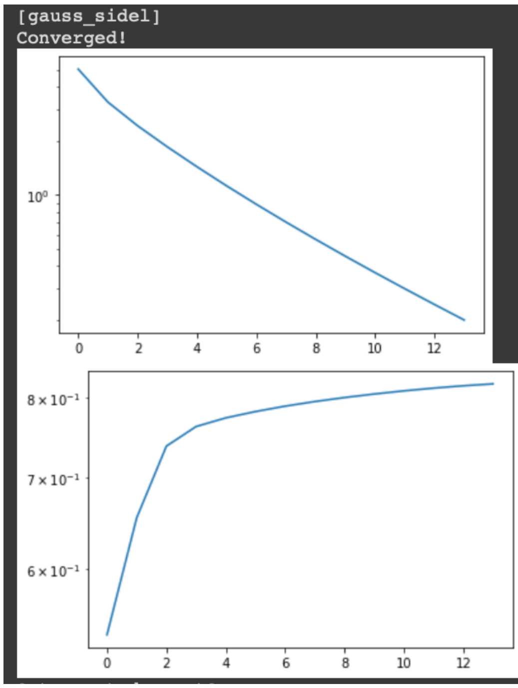
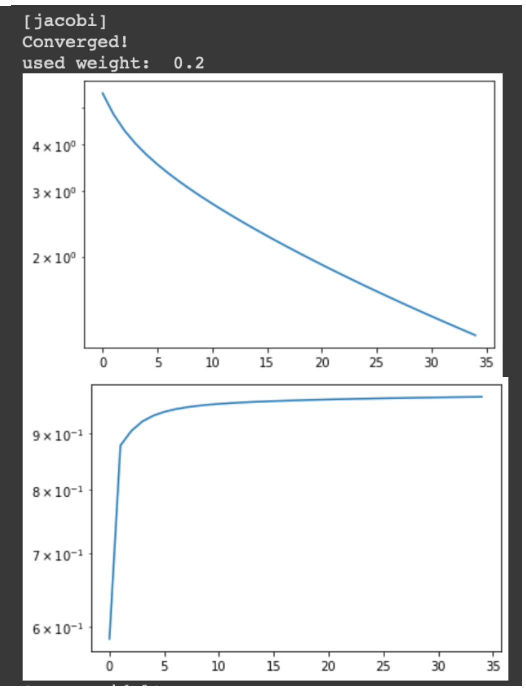
עבודת בית 2

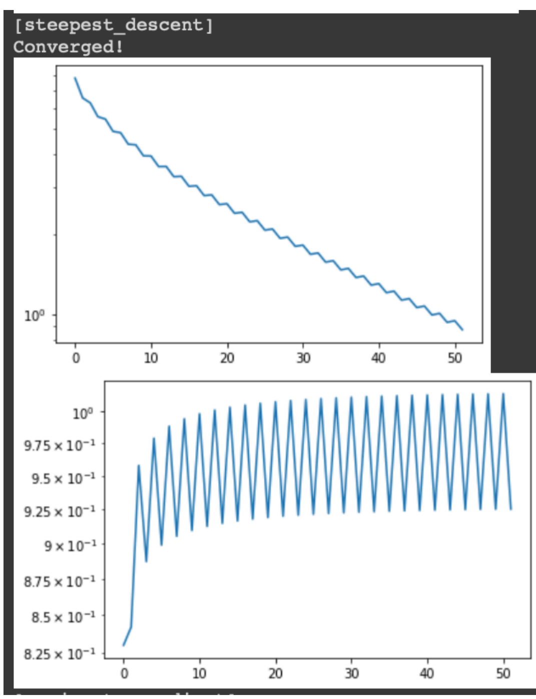
שאלה 1:

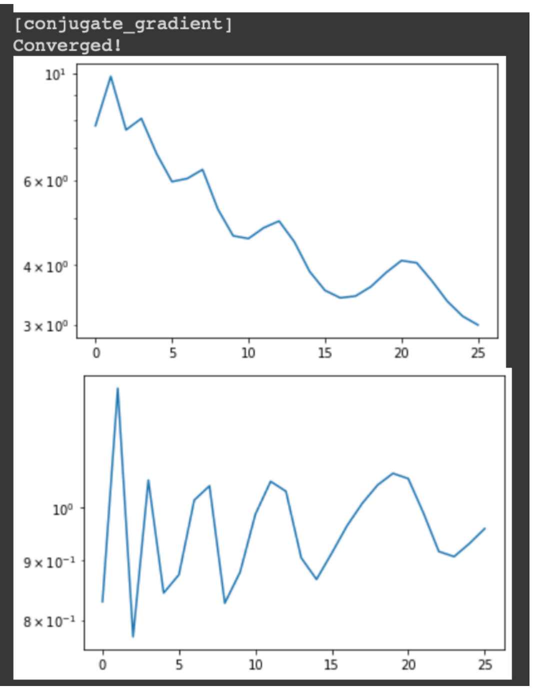
מצורף הקוד.

להלן ההדפסות עבור כל אחד מהאלגוריתמים:









<u>שאלה 2:</u>

<u>סעיף א':</u>

מהגדרת שיטת ריצרדסון,

$$x^{k+1} = x^k + M^{-1}(b - Ax^k)$$

מאחר וA חיובית, הינה הפיכה ולכן

$$M^{-1} = \frac{1}{||A||} I$$

הפתרון מתכנס אמ"מ

$$p(I - M^{-1}A) < 1$$

נציב ונקבל

$$p\left(I - \frac{1}{||A||} I * A\right) = \max\left\{\left|1 - \frac{1}{||A||}\lambda_{max}\right|, \left|1 - \frac{1}{||A||}\lambda_{min}\right|\right\}$$

מכיוון שA סימטרית וחיובית, מתקיים ש$\lambda_{min} \le \lambda_{max} \le ||A||$

לכן, $\frac{1}{||A||} * \lambda_{min} \le \frac{1}{||A||}\lambda_{max} \le \frac{||A||}{||A||} = 1$

ולכן

$$p\left(I - \frac{1}{||A||} I * A\right) \le 1$$

ומכאן שהשיטה תתכנס.

<u>סעיף ב':</u>

מכיוון שלמטריצה אין ערך עצמי 0, הינה הפיכה ולכן נוכל עדיין לסמן

$$M^{-1} = \frac{1}{||A||} I$$

כלומר, $p\left(I - \frac{1}{||A||} I * A\right) = \max\left\{\left|1 - \frac{1}{||A||}\lambda_{max}\right|, \left|1 - \frac{1}{||A||}\lambda_{min}\right|\right\}$

מהגדרת מטריצה *indefinite*, נקבל ש$\lambda_{min} < 0 < \lambda_{max}$

ולכן $\left|1 - \frac{1}{||A||}\lambda_{min}\right| > 1$

ולכן $p\left(I - \frac{1}{||A||} I * A\right) > 1$

כלומר הפתרון אינו מתכנס.

<u>סעיף ג':</u>

1) מכיוון שA מטריצה *PD*,

$$< r^k, Ar^k >= (r^k)^T A r^k \ge 0$$

בנוסף, מהגדרת נורמה

$$\frac{1}{2}(x^{*}-x)_A^2 \geq 0$$

ולכן לכל x מתקיים $f(x) \geq 0$

סה"כ

$$\frac{1}{2}\frac{< r^k, Ae^k >^2}{< r^k, Ar^k >} > 0$$

ולכן

$$f(x^k) - \frac{1}{2}\frac{< r^k, Ae^k >^2}{< r^k, Ar^k >} < f(x^k)$$

(2

$$f(x^k) = \frac{1}{2}\left|\left|x^{*}-x^k\right|\right|_A^2 = \frac{1}{2}\left|\left|e^k\right|\right|_A^2 = \frac{1}{2}(e^k)^T * A * e^k$$

$$C^k * f(x^k) = f(x^k) - \frac{1}{2}\frac{< r^k, Ae^k >^2}{< r^k, Ar^k >}$$

$$C^k = 1 - \frac{1}{2}\frac{< r^k, Ae^k >^2}{< r^k, Ar^k >} * \frac{1}{f(x^k)} = 1 - \frac{< r^k, Ae^k >^2}{< r^k, Ar^k >} * \frac{1}{(e^k)^T * A * e^k}$$

נראה ש$C^k < 1$:

נסתכל על הביטוי

$$\frac{< r^k, Ae^k >^2}{< r^k, Ar^k >} * \frac{1}{(e^k)^T * A * e^k}$$

$\frac{<r^k,Ae^k>^2}{<r^k,Ar^k>} > 0$ מסעיף קודם

כמו כן, A היא PD ולכן $(e^k)^T * A * e^k > 0$.

סה"כ $C^k = 1 - \frac{<r^k,Ae^k>^2}{<r^k,Ar^k>} * \frac{1}{\left(e^k\right)^T * A * e^k} < 1$

(3

$$C^k = 1 - \frac{< r^k, Ae^k >^2}{< r^k, Ar^k >} * \frac{1}{< e^k, Ae^k >} = 1 - \frac{< r^k, r^k >}{< r^k, Ar^k >} * \frac{< r^k, Ae^k >}{< e^k, Ae^k >}$$
$$= 1 - \frac{< r^k, r^k >}{< r^k, Ar^k >} * \frac{< Ae^k, Ae^k >}{< e^k, Ae^k >}$$

$$\frac{1}{\lambda_{min}} \geq \frac{v^T v}{v^T A v} \geq \frac{1}{\lambda_{max}}$$

$$r^k = b - Ax^k$$
$$e^k = x^* - x^k$$
$$Ae^k = Ax^* - Ax^k = b - Ax^k = r^k$$
$$e^k = A^{-1} r^k$$
$$C^k = 1 - \frac{< r^k, Ae^k >^2}{< r^k, Ar^k >} * \frac{1}{< e^k, Ae^k >}$$

נשים לב כי $C^k = 1 - \frac{<r^k,r^k>^2}{<r^k,Ar^k>} * \frac{1}{<e^k,Ae^k>} \leq 1 - \frac{\lambda_{min}}{\lambda_{max}}$ אמ"ם $\frac{<r^k,r^k>^2}{<r^k,Ar^k>} * \frac{1}{<e^k,Ae^k>} \geq \frac{\lambda_{min}}{\lambda_{max}}$

אמ"ם $\frac{<r^k,Ar^k><e^k,Ae^k>}{<r^k,r^k>^2} \leq \frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}$

נשים לב כי $\frac{<r^k,Ar^k><e^k,Ae^k>}{<r^k,Ae^k>^2} = \frac{{r^k}^T A r^k {e^k}^T r^k}{{r^k}^T A e^k {r^k}^T A e^k}$

הראנו כי $Ae^k = r^k$ כלומר $e^k = A^{-1} r^k$ נציב זאת ונקבל את התנאי הבא:

$$\frac{{r^k}^T A r^k * (A^{-1} r^k)^T * r^k}{{r^k}^T r^k {r^k}^T r^k} \leq \frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}$$

כלומר נרצה להראות ש:

$$\frac{{r^k}^T A r^k}{{r^k}^T r^k} * \frac{{r^k}^T {A^{-1}}^T r^k}{{r^k}^T r^k} \leq \frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}$$

נשים לב כי מההגדרה הנתונה: $\frac{{r^k}^T A r^k}{{r^k}^T r^k} \leq \lambda_{max}$

כמו כן, נשים לב כי מאחר וA הפיכה וסימטרית אז A^{-1} גם כן סימטרית, ולכן גם עבורה מתקיים לפי ההגדרה: $\frac{{r^k}^T {A^{-1}}^T r^k}{{r^k}^T r^k} \leq \lambda_{max}(A^{-1}) = \frac{1}{\lambda_{min}(A)}$

סה"כ קיבלנו:

$\frac{{r^k}^T A r^k}{{r^k}^T r^k} * \frac{{r^k}^T {A^{-1}}^T r^k}{{r^k}^T r^k} \leq \frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}$ כנדרש.

4)

$$f(x^k) = \frac{1}{2}\left||x^* - x^k|\right|_A^2 = \frac{1}{2}\left||e^k|\right|_A^2 = \frac{1}{2}(e^k)^T * A * e^k$$

מהגדרת $f(x^k)$ נובע כי $f(x^{k+1}) = C^k * f(x^k) = C^k * C^{k-1} * \ldots\ldots f(x^0)$

כמו כן הראנו בסעיף הקודם שלכל K: $C^k \leq 1 - \frac{\lambda_{min}}{\lambda_{max}}$

כלומר נקבל כי $\lim\left(f(x^k)\right) \leq \lim\left(1 - \frac{\lambda_{min}}{\lambda_{max}}\right)^k * f(x^0)$
אנו מתייחסים ל$f(x^0)$ כאל סקלר, כמו כן $1 - \frac{\lambda_{min}}{\lambda_{max}} < 1$ ולכן
$$\lim\left(f(x^k)\right) \leq \lim\left(1 - \frac{\lambda_{min}}{\lambda_{max}}\right)^k * f(x^0) = 0$$
כמו כן $\lim\ f(x^k) \geq 0$
ולכן קיבלנו ע"י סנדוויץ כי $\lim f(x^k) = 0$

מאחר ו-$f(x^k) = \frac{1}{2}\left||x^* - x^k|\right|_A^2$ אז נקבל כי $\lim \frac{1}{2}\left||x^* - x^k|\right|_A^2 = 0$
כלומר $\lim x^k = x^*$

שאלה 3

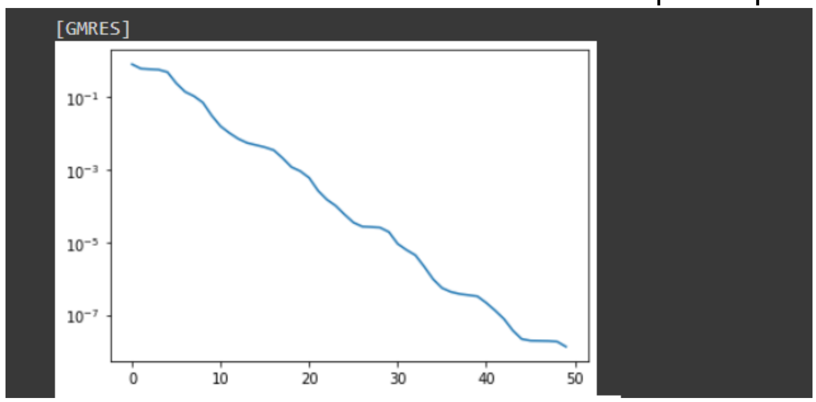
סעיף א':
נתון כי $x^{k+1} = x^k + \alpha^k(b - Ax^k)$
נשים לב כי בשיטת *GMRES* אנו בוחרים את α^k כך שימזער את $||r^k||$, כלומר נבחר את α^k כך ש-$\left||r^{k+1}|\right|_2 = \left||b - Ax^{k+1}|\right|_2$ יהיה מינימלי.
נגדיר את הפונקציה הבאה: $f(x^{k+1}) = \left||b - Ax^{k+1}|\right|_2$
נציב את המשוואה הנתונה עבור x^{k+1} וכמו כן נציב $r^k = b - Ax^k$ ונקבל:
$$f(x^{k+1}) = \left||b - A(x^k + \alpha^k(b - Ax^k))|\right|_2 = \left||b - Ax^k - A\alpha^k(b - Ax^k)|\right|_2 = \left||r^k - \alpha^k A(r^k)|\right|_2$$

כעת נפתח את הנורמה (לפי נורמת 2):
$$f(x^{k+1}) = \left(r^k - \alpha^k A(r^k)\right)^T * \left(r^k - \alpha^k A(r^k)\right) = \left({r^k}^T - \alpha^k {r^k}^T A^T\right)\left(r^k - \alpha^k A(r^k)\right)$$
$$= {r^k}^T r^k - \alpha^k {r^k}^T A^T r^k - \alpha^k {r^k}^T A^T r^k + {\alpha^k}^2 {r^k}^T A^T A r^k$$

נרצה למזער את המשוואה הזאת לפי α^k ולכן נגדיר פונקציה לפי המשתנה α^k
$$g(\alpha^k) = f(x^{k+1}) = {r^k}^T r^k - \alpha^k {r^k}^T A^T r^k - \alpha^k {r^k}^T A^T r^k + {\alpha^k}^2 {r^k}^T A^T A r^k$$

אז נגזור אותה לפי α^k ונשווה ל0:
$$g'(\alpha^k) = -{r^k}^T A^T r^k - {r^k}^T A^T r^k + 2\alpha^k {r^k}^T A^T A r^k = 0$$
כלומר נקבל
$2\alpha^k {r^k}^T A^T A r^k = 2{r^k}^T A^T r^k \to \alpha^k = \frac{{r^k}^T A^T r^k}{{r^k}^T A^T A r^k}$ כנדרש.

<u>סעיף ג:</u>
מצורף הקוד.
הגרף שהתקבל לאחר 50 איטרציות:



<u>סעיף ד:</u>
הגרף מונוטוני יורד, שכן הוא מייצג את השארית ($||r^k||$) בכל איטרציה. מאחר ואנו ממזערים את השארית בכל איטרציה ע"י שינוי ה α אז נקבל שלכל איטרציה k, $|r^{k+1}| \leq |r^k|$

<u>סעיף e:</u>
בהתאם לשאלה, נגדיר $\vec{\alpha}^k = [\alpha_1^k, \alpha_2^k]$ וגם נגדיר $R^k = [r^k, r^{k-1}]$

אז נשתמש בנוסחא $x^{k+1} = x^k + R^k\vec{\alpha}^k$
על מנת למצוא את ה$\vec{\alpha}^k$ האופטימלית עבורה, $\left||b - Ax^{k+1}|\right|$ מינימלית.
נציב את x^{k+1} הנתון במשוואה ונגדיר זאת כפונקציה שאותה נרצה למזער:

$$f(x^{k+1}) = \left||b - Ax^{k+1}|\right| = \left||b - A(x^k + R^k\vec{\alpha}^k)|\right|_2 = \left||b - Ax^k - AR^k\vec{\alpha}^k|\right|_2$$
$$= \left||r^k - AR^k\vec{\alpha}^k|\right|_2$$

כעת נפתח את הנורמה (לפי נורמת 2):

$$f(x^{k+1}) = (r^k - AR^k\vec{\alpha}^k)^T * (r^k - AR^k\vec{\alpha}^k) = \left({r^k}^T - {\vec{\alpha}^k}^T {R^k}^T A^T\right) * (r^k - AR^k\vec{\alpha}^k)$$
$$= {r^k}^T r^k - {\vec{\alpha}^k}^T {R^k}^T A^T r^k - {r^k}^T A R^k \vec{\alpha}^k + {\vec{\alpha}^k}^T {R^k}^T A^T A R^k \vec{\alpha}^k$$

נשים לב כי $\;{r^k}^T A R^k \vec{\alpha}^k = \left({\vec{\alpha}^k}^T {R^k}^T A^T r^k\right)^T$ וגם שניהם סקלר ולכן הם שווים. סה"כ נקבל:

$$f(x^{k+1}) = {r^k}^T r^k - 2{\vec{\alpha}^k}^T {R^k}^T A^T r^k + {\vec{\alpha}^k}^T {R^k}^T A^T A R^k \vec{\alpha}^k$$

על מנת למזער את הפונקציה, נגזור אותה לפי $\vec{\alpha}^k$ ונשווה ל-0:

$$g(\vec{\alpha}^k) = -2{R^k}^T A^T r^k + 2{R^k}^T A^T A R^k \vec{\alpha}^k = 0$$
$$\rightarrow 2{R^k}^T A^T A R^k \vec{\alpha}^k = 2{R^k}^T A^T r^k$$

$$\rightarrow \vec{\alpha}^k = \left({R^k}^T A^T A R^k\right)^{-1} {R^k}^T A^T r^k$$

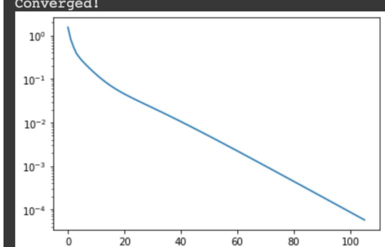
ולכן קיבלנו ביטוי סגור ל-$\vec{\alpha}^k$.

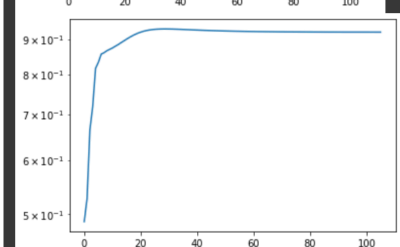
שאלה 4:

א.

```
L = np.array([[2,-1,-1,0,0,0,0,0,0,0],[-1,2,-1,0,0,0,0,0,0,0],[-1,-1,3,-1,0,0,0,0,0,0],[0,0,-1,5,-1,0,0,0,0,0],[0,0,0,-1,4,-1,-1,-1,0,0],
              [0,0,0,0,-1,3,-1,-1,0,0],[0,0,0,-1,-1,-1,5,-1,0,-1],[0,0,0,0,-1,-1,-1,4,0,-1],[0,0,0,-1,0,0,0,0,2,-1],[0,0,0,-1,0,0,-1,-1,-1,4]])
b = [1,-1,1,-1,1,-1,1,-1,1,-1]
x_0 = np.zeros(10)
x_hat,conv_lst,residu_lst = jacobi(L,b,x_0,200,10 ** (-5),1)
plt.semilogy(conv_lst)
plt.show()
plt.semilogy(residu_lst)
plt.show()
print("[SOLUTION]: ",x_hat)
print("Converged after: ",len(conv_lst))
```

```
[jacobi]
Converged!
```



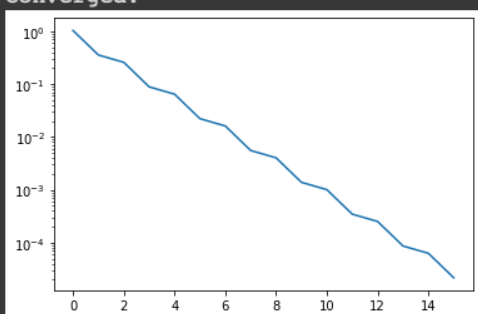


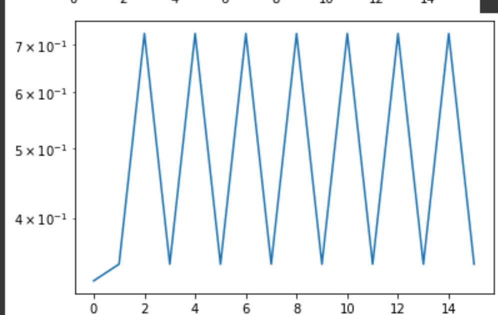

```
[SOLUTION]:  [ 1.33071029  0.66404363  0.99739231 -0.00255759 -0.01016757 -0.51206921
 -0.05751581 -0.4685068   0.35159132 -0.29425192]
Converged after:  106
```

ב.

```
M = np.zeros((10,10))
M_1 = L[:3, :3]
M_2 = L[3:,3:]
M[:3,:3] = M_1
M[3:,3:] =  M_2

def jacobi_precoditioned(A,b,x_0,max_iter,epsilon,w=1):
  print("[jacobi precoditioned]")

  return general(A, b, x_0, M, max_iter, epsilon,w)

x_hat,conv_lst,residu_lst = jacobi_precoditioned(L,b,x_0,100,10**(-5),1)
plt.semilogy(conv_lst)
plt.show()
plt.semilogy(residu_lst)
plt.show()

print("[SOLUTION]: ",x_hat)
print("Converged after: ",len(conv_lst))
```

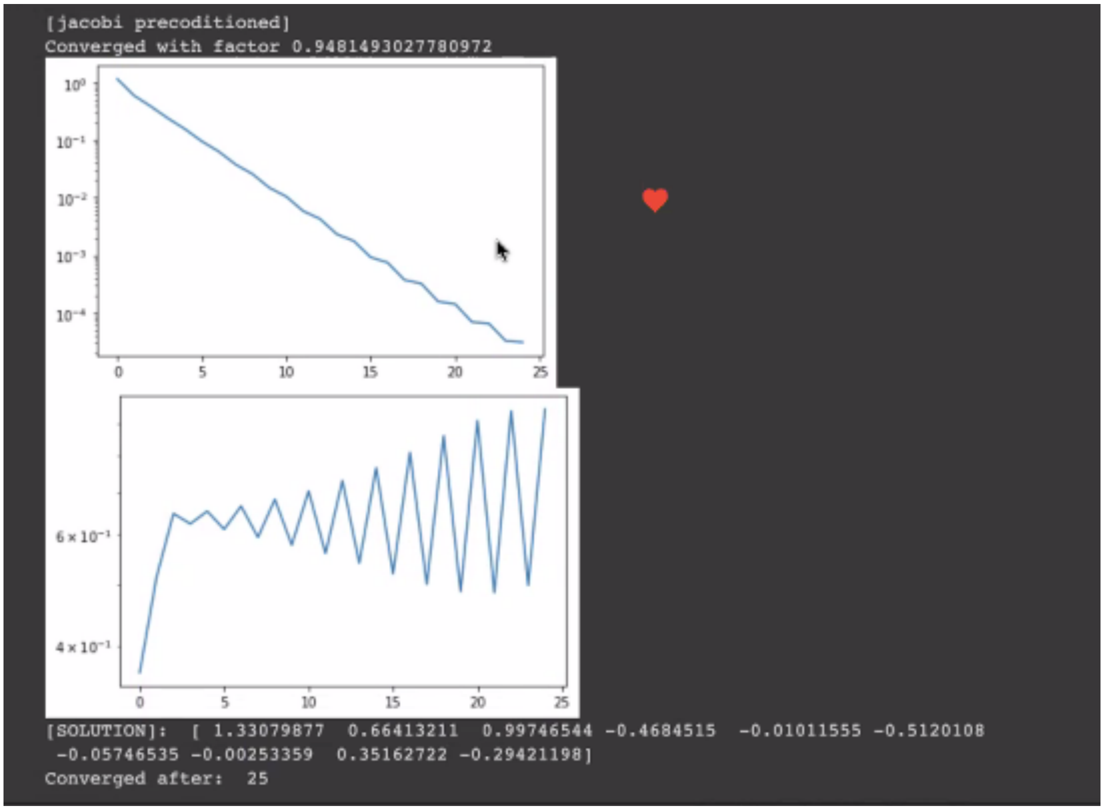
```
[jacobi precoditioned]
Converged!
```






```
[SOLUTION]:  [ 1.33079286  0.66412619  0.99745953 -0.4684343  -0.01010097 -0.51199491
 -0.05744946 -0.00252521  0.35164145 -0.29419188]
Converged after:  16
```

ג.



בסעיף זה חילקנו את המטריצה המקורית ל-3 בלוקים המייצגים 3 רכיבי קשירות בגרף, תוך ניסיון לשמר על כמה שיותר מידע מהגרף (על כן, ביצענו את החלפת השורות והעמודות 4,8).
מצורף הקוד.