

Метод приближенного отображения элементов одного функционального пространства в другое

Градов В.М.^{1,*}, Nguyen Duc Binh¹

*gradov@bmstu.ru

¹МГТУ им. Н.Э.Баумана, Москва, Россия

Рассматривается задача наилучшего приближения отображения элементов из одного функционального пространства в другое. Предложен новый метод решения задачи, основанный на нечеткой системе вывода Такаги-Сугено. Приведено качество нового подхода для повышения выстродействия реализации дифференциальных приближений в задачах радиационного переноса.

Ключевые слова: математическое моделирование, наилучшее приближение, приближенное отображение, однозначное отображение, функциональные пространства.

Введение

1. Математическая модель

Следующая задача является обобщением задачи вычисления приближенного отображения между двумя функциональными пространствами.

Пусть F и G – функциональные пространства над \mathbb{R} .

Пусть $f_k \in F$ и $g_k \in G$ – скалярные функции, определенные и непрерывные на отрезке $[a; b] \neq \emptyset$ для $\forall k = \overline{1, n}$.

Пусть $\Theta: F \rightarrow G$ – множество однозначных отображений функционального пространства F в G (см. рис. 1), т.е.

$$\Theta = \langle \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n \rangle, \text{ где } \theta_k: f_k \rightarrow g_k, \forall k = \overline{1, n} \quad (1)$$

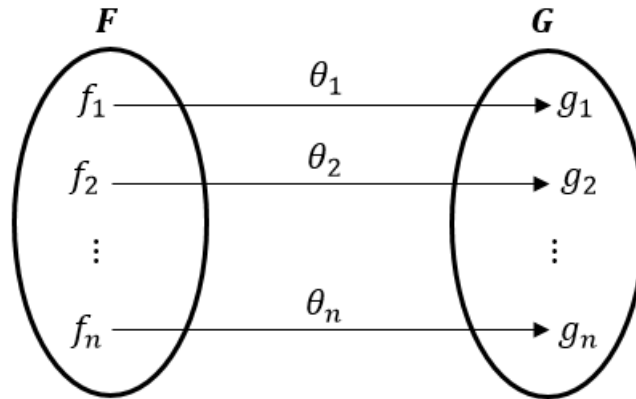


Рис. 1. Характеристика отображения пространства F в G

Базовым назовём набор соответственных функций (f^*, g^*) в функциональном пространстве (F, G) , при этом θ^* называется базовым отображением функции f^* в функцию g^* .

Рассматривается задача аппроксимации отображении одной функции \check{f} над функциональным пространством F в функцию \check{g} над G :

$$\check{\theta}: \check{f} \rightarrow \check{g} \quad (2)$$

Сформулируем приближенное отображение $\check{\theta}$ на основе нечеткой системы вывода Такаги-Сугено.

2. Обобщение нечеткой системы вывода Такаги-Сугено

Модели Такаги – Сугено были предложены в работе [Takagi, Sugeno, 1985] и с тех пор получили большие применения в различных прикладных областях (см., например, [Пегат, 2009; Рутковская и др., 2013]).

Особенностью данной модели является то, что за счет использования систем нечетких правил оказывается возможным, не выходя за рамки линейных зависимостей, учитывать то, что влияние объясняющих переменных на объясняемые при различных условиях может быть разным. Успешность модели Такаги-Сугено во многом объясняется тем, что конкретный вид функциональной зависимости (вообще говоря, нелинейной) одних показателей от других не предполагается.

Если в классических нелинейных эконометрических моделях исследователь, как правило, более или менее произвольно с самого начала выбирает форму

нелинейной зависимости, то нечеткие модели Такаги – Сугено сами «нащупывают» нужную форму нелинейности.

Базовые знания данной системы соответствует наборы нечетких правил «если-то» (if-then), которые имеют способность к аппроксимированию нелинейных функций. Такие правила выглядят следующим образом:

$$R^k: \text{if } \beta_1 \text{ is } A_1^k \text{ and } \beta_2 \text{ is } A_2^k \dots \text{and } \beta_n \text{ is } A_n^k \text{ then } \omega_k \text{ is } \Psi^k(\beta^k) \quad (3)$$

где $k = 1, 2, 3, \dots$ – номер правила;

$A_1^k, A_2^k, \dots, A_n^k$ – нечеткие множества;

$\beta^k = \langle \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n \rangle$ – вектор входных переменных k -го правила ($n = 1, 2, \dots$);

ω_k – выходная переменная;

Ψ^k – линейная или нелинейная функция.

На основе имеющихся правил делаются соответствующие заключения для выходной переменной. Заключения правил объединяются для получения четких значений переменной полезности. Полученные четкие значения являются численными оценками предпочтительности альтернатив.

В системы вывода Такаги-Сугено четкое значение переменной вывода вычисляется следующей формулой:

$$\omega = \frac{\sum_k \omega_k \mu_k}{\sum_k \mu_k} \quad (4)$$

где μ_k – коэффициент достоверности k -го правила (или уровень зависимости).

3. Определение приближенного отображения над функциональными пространствами

В этом разделе дается краткое описание того подхода, который применяется в настоящей работе. В качестве исходных данных для построения приближенного отображения θ в формуле (2) берутся n -мерные наблюдения $(f^{(k)}, g^{(k)}) \in (F, G)$. Предложим, что базовый (f^*, g^*) выбирается любым в качестве n указанных наборов заблаговременно.

Процесс построения модели ведется итерационно. Перед началом каждой итерации формат системы нечетких правил считается выбранным. Определяются значения $\check{g}^{(k)}$ для каждого нечеткого правила вида:

$$R^k: \text{if } \check{f} \text{ is base on } f^{(k)} \text{ and } f^* \text{ then } \check{g}^{(k)} \text{ is approximate}(\check{f}, f^{(k)}, g^{(k)}, f^*, g^*) \quad (5)$$

где k – номер правила, всего $(n - 1)$ правил, т.к. k -го набор должен отличаться от базового;

approximate – функция логарифмической аппроксимации вывода $\check{g}^{(k)}$.

Пусть $\check{f} = \langle \check{f}_1, \check{f}_2, \dots, \check{f}_m \rangle$ и $\check{g} = \langle \check{g}_1, \check{g}_2, \dots, \check{g}_m \rangle$ – входная функция в F и её отображение в G соответственно.

Коэффициенты достоверности i -го элемента k -го правила вычисляется общей формулой:

$$\mu_i^{(k)} = \frac{f_i^* - \check{f}_i}{f_i^* - f_i^{(k)}}, \quad \forall i = \overline{1, m} \quad (6)$$

В результате приближенное отображение i -го элемента равно:

$$\check{g}_i = \frac{\sum_k \check{g}_i^{(k)} \mu_i^{(k)}}{\sum_k \mu_i^{(k)}} \quad (7)$$

В качестве критериев при проведении итерационного процесса используются среднеквадратичная ошибка прогноза **RMSE**, которая вычисляется по следующим формулам:

$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^m (\check{g}_i^0 - \check{g}_i)^2}{m}} \quad (8)$$

где $\check{g}^0 = \langle \check{g}_1^0, \check{g}_2^0, \dots, \check{g}_m^0 \rangle$ – точный расчёт отображения функции \check{f} в G .

4. Результат расчета и экспериментов

В данном разделе рассматривается применение нового метода для повышения выстродействия реализации дифференциальных приближений подходов к решению задачи определения радиационных характеристик в задачах радиационного переноса цилиндрической геометрии.

Математическая модель имеет следующем вид:

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = c \int_0^{\infty} k'_{\lambda}(T, p, \lambda) \left(U_{\lambda_p}(T) - U_{\lambda}(T) \right) d\lambda \quad (9)$$

$$\frac{1}{3} \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{k'_{\lambda}} \frac{dU_{\lambda}}{dr} \right) + k'_{\lambda} \left(U_{\lambda_p}(T) - U_{\lambda}(T) \right) = 0 \quad (10)$$

Здесь T – температурное распределение в плазме; λ, k'_{λ} – коэффициенты теплопроводности и оптического поглощения плазмы на длине волны λ с учетом вынужденного испускания; p – рабочее давление в разряде; c – скорость света; F – плотность интегрального по спектру радиального потока излучения в точке с текущей радиальной координатой r ; $U_{\lambda_p}, U_{\lambda}$ – равновесная объемная плотность энергии излучения и объемная плотность энергии излучения, устанавливающаяся в плазме.

Будем искать приближенные отображения элементов функционального пространства температуры \mathbf{T} в другие. Все функции над \mathbf{T} задаются следующей предложенным показательным законом:

$$T^{(k)}(r) = T_o^{(k)} + \left(T_w^{(k)} - T_o^{(k)} \right) \left(\frac{r}{R} \right)^m \quad (11)$$

где $T_o^{(k)}, T_w^{(k)}$ – начальная и максимальная температура k -ой функции;

R – радиус разрядного канала (внутренний радиус разрядной трубки);

m – показатель температуры ($m = 4.0, 6.0, 8.0, \dots$).

Отображенными функциональными пространствами являются

- (1) пространство дивергенции плотности спектрального потока излучения $\operatorname{div} \mathbf{F}$;
- (2) пространство объемной плотности энергии излучения \mathbf{U} ;
- (3) пространство разности равновесной объемной плотности энергии излучения и объемной плотности энергии излучения $d\mathbf{U}$.

Ниже проведены результаты расчета приближенных отображений $\Theta_1: \mathbf{T} \rightarrow \operatorname{div} \mathbf{F}$, $\Theta_2: \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{U}$, $\Theta_3: \mathbf{T} \rightarrow d\mathbf{U}$ (см. таб. 1)

Таблица 1. Расчёт приближенных, точных значений и относительных ошибок новым методом вычисления отображении элементов для трёх функциональных пространств $divF$, U и dU

Approximated $divF$	Exact $divF$	Error Θ_1	Approximated U	Exact U	Error Θ_2	Approximated dU	Exact dU	Error Θ_3
38165.79131	38389.25584	5.82E-03	4.18E-08	4.25E-08	1.60E-02	1.87E-11	1.47E-11	2.71E-01
38167.81302	38391.27907	5.82E-03	4.18E-08	4.25E-08	1.60E-02	1.91E-11	1.50E-11	2.73E-01
38170.78357	38394.2308	5.82E-03	4.18E-08	4.25E-08	1.60E-02	2.02E-11	1.58E-11	2.79E-01
38175.49823	38398.86688	5.82E-03	4.18E-08	4.25E-08	1.61E-02	2.20E-11	1.71E-11	2.87E-01
38181.6027	38404.76331	5.81E-03	4.18E-08	4.25E-08	1.62E-02	2.45E-11	1.89E-11	2.94E-01
38188.60063	38411.32591	5.80E-03	4.18E-08	4.25E-08	1.62E-02	2.77E-11	2.14E-11	2.97E-01
38195.85414	38417.79054	5.78E-03	4.18E-08	4.25E-08	1.64E-02	3.16E-11	2.44E-11	2.96E-01
38202.58279	38423.22314	5.74E-03	4.18E-08	4.25E-08	1.65E-02	3.61E-11	2.80E-11	2.91E-01
38207.86485	38426.52	5.69E-03	4.18E-08	4.25E-08	1.67E-02	4.13E-11	3.22E-11	2.81E-01
38210.63701	38426.40833	5.62E-03	4.18E-08	4.25E-08	1.68E-02	4.71E-11	3.72E-11	2.67E-01
38209.69537	38421.44728	5.51E-03	4.18E-08	4.25E-08	1.70E-02	5.37E-11	4.30E-11	2.50E-01
38203.69554	38410.02965	5.37E-03	4.17E-08	4.25E-08	1.73E-02	6.10E-11	4.96E-11	2.31E-01
38191.15511	38390.38433	5.19E-03	4.17E-08	4.25E-08	1.75E-02	6.91E-11	5.72E-11	2.09E-01
38170.45593	38360.5798	4.96E-03	4.17E-08	4.24E-08	1.78E-02	7.81E-11	6.59E-11	1.86E-01
38139.84647	38318.5289	4.66E-03	4.17E-08	4.24E-08	1.81E-02	8.81E-11	7.58E-11	1.61E-01
38097.44595	38261.99497	4.30E-03	4.16E-08	4.24E-08	1.84E-02	9.91E-11	8.73E-11	1.35E-01
38041.25056	38188.5998	3.86E-03	4.16E-08	4.24E-08	1.87E-02	1.11E-10	1.00E-10	1.08E-01
37969.13735	38095.83352	3.33E-03	4.15E-08	4.23E-08	1.91E-02	1.25E-10	1.16E-10	7.97E-02
37878.87522	37981.0668	2.69E-03	4.15E-08	4.23E-08	1.94E-02	1.40E-10	1.33E-10	5.07E-02
37768.13285	37841.56547	1.94E-03	4.14E-08	4.23E-08	1.98E-02	1.57E-10	1.54E-10	2.12E-02
37634.49036	37674.50797	1.06E-03	4.14E-08	4.22E-08	2.02E-02	1.77E-10	1.78E-10	8.54E-03
37475.45403	37477.00582	4.14E-05	4.13E-08	4.21E-08	2.05E-02	1.99E-10	2.07E-10	3.81E-02
37288.47237	37246.12724	1.14E-03	4.12E-08	4.21E-08	2.09E-02	2.24E-10	2.40E-10	6.69E-02
37070.9542	36978.92416	2.49E-03	4.11E-08	4.20E-08	2.12E-02	2.54E-10	2.80E-10	9.45E-02
36820.2907	36672.46267	4.03E-03	4.10E-08	4.19E-08	2.16E-02	2.88E-10	3.27E-10	1.20E-01
36533.88102	36323.85699	5.78E-03	4.09E-08	4.18E-08	2.18E-02	3.29E-10	3.84E-10	1.44E-01
36209.15927	35930.30677	7.76E-03	4.07E-08	4.16E-08	2.20E-02	3.77E-10	4.51E-10	1.64E-01
35843.62613	35489.13769	9.99E-03	4.06E-08	4.15E-08	2.21E-02	4.35E-10	5.32E-10	1.81E-01
35434.88425	34997.84494	1.25E-02	4.04E-08	4.13E-08	2.22E-02	5.06E-10	6.28E-10	1.94E-01
34980.69067	34454.13923	1.53E-02	4.02E-08	4.11E-08	2.20E-02	5.92E-10	7.42E-10	2.02E-01

34464.58589	33855.99474	1.80E-02	4.00E-08	4.09E-08	2.18E-02	6.99E-10	8.79E-10	2.05E-01
33888.05767	33201.69842	2.07E-02	3.97E-08	4.06E-08	2.13E-02	8.30E-10	1.04E-09	2.03E-01
33258.01947	32489.89988	2.36E-02	3.95E-08	4.03E-08	2.06E-02	9.92E-10	1.23E-09	1.96E-01
32573.85145	31719.66106	2.69E-02	3.91E-08	3.99E-08	1.97E-02	1.19E-09	1.46E-09	1.84E-01
31835.03207	30890.50503	3.06E-02	3.88E-08	3.95E-08	1.85E-02	1.44E-09	1.73E-09	1.67E-01
31024.34527	30002.46315	3.41E-02	3.84E-08	3.90E-08	1.71E-02	1.74E-09	2.04E-09	1.45E-01
30115.67035	29056.12023	3.65E-02	3.79E-08	3.85E-08	1.54E-02	2.11E-09	2.40E-09	1.21E-01
29147.49922	28052.6574	3.90E-02	3.74E-08	3.79E-08	1.34E-02	2.55E-09	2.82E-09	9.34E-02
28125.12113	26993.89311	4.19E-02	3.68E-08	3.72E-08	1.13E-02	3.08E-09	3.29E-09	6.42E-02
26930.70401	25882.3234	4.05E-02	3.61E-08	3.65E-08	8.98E-03	3.70E-09	3.83E-09	3.42E-02
25645.7051	24721.16542	3.74E-02	3.54E-08	3.56E-08	6.61E-03	4.41E-09	4.44E-09	5.73E-03
24251.61295	23515.14723	3.13E-02	3.45E-08	3.47E-08	4.26E-03	5.22E-09	5.11E-09	2.07E-02
22203.39709	22023.55352	8.17E-03	3.36E-08	3.37E-08	1.73E-03	6.07E-09	5.85E-09	3.73E-02
20176.71486	20466.99168	1.42E-02	3.26E-08	3.26E-08	1.38E-03	6.90E-09	6.65E-09	3.77E-02
18783.00468	18896.82239	6.02E-03	3.16E-08	3.14E-08	4.58E-03	7.72E-09	7.49E-09	3.10E-02
17400.17144	17323.93412	4.40E-03	3.04E-08	3.02E-08	7.16E-03	8.58E-09	8.35E-09	2.76E-02
16003.96832	15759.90171	1.55E-02	2.92E-08	2.90E-08	8.85E-03	9.47E-09	9.22E-09	2.69E-02
14583.63928	14216.83355	2.58E-02	2.80E-08	2.77E-08	9.39E-03	1.03E-08	1.01E-08	2.83E-02
13146.31411	12707.16474	3.46E-02	2.67E-08	2.65E-08	8.54E-03	1.12E-08	1.09E-08	3.17E-02
11696.74062	11243.40119	4.03E-02	2.55E-08	2.53E-08	6.25E-03	1.20E-08	1.16E-08	3.61E-02
10200.44773	9837.82503	3.69E-02	2.42E-08	2.42E-08	2.79E-03	1.28E-08	1.23E-08	4.00E-02
8382.68347	8485.60304	1.21E-02	2.31E-08	2.31E-08	4.09E-04	1.34E-08	1.29E-08	3.88E-02
7022.02252	7083.90183	8.74E-03	2.21E-08	2.21E-08	1.67E-03	1.37E-08	1.33E-08	3.02E-02
5846.96079	5809.91811	6.38E-03	2.12E-08	2.12E-08	3.74E-03	1.40E-08	1.37E-08	2.49E-02
4766.52948	4670.43142	2.06E-02	2.03E-08	2.05E-08	6.61E-03	1.41E-08	1.38E-08	2.24E-02
3782.46703	3668.11328	3.12E-02	1.96E-08	1.98E-08	9.88E-03	1.41E-08	1.38E-08	2.18E-02
2876.90451	2802.47117	2.66E-02	1.91E-08	1.93E-08	1.29E-02	1.40E-08	1.37E-08	2.19E-02
2029.94094	2070.42879	1.96E-02	1.86E-08	1.89E-08	1.32E-02	1.37E-08	1.34E-08	1.88E-02
1424.06718	1427.94802	2.72E-03	1.83E-08	1.86E-08	1.24E-02	1.32E-08	1.30E-08	1.57E-02
936.64815	923.95067	1.37E-02	1.81E-08	1.83E-08	1.20E-02	1.27E-08	1.25E-08	1.43E-02

Таблица 2. Расчёт среднеквадратичной ошибки прогноза *RMSE*

Отображение	Наилучшая RMSE	Наихудшая RMSE
$\theta_1: T \rightarrow \mathit{div}F$	397.11993	4388.70272
$\theta_2: T \rightarrow U$	5.502E-10	6.90855E-8
$\theta_3: T \rightarrow dU$	1.769E-10	1.18221E-8

Непрерывно-дифференцируемая функция позволяет получить более точный результат. Как уже показаны в таблице 2, новый метод позволяет найти приближенную функцию эффективно, особенно при поиска аппроксимационную функции в пространстве U и dU . Относительная ошибка для всех элементов имеет на пару порядков меньше точного расчета.

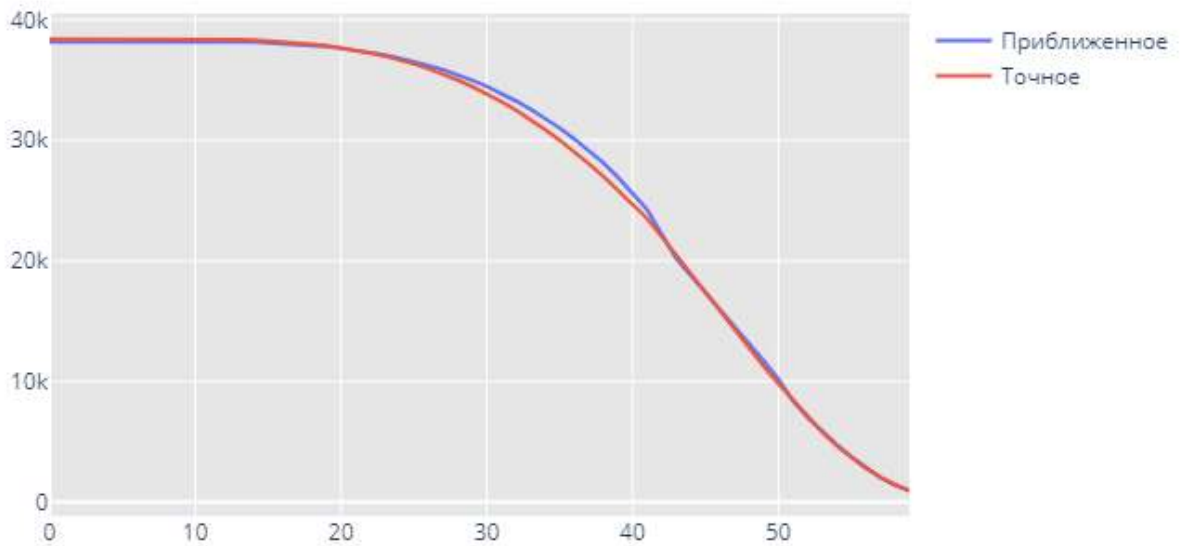


Рис. 2. Визуализация приближенной и точной функции над пространством $divF$

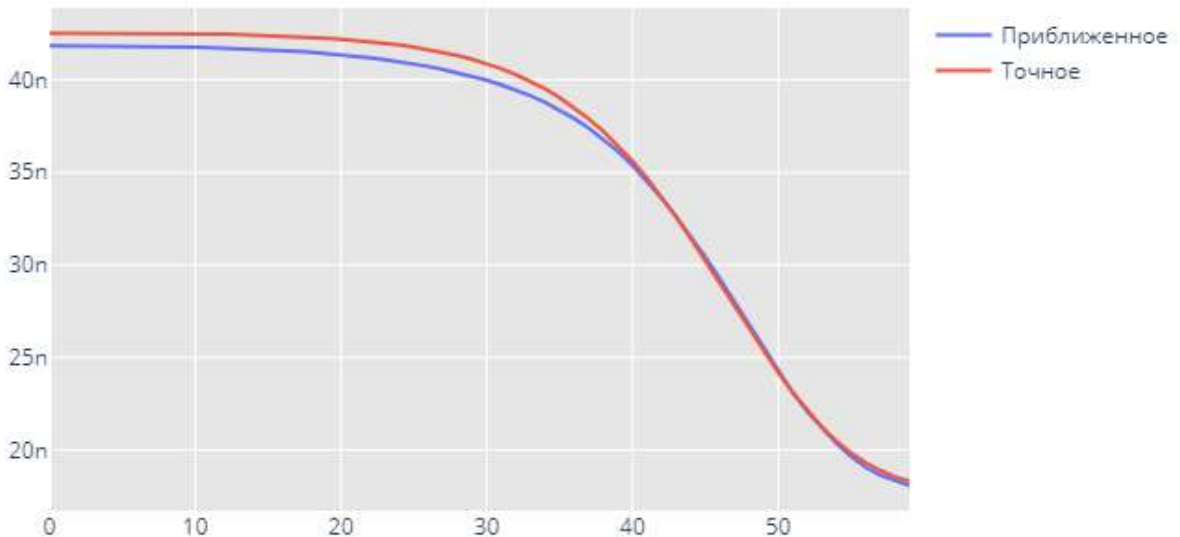


Рис. 3. Визуализация приближенной и точной функции над пространством U

Расчёт приближенного и точного решения

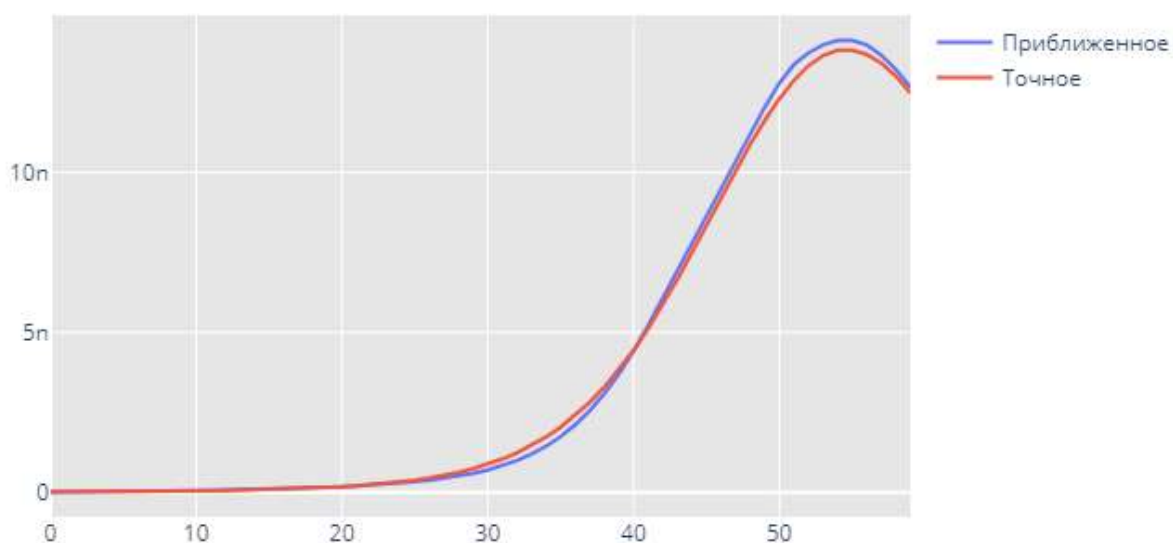


Рис. 4. Визуализация приближенной и точной функции над пространством dU

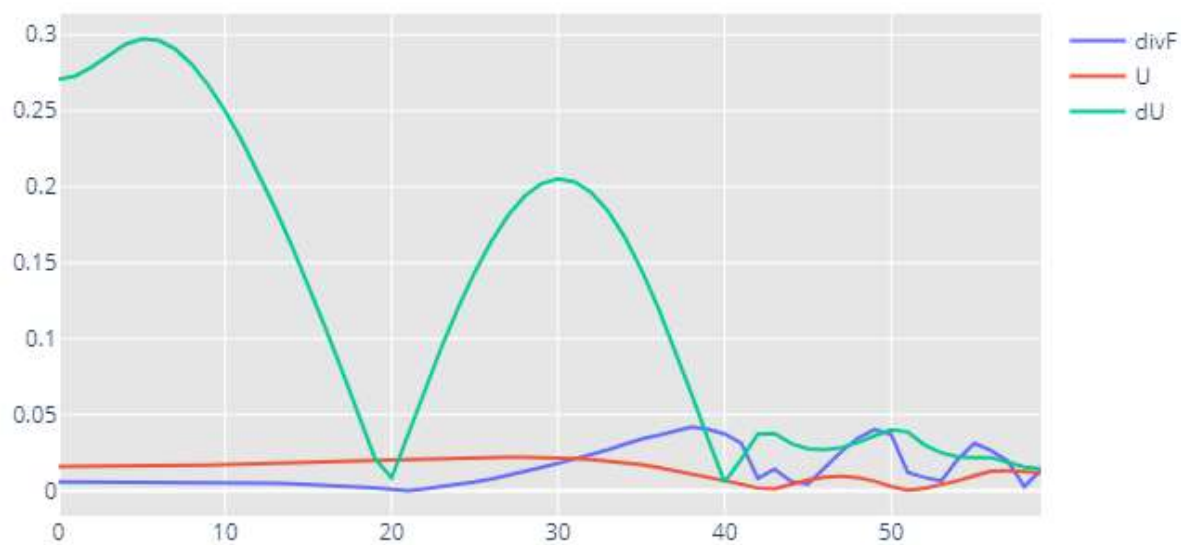


Рис. 5. Сравнение относительных ошибок вычисления приближенного отображения элементов функциональных пространств

Эксперименты показывают, что качество аппроксимации функции достаточно хорошим и практически надежным. Вследствии применения данного подхода wspomогается ускорение вычисления дифференциальных приближений в задачах радиационного переноса.

Заключение

Список литературы

1. R.E. Bellman, L.A.Zadeh Decision making in a fuzzy environment. Management Science, 17, 141-164, 1970
2. Филиппов М. В., Коробков С. С., Градов В. М., Желаев И. А. Ультрафиолетовое излучение импульсно–периодических разрядов высокого давления в ксеноне. Математика и математическое моделирование 2017 - № 6. DOI: 10.24108/mathm.0617.0000095
3. Градов В. М., Желаев И. А., Коробков С. С. Математическое моделирование и экспериментальное исследование процессов в разрядных импульсно-периодических источниках излучения с ксеноновым наполнением. Научно-технический вестник Поволжья 2018 - № 2.
4. Gradov V.M., Gavrish S.V., Rudakov I.V. Simulation of electrophysical processes in pulse-periodic tubular sources of powerful infrared radiation with sapphire shells. Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Priborostr. [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Instrum. Eng.], 2017, no. 6, pp. 130–145 (in Russ.). DOI: 10.18698/0236-3933-2017-6-130-145
5. Алексеев А.Н., Волков Н.И., Кочевский А.Н. Элементы нечёткой логики при программном контроле знаний. Открытое образование. Научно-практический журнал по информационным технологиям в образовании №4,2004
6. Смирнова Г.Н., Сорокин А.А., Тельнов Ю.Ф. Проектирование экономических информационных систем. Учебник. — М., 2001.
7. Тельнов Ю.Ф. Интеллектуальные информационные системы в экономике. — М., 2001.
8. Тихомиров В.П., Кондратьев В.К., Филинов Е.Н., Бойченко А.В. Открытые информационные системы дистанционного обучения - основа открытого образования. Открытое образование. Научно-практический журнал по информационным технологиям в образовании. № 3,2001.
9. И.Ю. Выгодчикова. О методе аппроксимации многозначного отображения алгебраическим полиномом. УДК 517.518.826 Вестник СГТУ. 2013. № 2 (70).
- 10.Выгодчикова И.Ю. О крайних точках множества решений задачи о наилучшем приближении многозначного отображения алгебраическим полиномом / И.Ю. Выгодчикова // Математика. Механика: сб. науч. тр. Вып. 5. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2003. С. 15-18.

- 11.Выгодчикова И.Ю. О монотонном алгоритме решения задачи приближения многозначного отображения алгебраическим полиномом / И.Ю. Выгодчикова // Математика. Механика: сб. науч. тр. Вып. 6. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2004. С. 27-30
- 12.Выгодчикова И.Ю. О единственности решения задачи наилучшего приближения многозначного отображения алгебраическим полиномом / И.Ю. Выгодчикова // Известия Саратовского унта. Новая серия. 2006. Т. 6. Вып. (1). 2. Серия: математика. Механика. Информатика. С. 11-19.