$\LaTeX$ 数学分析本科笔记

Felix H.

2025 年 7 月 28 日

1 集合以及其基本运算

1.1 集合的概念

“我们把集合理解为由若干确定的、有充分区别的、具体或抽象的对象合并而成的一个整体”——康托尔

但是集合的概念并非完美无瑕，例如所有集合的集合本身就是一个矛盾的概念。

对于集合 M，设记号 $P(M)$ 表示 M 不以其本身为元素，考虑具有性质 p 的集合所组成的一类对象 $K = M|P(M)$
如果 K 是集合，则或者 $P(K)$ 为真，或者 $\neg P(K)$ 为真，然而这两者对于 $P(K)$ 来说都不可能为真，因此 $P(K)$ 不是一个集合。这就是经典的罗素悖论，原因是朴素集合论的不够严谨导致形成的悖论。这里并不会再对集合做进一步的定义，我们只需要知道在现有的公理化的集合论中，集合被定义为具有一组确定性质的数学对象。

1.2 集合的相关运算

由于中学时期我们对集合已经有了初步的了解，所以这里我就不再对集合的交集并集以及补集运算作进一步的解释，下面给出德摩根法则，有兴趣的同学可以自己证明

定义 1.1: 集合

$$C_M(A \cup B) = C_M A \cap C_M B$$

$$C_M(A \cap B) = C_M A \cup C_M B$$

需要额外介绍的是笛卡尔直积. 对于任何两个集合 A, B,可以做成一个新的集合——偶 $\{A, B\} = \{B, A\}$，其元素是且仅是集合 A 和 B. 这个集合在 $A \neq B$ 时，由两个元素组成，而在 $A = B$ 的时候由一个元素组成。

上述新集合称为集合 A 和集合 B 的无序偶，以区别于序偶 (A, B)，后者的元素 A,B 具有附加特征，从而能够区别偶 (A, B) 中第一个元素和第二个元素。按照定义，序偶等式

$$(A, B) = (C, D)$$

表示 $A = C$ 且 $B = D$，特别地，如果 $A \neq B$, 则 $(A, B) \neq (B, A)$。

现在设 X,Y 是任意集合，集合

$$X \times Y := \{(x,y)|x \in X, y \in Y\}$$

2 函数与极限

第一讲要讨论的是两个基本概念，分别是函数和极限，函数是微积分学的研究对象，极限是我们学习的工具。在学习过程中我们通常先学习极限以及实数的定义，再由此衍生到微积分。而事实上这一顺序与数学发展的顺序并不相同，牛顿莱布尼茨分别发明了微积分，而在后面若干年各学者的补充完善下才确定了实数与极限的概念。

2.1 函数

定义 2.1: 函数

设 X 和 Y 是两集合，如果集合 X 的每一个元素 x 都按照某规律 f 与集合 Y 的元素 y 相对应，我们就说有一个函数，它定义于 X 并且取值于 Y。

2.1.1 映射的简单分类

当函数 $f : X \to Y$ 被称为映射的时候，它在元素 $x \in X$ 上的值 $f(x) \in Y$ 通常称为元素 x 的像。映射 $f : X \to Y$ 分为以下几类：

满射（或者称为到上映射），此时 $f(X) = Y$；

单射（或者称为嵌入），此时对于集合 X 的任何元素 x_1, x_2 有

$$(f(x_1) = f(x_2)) \Rightarrow (x_1 = x_2)$$

即不同元素有不同的像；

双射（或者称为一一映射），此时它即是单射又是满射。如果 $f : X \to Y$ 是双射，那么自然就存在一个映射

$$f^{-1} : Y \to X$$

其定义方法如下：如果 $f(x) = y$，则 $f^{-1} : Y \to x$，即元素 $y \in Y$ 相对应的是在映射 f 下以 y 为像的元素 $x \in X$，因为 f 是满射，所以这样的元素 x 存在。又因为 f 是单射，所以该元素是唯一的。因此，我们可以定义映射 f^{-1}，这个映射称为原映射逆映射。

2.2 集合的势

定义 2.2: 集合的势

如果集合 X 到集合 Y 的双射存在，称集合 X 与集合 Y 等势

集合 X 所在的类称为集合 X 的势或基数类，记为 $cardX$，如果 $X\ Y$，即可以写出 $cardX = cardY$。

这种结构的意义在于，它能够让我们比较集合中所含元素的数量，而不必采用数数的方式，事实上后者在一些情况是不可能完成的。

如果集合 X 与集合 Y 的某一个子集等势，我们说集合 X 的基数类不大于集合 Y 的基数类，并且记为 $cardX \leq cardY$，而一个集合能够与自身的一部分等势，这是无穷集的特征，戴德金曾建议

以此为无穷集的定义。因此有如果一个集合不与自己的任何一个真子集等势，我们就称其为有限集，反之则称之为无穷集。

定理.$cardX < cardP(X)$, 其中 P 表示集合 X 中一切子集的集合,