

文章编号: 1001-0920(2013)05-0769-05

无模型容积卡尔曼滤波及其应用

魏喜庆, 宋申民

(哈尔滨工业大学 控制理论与制导技术研究中心, 哈尔滨 150001)

摘要: 提出一种融合高斯过程回归(GPR)的无模型容积卡尔曼滤波(MF-CKF)方法. 容积卡尔曼滤波(CKF)是一种新的非线性高斯滤波方法, 比无迹卡尔曼滤波(UKF)更具优势. 为了克服建模不准确时容积卡尔曼滤波精度下降问题, 通过将高斯过程回归引入到容积卡尔曼滤波之中, 对训练数据学习建立系统非线性模型, 从而有效地避免模型不准确造成的滤波性能下降. 仿真结果验证了无模型容积卡尔曼滤波在系统模型不准确情况下的优越性.

关键词: 非线性滤波; 容积卡尔曼滤波; 高斯过程回归; 模型不确定性

中图分类号: V448.2

文献标志码: A

Model-free cubature Kalman filter and its application

WEI Xi-qing, SONG Shen-min

(Center of Control Theory and Guidance Technology, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China.

Correspondent: WEI Xi-qing, E-mail: weixiqing@gmail.com)

Abstract: A model-free cubature Kalman filter(MF-CKF) combined with Gaussian process regression(GPR) is presented. Cubature Kalman filter(CKF) is a new nonlinear Gaussian filter, which is superior than uncensored Kalman filter(UKF). Gaussian process regression is introduced into cubature Kalman filter to overcome precision decreasing caused by model uncertainty. Gaussian process is applied to establish nonlinear models by using training data, which efficiently avoids the degradation of filtering performance. Simulation results show the superiority of MF-CKF in the case of model uncertainty.

Key words: nonlinear filtering; cubature Kalman filter; Gaussian process regression; model uncertainty

0 引言

卡尔曼滤波对线性系统能得到最小方差意义下的最优解, 然而移动机器人定位^[1]、卫星轨道确定^[2]和导航跟踪^[3]等实际系统都存在非线性特性. 非线性系统的状态估计还没有一种最优解决方案, 寻找一种精度更高的非线性滤波方法仍是科研人员努力的方向^[4-5].

扩展卡尔曼滤波(EKF)^[6]通过一阶泰勒展开对非线性系统进行线性化, 对线性化的系统采用卡尔曼滤波. 但是当系统具有较强非线性或者初始估计误差较大时, 难以取得理想的估计效果, 有些系统甚至会出现雅克比矩阵无解析解的情况. Julier 等^[7-8]提出的无迹卡尔曼滤波(UKF), 利用 UT 变换后的采样点(sigma 点)来逼近非线性函数的概率分布, 经证明其对任意非线性函数逼近精度可以达到二阶. 近年提出的粒子滤波不必对非线性函数进行近似以及对噪声概率密度进行高斯假设, 在处理非线性、非高斯系

统的滤波问题方面有着独特的优势, 理论上只要粒子数目足够多, 即可达到任意估计精度^[9-10]. 尽管近年来取得一些改进, 但是粒子滤波存在的粒子样本枯竭和计算实时性差等问题仍需要进一步解决^[11].

为了更好地满足非线性滤波的要求, 有必要研究精度更高且易于工程实现的方法. 容积卡尔曼滤波(CKF)是近年来提出的一种新型非线性高斯滤波方法^[12-13], 具有严格的数学证明. CKF 通过三阶容积法则, 使用数值积分来近似加权高斯积分, 充分利用了容积积分计算多维函数积分的高效率特点. 容积卡尔曼滤波具有等权值的 $2n$ (n 为系统状态维数) 个容积点, 经证明其逼近非线性变换后的概率分布精度优于 UKF.

CKF 与其他贝叶斯估计存在相同的问题, 当出现未建模动态、模型参数偏差过大或者噪声特性不准确的情况时, 滤波的性能严重下降. 高斯过程早期用于预测^[14], 近年来被引入到机器学习的回归问题中, 并

收稿日期: 2011-12-21; 修回日期: 2012-04-16.

基金项目: 国家自然科学基金项目(61174037); 国家863计划项目(2010AA7045003).

作者简介: 魏喜庆(1982—), 男, 博士生, 从事非线性滤波、卫星相对导航等研究; 宋申民(1968—), 男, 教授, 博士生导师, 从事鲁棒控制、智能优化与智能控制、飞行器控制等研究.

成功地应用于对状态预测模型的学习上. 由于高斯过程回归具有易于预测系统模型的优点, 与 CKF 结合可以很好地解决模型不确定情况的滤波问题, 本文提出一种融合高斯过程回归的无模型容积卡尔曼滤波算法, 采用高斯过程对系统状态和量测模型进行学习, 动态地获得系统模型和输出噪声的统计特性, 从而避免了模型不准确情况下对模型先验知识的依赖.

1 CKF

考虑具有加性噪声的非线性系统状态方程和量测方程

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1}) + \mathbf{w}_{k-1}, \quad (1)$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{h}(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) + \mathbf{v}_k. \quad (2)$$

其中: $\mathbf{x}_k \in R^n$ 是系统在 k 时刻的状态, $\mathbf{u}_k \in R^{n_u}$ 是系统的输入, $\mathbf{y}_k \in R^m$ 是系统的量测值, \mathbf{w}_{k-1} 和 \mathbf{v}_k 是不相关零均值高斯白噪声, 其协方差阵分别为 \mathbf{Q}_{k-1} 和 \mathbf{R}_k .

非线性高斯滤波的核心问题是求解多变量非线性函数与高斯密度函数乘积的积分. Arasaratnam 等^[12]通过三阶容积积分法则, 利用 $2n$ 个容积点加权求和来代替加权高斯积分问题, 对于任意函数 $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ 的加权高斯积分

$$I_N(\mathbf{f}) = \int_{R^n} \mathbf{f}(\mathbf{x}) N(\mathbf{x}; \boldsymbol{\mu}, \mathbf{P}) d\mathbf{x} \approx \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} \mathbf{f}(\boldsymbol{\mu} + \sqrt{\mathbf{P}} \boldsymbol{\xi}_i), \quad (3)$$

具有 $2n$ 个元素的容积点集 $\{\boldsymbol{\xi}_i\}$ 为

$$\sqrt{n} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ -1 \end{bmatrix} \right\}.$$

其中: 容积点 $\boldsymbol{\xi}_i$ 是 n 维列向量; $\sqrt{\mathbf{P}}$ 为协方差阵 \mathbf{P} 的平方根, 且满足 $\sqrt{\mathbf{P}}\sqrt{\mathbf{P}}^T = \mathbf{P}$.

从而利用容积积分法则, 在贝叶斯估计框架下提出了 CKF 算法. 假设在第 k 时刻已知后验密度函数 $p(\mathbf{x}_{k-1} | \mathbf{y}_{1:k-1}) = N(\mathbf{x}_{k-1}; \hat{\mathbf{x}}_{k-1}^+, \mathbf{P}_{k-1}^+)$, CKF 算法流程如下:

1) 时间预测.

① 计算容积点

$$\mathbf{X}_{i,k-1} = \sqrt{\mathbf{P}_{k-1}^+} \boldsymbol{\xi}_i + \hat{\mathbf{x}}_{k-1}^+, \quad i = 1, 2, \dots, 2n. \quad (4)$$

② 容积点传播

$$\mathbf{X}_{i,k}^* = \mathbf{f}(\mathbf{X}_{i,k-1}, \mathbf{u}_{k-1}), \quad i = 1, 2, \dots, 2n. \quad (5)$$

③ 估计预测均值和协方差阵

$$\hat{\mathbf{x}}_k^- = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} \mathbf{X}_{i,k}^*, \quad (6)$$

$$\mathbf{P}_k^- = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} \mathbf{X}_{i,k}^* \mathbf{X}_{i,k}^{*T} - \hat{\mathbf{x}}_k^- \hat{\mathbf{x}}_k^{-T} + \mathbf{Q}_{k-1}. \quad (7)$$

2) 测更新.

① 计算容积点

$$\mathbf{X}_{i,k} = \sqrt{\mathbf{P}_k^-} \boldsymbol{\xi}_i + \hat{\mathbf{x}}_k^-, \quad i = 1, 2, \dots, 2n. \quad (8)$$

② 容积点传播

$$\mathbf{Y}_{i,k} = \mathbf{h}(\mathbf{X}_{i,k}, \mathbf{u}_k), \quad i = 1, 2, \dots, 2n. \quad (9)$$

③ 计算量测预测值、新息方差和协方差矩阵, 即

$$\hat{\mathbf{y}}_k^- = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} \mathbf{Y}_{i,k}, \quad (10)$$

$$\mathbf{P}_{yy,k} = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} \mathbf{Y}_{i,k} \mathbf{Y}_{i,k}^T - \hat{\mathbf{y}}_k^- \hat{\mathbf{y}}_k^{-T} + \mathbf{R}_k, \quad (11)$$

$$\mathbf{P}_{xy,k} = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} \mathbf{X}_{i,k} \mathbf{Y}_{i,k}^T - \hat{\mathbf{x}}_k^- \hat{\mathbf{y}}_k^{-T}. \quad (12)$$

④ 计算量测更新

$$\hat{\mathbf{x}}_k^+ = \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{K}_k(\mathbf{y}_k - \hat{\mathbf{y}}_k^-), \quad (13)$$

$$\mathbf{P}_k^+ = \mathbf{P}_k^- - \mathbf{K}_k \mathbf{P}_{yy,k} \mathbf{K}_k^T, \quad (14)$$

其中 $\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_{xy,k} \mathbf{P}_{yy,k}^{-1}$.

2 MF-CKF

2.1 高斯过程回归

高斯过程的本质是一个具有概率意义的核学习机, 通过训练数据集可对输入数据的预测输出做出概率解释, 同时对模型预测输出的不确定性进行评价^[15]. 与人工神经网络和支撑向量机相比高斯过程更易于实现, 其参数可以在计算中用自适应方法得到^[16].

高斯过程由均值和方差函数描述. 假设包含 S 对输入输出数据训练集 $D = \{(\mathbf{x}_1, y_1), (\mathbf{x}_2, y_2), \dots, (\mathbf{x}_S, y_S)\}$, 其包含噪声的函数形式为

$$y_i = f(\mathbf{x}_i) + \varepsilon. \quad (15)$$

其中: \mathbf{x}_i 是 n 维输入向量, y_i 是一维输出 (此处以一维为例, 多维情况的扩展类似), ε 是服从 $N(0, \sigma^2)$ 的高斯噪声.

设在给定训练集 $D = \langle \mathbf{X}, \mathbf{y} \rangle$ 和测试集 \mathbf{X}_* 的情况下, 相应的输出为 f_* , 则

$$\begin{bmatrix} \mathbf{y} \\ f_* \end{bmatrix} \sim (0, \Sigma), \quad (16)$$

其中

$$\Sigma = \begin{bmatrix} K(\mathbf{X}, \mathbf{X}) + \sigma_n^2 \mathbf{I} & K(\mathbf{X}, \mathbf{X}_*) \\ K(\mathbf{X}_*, \mathbf{X}) & K(\mathbf{X}_*, \mathbf{X}_*) \end{bmatrix}.$$

由条件概率公式推导得到相应的预测输出值的期望和方差分别为

$$GP_\mu(\mathbf{X}_*, D) = K(\mathbf{X}_*, \mathbf{X}) [K(\mathbf{X}, \mathbf{X}) + \sigma_n^2 \mathbf{I}]^{-1} \mathbf{y}, \quad (17)$$

$$GP_{\Sigma}(X_*, D) = K(X_*, X_*) - K(X_*, X)[K(X, X) + \sigma_n^2 I]^{-1} K(X, X_*). \quad (18)$$

定义 $K(\alpha, \beta)$ 为核函数矩阵, 其中 α 和 β 分别代表 X 或 X_* . 高斯核函数和 Matern 型核函数都常用于物理系统的建模, 采用不同的核函数形式, 高斯过程回归得到 (17) 和 (18) 的概率模型会有一定差异. 本文采用机器学习领域应用最为广泛的高斯核函数形式, 其优点是具有无限可微的性质, 核函数对应元素 $k(\alpha_i, \beta_j)$ 的高斯函数形式为

$$k(\alpha_i, \beta_j) = \sigma_f^2 e^{-\frac{1}{2l}(\alpha_i - \beta_j)^T(\alpha_i - \beta_j)}. \quad (19)$$

其中: σ_f^2 是信号方差, l 是尺度因子, 用 $\theta = [\sigma_f, \sigma_n, l]$ 表示高斯过程的超参数, 描述了式 (19) 的核函数和式 (15) 中的噪声.

将对数似然函数作为代价函数, 通过对其优化来确定超参数, 即

$$\theta_{\max} = \arg \max_{\theta} \{\log(p(y|X, \theta))\}, \quad (20)$$

其中对数似然函数形式为

$$\log p(y|X, \theta) = -\frac{1}{2} y^T [K + \sigma_n^2 I]^{-1} y - \frac{1}{2} \log |K + \sigma_n^2 I| - \frac{n}{2} \log 2\pi. \quad (21)$$

2.2 MF-CKF

本节采用高斯回归模型代替 CKF 中的系统状态方程和量测方程, 新算法不需要精确已知系统模型, 因此称之为无模型容积卡尔曼滤波算法 (MF-CKF). MF-CKF 既保持了 CKF 的精度, 同时又增加了其在模型不确定情况下的鲁棒性.

高斯过程回归学习系统的状态和量测模型, 即状态转移方程 f 和 h 以及相关的噪声协方差阵 R_w 和 R_v . 多维输出模型常采用的方法是每一维输出用一个 GPR 来学习, 训练数据即为相应的输入输出对, 状态模型反映系统输入量 $\langle x_k, u_k \rangle$ 和状态 x_{k+1} 之间的映射, 观测模型为状态变量 x_k 到量测值 y_k 之间的映射. GPR 相应的状态方程和量测方程的训练数据集分别为

$$D_f = \langle (X, U), X' \rangle, \quad (22)$$

$$D_h = \langle X, y \rangle. \quad (23)$$

其中: X' 是状态 X 和输入 U 对应的输出集合, 状态 X 对应的输出为 y .

用 GP^f 和 GP^h 分别表示 GPR 得到的状态方程和量测方程模型如下:

$$x_k = GP^f(x_{k-1}, u_{k-1}, w_{k-1}, D_f), \quad (24)$$

$$y_k = GP^h(x_k, v_k, D_h). \quad (25)$$

其中

$$w_{k-1} \sim N(0, GP_{\Sigma}^f((x_{k-1}, u_{k-1}), D_f)),$$

$$v_k \sim N(0, GP_{\Sigma}^h(x_k, D_h)).$$

MF-CKF 算法与第 1 节 CKF 算法的不同之处在于将系统的模型替换为 GPR 模型. 将式 (5) 的预测模型用 $GP([x_{k-1}, u_{k-1}], D_f)$ 代替; 式 (9) 的量测模型用 $GP(x_k, D_h)$ 代替. 因为高斯回归模型的训练集是确定的, 所以很多计算量可以离线运算, 剩余的在线计算量在可接受的范围内.

3 仿真实验及分析

为了验证 MF-CKF 算法的有效性, 此处以导弹再入大气层的跟踪问题^[17]为例, 如图 1 所示.

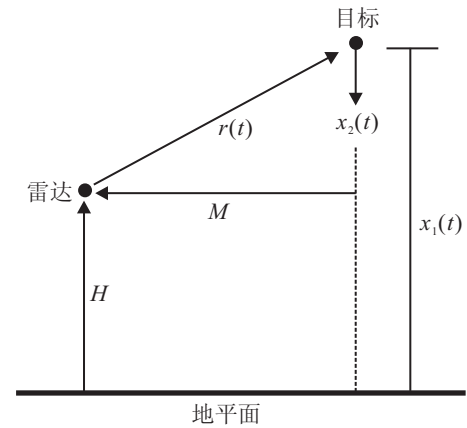


图 1 再入目标示意图

假设目标质量为 m , 空气阻力系数 C_D 为常数, 特征面积为 A , 大气密度为 ρ , 观测雷达所在高度和水平距离分布为 H 和 M , 目标和雷达距离为 $r(t)$. 假设目标位置为 $x_1(t)$, 速度为 $x_2(t)$, 则运动方程^[18]为

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = -\frac{C_D A \rho}{2m} x_2^2(t). \end{cases} \quad (26)$$

大气密度近似为 $\rho = \rho_0 e^{-\gamma x_1(t)}$, 其中 $\gamma = 5 \times 10^{-5}$. 若定义 $x_3(t) = C_D A \rho_0 / 2m$ 为弹道参数, 显然其为常数, 则系统的状态方程统一写为

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = -e^{-\gamma x_1(t)} x_2^2(t) x_3(t), \\ \dot{x}_3(t) = 0. \end{cases} \quad (27)$$

雷达量测方程为

$$z(t) = r(t) + v(t) = \sqrt{M^2 + (x_1(t) - H)^2} + v(t). \quad (28)$$

其中: $v(t)$ 为零均值高斯白噪声, 其协方差为 1×10^4 . 取雷达高度和雷达与目标之间的水平距离相等, 均为 1×10^5 ; 仿真开始初始状态的真值为

$$x_0 = [3 \times 10^5 \quad 2 \times 10^4 \quad 1 \times 10^{-3}] ;$$

滤波器的初始值设为

$$\hat{x}_0 = [3 \times 10^5 \quad 2 \times 10^4 \quad 3 \times 10^{-5}] ;$$

初始协方差阵

$$P_0 = \text{diag}[1 \times 10^6 \ 4 \times 10^6 \ 1 \times 10^{-4}].$$

雷达的测量间隔为 1 s.

假设在仿真开始时刻前采集了 5000 组观测数据, 利用高斯过程回归可以得到系统的状态和量测的 GPR 模型. 图 2 为 GPR 模型的观测值与实际量测两者之间的对比, 其中点划线为 GPR 预测值, 虚线为预测值的置信区间, 从中可以看出 GPR 对量测的预测较为准确.

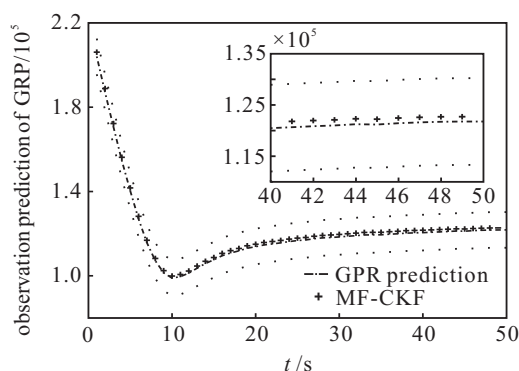


图 2 GPR 量测预测与真实量测

下面对比模型准确时采用 CKF 算法 (CKF1)、模型不准确时采用 CKF 算法 (CKF2) 和 MF-CKF 算法 3 种情况的滤波效果. 针对模型不准确的情况, 假设式 (27) 中水平距离参数 M 取为 3×10^5 .

从图 3 中可以看出, 由于系统的非线性特性在 10s 时最严重, 3 种情况目标位置估计都出现了较大的误差. 当量测模型不准确时系统出现的误差最大, 而采用 MF-CKF 取得了与模型准确近似的情况. 图 4 中速度估计在 10s 以后迅速收敛, 模型不准确的情况下 CKF 仍然出现了较大的误差. 由图 5 可知在 5s 以内可以达到较好的效果, 这是由于弹道参数是一个常值, 其估计相对容易, 但是由放大的曲线可以看出, 模型不准确时 CKF 会有一个较大的估计误差, 而 MF-CKF 与模型准确时的 CKF 的估计精度类似.

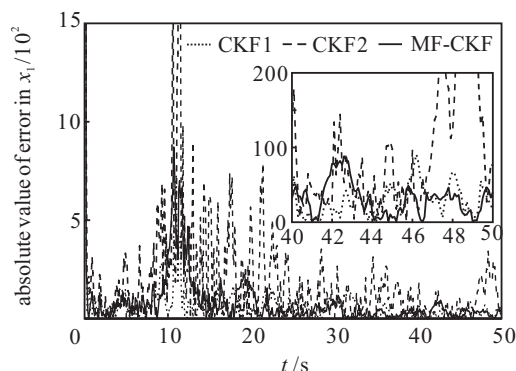


图 3 目标位置估计误差绝对值

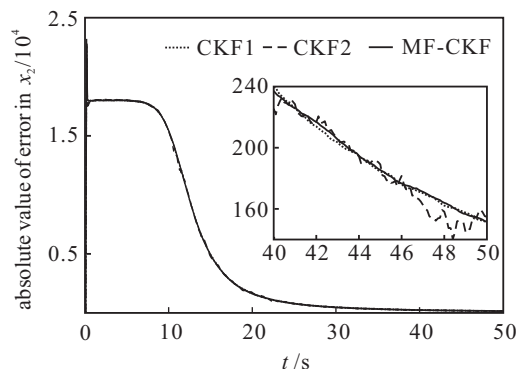


图 4 目标速度估计误差绝对值

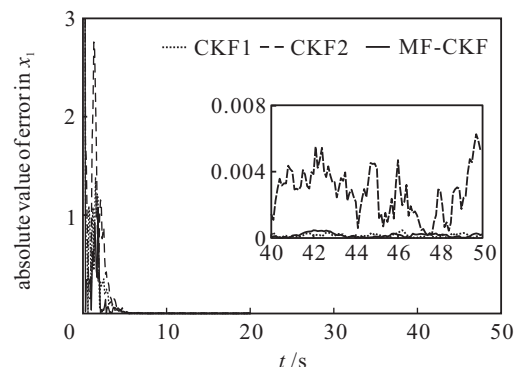


图 5 弹道参数估计误差绝对值

4 结 论

本文将高斯过程回归的机器学习方法与容积卡尔曼滤波相结合, 提出一种不需要精确已知模型的 MF-CKF 算法. 通过训练数据进行学习, 经过高斯过程回归得到系统模型以及噪声统计特性, 从而保证了当系统建模不准确时, MF-CKF 仍能够保持较高的精度. 通过导弹再入大气层跟踪模型进行验证, MF-CKF 在模型不准确的情况下仍然能取得较高的估计精度. 但是高斯过程回归与 CKF 结合还有一些问题需要解决, 如协方差函数形式的选取对于逼近精度会有一定影响, 另外需要一定的训练数据来得到高斯回归的系统模型.

参考文献(References)

- [1] Thrun S, Liu Y, Koller D, et al. Simultaneous localization and mapping with sparse extended information filters[J]. Int J of Robotics Research, 2004, 23(7/8): 693-716.
- [2] Gunnarsson F, Bergman N, Forssell U, et al. Particle filters for positioning, navigation, and tracking[J]. IEEE Trans on Signal Processing, 2002, 50(2): 425-437.
- [3] Abdelrahman M, Park S-Y. Sigma-point Kalman filtering for spacecraft attitude and rate estimation using magnetometer measurements[J]. IEEE Trans on Aerospace and Electronic Systems, 2011, 47(2): 1401-1415.
- [4] Ito K, Xiong K. Gaussian filters for nonlinear filtering problems[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2000, 45(5): 910-927.

- [5] Cappe O, Godsill S J, Moulines E. An overview of existing methods and recent advances in sequential Monte Carlo[J]. Proc of the IEEE, 2007, 95(5): 899-924.
- [6] Jazwinski A H. Stochastic processes and filtering theory[M]. New York: Academic Press, 1970.
- [7] Julier S, Uhlmann J, Durrant-Whyte H F. New method for the nonlinear transformation of means and covariances in filters and estimators[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2000, 45(3): 477-482.
- [8] Julier S J, Uhlmann J K. Unscented filtering and nonlinear estimation[J]. Proc of the IEEE, 2004, 92(3):401-422.
- [9] Gordon N J, Salmond D J, Smith A F M. Novel approach to nonlinear/non-gaussian Bayesian state estimation[J]. IEE Proc of Part F: Radar and Signal Processing, 1993, 140(2): 107-113.
- [10] Doucet A, Johansen A M. A tutorial on particle filtering and smoothing: Fifteen years later[R]. Oxford: The Oxford Handbook of Nonlinear Filtering, 2009, 12: 4-6.
- [11] Givon D, Stinis P, Weare J. Variance reduction for particle filters of systems with time scale separation[J]. IEEE Trans on Signal Processing, 2009, 57(2): 424-435.
- [12] Arasaratnam I, Haykin S, Hurd T R. Cubature Kalman filters[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2009, 54(6): 1254-1269.
- [13] Arasaratnam I, Haykin S, Hurd T R. Cubature Kalman filtering for continuous-discrete systems: Theory and simulations[J]. IEEE Trans on Signal Processing, 2010, 58(10): 4977-4993.
- [14] Rasmussen C E, Williams C K I. Gaussian processes for machine learning[M]. Cambridge: The MIT Press, 2005.
- [15] Higuchi T. Monte Carlo filter using the genetic algorithm operators[J]. J of Statistical Computation and Simulation, 1997, 59(1): 1-24.
- [16] Liu C K, Hertzmann A, Popovi Z. Learning physics-based motion style with nonlinear inverse optimization[J]. ACM Trans on Graphics, 2005, 24(3): 1071-1081.
- [17] 张树春, 胡广大, 刘思华. 关于UKF方法的新探索及其在目标跟踪方面的应用[J]. 控制理论与应用, 2006, 23(4): 569-574.
(Zhang S C, Hu G D, Liu S H. New development of UKF and its application in target tracking on re-entry[J]. Control Theory & application, 2006, 23(4): 569-574.)
- [18] Athans M, Wishner R P, Bertolini A. Suboptimal state estimation for continuous-time nonlinear systems from discrete noisy measurements[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1968, 13(5): 504-515.

(上接第768页)

- [18] 袁璞, 左信. 状态反馈预测控制[J]. 自动化学报, 1993, 19(5): 569-577.
(Yuan P, Zuo X, Zheng H T. State feedback predictive control[J]. Acta Automatic Sinica, 1993, 19(5): 569-577.)
- [19] 张惜岭, 王书斌, 罗雄麟. 化工过程约束优化控制的可行性分析及约束处理[J]. 化工学报, 2011, 62(9): 2546-2554.
(Zhang X L, Wang S B, Luo X L. Feasibility analysis and constraints adjustment of constrained optimal control in chemical processes[J]. CIESC J, 2011, 62(9): 2546-2554.)
- [20] 张惜岭. 多变量控制约束映射与约束预测控制相关问题研究[D]. 北京: 中国石油大学信息工程学院, 2011.
(Zhang X L. Multivariable control constraint mapping and related problems of constrained model predictive control[D]. Beijing: College of Information Technology, China University of Petroleum, 2011.)
- [21] 张智焕, 王树青. 基于多模型pH非线性过程的预测控制[J]. 浙江大学学报: 工学版, 2002, 36(1): 29-31.
(Zhang Z H, Wang S Q. Predictive control of pH nonlinear process based on multiple model[J]. J of Zhejiang University: Engineering Science, 2002, 36(1): 29-31.)
- [22] 杨剑锋, 赵均, 钱积新, 等. 一类化工过程多变量系统的自适应非线性预测控制[J]. 化工学报, 2008, 59(4): 934-940.
(Yang J F, Zhao J, Qian J X, et al. Adaptive nonlinear model predictive control for a class of multivariable chemical processes[J]. CIESC J, 2008, 59(4): 934-940.)
- [23] 席裕庚, 王凡. 非线性系统预测控制的多模型方法[J]. 自动化学报, 1996, 22(4): 456-461.
(Xi Y G, Wang F. Nonlinear multi-model predictive control[J]. Acta Automatic Sinica, 1996, 22(4): 456-461.)