Задача 1. Поиск возможноси аппроксимации необыкновенных функций

Решение

1. Математический метод сплайн

Данный метод заключает в построении аппроксимационного полином третьей степени вида:

$$f_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3$$

Замечание:

- Ограниченые условия имеют вид вторых производных;
- Коэффициенты a_i, b_i, c_i, d_i вычисляются методом прогонки для трехдиагональной матрицы;
- Если количество заданных точек равно n, то количество коэффициентов необходимых для хранения равно $4n$.

2. Придумающий метод (метод «трех точек»)

Лемма 1. Существует одна и только одна квадратная функция проходящая через 3 заданных точек.

Доказательство:

Рассмотрим три заданных точек $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$ и полином вида:

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2) + b(x - x_1) + c$$

Поставляя соответствено координаты трех точек:

$$c = y_1 \tag{1}$$

$$b = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \tag{2}$$

$$a = \frac{1}{x_3 - x_2}\left(\frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right) \qquad (3)$$

Метод включает в себя построение дуги, которая пройдет через 3 точки. Значит, мы разделяем последовательность из n точек группой трех соседних точек. Существует 2 следующие способы:

(a) (x_1, x_2, x_3), $(x_2, x_3, x_4), (x_3, x_4, x_5), \dots (x_{n-2}, x_{n-1}, x_n)$

(b) (x_1, x_2, x_3), $(x_3, x_4, x_5), (x_5, x_6, x_7), \dots$

Не трудно выберём первый способ, т.к. такие группы следовательны и совпадают друг друга двумя точками, все группы состоят из ровно 3 точки.

Замечание:

- Для всех группы коэффициенты a_i, b_i, c_i вычисляются формулами (1-3);
- Если количество заданных точек равно n, то количество коэффициентов необходимых для хранения равно $3(n-2)$.

3. Вейвлет-нейронная сеть

На самом деле данный метод связан с Фурье-анализом. Вейвлет преобразование разработано как обобщение Фурье-преобразования.

В прямом ходе сеть принимает один или несколько входов, с одним скрытым слоем, а выходной слой которого состоит из одного или нескольких линейных сумматоров.

Скрытый слой состоит из нейронов, чьи функции активации взяты из вейвлет-основы. (см. Рис. 1)

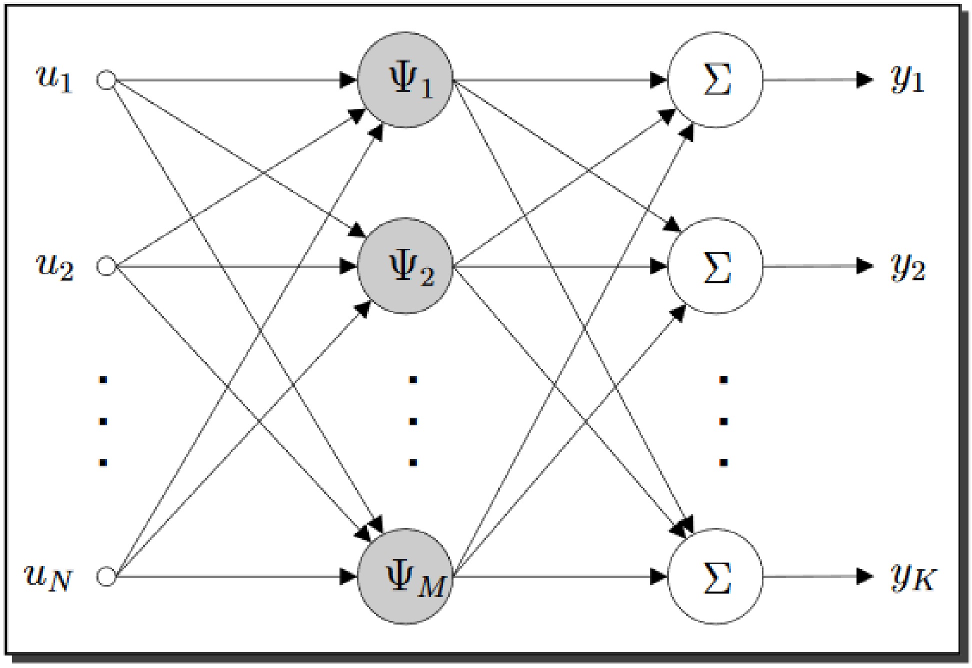

Рис. 1. Структура Вейвлет-нейронной сети

Алгоритм обучения:

Обучение выполняется по случайной выборке наблюдаемых пар ввода-вывода $\{u, f\ (u)\ =\ g\ (u)\ +\ \varepsilon\}$, где $g\ (u)$ - аппроксимируемая функция, а ε - шум измерения.

Пример работы при выполнении 3% процесса обучении приведены на Рис. 2.

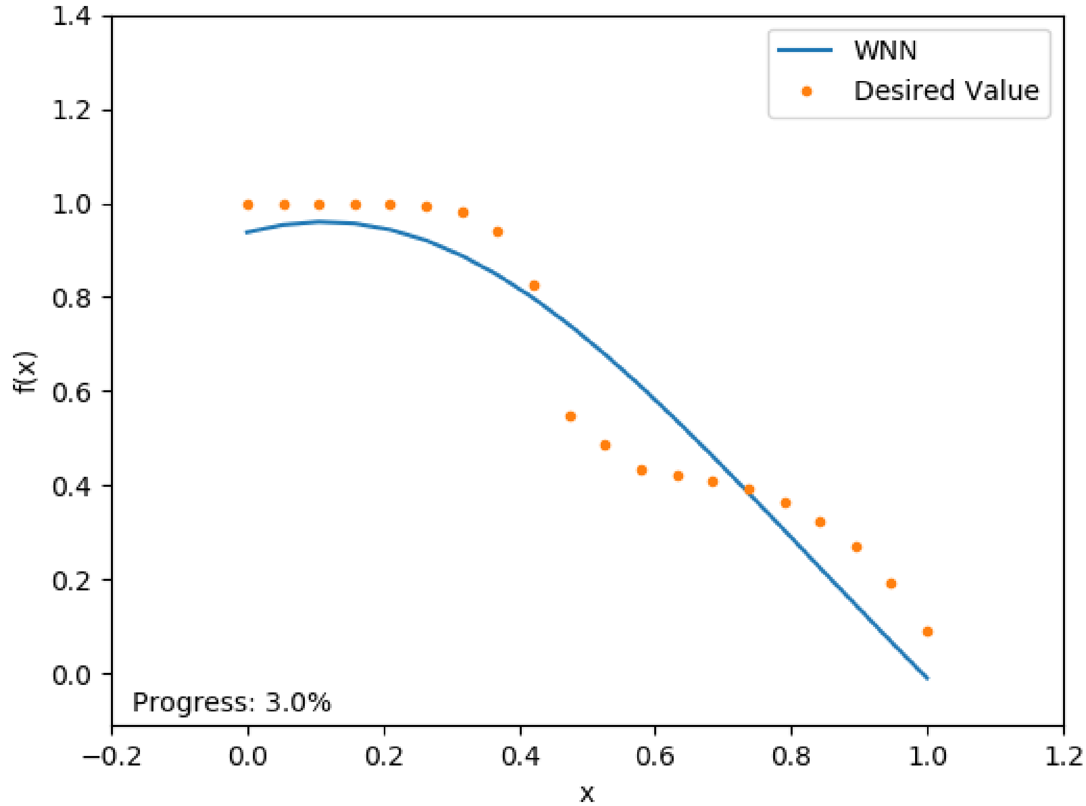

Рис 2. Выполнение 3% процесса обучении WNN сети

4. Результаты аппроксимации

Ниже показаны качество аппроксимации трех введенных методов.

Отметим, что все точки заданы на входе (синий) а функция аппроксимации на выходе (оранжевый).

4.1. Эксперимент №1: Функция температуры $T = T_0 + (T_w - T_0)x^m$

Количество эпох: 20000

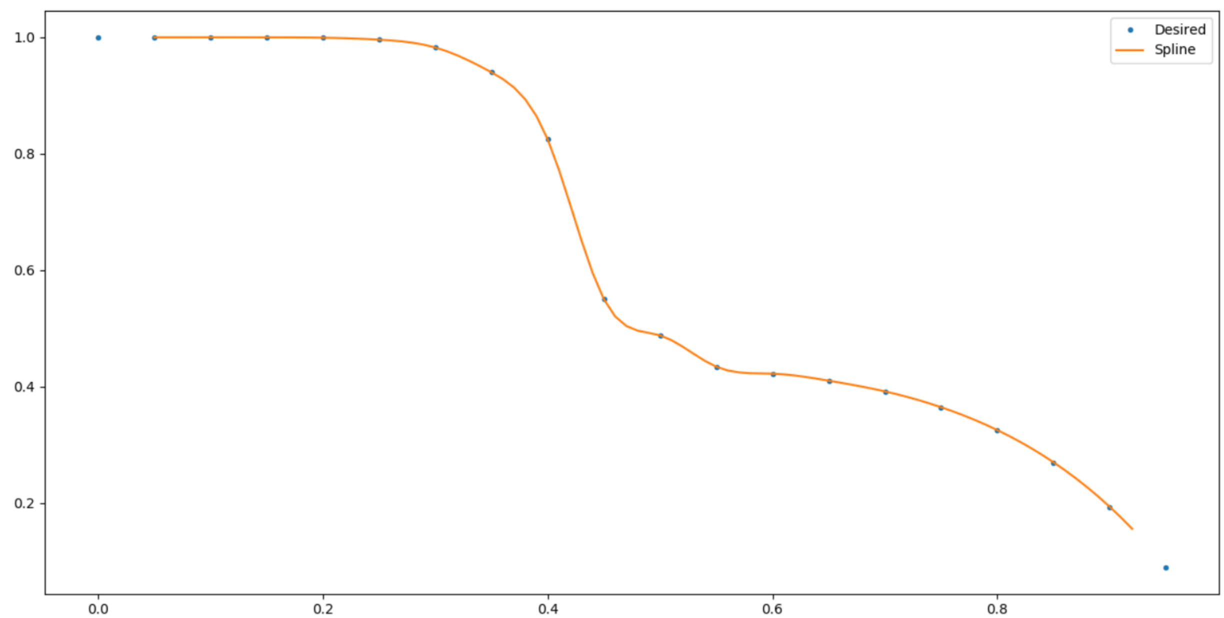

Рис. 3. Аппроксимационная функция методом Spline

(качество не очень хорошо в некоторых интервалах)

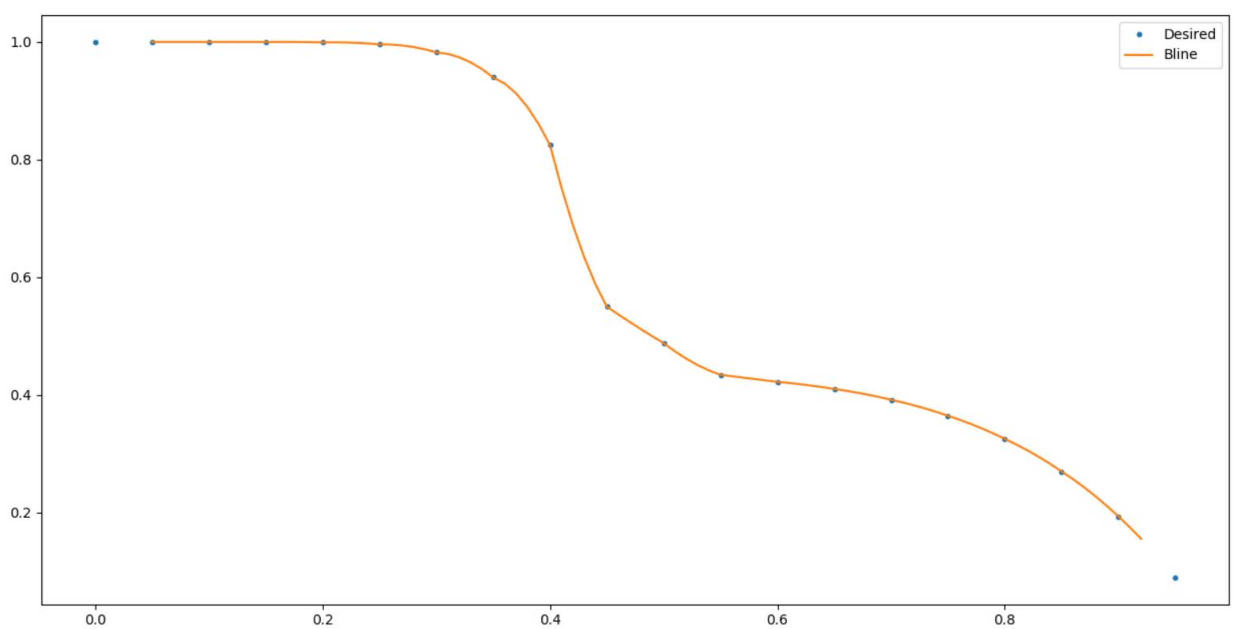

Рис. 4. Аппроксимационная функция своим методом

(качество аппроксимации уже улучшается)

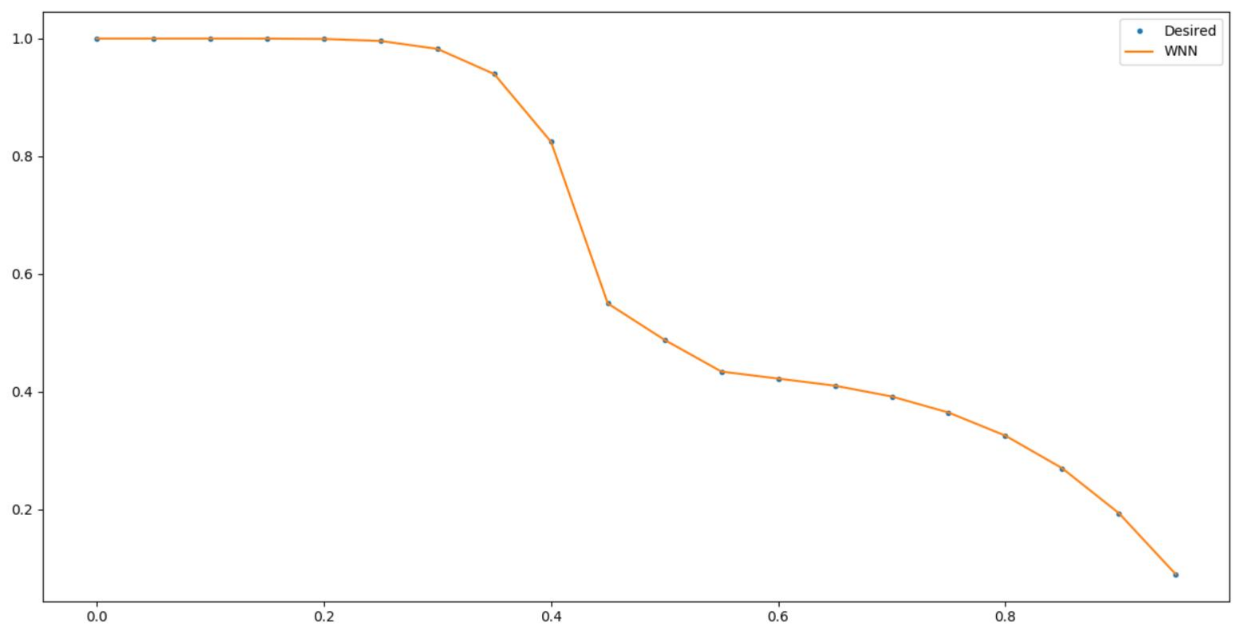

Рис. 5. Аппроксимационная функция при обучении Вейвлет-нейронной сети

(видно, что функция получена идеально и аналитически)

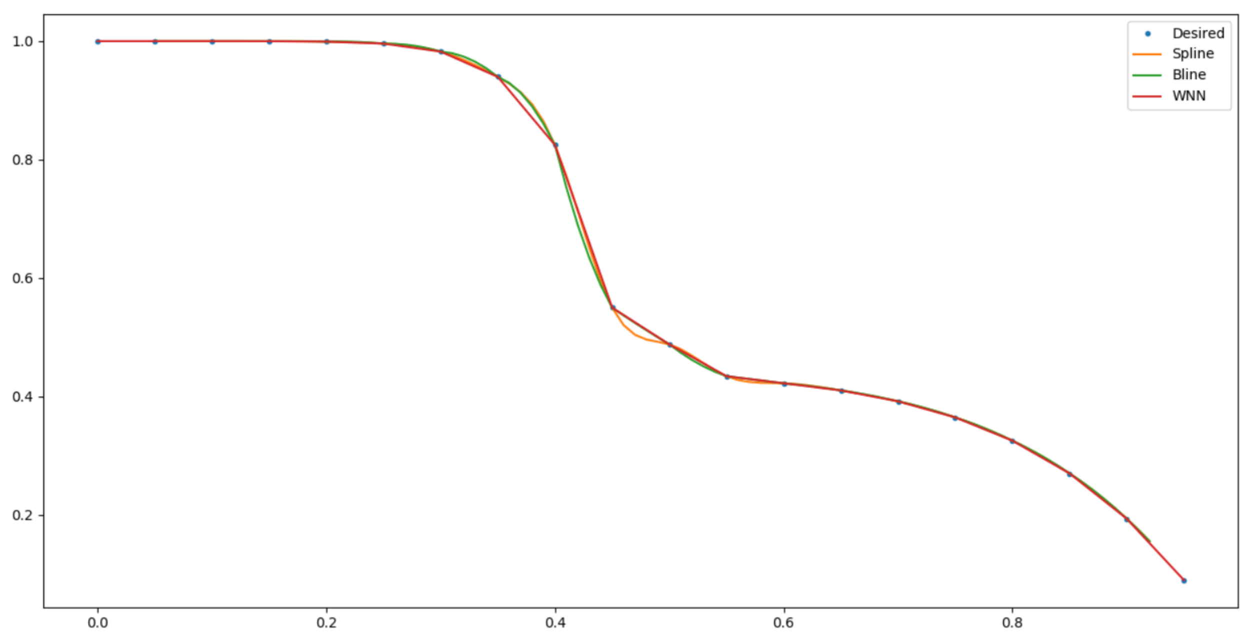

Рис. 6. Аппроксимационная функция тремя методами

(по сравнению результатов свой метод и Вейвлет-нейронная сеть дают хорошую оценку и аналитическую аппроксимацию, метод Spline - хуже)

4.2. Эксперимент №2: Непрерывная периодическая функция

$$f(x) = \sin(4\pi x)\, e^{-5|x|}$$

Количество эпох: 50000

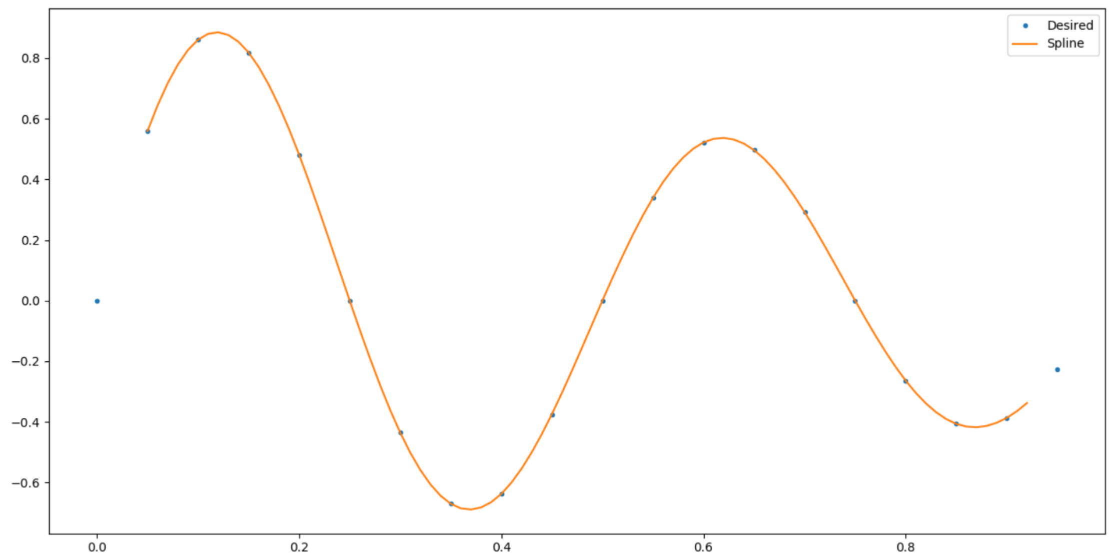

Рис. 7. Аппроксимационная функция методом Spline (результат хорошо)

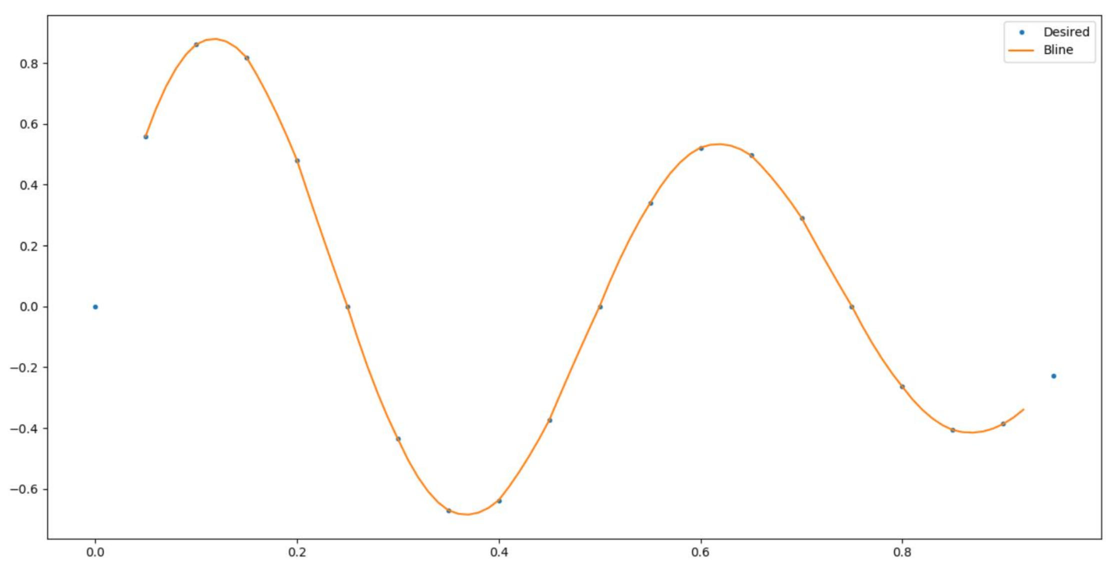

Рис. 8. Аппроксимационная функция своим методом

(результат идеально получается)

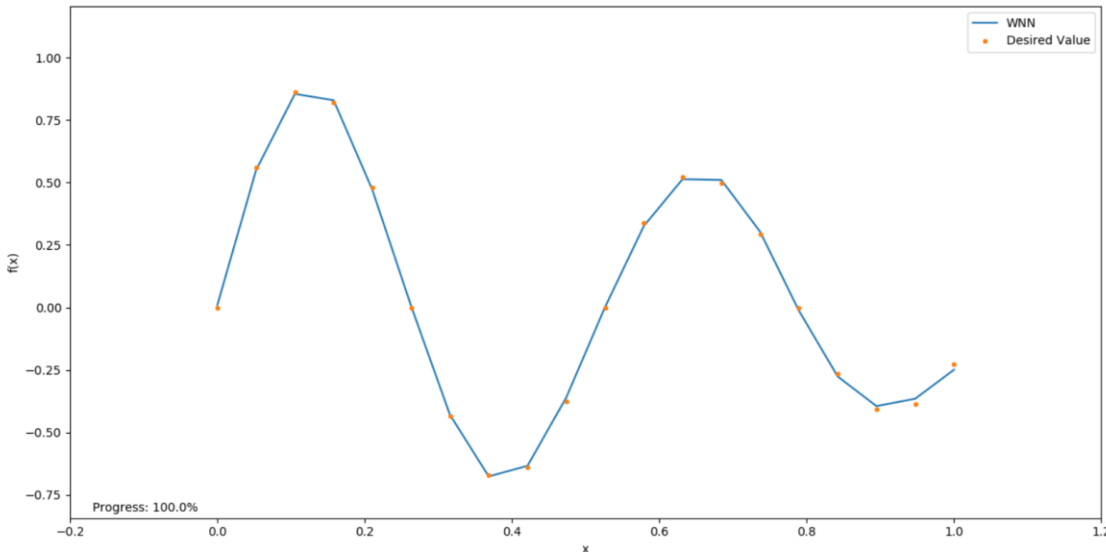

Рис. 9. Аппроксимационная функция при обучении Вейвлет-нейронной сети (видно, что функция получена хуже чем два первых методов)

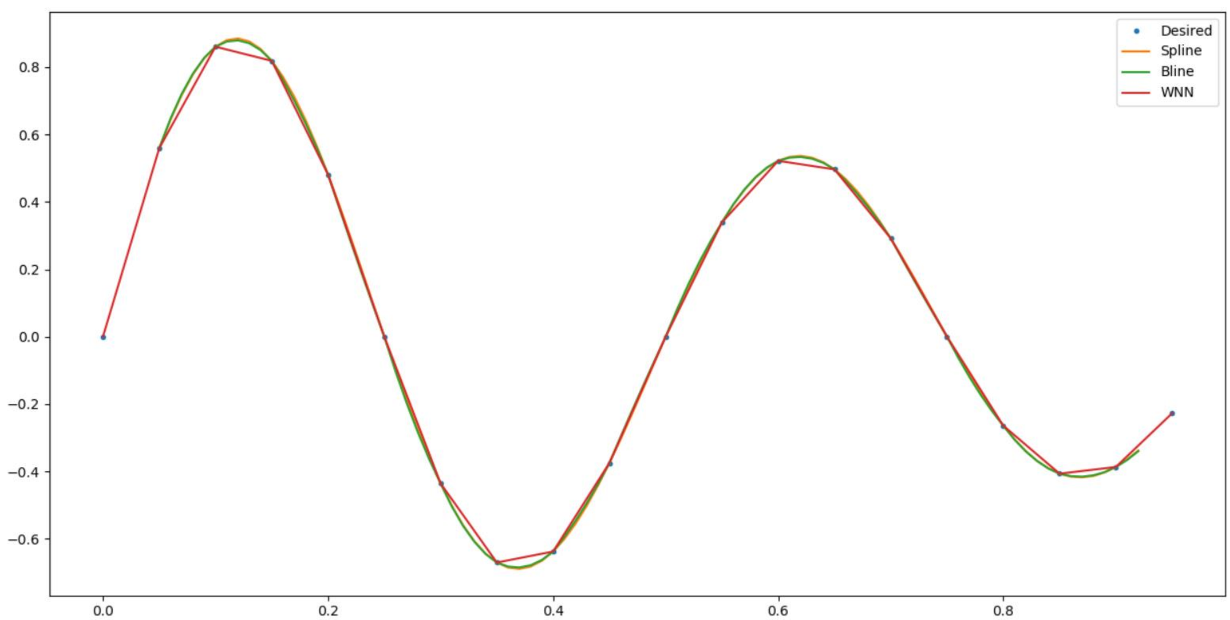

Рис. 10. Аппроксимационная функция тремя методами

Вывод*: метод «трех точек» дает лучшую аппроксимацию чем всех, также этот метод выиграет по времени и по памяти.*

5. Оценка качества аппроксимации

1) Метод «**трех точек**» и **Вейвлет-нейронная сеть** решает проблему аппроксимации необычных функций хорошо и аналитически.
2) Средняя квадратическая ошибка Вейвлет-нейронной сети стремится к нулю. При обучении 20000 эпох значение ошибки равно **MSE = 3.765e-05** для функция в *Рис. 6*, а для точной функции как $y = \sin(x)$ её средняя квадратическая ошибка равна **MSE = 6.966e-06**.

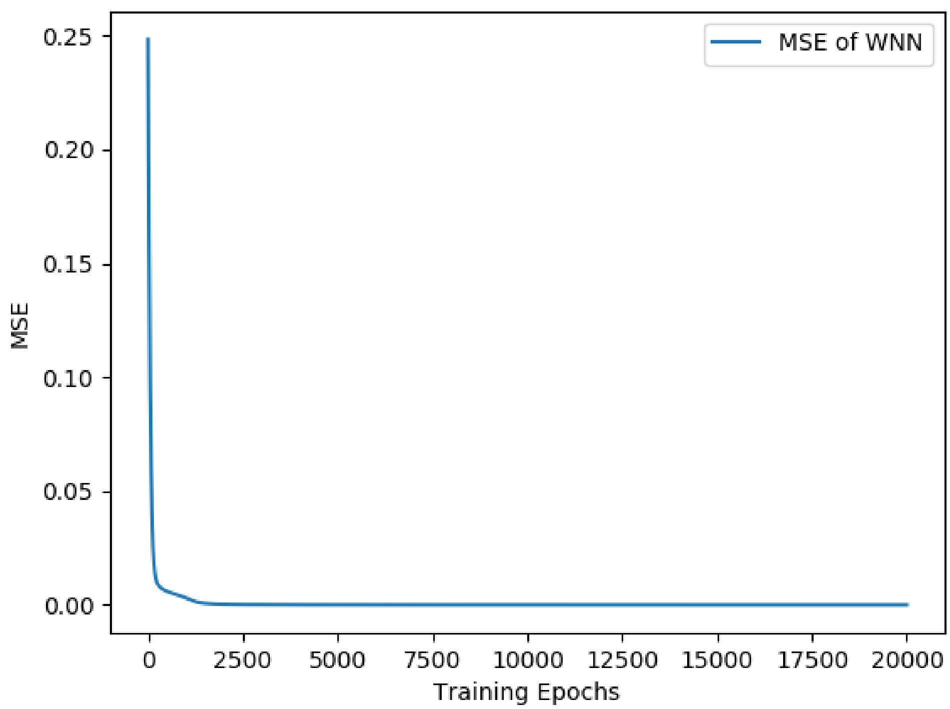

Рис. 11. Зависимость средней квадратической ошибки Вейвлет-нейронной сети от количеств эпох обучении в эксперименте №1.

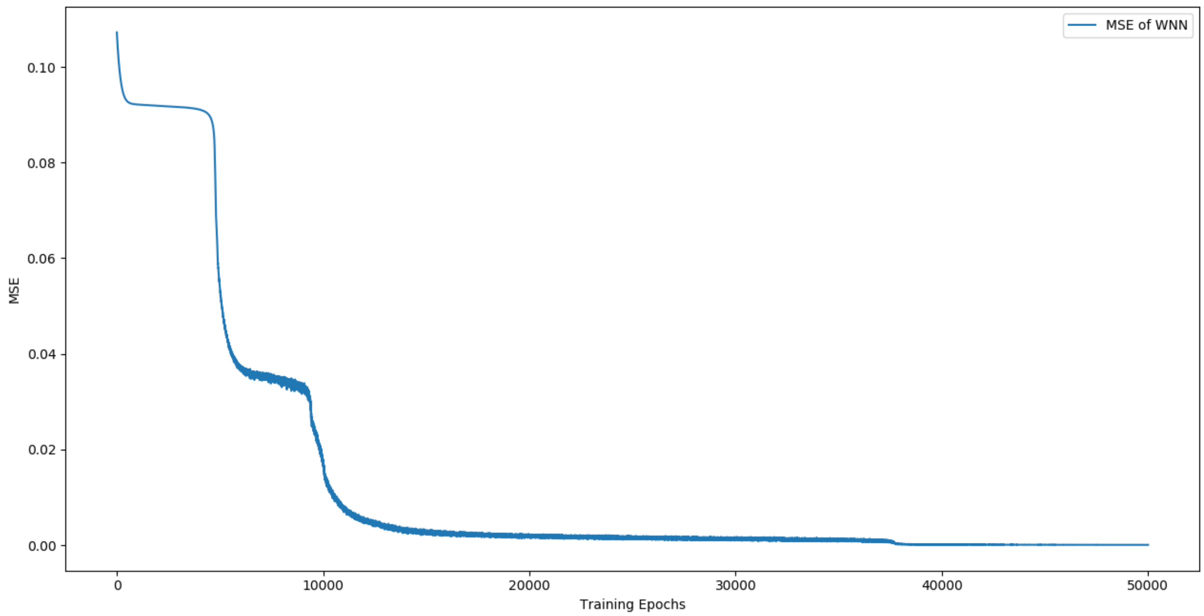

*Рис. 12. Зависимость средней квадратической ошибки Вейвлет-нейронной сети от количеств эпох обучении в эксперименте №2. (Значение **MSE = 6.831e-05**)*

По результатам средней квадратической ошибки обучении сеть даёт хороший результат аппроксимации после 1800-ых эпох, процесс обучении приблизительно к аналитической функции аппроксимации от **26-30%**. После этого процесс продолжается до последних заданных чисел эпох, также уменьшается значение ошибки.

3) Метод **«трех точек»** тоже даёт надежный результат. На самом деле метод чистая математика и быстро реализуется. При этом результат лучше чем метод ***Spline*** и приблизительно к обучению Вейвлет-нейронной сети.
4) Метод **«трех точек»** выиграет по времени и по объемной памяти (почти **1.33** раза меньше метода Spline)

ЛИТЕРАТУРЫ

1. David Veitch. Wavelet Neural Networks and their application in the study of dynamical systems (2005)
2. Antonios K. Alexandridis, Achilleas D. Zapranis. Wavelet Neural Networks - A Practical Guide.
3. Natural Cubic Spline Algorithm
4. ZARITA ZAINUDDIN, ONG PAULINE. Function Approximation Using Artificial Neural Networks (2007)
5. https://datascience.stackexchange.com/questions/53009/approximating-multi-variable-function-with-neural-network-in-python?fbclid=IwAR08Y19kcqUulP_Vp7xQlHsIhlhe1Xw8CAQqQeTi9wk9gVvLfPzLXzLUwN4
6. Brendan Fortuner. Visualizing the Universal Approximation Theorem (2017) https://towardsdatascience.com/can-neural-networks-really-learn-any-function-65e106617fc6
7. https://en.wikipedia.org/wiki/Universal_approximation_theorem