

# L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X 本科数学笔记

Felix H.

2025 年 7 月 27 日

## 1 集合以及其基本运算

### 1.1 集合的概念

“我们把集合理解为由若干确定的、有充分区别的、具体或抽象的对象合并而成的一个整体”——康托尔

但是集合的概念并非完美无瑕，例如所有集合的集合本身就是一个矛盾的概念。

对于集合  $M$ ，设记号  $P(M)$  表示  $M$  不以其本身为元素，考虑具有性质  $p$  的集合所组成的一类对象  $K = M|P(M)$

如果  $K$  是集合，则或者  $P(K)$  为真，或者  $\neg P(K)$  为真，然而这两者对于  $P(K)$  来说都不可能为真，因此  $P(K)$  不是一个集合。这就是经典的罗素悖论，原因是朴素集合论的不够严谨导致形成的悖论。这里并不会再对集合做进一步的定义，我们只需要知道在现有的公理化的集合论中，集合被定义为具有一组确定性质的数学对象。

### 1.2 集合的相关运算

由于中学时期我们对集合已经有了初步的了解，所以这里我就不再对集合的交集并集以及补集运算作进一步的解释，下面给出德摩根法则，有兴趣的同学可以自己证明

定义 1.1: 集合

$$C_M(A \cup B) = C_M A \cap C_M B$$

$$C_M(A \cap B) = C_M A \cup C_M B$$

需要额外介绍的是笛卡尔直积. 对于任何两个集合  $A, B$ , 可以做成一个新的集合——偶  $\{A, B\} = \{B, A\}$ , 其元素是且仅是集合  $A$  和  $B$ . 这个集合在  $A \neq B$  时, 由两个元素组成, 而在  $A = B$  的时候由一个元素组成。

上述新集合称为集合  $A$  和集合  $B$  的无序偶，以区别于序偶  $(A, B)$ ，后者的元素

## 2 函数与极限

第一讲要讨论的是两个基本概念，分别是函数和极限，函数是微积分学的研究对象，极限是我们学习的工具。在学习过程中我们通常先学习极限以及实数的定义，再由此衍生到微积分。而事实

上这一顺序与数学发展的顺序并不相同，牛顿莱布尼茨分别发明了微积分，而在后面若干年各学者的补充完善下才确定了实数与极限的概念。

## 2.1 函数

设  $X$  和  $Y$  是两集合

如果集合  $X$  的每一个元素  $x$  都按照某规律  $f$  与集合  $Y$  的元素  $y$  相对应，我们就说有一个函数，它定义于  $X$  并且取值于  $Y$ 。

### 2.1.1 映射的简单分类

当函数  $f: X \rightarrow Y$  被称为映射的时候，它在元素  $x \in X$  上的值  $f(x) \in Y$  通常称为元素  $x$  的像。映射  $f: X \rightarrow Y$  分为以下几类：

满射（或者称为到上映射），此时  $f(X) = Y$ ；

单射（或者称为嵌入），此时对于集合  $X$  的任何元素  $x_1, x_2$  有

$$(f(x_1) = f(x_2)) \Rightarrow (x_1 = x_2)$$

即不同元素有不同的像；

双射（或者称为一一映射），此时它即是单射又是满射。如果  $f: X \rightarrow Y$  是双射，那么自然就存在一个映射

$$f^{-1}: Y \rightarrow X$$

其定义方法如下：如果  $f(x) = y$ ，则  $f^{-1}: Y \rightarrow x$ ，即元素  $y \in Y$  相对应的是在映射  $f$  下以  $y$  为像的元素  $x \in X$ ，因为  $f$  是满射，所以这样的元素  $x$  存在。又因为  $f$  是单射，所以该元素是唯一的。因此，我们可以定义映射  $f^{-1}$ ，这个映射称为原映射逆映射。

## 2.2 集合的势

如果集合  $X$  到集合  $Y$  的双射存在，称集合  $X$  与集合  $Y$  等势

集合  $X$  所在的类称为集合  $X$  的势或基数类，记为  $\text{card}X$ ，如果  $X \sim Y$ ，即可以写出  $\text{card}X = \text{card}Y$ 。

这种结构的意义在于，它能够让我们比较集合中所含元素的数量，而不必采用数数的方式，事实上后者在一些情况是不可能完成的。

如果集合  $X$  与集合  $Y$  的某一个子集等势，我们说集合  $X$  的基数类不大于集合  $Y$  的基数类，并且记为  $\text{card}X \leq \text{card}Y$ ，而一个集合能够与自身的一部分等势，这是无穷集的特征，戴德金曾建议以此为无穷集的定义。因此有如果一个集合不与自己的任何一个真子集等势，我们就称其为有限集，反之则称之为无穷集。

定理  $\text{card}X < \text{card}P(X)$ ，其中  $P$  表示集合  $X$  中一切子集的集合，