funzione ricorsiva parziale m-aria, allora $\exists\, e \in \mathbb{N}$ tale che $f \equiv \varphi_e^m$*
3. *esiste una funzione ϕ ricorsiva parziale di $(m+1)$-variabili tale che:*

$$\phi(e, \overline{x}) \simeq \varphi_e^m(\overline{x}) \quad \forall\, (e, \overline{x}) \in \mathbb{N}^{m+1}$$

Dimostrazione. I tre enunciati seguono dal teorema 5.2 della forma normale di Kleene per le funzioni ricorsive parziali e dalla definizione di φ_e^m, basta porre:

$$\phi(e, \overline{x}) \simeq u(\mu_y T_m(e, \overline{x}, y)) \quad \forall\, (e, \overline{x}) \in \mathbb{N}^{m+1}$$

dato che $u(\mu_y T_m(e, \overline{x}, y))$ è ricorsiva parziale anche come funzione $(m+1)$-aria. CVD

Proposizione 5.5 (Lemma di Padding). *Dato un indice $e \in \mathbb{N}$ di una funzione ricorsiva parziale f, si possono generare infiniti indici della stessa.*

Dimostrazione. Noto l'indice e di f, ne possiamo ottenere infiniti altri concatenando alla sequenza codificata da e un qualsiasi numero (finito) di equazioni ridondanti (cioè con infinite soluzioni). CVD

Teorema 5.6 (di Iterazione). *Dati $m, n \in \mathbb{N}$ esiste una funzione primitiva ricorsiva $(n+1)$-aria biettiva $s_n^m(e, x_0, \ldots, x_{n-1})$ tale che:*

$$\varphi_{s_n^m(e, x_0, \ldots, x_{n-1})}^m(y_0, \ldots, y_{m-1}) = \varphi_e^{n+m}(x_0, \ldots, x_{n-1}, y_0, \ldots, y_{m-1})$$

Dimostrazione. Supponiamo di avere la descrizione (codificata dal numero e) di una funzione ricorsiva parziale $(n+m)$-aria $g(\overline{x}, \overline{y})$. Dunque vogliamo ottenere la descrizione di una funzione m-aria definita come:

$$f(\overline{y}) \simeq g(\overline{x}, \overline{y}) \quad \forall\, \overline{y} \in \mathbb{N}^m$$

fissati $x_0, \ldots, x_{n-1} \in \mathbb{N}$. Consideriamo le funzioni costanti 0-arie corrispondenti ai valori $x_0, \ldots, x_{n-1}$ (dette rispettivamente $f_{x_0}(), \ldots, f_{x_{n-1}}()$). Quindi dobbiamo trovare un indice della descrizione codificata da e, seguita dall'equazione:

$$f(\overline{y}) \simeq g(f_{x_0}(), \ldots, f_{x_{n-1}}(), \overline{y}) \quad \forall\, \overline{y} \in \mathbb{N}^m$$

Questa descrizione di f dipende uniformemente da e e dai valori $x_0, \ldots, x_{n-1}$.
Dunque l'indice di f è descritto da una funzione $s_n^m(e, x_0, \ldots, x_{n-1})$ la quale può essere elementare ricorsiva se ad esempio si sceglie il metodo di aritmetizzazione basato sulla fattorizzazione in numeri primi (presentato nella sezione 3). Osserviamo inoltre che essa è biettiva per le proprietà della codifica.
CVD

Teorema 5.7 (La funzione ricorsiva parziale universale)**.** *Esiste una funzione ricorsiva parziale binaria ψ la quale genera tutte le funzioni ricorsive parziali (di qualsiasi arietà), ovvero tale che per ogni funzione ricorsiva parziale m-aria f esiste un $e \in \mathbb{N}$ tale che:*

$$f(\overline{x}) \simeq \psi(e, \langle \overline{x} \rangle) \quad \forall\, \overline{x} \in \mathbb{N}^n$$

Tale funzione ψ è detta ***funzione ricorsiva parziale universale****.*

Dimostrazione. Seguendo la notazione della dimostrazione del teorema 4.8 della forma normale di Kleene per le funzioni generali ricorsive, poniamo:

$$\psi(e, x) \simeq u\big(\mu_y(T(y) \wedge (y)_{1,1} = e \wedge (y)_{1,2} = x)\big) \quad \forall\, e, x \in \mathbb{N}$$

ricordiamo che, per definizione:

$$T_m(e, \overline{x}, y) \Leftrightarrow T(y) \wedge (y)_{1,1} = e \wedge (y)_{1,2} = \langle (x_0, \ldots, x_{m-1}) \rangle = \langle \overline{x} \rangle$$

e quindi per ogni $m \in \mathbb{N}$, per definizione di φ_e^m:

$$\psi(e, (x_0, \ldots, x_{m-1})) \simeq \varphi_e^n(x_0, \ldots, x_{m-1}) \quad \forall\, \overline{x} \in \mathbb{N}^m$$

CVD

5.2 Relazioni e insiemi ricorsivamente enumerabili

Analogamente a quanto fatto per le funzioni ricorsive generali (ed elementari) totali, consideriamo il corrispettivo delle funzioni ricorsive parziali in termini di insiemi/relazioni.
Diamo dunque la seguente:

Definizione 5.6. *Una relazione m-aria R sui numeri naturali è una relazione (o insieme)* ***ricorsivamente enumerabile*** *se è il dominio di una funzione ricorsiva parziale m-aria.*
In particolare: *denotiamo con W_e^m e $W_{e,s}^m$ i domini di φ_e^m e $\varphi_{e,s}^m$ (rispettivamente) per ogni $m, e, s \in \mathbb{N}$*

Osservazione. *Osserviamo che una definizione analoga alla definizione 2.6 di $\mathcal{F}$-relazione non è impiegabile con le funzioni ricorsive parziali in quanto la funzione caratteristica di un qualsiasi insieme è sempre una funzione totale. Quindi una tale definizione al posto della definizione 5.6 individuerebbe (per il corollario 5.3) esclusivamente le relazioni generali ricorsive.*

Teorema 5.8 (della forma normale di Kleene per relazioni ricorsivamente enumerabili)**.** *Una relazione m-aria sui numeri naturali P è ricorsivamente enumerabile se e solo se esiste una relazione $(m+1)$-aria generale ricorsiva R tale che:*

$$\overline{x} \in P \Leftrightarrow \exists\, y((\overline{x}, y) \in R)$$

In particolare: *se e solo se esiste un $e \in \mathbb{N}$ (detto* ***indice*** *di P) tale che:*

$$\overline{x} \in P \Leftrightarrow \overline{x} \in W_e^m \Leftrightarrow \exists\, y(T_m(e, \overline{x}, y))$$

Dimostrazione.

$\Longrightarrow$ Per definizione, se P è ricorsivamente enumerabile, allora è il dominio di una funzione ricorsiva φ_e^m, ovvero $P \equiv W_e^m$, e quindi:

$$\overline{x} \in W_e^m \Leftrightarrow \varphi_e^m(\overline{x})\downarrow \overset{\substack{\text{teorema 5.2 della} \\ \text{forma normale}}}{\Leftrightarrow} \exists\, y(T_m(e, \overline{x}, y))$$

$\Longleftarrow$ Dato che $\overline{x} \in P \Leftrightarrow \exists\, y(\overline{x}, y) \in R$, abbiamo che P è il dominio della funzione ricorsiva parziale:

$$f(\overline{x}) \simeq \mu_y R(\overline{x}, y) \quad \forall\, \overline{x} \in \mathbb{N}^m$$

CVD

Il seguente lemma è l'analogo del lemma 4.5 per i grafici delle funzioni ricorsive parziali.

Lemma 5.9. *Data una funzione parziale f abbiamo che:*

$$f \text{ funzione } m\text{-aria ricorsiva parziale} \Leftrightarrow \mathrm{Gr}(f) \text{ relazione } (m+1)\text{-aria ricorsivamente enumerabile}$$

Dimostrazione.

$\Longrightarrow$ Dato che f è ricorsiva parziale, per il teorema 5.4 di enumerazione risulta che $f \equiv \varphi_e^m$. Dunque segue che:

$$\begin{aligned}(\overline{x}, z) \in \mathrm{Gr}(f) \Leftrightarrow \varphi_e^m(\overline{x}) \simeq z \Leftrightarrow & \, u(\mu_y(T_m(e, \overline{x}, y))) \simeq z \\ \Leftrightarrow & \, \exists \, y\big(T_m(e, \overline{x}, y) \wedge \, \forall \, t < y(\neg T_m(e, \overline{x}, t)) \wedge u(y) = z\big)\end{aligned}$$

quindi, per il teorema 5.8 della forma normale per le relazioni ricorsivamente enumerabili, segue la tesi.

$\Longleftarrow$ Dato che la relazione $\mathrm{Gr}(f)$ è ricorsivamente enumerabile, sempre per il teorema 5.8 esiste una relazione generale ricorsiva R tale per cui:

$$(\overline{x}, z) \in \mathrm{Gr}(f) \Leftrightarrow \exists \, y((\overline{x}, z, y) \in R)$$

Quindi:

$$f(\overline{x})\downarrow \Leftrightarrow \exists \, z \, \exists \, y((\overline{x}, z, y) \in R)$$

Pertanto codificando z e y con un singolo numero $t = (z, y)$ abbiamo che:

$$f(\overline{x}) \simeq \big(\mu_t(R(\overline{x}, (t)_1, (t)_2))\big)_1 \quad \forall \, \overline{x} \in \mathbb{N}^m$$

e dunque segue la tesi.

CVD

Proposizione 5.10. *Data una relazione ricorsivamente enumerabile $(m+1)$-aria P:*

1. *esiste una funzione ricorsiva parziale m-aria f tale che:*

$$\exists \, y((\overline{x}, y) \in P) \Rightarrow f(\overline{x})\downarrow \wedge (\overline{x}, f(\overline{x})) \in P$$

2. *se, inoltre, P è tale che $\forall \, x \, \exists \, y((\overline{x}, y) \in P)$ allora esiste una funzione generale ricorsiva m-aria g tale che:*

$$\forall \, \overline{x}((\overline{x}, g(\overline{x})) \in P)$$

Dimostrazione.

1. Dato che P è ricorsivamente enumerabile, per il teorema 5.8, esiste una relazione generale ricorsiva R tale che:

$$(\overline{x}, y) \in P \Leftrightarrow \exists \, z((\overline{x}, y, z) \in R)$$

quindi ragionando allo stesso modo della dimostrazione del teorema precedente abbiamo che:

$$f(\overline{x}) \simeq \big(\mu_t(R(\overline{x}, (t)_1, (t)_2))\big)_1 \quad \forall \, \overline{x} \in \mathbb{N}^m$$

verifica la tesi.

2. Segue dal punto precedente.

CVD

5.2.1 Relazioni ricorsivamente enumerabili unarie

Teorema 5.11 (Caratterizzazione delle relazioni ricorsivamente enumerabili unarie). *Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

1. *$I \subseteq \mathbb{N}$ è ricorsivamente enumerabile*
2. *I è l'immagine di una funzione f ricorsiva parziale*
3. *$I = \varnothing$ oppure I è l'immagine di una funzione g generale ricorsiva*

Dimostrazione.

1. $\implies$ 2. Se I è ricorsivamente enumerabile, allora per il teorema 5.8, $\exists\, e \in \mathbb{N}$ tale che $I = W_e^1$. Dunque poniamo:

$$f(x) \simeq x \Leftrightarrow \varphi_e^1(x)\downarrow$$

Quindi il dominio di φ_e^1 è uguale all'immagine di f, la quale è ricorsiva parziale.

2. $\implies$ 3. Sia $I = \mathrm{Im}(f) \neq \varnothing$ dunque, per il teorema 5.4 di enumerazione $\exists\, e \in \mathbb{N}$ tale che $f \equiv \varphi_e^1$ e quindi $I = \mathrm{Im}(\varphi_e^1)$. Scelto un qualsiasi $i \in I$ consideriamo la funzione g tale che:

$$g(J(x,s)) = \begin{cases} z & \text{se } \varphi_{e,s}^1(x)\downarrow \wedge \varphi_{e,s}^1(x) \simeq z \\ a & \text{se } \varphi_{e,s}^1(x)\uparrow \end{cases}$$

con J funzione coppia (la quale è suriettiva e ciò garantisce che g sia totale).
Tale funzione è generale ricorsiva poiché tale è la relazione $\varphi_{e,s}^1(x)\downarrow$.

3. $\implies$ 1. Analizziamo i due casi:

- Se $I = \varnothing$ allora è il dominio della funzione non definita in ogni valore la quale è ovviamente ricorsiva parziale.
- Se $I = \mathrm{Im}(g)$ con g generale ricorsiva, consideriamo la funzione ricorsiva parziale h definita come:

$$h(x) \simeq \mu_y(g(y) = x) \quad \forall\, x \in \mathbb{N}$$

  la quale ha I come dominio in quanto $h(x)\downarrow \Leftrightarrow \exists\, y(f(y) = x)$.

CVD

Teorema 5.12 (di Post). *Una relazione $R \subseteq \mathbb{N}$ è generale ricorsiva se e solo se sia essa che la sua negazione sono ricorsivamente enumerabili.*

Dimostrazione.

$\implies$ Data R generale ricorsiva osserviamo che sia R che $\neg R$ sono ricorsivamente enumerabili in quanto domini (rispettivamente) delle funzioni:

$$r(x) \simeq \begin{cases} 1 & \text{se } \chi_R(x) = 1 \\ \text{indefinita} & \text{se } \chi_R(x) = 0 \end{cases} \qquad \tilde{r}(x) \simeq \begin{cases} 0 & \text{se } \chi_R(x) = 0 \\ \text{indefinita} & \text{se } \chi_R(x) = 1 \end{cases}$$

$\impliedby$ Siano sia R che $\neg R$ ricorsivamente enumerabili. Osserviamo che se uno dei due è vuoto allora l'altro è $\mathbb{N}$ e dato che sono entrambi generali ricorsivi segue la tesi.
Supponiamo quindi che R ed $\neg R$ siano entrambi non vuoti, per il teorema 5.8 della forma normale di Kleene, abbiamo che esistono le relazioni ricorsive binarie P e Q tali che:

$$x \in R \Leftrightarrow \exists\, y((x,y) \in P) \qquad x \in \neg R \Leftrightarrow \exists\, y((x,y) \in Q)$$

Dato che $\mathbb{N} = R \cup \neg R$ vale che:

$$\forall\, x\, \exists\, y((x, y) \in P \cup Q) \Leftrightarrow\; \forall\, x\, \exists\, y((x, y) \in P \vee (x, y) \in Q)$$

e pertanto la funzione:

$$f(x) = \mu_y(P(x, y) \vee Q(x, y)) \qquad \forall\, x \in \mathbb{N}$$

è generale ricorsiva (per la proposizione 4.4) e per ogni $x \in \mathbb{N}$ vale esattamente una tra $(x, f(x)) \in P$ e $(x, f(x)) \in Q$.
Quindi R è generale ricorsiva in quanto:

$$\chi_R(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } (x, f(x)) \in R \\ 0 & \text{se } (x, f(x)) \notin R \end{cases}$$

e $P(I_0^2, f \circ I_0^2)$ e $Q(I_0^2, f \circ I_0^2)$ sono generali ricorsive per la proposizione 2.8.

CVD

Proposizione 5.13. *Ogni insieme infinito $P \subseteq \mathbb{N}$ ricorsivamente enumerabile ha un sottoinsieme infinito generale ricorsivo.*

Dimostrazione. Per la caratterizzazione delle relazioni ricorsivamente enumerabili (teorema 5.11) abbiamo che $P = \mathrm{Im}(f)$ per una certa funzione ricorsiva generale.
Definiamo ricorsivamente la funzione $h \equiv \mathbf{R}_p^0(f(0), g)$ con $g(z) = f(\mu_y(f(y) > z)) \quad \forall\, z \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} h(0) = f(0) \\ h(S(n)) = f(\mu_y(f(y) > h(n))) \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Osserviamo che g è generale ricorsiva in quanto $\mathrm{Im}(f)$ è infinita (e quindi $\forall\, x\, \exists\, y(f(y) > x)$) e quindi anche h è tale. Inoltre h è una funzione crescente e dunque è la funzione di enumerazione per un certo insieme $I = \mathrm{Im}(h) \subseteq P$ (ovviamente infinito).
Quindi per il teorema 4.6 I è un insieme generale ricorsivo. CVD

Definizione 5.7. *Indichiamo con $\mathcal{R}_1$ la famiglia delle* ***funzioni ricorsive parziali unarie****.*

Proposizione 5.14. *Dato l'insieme $P \subseteq \mathbb{N}$ ricorsivamente enumerabile e la funzione unaria $f \in \mathcal{R}_1$, abbiamo che gli insiemi:*

1. $f(P) := \{f(x) \mid x \in P\}$
2. $f^{-1}(P) := \{x \mid f(x)\downarrow \wedge f(x) \in P\}$

sono ricorsivamente enumerabili.

Dimostrazione.

1. Poiché P è ricorsivamente enumerabile abbiamo che $P = \mathrm{Im}(p)$ per una certa funzione $p \in \mathcal{R}_1$ ricorsiva parziale (teorema 5.11), dunque:

$$\begin{aligned} f(P) &= f(\mathrm{Im}(p)) = \{f(x) \mid x \in \mathrm{Im}(p)\} \\ &= \{f(x) \mid x = p(z) \wedge p(z)\downarrow\} = \{f(p(z)) \mid p(z)\downarrow\} = \mathrm{Im}(f \circ p) \end{aligned}$$

e $f \circ p$ è ricorsiva parziale in quanto composizione di funzioni ricorsive parziali.

2. Per definizione di relazione ricorsivamente enumerabile abbiamo che:

$$P = \mathrm{Dom}(p) = \{x \in \mathbb{N} \mid p(x)\downarrow\}$$

per una certa funzione ricorsiva parziale $p \in \mathcal{R}_1$. Dunque:

$$\begin{aligned} f^{-1}(P) &= f^{-1}(\mathrm{Dom}(p)) = \{x \in \mathbb{N} \mid f(x)\downarrow \wedge f(x) \in \mathrm{Dom}(p)\} \\ &= \{x \in \mathbb{N} \mid f(x)\downarrow \wedge p(f(x))\downarrow\} = \{x \in \mathbb{N} \mid p(f(x))\downarrow\} = \mathrm{Dom}(p \circ f) \end{aligned}$$

e $p \circ f$ è ricorsiva parziale in quanto composizione di funzioni ricorsive parziali.

CVD

Corollario 5.15. *Dato l'insieme $R \subseteq \mathbb{N}$ generale ricorsivo e la funzione $f \in \mathcal{G}_1$, abbiamo che l'insieme:*

$$f^{-1}(R) := \{x \mid f(x) \in R\}$$

è generale ricorsiva.

Dimostrazione. Dato che R è generale ricorsiva, per il teorema 5.12 di Post, sia R che $\neg R \equiv \mathbb{N} \backslash R$ sono ricorsivamente enumerabili e quindi, per la proposizione precedente, sono tali anche $f^{-1}(R)$ e $f^{-1}(\mathbb{N} \backslash R)$. Dato che $f^{-1}(N \backslash R) = N \backslash f^{-1}(R)$, sia $f^{-1}(R)$ che la sua negazione sono ricorsivamente enumerabili e quindi (sempre per il teorema 5.12) $f^{-1}(R)$ è generale ricorsiva. CVD

Osservazione. *Osserviamo che sebbene ogni insieme generale ricorsivo è anche ricorsivamente enumerabile non vale il viceversa. In particolare abbiamo il seguente:*

Esempio 5.1. *L'insieme $K \subseteq \mathbb{N}$ definito da:*

$$x \in K \Leftrightarrow x \in W_x^1 \Leftrightarrow \varphi_x^1(x)\downarrow$$

è ricorsivamente enumerabile ma non generale ricorsivo. Infatti, per il teorema 5.4 di enumerazione, esiste una funzione f ricorsiva parziale tale che:

$$f(x) \simeq \varphi_x^1(x) \qquad \forall\, x \in \mathbb{N}$$

quindi K è ricorsivamente enumerabile in quanto suo dominio:

$$x \in K \Leftrightarrow f(x)\downarrow$$

Supponiamo per assurdo che K sia generale ricorsivo, dunque abbiamo (per il teorema 5.12 di Post) che anche $\neg K$ è ricorsivamente enumerabile. Tuttavia, si ha che:

$$x \in \neg K \Leftrightarrow x \notin W_x^1$$

e quindi $\neg K$ differisce, di almeno un elemento x, dall'x-esimo insieme ricorsivamente enumerabile e quindi non può essere ricorsivamente enumerabile, assurdo. $\lightning$

5.2.2 L'insieme indice

Definizione 5.8. *Dato una famiglia di funzioni ricorsive parziali $\mathcal{F}$, definiamo l'**insieme indice** $I_{\mathcal{F}}$ come:*

$$I_{\mathcal{F}} = \{x \mid \varphi_x^1 \in \mathcal{F}\}$$

Teorema 5.16 (di Rice). *Una famiglia di funzioni ricorsive parziali unarie $\mathcal{F}$ ha l'insieme indice $I_{\mathcal{F}}$ generale ricorsivo se e solo se $\mathcal{F} = \varnothing$ o $\mathcal{F} = \mathcal{R}_1$.*

Dimostrazione. Osserviamo che:

- L'insieme $\mathcal{F} = \varnothing$ se e solo se l'insieme indice $I_\mathcal{F} = \varnothing$ che è generale ricorsivo.
- Analogamente $\mathcal{F} = \mathcal{R}_1$ se e solo se $I_\mathcal{F} = \mathbb{N}$.
- Se $\varnothing \neq \mathcal{F} \neq \mathcal{R}_1$, allora esistono $a, b \in \mathbb{N}$ tali che $\varphi_a^1 \in \mathcal{F}$ e $\varphi_b^1 \notin \mathcal{F}$. Abbiamo dunque due possibilità:
  - Se la funzione completamente indefinita non appartiene ad $\mathcal{F}$, consideriamo la funzione generale ricorsiva $f \in \mathcal{G}_1$ tale che:

    $$\varphi^1_{f(x)}(x) = \begin{cases} \varphi_a^1(x) & \text{se } x \in K \\ \text{indefinita} & \text{se } x \notin K \end{cases}$$

    dove K è l'insieme definito nell'esempio 5.1. Quindi abbiamo che:

    $$x \in K \Leftrightarrow \varphi^1_{f(x)} \in \mathcal{F} \Leftrightarrow f(x) \in I_\mathcal{F}$$

    e quindi $I_\mathcal{F}$ non è generale ricorsivo poiché altrimenti anche K lo sarebbe.
  - Se la funzione completamente indefinita appartiene ad $\mathcal{F}$ si ragiona analogamente usando φ_b^1 nella definizione di f e mostrando che $\mathbb{N} \backslash I_\mathcal{F}$ non è generale ricorsivo.

CVD

5.3 Il teorema di ricorsione

Teorema 5.17 (di ricorsione)**.** *Data f funzione ricorsiva parziale $(m+1)$-aria, esiste un indice $e \in \mathbb{N}$ tale che:*

$$\varphi_e^m(\overline{x}) \simeq f(e, \overline{x}) \quad \forall\, \overline{x} \in \mathbb{N}^{m+1}$$

Dimostrazione. Consideriamo la funzione ricorsiva parziale:

$$g(x_0, \ldots, x_m) \simeq f(s_1^m(x_0, x_0), x_1, \ldots, x_m) \quad \forall\, \overline{x} \in \mathbb{N}^m$$

per il teorema 5.4 di enumerazione $\exists\, r \in \mathbb{N}$ tale che $g \equiv \varphi_r^{m+1}$. Posto $e = s_1^m(r, r)$ abbiamo quindi che:

$$\varphi_e^m(x_0, \ldots, x_{m-1}) \overset{\substack{\text{teorema 5.6 di}\\ \text{iterazione}}}{\simeq} \varphi_r^{m+1}(r, x_0, \ldots, x_{m-1}) \simeq g(r, x_0, \ldots, x_{m-1}) \simeq f(e, x_0, \ldots, x_{m-1}) \quad \forall\, \overline{x} \in \mathbb{N}^m$$

CVD

Teorema 5.18 (del punto fisso)**.** *Data una funzione generale ricorsiva unaria f, esiste un indice $e \in \mathbb{N}$ tale che:*

$$\varphi_e^1 \equiv \varphi_{f(e)}^1$$

In particolare: *tale che $W_e^1 = W_{f(e)}^1$.*

Dimostrazione. Consideriamo la funzione binaria:

$$g(x, y) \simeq u\big(\mu_z T_1(f(y), x, z)\big) \quad \forall\, x, y \in \mathbb{N}$$

essa è ricorsiva parziale e inoltre, per definizione si ha: $g(x, y) \simeq \varphi^1_{f(y)}(x) \;\; \forall\, x, y \in \mathbb{N}$.
Applicando il teorema 5.17 di ricorsione a g quindi troviamo $e \in \mathbb{N}$ tale che $g(e, x) \simeq \varphi_e^1(x) \;\; \forall\, x \in \mathbb{N}$.
Quindi segue che: $\varphi_e^1 \equiv \varphi_{f(e)}^1$. CVD

Riferimenti bibliografici

Articoli

[Rob47] Raphael M. Robinson. «Primitive recursive functions». In: *Bulletin of the American Mathematical Society* 53.10 (1947), pp. 925–942. URL: https://www.ams.org/journals/bull/1947-53-10/S0002-9904-1947-08911-4/.

[Rob50] Julia Robinson. «General Recursive Functions». In: *Proceedings of the American Mathematical Society* 1.6 (1950), pp. 703–718. URL: http://www.jstor.org/stable/2031973.

Libri

[And22] Alessandro Andretta. *Elements of Mathematical Logic*. 2022. Cap. II-8, III-11. unpublished.

[Kle76] Stephen Cole Kleene. *Introduction to Metamathematics*. WOLTERS-NOORDHOFF PUBLISHING - GRONINGEN, 1976. Cap. XI, XII. URL: https://books.google.it/books?id=O28-AQAAIAAJ.

[Mon76] J. Donald Monk. *Mathematical Logic*. Springer New York, NY, 1976. Cap. 2, 3, 5, 6. URL: https://doi.org/10.1007/978-1-4684-9452-5.

[Odi89] Piergiorgio Odifreddi. *Classical Recursion Theory: The Theory of Functions and Sets of Natural Numbers*. North-Holland Publishing Company, 1989. Cap. I.7, II.1, II.2. URL: https://books.google.it/books?id=q93uAAAAMAAJ.