$$L(\vec{x}, \lambda) = x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_1 x_3 + \lambda(x_1 + x_2 + x_3 - 3)$$ a (1)

$$L'_{x_1} = x_2 + x_3 + \lambda = 0 \longrightarrow 2x_3 = -\lambda \longrightarrow \lambda = -2x_3$$

$$L'_{x_2} = x_1 + x_3 + \lambda = 0 \longrightarrow x_1 = -x_3 - \lambda$$

$$\Longrightarrow -x_3 - \lambda = -x_2 - \lambda$$

$$L'_{x_3} = x_2 + x_1 + \lambda = 0 \longrightarrow x_1 = -x_2 - \lambda \qquad x_2 = x_3$$

$$L'_{\lambda} = x_1 + x_2 + x_3 - 3 = 0 \longrightarrow -x_3 - \lambda + x_3 + x_3 - 3 = 0$$

$$\cancel{-x_3} + 2x_3 + \cancel{x_3} + x_3 - 3 = 0$$

$$\lambda = -2, \quad x_1 = x_2 = x_3 = 1$$

b

$$\nabla L = \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \begin{pmatrix} x_2 + x_3 + \lambda \\ x_1 + x_3 + \lambda \\ x_2 + x_1 + \lambda \end{pmatrix} \Longrightarrow \nabla^2 L = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$y_1 + y_2 + y_3 = 0 \longrightarrow y_1 = -y_2 - y_3$$

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \qquad y^T \nabla^2 L \, y = (y_1, y_2, y_3) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

$$= (y_1, y_2, y_3) \begin{pmatrix} y_2 + y_3 \\ y_1 + y_3 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix} = y_1(y_2 + y_3) + y_2(y_1 + y_3) + y_3(y_2 + y_1)$$

$$= y_1 y_2 + y_1 y_3 + y_2 y_1 + y_2 y_3 + y_3 y_2 + y_3 y_1 = 2y_1 y_2 + 2y_1 y_3 + 2y_2 y_3$$

$$= 2\left((-y_2-y_3)y_2 + (-y_2-y_3)y_3 + y_2y_3\right) = 2\left(-y_2^2 - \cancel{y_2y_3} - y_2y_3 - y_3^2 + \cancel{y_2y_3}\right)$$

$$= -2\left(y_2^2+y_3^2+y_2y_3\right) = -\left(2y_2^2+2y_3^2+2y_2y_3\right)$$

$$= -\left(y_2^2+(y_2+y_3)^2+y_3^2\right) \le 0$$

נניח בשלילה שהביטוי שווה ל-0 $\quad y_2^2+(y_2+y_3)^2+y_3^2=0$

$$\Downarrow$$

בסתירה לכך ש- $y\neq 0$ $\quad y_2=y_3=0 \Longrightarrow y_1=0$

② תחילה ננסה לבחור אילוץ פעיל 1:

$$L(\vec{X},\lambda) = (x_1+x_2)^2 - 10(x_1+x_2) + \lambda(3x_1+x_2-6)$$

$$\nabla L = \begin{pmatrix} 2(x_1+x_2)-10+3\lambda \\ 2(x_1+x_2)-10+\lambda \\ 3x_1+x_2-6 \end{pmatrix} = 0 \longrightarrow \begin{matrix} x_1=\frac{1}{2} \\ x_2=\frac{9}{2} \\ \lambda=0 \end{matrix}$$

נבדוק האם הנק' $\left(\frac{1}{2},\frac{9}{2}\right)$ פיזבילית:

$\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{9}{2}\right)^2 > 5 \Longrightarrow$ לכן לא פיזבילי

ננסה לקחת אילוץ אחר:

$$L(\vec{X},\lambda) = (x_1+x_2)^2 - 10(x_1+x_2) + \lambda(x_1^2+x_2^2-5)$$

$$\nabla L = \begin{pmatrix} 2(x_1+x_2)-10+\lambda\cdot 2\cdot x_1 \\ 2(x_1+x_2)-10+2\lambda x_2 \\ x_1^2+x_2^2-5 \end{pmatrix} = 0 \longrightarrow \begin{matrix} x_1=x_2=-\sqrt{\frac{5}{2}} \\ \lambda=-2-\sqrt{10} \end{matrix}$$

$$x_1=-\sqrt{\frac{5}{2}}<0 \rightarrow -x_1\neq 0$$

לכן נק' לא פיזבילית

באותו אופן ראינו כי גם רק האילוץ השלישי לא מניב פתרון פיז׳.

<u>ננסה לבחון שני אילוצים:</u>

$$\mathcal{L}(\vec{x},\lambda_1,\lambda_2) = (x_1+x_2)^2 - 10(x_1+x_2) + \lambda_1(3x_1+x_2-6) + \lambda_2(x_1^2+x_2^2-5)$$

$$\nabla \mathcal{L} = \begin{pmatrix} 2(x_1+x_2) - 10 + 3\lambda_1 + 2x_1\lambda_2 \\ 2(x_1+x_2) - 10 + \lambda_1 + 2x_2\lambda_2 \\ 3x_1 + x_2 - 6 \\ x_1^2 + x_2^2 - 5 \end{pmatrix} = 0$$

לאחר פתרון מערכת המשוואות נקבל:

$$(1.42,\ 1.72,\ 0.29,\ 0.99)$$

$$\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & \lambda_1 & \lambda_2 \\ (2.17, & -0.52, & 4.82, & -1.79) \end{array}$$

פתרון זה נפסל מכיוון ! $\lambda_2<0$.

לאחר בדיקה התוצאה הראשונה מקיימת פיזיבליות.

לכן הנקודה $(1.42,\ 1.72)$ קריטית -

.6

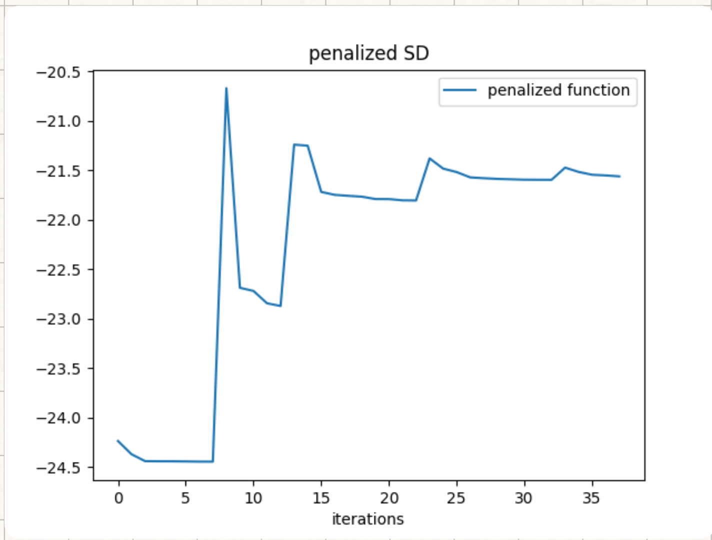
$$\nabla^2 \mathcal{L} = \begin{pmatrix} 2+2\lambda_2 & 2 \\ 2 & 2+2\lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+2\cdot 0.99 & 2 \\ 2 & 2+2\cdot 0.99 \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}}_{\text{SPD (ע״ע 0, 4)}} + 2\cdot 0.99 \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{חיובית ממש}} > 0$$

לכן $\nabla^2 \mathcal{L}$ חיובית ממש לכן ש' מינימום.

ב. מצורף בקוד.

ג. להלן הגרף בעבור הבעיה:



3 .a

$$\min_{x \in \mathbb{R}} \left\{ \frac{1}{2} h x^2 - x g \right\} \quad s.t: \; a \le x \le b \;, \; h > 0$$

נסמן $f(x) = \frac{1}{2} h x^2 - x g$

$$f'(x) = hx - g = 0 \qquad f''(x) = h > 0$$

$$x = \frac{g}{h}$$

לכן נק' מינימום

$$x^* = \begin{cases} a & \frac{g}{h} < a \\ \frac{g}{h} & a < \frac{g}{h} < b \\ b & \frac{g}{h} \ge b \end{cases}$$

.b נסמן $f(x) = \frac{1}{2} x^T H x - x^T g$

$$f(x) = \frac{1}{2} x^T H x - x^T g = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} x_j H_{ji} \right) x_i - \sum_{i=1}^{n} (g_i , x_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^{n} x_j H_{ji} - g_i \right) x_i$$

ב. CD אומר בכל איטרציה קורדינט ל x_i בנפרד

אז נסמן ש- $f(x_i) = \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^{n} x_j H_{ji} - g_i \right) x_i$

H סימטרית, לכן $H_{ij} = H_{ji}$, אז נפריד למקרים בהם $i = j$ ו- $i \ne j$

$$f(x_i) = \frac{1}{2} x_i \sum_{j=1}^{n} x_j h_{jj} + \left(\left(\sum_{j \ne i} x_j h_{ji} \right) - g_i \right) x_i$$

$$= \frac{1}{2} x_i^2 h_{ii} + \left[\left(\sum_{j \ne i} h_{ij} x_j \right) - g_i \right] \cdot x_i$$

נרצה להגיע לביטוי מהצורה של סעיף a.

נסמן את $g = \left[\left(\sum_{j\neq i} h_{ij} x_j\right) - g_i\right]$ ואת $h_{ii} = h$

ונקבל ביטוי מהצורה שרצינו. לכן:

$$x_i^* = \begin{cases} a_i & a_i > \frac{g}{h} \\ \frac{g}{h} & a_i \le \frac{g}{h} \le b_i \\ b_i & b_i < \frac{g}{h} \end{cases}$$

כאשר:

$$\frac{g}{h} = -\frac{\left[\left(\sum_{j\neq i} h_{ij} x_j\right) - g_i\right]}{h_{ii}}$$

c. מצורף בקוד.

d. לאחר הרצת הקוד קיבלנו $x^* = \left(5, 3\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, 1\frac{2}{3}, 5\right)$

קוד מצורף:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
#2d
def SD():
    x=np.array([1,1])
    f = lambda x,miu: (x[0] + x[1]) ** 2 - 10 * (x[0] + x[1]) + miu *
(3 * x[0] + x[1] - 6) ** 2 + miu * (max(0, x[0] ** 2 + x[1] ** 2 -
5)) ** 2 + miu * (max(0,-x[0])) ** 2

    result=[]
    for miu in ([0.01,0.1,1,10,100]):
        for i in range(100):
            gk = grad(x[0],x[1],miu)
            d = (-1)*gk
            alpha = line_search(f,x,d,gk,miu)
            if np.linalg.norm(alpha*d)/np.linalg.norm(x) < 0.001:
                break
            x = x + alpha*d
            result.append(f(x,miu))

    show_graph_not_log(result,"penalized function" , "penalized SD"
,"iterations")

def grad(x1,x2,miu):
    return np.array([2 * x1 +2 * x2 - 10 + 6 * x1 * miu * (3 * x1 +
x2 - 6) + 2 * miu * max(0, x1 ** 2 + x2 ** 2 - 5) * 2 * x1 + 2 * miu
* max(0, -x1) * -1, 2 * x1 + 2 * x2 - 10 + 2 * miu * (3 * x1 + x2 -
6) + 2 * miu * max(0, x1 ** 2 + x2 ** 2 - 5) * 2 * x2])

def line_search(f, x, d, gk,miu, alpha=1, beta=0.5, c=0.0001, iter =
100):
    for j in range(iter):
        if (f(x + alpha * d,miu)) <= f(x,miu) + alpha * c *
np.transpose(gk) @ d:
            break
        else:
            alpha = alpha * beta
    return alpha

#3c
def coordinate_descent(H,g,a,b):
    x = np.ones(len(a))
    for k in range(100):
        x_prev = x
        for i in range(len(a)):
            gh = 0
            for j in range (len(a)):
                if i != j:
                    gh = gh + H[i][j]*x[j]
            gh = -(gh -g[i])/ H[i][i]
            if gh < a[i]:
                x[i] = a[i]
            elif a[i] <= gh <= b[i]:
                x[i] = gh
            else: x[i] = b[i]
        if np.linalg.norm(x-x_prev)/np.linalg.norm(x_prev) < 0.001:
            print(k)
            break
    return x
```

```python
def show_log_graph(arr,_label,title,xlabel):
    plt.semilogy(arr, label = _label)
    plt.xlabel(xlabel)
    plt.title(title)
    plt.legend()
    plt.show()

def show_graph_not_log(arr, _label, title, xlabel):
    plt.plot(arr, label=_label)
    plt.xlabel(xlabel)
    plt.title(title)
    plt.legend()
    plt.show()


if __name__ == '__main__':
    #2c
    SD()
    #3d
    H = np.diag([6,6,6,6,6]) +np.full((5,5),-1)
    g = np.array([18,6,-12,-6,18])
    a = np.zeros(5)
    b = np.array([5,5,5,5,5])
    print(coordinate_descent(H,g,a,b))
```