

围绕马尔科夫链进行的含有音程的随机音乐生成

向柯帆 邢雨菡

2022 年 5 月

1 研究背景

马尔科夫链 (Markov chain) 是十分简单、适用面很广的数学模型。其严格的数学定义是：

对于一族随机变量 $\{X_n\}$, X_n 取值于可数集 S , 若 $\forall n \geq 1, \forall i_0, \dots, i_{n+1} \in S$, 都有

$$P(X_{n+1} = i_{n+1} | X_n = i_n, X_0 = i_0, \dots, X_{n-1} = i_{n-1}) = P(X_{n+1} = i_{n+1} | X_n = i_n) \quad (1)$$

则称 $\{X_n\}$ 为一个马尔科夫链，称等式 (1) 为马尔科夫性。

如果已知一个变量具有马尔科夫性，那么它将会变化到什么样的状态只与它当前的状态有关，而与之前的状态都毫无关系。

2 思路与方法

音乐可以看作是乐音 (pitch) 的排列，假定乐音是服从马尔科夫性的随机变量，那么统计一段音乐中音级的转移概率矩阵，即可确定一个马尔科夫链，进而产生随机音乐。

仅有单音的乐段比较单调，因此在 MyMusic 类基本框架的基础上，我们添加了音程这一属性（将单音也看作了音程）。从纯一度（即单音）到纯八度，共有 13 种音程，我们用字母 a-n 依次表示这 13 种音程，那么由根音和字母代号可以唯一确定一个音程。为根音和冠音分别生成一个音轨，如果是纯一度，则两个音轨完全相同。然后将两个音轨叠加到一起，即得到含有音程的音乐。

假设根音和冠音彼此独立且都具有马尔科夫性，对二者分别用马尔科夫链方法生成随机音乐，再将两段随机音乐的音轨叠加，就产生了含有音程的随机音乐。

3 选择的曲目

1、《喀秋莎》的高音部，所有音程依次为（“|” 是小节之间的分隔）：

fa | da | dddd | da | da | dd | dddd | f

2、《克罗地亚狂想曲》钢琴谱前 16 小节的高音部，所有音程依次为（“|” 是小节之间的分隔）：

faafaa faafaa | faaifaa faa | faafaaa faafaaa | faaifaa faa |
faaaaa faaaa | faaiiaifaa | faaaa faaaa | faaiiaifaa |
faaaa faa | faaifaa faa | faaaa faa | faaifaa faa |
faaaa faaaa | faaiiaa faa | faaaa faaaa | faaiiaa faa

4 结果与分析

4.1 程序生成的音乐与真实乐器演奏的音乐的对比

与日常生活中听到的演奏版原始乐曲相比，程序生成的音乐听起来不协和，《喀秋莎》尤其明显。猜想原因有以下两点：

（1）查阅资料可知，mido 库对音高的确定是以绝对音高为标准的；而结合教材《音乐与数学》中“律学”部分的内容，推测在实际用乐器演奏时，可能会为了让音乐听起来更和谐，对乐器的音高进行一些微调。

（2）我们用程序生成的音乐是单一的钢琴音色，但首先，《喀秋莎》是民歌，其突出部分是人声而非伴奏；其次，我们平时听到的《喀秋莎》一般不用钢琴伴奏，大多用的是手风琴。与《喀秋莎》相比，《克罗地亚狂想曲》的程序生成版与演奏版相差不那么悬殊，这也可以印证该猜想。

为了进一步验证猜想（2），我们又做了如下试验：

使用 ipad 的“钢琴 HD” APP，按照与程序的输入数据相同的乐谱，弹奏《喀秋莎》并录音，发现钢琴版的《喀秋莎》伴奏本身并非十分协和。此试验也从一定程度上说明了猜想（2）的合理性。

4.2 原曲与新的随机音乐的对比

《喀秋莎》所选片段是两段重复的旋律，利用 1 阶马尔科夫链生成的随机音乐保留了旋律的重复性，而且听起来像是将原乐谱中的音符以另一顺序排列组合得到的音乐。

《克罗地亚狂想曲》所选片段的节奏较快，旋律简洁又不失立体感，多有重复，风格明快而悲壮。利用 1 阶马尔科夫链生成的随机音乐保留了颗粒感、跳跃感、较快的节奏、简洁重复的旋律这些特点，但立体感有所下降，渲染出的感情也不如原曲那样有张力。

推测可能的原因是，选取的音乐片段较短，而节奏和旋律是局部特征，比较好捕捉，但风格情感这类整体特征，则难以从一小段音乐中得到较准确的预测。