

L^AT_EX 高等代数本科笔记

Felix H.

2025 年 7 月 31 日

1 高等代数

代数空间对应了多元函数，其中交换律，结合律，零元等在多元函数中的概念体现的是代数空间的对称性

2 行列式

3 Cauchy-Binet 公式

定理 3.1

A, B 为 n 阶方阵，则 $|AB| = |A| \times |B|$

证明. 矩阵 $\begin{bmatrix} A & 0 \\ I_n & B \end{bmatrix}$ 可以变换为 $\begin{bmatrix} 0 & AB \\ -I_n & B \end{bmatrix}$ 由于第三类初等变换不改变行列式的值，所以两个矩阵的行列式相等；其中第二分块行左乘 A 加到第一分块行上，就可以得到目标矩阵但是此时实际上运用了循环论证，是不严谨的。只需要证明任何分块矩阵的第三类初等变换可以分解为若干次普通矩阵的第三类初等变换即可。 \square

设 A 是 $m \times n$ 矩阵， B 是 $n \times m$ 矩阵，求 $A \ B$ 的行列式？

定理 3.2

(1) 若 $m > n$ ，则 $|AB| = 0$ ；

(2) 若 $m \leq n$ ，则

$$\det(AB) = \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_m \leq n} A \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & m \\ j_1 & j_2 & \dots & j_m \end{pmatrix} B \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & \dots & j_m \\ 1 & 2 & \dots & m \end{pmatrix}$$

以上公式被成为 Cauchy-Binet 公式。

证明. Cauchy-Binet 公式

首先构造一个大的 $m+n$ 阶分块矩阵 $\begin{bmatrix} A & 0 \\ -I_n & B \end{bmatrix}$

同样对第二分块行左乘 A ，加到第一分块行上，得到 $\begin{bmatrix} 0 & AB \\ -I_n & B \end{bmatrix}$

第三类初等变换不改变行列式的值, 因此 $\begin{vmatrix} A & 0 \\ -I_n & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & AB \\ -I_n & B \end{vmatrix}$

下面先计算等式右边的行列式, 对其前 m 行进行 Laplace 展开:

$$RHS = |AB|(-1)^{1+2+\dots+m+(n+1)+\dots+(n+m)}|-I_n| = (-1)^{n(m+1)}|AB|$$

接下来计算左边的行列式, 分两种情况: (1) 若 $m > n$, 则包含在前 m 行的任意 m 阶子式至少又有一列为 0, 从而值为 0, 根据 Laplace 定理, 左边的行列式为 0

从而 $|AB| = 0$

(2) 若 $m \leq n$, 对前 m 行进行 Laplace 展开:

$$LHS = \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_m \leq n} A \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & m \\ j_1 & j_2 & \dots & j_m \end{pmatrix} c \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & m \\ j_1 & j_2 & \dots & j_m \end{pmatrix}$$

代数余子式 $c \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & m \\ j_1 & j_2 & \dots & j_m \end{pmatrix} = (-1)^{1+2+\dots+m+j_1+j_2+\dots+j_m} |(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_{n-m}}, B)|$

其中 $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_{n-m} \leq n$ 是 $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_m \leq n$ 的余指标

$$e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{第 } i \text{ 个标准单位列向量}$$

□

