

Définitions - Mathématiques

Table des matières

1	Notions de base	3
1.1	Notations	3
1.2	Généralités	5
1.3	Relations	7
1.4	Applications — familles	8
1.5	Ensembles	10
2	Fonctions à valeurs scalaires	11
2.1	Généralités	11
2.2	Intégration	13
2.2.1	Intégration sur un segment	13
2.2.2	Intégrale généralisée	14
2.3	Étude locale	16
2.4	Équation différentielle linéaire	17
2.4.1	EDL d'ordre 1	17
2.4.2	EDL d'ordre 2	18
3	Structures algébriques	18
3.1	Groupes	18
3.2	Anneaux — Corps — K-Algèbres	20
3.3	Polynômes	22
3.4	Fractions rationnelles	24
3.5	Structures particulières	26
3.5.1	Groupe symétrique	26
3.5.2	Autour de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$	27
4	Suites et séries	28
4.1	Suites réelles ou complexes	28
4.2	Séries numériques — Familles sommables	29
4.2.1	Séries numériques	29
4.2.2	Familles sommables de nombres complexes	30
4.3	Convergences	31
4.4	Séries entières	32
5	Probabilités	34
5.1	Espaces probabilisés	34
5.2	Variables aléatoires discrètes	37

6	Algèbre linéaire	40
6.1	Calcul matriciel	40
6.2	Espaces vectoriels	46
6.3	Applications linéaires	49
6.4	Théorie des déterminants	52
7	Algèbre bilinéaire	54
7.1	Espaces préhilbertiens	54
7.2	Espaces euclidiens	56
8	Arithmétique	58
8.1	Dans $(\mathbb{Z}, +, \times)$	58
8.2	Dans $(K[X], +, \times)$	59
8.3	Dans $(A, +, \times)$	60
9	Topologie	61
9.1	Notion de norme	61
9.2	Suites et séries dans un e.v.n.	64
9.3	Topologie d'un e.v.n	65
9.4	Fonctions de E dans F	67
9.5	Fonctions de \mathbb{R} dans F	69
10	Calcul différentiel	70
10.1	Différentiabilité	70
10.2	Optimisation	73
10.3	Équations différentielles linéaires	74
10.3.1	EDL d'ordre 1	74
10.3.2	EDLO1 à coefficient constant	76
10.3.3	EDL scalaire d'ordre n	77

Avertissement (surtout destiné aux 3/2) : Ce document n'est **pas** un support d'apprentissage.

Lorsque tu parcourras ces pages, dès que tu tomberas sur un terme qui n'a pas encore été vu en cours : **ne t'attarde pas sur la définition.**

À aucun moment durant l'année il ne te sera demandé de maîtriser tous ces concepts, mais lors des concours...

Le nombre de définitions peut paraître impressionnant (car oui, il y en a énormément) mais des générations d'étudiants ont réussi avant toi, beaucoup qui sont bien moins fort que toi, alors n'aies pas d'inquiétude !

Utilisation recommandée : Télécharges ce pdf sur ton téléphone (ou ordinateur, tablette, etc...) afin qu'il soit rapidement accessible.

Dès que tu te heurtes à un oubli, partiel ou total, d'un terme (lors de la lecture d'un énoncé par exemple) : cherches le via l'outil de recherche (*la loupe* sur téléphone, *ctrl+f* sur ordinateur) afin d'immédiatement lever le mystère.

Tu peux également vérifier tes connaissances lors de tes révisions en te «testant».

Si tu repères une faute, si tu as une question ou une recommandation, n'hésites pas à me contacter par mail¹ : **6clq2lpj8@mozmail.com**

¹C'est une vraie adresse sur laquelle je suis joignable, elle est simplement sécurisée via *Firefox Relay*. Tu peux la sélectionner pour copier/coller.

1 Notions de base

1.1 Notations

\mathbb{K} désigne \mathbb{R} ou \mathbb{C}

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}, \quad \mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$$

$$\mathbb{R}_- = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\}, \quad \mathbb{R}^* = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}, \quad i\mathbb{R} = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z = 0\}.$$

$$\ell^1(\mathbb{K}) = \{(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid \sum |u_n| \text{ converge}\}$$

$$\ell^2(\mathbb{K}) = \{(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid \sum |u_n|^2 \text{ converge}\}$$

$$\ell^\infty(\mathbb{K}) = \{(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid (u_n) \text{ est bornée}\}$$

Soient $(K, +, \times)$ un corps, E et F deux K -espaces vectoriels.

- $L(E, F)$ ou $\mathcal{L}(E, F)$: ensemble des applications linéaires de E dans F .
- $\operatorname{Isom}(E, F)$: ensemble des isomorphismes de E sur F .
- $L(E)$ ou $\mathcal{L}(E)$: ensemble des endomorphismes de E .
- E^* ou $L(E, K)$ ou $\mathcal{L}(E, K)$: ensemble des formes linéaires sur E ou espace dual de E .
- $GL(E)$ ou $\operatorname{Isom}(E, E)$: ensemble des automorphismes de E .
- Lorsque $\dim E = n \geq 1$, $\Lambda_n(E)$: ensemble des formes n -linéaires alternées sur E .

Soient $(K, +, \times)$ un corps et $(m, n) \in (\mathbb{N}^*)^2$.

- $K[X]$ ou $K^{(\mathbb{N})}$: ensemble des polynômes à une indéterminée à coefficients dans K .
- $K_n[X] = \{P \in K[X] \mid \deg P \leq n\}$: ensemble des polynômes à coefficients dans K de degré $\leq n$.
- $K(X)$: ensemble des fractions rationnelles à une indéterminée à coefficients dans K .
- $\mathcal{M}_{m,n}(K)$ ou $M_{m,n}(K)$: ensemble des matrices de tailles $m \times n$ à coefficients dans K .
- $\mathcal{M}_n(K)$ ou $M_n(K)$: ensemble des matrices carrées de tailles $n \times n$ à coefficients dans K .
- $GL_n(K)$ ou $GL(n, K)$: ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(K)$.
- $S_n(K)$ ou S^n ou $\mathcal{S}_n(K)$: ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(K)$.
- $S_n^+(\mathbb{R})$ ou $\mathcal{S}_n^+(K)$: ensemble des matrices réelles symétriques positives.²
- $S_n^{++}(\mathbb{R})$ ou $\mathcal{S}_n^{++}(K)$: ensemble des matrices réelles symétriques définies positives.
- $O_n(\mathbb{R})$ ou $O(n, \mathbb{R})$: ensemble des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

²On dit parfois matrice réelle autoadjointe.

- $SO_n(\mathbb{R})$ ou $SO(n, \mathbb{R})$: ensemble des matrices orthogonales positives de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- $SL_n(\mathbb{K}) = SL(n, \mathbb{K}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid \det M = 1\}$: muni de la multiplication, on l'appelle le groupe spécial linéaire.
- $ST_n(\mathbb{R})$ ou $ST(n, \mathbb{R})$: ensemble des matrices stochastiques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{\bar{a}, a \in \mathbb{Z}\} = \{x \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}), \exists a \in \mathbb{Z} \mid x = \bar{a}\}$.
- Si p est un nombre premier, l'ensemble $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est noté \mathbb{F}_p .
- $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$: muni de la multiplication, on l'appelle le groupe unité.
- $\mathbb{U}_n = \{z \in \mathbb{C}, z^n = 1\}$: ensemble des racines n -ième de l'unité.

Si $(p, q) \in \mathbb{N}^2$, on pose par définition : $\llbracket p, q \rrbracket = \{n \in \mathbb{N} \mid p \leq n \leq q\}$.

Si $p > q$ alors $\llbracket p, q \rrbracket = \emptyset$ et si $p \leq q$ alors $\llbracket p, q \rrbracket = \{p, p+1, \dots, q-1, q\}$.

Soient E et F deux ensembles, F^E désigne l'ensemble des applications de E vers F .

Étant donné un ensemble E , l'ensemble des bijections de E sur E est noté S_E .

Étant donné $n \in \mathbb{N}^*$, l'ensemble des bijections de $\llbracket 1, n \rrbracket$ sur $\llbracket 1, n \rrbracket$ est noté S_n .

Une permutation σ de S_n est notée $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$.

La permutation $id_{\llbracket 1, n \rrbracket}$ est notée e .

La composée $\sigma_1 \circ \sigma_2$ de permutations de S_n est notée $\sigma_1 \sigma_2$ et est appelée **produit** de σ_1 par σ_2 .

Soit E un ensemble et $\sigma \in S_E$, on note $\text{Supp } \sigma = \{x \in E \mid \sigma(x) \neq x\}$ le support de σ .

• Notation multiplicative

Soit (G, \star) un groupe.

Pour $(x, y) \in G^2$ l'élément $x \star y$ de G est noté $x \times y$ ou plus simplement xy .

L'élément neutre est noté 1_G . On a donc $\forall x \in G, x1_G = 1_Gx = x$.

Le symétrique de x est noté x^{-1} et est appelé **inverse** de x . On a donc : $\forall x \in G, xx^{-1} = x^{-1}x = 1_G$.

Soit $x \in G$ et $n \in \mathbb{Z}$. Par définition on pose : $x^n = \begin{cases} \underbrace{x \times \dots \times x}_{x \text{ figurant } n \text{ fois}} & \text{si } n \geq 1 \\ \underbrace{x^{-1} \times \dots \times x^{-1}}_{x^{-1} \text{ figurant } (-n) \text{ fois}} & \text{si } n \leq -1 \\ 1_G & \text{si } n = 0 \end{cases}$

• Notation additive

Soit (G, \star) un groupe.

Pour $(x, y) \in G^2$ l'élément $x \star y$ de G est noté $x + y$.

L'élément neutre est noté 0_G . On a donc : $\forall x \in G, x + 0_G = 0_G + x = x$.

Le symétrique de x est noté $-x$ et est appelé **opposé** de x .

On a donc : $\forall x \in G, x + (-x) = (-x) + x = 0_G$.

Enfin, pour $(x, y) \in G^2$, on pose par définition : $x - y = x + (-y)$.

$$\text{Soit } x \in G \text{ et } n \in \mathbb{Z}. \text{ Par définition on pose : } nx = \begin{cases} \underbrace{x + \cdots + x}_{x \text{ figurant } n \text{ fois}} & \text{si } n \geq 1 \\ \underbrace{(-x) + \cdots + (-x)}_{(-x) \text{ figurant } (-n) \text{ fois}} & \text{si } n \leq -1 \\ 0_G & \text{si } n = 0 \end{cases}$$

Soit E un ensemble. On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E , et $\mathcal{P}_f(E)$ l'ensemble des parties finies de E .

Soit X une VAD sur (Ω, \mathcal{A}) à valeurs dans E , $A \in \mathcal{P}(E)$ et $x \in E$.

L'ensemble $X^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in A\}$ est noté $(X \in A)$ ou encore $\{X \in A\}$.

L'ensemble $X^{-1}(\{x\}) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x\}$ est noté $(X = x)$ ou encore $\{X = x\}$.

Si de plus X est à valeurs réelles alors $x \in \mathbb{R}$ et on note :

L'ensemble $X^{-1}(]-\infty, x]) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq x\}$ est noté $(X \leq x)$ ou encore $\{X \leq x\}$.

L'ensemble $X^{-1}(]-\infty, x[) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) < x\}$ est noté $(X < x)$ ou encore $\{X < x\}$.

L'ensemble $X^{-1}([x, +\infty]) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \geq x\}$ est noté $(X \geq x)$ ou encore $\{X \geq x\}$.

L'ensemble $X^{-1}(]x, +\infty[) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) > x\}$ est noté $(X > x)$ ou encore $\{X > x\}$.

1.2 Généralités

Symbole de Kronecker : $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$

Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose : $\begin{cases} x^+ = \max(x, 0) \\ x^- = \max(-x, 0) \end{cases}$ on a donc $x = x^+ - x^-$ et $|x| = x^+ + x^-$.

Racine n-ième : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\sqrt[n]{x} = y$.

- Si n est pair : y est l'unique réel positif qui vérifie $y^n = x$.
- Si n est impair : y est l'unique réel qui vérifie $y^n = x$.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

- La **partie entière**³ de x est l'unique entier relatif n vérifiant : $n \leq x < n + 1$.
On la note $\lfloor x \rfloor$, $E(x)$ ou $\underline{E}(x)$.
- La **partie entière supérieure**⁴ de x est l'unique entier relatif m vérifiant : $m - 1 < x \leq m$.
On la note $\lceil x \rceil$ ou $\overline{E}(x)$.
- La **partie fractionnaire** de x est le réel noté $\{x\}$ défini par : $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$.

Soit $z \in \mathbb{C}$.

- **Forme algébrique** : $\exists!(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $z = a + ib$.

Le réel a est appelé la **partie réelle** de z et est noté $\operatorname{Re} z$ ou $\Re z$.

Le réel b est appelé la **partie imaginaire** de z et est noté $\operatorname{Im} z$ ou $\Im z$.

- **Forme trigonométrique** : Si $z \neq 0$ alors $\exists! r > 0$, $\exists! \theta_0 \in]-\pi, \pi]$, $z = re^{i\theta_0}$.

Le réel strictement positif r est appelé **module**⁵ de z et est noté $|z|$. ($|0| = 0$)

Le réel θ_0 est appelé **argument principal** de z .

Pour $z \neq 0$, tout réel θ vérifiant $z = re^{i\theta}$ est un **argument** de z . On note $\arg z$ l'ensemble des arguments de z .

$\arg z = \{\theta_0 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ avec θ_0 l'argument principal de z .

Soit $z = x + iy$ un nombre complexe.

On appelle **conjugué** de z le complexe noté \bar{z} défini par : $\bar{z} = x - iy$.

On a donc $\operatorname{Re} z = \operatorname{Re} \bar{z}$ et $\operatorname{Im} z = -\operatorname{Im} \bar{z}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$, on pose $n! = \begin{cases} n(n-1)! & \text{si } n \geq 1 \\ 1 & \text{si } n = 0 \end{cases}$

Pour $(n, p) \in \mathbb{N}^2$, on note $\binom{n}{p}$ (ou C_n^p) le nombre de partie à p éléments dans un ensemble à n éléments.

Soit $(n, p) \in \mathbb{N}^2$. Si $p > n$ alors $\binom{n}{p} = 0$. Si $p \leq n$ alors $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$

Soient $\alpha \in \mathbb{C}$ et $p \in \mathbb{N}$. Si $p > \alpha$ alors $\binom{\alpha}{p} = 0$. Si $p \leq \alpha$ alors $\binom{\alpha}{p} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-p+1)}{p!}$

³On l'appelle aussi partie entière par défaut ou partie entière inférieure. En anglais on l'appelle *floor*.

⁴On l'appelle aussi partie entière par excès. En anglais on l'appelle *ceil*.

⁵On définit le module par : $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$.

1.3 Relations

On appelle **relation** tout couple $\mathcal{R} = (E, \Gamma)$ où E est un ensemble et où Γ est une partie de $E \times E$. Une telle relation \mathcal{R} est appelée une relation sur l'ensemble E .

L'ensemble Γ est appelé le **graphe** de la relation \mathcal{R} .

Étant donnés deux éléments x et y de E , on dit que x est en relation avec y si et seulement si le couple (x, y) appartient à Γ . Pour exprimer cela⁶, on note $x\mathcal{R}y$.

Soit \mathcal{R} une relation sur l'ensemble E .

- \mathcal{R} est dite **réflexive** si et seulement si : $\forall x \in E, x\mathcal{R}x$.
- \mathcal{R} est dite **symétrique** si et seulement si : $\forall (x, y) \in E^2, x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$.
- \mathcal{R} est dite **antisymétrique**⁷ si et seulement si : $\forall (x, y) \in E^2, (x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}x) \Rightarrow x = y$.
- \mathcal{R} est dite **transitive** si et seulement si : $\forall (x, y, z) \in E^3, (x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}z) \Rightarrow x\mathcal{R}z$.

Soit \mathcal{R} une relation sur l'ensemble E .

- \mathcal{R} est une **relation d'équivalence** sur E si et seulement si : \mathcal{R} est *réflexive, symétrique et transitive*. On la note alors avec le symbole \sim .
- \mathcal{R} est une **relation d'ordre** sur E si et seulement si : \mathcal{R} est *réflexive, antisymétrique et transitive*. On la note alors avec le symbole \leq .

Soient \sim une relation d'équivalence sur l'ensemble E et $x \in E$. L'ensemble $\{y \in E \mid y \sim x\}$ est noté $[x]_{\sim}$ et est appelé **classe d'équivalence** de x . Il s'agit d'une partie de E et on dit que ses éléments en sont des **représentants**.

Théorème - Définition : Si \sim est une relation d'équivalence sur l'ensemble E alors il existe une famille $(x_i)_{i \in I}$ d'éléments de E telle que :

$$E = \bigcup_{i \in I} [x_i]_{\sim} \quad \text{et} \quad \forall (i, j) \in I^2, i \neq j \Rightarrow [x_i]_{\sim} \cap [x_j]_{\sim} = \emptyset$$

Une telle famille $(x_i)_{i \in I}$ est appelée un **système complet de représentants** de (E, \sim) .

On appelle **ensemble ordonné** tout couple (E, \leq) où E est un ensemble et où \leq est une relation d'ordre sur E .

Deux éléments a et b de E sont dits **comparables** si et seulement si $a \leq b$ ou $b \leq a$.

Si $\forall (a, b) \in E^2, a$ et b sont comparables, alors \leq est une relation d'**ordre total**.

Dans le cas contraire, on dit que \leq est une relation d'**ordre partiel**.

⁶Attention à l'ordre !

⁷Ce n'est pas l'inverse de symétrie.

1.4 Applications – familles

Soient E, F, G, H quatre ensembles et Γ une partie de $E \times F$.

On appelle **application** de E vers F tout triplet $f = (E, F, \Gamma)$ qui vérifie :

$$\forall x \in E, \text{ il existe } \underline{\text{un unique}} \ y \in F \text{ tel que } (x, y) \in \Gamma.$$

L'ensemble des applications de E dans F est noté F^E .

On appelle **fonction** de E vers F tout triplet $f = (E, F, \Gamma)$ qui vérifie :

$$\forall x \in E, \text{ il existe } \underline{\text{au plus un}} \ y \in F \text{ tel que } (x, y) \in \Gamma.$$

L'ensemble des éléments de E qui ont une image par f est appelé **l'ensemble de définition** de f et est noté D_f .

Soient $f : E \rightarrow F$ et $g : G \rightarrow H$ deux applications. On dit que f et g sont **égales** et on note

$$f = g \text{ si et seulement si : } \begin{cases} E = G & (\text{même ensemble de départ}) \\ F = H & (\text{même ensemble d'arrivée}) \\ \forall x \in E, f(x) = g(x) & (\text{même processus d'association}) \end{cases}$$

Soient $f : E \rightarrow F$ une application et A une partie de E . On appelle **restriction** de f à A l'application $f|_A : A \rightarrow F$ définie par : $\forall x \in A, f|_A(x) = f(x)$.

Soient $f : E \rightarrow F$ et $g : G \rightarrow H$ deux applications.
On dit que g est un **prolongement** de f si et seulement si : $\begin{cases} E \subset G \\ F \subset H \\ \forall x \in E, f(x) = g(x) \end{cases}$

Soient $f : E \rightarrow F$ et $g : G \rightarrow H$ deux applications telles que : $\forall x \in E, f(x) \in G$.
On note $g \circ f$ l'application de E dans H définie par : $\forall x \in E, (g \circ f)(x) = g(f(x))$.
L'application $g \circ f$ est appelée la **composée** de g par f .

On appelle **l'identité** de E (notée id_E) l'application de E dans E définie par : $\forall x \in E, id_E(x) = x$.

Soit A une partie de E .

On appelle **l'indicatrice** de A dans E l'application $\mathbb{1}_A : E \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

Soient $f : E \rightarrow F$ une application, A une partie de E et B une partie de F .

On appelle **image directe** de A par f l'ensemble : $f(A) = \{f(x) \mid x \in A\} = \{y \in F \mid \exists a \in A, y = f(a)\}$.

On appelle **image réciproque** de B par f l'ensemble : $f^{-1}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\}$.

Soit $f : E \rightarrow F$ une application.

- f est **surjective** si et seulement si tout élément de F admet au moins un antécédent dans E par f .
Ou, de manière équivalente : $\forall y \in F, \exists x \in E \mid f(x) = y$.
Ou encore : $f(E) = F$.
- f est dite **injective** si et seulement si tout élément de F admet au plus un antécédent dans E par f .
Ou, de manière équivalente : $\forall (x, y) \in E^2, f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$.
Ou encore : $\forall (x, y) \in E^2, x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$.
- f est dite **bijjective** si et seulement si tout élément de F admet un unique antécédent dans E par f .
Ou, de manière équivalente : f est injective et surjective.
Ou encore : $\forall y \in F, \exists! x \in E \mid f(x) = y$.

Soit $f : E \rightarrow F$ une bijection de E sur F .

L'**application réciproque** de f est l'application $f^{-1} : F \rightarrow E$ définie par :

$$\forall y \in F, f^{-1}(y) \text{ est l'unique antécédent de } y \text{ par } f.$$

Soient E et F deux K -espace vectoriels et $f : E \rightarrow F$ une application.

- f est dite **paire** si et seulement si : $\forall x \in E, f(-x) = f(x)$.
L'ensemble des applications de E dans F qui sont paires est noté $P(E, F)$.
- f est dite **impaire** si et seulement si : $\forall x \in E, f(-x) = -f(x)$.
L'ensemble des applications de E dans F qui sont impaires est noté $I(E, F)$.

Une **famille** $X = (x_i)_{i \in I}$ d'éléments x_i d'un ensemble E , indexée par un ensemble I , est une application de I dans E définie par :

$$\begin{array}{ccc} X : & I & \rightarrow E \\ & i & \mapsto x_i \end{array}$$

Toute famille d'éléments de E de la forme $(x_i)_{i \in J}$ où J est une partie de I est appelée une **sous-famille** de $(x_i)_{i \in I}$. Toute famille d'éléments de E dont $(x_i)_{i \in I}$ est une sous-famille est appelée une **sur-famille** de $(x_i)_{i \in I}$.

Soient $(\mathcal{E}, +, \cdot)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel et I un ensemble quelconque.

Soit $x = (x_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de \mathcal{E} , l'ensemble $S_x = \{i \in I \mid x_i \neq 0_{\mathcal{E}}\}$ est appelé le **support** de la famille $x = (x_i)_{i \in I}$.

La famille $x = (x_i)_{i \in I}$ est dite **presque nulle** si et seulement si son support S_x est un ensemble fini.
L'ensemble des familles presque nulles de vecteurs de \mathcal{E} indexées par I est noté $\mathcal{E}^{(I)}$.

Une **suite** d'éléments de E est une famille $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de E indexée par \mathbb{N} .

Une **suite double** d'éléments de E est une famille $(a_{pq})_{(p,q) \in \mathbb{N}^2}$ d'éléments de E indexée par \mathbb{N}^2 .

On appelle **partition** de l'ensemble E toute famille $(A_i)_{i \in I}$ de parties de E qui vérifie :

- $\forall i \in I, A_i \neq \emptyset$ (*Parties non vides*)
- $\forall (i, j) \in I^2, i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$ (*Deux à deux disjointes*)
- $E = \bigcup_{i \in I} A_i$

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$. On appelle **subdivision du segment** $[a, b]$ toute famille finie $\sigma = (a_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ de points de $[a, b]$ vérifiant : $a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b$.

Le réel $\delta(\sigma) = \max_{1 \leq i \leq n} (a_i - a_{i-1})$ est appelé **pas de la subdivision** σ .

$A(\sigma) = \{a_0, \dots, a_n\}$ est appelée **support de la subdivision** σ .

1.5 Ensembles, ensembles finis ou dénombrables

Soient E un ensemble et A, B deux parties de E.

- On dit que B est **inclu** dans A, et on note $B \subset A$, si et seulement si : $\forall x \in B, x \in A$.
- On appelle **complémentaire** de A dans E l'ensemble $E \setminus A = \{x \in E \mid x \notin A\}$.
On note aussi \overline{A} , \overline{A}^E , \mathbb{C}_E^A ou A^C .
- On appelle **différence** de B et A l'ensemble $B \setminus A = \{x \in E \mid x \in B \text{ et } x \notin A\}$.
- L'**intersection** de A et B est l'ensemble $A \cap B = \{x \in E \mid x \in A \text{ et } x \in B\}$.
- La **réunion** de A et B est l'ensemble $A \cup B = \{x \in E \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$.
- La **différence symétrique** de A et B est l'ensemble $A \Delta B$ défini par :
 $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A})$.

Un ensemble qui ne contient qu'un seul élément est appelé un **singleton**.

(HP) — On dit qu'un ensemble E est **équipotent** à un ensemble F si et seulement si il existe une bijection de E sur F.

On dit qu'un ensemble E est **fini** si et seulement si il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que E soit équipotent à $\llbracket 1, p \rrbracket$.
L'ensemble E est dit **infini** si et seulement si E n'est pas fini.

Si E est un ensemble alors on définit le symbole $|E|$ de la façon suivante :

Si E est un ensemble fini alors $|E|$ est égal au cardinal de E et si E est infini alors $|E| = +\infty$.

Par convention on pose $|\emptyset| = 0$.

Le symbole $|E|$ est appelé **cardinal de l'ensemble** E . On notera bien que $|E| \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$.

Soient E un ensemble et $p \in \mathbb{N}$.

- Une **p-liste** d'éléments de E est un élément (x_1, \dots, x_p) de E^p .
- Une **p-liste d'éléments distincts** de E est un élément (x_1, \dots, x_p) de E^p avec $x_i \neq x_j$ pour $i \neq j$.
- Une **p-combinaison** de E est une partie de E de cardinal p .

On dit qu'un ensemble E est **dénombrable** si et seulement si E est équipotent à \mathbb{N} .

2 Fonctions à valeurs scalaires

\mathbb{K} désigne indifféremment \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

2.1 Généralités

Soit E un ensemble.

Soit $f : E \rightarrow \mathbb{K}$ une application.

- f est dite **bornée** sur E si et seulement si : $\exists M \in \mathbb{R}^+, \forall x \in E, |f(x)| \leq M$.
L'ensemble des applications bornées de E dans \mathbb{K} est noté $B(E, \mathbb{K})$.
- Lorsque f est à valeurs réelles (i.e. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$),
 f est dite **majorée** sur E si et seulement si : $\exists M \in \mathbb{R} \mid \forall x \in E, f(x) \leq M$.
 f est dite **minorée** sur E si et seulement si : $\exists m \in \mathbb{R} \mid \forall x \in E, f(x) \geq m$.
- Lorsque f est une application d'une variable réelle et à valeurs réelles (i.e. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $E = \mathbb{R}$),
 f est dite **croissante** sur E si et seulement si : $\forall (x, y) \in E^2, x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$.
 f est dite **décroissante** sur E si et seulement si : $\forall (x, y) \in E^2, x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$.
 f est dite **monotone** sur E si et seulement si f est décroissante ou croissante sur E .
- Lorsque $E \subset \mathbb{K}$, on appelle **période** de f tout élément T de E vérifiant :

$$\forall x \in E, f(x + T) = f(x).$$

L'ensemble des périodes de l'application f est noté $P(f)$.

On dit que f est **périodique** si et seulement si f admet au moins une période non nulle.

- Lorsque E est un intervalle de \mathbb{R} , et f est à valeurs réelles (i.e. $f : E \rightarrow \mathbb{R}$),
 f est dite **convexe** sur E si et seulement si : $\forall (x, y) \in E^2, \forall \lambda \in [0, 1]$, on a :

$$f((1 - \lambda)x + \lambda y) \leq (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y).$$

f est dite **concave** sur E si et seulement si : $\forall (x, y) \in E^2, \forall \lambda \in [0, 1]$, on a :

$$(1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y) \leq f((1 - \lambda)x + \lambda y).$$

Soient $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ une application et $a \in I$. On dit que f est **continue au point ⁸ a** si et seulement si $\lim_{t \rightarrow a} f(t) = f(a)$.

On dit que f est **continue sur I** si et seulement si f est continue en tout point de I .

Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une application et $a \in I$.

- On dit que f est **continue à gauche** en a lorsque $I \cap]-\infty, a[\neq \emptyset$ et $\lim_{t \rightarrow a^-} f(t) = f(a)$.
- On dit que f est **continue à droite** en a lorsque $I \cap]a, +\infty[\neq \emptyset$ et $\lim_{t \rightarrow a^+} f(t) = f(a)$.

On dit que $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ est **en escalier** sur $[a, b]$ si et seulement si il existe une subdivision $\sigma = (a_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ de $[a, b]$ telle que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, f soit constante sur l'intervalle ouvert $]a_{i-1}, a_i[$. Une telle subdivision σ est dite **adaptée** à f .

L'ensemble des applications de $[a, b]$ dans \mathbb{K} qui sont en escalier sur $[a, b]$ est noté $\mathcal{E}([a, b], \mathbb{K})$.

On dit que $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ est **continue par morceaux** sur $[a, b]$ si et seulement si il existe une subdivision $\sigma = (a_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ de $[a, b]$ telle que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, la restriction de f à l'intervalle ouvert $]a_{i-1}, a_i[$ se prolonge en une application continue sur le segment $[a_{i-1}, a_i]$.

Une telle subdivision σ est dite **adaptée** à f .

L'ensemble des applications de $[a, b]$ dans \mathbb{K} qui sont continues par morceaux sur $[a, b]$ est noté $M^0([a, b], \mathbb{K})$.

Soient I un intervalle d'intérieur non vide de \mathbb{R} , $f : I \rightarrow \mathbb{K}$, $a \in \mathbb{K}$ et $T_a : I \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{K}$ définie par : $T_a(t) = \frac{f(t) - f(a)}{t - a}$.

- On dit que f est **dérivable en un point a** si et seulement si $\lim_{a, \neq} T_a$ existe dans \mathbb{K} .
- Si a n'est pas l'extrémité droite de I , on dit que f est **dérivable à droite** en a si et seulement si $\lim_{a^+} T_a$ existe dans \mathbb{K} . En cas d'existence, cette limite est noté $f'_d(a)$ et est appelée dérivé à droite de f en a .
- Si a n'est pas l'extrémité gauche de I , on dit que f est **dérivable à gauche** en a si et seulement si $\lim_{a^-} T_a$ existe dans \mathbb{K} . En cas d'existence, cette limite est noté $f'_g(a)$ et est appelée dérivé à gauche de f en a .

Une application $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ est dite **dérivable sur l'intervalle I** si et seulement si f est dérivable en tout point de I . On note $\mathcal{D}(I, \mathbb{K})$ l'ensemble des applications de I dans \mathbb{K} dérivables sur I .

⁸Sinon on dit que a est un point de discontinuité de f

Lorsque f est dérivable sur I on dispose de l'application $f' : I \rightarrow \mathbb{K}$ qui à tout réel $t \in I$ associe le scalaire $f'(t)$ de \mathbb{K} . L'application f' est appelée **application dérivée** de f

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{K}$. Par convention f est dite zéro fois dérivable sur I et on pose : $f^{(0)} = f$.

L'application f est dite une fois dérivable sur I si et seulement si f est dérivable sur I et on pose alors : $f^{(1)} = f'$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'application f est dite **n -fois dérivable** sur I si et seulement si f est $n-1$ fois dérivable sur I et si $f^{(n-1)}$ est dérivable sur I . Dans ces conditions on pose : $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$.

En cas d'existence, l'application $f^{(n)}$ est appelée **dérivée $n^{\text{ième}}$** de f . L'application f est dite **indéfiniment dérivable** sur I si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}$, f est n -fois dérivable sur I .

Soient $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ une application et $a \in I$. Si f est n -fois dérivable en a alors on appelle **Polynôme de Taylor** de f en a à l'ordre n la fonction polynomiale notée $T_{n,f,a}$ définie par :

$$T_{n,f,a}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$$

La différence $f - T_{n,f,a}$ est notée $R_{n,f,a}$ et appelée reste de f en a à l'ordre n .

2.2 Intégration

2.2.1 Intégration sur un segment

On considère deux réels a et b tels que $a \leq b$. Si $f \in M^0([a, b], \mathbb{K})$ alors l'intégrale de f sur le segment $[a, b]$ est noté $\int_{[a,b]} f$.

Théorème - définition : **Sommes de Riemann.**

Si $f \in M^0([0, 1], \mathbb{K})$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_{[0,1]} f$.

Si $f \in M^0([a, b], \mathbb{K})$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) = \int_{[a,b]} f$.

Soient I un intervalle de \mathbb{R} et $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ une application. On dit que f admet une **primitive** sur I si et seulement si il existe une application $F : I \rightarrow \mathbb{K}$ dérivable sur I et telle que :

$\forall t \in I, F'(t) = f(t)$. On dit alors que F est une primitive de f sur I .

2.2.2 Intégrale généralisée

Soient I un intervalle non vide de \mathbb{R} et $(a, b) \in \overline{\mathbb{R}}^2$ tel que $a < b$.

On suppose $a \in \mathbb{R}$ (mais b peut valoir $+\infty$).

On considère $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{K}$ continue par morceaux sur l'intervalle $[a, b[$ et on lui associe l'application

$$F : [a, b[\rightarrow \mathbb{K} \text{ définie par : } F(x) = \int_a^x f.$$

- On dit que l'intégrale de f sur $[a, b[$ est **convergente** si et seulement si $\lim_b F$ existe dans \mathbb{K} .

Lorsque cette condition est remplie, on pose : $\int_a^b f = \lim_{x \rightarrow b} \int_a^x f$.

Le scalaire $\int_a^b f$ est alors appelé **intégrale généralisée de f sur**⁹ $[a, b[$.

- Pour exprimer que l'intégrale de f sur $[a, b[$ ne converge pas on dit qu'elle **diverge**.
- On suppose que l'intégrale de f sur $[a, b[$ est convergente.

$$\text{Soit } R : [a, b[\rightarrow \mathbb{K} \text{ définie par : } R(x) = \int_x^b f.$$

La quantité $R(x)$ est appelée **reste d'ordre x** de l'intégrale généralisée de f sur $[a, b[$.

On suppose $b \in \mathbb{R}$ (mais a peut valoir $-\infty$).

On considère $f :]a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ continue par morceaux sur l'intervalle $]a, b]$ et on lui associe l'application

$$F :]a, b] \rightarrow \mathbb{K} \text{ définie par : } F(x) = \int_x^b f.$$

- On dit que l'intégrale de f sur $]a, b]$ est **convergente** si et seulement si $\lim_a F$ existe dans \mathbb{K} .

Lorsque cette condition est remplie, on pose : $\int_a^b f = \lim_{x \rightarrow a} \int_x^b f$.

Le scalaire $\int_a^b f$ est alors appelé **intégrale généralisée de f sur** $]a, b]$.

- Pour exprimer que l'intégrale de f sur $]a, b]$ ne converge pas on dit qu'elle **diverge**.
- On suppose que l'intégrale de f sur $]a, b]$ est convergente.

$$\text{Soit } R :]a, b] \rightarrow \mathbb{K} \text{ définie par : } R(x) = \int_a^x f.$$

La quantité $R(x)$ est appelée **reste d'ordre x** de l'intégrale généralisée de f sur $]a, b]$.

⁹Une intégrale généralisée est aussi appelée **intégrale impropre**.

On ne suppose rien sur a et b , on peut donc avoir $a = -\infty$ et/ou $b = +\infty$.

Soit $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{K}$ continue par morceaux sur l'intervalle $]a, b[$.

- On dit que l'intégrale de f sur $]a, b[$ est **convergente** si et seulement si il existe $c \in]a, b[$ tel que l'intégrale de f sur $]a, c]$ et l'intégrale de f sur $[c, b[$ sont convergentes.

Lorsque cette condition est remplie on pose : $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$.

Le scalaire $\int_a^b f$ est appelé **intégrale généralisée de f sur $]a, b[$** et il est indépendant du réel c considéré dans $]a, b[$.

- Pour exprimer que l'intégrale de f sur $]a, b[$ ne converge pas on dit qu'elle **diverge**.

On suppose I ouvert ou semi-ouvert. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ continue par morceaux sur I .

- L'intégrale de f sur I est dite **absolument convergente** si et seulement si l'intégrale de $|f|$ sur I est convergente.
- L'intégrale de f sur I est dite **semi-convergente** si et seulement si l'intégrale de f sur I est convergente et non absolument convergente.

Une application $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ est dite **intégrable** sur I si et seulement si elle est continue par morceaux sur I et si l'on se trouve dans l'une des deux situations suivantes¹⁰ :

- (1) I est un segment.
- (2) L'intégrale de f sur I est absolument convergente.

On note $L^1(I, \mathbb{K})$ l'ensemble des applications intégrables sur I .

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ intégrable sur I .

Si $I = [a, b]$ avec $-\infty < a \leq b < +\infty$ alors on pose : $\int_I f = \int_a^b f$ où $\int_a^b f$ est l'intégrale de f sur le segment $[a, b]$.

Si I est un intervalle semi-ouvert ou ouvert d'extrémités a et b avec $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ alors on pose $\int_I f = \int_a^b f$ où $\int_a^b f$ est l'intégrale généralisée de f sur I .

Dans tous les cas, le scalaire $\int_I f$ est appelé **intégrale de f sur I** .

¹⁰En pratique, on montre seulement la condition (2). Si I est un segment, alors l'intégrale de f sur I est ACV.

Relations de Chasles :

Soit $f \in L^1(I, \mathbb{K})$ et $(a, b) \in \overline{\mathbb{R}}^2$ tel que $] \min(a, b), \max(a, b) [\subset I$.

- Si $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ alors $f \in L^1(]a, b[, \mathbb{K})$ et on pose $\int_a^b f = \int_{]a, b[} f$
- Si $-\infty \leq b < a \leq +\infty$ alors $f \in L^1(]b, a[, \mathbb{K})$ et on pose $\int_a^b f = - \int_{]b, a[} f$
- Si $-\infty \leq a \leq +\infty$ alors on pose $\int_a^a f = 0$

Intégrale dépendant d'un paramètre :

On suppose I d'intérieur non vide. Soient A une partie de \mathbb{R} et $f : A \times I \rightarrow \mathbb{K}$ une application.

Pour $x \in A$ on note $f(x, \bullet)$ l'application de I dans \mathbb{K} définie par : $f(x, \bullet)(t) = f(x, t)$.

Pour $t \in I$ on note $f(\bullet, t)$ l'application de A dans \mathbb{K} définie par : $f(\bullet, t)(x) = f(x, t)$.

Si pour tout $x \in A$ l'application $f(x, \bullet)$ est intégrable sur I alors on dispose de l'application

$F : A \rightarrow \mathbb{K}$ définie par : $F(x) = \int_I f(x, t) dt = \int_I f(x, \bullet)$

2.3 Étude locale

Soient A une partie de \mathbb{R} , $a \in \overline{A}$ et $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$.

On dit que f «est d'un certain type» au voisinage de a dans A si et seulement si il existe un voisinage V de a dans \mathbb{R} tel que f «soit d'un certain type» dans $V \cap A$.

On suppose que g ne s'annule pas au voisinage de a dans A .

- On dit que f est **dominée** par g au voisinage de a dans A , et on note $f = O_a(g)$, si et seulement si $\frac{f}{g}$ est bornée au voisinage de a dans A .
- On dit que f est **négligeable** devant g au voisinage de a dans A , et on note $f = o_a(g)$, si et seulement si $\lim_{a, A} \frac{f}{g} = 0$
- On dit que f est **équivalente** à g au voisinage de a dans A , et on note $f \sim_a g$, si et seulement si $\lim_{a, A} \frac{f}{g} = 1$

La notation $f = O(g)$ doit se lire « f est dominée par g » ou « f est un grand O de g », le « voisinage de a dans A » étant sous-entendu. Il ne s'agit pas d'égalités au sens habituel mais « d'égalités » qui se lisent de la gauche vers la droite. On peut avoir $f = O(h)$, $g = O(h)$ et $f \neq g$.

Étant donné $n \in \mathbb{N}$, on dit que f admet un **développement limité** à l'ordre n au voisinage de a dans A si et seulement si il existe $n + 1$ éléments a_0, \dots, a_n de \mathbb{K} tels qu'au voisinage de a dans A on ait :

$$f(x) \underset{a}{=} a_0 + a_1(x - a) + a_2(x - a)^2 + \dots + a_n(x - a)^n + o((x - a)^n)$$

Si c'est le cas, le polynôme $a_0 + a_1(X - a) + a_2(X - a)^2 + \dots + a_n(X - a)^n$ est appelé **partie régulière** du $dl_n(a)$ ¹¹.

Étant donné $n \in \mathbb{N}$, on dit que f admet un **développement asymptotique** à l'ordre n au voisinage de a dans A si et seulement si il existe $n + 1$ éléments c_0, \dots, c_n de \mathbb{K} et $n + 1$ fonctions h_0, \dots, h_n de \mathbb{R} dans \mathbb{K} définies au voisinage de a tels qu'au voisinage de a dans A on ait :

$$f \underset{a}{=} c_0 h_0 + c_1 h_1 + c_2 h_2 + \dots + c_n h_n + o(h_n)$$

2.4 Équation différentielle linéaire

I désigne un intervalle de \mathbb{R} .

2.4.1 Équation différentielle linéaire d'ordre 1

Soient $a, b : I \rightarrow \mathbb{K}$ des applications continues sur I et à valeurs dans \mathbb{K} .

On considère l'**équation différentielle linéaire d'ordre un** : (L) : $y' + a y = b$.

À l'équation (L) on associe l'**équation différentielle homogène** : (H) : $y' + a y = 0$.

Une application $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ est dite **solution** de l'équation différentielle (L) sur l'intervalle I si et seulement si f est dérivable sur I et si $\forall t \in I, f'(t) + a(t)f(t) = b(t)$.

On note $S_{I \rightarrow \mathbb{K}}(L)$ l'ensemble des applications $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ qui sont solutions de (L) sur I .

¹¹Contraction de *développement limité* à l'ordre n au voisinage de a dans A

2.4.2 Équation différentielle linéaire d'ordre 2

Soient α, β des éléments de \mathbb{K} et $c : I \rightarrow \mathbb{K}$ une application continue sur I à valeurs dans \mathbb{K} .

On considère l'équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants :

$$(L) : y'' + \alpha y' + \beta y = c$$

À l'équation (L) on associe l'équation différentielle homogène : (H) : $y'' + \alpha y' + \beta y = 0$

Une application $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ est dite **solution** de l'équation différentielle (L) sur l'intervalle I si et seulement si f est deux fois dérivable sur I et si $\forall t \in I, f''(t) + \alpha f'(t) + \beta f(t) = c(t)$.

On note $S_{I \rightarrow \mathbb{K}}(L)$ l'ensemble des applications $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ qui sont solutions de (L) sur I .

3 Structures algébriques

3.1 Groupes

Une **loi de composition interne** (abrégée en l.c.i.) sur un ensemble E est une application de $E \times E$ dans E (i.e. $\star : E \times E \rightarrow E$).

Une l.c.i. \star est dite **associative** si et seulement si : $\forall (x, y, z) \in E^3, (x \star y) \star z = x \star (y \star z)$.

Une l.c.i. \star est dite **commutative** si et seulement si : $\forall (x, y) \in E^2, x \star y = y \star x$.

Un **élément neutre** pour la l.c.i. \star est un élément $e \in E$ vérifiant : $\forall x \in E, x \star e = e \star x = x$.

Un **magma** est un couple (E, \star) où E est un ensemble et \star une loi de composition interne sur E . Lorsque \star est associative, on dit que le magma (E, \star) est associatif, de même pour la commutativité. Lorsque (E, \star) admet un élément neutre, on dit que le magma est **magma unifère**.

Un **monoïde** est un magma associatif et unifère.

Soient (E, \star) un magma unifère d'élément neutre e , et $a \in E$.
 a est dit **symétrisable** dans (E, \star) si et seulement si : $\exists b \in E \mid b \star a = a \star b = e$.

Un **groupe** est un monoïde dans lequel tout élément est symétrisable.
Lorsque la l.c.i. d'un groupe est commutative, on dit qu'il est commutatif, ou **abélien**.

Une partie H de G est un **sous-groupe** de (G, \star) si et seulement si :

1. H est non vide.
2. $\forall (x, y) \in H^2, x \star y \in H.$ (Stable pour la loi \star)
3. $\forall x \in H, x^{-1} \in H.$ (Stable pour l'inverse)

En pratique, on utilise la caractérisation suivante :

Une partie H de G est un sous-groupe de $(G, \star) \Leftrightarrow \forall (x, y) \in H^2, x \star y^{-1} \in H$

Soient (G, \star) et (H, \cdot) deux groupes. On dit que l'application $\phi : G \rightarrow H$ est un **morphisme de groupes** de (G, \star) dans (H, \cdot) si et seulement si : $\forall (x, y) \in G^2, \phi(x \star y) = \phi(x) \cdot \phi(y)$.

On appelle **isomorphisme** de groupes tout morphisme de groupes bijectif.

Soit $\phi : G \rightarrow H$ un morphisme de groupes de (G, \star) dans (H, \cdot) .

On appelle le **noyau** de ϕ l'ensemble $\ker \phi = \{x \in G \mid \phi(x) = e_H\}$, (avec e_H le neutre de (H, \cdot))

On appelle **l'image** de ϕ l'ensemble $\text{Im } \phi = \{y \in H, \exists x \in G \mid y = \phi(x)\}$

Théorème - Définition : Soient (G, \star) un groupe et A une partie de G . La partie $\langle A \rangle$, égale à l'intersection de tous les sous-groupes de (G, \star) qui contiennent A , est le plus petit sous-groupe de (G, \star) à contenir A . $\langle A \rangle$ est appelé **sous-groupe de (G, \star) engendré par A** .

- On note \mathcal{H}_A l'ensemble des sous-groupes de (G, \star) qui contiennent A .

$\mathcal{H}_A \neq \emptyset$ car $G \in \mathcal{H}_A$, et par définition on a : $\langle A \rangle = \bigcap_{H \in \mathcal{H}_A} H$.

- Si $a \in G$ alors le sous-groupe de (G, \star) engendré par la partie $\{a\}$, alias $\langle \{a\} \rangle$, est simplement noté $\langle a \rangle$ et est appelé sous-groupe de (G, \star) engendré par a .

Plus généralement : si a_1, \dots, a_p sont des éléments de G , alors le sous-groupe de (G, \star) engendré par la partie $\{a_1, \dots, a_p\}$, alias $\langle \{a_1, \dots, a_p\} \rangle$, est noté $\langle a_1, \dots, a_p \rangle$ et est appelé sous-groupe de (G, \star) engendré par a_1, \dots, a_p .

Soient (G, \star) un groupe et $a \in G$.

L'**ordre** $\omega(a)$ de l'élément a est le cardinal du groupe engendré par a . On a donc : $\omega(a) = |\langle a \rangle|$.

Si $\omega(a) < +\infty$ alors a est dit d'**ordre fini**, et si $\omega(a) = +\infty$ alors a est dit d'**ordre infini**.

Soit (G, \star) un groupe.

- On dit que $a \in G$ est un **élément générateur** de (G, \star) si et seulement si $G = \langle a \rangle$.
- Le groupe (G, \star) est dit **groupe monogène** si et seulement si il admet au moins un générateur.
- Le groupe (G, \star) est dit **groupe cyclique** si et seulement si il est à la fois monogène et fini.

3.2 Anneaux – Corps – K-Algèbres

On appelle **anneau** tout triplet $(A, +, \times)$ où A est un ensemble, $+$ et \times sont deux l.c.i. sur A tel que :

1. $(A, +)$ est un groupe commutatif.
2. (A, \times) est un monoïde.
3. \times est distributive par rapport à la loi $+$.

Par convention, dans un anneau $(A, +, \times)$, on note 0_A le neutre pour la loi $+$, et 1_A le neutre pour la loi \times (Ou simplement 0 et 1 lorsqu'il n'y a pas de confusion possible sur l'anneau considéré).

On dit que l'anneau $(A, +, \times)$ est commutatif lorsque le monoïde (A, \times) est commutatif.

Un anneau $(A, +, \times)$ est dit **sans diviseur de zéro** si et seulement si il vérifie :

$$\forall (x, y) \in A^2, \quad a \times b = 0_A \Rightarrow a = 0_A \text{ ou } b = 0_A.$$

Un anneau **intègre** est un anneau commutatif non nul et sans diviseur de zéro.

Une partie B de A est un **sous-anneau** de $(A, +, \times)$ si et seulement si :

1. $\forall (x, y) \in B^2, \quad x - y \in B. \quad (\text{Stable par différence})$
2. $\forall (x, y) \in B^2, \quad x \times y \in B. \quad (\text{Stable par produit})$
3. $1_A \in B.$

Soient $(A, +, \times)$ et (B, \oplus, \otimes) deux anneaux. Un **morphisme d'anneaux** de $(A, +, \times)$ dans (B, \oplus, \otimes) est une application $\psi : A \rightarrow B$ vérifiant les propriétés suivantes :

1. $\forall (x, y) \in A^2, \quad \psi(x + y) = \psi(x) \oplus \psi(y).$
2. $\forall (x, y) \in A^2, \quad \psi(x \times y) = \psi(x) \otimes \psi(y).$
3. $\psi(1_A) = 1_B.$

Soient $(A, +, \times)$ un anneau et $a \in A$.

On dit que a est **nilpotent** si et seulement si il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $a^m = 0_A$.

Soit $(A, +, \times)$ un anneau commutatif. Une partie I de A est un **idéal** de l'anneau $(A, +, \times)$ si et seulement si :

1. I est un sous-groupe de $(A, +)$.
2. $\forall a \in A, \forall i \in I, \quad a \times i \in I.$

(HP) Soient $(A, +, \times)$ un anneau¹² et I une partie de A .
Notons (\mathcal{G}) la propriété suivante : « I est un sous-groupe de $(A, +)$ ».

- I est un **idéal à droite** de A si et seulement si (\mathcal{G}) et $\forall a \in A, \forall i \in I, i \times a \in I$.
- I est un **idéal à gauche** de A si et seulement si (\mathcal{G}) et $\forall a \in A, \forall i \in I, a \times i \in I$.
- I est un **idéal bilatère**¹³ de A si et seulement si (\mathcal{G}) et $\forall a \in A, \forall i \in I, a \times i \in I$ et $i \times a \in I$.

Théorème - Définition : Soient $(A, +, \times)$ un anneau commutatif et $x \in A$.
L'ensemble $xA = \{x \times a \mid a \in A\}$ est un idéal de A , on l'appelle **idéal engendré** par x .

(HP) Un anneau $(A, +, \times)$ est dit **principal** si et seulement si $(A, +, \times)$ est un anneau intègre dans lequel tout idéal est de la forme¹⁴ aA avec $a \in A$.

Un **corps** est un anneau commutatif non nul dans lequel tout élément non nul est inversible¹⁵.

Une partie L de K est un **sous-corps** de $(K, +, \times)$ si et seulement si :

1. $\forall (x, y) \in L^2, x - y \in L.$ (*Stable par différence*)
2. $\forall (x, y) \in L^2, x \times y \in L.$ (*Stable par produit*)
3. $\forall x \in L \setminus \{0_K\}, x^{-1} \in L.$ (*Stable par l'inverse*)
4. $1_K \in L.$

Soient $(K, +, \times)$ et (L, \oplus, \otimes) deux corps. Un **morphisme de corps** de $(K, +, \times)$ dans (L, \oplus, \otimes) est un morphisme d'anneaux de $(K, +, \times)$ dans (L, \oplus, \otimes) .

On dit que le corps K est **corps algébriquement clos** lorsque tout polynôme non constant de $K[X]$ admet au moins une racine dans K .

Soit (K, \oplus, \otimes) un corps. Une **K-algèbre** est un quadruplet $(\mathcal{A}, +, \times, \cdot)$ où \mathcal{A} est un ensemble, $+$ et \times des l.c.i. sur \mathcal{A} , et \cdot une l.c.e sur \mathcal{A} à domaine d'opérateurs dans K tel que :

1. $(\mathcal{A}, +, \times)$ est un anneau.
2. $(\mathcal{A}, +, \cdot)$ est un K -espace vectoriel.

¹²L'anneau n'est pas considéré commutatif.

¹³Un idéal bilatère est un idéal à gauche et à droite

¹⁴ $aA = \{a \times x, x \in A\}$

¹⁵Symétrisable pour la loi \times

$$3. \forall \alpha \in K, \forall (x, y) \in \mathcal{A}^2, \alpha \cdot (x \times y) = (\alpha \cdot x) \times y = x \times (\alpha \cdot y).$$

Soient $(\mathcal{A}, +, \times, \cdot)$ une K -algèbre et \mathcal{B} une partie de \mathcal{A} . On dit que \mathcal{B} est une **sous-algèbre** de $(\mathcal{A}, +, \times, \cdot)$ si et seulement si :

1. $\forall (\alpha, \beta) \in K^2, \forall (x, y) \in \mathcal{B}^2, \alpha \cdot x + \beta \cdot y \in \mathcal{B}. \quad (\text{Stable par combinaison linéaire})$
2. $\forall (x, y) \in \mathcal{B}^2, x \times y \in \mathcal{B}. \quad (\text{Stable par produit})$
3. $1_{\mathcal{A}} \in \mathcal{B}.$

Soient $(\mathcal{A}, +, \times, \cdot)$ et $(\mathcal{B}, \oplus, \otimes, \odot)$ deux K -algèbres. On dit que $\varphi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ est un **morphisme de K -algèbres** si et seulement si :

1. $\forall (\alpha, \beta) \in K^2, \forall (x, y) \in \mathcal{A}^2, \varphi(\alpha \cdot x + \beta \cdot y) = \alpha \odot \varphi(x) \oplus \beta \odot \varphi(y).$
Ou, plus simplement : $\varphi(\alpha x + \beta y) = \alpha \varphi(x) + \beta \varphi(y)$ en notant \oplus comme $+$.
2. $\forall (x, y) \in \mathcal{A}^2, \varphi(x \times y) = \varphi(x) \otimes \varphi(y).$
Ou, plus simplement : $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y).$
3. $\varphi(1_{\mathcal{A}}) = 1_{\mathcal{B}}.$

3.3 Polynômes

Soit $(K, +, \times)$ un corps.

Un **polynôme à une indéterminée** à coefficients dans K est un élément de $K^{(\mathbb{N})}$. C'est donc une suite (a_n) d'éléments de K nulle à partir d'un certain rang, c'est-à-dire telle que : $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, a_n = 0_K$.

Si $P = (a_n)$ est un polynôme, alors les scalaires a_k, k décrivant \mathbb{N} , sont appelés les **coefficients** du polynôme P . On note aussi : $P = (a_0, a_1, \dots, a_n, \dots)$.

L'ensemble $K^{(\mathbb{N})}$ des polynômes à une indéterminée à coefficients dans K est noté $K[X]$.

La puissance d'ordre n de l'**indéterminée** X^n désigne la suite partout nulle sauf pour le terme d'indice n qui vaut 1.

$$X^n = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots) = (\delta_{1n}, \delta_{2n}, \delta_{3n}, \dots) = (\delta_{in})_{i \in \mathbb{N}}$$

Soit $P = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n X^n$ et Q deux polynômes de $K[X]$. On appelle **composé** de P par Q le polynôme noté $P \circ Q$ défini par : $P \circ Q = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n Q^n$.

Soit $P = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n X^n \in K[X]$. Pour tout scalaire $x \in K$ on dispose du scalaire $P(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n x^n$.

L'application $\tilde{P} : K \rightarrow K$ est appelée **fonction polynôme** associée au polynôme P .

$$x \mapsto P(x)$$

Le **degré** du polynôme $P = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n X^n$ de $K[X]$, noté $\deg P$, est un élément de $\mathbb{N} \cup \{-\infty\}$ défini par : $\deg P = \begin{cases} \max\{k \in \mathbb{N} \mid a_k \neq 0\} & \text{si } P \neq 0 \\ -\infty & \text{si } P = 0 \end{cases}$

Soit $P = a_p X^p + a_{p-1} X^{p-1} + \dots + a_1 X + a_0$ un polynôme de degré $p \in \mathbb{N}$. On a donc $a_p \neq 0$.
 Le coefficient a_p est appelé **coefficient dominant** de P .
 Le coefficient a_0 est appelé **coefficient constant** du polynôme P .
 Le polynôme P est dit **unitaire** si et seulement si $a_p = 1_K$.

On dit que $a \in K$ est une **racine** de $P \in K[X]$ dans K si et seulement si $P(a) = 0_K$.

Soient P un polynôme non nul de $K[X]$ et $a \in K$.

Le plus grand entier naturel k vérifiant $(X - a)^k \mid P$ est appelé **multiplicité** de a dans P .

Il est noté $m_P(a)$. Lorsque $m_P(a) = 1$ on dit que a est une **racine simple** de P et lorsque $m_P(a) = 2$ on dit que a est une **racine double** de P .

Soit $P \in K[X]$. Le polynôme P est dit **scindé** sur K si et seulement si il existe $\lambda \in K \setminus \{0_K\}$, $n \in \mathbb{N}^*$ et a_1, \dots, a_n dans K tels que $P = \lambda (X - a_1) \cdots (X - a_n)$.

Le polynôme P est dit **scindé simple** sur K si et seulement si il existe $\lambda \in K \setminus \{0_K\}$, $n \in \mathbb{N}^*$ et a_1, \dots, a_n dans K deux à deux distincts tels que $P = \lambda (X - a_1) \cdots (X - a_n)$.

Soit $P = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n X^n \in K[X]$. Le polynôme $P' = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} n a_n X^{n-1}$ est appelé **polynôme dérivé** du polynôme P .

On dit qu'une application $P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$ est une **fonction polynôme** si et seulement si :

$$\exists n \in \mathbb{N}, \exists (a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1} \mid \forall t \in \mathbb{R}, P(t) = \sum_{k=0}^n a_k t^k.$$

Soit E un K -espace vectoriel de dimension finie égale à p . On considère une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ de E . On dit que $P : E \rightarrow \mathbb{K}$ est une **fonction polynôme relativement à \mathcal{B}** si et seulement si il existe des entiers naturels n_1, \dots, n_p et une famille de scalaires $(a_{i_1 \dots i_p})_{(i_1, \dots, i_p) \in \llbracket 1, n_1 \rrbracket \times \dots \times \llbracket 1, n_p \rrbracket}$ tels que :

$$\text{Pour tout vecteur } x = \sum_{j=1}^p x_j e_j \text{ de } E \text{ on ait : } P(x) = \sum_{(i_1, \dots, i_p) \in \llbracket 1, n_1 \rrbracket \times \dots \times \llbracket 1, n_p \rrbracket} a_{i_1 \dots i_p} x_1^{i_1} \dots x_p^{i_p}$$

Soit $A \in K[X] \setminus \{0\}$, on appelle **A normalisé** le polynôme noté \tilde{A} obtenu en divisant A par son coefficient dominant. Ce polynôme est donc unitaire et associé à A .

3.4 Fractions rationnelles

Soit $(K, +, \times)$ un corps¹⁶.

Dans l'ensemble $K[X] \times (K[X] \setminus \{0\})$, on définit la relation \mathcal{R} en posant :

$$(P, Q) \mathcal{R} (R, S) \Leftrightarrow PS = QR.$$

On appelle **fraction rationnelle** à coefficients dans K toute classe d'équivalence pour la relation \mathcal{R} . La classe de (P, Q) est notée¹⁷ $\frac{P}{Q}$. On a donc :

$$\frac{P}{Q} = \{(R, S) \in K[X] \times (K[X] \setminus \{0\}) \mid PS = QR\}.$$

On dit que (P, Q) est un **représentant** de la fraction $\frac{P}{Q}$.

L'ensemble des fractions rationnelles est noté $K(X)$ et la relation \mathcal{R} est appelée égalité des fractions rationnelles.

Soient $\frac{P}{Q}, \frac{R}{S}$ deux fractions rationnelles et $\lambda \in K$. On pose par définition¹⁸ :

$$\frac{P}{Q} + \frac{R}{S} = \frac{PS + QR}{QS}, \quad \frac{P}{Q} \times \frac{R}{S} = \frac{PR}{QS}, \quad \lambda \cdot \frac{P}{Q} = \frac{\lambda P}{Q}$$

¹⁶La construction du corps des fraction reste cependant la même pour un anneau intègre.

¹⁷avec P le **numérateur** et Q le **dénominateur**.

¹⁸Il s'agit bien d'une définition des lois $+$ et \times , pas une propriété.

Théorème : L'application $\varphi : K[X] \rightarrow K(X)$ définie par $\varphi(P) = \frac{P}{1}$ est un morphisme d'algèbres injectif.

Par conséquent on peut identifier le polynôme P avec la fraction $\frac{P}{1}$, ce qui fait que l'on peut considérer que $K[X] \subset K(X)$. En particulier la fraction nulle (en vertu de l'égalité des fractions) est identifiée au polynôme nul 0, et la fraction unité est identifiée au polynôme constant 1.

Soit $F = \frac{P}{Q}$ une fraction. On dit que $\frac{P}{Q}$ est un représentant **irréductible** dans K si et seulement si Q est unitaire et $P \wedge Q = 1$.

Soit $F = \frac{P}{Q}$ une fraction. On pose $\deg F = -\infty$ si $F = 0$, et $\deg F = \deg P - \deg Q$ sinon. Le **degré** d'une fraction est donc un élément de $\mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$.

Soit $F \in K(X)$ non nulle, et soit $\frac{P}{Q}$ un représentant irréductible de F . On dit que $a \in K$ est **racine** de F de multiplicité $m \in \mathbb{N}^*$ lorsque a est racine du numérateur P de multiplicité m .

On dit que $a \in K$ est un **pôle** de F de multiplicité $m \in \mathbb{N}^*$ lorsque a est racine du dénominateur Q de multiplicité m .

Soit $F = \frac{P}{Q} \in K(X)$, on appelle **fraction dérivée** de F la fraction notée F' définie par¹⁹ :

$$F' = \frac{P'Q - PQ'}{Q^2}$$

(HP) Soit $F \in K(X)$ non nulle, la **dérivée logarithmique**²⁰ de F est la fraction $\frac{F'}{F}$

Théorème - définition : Soit $F \in K(X)$, il existe un unique polynôme E et une unique fraction rationnelle G tel que : $\frac{F}{Q} = E + G$ et $\deg(F - Q) < 0$.

Celui-ci est appelé **partie entière** de F , c'est le quotient dans la division euclidienne du numérateur de F par le dénominateur.

Un **élément simple** de $K(X)$ est une fraction du type $\frac{A}{B^n}$ où B est un polynôme irréductible unitaire, $\deg A < \deg B$ et $n \geq 1$.

Décomposer une fraction rationnelle F non nulle, c'est l'écrire comme somme de sa partie entière et d'éléments simples.

¹⁹Le résultat ne dépend pas du représentant choisi.

²⁰Pour une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ dérivable sur l'intervalle I , qui ne s'annule pas sur I , on définit la dérivée logarithmique de f par : $\mathcal{L}(f) = \frac{f'}{f}$. Lorsque f est à valeurs strictement positives : $\mathcal{L}(f) = (\ln \circ f)'$.

3.5 Structures particulières

3.5.1 Groupe symétrique

Étant donné un ensemble E , l'ensemble des bijections de E sur E est noté S_E .

Étant donné $n \in \mathbb{N}^*$, l'ensemble des bijections de $\llbracket 1, n \rrbracket$ sur $\llbracket 1, n \rrbracket$ est noté S_n .

Théorème : (S_E, \circ) est un groupe. Il est appelé **groupe symétrique de E** .

Un élément σ de S_E est appelée une **permutation** de E .

Si $\sigma \in S_E$ alors l'ensemble $\text{Supp } \sigma = \{x \in E \mid \sigma(x) \neq x\}$ est appelé **support** de σ .

Soient $n \geq 2$ et $p \in \llbracket 2, n \rrbracket$.

On dit qu'une permutation γ de l'ensemble $\llbracket 1, n \rrbracket$ est un **p-cycle** si et seulement si il existe p entiers deux à deux distincts $(j_1, \dots, j_p) \in \llbracket 1, n \rrbracket^p$ tels que :

$$\gamma(j_1) = j_2, \gamma(j_2) = j_3, \dots, \gamma(j_{p-1}) = j_p, \gamma(j_p) = j_1 \text{ et } \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{j_1, \dots, j_p\}, \gamma(k) = k.$$

Pour un tel p -cycle γ on adopte la notation : $\gamma = (j_1, \dots, j_p)$. Un 2-cycle est appelé une **transposition**.

Théorème - définition : Il existe une unique application $\varepsilon : S_n \rightarrow \{-1, 1\}$ vérifiant :

$$\varepsilon(\tau) = -1 \text{ pour toute transposition } \tau \text{ de } S_n \text{ et } \varepsilon(\sigma_1 \circ \sigma_2) = \varepsilon(\sigma_1)\varepsilon(\sigma_2) \text{ pour tout } (\sigma_1, \sigma_2) \in S_n^2.$$

Cette unique application ε est appelée **signature**.

C'est un morphisme de groupes de (S_n, \circ) dans $(\{-1, 1\}, \times)$.

Une **permutation paire** est une permutation de signature égale à 1.

Une **permutation impaire** est une permutation de signature égale à -1.

À toute permutation $\sigma \in S_n$ on associe la matrice $P_\sigma = (p_{ij})$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ définie par :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, p_{ij} = \delta_{i\sigma(j)}.$$

On dit que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une **matrice de permutation** si et seulement si il existe $\sigma \in S_n$ telle que $A = P_\sigma$.

3.5.2 Autour de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Soit n un entier naturel non nul.

Étant donné $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$, on dit que a est **congru** à b modulo n si et seulement si $a - b \in n\mathbb{Z}$. Pour exprimer cela on note $a \equiv b[n]$.

Théorèmes : (1) La relation de congruence modulo n est une relation d'équivalence sur \mathbb{Z} qui est compatible avec l'addition et la multiplication.

La classe de $a \in \mathbb{Z}$ pour la relation de congruence modulo n est égal à $a + n\mathbb{Z}$. Elle est notée \bar{a} .

(2) Pour $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ on a : $\bar{a} = \bar{b} \Leftrightarrow a \equiv b[n] \Leftrightarrow a - b \in n\mathbb{Z}$.

L'ensemble des parties de \mathbb{Z} de la forme \bar{a} , a décrivant \mathbb{Z} , est noté $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

On a donc : $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{\bar{a}, a \in \mathbb{Z}\} = \{x \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}), \exists a \in \mathbb{Z} \mid x = \bar{a}\} = \{a + n\mathbb{Z}, a \in \mathbb{Z}\}$

Soit $x \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Par définition, x est une partie de \mathbb{Z} et il existe au moins un entier relatif a tel que $x = \bar{a}$. Un tel entier relatif a est appelé un représentant²¹ de x . Les représentants de x sont en fait les éléments de x , il y en a donc une infinité et si a est l'un d'entre eux alors les autres sont les $a + nk$, $k \in \mathbb{Z}$.

Soit $(x, y) \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^2$. Par définition, il existe $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $x = \bar{a}$ et $y = \bar{b}$.

On pose : $x \oplus y = \overline{a + b}$ et $x \otimes y = \overline{a \times b}$.

Ainsi définies, \oplus et \otimes sont des lois de composition interne sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Pour des raisons de simplicité d'écriture, les lois \oplus et \otimes sont respectivement notées $+$ et \times .

On retiendra que par définition même : $\forall (a, b) \in \mathbb{Z}^2$, $\bar{a} + \bar{b} = \overline{a + b}$ et $\bar{a} \times \bar{b} = \overline{a \times b}$.

On remarque que $0_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} = \bar{0}$ et $1_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} = \bar{1}$.

²¹Il n'est pas unique.

4 Suites et séries

Le symbole $|\cdot|$ désigne la valeur absolue ou le module suivant que l'on se trouve dans \mathbb{R} ou dans \mathbb{C} .

4.1 Suites réelles ou complexes

Soient (x_n) une suite d'éléments de \mathbb{K} et $a \in \mathbb{K}$.

On dit que (x_n) **tend vers a** si et seulement si : $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |x_n - a| \leq \varepsilon$.

On dit que (x_n) est **convergente** dans \mathbb{K} si et seulement si il existe un élément de \mathbb{K} vers lequel (x_n) tend. On dit que (x_n) est **divergente** dans \mathbb{K} si et seulement si elle n'est pas convergente dans \mathbb{K} .

Soit (x_n) une suite de nombres réels.

On dit que (x_n) **tend vers** $+\infty$ si et seulement si : $\forall A > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall x \geq N, x_n \geq A$.

On dit que (x_n) **tend vers** $-\infty$ si et seulement si : $\forall A > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall x \geq N, x_n \leq -A$.

Soit (x_n) une suite d'éléments de \mathbb{K} .

On dit que (x_n) est **bornée** si et seulement si : $\exists M \in \mathbb{R}_+ \mid \forall n \in \mathbb{N}, |x_n| \leq M$.

Soit (x_n) une suite de nombres réels.

- (x_n) est dite **croissante** si et seulement si : $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \leq x_{n+1}$.
- (x_n) est dite **strictement croissante** si et seulement si : $\forall n \in \mathbb{N}, x_n < x_{n+1}$.
- (x_n) est dite **décroissante** si et seulement si : $\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} \leq x_n$.
- (x_n) est dite **strictement décroissante** si et seulement si : $\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} < x_n$.
- (x_n) est dite **majorée** si et seulement si : $\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, x_n \leq M$.
- (x_n) est dite **minorée** si et seulement si : $\exists m \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, m \leq x_n$.

Soient (a_n) et (b_n) deux suites réelles. On dit que $((a_n), (b_n))$ est une couple de **suites adjacentes** si et seulement si (a_n) est croissante, (b_n) est décroissante et $\lim(b_n - a_n) = 0$.

Soient (a_n) et (b_n) dans $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. On suppose que : $\forall n \in \mathbb{N}, b_n \neq 0$.²²

- On dit que (a_n) est **dominée** par (b_n) , et on note $a_n = O(b_n)$ si et seulement si $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ est bornée.
On dit aussi que (a_n) est un grand O de (b_n) .
- On dit que (a_n) est **négligeable** devant (b_n) , et on note $a_n = o(b_n)$, si et seulement si $\lim \frac{a_n}{b_n} = 0$.
On dit aussi que (a_n) est un petit o de (b_n) .
- On dit que (a_n) est **équivalente** à (b_n) , et on note $a_n \sim b_n$, si et seulement si $\lim \frac{a_n}{b_n} = 1$.

Soit (x_n) une suite d'éléments de \mathbb{K} .

On appelle **suite extraite**, ou encore **sous-suite**, de la suite (x_n) toute suite de la forme $(x_{\varphi(n)})$ où φ est une application strictement croissante de \mathbb{N} dans \mathbb{N} .

4.2 Séries numériques – Familles sommables

4.2.1 Séries numériques

Soit $(a_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose : $A_n = \sum_{k=0}^n a_k = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$.

La suite (A_n) est appelée **série de terme général** (a_n) et est notée $\sum a_n$.

Pour $N \in \mathbb{N}$, le scalaire A_N est appelé **somme partielle** d'ordre N de la série $\sum a_n$.

Dire que la série $\sum a_n$ est **convergente** (resp. **divergente**) dans \mathbb{K} c'est dire que la suite (A_n) est convergente (resp. divergente) dans \mathbb{K} .

En cas de convergence de la série $\sum a_n$, le scalaire $\lim_{N \rightarrow +\infty} A_N$ est noté $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ et est appelé **somme de la série** $\sum a_n$.

On dit que la série $\sum a_n$ **diverge grossièrement** lorsque le terme général ne tend pas vers 0.

En cas de convergence de la série $\sum a_n$, le scalaire $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$ est appelé **reste d'ordre n** de la série $\sum a_n$.

Soit $(a_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. On dit que la série $\sum a_n$ est **absolument convergente** si et seulement si la série $\sum |a_n|$ est convergente.

On dit que la série $\sum a_n$ est **semi-convergente** si et seulement si la série $\sum a_n$ est convergente et non absolument convergente.

²²Cela se généralise au cas où la suite (b_n) ne s'annule pas à partir d'un certain rang.

Une **série alternée** est une série dont le terme général est de la forme $(-1)^n a_n$ où (a_n) est une suite de réels positifs.

4.2.2 Familles sommables de nombres complexes

Soit I un ensemble. On note $\mathcal{P}_f(I)$ l'ensemble des parties finies de I .

Une famille $(u_i)_{i \in I}$ de réels positifs est dite **sommable** si et seulement si l'ensemble $\left\{ \sum_{j \in F} u_j \mid F \in \mathcal{P}_f(I) \right\}$ est majorée.

Si c'est le cas, la borne supérieure de cet ensemble est appelée la **somme** de la famille $(u_i)_{i \in I}$. Si la famille n'est pas sommable, on convient de dire que sa somme vaut $+\infty$. Dans tous les cas, on note la somme $\sum_{i \in I} u_i$.

Une famille $(a_i)_{i \in I}$ de réels est dite **sommable** si et seulement si $(a_i^+)_{i \in I}$ ²³ et $(a_i^-)_{i \in I}$ ²⁴ sont sommables.

Si c'est le cas, on appelle **somme** de la famille $(a_i)_{i \in I}$ le réel : $\sum_{i \in I} a_i = \sum_{i \in I} a_i^+ - \sum_{i \in I} a_i^-$.

Une famille $(z_i)_{i \in I}$ de complexes est dite **sommable** si et seulement si la famille $(|z_i|)_{i \in I}$ est sommable.

On note $\ell^1(I)$ l'ensemble des familles sommables de nombres complexes indexées par I .

On a donc : $\ell^1(I) = \left\{ (z_i)_{i \in I} \in \mathbb{C}^I \mid \sum_{i \in I} |z_i| < +\infty \right\}$

Si $(z_k)_{k \in I}$ est une famille sommable de complexes alors on pose : $\sum_{k \in I} z_k = \sum_{k \in I} \operatorname{Re} z_k + i \sum_{k \in I} \operatorname{Im} z_k$. Le complexe $\sum_{k \in I} z_k$ ainsi défini est appelé **somme** de la famille $(z_k)_{k \in I}$.

²³ $\forall i \in I, a_i^+ = \max(a_i, 0)$

²⁴ $\forall i \in I, a_i^- = \max(-a_i, 0)$

Soient (a_n) et (b_n) dans $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose : $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0 = \sum_{p+q=n} a_p b_q$.

La suite (c_n) est appelée **produit de convolution** des deux suite (a_n) et (b_n) .

La série $\sum c_n$ est appelé **produit de Cauchy** des deux séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$.

Théorème - définition : Pour tout $z \in \mathbb{C}$, la série $\sum \frac{z^n}{n!}$ est convergente et on pose : $\exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$.

Le complexe $\exp(z)$ est appelé **exponentielle** de z et est noté e^z .

On adopte les définitions suivantes : $\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$ $\sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$

$$\cosh z = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z}) \quad \sinh z = \frac{1}{2}(e^z - e^{-z})$$

4.3 Convergences

Soient D un ensemble quelconque, A une partie de D , (f_n) une suite d'applications de D dans \mathbb{K} , c'est-à-dire une suite d'éléments de \mathbb{K}^D ,
et $f : A \subset D \rightarrow \mathbb{K}$ une application.

On dit que la suite d'application (f_n) **converge simplement sur A vers f** si et seulement si :

$$\forall x \in A, \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f(x).$$

On dit que la suite d'applications (f_n) **converge simplement sur A** si et seulement si il existe une application de A dans \mathbb{K} vers laquelle (f_n) converge simplement sur A .

On dit que la suite d'application (f_n) **converge uniformément sur A vers f** si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \forall x \in A, |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

Proposition : (f_n) converge uniformément sur A vers $f \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_{\infty}^A = 0$

On dit que la suite d'applications (f_n) **converge uniformément sur A** si et seulement si il existe une application de A dans \mathbb{K} vers laquelle (f_n) converge uniformément sur A .

Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose : $S_n = \sum_{k=0}^n f_k = f_0 + f_1 + \cdots + f_n$.

La suite d'applications (S_n) est appelée **série d'applications** de terme général f_n et est notée $\sum f_n$. Dire que la série $\sum f_n$ **converge simplement sur A** (resp. **converge uniformément sur A**) c'est dire que la suite d'applications (S_n) converge simplement sur A (resp. converge uniformément sur A). L'application S_n est appelée **somme partielle** d'ordre n de la série d'applications $\sum f_n$.

On suppose que la série d'applications $\sum f_n$ converge simplement sur A.

La **somme de la série** $\sum f_k$ est l'application $\sum_{k=0}^{+\infty} f_k : A \rightarrow \mathbb{K}$ définie par : $\left(\sum_{k=0}^{+\infty} f_k\right)(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x)$.

Le **reste d'ordre n** de la série $\sum f_k$ est l'application $R_n : A \rightarrow \mathbb{K}$ définie par : $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)$.

On dit que la série d'applications $\sum f_n$ **converge absolument en tout point de A** si et seulement si pour tout $x \in A$ la série numérique $\sum |f_n(x)|$ est convergente.

On dit que la série d'applications $\sum f_n$ **converge normalement sur A** si et seulement si la série numérique $\sum \|f_n\|_\infty^A$ est convergente.

4.4 Séries entières

On désigne par $\ell^\infty(\mathbb{C})$ l'ensemble des suites complexes bornées.

Soit $a = (a_n) \in \mathbb{C}^\mathbb{N}$. On pose $I_a = \{r \in \mathbb{R}_+ \mid (a_n r^n) \in \ell^\infty(\mathbb{C})\}$.

Le **rayon de convergence de la suite a** est l'élément de $[0, \underline{+\infty}]$ défini par : $R_a = \sup I_a$.²⁵

Soit (f_n) une suite d'applications de \mathbb{C} dans \mathbb{C} .

On dit que la série d'applications $\sum f_n$ est une **série entière de la variable complexe** si et seulement si il existe $(a_n) \in \mathbb{C}^\mathbb{N}$ telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall z \in \mathbb{C}, f_n(z) = a_n z^n$.

Soit $(a_n) \in \mathbb{C}^\mathbb{N}$. On lui associe la série d'applications $\sum f_n$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall z \in \mathbb{C}, f_n(z) = a_n z^n$. La série d'applications $\sum f_n$ est une série entière de la variable complexe et est dite associée à la suite (a_n) . Elle est abusivement notée $\sum a_n z^n$.

²⁵Son existence est assurée car c'est une partie non vide ($0 \in I_a$) de $\overline{\mathbb{R}}_+$ majorée par $+\infty$.

Soit $\sum a_n z^n$ la série entière associée à la suite complexe $a = (a_n)$. Le **rayon de convergence de la série entière** $\sum a_n z^n$ est le rayon de convergence R_a de la suite (a_n) .

Il est aussi noté $R(\sum a_n z^n)$. Par définition on a donc : $R(\sum a_n z^n) = R_a$.

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R_a .

L'ensemble E_a des nombres complexes z pour lesquels la série numérique $\sum a_n z^n$ est convergente est appelé **ensemble de convergence** de la série entière $\sum a_n z^n$.

i.e. $E_a = \{z \in \mathbb{C} \mid \sum a_n z^n \text{ est convergente}\}$.

L'ensemble $D_a = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R_a\}$ est appelé **disque ouvert de convergence** de $\sum a_n z^n$.

L'ensemble $C_a = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = R_a\}$ est appelé **cercle d'incertitude** de la série entière $\sum a_n z^n$.

On appelle **somme de la série entière** $\sum a_n z^n$ l'application $S_a : E_a \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ définie par :

$$\forall z \in E_a, S_a(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n.$$

Soient $\sum a_n z^n$, $\sum b_n z^n$ deux séries entières et $\alpha \in \mathbb{C}$.

La **somme des séries entières** $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ est la série entière $\sum (a_n + b_n) z^n$.

La **série entière produit** de $\sum a_n z^n$ par le scalaire α est la série entière $\sum \alpha a_n z^n$.

Le **produit de Cauchy des séries entières** $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ est la série entière $\sum c_n z^n$

où (c_n) est la suite définie par : $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$.

Soit (f_n) une suite d'applications de \mathbb{R} dans \mathbb{C} .

On dit que la série d'applications $\sum f_n$ est une **série entière de la variable réelle** si et seulement si il existe $(a_n) \in \underline{\mathbb{C}}^{\mathbb{N}}$ telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in \mathbb{R}, f_n(t) = a_n t^n$.

Soit $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On lui associe la série d'applications $\sum f_n$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in \mathbb{R}, f_n(z) = a_n t^n$.

La série d'applications $\sum f_n$ est une série entière de la variable réelle et est dite associée à la suite (a_n) . Elle est abusivement notée $\sum a_n t^n$.

Soit $\sum a_n t^n$ la série entière de la variable réelle associée à la suite complexe (a_n) .

Le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n t^n$ est par définition le rayon de convergence R_a de la suite $a = (a_n)$. Il est aussi noté $R(\sum a_n t^n)$. Ce rayon de convergence ne dépend que de la suite (a_n) et par définition même : $R(\sum a_n t^n) = R_a = R(\sum a_n z^n)$.

L'ensemble E_a des nombres réels t pour lesquels la série numérique $\sum a_n t^n$ est convergente est appelé **ensemble de convergence** de la série entière $\sum a_n t^n$.

i.e. $E_a = \{t \in \mathbb{R} \mid \sum a_n t^n \text{ est convergente}\}$.

L'intervalle $] -R_a, R_a [$ est appelé **intervalle ouvert de convergence** de la série entière $\sum a_n t^n$.

Soient $r > 0$ et $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction. On pose $\Delta_r = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < r\}$. On dit que f est **développable en série entière** sur le disque ouvert Δ_r si et seulement si f est définie (*au moins*) sur Δ_r et si il existe $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telle que : $\forall z \in \Delta_r, f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$

Soient $r > 0$ et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction. On dit que f est **développable en série entière** sur $] -r, r[$ si et seulement si f est définie (*au moins*) sur $] -r, r[$ et si il existe $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telle que : $\forall t \in] -r, r[, f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$

On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ est **développable en série entière au voisinage de zéro** si et seulement si il existe $r > 0$ tel que f soit définie et développable en série entière sur $] -r, r[$.

Soient $r > 0$ et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction de classe \mathbb{C}^∞ sur $] -r, r[$. La série entière $\sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!} t^n$ est appelé **série de Taylor** de f en 0.

5 Probabilités

5.1 Espaces probabilisés

Une **tribu** sur l'ensemble Ω est un ensemble \mathcal{A} de parties de Ω vérifiant :

1. $\Omega \in \mathcal{A}$.
2. $\forall A \in \mathcal{A}, \overline{A} \in \mathcal{A}$. (*Stable par complémentaire*)
3. $\forall (A_n) \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}, \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$. (*Stable par réunion dénombrable*²⁶)

Un **espace probabilisable** est un couple (Ω, \mathcal{A}) constitué d'un ensemble Ω et d'une tribu \mathcal{A} sur Ω . Les éléments de la tribu \mathcal{A} sont appelés des **événements**. L'espace probabilisable (Ω, \mathcal{A}) est dit **discret** si et seulement si Ω est fini ou dénombrable et $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$.

²⁶En prenant une suite d'événements nulle à partir d'un certain rang, on montre que \mathcal{A} est stable par réunion finie.

Soit (Ω, \mathcal{A}) un espace probabilisable.

- L'évènement \emptyset est appelé **évènement impossible**, l'évènement Ω est appelé **évènement certain**.
- Un évènement égal à un singleton est appelé un **évènement élémentaire**.
- Si A est un évènement alors l'évènement $\overline{A} = \mathcal{A} \setminus A$ est appelé **évènement contraire** de A .
- Deux évènements A et B sont dits **incompatibles** (ou **disjoints**) si et seulement si $A \cap B = \emptyset$.
- Une suite (A_n) d'évènements est dite **croissante** si et seulement si : $\forall k \in \mathbb{N}, A_k \subset A_{k+1}$.
Une suite (A_n) d'évènements est dite **décroissante** si et seulement si : $\forall k \in \mathbb{N}, A_{k+1} \subset A_k$.
- Une famille finie (A_1, \dots, A_p) d'évènements est un **système complet d'évènements** si et seulement si les $A_k, k \in \llbracket 1, p \rrbracket$ sont 2 à 2 disjoints et si $\Omega = A_1 \cup \dots \cup A_p$.
Une suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'évènements est un **système complet d'évènements** si et seulement si les $A_n, n \in \mathbb{N}$ sont 2 à 2 disjoints et si $\Omega = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$.

Une **probabilité** \mathbb{P} sur l'espace probabilisable (Ω, \mathcal{A}) est une application de \mathcal{A} dans $[0, 1]$ qui vérifie:

1. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.
2. Pour toute suite (A_n) d'éléments de \mathcal{A} deux à deux disjoints, $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n)$.
(\mathbb{P} est σ -additive)

Un **espace probabilisé** est un triplet $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ constitué d'un ensemble Ω , d'une tribu \mathcal{A} sur Ω et d'une probabilité \mathbb{P} sur (Ω, \mathcal{A}) . Un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ est dit **discret** si et seulement si l'espace probabilisable (Ω, \mathcal{A}) sous-jacent est discret.

Un évènement A est dit **négligeable** si et seulement si $\mathbb{P}(A) = 0$. Un évènement A est dit **presque sûr** si et seulement si $\mathbb{P}(A) = 1$.

Une propriété $\mathcal{P}(\omega)$ concernant les éléments ω de Ω est dite **presque sûre** si et seulement si il existe un évènement presque sûr A tel que : $\forall a \in A, \mathcal{P}(a)$ vraie.

Une famille finie (A_1, \dots, A_p) d'évènements est un **système quasi-complet d'évènements** si et seulement si les $A_k, k \in \llbracket 1, p \rrbracket$ sont 2 à 2 disjoints et si $\mathbb{P}(A_1 \cup \dots \cup A_p) = 1$.

Une suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'évènements est un **système quasi-complet d'évènements** si et seulement si les $A_n, n \in \mathbb{N}$ sont 2 à 2 disjoints et si $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = 1$.

Une **distribution de probabilités discrètes** (ou **germe de probabilité**) sur l'ensemble Ω est une famille $(p_\omega)_{\omega \in \Omega}$ de réels positifs indexée par Ω qui vérifie $\sum_{\omega \in \Omega} p_\omega = 1$.

Le support d'une distribution de probabilités discrètes $g = (p_\omega)_{\omega \in \Omega}$ sur Ω est l'ensemble S_g définie par : $S_g = \{\omega \in \Omega \mid p_\omega \neq 0\}$.

Une probabilité \mathbb{P} sur un espace probabilisable discret $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ est dite **uniforme** si et seulement si : $\forall (\omega_1, \omega_2) \in \Omega^2, \mathbb{P}(\{\omega_1\}) = \mathbb{P}(\{\omega_2\})$.

• Modèle uniforme :

On suppose que Ω est un ensemble fini et non vide.

Le modèle uniforme sur Ω est l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ où \mathbb{P} est la probabilité définie par :

$$\forall A \in \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

• Modèle de Bernoulli de paramètre p :

Le modèle de Bernoulli de paramètre $p \in [0, 1]$ est l'espace probabilisé discret $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mathbb{P})$ où \mathbb{P} est l'unique probabilité sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ vérifiant :

$$\begin{aligned} * \mathbb{P}(\{0\}) &= 1 - p \\ * \mathbb{P}(\{1\}) &= p \\ * \mathbb{P}(\{k\}) &= 0 \quad \text{pour } k \geq 2 \end{aligned}$$

La probabilité \mathbb{P} est appelée probabilité de Bernoulli de paramètre p . Elle est notée $\mathcal{B}(p)$.

• Modèle binomial de paramètres n et p :

Le modèle binomial de paramètres $n \in \mathbb{N}$ et $p \in [0, 1]$ est l'espace probabilisé discret $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mathbb{P})$ où \mathbb{P} est l'unique probabilité sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ vérifiant :

$$\begin{aligned} * \mathbb{P}(\{k\}) &= \binom{n}{p} p^k (1-p)^{n-k} \quad \text{pour } k \in \llbracket 1, n \rrbracket \\ * \mathbb{P}(\{k\}) &= 0 \quad \text{pour } k \geq n+1 \end{aligned}$$

La probabilité \mathbb{P} est appelée probabilité binomiale de paramètres n et p . Elle est notée $\mathcal{B}(n, p)$.

• Modèle géométrique de paramètre p :

Le modèle géométrique de paramètre $p \in]0, 1]$ est l'espace probabilisé discret $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mathbb{P})$ où \mathbb{P} est l'unique probabilité sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ vérifiant :

$$\begin{aligned} * \mathbb{P}(\{k\}) &= p(1-p)^{k-1} \quad \text{pour } k \in \mathbb{N}^* \\ * \mathbb{P}(\{0\}) &= 0 \end{aligned}$$

La probabilité \mathbb{P} est appelée probabilité géométrique de paramètre p . Elle est notée $\mathcal{G}(p)$.

• **Modèle de Poisson de paramètre λ :**

Le modèle de Poisson de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ est l'espace probabilisé discret $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mathbb{P})$ où \mathbb{P} est l'unique probabilité sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ vérifiant :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(\{k\}) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

La probabilité \mathbb{P} est appelée probabilité de Poisson de paramètre λ . Elle est noté $\mathcal{P}(\lambda)$.

Probabilité conditionnelle : Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

Soit $(A, B) \in \mathcal{A}^2$ tel que $\mathbb{P}(B) > 0$. Le réel $\frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$ est appelé probabilité de A sachant B et est noté $\mathbb{P}(A | B)$ ou encore $\mathbb{P}_B(A)$.

Deux évènements A et B sont dits **indépendants** pour la probabilité \mathbb{P} si et seulement si :

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$$

Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille d'évènements indexée par un ensemble I .

- Les évènements $A_i, i \in I$ sont dits **deux à deux indépendants** pour \mathbb{P} si et seulement si :
 $\forall (k, l) \in I^2$ tel que $k \neq l$, les évènements A_k et A_l sont indépendants pour \mathbb{P} .
- Les évènements $A_i, i \in I$ sont dits **indépendants** pour \mathbb{P} si et seulement si :

$$\forall J \in \mathcal{P}_f(I) \text{ on a l'égalité } \mathbb{P}\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) = \prod_{j \in J} \mathbb{P}(A_j).$$

5.2 Variables aléatoires discrètes

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et E un ensemble.

Une **variable aléatoires discrète** (VAD) sur (Ω, \mathcal{A}) à valeurs dans E est une application $X : \Omega \rightarrow E$ qui vérifie les propriétés :

1. $X(\Omega)$ est fini ou dénombrable.
2. $\forall A \in \mathcal{P}(E), X^{-1}(A) \in \mathcal{A}$.

L'ensemble des VAD sur (Ω, \mathcal{A}) à valeurs dans E est noté $V_E(\Omega, \mathcal{A})$.

Soit X une VAD sur (Ω, \mathcal{A}) à valeurs dans E , $A \in \mathcal{P}(E)$ et $x \in E$.

L'ensemble $X^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in A\}$ est noté $(X \in A)$ ou encore $\{X \in A\}$.

L'ensemble $X^{-1}(\{x\}) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x\}$ est noté $(X = x)$ ou encore $\{X = x\}$.

Si de plus X est à valeurs réelles alors $x \in \mathbb{R}$ et on note :

L'ensemble $X^{-1}(]-\infty, x]) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq x\}$ est noté $(X \leq x)$ ou encore $\{X \leq x\}$.

L'ensemble $X^{-1}(]-\infty, x[) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) < x\}$ est noté $(X < x)$ ou encore $\{X < x\}$.

L'ensemble $X^{-1}([x, +\infty]) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \geq x\}$ est noté $(X \geq x)$ ou encore $\{X \geq x\}$.

L'ensemble $X^{-1}(]x, +\infty[) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) > x\}$ est noté $(X > x)$ ou encore $\{X > x\}$.

Un **vecteur aléatoire discret** X sur (Ω, \mathcal{A}) est une VAD sur (Ω, \mathcal{A}) de la forme $X = (X_1, \dots, X_p)$ où pour $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, X_k est une VAD sur (Ω, \mathcal{A}) à valeurs dans un ensemble E_k . La VAD X_k est appelée **k^{ième} marginale** du vecteur aléatoire X .

Soient $X : \Omega \rightarrow E$ et $Y : \Omega \rightarrow F$ des VAD sur (Ω, \mathcal{A}) .

On dit que X et Y sont **indépendantes** pour \mathbb{P} , et on note $X \perp Y$, si et seulement si :

$$\forall (A, B) \in \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(F), \quad \mathbb{P}\left((X \in A) \cap (Y \in B)\right) = \mathbb{P}(X \in A) \mathbb{P}(Y \in B).$$

Soient E_1, \dots, E_p des ensembles et $X_1 : \Omega \rightarrow E_1, \dots, X_p : \Omega \rightarrow E_p$ des VAD sur (Ω, \mathcal{A}) .

On dit que X_1, \dots, X_p sont **indépendantes** pour \mathbb{P} si et seulement si :

$$\forall (A_1, \dots, A_p) \in \mathcal{P}(E_1) \times \dots \times \mathcal{P}(E_p), \quad \forall J \in \mathcal{P}_f(\llbracket 1, p \rrbracket), \quad \mathbb{P}\left(\bigcap_{j \in J} (X_j \in A_j)\right) = \prod_{j \in J} \mathbb{P}(X_j \in A_j).$$

Théorème - définition : Soit $X : \Omega \rightarrow E$ une VAD sur (Ω, \mathcal{A}) à valeurs dans E .

$\mathbb{P}_X : \mathcal{P}(E) \rightarrow [0, 1]$ définie par : $\forall A \in \mathcal{P}(E), \quad \mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}(X^{-1}(A)) = \mathbb{P}(X \in A)$ est une probabilité sur $(E, \mathcal{P}(E))$.

La probabilité \mathbb{P}_X est appelée **loi de la VAD** X relativement à la probabilité \mathbb{P} .

Soient X et Y deux VAD à valeurs dans E et \mathbb{P} une probabilité sur $(E, \mathcal{P}(E))$. Pour exprimer que les variables aléatoires X et Y ont la même loi, c'est-à-dire que $\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_Y$, on note $X \sim_{\mathbb{P}} Y$ ou encore $X \sim Y$ si il n'y a pas d'ambiguïté sur \mathbb{P} .

Pour exprimer que la loi \mathbb{P}_X de X est égale à une probabilité \mathbb{P}_0 on note $X \hookrightarrow \mathbb{P}_0$.

Soient X, Y deux VAD sur (Ω, \mathcal{A}) à valeurs dans E et F respectivement.

- La loi $\mathbb{P}_{(X,Y)}$ du vecteur aléatoire (X,Y) est une probabilité sur $(E \times F, \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(F))$. Elle est appelée **loi conjointe** du vecteur aléatoire (X,Y) .
- La loi \mathbb{P}_X de la variable aléatoire X est une probabilité sur $(E, \mathcal{P}(E))$. Elle est appelée **première loi marginale** du vecteur aléatoire (X,Y) .
- La loi \mathbb{P}_Y de la variable aléatoire Y est une probabilité sur $(F, \mathcal{P}(F))$. Elle est appelée **seconde loi marginale** du vecteur aléatoire (X,Y) .

Une **variable aléatoire de Bernoulli** de paramètre $p \in [0,1]$ sur (Ω, \mathcal{A}) est une variable aléatoire discrète $X : \Omega \rightarrow \mathbb{N}$ à valeurs entières vérifiant :

$$* \mathbb{P}(X = 0) = 1 - p$$

$$* \mathbb{P}(X = 1) = p$$

Si $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$ est une VAD à valeurs positives alors l'**espérance** de X est l'élément $\mathbb{E}(X)$ de $[0, +\infty]$ défini par : $\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x \mathbb{P}(X = x)$.

Une VAD à valeurs complexes X est dite d'**espérance finie** si et seulement si la famille de nombres complexes $(x \mathbb{P}(X = x))_{x \in X(\Omega)}$ est sommable. L'ensemble des VAD à valeurs complexes qui sont d'espérance finie est noté $L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ou plus simplement L^1 .

Si $X \in L^1$ alors l'espérance de X est le nombre complexe $\mathbb{E}(X)$ défini par : $\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x \mathbb{P}(X = x)$.

Soient X un VAD à valeurs réelles et $p \in \mathbb{N}^*$. On dit que X admet un moment d'ordre p si et seulement si X^p est d'espérance finie.

Si tel est le cas alors le réel $\mathbb{E}(X^p) = \sum_{x \in X(\Omega)} x^p \mathbb{P}(X = x)$ est appelé **moment d'ordre p de X** .

L'ensemble des VAD à valeurs réelles qui admettent un moment d'ordre p est notée L^p .

La **covariance** de deux variables aléatoires²⁷ X et Y de L^2 est le réel $\text{cov}(X,Y)$ défini par :

$$\text{cov}(X,Y) = \mathbb{E}(C_X C_Y) \quad \text{où } C_X = X - \mathbb{E}(X) \text{ et } C_Y = Y - \mathbb{E}(Y).$$

²⁷Variables aléatoires réelles.

Soit $X \in L^2$.

La **variance** de X est le réel positif $\mathbb{V}(X)$ défini par $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(C_x^2)$ où $C_x = X - \mathbb{E}(X)$.

L'**écart-type** de type X est le réel positif $\sigma(X)$ défini par $\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)}$.

Soit $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une VAD réelle sur (Ω, \mathcal{A}) .

La variable aléatoire X est dite **centrée** si et seulement si $\mathbb{E}(X) = 0$.

La variable aléatoire X est dite **réduite** si et seulement si $\mathbb{V}(X) = 0$.

Soit $X : \Omega \rightarrow \mathbb{N}$ une VAD sur (Ω, \mathcal{A}) à valeurs dans \mathbb{N} . La **fonction génératrice** G_X de X est la somme de la série entière de la variable réelle $\sum \mathbb{P}(X = k)t^k$.

6 Algèbre linéaire

Soient $(K, +, \times)$ un corps et m, n, p des entiers naturels non nuls.

6.1 Calcul matriciel

Une **matrice de type n, p à coefficients dans K** est une famille $(a_{ij})_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket}$ d'éléments de K indexée par $\llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket$. L'ensemble des matrices de type n, p est noté $\mathcal{M}_{n,p}(K)$.

Soit $A = (a_{ij})_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket}$ une matrice de type n, p à coefficients dans K .

A est une famille d'éléments de K indexée par $\llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket$, c'est donc une application de $\llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket$ dans K qui à tout couple

$(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket$ associe le scalaire a_{ij} . Lorsqu'il n'y a pas de risque d'ambiguïté, on omet les indices et on note $A = (a_{ij})$. On représente la matrice A à l'aide d'un tableau rectangulaire comportant n lignes et p colonnes. i correspond à l'indice de ligne, j à l'indice de colonne.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{ip} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{np} \end{bmatrix}$$

Une **matrice ligne** (resp. **colonne**) est une matrice de type $1, p$ (resp. $n, 1$).

Une **matrice carrée** d'ordre n est une matrice de type n, n . L'ensemble $\mathcal{M}_{n,n}(K)$ est noté $\mathcal{M}_n(K)$.

Pour $(k, l) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket$ on note $E_{kl}^{(np)}$ la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(K)$ dont tous les éléments sont nuls sauf le $kl^{\text{ème}}$ qui lui vaut 1_K . On a donc : $E_{kl}^{(np)} = (\delta_{ik}\delta_{jl})_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket}$.

Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur la taille, $E_{kl}^{(np)}$ est simplement notée E_{kl} .

Soit $A = (a_{kl}) \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$ et $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket$.

Le **i^{ème} vecteur ligne** L_i de A est le vecteur de K^p défini par $L_i = (a_{i1}, \dots, a_{ip})$.

Le **j^{ème} vecteur colonne** C_j de A est le vecteur de K^n défini par $C_j = (a_{1j}, \dots, a_{nj})$.

La **i^{ème} matrice ligne** \mathcal{L}_i de A est la matrice ligne de type 1,p définie par $\mathcal{L}_i = [a_{i1} \ \dots \ a_{ip}]$.

La **j^{ème} matrice colonne** \mathcal{C}_j de A est la matrice colonne de type n,1 définie par $\mathcal{C}_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{bmatrix}$

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$. Une **matrice extraite** de A est une matrice obtenue à partir de A en supprimant des lignes et des colonnes de A.

Pour exprimer que B est une «matrice extraite de A» on dit aussi que «B est une sous-matrice de A».

Soient $A = (a_{ik}) \in \mathcal{M}_{n,m}(K)$ et $B = (b_{kj}) \in \mathcal{M}_{m,p}(K)$. Le **produit matriciel** AB de A par B est la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(K)$ définie par : $AB = (c_{ij})$ avec $c_{ij} = \sum_{k=1}^m a_{ik}b_{kj}$.

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$. La **transposée** A^T de A est la matrice de $\mathcal{M}_{p,n}(K)$ définie par : $A^T = (b_{kl})$ avec $b_{kl} = a_{lk}$.

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$.

- Le **noyau** $\ker A$ de A est la partie de $\mathcal{M}_{p,1}(K)$ définie par :

$$\ker A = \left\{ X \in \mathcal{M}_{p,1}(K) \mid AX = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(K)} \right\}$$

- L'**image** $\text{Im } A$ de A est la partie de $\mathcal{M}_{n,1}(K)$ définie par :

$$\text{Im } A = \left\{ Y \in \mathcal{M}_{n,1}(K), \exists X \in \mathcal{M}_{p,1}(K) \mid Y = AX \right\}$$

On dit que $A \in \mathcal{M}_n(K)$ est **inversible** si et seulement si il existe $B \in \mathcal{M}_n(K)$ telle que $AB = BA = I_n$ avec I_n la matrice identité d'ordre n.

On note $GL_n(K)$ l'ensemble des matrice inversibles de $\mathcal{M}_n(K)$.

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(K)$.

- On dit que A est **triangulaire supérieure** si et seulement si : $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, i > j \Rightarrow a_{ij} = 0_K$.

On note $T_n^s(K)$ l'ensemble des matrices triangulaires supérieures de $\mathcal{M}_n(K)$.

- On dit que A est **triangulaire inférieure** si et seulement si : $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, i < j \Rightarrow a_{ij} = 0_K$.

On note $T_n^i(K)$ l'ensemble des matrices triangulaires inférieures de $\mathcal{M}_n(K)$.

- On dit que A est **diagonale** si et seulement si : $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, i \neq j \Rightarrow a_{ij} = 0_K$.
Une telle matrice diagonale A est notée $A = \text{Diag}(a_{11}, \dots, a_{nn})$.
On note $D_n(K)$ l'ensemble des matrices diagonales de $\mathcal{M}_n(K)$.
- On dit que A est **symétrique** si et seulement si : $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, a_{ij} = a_{ji}$. (i.e. $A^T = A$)
On note $S_n(K)$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(K)$.
- On dit que A est **antisymétrique** si et seulement si : $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, a_{ij} = -a_{ji}$. (i.e. $A^T = -A$)
On note $A_n(K)$ l'ensemble des matrices antisymétriques de $\mathcal{M}_n(K)$.
- Lorsque $K = \mathbb{R}$. On dit que A est **orthogonale** si et seulement si : $A^T A = I_n$.
On note $O_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- Lorsque $K = \mathbb{R}$. On dit que A est **orthogonale positive** si et seulement si : $A \in O_n(\mathbb{R})$ et $\det A = 1$.
On note $SO_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales positives de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- On pose $SL_n(\mathbb{K}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid \det M = 1\}$.
Proposition : $(SL_n(\mathbb{K}), \times)$ est un groupe. Il est appelé **groupe spécial linéaire** d'ordre n .
- On dit que A est **nilpotente** si et seulement si : $\exists m \in \mathbb{N}^* \mid A^m = 0_n$
- **(HP)** Lorsque $K = \mathbb{R}$. On dit que A est **stochastique** si et seulement si :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, a_{ij} \geq 0 \quad \text{et} \quad \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \sum_{j=1}^n a_{ij} = 1$$

On note $ST_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices stochastiques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

À tout $\alpha \in \mathbb{K}^*$ et à tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ on associe la matrice $D_i(\alpha)$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ définie par :

$$D_i(\alpha) = I_n + (\alpha - 1)E_{ii} = \text{diag}(1, \dots, 1, \alpha, 1, \dots, 1).$$

On dit que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une **matrice élémentaire de dilatation** si et seulement si il existe $\alpha \in \mathbb{K}^*$ et $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tels que $A = D_i(\alpha)$.

À tout $\lambda \in \mathbb{K}$ et à tout couple $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ vérifiant $i \neq j$ on associe la matrice $T_{i,j}(\lambda)$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ définie par : $T_{i,j}(\lambda) = I_n + \lambda E_{ij}$.

On dit que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une **matrice élémentaire de transvection** si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ et $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ vérifiant $i \neq j$ tels que $A = T_{i,j}(\lambda)$.

Soient E, F deux espaces vectoriels de dimension finie avec $\dim E = p \geq 1, \dim F = n \geq 1$ et $u \in \mathcal{L}(E, F)$. On fixe une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ de E et une base $\mathcal{C} = (f_1, \dots, f_n)$ de F .

u est parfaitement déterminée par la donnée des p vecteurs $u(e_1), \dots, u(e_p)$.

Pour tout $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$, le vecteur $u(e_j)$ de F s'écrit de manière unique sur la base \mathcal{C} :

$$u(e_j) = \alpha_{1j}f_1 + \alpha_{2j}f_2 + \dots + \alpha_{nj}f_n = \sum_{i=1}^n \alpha_{ij}f_i \quad \text{avec} \quad \alpha_{ij} = f_i^*(u(e_j)).$$

Autrement dit : α_{ij} est la $i^{\text{ème}}$ coordonnée de $u(e_j)$ dans la base $\mathcal{C} = (f_1, \dots, f_n)$. L'application linéaire u est donc parfaitement déterminée par la donnée des np scalaires $(\alpha_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$.

La **matrice de l'application linéaire** u dans la base \mathcal{B} et \mathcal{C} est la matrice $M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u)$ de $\mathcal{M}_{n,p}(K)$ définie par : $M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u) = \left(f_i^*(u(e_j)) \right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$.

En particulier, on retiendra que la $j^{\text{ème}}$ colonne de $M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u)$ est constituée des coordonnées de $u(e_j)$ dans la base $\mathcal{C} = (f_1, \dots, f_n)$.

$$M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u) = \begin{array}{ccccc} & u(e_1) & & u(e_j) & & u(e_p) \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1j} & \cdots & \alpha_{1p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{i1} & \cdots & \alpha_{ij} & \cdots & \alpha_{ip} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{nj} & \cdots & \alpha_{np} \end{bmatrix} & \leftarrow \text{selon } f_1 \\ & & & & \leftarrow \text{selon } f_i \\ & & & & \leftarrow \text{selon } f_n \end{array}$$

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$. L'unique application linéaire $a : K^p \rightarrow K^n$ vérifiant $A = M_{\varepsilon,\varepsilon'}(a)$, où ε et ε' sont les bases canoniques respectives de K^p et K^n , est appelée **application linéaire canoniquement associée à la matrice A**.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$. L'unique endomorphisme $a \in \mathcal{L}(K^n)$ vérifiant $A = M_\varepsilon(a)$, où ε est la base canonique de K^n , est appelé **endomorphisme canoniquement associé à la matrice A**.

Le **rang de la matrice** $M \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$ est égal au rang de son système de vecteurs colonnes. Si $M = (\alpha_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$ et si C_1, \dots, C_p sont les vecteurs colonnes de M , alors on a par définition : $C_j = (\alpha_{1j}, \dots, \alpha_{nj}) \in K^n$ et $\text{rg } M = \text{rg}(C_1, \dots, C_p) = \dim \text{Vect}(C_1, \dots, C_p)$.

Soit E un K -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$. Fixons une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E et considérons p vecteurs a_1, \dots, a_p de E .

Chaque vecteur a_j s'écrit sous la forme : $a_j = \sum_{i=1}^n e_i^*(a_j) e_i$.

La matrice $M_{\mathcal{B}}(a_1, \dots, a_p)$ de la famille (a_1, \dots, a_p) dans la base \mathcal{B} est la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(K)$ définie par : $M_{\mathcal{B}}(a_1, \dots, a_p) = (e_i^*(a_j))_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$.

En particulier, on retiendra que la $j^{\text{ème}}$ colonne de $M_{\mathcal{B}}(a_1, \dots, a_p)$ est constituée des coordonnées dans la base \mathcal{B} du vecteur a_j .

Soit $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ une autre base de E .

La matrice $M_{\mathcal{B}}(e'_1, \dots, e'_n)$ est appelée **matrice de passage** de la base \mathcal{B} à la base \mathcal{B}' . Il s'agit de la matrice des coordonnées de la famille de vecteur (e'_1, \dots, e'_n) dans la base \mathcal{B} . On la note $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$.

Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$, E un K -espace vectoriel de dimension p , F un K -espace vectoriel de dimension n et $u \in \mathcal{L}(E, F)$. On dit que la matrice A **représente l'application** linéaire u si et seulement si il existe une base \mathcal{B} de E et une base \mathcal{C} de F telles que $A = M_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(u)$.

Soient $A \in \mathcal{M}_n(K)$, E un K -espace vectoriel de dimension n et $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que la matrice A **représente l'endomorphisme** u si et seulement si il existe une base \mathcal{B} de E telle que $A = M_{\mathcal{B}}(u)$.

Soient A et B dans $\mathcal{M}_{n,p}(K)$. On dit que A est **équivalente** à B si et seulement si il existe $P \in GL_p(K)$ et $Q \in GL_n(K)$ telles que $Q^{-1}AP = B$.

Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(K)$. On dit que A est **semblable** à B si et seulement si il existe $P \in GL_n(K)$ telle que $P^{-1}AP = B$.

(HP) Soit X un ensemble quelconque et $f : \mathcal{M}_n(K) \rightarrow X$ une application. On dit que f est **invariante par similitude** si et seulement si deux matrices semblables ont la même image par f . C'est-à-dire si et seulement si f vérifie : $\forall (A, P) \in \mathcal{M}_n(K) \times GL_n(K)$, $f(P^{-1}AP) = f(A)$. Dans un tel cas de figure, si E est un K -espace vectoriel de dimension n , alors on peut associer à f l'application $F : \mathcal{L}(E) \rightarrow X$ définie par $F(u) = f(M_{\mathcal{B}}(u))$ où \mathcal{B} est une base quelconque de E .

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(K)$. La **trace** $\text{tr}(A)$ de la matrice A est le scalaire défini par :

$$\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii} = a_{11} + \cdots + a_{nn}.$$

Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$.

- Soit $P = \sum_{k \in \mathbb{N}} \alpha_k X^k$ un polynôme de $K[X]$. La matrice carrée $P = \sum_{k \in \mathbb{N}} \alpha_k A^k$ est notée $P(A)$. Par définition on a donc : $P(A) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \alpha_k A^k$.
- On dit qu'un polynôme $P \in K[X]$ **annule la matrice A** si et seulement si $P(A) = 0_{\mathcal{M}_n(K)}$. Par définition on pose : $I_A = \{P \in K[X] \mid P(A) = 0\}$ ²⁸.
- Une matrice de la forme $P(A)$ avec $P \in K[X]$ est appelée un **polynôme de la matrice carrée A** . Par définition on pose : $K[A] = \{P(A), P \in K[X]\}$.

Théorème - définition : Ou bien $I_A = \{0_{K[X]}\}$, ou bien $I_A \neq \{0_{K[X]}\}$ et il existe un unique polynôme unitaire Π_A de $K[X]$ tel que $I_A = \Pi_A K[X]$. En cas d'existence, Π_A est appelé le **polynôme minimal** de A .

²⁸On l'appelle **idéal annulateur** de A .

Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$. La matrice A peut se «voir» comme un endomorphisme de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$:

$$\begin{aligned}\tilde{A} : \mathcal{M}_{n,1}(K) &\rightarrow \mathcal{M}_{n,1}(K) \\ X &\mapsto AX\end{aligned}$$

On a : $Im \tilde{A} = Im A$, $\ker \tilde{A} = \ker A$, $tr \tilde{A} = tr A$, $\det \tilde{A} = \det A$, $\chi_{\tilde{A}} = \chi_A$, \dots
Et $M_{\mathcal{B}}(\tilde{A}) = A$ avec $\mathcal{B} = (X_1, \dots, X_n)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(K)$,

i.e. pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $X_i = [\delta_{i1}, \dots, \delta_{in}]^T$ avec $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$, $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$. Si F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(K)$ on pose $A(F) = \{AX, X \in F\}$.
On dit que F est **stable** par A si et seulement si $A(F) \subset F$ c'est-à-dire ssi : $\forall X \in F, AX \in F$.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$.

On dit que $X \in \mathcal{M}_{n,1}(K)$ est un **vecteur propre** de A si et seulement si :

$$X \neq 0_{n,1} \text{ et } \exists \lambda \in K \mid AX = \lambda X.$$

On dit que $\lambda \in K$ est une **valeur propre** de A si et seulement si :

$$\exists X \in \mathcal{M}_{n,1}(K) \mid X \neq 0_{n,1} \text{ et } AX = \lambda X.$$

L'ensemble de toutes les valeurs propres de A est noté $sp A$ et est appelé **spectre** de A .

Soient L un sous-corps de $(K, +, \times)$ et $A \in \mathcal{M}_n(L)$.

Puisque $L \subset K$ on a $A \in \mathcal{M}_n(K)$. L'ensemble des valeurs propres de A considérée comme matrice à coefficients dans L est noté $sp_L A$. L'ensemble des valeurs propres de A considérée comme matrice à coefficients dans K est noté $sp_K A$.

Soient $A \in \mathcal{M}_n(K)$ et $\lambda \in sp A$.

L'ensemble $E_\lambda(A) = \ker(A - \lambda I_n)$ est appelé **sous-espace propre** associé à la valeur propre λ .
 $E_\lambda(A) = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(K), AX = \lambda X\}$ et $E_\lambda(A) \neq \{0_{n,1}\}$ car $\lambda \in sp A$.

Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(K)^2$.

- A est dite **diagonalisable** dans $\mathcal{M}_n(K)$ si et seulement si elle est semblable à une matrice diagonale, i.e. $\exists P \in GL_n(K), \exists D \in D_n(K) \mid P^{-1}AP = D$.
- A est dite **trigonalisable** dans $\mathcal{M}_n(K)$ si et seulement si elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure, i.e. $\exists P \in GL_n(K), \exists T \in T_n^s(K) \mid P^{-1}AP = T$.
- **(HP)** A et B sont dites **codiagonalisables** si et seulement si il existe $P \in GL_n(K)$ telle que les matrices $P^{-1}AP$ et $P^{-1}BP$ soient diagonales.

(HP) Le **rayon spectral** d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est le réel positif : $\rho(A) = \max_{\lambda \in sp A} |\lambda|$.

La notion de déterminant d'une matrice carrée a été abordé pour des matrices à coefficients dans un corps. Si l'anneau des polynômes $K[X]$ n'est pas un corps, le corps des fractions rationnelles $K(X)$ en est un et on peut donc appliquer la théorie des déterminants à des matrices carrées à coefficients dans $K(X)$. Si $M = (F_{ij})$ est une matrice carrée d'ordre n à coefficients dans $K(X)$, alors $\det M \in K(X)$.

Théorème - définition : Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$. La matrice $XI_n - A$ est une matrice carrée d'ordre n à coefficients dans le corps des fractions rationnelles $K(X)$. Son déterminant est un polynôme unitaire de degré n à coefficients dans K . Il est appelé **polyôme caractéristique** de A , et est noté χ_A . Et on a : $\chi_A = \det(XI_n - A) = X^n - \text{tr}(A)X^{n-1} + \dots + (-1)^n \det(A)$.

(HP) Théorème - définition : Soit $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1X + a_0$ un polynôme unitaire de degré $n \geq 1$ de $K[X]$.

On pose : $C_P = \begin{bmatrix} 0_K & \cdots & \cdots & 0_K & -a_0 \\ 1_K & \ddots & & \vdots & -a_1 \\ 0_K & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0_K & \vdots \\ 0_K & \cdots & 0_K & 1_K & -a_{n-1} \end{bmatrix}$

Le polynôme caractéristique de la matrice C_P est égal à P .

La matrice C_P est appelée **matrice compagnon** du polynôme P .

Soient $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$. On dit que A est **orthogonalement semblable** à B si et seulement si il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP = B$.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

La matrice A est dite **symétrique positive** si et seulement si A est symétrique et vérifie :

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad X^T A X \geq 0.$$

On note $S_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques positives de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

La matrice A est dite **symétrique définie positive** si et seulement si A est symétrique positive et vérifie : $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad (X^T A X = 0 \Rightarrow X = 0)$.

On note $S_n^{++}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques définies positives de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

6.2 Espaces vectoriels

Une **loi de composition externe** (abrégée en l.c.e.) sur un ensemble E à domaine d'opérateurs dans l'ensemble Λ est une application de $\Lambda \times E$ dans E (i.e. $\odot : \Lambda \times E \rightarrow E$).

Un **K-espace vectoriel** est un triplet (E, \star, \cdot) où E est un ensemble, \star une l.c.i. sur E et \cdot une l.c.e. sur E à domaine d'opérateurs dans K tel que :

1. $(E, +)$ est un groupe commutatif.
2. $\forall \alpha \in K, \forall (x, y) \in E^2, \alpha \cdot (x \star y) = \alpha \cdot x \star \alpha \cdot y.$
(la l.c.e est distributive par rapport à la l.c.i.)
3. $\forall (\alpha, \beta) \in K^2, \forall x \in E, (\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x \star \beta \cdot x.$
(la l.c.i est distributive par rapport à la l.c.e.)
4. $\forall (\alpha, \beta) \in K^2, \forall x \in E, (\alpha \times \beta) \cdot x = \alpha \cdot (\beta \cdot x).$
5. $\forall x \in E, 1_K \cdot x = x.$
(Avec 1_K le neutre de K pour la loi \times)

Les éléments de E sont appelés des **vecteurs** ou des **points**, ceux de K sont appelés des **scalaires**.

Considéré comme un point, un élément de E sera noté à l'aide des lettres majuscules A, B, \dots , considéré comme un vecteur, il sera noté à l'aide des symboles²⁹ \vec{x}, \vec{y}, \dots .

Le vecteur nul de E peut être noté 0_E ou $\vec{0}$.

Étant donnés deux points A et B de E , on pose $\overrightarrow{AB} = B - A$.

Lorsque A et B sont appelés *points*, alors \overrightarrow{AB} est appelé *vecteur*³⁰.

Soit E un K -espace vectoriel.

Étant donnés un point A de E et un sous-espace vectoriel F de E , on note $A + F$ la partie de E définie par $A + F = \{A + \vec{u}, \vec{u} \in F\}$.

On appelle **sous-espace affine** de E toute partie \mathcal{W} de E qui peut s'écrire sous la forme $\mathcal{W} = A + F$ où A est un point de E et F un sous-espace vectoriel de E .

Dans une telle écriture, le sous-espace vectoriel F est unique et est appelé **direction** du sous-espace affine \mathcal{W} .

Soit $(E, +, \cdot)$ un K -espace vectoriel.

- Soient x_1, \dots, x_p des vecteurs de E . Une **combinaison linéaire** de la famille (x_1, \dots, x_p) est un vecteur de E de la forme $\alpha_1 \cdot x_1 + \dots + \alpha_p \cdot x_p$, où $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ sont des scalaires.

On note $Kx_1 + \dots + Kx_p$ l'ensemble des combinaisons linéaires de (x_1, \dots, x_p) .

On dit qu'une partie A de E est **stable par combinaison linéaire** si et seulement si :

$$\forall (x, y) \in A^2, \forall (\alpha, \beta) \in K^2, \alpha \cdot x + \beta \cdot y \in A.$$

- On dit qu'une partie F de E est un **sous-espace vectoriel** de $(E, +, \cdot)$ si et seulement si F est non vide et stable par combinaison linéaire.

²⁹ Ou sans les flèches, comme ci-dessus.

³⁰ Alors que les deux objets sont de même nature.

- **Théorème** : Soit A une partie de E . L'intersection de tous les sous-espaces vectoriels de E qui contiennent A est un sous-espace vectoriel de E .
Il est noté $\text{Vect}(A)$ et est appelé **sous-espace de E engendré par A** .

- Soient E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels de E .
On pose : $E_1 + E_2 = \{x \in E, \exists x_1 \in E_1, \exists x_2 \in E_2 \mid x = x_1 + x_2\}$.
C'est la **somme** de E_1 avec E_2 .
On dit que la somme $E_1 + E_2$ est **directe** si et seulement si tout vecteur $x \in E_1 + E_2$ s'écrit de manière unique sous la forme $x_1 + x_2$ avec $x_1 \in E_1$ et $x_2 \in E_2$.
Pour exprimer que la somme $E_1 + E_2$ est directe on la note $E_1 \oplus E_2$.
- On dit que les sous-espaces vectoriels E_1 et E_2 sont **supplémentaires** dans E si et seulement si tout vecteur $x \in E$ s'écrit de manière unique sous la forme $x_1 + x_2$ avec $x_1 \in E_1$ et $x_2 \in E_2$.
Autrement dit : $E = E_1 \oplus E_2$.
Si F est un sous-espace vectoriel de E alors tout sous-espace vectoriel G de E vérifiant $E = F \oplus G$ est appelé **un supplémentaire** de F dans E .

Soient x_1, \dots, x_p des vecteurs de E .

- On dit que (x_1, \dots, x_p) est une famille **libre** si et seulement si :
 $\forall (\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in K^p$ on a : $\alpha_1 \cdot x_1 + \dots + \alpha_p \cdot x_p = 0_E \Rightarrow \forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, \alpha_i = 0_K$.
- On dit que (x_1, \dots, x_p) est une famille **génératrice** de E si et seulement si tout vecteur $x \in E$ peut s'écrire sous la forme : $x = \alpha_1 \cdot x_1 + \dots + \alpha_p \cdot x_p$ avec $(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in K^p$.
- On dit que (x_1, \dots, x_p) est une **base** de E si et seulement si tout vecteur $x \in E$ peut s'écrire de manière unique sous la forme : $x = \alpha_1 \cdot x_1 + \dots + \alpha_p \cdot x_p$ avec $(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in K^p$.
- On dit que (x_1, \dots, x_p) est une famille **liée** si et seulement si elle n'est pas libre.
Autrement dit : $\exists (\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in K^p \setminus \{0_{K^p}\}, \alpha_1 \cdot x_1 + \dots + \alpha_p \cdot x_p = 0_E$.

Un K -espace vectoriel est dit de **dimension finie** si et seulement si il possède une famille génératrice finie.

Théorème - définition : Dans tout K -espace vectoriel E de dimension finie il existe au moins une base, et toutes les bases de E ont le même nombre d'éléments.

Ce cardinal commun est appelé la **dimension** du K -espace vectoriel E , et est noté $\dim_K(E)$.
(ou simplement $\dim(E)$ lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté possible sur le corps K)

Un sous-espace affine \mathcal{W} de E est dit de **dimension finie** si et seulement si sa direction est de dimension finie. Dans ces conditions, la dimension du sous-espace affine est la dimension de sa direction.

Soit F un sous-espace vectoriel (resp. affine) de E .

- F est une **droite** vectorielle (resp. affine) de E si et seulement si $\dim_K F = 1$.
- F est un **plan** vectoriel (resp. affine) de E si et seulement si $\dim_K F = 2$.

Un **hyperplan de E** est un sous-espace vectoriel de E qui peut s'écrire comme le noyau d'une forme linéaire non nulle sur E .

Un **hyperplan affine de E** est un sous-espace affine de E dont la direction est un hyperplan de E .

Soit (a_1, \dots, a_n) une famille de vecteurs de E . Le **rang de la famille** (a_1, \dots, a_n) est définie par : $\text{rg}(a_1, \dots, a_n) = \dim \text{Vect}(a_1, \dots, a_n)$.

6.3 Applications linéaires

Soient $(E, +, \cdot)$, $(F, +, \cdot)$ et $(G, +, \cdot)$ trois K -espaces vectoriels.³¹

Une application $u : E \rightarrow F$ de E dans F est dite **linéaire** si et seulement si :

$$\forall (\alpha, \beta) \in K^2, \forall (x, y) \in E^2, \quad u(\alpha x + \beta y) = \alpha u(x) + \beta u(y).$$

On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F .

Soit $u : E \rightarrow F$ une application linéaire de E dans F . On définit les ensembles suivants :

Le **noyau** de u : $\ker u = \{x \in E \mid u(x) = 0_F\}$.

L'**image** de u : $\text{Im } u = \{y \in F, \exists x \in E \mid y = u(x)\}$.

Supposons que E est de dimension finie. Le **rang de l'application linéaire** $u \in \mathcal{L}(E, F)$ est définie par : $\text{rg}(u) = \dim(\text{Im } u)$.

Soit $u : E \rightarrow F$ une application linéaire de E dans F .

- Si u est bijective on dit que u est un **isomorphisme** de K -espaces vectoriels de E sur F .
On note $\text{Isom}(E, F)$ l'ensemble des isomorphismes de E sur F .
- Si $F = K$ alors on dit que u est une **forme linéaire** sur E .
On note E^* l'ensemble des formes linéaires sur E et on l'appelle **espace dual** de E .
- Si $E = F$ alors on dit que u est un **endomorphisme** du K -espace vectoriel E .
On note $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E .

³¹Les trois l.c.i. et l.c.e. sont notées avec les mêmes symboles, mais il n'y a en réalité aucune raison qu'elles soient identiques.

- Si $\underline{E=F}$ et u est bijective alors on dit que u est un **automorphisme** du K -espace vectoriel E .
On note $GL(E)$ l'ensemble des automorphismes de E .

On pose : $SL(E) = \{u \in \mathcal{L}(E) \mid \det u = 1\}$.

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E . Tout vecteur $x \in E$ s'écrit donc de manière unique sous la forme $x = y + z$ avec $y \in F$ et $z \in G$ (*par définition*).

L'application de E dans E qui à x associe y est appelée **projection sur F parallèlement à G** .

Elle est notée $p_{F,G}$.

On appelle **projecteur** de E tout endomorphisme p de E vérifiant³² $p \circ p = p$.

On suppose que $1_K + 1_K \neq 0_K$.

- Soient F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E .
L'application $s_{F,G} = 2p_{F,G} - id_E$ est appelée **symétrie par rapport à F parallèlement à G** .
- On appelle **symétrie de E** tout endomorphisme s de E vérifiant³³ $s \circ s = id_E$.

Théorème - définition : Soient E un K -espace vectoriel de dimension $n \geq 1$ et $u \in \mathcal{L}(E)$.

Si \mathcal{B} et \mathcal{B}' sont des bases de E alors $\text{tr}(M_{\mathcal{B}}(u)) = \text{tr}(M_{\mathcal{B}'}(u))$. Le scalaire $\text{tr}(M_{\mathcal{B}}(u))$ est donc indépendant de la base \mathcal{B} considérée. Il est noté $\text{tr}(u)$ et est appelé **trace de l'endomorphisme u** .

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

- Soit $P = \sum_{k \in \mathbb{N}} \alpha_k X^k$ un polynôme de $K[X]$. L'endomorphisme $\sum_{k \in \mathbb{N}} \alpha_k u^k$ est noté $P(u)$.

Par définition on a donc : $P(u) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \alpha_k u^k$.

- Un polynôme P de $K[X]$ **annule l'endomorphisme u** si et seulement si $P(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.
Par définition on pose : $I_u = \{P \in K[X] \mid P(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}\}$ ³⁴.
- Un **polynôme de l'endomorphisme u** est un endomorphisme de la forme $P(u)$ avec $P \in K[X]$.
Par définition on pose : $K[u] = \{P(u), P \in K[X]\}$.

Théorème - définition : Ou bien $I_u = \{0_{K[X]}\}$, ou bien $I_u \neq \{0_{K[X]}\}$ et il existe un unique polynôme unitaire Π_u de $K[X]$ tel que $I_u = \Pi_u K[X]$. En cas d'existence, Π_u est appelé le **polynôme minimal** de u .

³²Idempotence.

³³Involution.

³⁴On l'appelle **idéale annulateur** de u .

Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et F un sous-espace vectoriel de E .
On dit que F est **stable** par u si et seulement si $u(F) \subset F$ c'est-à-dire ssi $\forall x \in F, u(x) \in F$.
Pour exprimer que F est stable par u on dit aussi que u **stabilise** F .

Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et F un sous-espace vectoriel de E stable par u .
On peut considérer l'application $u_F : F \rightarrow F$ définie par : $\forall x \in F, u_F(x) = u(x)$.
On vérifie que $u \in \mathcal{L}(F)$. u_F est appelé **endomorphisme de F induit par u** .

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.
On dit que $x \in E$ est un **vecteur propre** de u si et seulement si : $x \neq 0_E$ et $\exists \lambda \in K \mid u(x) = \lambda x$.
On dit que $\lambda \in K$ est une **valeur propre** de u si et seulement si : $\exists x \in E \mid x \neq 0_E$ et $u(x) = \lambda x$.
L'ensemble de toutes les valeurs propres de u est noté $sp u$ et est appelé **spectre** de u .

Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in sp u$.
L'ensemble $E_\lambda(u) = \ker(u - \lambda id_E)$ est appelé **sous-espace propre** associé à la valeur propre λ .
 $E_\lambda(u) = \{x \in E, u(x) = \lambda x\}$ et $E_\lambda(u) \neq \{0_E\}$ car $\lambda \in sp u$.

On suppose E de dimension finie $n \geq 1$. Soit $(u, v) \in \mathcal{L}(E)^2$.

- L'endomorphisme u est dit **diagonalisable** si et seulement si il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est diagonale. Toute base \mathcal{B} de E dans laquelle la matrice de u est diagonale est appelée une **base de diagonalisation** de u .
- L'endomorphisme u est dit **trigonalisable** si et seulement si il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est triangulaire supérieure³⁵. Toute base \mathcal{B} de E dans laquelle la matrice de u est triangulaire supérieure est appelée une **base de trigonalisation** de u .
- L'endomorphisme u est dit **nilpotent** si et seulement si : $\exists m \in \mathbb{N}^* \mid u^m = 0_{\mathcal{L}(E)}$.
- **(HP)** Les endomorphismes u et v sont dits **codiagonalisables** si et seulement si il existe une base de E dans laquelle les matrices de u et de v sont diagonales.

Théorème - définition : On suppose E de dimension finie égale à $n \geq 1$. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.
Si \mathcal{B} et \mathcal{B}' sont deux bases de E , alors $\chi_{M_{\mathcal{B}}(u)} = \chi_{M_{\mathcal{B}'}(u)}$. Le polynôme $\chi_{M_{\mathcal{B}}(u)}$ est donc indépendant de la base \mathcal{B} considérée. Il est noté χ_u et est appelé **polynôme caractéristique** de u .
Et on a : $\chi_u = X^n - \text{tr}(u) X^{n-1} + \dots + (-1)^n \det(u)$.

³⁵Si il existe une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E dans laquelle la matrice de u est triangulaire inférieure alors u est trigonalisable car la matrice de u dans la base «inversée» $\mathcal{B}' = (e_n, \dots, e_1)$ est triangulaire supérieure.

On suppose que χ_u est scindé sur K . Le polynôme χ_u peut donc s'écrire sous la forme :
 $\chi_u = (X - \lambda_1)^{\alpha_1} \cdots (X - \lambda_r)^{\alpha_r}$ où $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ sont dans \mathbb{N}^* et où $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ sont des scalaires deux à deux distincts.

Pour $k \in \llbracket 1, r \rrbracket$ on pose³⁶ : $V_k = \ker(u - \lambda_k \text{id}_E)^{\alpha_k}$.

V_k est appelé **sous-espace caractéristique** de u associé à la valeur propre λ_k .

6.4 Théorie des déterminants

Soit $(E, +, \cdot)$ un K -espace vectoriel.

Soit p un entier supérieur ou égal à deux.

Une **forme p-linéaire** sur E est une application $\varphi : E^p \rightarrow K$ vérifiant :

$$\forall j \in \llbracket 1, p \rrbracket, \forall (a_1, \dots, a_{j-1}, a_{j+1}, \dots, a_p) \in E^{p-1}, (x \mapsto \varphi(a_1, \dots, a_{j-1}, x, a_{j+1}, \dots, a_p)) \in E^*.$$

Une forme p -linéaire $\varphi : E^p \rightarrow K$ est dite **alternée** si et seulement si :

$$\varphi(x_1, \dots, x_p) = 0_K \text{ pour tout } p\text{-uplet } (x_1, \dots, x_p) \text{ de } E^p \text{ dont au moins deux vecteurs sont égaux.}$$

Ou, de manière équivalente, φ est dite alternée si et seulement si :

$$\forall (x_1, \dots, x_p) \in E^p, \left(\varphi(x_1, \dots, x_p) = 0_K \Leftrightarrow \text{la famille } (x_1, \dots, x_p) \text{ est liée} \right).$$

Soit E un K -espace vectoriel de dimension $n \geq 1$.

On note $\Lambda_n(E)$ l'ensemble des formes n -linéaires alternées sur E .

Théorème - définition : Fixons une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E .

- Il existe une unique forme n -linéaire alternée φ telle que $\varphi(e_1, \dots, e_n) = 1_K$.
Elle est appelée **déterminant dans la base \mathcal{B}** et est notée $\det_{\mathcal{B}}$.
- $\Lambda_n(E)$ est une droite vectorielle et $\{\det_{\mathcal{B}}\}$ est une base de $\Lambda_n(E)$.

Si \mathcal{B} est une base de E et si $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$, alors le scalaire $\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n)$ est appelé **déterminant de la famille** de vecteurs (x_1, \dots, x_n) dans la base \mathcal{B} .

³⁶ $V_k = \ker(P_k(u))$ avec $P_k(u) = (u - \lambda_k \text{id}_E)^{\alpha_k}$.

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$.

Orienter E c'est choisir une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E et «décréter» qu'elle est **directe**.

À partir de là, si $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ est une autre base de E , alors³⁷ $\det_{\mathcal{B}}(e'_1, \dots, e'_n) \neq 0$.

Il n'y a que deux possibilités : $\begin{cases} \text{Si } \det_{\mathcal{B}}(e'_1, \dots, e'_n) > 0, & \text{on dit que la base } \mathcal{B}' \text{ est } \mathbf{directe}. \\ \text{Si } \det_{\mathcal{B}}(e'_1, \dots, e'_n) < 0, & \text{on dit que la base } \mathcal{B}' \text{ est } \mathbf{indirecte}. \end{cases}$

Théorème - définition : Soient E un K -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ et $u \in \mathcal{L}(E)$.

Si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ sont deux bases de E , alors :

$$\det_{\mathcal{B}}(u(e_1), \dots, u(e_n)) = \det_{\mathcal{B}'}(u(e'_1), \dots, u(e'_n))$$

Le scalaire $\det_{\mathcal{B}}(u(e_1), \dots, u(e_n))$ est indépendant de la base \mathcal{B} considérée et ne dépend que de u .

Il est noté $\det u$ et est appelé **déterminant de l'endomorphisme** u .

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(K)$. Le **déterminant de la matrice** A est le scalaire $\det A$ défini par : $\det A = \det_{\varepsilon}(C_1, \dots, C_n)$ où (C_1, \dots, C_n) est la famille des vecteurs colonnes de A et où ε est la base canonique de K^n .

Proposition : $\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{i\sigma(i)} = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^n a_{\sigma(j)j}.$

Soit $M = (\alpha_{ij}) \in \mathcal{M}_n(K)$ avec $n \geq 2$.

On note M_{ij} la matrice carrée d'ordre $n - 1$ déduite de M en supprimant la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne de M .

Le scalaire $A_{ij} = (-1)^{i+j} \det M_{ij}$ est appelé **cofacteur** de α_{ij} dans la matrice M .

$$M = \left[\begin{array}{ccc|c|ccc} \alpha_{1,1} & \cdots & \alpha_{1,j-1} & \alpha_{1,j} & \alpha_{1,j+1} & \cdots & \alpha_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{i-1,1} & \cdots & \alpha_{i-1,j-1} & \alpha_{i-1,j} & \alpha_{i-1,j+1} & \cdots & \alpha_{i-1,n} \\ \hline \alpha_{i,1} & \cdots & \alpha_{i,j-1} & \alpha_{i,j} & \alpha_{i,j+1} & \cdots & \alpha_{i,n} \\ \hline \alpha_{i+1,1} & \cdots & \alpha_{i+1,j-1} & \alpha_{i+1,j} & \alpha_{i+1,j+1} & \cdots & \alpha_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n,1} & \cdots & \alpha_{n,j-1} & \alpha_{n,j} & \alpha_{n,j+1} & \cdots & \alpha_{n,n} \end{array} \right] \quad M_{ij} = \left[\begin{array}{cccccc} \alpha_{1,1} & \cdots & \alpha_{1,j-1} & \alpha_{1,j+1} & \cdots & \alpha_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{i-1,1} & \cdots & \alpha_{i-1,j-1} & \alpha_{i-1,j+1} & \cdots & \alpha_{i-1,n} \\ \alpha_{i+1,1} & \cdots & \alpha_{i+1,j-1} & \alpha_{i+1,j+1} & \cdots & \alpha_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n,1} & \cdots & \alpha_{n,j-1} & \alpha_{n,j+1} & \cdots & \alpha_{n,n} \end{array} \right]$$

Soit $M = (\alpha_{ij})$ une matrice carrée d'ordre n avec $n \geq 2$. La **comatrice** de M est la matrice carrée $\text{com } M$ définie par : $\text{com } M = (A_{ij})$ avec A_{ij} le cofacteur de α_{ij} dans la matrice M .

³⁷ Cela découle du deuxième point du théorème ci-dessus.

7 Algèbre bilinéaire

Soit $(E, +, \times)$ un \mathbb{R} -espace vectoriel.

7.1 Espaces préhilbertiens

Une **forme bilinéaire** sur E est une application $\varphi : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ qui vérifie :
 $\varphi(x, \bullet)$ est linéaire pour tout $x \in E$ et $\varphi(\bullet, y)$ est linéaire pour tout $y \in E$.

Soit φ une forme bilinéaire sur E :

- φ est dite **symétrique** si et seulement si : $\forall (x, y) \in E^2, \varphi(x, y) = \varphi(y, x)$.
- φ est dite **positive** si et seulement si : $\forall x \in E, \varphi(x, x) \geq 0$.
- φ est dite **définie** si et seulement si : $\forall x \in E, (\varphi(x, x) = 0 \Rightarrow x = 0_E)$.

Un **produit scalaire** sur E est une forme bilinéaire symétrique, définie et positive.
 Un **semi-produit scalaire** sur E est une forme bilinéaire symétrique et positive.

Si $\langle \bullet | \bullet \rangle$ est un semi-produit scalaire sur E , alors pour tout vecteur $x \in E$ on pose : $\|x\| = \sqrt{\langle x | x \rangle}$.
 Le réel positif $\|x\|$ est appelé semi-norme du vecteur x .
 Lorsque $\langle \bullet | \bullet \rangle$ est un produit scalaire, ce même réel est appelé norme du vecteur x .
 On l'appelle (semi-)norme associée au (semi-)produit scalaire $\langle \bullet | \bullet \rangle$.

*Propositions*³⁸ : Exemples de produits scalaires.

★ Pour $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ on pose : $\langle x | y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$.
 $\langle \bullet | \bullet \rangle$ est un produit scalaire sur le \mathbb{R} -espace vectoriel \mathbb{R}^n .

★ Pour $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ on pose : $\langle A | B \rangle = \text{tr}(A^T B)$.
 $\langle \bullet | \bullet \rangle$ est un produit scalaire sur le \mathbb{R} -espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Si $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ alors $\langle A | B \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{ij}$ et $\|A\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^2}$.

• Pour $(P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2$ on pose : $\langle P | Q \rangle = \int_{-1}^1 \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt$.

$\langle \bullet | \bullet \rangle$ est un produit scalaire sur le \mathbb{R} -espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$.

³⁸Les produits scalaires indiqués par le symbole ★ sont considérés comme des produits scalaires **canoniques**.

★ Pour $(f, g) \in M^0([a, b], \mathbb{R})^2$ on pose : $\langle f | g \rangle = \int_a^b fg = \int_a^b f(t)g(t)dt$.

$\langle \bullet | \bullet \rangle$ est un semi-produit scalaire sur le \mathbb{R} -espace vectoriel $M^0([a, b], \mathbb{R})$.

$\langle \bullet | \bullet \rangle$ est un produit scalaire sur le \mathbb{R} -espace vectoriel $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$.

★ Pour $u = (u_n)$ et $v = (v_n)$ dans $\ell^2(\mathbb{R})$ on pose : $\langle u | v \rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n$.

$\langle \bullet | \bullet \rangle$ est un produit scalaire sur le \mathbb{R} -espace vectoriel $\ell^2(\mathbb{R})$.

Un **espace préhilbertien réel** est un couple $(E, \langle \bullet | \bullet \rangle)$ constitué d'un \mathbb{R} -espace vectoriel E et d'un produit scalaire $\langle \bullet | \bullet \rangle$ sur E .

Un **espace euclidien** est un espace préhilbertien réel de dimension finie.

Soit $(E, \langle \bullet | \bullet \rangle)$ un espace préhilbertien réel. On note $\| \cdot \|$ la norme associée au produit scalaire $\langle \bullet | \bullet \rangle$. $(E, \| \cdot \|)$ est un espace vectoriel normé.

- Deux vecteurs x et y de E sont dits **orthogonaux** si et seulement si $\langle x | y \rangle = 0$.
Pour exprimer cela, on note $x \perp y$.
- Une famille (x_1, \dots, x_p) de vecteurs de E est dite **orthogonale** si et seulement si les vecteurs x_1, \dots, x_p sont deux à deux orthogonaux.
- Une famille (x_1, \dots, x_p) de vecteurs de E est dite **orthonormale** si et seulement si elle est orthogonale et si $\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, \|x_i\| = 1$. Autrement dit : $\forall (i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2, \langle x_i | x_j \rangle = \delta_{ij}$.
- Soient A et B deux parties de E .
Les parties A et B sont dites **orthogonales** si et seulement si tout vecteur de A est orthogonal à tout vecteur de B . C'est-à-dire si et seulement si : $\forall a \in A, \forall b \in B, \langle a | b \rangle = 0$.
Pour exprimer cela, on note $A \perp B$.
L'**orthogonal de A** est l'ensemble des vecteurs de E qui sont orthogonaux à tous les vecteurs de A . C'est une partie de E que l'on note A^\perp . Ainsi : $A^\perp = \{x \in E \mid \forall a \in A, \langle x | a \rangle = 0\}$.
- Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E . Pour exprimer que $E = F \oplus G$ et que $F \perp G$, on note $E = F \overset{\perp}{\oplus} G$ et on dit que E est **somme directe orthogonale** de F et G .

On appelle **projecteur orthogonal** de E tout projecteur p de E qui vérifie : $\text{Im } p \perp \text{Ker } p$.

On appelle **symétrie orthogonale** de E toute symétrie s de E qui vérifie : $\text{Ker}(s - \text{id}_E) \perp \text{Ker}(s + \text{id}_E)$

Une suite (e_k) de vecteurs de E est dite **totale** si et seulement si pour tout vecteur $x \in E$, il existe une suite (α_k) de réels telle que $x = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \alpha_k e_k$.

Autrement dit, si et seulement si $\forall x \in E, \exists (\alpha_k) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid x = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \alpha_k e_k$.

Un vecteur de norme égale à 1 est dit **unitaire**.

7.2 Espaces euclidiens

Soit $(E, \langle \bullet | \bullet \rangle)$ un espace euclidien de dimension $n \geq 1$.

On note $\| \cdot \|$ la norme associée au produit scalaire.

On dit que \mathcal{B} est une **base orthogonale**³⁹ (resp. **base orthonormale**⁴⁰) de E si et seulement si la famille \mathcal{B} est orthogonale (resp. orthonormale) et c'est une base de E .

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . La matrice $G_{\mathcal{B}}(\langle e_i | e_j \rangle)$ est appelée matrice dans la base \mathcal{B} du produit scalaire $\langle \bullet | \bullet \rangle$, ou **matrice de Gram**.

On suppose que E est orienté. Soit x_1, \dots, x_n des vecteurs de E . On appelle **produit mixte** des n vecteurs x_1, \dots, x_n le réel $[x_1, \dots, x_n]$ défini par :

$[x_1, \dots, x_n] = \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n)$ où \mathcal{B} est une base orthonormale directe quelconque de E .

(HP) Théorème - définition : On suppose que $\dim E = 3$. Soit $(x, y) \in E^2$.

Il existe un unique vecteur $v \in E$ vérifiant : $\forall z \in E, [x, y, z] = \langle v | z \rangle$

Cet unique vecteur v est appelé **produit vectoriel** de x et de y et est noté $x \wedge y$.

Par définition même on a donc : $\forall (x, y, z) \in E^3, [x, y, z] = \langle x \wedge y | z \rangle$

On suppose que E est orienté de dimension 2. Soit $(x, y) \in (E \setminus \{0_E\})^2$.

On appelle **mesure de l'angle orienté** des vecteurs x et y tout réel θ vérifiant : $e^{i\theta} = \frac{\langle x | y \rangle + i[x, y]}{\|x\| \cdot \|y\|}$

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

On dit que u est **autoadjoint** si et seulement si : $\forall (x, y) \in E^2, \langle x | u(y) \rangle = \langle u(x) | y \rangle$.

On note $S(E)$ l'ensemble des endomorphismes autoadjoints de E .

On dit que u est **autoadjoint positif** si et seulement si $u \in S(E)$ et $\forall x \in E, \langle x | u(x) \rangle \geq 0$.

On note $S^+(E)$ l'ensemble des endomorphismes autoadjoints positifs de E .

On dit que u est **autoadjoint défini positif** si et seulement si $u \in S^+(E)$

et $\forall x \in E, (\langle x | u(x) \rangle = 0 \Rightarrow x = 0_E)$.

On note $S^{++}(E)$ l'ensemble des endomorphismes autoadjoints définis positifs de E .

³⁹On écrit que \mathcal{B} est une BO (Base Orthogonale)

⁴⁰On écrit que \mathcal{B} est une BON (Base OrthoNormale)

Soit $f : E \rightarrow E$ une application.

On dit que f **conserve le produit scalaire** si et seulement si : $\forall (x, y) \in E^2, \langle f(x) | f(y) \rangle = \langle x | y \rangle$.

On dit que f **conserve la norme** si et seulement si : $\forall x \in E, \|f(x)\| = \|x\|$.

Une **isométrie vectorielle** de E est un endomorphisme de E qui conserve la norme.

Un **automorphisme orthogonal** de E est un automorphisme de E qui conserve le produit scalaire.

Une **rotation** est un automorphisme orthogonal de déterminant égal à 1.

Une **réflexion** de E est une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan de E .

On note $O(E)$ l'ensemble des automorphismes orthogonaux de E .

On note $SO(E)$ l'ensemble des rotations de E .

$$\text{Pour } \theta \in \mathbb{R} \text{ on pose : } R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \text{ et } S(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{bmatrix}$$

Théorème - définition : On suppose E est orienté de dimension 2.

Soit r une rotation de E . Il existe $\theta_0 \in \mathbb{R}$ tel que pour toute base orthonormale directe \mathcal{B} de E , $M_{\mathcal{B}}(r) = R(\theta_0)$. Si θ'_0 est un autre réel vérifiant $M_{\mathcal{B}}(r) = R(\theta'_0)$ pour toute base orthogonale directe de E , alors $\theta'_0 \in \theta_0 + 2\pi\mathbb{Z}$, i.e. $\theta'_0 \equiv \theta_0 [2\pi]$.

L'ensemble $\theta_0 + 2\pi\mathbb{Z}$ est appelé **ensemble des mesures de la rotation r** , et tout réel θ de cet ensemble est appelé une **mesure de la rotation r** .

Théorème - définition : On suppose que E est orienté de dimension 3.

Soit $r \in SO(E)$ telle que $r \neq id_E$.

- $D = \ker(r + id_E)$ est une droite vectorielle de E et r induit dans le plan euclidien D^\perp une rotation \tilde{r} distincte de id_{D^\perp} . On dit que r est une **rotation axiale** d'axe D .
- On choisit un vecteur unitaire k de D et on oriente l'axe D de la rotation r en décrétant que (k) est une base directe de D . On considère une base orthonormale (i, j) de D^\perp telle que $\mathcal{B} = (i, j, k)$ soit une base directe de E et on oriente le plan vectoriel D^\perp en décrétant que (i, j) est une base directe du plan euclidien D^\perp .

$$\text{Si } \theta \text{ est une mesure de la rotation } \tilde{r} \text{ alors on a : } M_{\mathcal{B}}(r) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ et } \text{tr } r = 1 + \cos \theta.$$

Théorème - définition : Si $u \in \mathcal{L}(E)$ alors il existe un unique endomorphisme u^* de E vérifiant :

$$\forall (x, y) \in E^2, \langle u(x) | y \rangle = \langle x | u^*(y) \rangle$$

On dit que u^* est l'**adjoint** de u .

8 Arithmétique

8.1 Dans $(\mathbb{Z}, +, \times)$

Un **nombre premier** est un entier naturel distinct de 1 dont les seuls diviseurs dans \mathbb{N} sont 1 et lui-même. On note \mathcal{P} l'ensemble des nombres premiers.

Soit $(a, b, c, n) \in \mathbb{Z}^4$.

- On dit que a **divise** b , et on note $a \mid b$, si et seulement si : $\exists q \in \mathbb{Z} \mid b = aq$.
- On dit que a est **congru** à b modulo n lorsque $n \mid a - b$.
Pour exprimer cela, on note $a \equiv b (n)$ ou $a \equiv_n b$ ou $a \equiv b [n]$.
- On note \mathcal{D}_a l'ensemble des **diviseurs** de a . On note $\mathcal{D}_{a,b}$ l'ensemble des diviseurs communs à a et b , on a donc $\mathcal{D}_{a,b} = \mathcal{D}_a \cap \mathcal{D}_b$, cet ensemble contient toujours ± 1 . i.e. $\mathcal{D}_a = \{c \in \mathbb{Z}, c \mid a\}$
- On dit que a et b sont **premiers entre eux** lorsque le seul diviseur commun positif est 1, i.e. $\mathcal{D}_{a,b} = \{\pm 1\}$.
- On suppose a et b non tous deux nuls, on appelle **pgcd** de a et de b le plus grand diviseur commun. On le note⁴¹ $\text{pgcd}(a, b)$ ou $a \wedge b$.
- On suppose a, b et c non tous nuls, on dira que ces trois nombres sont :
Premiers entre eux dans leur ensemble lorsque $\text{pgcd}(a, b, c) = 1$.
Premiers entre eux deux à deux lorsque $\text{pgcd}(a, b) = \text{pgcd}(b, c) = \text{pgcd}(a, c) = 1$.
- On suppose a et b non nuls. On dit que $m \in \mathbb{N}^*$ est le **ppcm** de a et b lorsque $(a\mathbb{Z}) \cap (b\mathbb{Z}) = m\mathbb{Z}$. On le note⁴² $\text{ppcm}(a, b)$ ou $a \vee b$.

Soit $p \in \mathcal{P}$ un nombre premier. On lui associe l'application $v_p : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}$ définie de la façon suivante:

Supposons $n \geq 2$ et considérons la décomposition $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}$ de n en nombres premiers.

Si il existe $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$ tel que $p = p_i$ alors on pose $v_p(n) = \alpha_i$,

et si $p \notin \{p_1, \dots, p_r\}$ alors on pose $v_p(n) = 0$.

On pose enfin $v_p(1) = 0$.

L'application v_p ainsi définie est appelée **valuation p-adique**.

(La définition s'étend à \mathbb{Z} en posant $v_p(-n) = v_p(n)$ et $v_p(0) = +\infty$.)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\varphi(n)$ le nombre d'entiers naturels compris entre 0 et $n - 1$ qui sont premiers avec n .

On a donc : $\varphi(n) = \left| \{k \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket \mid k \wedge n = 1\} \right|$

⁴¹En anglais on le note gcd pour *Greatest Common Divisor*.

⁴²En anglais on le note lcm pour *Least Common Multiple*.

L'application $\varphi : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}$ ainsi définie est appelée **indicatrice d'Euler**.

8.2 Dans $(\mathbb{K}[X], +, \times)$

Soit K un sous-corps de $(\mathbb{C}, +, \times)$.

Soit $(A, B, C, P) \in K[X]^4$.

- On dit que A **divise** B , et on note $A \mid B$, si et seulement si il existe $Q \in K[X]$ tel que $B = AQ$.
- On dit que A est **congru** à B modulo P lorsque $P \mid A - B$. On le note $A \equiv B \pmod{P}$.
- On note \mathcal{D}_A l'ensemble des **diviseurs** de A , cet ensemble contient toujours $K_0[X]$.
On note $\mathcal{D}_{A,B} = \mathcal{D}_A \cap \mathcal{D}_B$ l'ensemble des **diviseurs communs** à A et B .
- On dit que A et B sont **premiers entre eux** lorsque le seul diviseur commun unitaire est $1_{K[X]}$, i.e. $\mathcal{D}_{A,B} = K_0[X]$.
- On suppose A et B non tous deux nuls, le **pgcd** de A et de B est le plus grand diviseur commun unitaire. On le note $\text{pgcd}(A, B)$ ou $A \wedge B$.
- On suppose A, B et C non tous nuls, on dira que ces trois polynômes sont :
Premiers entre eux dans leur ensemble lorsque $\text{pgcd}(A, B, C) = 1_{K[X]}$
Premiers entre eux deux à deux lorsque $\text{pgcd}(A, B) = \text{pgcd}(B, C) = \text{pgcd}(A, C) = 1_{K[X]}$.
- On suppose A et B non nuls.
Soit $M \in K[X]$ unitaire, on dit que M est le **ppcm** de A et B lorsque $AK[X] \cap BK[X] = MK[X]$.
On le note $\text{ppcm}(A, B)$ ou $A \vee B$.
- On dit que A et B sont **associés** si et seulement si $P \mid Q$ et $Q \mid P$
- P est dit **irréductible** sur K si et seulement si P est non constant et ses seuls diviseurs unitaires sont $1_{K[X]}$ et \tilde{P} (P normalisé).
L'ensemble des éléments irréductibles normalisés de $K[X]$ est noté $\mathcal{I}_{K[X]}$.

Soit $P \in \mathcal{I}_{K[X]}$ un polynôme irréductible sur K . On lui associe l'application $v_P : K[X] \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{N}$ définie de la façon suivante:

Supposons $Q \in K[X]$ non nul et considérons la décomposition $Q = P_1^{\alpha_1} \cdots P_r^{\alpha_r}$ de Q en irréductibles de $K[X]$.

Si il existe $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$ tel que $P = P_i$ alors on pose $v_P(Q) = \alpha_i$,

et si $P \notin \{P_1, \dots, P_r\}$ alors on pose $v_P(Q) = 0$.

On pose enfin $v_P(1_{K[X]}) = 0$.

L'application v_P ainsi définie est appelée **valuation P-adique**.

La définition s'étend à $K[X]$ en posant $v_P(0_{K[X]}) = +\infty$.

8.3 Dans $(A, +, \times)$

Soit $(A, +, \times)$ un anneau intègre.

Soit $(a, b) \in A^2$.

On dit que a **divise** b dans A , et on note $a \mid b$, si et seulement si : $\exists q \in A \mid b = aq$.

On dit que a et b sont **associés** dans A si et seulement si : $a \mid b$ et $b \mid a$.

Soit $(a, b) \in A^2$.

On appelle plus grand commun diviseur (**pgcd**) de a et b tout élément $d \in A$ vérifiant :

$$d \mid a \text{ et } d \mid b \text{ et } \forall \delta \in A, (\delta \mid a \text{ et } \delta \mid b) \Rightarrow \delta \mid d.$$

On appelle plus petit commun multiple (**ppcm**) de a et de b tout élément $m \in A$ vérifiant :

$$a \mid m \text{ et } b \mid m \text{ et } \forall \mu \in A, (a \mid \mu \text{ et } b \mid \mu) \Rightarrow m \mid \mu.$$

Soit $(a_1, \dots, a_n) \in A^n$.

On appelle plus grand commun diviseur (**pgcd**) de a_1, \dots, a_n tout élément $d \in A$ vérifiant :

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, d \mid a_k \text{ et } \forall \delta \in A, (\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \delta \mid a_k) \Rightarrow \delta \mid d.$$

On appelle plus petit commun multiple (**ppcm**) de a_1, \dots, a_n tout élément $m \in A$ vérifiant :

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, a_k \mid m \text{ et } \forall \mu \in A, (\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, a_k \mid \mu) \Rightarrow m \mid \mu.$$

Deux éléments a et b de A sont dits **premiers entre eux** si et seulement si 1_A est un pgcd de a et b .

Un élément $p \in A$ est dit **irréductible** si et seulement si p est non nul, non inversible et si les seuls diviseurs de p dans A sont les inversibles et les associés de p .

9 Topologie

Soit $(E, +, \cdot)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel.

9.1 Notion de norme

On appelle **norme** sur E toute application $N : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ telle que :

- (i). $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, N(\lambda x) = |\lambda|N(x)$. (*Homogénéité*)
- (ii). $\forall (x, y) \in E^2, N(x + y) \leq N(x) + N(y)$ (*Sous-additivité*)
- (iii). $\forall x \in E, N(x) = 0 \Rightarrow x = 0_E$ (*Séparation*)

Toute application de E dans \mathbb{R}_+ vérifiant (i). (*l'homogénéité*) et (ii). (*la sous-additivité*) mais pas (iii). (*la séparation*) est appelée **semi-norme** sur E .

Un **espace vectoriel normé** est un couple (E, N) où E est un \mathbb{K} -ev⁴³ et N une norme sur E .

Soit $\| \cdot \|$ une norme sur E . Pour $(x, y) \in E^2$ on pose : $d(x, y) = \|y - x\|$.
Le réel positif $d(x, y)$ est appelé la **distance** de x à y (qui dépend de la norme considérée).

Étant donné un vecteur $x \in E$ et une partie non vide A de E , le réel $d(x, A) = \inf_{a \in A} d(x, a)$ est appelé **distance** du vecteur x à la partie A .

La notion de **distance** peut se définir sur un ensemble quelconque.
Si X est un ensemble alors on appelle distance sur X toute application $d : X^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$ qui vérifie :

- 1. $\forall (x, y) \in X^2, d(x, y) = d(y, x)$ (*Symétrie*)
- 2. $\forall (x, y, z) \in X^3, d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (*Inégalité triangulaire*)
- 3. $\forall (x, y) \in X^2, (d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y)$ (*Séparation*)

On dit que deux normes N_1 et N_2 sur E sont **équivalentes** si et seulement si :

$$\exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+^*, N_1 \leq \alpha N_2 \text{ et } N_2 \leq \beta N_1.$$

⁴³Contraction d'«espace vectoriel».

- Supposons que $\dim_K E < \infty$ et considérons $B = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E .

Pour $x = \sum_{i=1}^p \alpha_i e_i$ on pose : $N_{B,1}(x) = \sum_{i=1}^p |\alpha_i|$, $N_{B,2}(x) = \sqrt{\sum_{i=1}^p |\alpha_i|^2}$, $N_{B,\infty}(x) = \max_{1 \leq i \leq p} |\alpha_i|$.

Théorème : $N_{B,1}$, $N_{B,2}$ et $N_{B,\infty}$ sont des normes sur E .

- De manière analogue, pour $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ on pose :

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|, \quad \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}, \quad \|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|.$$

Théorème : $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont des normes sur \mathbb{K}^n .

- De manière analogue, pour $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on pose :

$$\|A\|_1 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p |a_{ij}|, \quad \|A\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p |a_{ij}|^2}, \quad \|A\|_\infty = \max_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} |a_{ij}|.$$

Théorème : $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont des normes sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

- De manière analogue, pour $P = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n X^n \in \mathbb{K}[X]$ on pose :

$$\|P\|_1 = \sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n|, \quad \|P\|_2 = \sqrt{\sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n|^2}, \quad \|P\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n|.$$

Théorème : $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont des normes sur $\mathbb{K}[X]$.

- De manière analogue, pour $u = (u_n) \in \ell^1(\mathbb{K})$, $v = (v_n) \in \ell^2(\mathbb{K})$ et $w = (w_n) \in \ell^\infty(\mathbb{K})$ on pose :

$$\|u\|_1 = \sum_{n=0}^{\infty} |u_n|, \quad \|v\|_2 = \sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} |v_n|^2}, \quad \|w\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |w_n|.$$

Théorème : $(\ell^1(\mathbb{K}), \|\cdot\|_1)$, $(\ell^2(\mathbb{K}), \|\cdot\|_2)$ et $(\ell^\infty(\mathbb{K}), \|\cdot\|_\infty)$ sont des espaces vectoriels normés.

- De manière analogue, pour $f \in M^0([a, b], \mathbb{K})$ on pose :

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f|, \quad \|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b |f|^2}, \quad \|f\|_\infty = \sup_{t \in [a, b]} |f(t)|.$$

Théorème : $\|\cdot\|_1$, et $\|\cdot\|_2$ sont des semi-normes sur $M^0([a, b], \mathbb{K})$, mais $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur $M^0([a, b], \mathbb{K})$. Toutes les trois sont des normes sur $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{K})$.

Sur $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{K})$, la norme $\|\cdot\|_1$ est appelée norme de la **convergence en moyenne**, $\|\cdot\|_2$ la norme de la **convergence en moyenne quadratique** et $\|\cdot\|_\infty$ la norme de la **convergence uniforme** ou **norme infini**.

Soient I un intervalle, A une partie de I et $f \in M^0(I, \mathbb{K})$. On note⁴⁴ : $\|f\|_\infty^A = \sup_{t \in A} |f(t)|$.

⁴⁴Comme I n'est pas un segment, on a $\|f\|_\infty^A \in \mathbb{R}^+$

Théorème - définition : Soient $(E_1, N_1), \dots, (E_p, N_p)$ des espaces vectoriels normés.

L'application $N : E_1 \times \dots \times E_p \rightarrow \mathbb{R}_+$ définie par $N(x_1, \dots, x_p) = \max(N_1(x_1), \dots, N_p(x_p))$ est une norme sur le \mathbb{K} -espace vectoriel $E_1 \times \dots \times E_p$. Elle est appelée **norme produit** des normes N_1, \dots, N_p .

L'espace vectoriel normé $(E_1 \times \dots \times E_p, N)$ est appelé **espace vectoriel normé produit** des espaces vectoriels normés $(E_1, N_1), \dots, (E_p, N_p)$.

(HP) – Les **normes d'algèbres**.

- Une norme N sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui vérifie $N(I_n) = 1$ et $N(AB) \leq N(A)N(B)$ pour tout couple (A, B) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ est appelée une norme d'algèbre sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
- On suppose E de dimension finie. Une norme N sur $\mathcal{L}(E)$ qui vérifie $N(id_E) = 1$ et $N(u \circ v) \leq N(u)N(v)$ pour tout $(u, v) \in \mathcal{L}(E)^2$ est appelée norme d'algèbre sur $\mathcal{L}(E)$.

Théorèmes - définitions : **Normes subordonnées** ou **normes d'opérateur**.

Soient $(E, \|\cdot\|_E), (F, \|\cdot\|_F)$ deux \mathbb{K} -espaces vectoriels normés, $\|\cdot\|_n$ une norme sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $\|\cdot\|_p$ une norme sur $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$.

- Pour⁴⁵ $u \in \mathcal{L}_c(E, F)$, on pose : $\|u\| = \sup_{\substack{x \in E \\ x \neq 0_E}} \frac{\|u(x)\|_F}{\|x\|_E}$ $\|\cdot\|$ est une norme sur $\mathcal{L}_c(E, F)$.
Elle est appelée norme subordonnée aux normes $\|\cdot\|_E$ et $\|\cdot\|_F$.
- Pour⁴⁶ $a \in \mathcal{L}_c(E)$, on pose : $\|a\| = \sup_{\substack{x \in E \\ x \neq 0_E}} \frac{\|a(x)\|_E}{\|x\|_E}$ $\|\cdot\|$ est une norme sur $\mathcal{L}_c(E)$.
Elle est appelée norme subordonnée à la norme $\|\cdot\|_E$.
- Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on pose : $\|A\| = \sup_{\substack{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ X \neq 0}} \frac{\|AX\|_n}{\|X\|_n}$ $\|\cdot\|$ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Elle est appelée norme subordonnée à la norme $\|\cdot\|_n$.
- Pour $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on pose : $\|M\| = \sup_{\substack{X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \\ X \neq 0}} \frac{\|MX\|_n}{\|X\|_p}$ $\|\cdot\|$ est une norme sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
Elle est appelée norme subordonnée aux normes $\|\cdot\|_n$ et $\|\cdot\|_p$.

⁴⁵ $\mathcal{L}_c(E, F)$ désigne l'ensemble des applications linéaires continues de E dans F .

⁴⁶ $\mathcal{L}_c(E)$ désigne l'ensemble des endomorphisme continues de E .

9.2 Suites et séries dans un e.v.n.

Soit $(E, \| \cdot \|)$ un espace vectoriel normé.

Soient $(x_n) \in E^{\mathbb{N}}$ et $a \in E$.

On dit que (x_n) **tend vers** a dans $(E, \| \cdot \|)$ si et seulement si : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|x_n - a\| = 0$.

La suite (x_n) est dite **convergente** dans $(E, \| \cdot \|)$ si et seulement si il existe un vecteur de E vers lequel (x_n) tend.

Elle est dite **divergente** dans $(E, \| \cdot \|)$ si et seulement si elle n'est pas convergente dans $(E, \| \cdot \|)$.

On dit que a est une **valeur d'adhérence** de (x_n) dans $(E, \| \cdot \|)$ si et seulement si il existe une suite extraite $(x_{\varphi(n)})$ de (x_n) qui converge dans $(E, \| \cdot \|)$ vers a .

Ou, de manière équivalente : $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \|x_{n_0} - a\| \leq \varepsilon$.

La suite (x_n) est dite **bornée** sur $(E, \| \cdot \|)$ si et seulement si la suite $(\|x_n\|)$ est majorée.

Soit $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose : $U_n = \sum_{k=0}^n u_k$.

La suite (U_n) est appelée **série de terme général** u_n et est notée $\sum u_n$.

Dire que la série $\sum u_n$ est **convergente** (resp. **divergente**) dans $(E, \| \cdot \|)$ c'est donc dire que la suite (U_n) est convergente (resp. divergente) dans $(E, \| \cdot \|)$.

Le vecteur U_n est appelé **somme partielle d'ordre n** de la série $\sum u_n$.

En cas de convergence de la série $\sum u_n$, le vecteur $\lim_{N \rightarrow +\infty} U_N$ est noté $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ et est appelé **somme de la série** $\sum u_n$.

On dit que la série $\sum u_n$ est **absolument convergente** dans $(E, \| \cdot \|)$ si et seulement si la série $\sum \|u_n\|$ est convergente.

On dit que la série $\sum u_n$ est **semi-convergente** dans $(E, \| \cdot \|)$ si et seulement si $\sum u_n$ est convergente et non absolument convergente dans $(E, \| \cdot \|)$.

En cas de convergence de la série $\sum u_n$, on appelle **reste d'ordre n** de la série $\sum u_n$ le vecteur noté

R_n défini par : $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$.

Théorème - définition : $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, la série $\sum \frac{A^k}{k!}$ est absolument convergente⁴⁷

La matrice $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}$ est appelée **exponentielle de A** et est notée $\exp(A)$ ou encore e^A .

Théorème - définition : Supposons que $\dim E < +\infty$. $\forall a \in L(E)$ la série $\sum \frac{a^k}{k!}$ est absolument convergente⁴⁸.

L'endomorphisme $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a^k}{k!}$ est appelé **exponentielle de a** et est noté $\exp(a)$ ou encore e^a .

9.3 Topologie d'un e.v.n

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé.

Une partie A de E est dite **bornée** si et seulement si : $\exists M \in \mathbb{R}_+ \mid \forall x \in A, \|x\| \leq M$.

Étant donnés deux points x et y de E , on appelle **segment** d'extrémités x et y la partie de E notée $[x, y]$ définie par : $[x, y] = \{z \in E, \exists \lambda \in [0, 1] \mid z = (1 - \lambda)x + \lambda y\}$.⁴⁹

Soit A une partie de E .

On dit que A est **étoilée** si et seulement si : $\exists a \in A, \forall x \in A, [a, x] \subset A$.

On dit que A est **convexe** si et seulement si : $\forall (x, y) \in A^2, [x, y] \subset A$.

Soient $a \in E$ et $r > 0$.

- On appelle **boule ouverte** de centre a et de rayon r l'ensemble : $BO(a, r) = \{x \in E, \|x - a\| < r\}$
- On appelle **boule fermée** de centre a et de rayon r l'ensemble : $BF(a, r) = \{x \in E, \|x - a\| \leq r\}$
- On appelle **sphère** de centre a et de rayon r l'ensemble : $S(a, r) = \{x \in E, \|x - a\| = r\}$

Soient $a \in E$ et V une partie de E .

On dit que V est un **voisinage** de a dans $(E, \|\cdot\|)$ si et seulement si :

il existe $r > 0$ tel que $BF(a, r) \subset V$.

On note $\mathcal{V}_E(a)$ l'ensemble des voisinages de a dans $(E, \|\cdot\|)$.

⁴⁷On ne précise pas la norme ici car $\dim \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = n^2 < +\infty$, donc toutes les normes y sont équivalentes.

⁴⁸De même, comme $\dim E < +\infty$ alors $\dim \mathcal{L} < +\infty$ et toutes les normes sont équivalentes.

⁴⁹Défini ainsi, on a $[x, y] = [y, x]$.

On appelle **voisinage de $-\infty$** dans $\overline{\mathbb{R}}$ toute partie V de \mathbb{R} qui contient un intervalle de la forme $] -\infty, -P]$ avec $P > 0$.

On appelle **voisinage de $+\infty$** dans $\overline{\mathbb{R}}$ toute partie V de \mathbb{R} qui contient un intervalle de la forme $[P, +\infty[$ avec $P > 0$.

Étant donné $a \in \mathbb{R}$, on appelle **voisinage de a** dans $\overline{\mathbb{R}}$ toute partie V de \mathbb{R} qui contient un intervalle de la forme $[a - \varepsilon, a + \varepsilon]$ avec $\varepsilon > 0$.

On dit qu'une partie A de E est une partie **ouverte** de (E, \parallel) si et seulement si A est un voisinage de chacun de ses points, i.e. : $\forall a \in A, A \in \mathcal{V}_E(a)$.

Ou encore : $\forall a \in A, \exists r_a > 0 \mid BF(a, r_a) \subset A$.

On dit qu'une partie A de E est une partie **fermée** de (E, \parallel) si et seulement si A contient les limites de ses suites convergentes.

Soient $a \in E$ et A une partie de E . On dit que a est **adhérent à A** si et seulement si il existe une suite (a_n) d'éléments de A qui tend vers a .

On note \overline{A} l'ensemble des points adhérents à A . L'ensemble \overline{A} est appelée **adhérence** de A .

On a donc $a \in \overline{A} \Leftrightarrow \exists (a_n) \in A^{\mathbb{N}}, \lim a_n = a$.

Soient A une partie de \mathbb{R} et $a \in \overline{\mathbb{R}}$. On dit que a est **adhérent à A** dans $\overline{\mathbb{R}}$ si et seulement si il existe une suite (a_n) d'éléments de A qui tend vers a dans $\overline{\mathbb{R}}$.

L'ensemble des éléments de $\overline{\mathbb{R}}$ qui sont adhérents à A est noté $\overline{A}^{\overline{\mathbb{R}}}$ et est appelé **adhérence** de A dans $\overline{\mathbb{R}}$.

Une partie A de E est dite **dense** dans (E, \parallel) si et seulement si tout point de E est limite d'une suite d'éléments de A .

Si A et B sont des parties de E telles que $B \subset A$ alors on dit que B est **dense dans A** si et seulement si tout point de A est limite d'une suite d'éléments de B .

Soient $a \in E$ et A une partie de E .

On dit que a est un **point intérieur** à A si et seulement si $A \in \mathcal{V}_E(a)$.

L'ensemble des points de E qui sont intérieurs à A est appelé **intérieur de A** et est noté $\overset{\circ}{A}$.

La **frontière** d'une partie A de E est l'ensemble $\overline{A} \setminus \overset{\circ}{A}$. On le note $\text{Fr}(A)$ ou ∂A .

Soient A une partie de E et $a \in A$.

Toute partie de la forme $V \cap A$ avec $V \in \mathcal{V}_E(a)$ est appelée un **voisinage de a dans A** .

Toute partie de la forme $O \cap A$ avec O un ouvert de (E, \parallel) est appelée un **ouvert de A** .

Toute partie de la forme $F \cap A$ avec F un fermé de (E, \parallel) est appelée un **fermé de A** .

Une partie A de E est dite **compacte** dans (E, \parallel) si et seulement si de toute suite d'éléments de A on peut extraire une sous-suite qui converge vers un élément de A .

Un **arc** (ou **chemin**) de $(E, \|\cdot\|)$ est une application continue de $[0, 1]$ dans E .

Soit $\gamma : [0, 1] \rightarrow E$ un arc de $(E, \|\cdot\|)$. Les points $x = \gamma(0)$ et $y = \gamma(1)$ sont respectivement appelés **origine** et **but** de l'arc γ , et on dit que l'arc γ relie les points x et y .

L'ensemble $\gamma([0, 1]) = \{\gamma(t), t \in [0, 1]\}$ est appelé **support de l'arc** γ .

On dit qu'une partie A de E est une partie **connexe par arcs** de $(E, \|\cdot\|)$ si et seulement si pour tout $(x, y) \in A^2$, il existe une arc de E à support contenu dans A qui relie x à y .

i.e. $\forall (x, y) \in A^2, \exists \gamma : [0, 1] \xrightarrow{\mathcal{C}^0} E$ tel que $\gamma([0, 1]) \subset A$ et $\gamma(0) = x, \gamma(1) = y$.

Soient A une partie de E et $(a, b) \in A^2$.

On dit que **a est connecté à b** dans A , et on note⁵⁰ $a \sim_A b$, si et seulement si il existe un arc de E à support contenu dans A reliant a à b .

9.4 Fonctions de E dans F

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux \mathbb{K} -espaces vectoriels normés.

Soient $f : D \subset E \rightarrow F$ une application de D dans F , $A \subset D$, $a \in \overline{A}$ et $b \in F$.

On dit que f tend vers b en a suivant A si et seulement si pour toute suite (a_n) d'éléments de A qui tend vers a dans $(E, \|\cdot\|_E)$, la suite $(f(a_n))$ tend vers b dans $(F, \|\cdot\|_F)$.

On dit que f admet une limite dans F lorsque x tend vers a en appartenant à A si et seulement si il existe $b \in F$ tel que $f(x)$ tende vers b lorsque x tend vers a en appartenant à A .

Pour exprimer que f tend vers b en a suivant A on écrit : $\lim_{a, A} f = b$ ou $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in A}} f(x) = b$.

Lorsque $A = D$, $\lim_{a, A} f$ est noté $\lim_a f$.

Lorsque $A = D \setminus \{a\}$, $\lim_{a, A} f$ est noté $\lim_{a, \neq} f$.

Lorsque $(E, \|\cdot\|_E) = (\mathbb{R}, |\cdot|)$ et $A = D \cap]-\infty, a[$, $\lim_{a, A} f$ est noté $\lim_{a^-} f$.

Lorsque $(E, \|\cdot\|_E) = (\mathbb{R}, |\cdot|)$ et $A = D \cap]a, +\infty[$, $\lim_{a, A} f$ est noté $\lim_{a^+} f$.

On suppose $\dim F < +\infty$ et on considère une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de F .

Soit $f : D \subset E \rightarrow F$ une application de D dans F . Pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ on pose : $f_i = e_i^* \circ f$.

Si $x \in D$ alors $f_i(x)$ est la $i^{\text{ème}}$ coordonnée de $f(x)$ dans la base \mathcal{B} et on a donc $f(x) = \sum_{i=1}^n f_i(x) e_i$.

L'application f_i est appelée **$i^{\text{ème}}$ application coordonnée** de f sur \mathcal{B} .

⁵⁰On adopte cette notation car il s'agit d'une relation d'équivalence sur l'ensemble A .

Soient $(F_1, \| \cdot \|_{F_1}), \dots, (F_n, \| \cdot \|_{F_n})$ des espaces vectoriels normés et $f : D \subset E \rightarrow F_1 \times \dots \times F_n$.
 Pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ on note $\pi_i : F_1 \times \dots \times F_n \rightarrow F_i$ l'application définie par : $\pi_i(y_1, \dots, y_n) = y_i$.
 L'application $f_i = \pi_i \circ f$ est une application de E dans F_i et $\forall x \in E, f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$.
 On note $f = (f_1, \dots, f_n)$ et on dit que f_i est la **i^{ème} application composante** de l'application f .

Soit $D \subset E$ vérifiant : $\exists R > 0, E \setminus \text{BO}(0_E, R) \subset D$. Soient $f : D \subset E \rightarrow F$ et $b \in F$.
 On dit que $f(x)$ tend vers b lorsque $\|x\|_E$ tend vers $+\infty$ si et seulement si pour toute suite (a_n) d'éléments de D qui vérifie $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|a_n\|_E = +\infty$, la suite $(f(a_n))$ tend vers b dans $(F, \| \cdot \|_F)$.

Soient $f : D \subset E \rightarrow F$ une application de D dans F et $a \in D$.
 On dit que f est **continue au point a** si et seulement si pour toute suite (x_n) d'éléments de D qui tend vers a , la suite $(f(x_n))$ tend vers $f(a)$.
 Autrement dit : l'application f est continue au point a si et seulement si $\lim_a f = f(a)$.

Autrement dit : f est continue au point a si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in D, \|x - a\|_E \leq \alpha \Rightarrow \|f(x) - f(a)\|_F \leq \varepsilon$$

Soit $A \subset D$. On dit que f est **continue sur A** si et seulement si f est continue en tout point de A .
 On note $\mathcal{C}^0(D, F)$ l'ensemble des applications de D dans F qui sont continues sur D .

Autrement dit : f est continue sur A si et seulement si :

$$\forall y \in A, \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in D, \|x - y\|_E \leq \alpha \Rightarrow \|f(x) - f(y)\|_F \leq \varepsilon$$

(HP) Soient $A \subset E, B \subset F$ et $f : A \rightarrow B$ une application.
 On dit que f est un **homéomorphisme** de A sur B si et seulement si f vérifie :
 (1). f est une bijection de A sur B .
 (2). f est continue sur A et f^{-1} est continue sur B .

Soit $f : D \subset E \rightarrow F$ une application de D dans F .

On dit que f est **lipschitzienne**⁵¹ si et seulement si :

$$\exists k \in \mathbb{R}_+ \mid \forall (x, y) \in D^2, \|f(x) - f(y)\|_F \leq k \|x - y\|_E.$$

On dit que f est **contractante** si et seulement si :

$$\exists k \in [0, 1[\mid \forall (x, y) \in D^2, \|f(x) - f(y)\|_F \leq k \|x - y\|_E.$$

L'application $f : D \subset E \rightarrow F$ est dite **uniformément continue**⁵² si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall (x, y) \in D^2, \|x - y\|_E \leq \alpha \Rightarrow \|f(x) - f(y)\|_F \leq \varepsilon$$

⁵¹Si f vérifie cette relation, on dit aussi que f est **k-lipschitzienne**.

⁵²Si on compare cette définition avec celle de continuité sur A , on remarque que α est indépendant du y choisi.

9.5 Fonctions de \mathbb{R} dans F

Soient $(F, \|\cdot\|_F)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel normé de dimension finie, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a \leq b$ et I un intervalle de \mathbb{R} d'intérieur non vide.

On dit que $f : [a, b] \rightarrow F$ est **continue par morceaux sur le segment** $[a, b]$ si et seulement si il existe une subdivision $\sigma = (a_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ de $[a, b]$ telle que pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, la restriction de f à l'intervalle ouvert $]a_{i-1}, a_i[$ se prolonge en une application continue sur $[a_{i-1}, a_i]$.

On dit que $f : I \rightarrow F$ est **continue par morceaux sur l'intervalle** I si et seulement si f est continue par morceaux sur tout segment contenu dans I .

L'**intégrale** sur $[a, b]$ de $f \in M^0([a, b], F)$ est le vecteur de F défini par : $\int_{[a, b]} f = \sum_{i=1}^n \left(\int_{[a, b]} f_i \right) e_i$

où $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de F et où f_i est la $i^{\text{ème}}$ application coordonnée de f sur \mathcal{B} .

Soit $f : I \rightarrow F$, $a \in F$ et $T_a : I \setminus \{a\} \rightarrow F$ définie par⁵³ : $T_a(t) = \frac{1}{t-a} [f(t) - f(a)]$.

- On dit que f est **dérivable au point** a si et seulement si $\lim_{a, \neq} T_a$ existe dans F .
- Si a n'est pas l'extrémité droite de I , on dit que f est **dérivable à droite** en a si et seulement si $\lim_{a^+} T_a$ existe dans F . En cas d'existence, cette limite est notée $f'_d(a)$ et est appelée vecteur dérivé à droite de f en a .
- Si a n'est pas l'extrémité gauche de I , on dit que f est **dérivable à gauche** en a si et seulement si $\lim_{a^-} T_a$ existe dans F . En cas d'existence, cette limite est notée $f'_g(a)$ et est appelée vecteur dérivé à gauche de f en a .

Une application $f : I \rightarrow F$ est dite **dérivable sur l'intervalle** I si et seulement si f est dérivable en tout point de I . On note $\mathcal{D}(I, F)$ l'ensemble des applications de I dans F dérivables sur I .

Lorsque f est dérivable sur I on dispose de l'application $f' : I \rightarrow F$ qui à tout réel $t \in I$ associe le vecteur $f'(t)$ de F . L'application f' est appelée **application dérivée** de f .

Soit $f : I \rightarrow F$. Par convention f est dire zéro fois dérivable sur I et on pose : $f^{(0)} = f$.

L'application f est dite une fois dérivable sur I si et seulement si f est dérivable sur I et on pose alors : $f^{(1)} = f'$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'application f est dite **n-fois dérivable** sur I si et seulement si f est $n-1$ fois dérivable sur I et si $f^{(n-1)}$ est dérivable sur I . Dans ces conditions on pose : $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$.

En cas d'existence, l'application $f^{(n)}$ est appelée **dérivée n^{ième}** de f . L'application f est dite **indéfiniment dérivable** sur I si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}$, f est n -fois dérivable sur I .

⁵³On n'utilise pas l'écriture fractionnaire car $[f(t) - f(a)]$ est un vecteur de F , pas un scalaire.

Soit $f : I \rightarrow F$. On dit que f admet une **primitive** sur I si et seulement si il existe une application $G : I \rightarrow F$ dérivable sur I et telle que : $\forall t \in I, G'(t) = f(t)$. On dit alors que G est une primitive de f sur I .

10 Calcul différentiel

10.1 Différentiabilité

Soient $(E, \| \cdot \|_E)$, $(F, \| \cdot \|_F)$ des \mathbb{R} -espaces vectoriels normés de dimension finie et U un ouvert de E . On pose $\dim E = n$ et on suppose $n \geq 1$.

Théorème - définition : Soit $f : U \subset E \rightarrow F$ une application et $a \in U$.

• f est **différentiable au point a** si et seulement si il existe une application linéaire $u_a \in \mathcal{L}(E, F)$

telle que :
$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0_E \\ h \neq 0_E}} \frac{\|f(a+h) - f(a) - u_a(h)\|_F}{\|h\|_E} = 0. \quad (\star)$$

• Si il existe une application linéaire $u_a \in \mathcal{L}(E, F)$ vérifiant (\star) alors elle est unique, est notée $df(a)$ et est appelée **différentielle de f au point a** ou encore **application linéaire tangente à f au point a** .

Une notation pratique :

Soit ε une fonction de E dans F définie sur un voisinage V de 0_E dans E .

Pour exprimer que $\lim_{\substack{h \rightarrow 0_E \\ h \neq 0_E}} \frac{\|\varepsilon(h)\|_F}{\|h\|_E} = 0$ on note $\varepsilon(h) = o(h)$ et on lit « $\varepsilon(h)$ est un petit o de h au

voisinage de 0_E pour h ». Via l'emploi de cette notation, la définition de la différentiabilité de f au point a peut se reformuler sous la forme : f est différentiable au point a si et seulement si il existe une application linéaire $u_a \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que $f(a+h) - f(a) - u_a(h) = o(h)$.

On dit que $f : U \subset E \rightarrow F$ est **différentiable sur l'ouvert U** si et seulement si f est différentiable en tout point $a \in U$.

Dans ces conditions on dispose de l'application $df : U \subset E \rightarrow \mathcal{L}(E, F)$ qui à tout point $a \in U$ associe la différentielle de f au point a , alias $df(a)$.

L'application df est appelée **différentielle de f** .

Soient $f : U \subset E \rightarrow F$, $h \in E$ et $a \in U$. On dit que f admet une dérivée directionnelle suivant h au point a si et seulement si le vecteur $\frac{1}{t}[f(a + th) - f(a)]$ admet une limite dans $(F, \|\cdot\|_F)$ lorsque⁵⁴ $t \rightarrow 0$, $t \neq 0$.

Si tel est le cas, cette limite est notée $D_h f(a)$ et est appelée **dérivée directionnelle de f suivant h au point a** .

Étant donné un vecteur $h \in E$, on dit que $f : U \subset E \rightarrow F$ admet une dérivée directionnelle suivant h sur l'ouvert U si et seulement si f admet une dérivée directionnelle suivant h en tout point $a \in U$. Dans ces conditions on dispose⁵⁵ de l'application $D_h f : U \subset E \rightarrow F$ qui à tout point $a \in U$ associe le vecteur $D_h f(a)$. L'application $D_h f$ est appelée **dérivée directionnelle suivant h de f** .

Soient $f : U \subset E \rightarrow F$, $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E et $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$. On dit que f admet une **$j^{\text{ème}}$ dérivée partielle dans la base \mathcal{B} au point $a \in U$** si et seulement si f admet une dérivée directionnelle suivant e_j au point a .

Dans ces conditions le vecteur $D_{e_j} f(a)$ est noté $\partial_j f(a)$ ou encore $\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$ et est appelé $j^{\text{ème}}$ dérivée partielle de f dans la base \mathcal{B} au point a .

Soient $f : U \subset E \rightarrow F$, $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E et $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$. On dit que f admet une **$j^{\text{ème}}$ dérivée partielle dérivée partielle dans la base \mathcal{B} sur U** si et seulement si f admet une $j^{\text{ème}}$ dérivée partielle dans \mathcal{B} en tout point $a \in U$.

Dans ces conditions on dispose de l'application $\frac{\partial f}{\partial x_j} : U \subset E \rightarrow F$ qui à tout point $a \in U$ associe le vecteur $\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$. L'application $\frac{\partial f}{\partial x_j}$, encore notée $\partial_j f$ est appelée $j^{\text{ème}}$ dérivée partielle dans \mathcal{B} de f .

Soit U un ouvert de \mathbb{R}^p , $f : U \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $a \in U$. On note $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$ la base canonique de \mathbb{R}^p et $\varepsilon' = (\varepsilon'_1, \dots, \varepsilon'_n)$ la base canonique de \mathbb{R}^n . On note f_1, \dots, f_n les applications coordonnées de f dans la base ε' .

On a donc pour tout $x = (x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p$, $f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$. On note $f = (f_1, \dots, f_n)$. Si f est une fonction de \mathbb{R}^p dans \mathbb{R}^n , f_1, \dots, f_n sont des fonctions de \mathbb{R}^p dans \mathbb{R} .

En cas d'existence, $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)$ est simplement appelée $j^{\text{ème}}$ dérivée partielle de l'application f_i au point a (On ne fait alors plus référence à la base).

Si $f_i : U \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ admet une $j^{\text{ème}}$ dérivée partielle en tout point $a \in U$, alors on dispose de

l'application $\frac{\partial f_i}{\partial x_j} : U \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ qui à tout point $a \in U$ associe le réel $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)$.

L'application $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ est simplement appelée $j^{\text{ème}}$ dérivée partielle de l'application f_i .

⁵⁴ t est un réel, donc lorsque $t \rightarrow 0_{\mathbb{R}}$, $t \neq 0_{\mathbb{R}}$.

⁵⁵Si f admet une dérivée directionnelle suivant tout vecteur de E sur l'ouvert U , cela n'implique pas que f est différentiable sur U (ni E), encore moins dérivable sur U .

Pour $f = (f_1, \dots, f_n) : U \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$, $a \in U$ et en cas d'existence,

la matrice $J_f(a) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \right)$ de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est appelée **matrice jacobienne** de f au point a .

(**HP**) Lorsque $p = n$ (et toujours en cas d'existence), le déterminant $\det J_f(a)$ est appelé le **jacobien**, ou **déterminant jacobien**, de f au point a .

Soit $f : U \subset E \rightarrow F$. On dit que f est **de classe \mathcal{C}^1 sur U** si et seulement si f est différentiable sur U et la différentielle df est continue sur U .

On note $\mathcal{C}^1(U, F)$ l'ensemble des applications de U dans F de classe \mathcal{C}^1 sur U .

Soit $f : U \subset E \rightarrow F$. On dit que f est **de classe \mathcal{C}^k sur U** si et seulement si f est différentiable sur U et la différentielle df est de classe \mathcal{C}^{k-1} sur U .

On note $\mathcal{C}^k(U, F)$ l'ensemble des applications de U dans F de classe \mathcal{C}^k sur U .

Soit U un ouvert de \mathbb{R}^p , $f : U \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $a \in U$. On note $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$ la base canonique de \mathbb{R}^p et $\varepsilon' = (\varepsilon'_1, \dots, \varepsilon'_n)$ la base canonique de \mathbb{R}^n . On note f_1, \dots, f_n les applications coordonnées de f dans la base ε' .

On a donc pour tout $x = (x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p$, $f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$. On note $f = (f_1, \dots, f_n)$. Si f est une fonction de \mathbb{R}^p dans \mathbb{R}^n , f_1, \dots, f_n sont des fonctions de \mathbb{R}^p dans \mathbb{R} .

En cas d'existence, $\frac{\partial}{\partial x_{j_1}} \left(\frac{\partial f}{\partial x_{j_2}} \right)$ est simplement noté $\frac{\partial^2 f}{\partial x_{j_1} \partial x_{j_2}}$.

Toujours en cas d'existence, l'application $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_j}$ est notée $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}$.

(**HP**) Soient U un ouvert de E et V un ouvert de F .

On appelle \mathcal{C}^1 -**difféomorphisme** de U sur V toute bijection Φ de U sur V telle que Φ soit de classe \mathcal{C}^1 sur U et Φ^{-1} soit de classe \mathcal{C}^1 sur V .

Soient A une partie non vide de E et $a \in A$.

Un vecteur $v \in E$ est dit **tangent à la partie A au point a** si et seulement si il existe $r > 0$ et $\gamma :]-r, r[\rightarrow A$ dérivable sur $]-r, r[$ tels que $\gamma(0) = a$ et $\gamma'(0) = v$.

L'ensemble des vecteurs tangents à la partie A au point a est noté $T_a(A)$.

Théorème - définition : Soit $(E, \langle \bullet | \bullet \rangle)$ un espace euclidien.

Soient U un ouvert de E et $f : U \subset E \rightarrow \mathbb{R}$ différentiable au point $a \in U$.

Il existe un unique vecteur $\nabla f(a)$ de E vérifiant $df(a) = \langle \nabla f(a) | \bullet \rangle$ c'est-à-dire tel que :

$\forall h \in E$, $df(a)(h) = \langle \nabla f(a) | h \rangle$. Le vecteur $\nabla f(a)$ est appelé **gradient** de f au point a .

Soit U un ouvert de \mathbb{R}^p , $f : U \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in U$.

- On note $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$ la base canonique de \mathbb{R}^p . Pour $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$ on pose⁵⁶ : $dx_j = \varepsilon_j^*$.

La famille de formes linéaires (dx_1, \dots, dx_p) est une base de $(\mathbb{R}^p)^*$.

- On suppose désormais f différentiable sur U . On dispose donc de $df : U \subset \mathbb{R}^p \rightarrow (\mathbb{R}^p)^*$.

La différentielle de f est une **forme différentielle** sur l'ouvert U de \mathbb{R}^p c'est-à-dire une application de $U \subset \mathbb{R}^p$ dans le dual⁵⁷ de $(\mathbb{R}^p)^*$.

- Pour $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$, on note dx_j la forme différentielle constante égale à la forme linéaire dx_j .
- L'application f est un **champ de scalaires** sur U c'est-à-dire une application qui à tout point $a \in U$ associe un réel.
- L'application $\nabla f : U \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$ est un **champ de vecteurs** sur U c'est-à-dire une application qui à tout point $a \in U$ associe un vecteur de \mathbb{R}^p .
- Pour $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$, on note ε_j le champ de vecteurs constant égal au vecteur ε_j .

10.2 Optimisation

Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un \mathbb{R} -espace vectoriel normé de dimension finie $n \geq 1$.

Soient D une partie de E , $a \in D$ et $f : D \subset E \rightarrow \mathbb{R}$ une application.

- On dit que f admet un **maximum absolu** au point a si et seulement si : $\forall x \in D, f(x) \leq f(a)$.
- On dit que f admet un **minimum absolu** au point a si et seulement si : $\forall x \in D, f(a) \leq f(x)$.
- On dit que f admet un **maximum local** au point a si et seulement si :

$$\exists V \in \mathcal{V}_E(a), \quad \forall x \in D \cap V, \quad f(x) \leq f(a).$$

- On dit que f admet un **maximum local strict** au point a si et seulement si :

$$\exists V \in \mathcal{V}_E(a), \quad \forall x \in D \cap V \setminus \{a\}, \quad f(x) < f(a).$$

- On dit que f admet un **minimum local** au point a si et seulement si :

$$\exists V \in \mathcal{V}_E(a), \quad \forall x \in D \cap V, \quad f(a) \leq f(x).$$

- On dit que f admet un **minimum local strict** au point a si et seulement si :

$$\exists V \in \mathcal{V}_E(a), \quad \forall x \in D \cap V \setminus \{a\}, \quad f(a) < f(x).$$

⁵⁶Avec ε_j^* l'application de $(\mathbb{R}^p)^*$ définie par : $\forall (x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p, \varepsilon_j^*(x_1, \dots, x_p) = x_j$.

⁵⁷ i.e. dans $((\mathbb{R}^p)^*)^*$

- On dit que f admet un **extremum local** (resp. **extremum local strict**) au point a si et seulement si f admet un minimum local (resp. minimum local strict) ou un maximum local (resp. maximum local strict) au point a .

Soient U un ouvert de E , $a \in U$ et $f : U \subset E \rightarrow \mathbb{R}$ différentiable au point a .

On dit que a est un **point critique** de f si et seulement si $df(a) = 0_{E^*}$.

Soient U un ouvert de \mathbb{R}^p et $f : U \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ une application de classe \mathcal{C}^2 sur U .

Pour tout $a \in U$ la matrice $H_f(a) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \right)$ de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ est appelée **matrice Hessienne** de f au point a .

L'endomorphisme canoniquement associé à $H_f(a)$ est noté $\nabla^2 f(a)$.

(HP) Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^p, \mathbb{R})$. Le **Laplacien** $\Delta f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\Delta f = \sum_{i=1}^p \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$ est un champ de scalaires de classe \mathcal{C}^0 sur \mathbb{R}^2 .

10.3 Équations différentielles linéaires

Soient $(F, \|\cdot\|)$ un \mathbb{R} -espace vectoriel normé de dimension finie $n \geq 1$ et I un intervalle de \mathbb{R} d'intérieur non vide.

10.3.1 Équations différentielles linéaires d'ordre 1

Si $a : I \rightarrow \mathcal{L}(F)$ est une application de I dans $\mathcal{L}(F)$ et si $f : I \rightarrow F$ est une application de I dans F alors on note $a \cdot f$ l'application de I dans F définie par :

$$\forall t \in I, (a \cdot f)(t) = a(t)(f(t))$$

Pour les matrices : On considère $A : I \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $X : I \rightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$

On note $A \cdot X$ l'application de I dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ définie par :

$$\forall t \in I, (A \cdot X)(t) = A(t)X(t)$$

Soient $a : I \rightarrow \mathcal{L}(F)$ et $b : I \rightarrow F$ des applications continues sur l'intervalle I .

On leur associe les équations différentielles linéaires du premier ordre suivantes :
 (L) : $x' = a \cdot x + b$
 (H) : $x' = a \cdot x$

Les applications a et b sont respectivement appelées coefficient et second membre de (L).

L'équation (L) est appelée **équation différentielle linéaire du premier ordre avec second membre**.

L'équation (H) est appelée **équation différentielle homogène** associée à (L).

Les équations différentielles (L) et (H) sont aussi notées :

$$\begin{cases} \text{(L)} : & x'(t) = a(t)(x(t)) + b(t) \\ \text{(H)} : & x'(t) = a(t)(x(t)) \end{cases}$$

Elle sont aussi *abusivement* notées sous la forme :

$$\begin{cases} \text{(L)} : & x' = a(t) \cdot x + b(t) \\ \text{(H)} : & x' = a(t) \cdot x \end{cases}$$

On dit qu'une application $f : I \rightarrow F$ est **solution de l'équation différentielle** (L) sur I si et seulement si f est dérivable sur I et si : $\forall t \in I, f'(t) = a(t)(f(t)) + b(t)$.

Soient $A : I \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B : I \rightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ des applications continues sur l'intervalle I .

On leur associe les **systèmes différentiels** :

$$\begin{cases} \text{(L)} : & X' = A \cdot X + B \\ \text{(H)} : & X' = A \cdot X \end{cases}$$

Les applications A et B sont respectivement appelées coefficient et second membre de (L).
 (H) est le **système différentiel homogène** associé à (L).

On dit qu'une application $X : I \rightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est **solution du système différentiel** (L) sur l'intervalle I si et seulement si X est dérivable sur I et si : $\forall t \in I, X'(t) = A(t)X(t) + B(t)$

Traduction d'un système différentiel en terme de système d'équations :

$A : I \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une application continue sur I . Il existe donc n^2 applications continues $a_{ij} : I \rightarrow \mathbb{K}$ telles que $A = (a_{ij})$ c'est-à-dire telles que $\forall t \in I, A(t) = (a_{ij}(t))$.

$B : I \rightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est une application continue sur I . Il existe donc n applications continues $b_i : I \rightarrow \mathbb{K}$ telles que $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ c'est-à-dire telles que $\forall t \in I, B(t) = \begin{bmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{bmatrix}$.

Considérons $X : I \rightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ dérivable sur I. Il existe donc n applications continues

$$x_j : I \rightarrow \mathbb{K} \text{ telles que } X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ c'est-à-dire telles que } \forall t \in I, X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}.$$

Avec ces notations, X est solution du système différentiel (L) sur I si et seulement si :

$$\forall t \in I, \quad \begin{cases} x'_1(t) = a_{11}(t)x_1(t) + \dots + a_{1n}(t)x_n(t) + b_1(t) \\ \vdots \\ x'_i(t) = a_{i1}(t)x_1(t) + \dots + a_{in}(t)x_n(t) + b_i(t) \\ \vdots \\ x'_n(t) = a_{n1}(t)x_1(t) + \dots + a_{nn}(t)x_n(t) + b_n(t) \end{cases}$$

10.3.2 Équations différentielles linéaires d'ordre 1 à coefficient constant

Soient $a \in \mathcal{L}(F)$ et $b : I \rightarrow F$ une application continue sur l'intervalle I.

On leur associe les équations différentielles linéaires du premier ordre suivantes : (L) : $x' = a \circ x + b$
(H) : $x' = a \circ x$

Les équations différentielles (L) et (H) sont aussi notées : $\begin{cases} \text{(L)} : x'(t) = a(x(t)) + b(t) \\ \text{(H)} : x'(t) = a(x(t)) \end{cases}$

Elle sont aussi *abusivement* notées sous la forme : $\begin{cases} \text{(L)} : x' = ax + b(t) \\ \text{(H)} : x' = ax \end{cases}$

On dit qu'une application $f : I \rightarrow F$ est **solution de l'équation différentielle** (L) sur I si et seulement si f est dérivable sur I et si : $\forall t \in I, f'(t) = a(f(t)) + b(t)$.

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B : I \rightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ une application continue sur l'intervalle I.

On leur associe les **systèmes différentiels** suivants : $\begin{cases} \text{(L)} : X' = AX + B \\ \text{(H)} : X' = AX \end{cases}$

On dit qu'une application $X : I \rightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est **solution du système différentiel** (L) sur l'intervalle I si et seulement si X est dérivable sur I et si : $\forall t \in I, X'(t) = AX(t) + B(t)$

Traduction d'un S.D.⁵⁸ :

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Il existe donc n^2 scalaires $a_{ij} \in \mathbb{K}$ telles que $A = (a_{ij})$.

$B : I \rightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est une application continue sur I. Il existe donc n applications continues $b_i : I \rightarrow \mathbb{K}$ telles que $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ c'est-à-dire telles que : $\forall t \in I, B(t) = \begin{bmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{bmatrix}$.

Considérons $X : I \rightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ dérivable sur I. Il existe donc n applications continues $x_j : I \rightarrow \mathbb{K}$ telles que $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ c'est-à-dire telles que : $\forall t \in I, X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$.

Avec ces notations, X est solution du système différentiel (L) sur I si et seulement si :

$$\forall t \in I, \quad \begin{cases} x'_1(t) = a_{11} x_1(t) + \dots + a_{1n} x_n(t) + b_1(t) \\ \vdots \\ x'_i(t) = a_{i1} x_1(t) + \dots + a_{in} x_n(t) + b_i(t) \\ \vdots \\ x'_n(t) = a_{n1} x_1(t) + \dots + a_{nn} x_n(t) + b_n(t) \end{cases}$$

10.3.3 Équations différentielles linéaires scalaires d'ordre n

Soient $a_1, \dots, a_n, b : I \rightarrow \mathbb{K}$ des applications de I dans \mathbb{K} continues sur I.

On leur associe les équations différentielles linéaires scalaires d'ordre n :

$$\begin{cases} \text{(L)} : & y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = b \\ \text{(H)} : & y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0 \end{cases}$$

(L) est appelée **équation différentielle avec second membre**.

(H) est appelée **équation différentielle homogène** associée à (L).

⁵⁸Système différentiel.

Les équations (L) et (H) sont aussi notées sous la forme :

$$\begin{cases} \text{(L)} : & y^{(n)}(t) + a_1(t)y^{(n-1)}(t) + a_2(t)y^{(n-2)}(t) + \cdots + a_{n-1}(t)y'(t) + a_n(t)y(t) = b(t) \\ \text{(H)} : & y^{(n)}(t) + a_1(t)y^{(n-1)}(t) + a_2(t)y^{(n-2)}(t) + \cdots + a_{n-1}(t)y'(t) + a_n(t)y(t) = 0 \end{cases}$$

On les note aussi *abusivement* sous la forme :

$$\begin{cases} \text{(L)} : & y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + a_2(t)y^{(n-2)} + \cdots + a_{n-1}(t)y' + a_n(t)y = b(t) \\ \text{(H)} : & y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + a_2(t)y^{(n-2)} + \cdots + a_{n-1}(t)y' + a_n(t)y = 0 \end{cases}$$

On dit que $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ est **solution de l'équation différentielle** (L) sur I si et seulement si f est n -fois dérivable sur I et si : $\forall t \in I, f^{(n)}(t) + a_1(t)f^{(n-1)}(t) + \cdots + a_n(t)f(t) = b(t)$.

Interprétation en terme de système différentiel

Soit $y : I \rightarrow \mathbb{K}$ n -fois dérivable sur I.

On lui associe $X : I \rightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ définie par : $X = \begin{bmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{bmatrix}$

On a donc : $\forall t \in I, X(t) = \begin{bmatrix} y(t) \\ y'(t) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(t) \end{bmatrix}$. X est dérivable sur I et $X' = \begin{bmatrix} y' \\ y'' \\ \vdots \\ y^{(n)} \end{bmatrix}$

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = b \Leftrightarrow \begin{cases} y' = y' \\ \dots\dots\dots \\ y^{(n-1)} = y^{(n-1)} \\ y^{(n)} = -(a_n y + \cdots + a_1 y^{(n-1)}) + b \end{cases}$$

On en déduit que :

$$y \in S_{I \rightarrow \mathbb{K}}(\text{L}) \Leftrightarrow X' = A \cdot X + B \text{ avec } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \cdots & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \text{ et } B = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ b \end{bmatrix}$$

Soient $a, b, c : I \rightarrow \mathbb{K}$ des applications continues sur I .

On leur associe les équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 2 :
(L) : $y'' + a y' + b y = c$
(H) : $y'' + a y' + b y = 0$

Soit $(h_1, h_2) \in S_{I \rightarrow \mathbb{K}}(\mathbf{H})^2$.

On appelle **wronskien** de (h_1, h_2) l'application $W : I \rightarrow \mathbb{K}$ définie par : $W(t) = \begin{vmatrix} h_1(t) & h_2(t) \\ h_1'(t) & h_2'(t) \end{vmatrix}$

i.e. $\forall t \in I, W(t) = h_1(t)h_2'(t) - h_2(t)h_1'(t)$.

Index

- adhérence d'une partie, 67
- adhérence d'une partie de $\overline{\mathbb{R}}$, 67
- adhérent à une partie dans $\overline{\mathbb{R}}$, 67
- algébriquement clos, 22
- anneau, 21
- anneau principal, 22
- antisymétrie, 8
- application, 9
- application développable en série entière, 35
- application développable en série entière au voisinage de zéro, 35
- application en escalier, 13
- application identité, 9
- application intégrable, 16
- application invariante par similitude, 45
- application linéaire, 50
- application linéaire tangente à une application en un point, 71
- application réciproque, 10
- applications linéaires
 - image, 50
 - noyau, 50
 - rang, 50
- arc, 68
- argument d'un complexe, 7
- argument principal d'un complexe, 7
- Arithmétique dans $(A, +, \times)$
 - division, 61
 - irréductible, 61
 - pgcd, 61
 - ppcm, 61
 - premiers entre eux, 61
- associativité, 19
- automorphisme, 51
- automorphisme orthogonal, 58

- base, 49
- base directe, 54
- base indirecte, 54
- base orthogonale, 57
- base orthonormale, 57
- bijection, 10
- boule fermée, 66
- boule ouverte, 66
- but d'un arc, 68

- calcul différentiel
 - classe \mathcal{C}^1 , 73
 - classe \mathcal{C}^k , 73
 - extremum local, 75
 - extremum local strict, 75
 - maximum absolu, 74
 - maximum local, 74
 - maximum local strict, 74
 - minimum absolu, 74
 - minimum local, 74
 - minimum local strict, 74
 - solution d'une équation différentielle, 76
 - solution de l'équation différentielle, 77, 79
 - équation différentielle avec second membre, 78
 - équation différentielle homogène, 76, 78
 - équation différentielle linéaire du premier ordre avec second membre, 76
- cardinal d'un ensemble, 12
- cercle d'incertitude, 34
- champ de scalaires, 74
- champ de vecteurs, 74
- chemin, 68
- classe d'équivalence, 8
- coefficient binomial, 7
- cofacteur, 54
- comatrice, 54
- combinaison linéaire, 48
- commutativité, 19
- compacte, 67
- comparables, 8
- complémentarité, 11
- composée d'application, 9
- congruence dans \mathbb{Z} , 59
- congruence dans $K[X]$, 60
- conjugué d'un complexe, 7
- connexe par arcs, 68
- conservation de la norme, 58
- conservation du produit scalaire, 58
- contractante, 69
- convergence en moyenne, 63
- convergence en moyenne quadratique, 63
- convergence normale, 33
- convexe, 66
- corps, 22
- covariance, 40
- cyclique, 20

- dense, 67
- dense dans une partie, 67
- difféomorphisme, 73
- différence d'ensemble, 11
- différence symétrique, 11
- différentiable en un point, 71
- différentiable sur un ouvert, 71

- différentielle d'une application, 71
- différentielle d'une application en un point, 71
- dimension, 49
- dimension finie, 49
- direction d'un sous-espace affine, 48
- disque ouvert de convergence, 34
- distance, 62
- distance entre deux vecteurs, 62
- distance à une partie, 62
- distribution de probabilités discrètes, 37
- diviseurs communs à des polynômes, 60
- diviseurs dans \mathbb{Z} , 59
- diviseurs polynômiaux, 60
- division dans \mathbb{Z} , 59
- division dans $K[X]$, 60
- droite affine, 50
- droite vectorielle, 50
- dénombrable, 12
- dénominateur, 25
- dérivée directionnelle, 72
- dérivée logarithmique, 26
- déterminant d'un endomorphisme, 54
- déterminant d'une famille, 53
- déterminant d'une matrice, 54
- déterminant dans une base, 53
- développement asymptotique, 18
- développement limité, 18
- endomorphisme, 50
- endomorphisme adjoint, 58
- endomorphisme autoadjoint, 57
- endomorphisme autoadjoint défini positif, 57
- endomorphisme autoadjoint positif, 57
- endomorphisme induit, 52
- endomorphismes
 - base de diagonalisation, 52
 - base de trigonalisation, 52
 - codiagonalisables, 52
 - diagonalisable, 52
 - exponentielle d'un endomorphisme, 66
 - idéal annulateur, 51
 - nilpotent, 52
 - polynôme annulateur, 51
 - polynôme caractéristique, 52
 - polynôme d'un endomorphisme, 51
 - polynôme minimal, 51
 - s.e.v. stable, 52
 - sous-espace caractéristique, 53
 - sous-espace propre, 52
 - spectre, 52
 - trace, 51
 - trigonalisable, 52
- valeur propre, 52
- vecteur propre, 52
- ensemble de convergence, 34
- ensemble des mesures d'une rotation, 58
- ensemble fini, 11
- ensemble infini, 11
- ensemble ordonné, 8
- entiers premiers entre eux, 59
- entiers premiers entre eux dans leur ensemble, 59
- entiers premiers entre eux deux à deux, 59
- espace dual, 50
- espace euclidien, 56
- espace probabilisable, 35
- espace probabilisable discret, 35
- espace probabilisé, 36
- espace probabilisé discret, 36
- espace préhilbertien réel, 56
- espace vectoriel normé, 62
 - suite bornée, 65
 - série convergente, 65
 - série divergente, 65
 - convergence d'une suite, 65
 - divergence d'une suite, 65
 - limite d'une suite, 65
 - reste d'ordre n , 65
 - somme d'une série, 65
 - somme partielle d'ordre n , 65
 - série absolument convergente, 65
 - série de terme général, 65
 - série semi-convergente, 65
- espace vectoriel normé produit, 64
- espérance, 40
- espérance finie, 40
- exponentiel complexe, 32
- factorielle, 7
- famille, 10
- famille génératrice, 49
- famille libre, 49
- famille liée, 49
- famille orthogonale, 56
- famille orthonormale, 56
- famille presque nulle, 10
- famille sommable de complexes, 31
- famille sommable de réels, 31
- famille sommable de réels positifs, 31
- fermé relatif à une partie, 67
- fermée, 67
- fonction, 9
- fonction concave, 13
- fonction convexe, 12

- fonction génératrice, 41
- fonction impaire, 10
- fonction indicatrice, 9
- fonction indicatrice d'Euler, 60
- fonction paire, 10
- fonction polynôme, 24
- fonction polynôme relativement à une base, 25
- fonction périodique, 12
- fonctions de \mathbb{R} dans F
 - application dérivée, 70
 - continue par morceaux sur un intervalle, 70
 - continue par morceaux sur un segment, 70
 - dérivable en un point, 70
 - dérivable sur un intervalle, 70
 - dérivable à droite, 70
 - dérivable à gauche, 70
 - dérivée $n^{\text{ième}}$, 70
 - indéfiniment déviable, 70
 - intégrale, 70
 - n -fois dérivable, 70
 - primitive, 71
- fonctions de E dans F
 - continue en un point, 69
 - continue sur une partie, 69
 - $i^{\text{ème}}$ application composante, 69
 - $i^{\text{ème}}$ application coordonnée, 68
 - uniformément continue, 69
- fonctions à valeurs scalaires
 - application dérivée, 14
 - bornée, 12
 - continue en un point, 13
 - continue par morceaux sur un segment, 13
 - continue sur un intervalle, 13
 - continue à droite, 13
 - continue à gauche, 13
 - croissante, 12
 - dominée, 17
 - décroissante, 12
 - dérivable au point, 13
 - dérivable sur un intervalle, 13
 - dérivable à droite, 13
 - dérivable à gauche, 13
 - dérivée $n^{\text{ième}}$, 14
 - indéfiniment déviable, 14
 - majorée, 12
 - minorée, 12
 - monotone, 12
 - n -fois dérivable, 14
 - négligeable, 17
 - primitive, 14
 - subdivision adaptée, 13
 - équivalentes, 17
- forme algébrique d'un complexe, 7
- forme bilinéaire, 55
- forme bilinéaire définie, 55
- forme bilinéaire positive, 55
- forme différentielle, 74
- forme linéaire, 50
- forme p -linéaire, 53
- forme p -linéaire alternée, 53
- forme trigonométrique d'un complexe, 7
- fraction dérivée, 26
- fraction rationnelle, 25
- fractions rationnelles
 - degré, 26
 - décomposer, 26
 - irréductible, 26
 - partie entière, 26
 - racine, 26
 - représentant, 25
- frontière, 67
- germe de probabilité, 37
- gradient, 73
- graphe, 8
- groupe, 19
- groupe abélien, 19
- groupe spécial linéaire, 43
- groupe symétrique, 27
 - transposition, 27
- générateur, 20
- homéomorphisme, 69
- hyperplan, 50
- hyperplan affine, 50
- $i^{\text{ème}}$ matrice ligne, 42
- idéal bilatère, 22
- idéal d'un anneau commutatif, 21
- idéal engendré par un élément, 22
- idéal à droite, 22
- idéal à gauche, 22
- image directe, 9
- image réciproque, 9
- inclusion, 11
- incompatibles, 36
- injection, 10
- intersection, 11
- intervalle ouvert de convergence, 34
- intégrale absolument convergente, 16
- intégrale convergente, 15, 16
- intégrale d'une fonction sur un intervalle, 16
- intégrale divergente, 15, 16
- intégrale dépendant d'un paramètre, 17

- intégrale généralisée, 15, 16
- intégrale impropre, 15
- intégrale semi-convergente, 16
- intégrité, 21
- intérieur d'une partie, 67
- inverse, 5
- isomorphisme, 20, 50
- isométrie vectorielle, 58
- $j^{\text{ème}}$ dérivée partielle dans une base en un point, 72
- $j^{\text{ème}}$ dérivée partielle dans une base sur un ouvert, 72
- $j^{\text{ème}}$ vecteur colonne, 42
- jacobien, 73
- K-algèbre, 22
- K-espace vectoriel, 48
- k-lipschitzienne, 69
- $k^{\text{ième}}$ marginale, 39
- l'ensemble de définition d'une fonction, 9
- l'image d'un morphisme de groupes, 20
- l'orthogonal d'une partie, 56
- laplacien, 75
- lipschitzienne, 69
- loi conjointe, 40
- loi d'une VAD, 39
- loi de composition externe, 47
- loi de composition interne, 19
- magma, 19
- matrice antisymétrique, 43
- matrice carrée, 41
- matrice colonne, 41
- matrice d'une application linéaire, 44
- matrice de Gram, 57
- matrice de passage, 44
- matrice de permutation, 27
- matrice de type n, p à coefficients dans K , 41
- matrice diagonale, 43
- matrice extraite, 42
- matrice Hessienne, 75
- matrice jacobienne, 73
- matrice ligne, 41
- matrice nilpotente, 43
- matrice orthogonale, 43
- matrice orthogonale positive, 43
- matrice stochastique, 43
- matrice symétrique, 43
- matrice symétrique définie positive, 47
- matrice symétrique positive, 47
- matrice triangulaire inférieure, 42
- matrice triangulaire supérieure, 42
- matrice élémentaire de dilatation, 43
- matrice élémentaire de transvection, 43
- matrices
 - application linéaire canoniquement associée, 44
 - codiagonalisables, 46
 - diagonalisable, 46
 - endomorphisme canoniquement associée, 44
 - exponentielle d'une matrice, 66
 - $i^{\text{ème}}$ vecteur ligne, 42
 - idéal annulateur, 45
 - image, 42
 - invertible, 42
 - $j^{\text{ème}}$ matrice colonne, 42
 - matrice compagnon, 47
 - noyau, 42
 - orthogonalement semblable, 47
 - polynôme annulateur, 45
 - polynôme d'une matrice carrée, 45
 - polynôme minimal, 45
 - polynôme caractéristique, 47
 - rang, 44
 - rayon spectral, 46
 - s.e.v. stable, 46
 - semblable, 45
 - sous-espace propre, 46
 - spectre, 46
 - trace, 45
 - transposée, 42
 - trigonalisable, 46
 - valeur propre, 46
 - vecteur propre, 46
 - équivalence, 45
- mesure d'un angle orienté, 57
- mesure d'une rotation, 58
- module, 7
- modèle binomial, 37
- modèle de Bernoulli, 37
- modèle de Poisson, 38
- modèle géométrique, 37
- modèle uniforme, 37
- moment d'ordre p , 40
- monogène, 20
- monoïde, 19
- morphisme d'anneaux, 21
- morphisme de corps, 22
- morphisme de groupes, 20
- morphisme de K-algèbres, 23
- nombre premier, 59

- norme, 62
- norme infini, 63
- norme produit, 64
- normes d'algèbres, 64
- normes d'opérateur, 64
- normes subordonnées, 64
- normes équivalentes, 62
- notation additive dans un groupe, 6
- notation multiplicative dans un groupe, 5
- noyau d'un morphisme de groupes, 20
- numérateur, 25
- opposé, 6
- ordre d'un élément, 20
- ordre fini, 20
- ordre infini, 20
- ordre partiel, 8
- ordre total, 8
- orienter un espace vectoriel, 54
- origine d'un arc, 68
- ouvert, 67
- ouvert relatif à une partie, 67
- p-combinaison, 12
- p-cycle, 27
- p-liste, 12
- p-liste d'éléments distincts, 12
- partie bornée, 66
- partie entière, 7
- partie entière supérieure, 7
- partie fractionnaire, 7
- partie imaginaire, 7
- partie réelle, 7
- partie régulière d'un DL, 18
- partie stable par combinaison linéaire, 48
- parties orthogonales, 56
- partition, 11
- pas de la subdivision, 11
- permutation, 27
- permutation impaire, 27
- permutation paire, 27
- pgcd dans \mathbb{Z} , 59
- pgcd dans $K[X]$, 60
- plan affine, 50
- plan vectoriel, 50
- point adhérent à une partie, 67
- point critique, 75
- point intérieur, 67
- points, 48
- Polynôme de Taylor, 14
- polynôme dérivé, 24
- polynôme à une indéterminée, 23
- polynômes
 - associés, 60
 - coefficient constant, 24
 - coefficient dominant, 24
 - coefficients, 23
 - composé, 23
 - degré, 24
 - indéterminée, 23
 - irréductible, 60
 - multiplicité, 24
 - normalisé, 25
 - racine, 24
 - racine double, 24
 - racine simple, 24
 - scindé, 24
 - scindé simple, 24
 - unitaire, 24
 - valuation P-adique, 60
- polynômes premiers entre eux, 60
- polynômes premiers entre eux dans leur ensemble, 60
- polynômes premiers entre eux deux à deux, 60
- ppcm dans \mathbb{Z} , 59
- ppcm dans $K[X]$, 60
- première loi marginale, 40
- probabilité, 36
- probabilité conditionnelle, 38
- probabilité uniforme, 37
- produit de Cauchy, 32
- produit de Cauchy de séries entières, 34
- produit de convolution, 32
- produit de permutations, 5
- produit de séries entières, 34
- produit matriciel, 42
- produit mixte, 57
- produit scalaire, 55
- produit vectoriel, 57
- produits scalaires canoniques, 55
- projecteur, 51
- projecteur orthogonal, 56
- projection sur F parallèlement à G, 51
- prolongement, 9
- propriété presque sûre, 36
- période, 12
- pôle, 26
- racine n-ième, 6
- racine n-ième de l'unité, 5
- rang d'une famille, 50
- rayon de convergence d'une suite, 33
- rayon de convergence d'une série entière, 34
- relation, 8

- relation d'ordre, 8
- relation d'équivalence, 8
- relations de Chasles (intégrales), 17
- représentants, 8
- reste d'ordre x d'une intégrale généralisée, 15
- restriction, 9
- rotation, 58
- rotation axiale, 58
- réflexion, 58
- réflexivité, 8
- réunion, 11

- sans diviseur de zéro, 21
- scalaires, 48
- seconde loi marginale, 40
- segment, 66
- semi-norme, 62
- semi-produit scalaire, 55
- signature, 27
- singleton, 11
- solution du système différentiel, 76, 77
- somme d'une famille sommable de complexes, 31
- somme d'une famille sommable de réel, 31
- somme d'une famille sommable de réels positifs, 31
- somme d'une série entière, 34
- somme de Riemann, 14
- somme de sous-espaces vectoriels, 49
- somme de séries entières, 34
- somme directe d'espace vectoriels, 49
- somme directe orthogonale, 56
- sous-algèbre, 23
- sous-anneau, 21
- sous-corps, 22
- sous-espace affine, 48
- sous-espace vectoriel, 48
- sous-espace vectoriel engendré par une partie, 49
- sous-famille, 10
- sous-groupe, 20
- sous-groupe engendré par une partie, 20
- sous-suite, 30
- sphère, 66
- subdivision du segment, 11
- suite, 10
- suite d'applications
 - convergence simple, 32
 - convergence uniforme, 32
- suite d'évènements croissante, 36
- suite d'évènements décroissante, 36
- suite de vecteurs totale, 56

- suite double, 10
- suite extraite, 30
- suites adjacentes, 29
- suites de scalaires
 - bornée, 29
 - convergence, 29
 - croissante, 29
 - divergence, 29
 - dominée, 30
 - décroissante, 29
 - limite, 29
 - limite en $+\infty$, 29
 - limite en $-\infty$, 29
 - majorée, 29
 - minorée, 29
 - négligeable, 30
 - strictement croissante, 29
 - strictement décroissante, 29
 - équivalente, 30
- supplémentaire, 49
- support d'un arc, 68
- support d'une famille, 10
- support d'une permutation, 27
- support de la subdivision, 11
- sur-famille, 10
- surjection, 10
- symbole de Kronecker, 6
- symétrie, 8, 51
- symétrie orthogonale, 56
- symétrie par rapport à F parallèlement à G , 51
- symétrisable, 19
- système complet d'évènements, 36
- système complet de représentants, 8
- système différentiel, 76, 77
- système différentiel homogène, 76
- système quasi-complet d'évènements, 36
- série alternée, 31
- série d'applications, 33
 - convergence absolue, 33
 - convergence simple, 33
 - convergence uniforme, 33
 - reste d'ordre n , 33
 - somme de la série, 33
 - somme partielle, 33
- série de Taylor, 35
- série entière de la variable complexe, 33
- série entière de la variable réelle, 34
- séries numériques
 - absolument convergente, 30
 - diverge grossièrement, 30
 - reste d'ordre n , 30

- semi-convergente, 30
- somme d'une, 30
- somme partielle, 30
- série, 30
- série convergente, 30
- série divergente, 30
- transitivité, 8
- tribu, 35
- unifère, 19
- VAD centrée, 41
- VAD indépendantes, 39
- VAD réduite, 41
- valeur d'adhérence, 65
- valuation p-adique, 59
- variable aléatoire de Bernoulli, 40
- variable aléatoires discrète, 38
- variance, 41
- vecteur aléatoire discret, 39
- vecteur tangent à une partie en un point, 73
- vecteur unitaire, 57
- vecteurs, 48
- vecteurs orthogonaux, 56
- voisinage, 66
- voisinage d'un point dans \mathbb{R} , 67
- voisinage de $+\infty$, 67
- voisinage de $-\infty$, 67
- voisinage relatif à une partie, 67
- wronskien, 80
- écart-type, 41
- égalité d'applications, 9
- élément neutre, 19
- élément nilpotent, 21
- élément simple, 26
- éléments associés, 61
- équation différentielle linéaire
 - solution, 18, 19
 - équation différentielle homogène, 18, 19
 - équation différentielle linéaire du second
 - ordre à coefficients constants, 19
- équation différentielle linéaire d'ordre un, 18
- équipotent, 11
- étoilée, 66
- évènement certain, 36
- évènement contraire, 36
- évènement impossible, 36
- évènement négligeable, 36
- évènement presque sûr, 36
- évènement élémentaire, 36
- évènements, 35
- évènements deux à deux indépendants, 38
- évènements disjoints, 36
- évènements indépendants, 38