给定在范围 $-2^{w-1}\leqslant x$，$y\leqslant 2^{w-1}-1$ 之内的整数值 x 和 y，它们的和就在范围 $-2^{w}\leqslant x+y\leqslant 2^{w}-2$ 之内，要想准确表示，可能需要 $w+1$ 位。就像以前一样，我们通过将表示截断到 w 位，来避免数据大小的不断扩张。然而，结果却不像模数加法那样在数学上感觉很熟悉。定义 $x+_{w}^{t}y$ 为整数和 $x+y$ 被截断为 w 位的结果，并将这个结果看做是补码数。

原理：补码加法

对满足 $-2^{w-1}\leqslant x$，$y\leqslant 2^{w-1}-1$ 的整数 x 和 y，有：

$$x+_{w}^{t}y=\begin{cases}x+y-2^{w}, & 2^{w-1}\leqslant x+y & \text{正溢出}\\ x+y, & -2^{w-1}\leqslant x+y<2^{w-1} & \text{正常}\\ x+y+2^{w}, & x+y<-2^{w-1} & \text{负溢出}\end{cases}\tag{2.13}$$

图 2-24 说明了这个原理，其中，左边的和 $x+y$ 的取值范围为 $-2^{w}\leqslant x+y\leqslant 2^{w}-2$，右边显示的是该和数截断为 w 位补码的结果。（图中的标号“情况 1”到“情况 4”用于该原理形式化推导的案例分析中。）当和 $x+y$ 超过 $TMax_{w}$ 时（情况 4），我们说发生了正溢出。在这种情况下，截断的结果是从和数中减去 2^{w}。当和 $x+y$ 小于 $TMin_{w}$ 时（情况 1），我们说发生了负溢出。在这种情况下，截断的结果是把和数加上 2^{w}。

两个数的 w 位补码之和与无符号之和有完全相同的位级表示。实际上，大多数计算机使用同样的机器指令来执行无符号或者有符号加法。

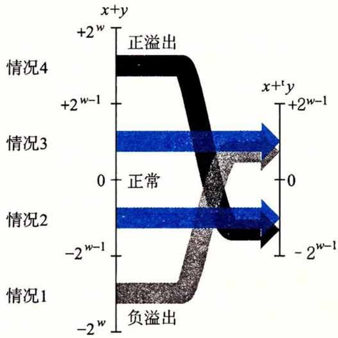

图 2-24　整数和补码加法之间的关系。当 $x+y$ 小于 -2^{w-1} 时，产生负溢出。当它大于 2^{w-1} 时，产生正溢出

推导：补码加法

既然补码加法与无符号数加法有相同的位级表示，我们就可以按如下步骤表示运算 $+_{w}^{t}$：将其参数转换为无符号数，执行无符号数加法，再将结果转换为补码：

$$x+_{w}^{t}y\doteq U2T_{w}(T2U_{w}(x)+_{w}^{u}T2U_{w}(y))\tag{2.14}$$

根据等式(2.6)，我们可以把 $T2U_{w}(x)$ 写成 $x_{w-1}2^{w}+x$，把 $T2U_{w}(y)$ 写成 $y_{w-1}2^{w}+y$。使用属性，即 $+_{w}^{u}$ 是模 2^{w} 的加法，以及模数加法的属性，我们就能得到：

$$\begin{aligned}x+_{w}^{t}y&=U2T_{w}(T2U_{w}(x)+_{w}^{u}T2U_{w}(y))\\&=U2T_{w}[(x_{w-1}2^{w}+x+y_{w-1}2^{w}+y)\bmod 2^{w}]\\&=U2T_{w}[(x+y)\bmod 2^{w}]\end{aligned}$$

消除了 $x_{w-1}2^{w}$ 和 $y_{w-1}2^{w}$ 这两项，因为它们模 2^{w} 等于 0。

为了更好地理解这个数量，定义 z 为整数和 $z\doteq x+y$，z' 为 $z'\doteq z \bmod 2^{w}$，而 z'' 为 $z''\doteq U2T_{w}(z')$。数值 z'' 等于 $x+_{w}^{t}y$。我们分成 4 种情况分析，如图 2-24 所示。

1）$-2^{w}\leqslant z<-2^{w-1}$。然后，我们会有 $z'=z+2^{w}$。这就得出 $0\leqslant z'<-2^{w-1}+2^{w}=2^{w-1}$。检查等式(2.7)，我们看到 z' 在满足 $z''=z'$ 的范围之内。这种情况称为负溢出(negative overflow)。我们将两个负数 x 和 y 相加（这是我们能得到 $z<-2^{w-1}$ 的唯一方式），得到一个非负的结果 $z''=x+y+2^{w}$。

2）$-2^{w-1}\leqslant z<0$。那么，我们又将有 $z'=z+2^{w}$，得到 $-2^{w-1}+2^{w}=2^{w-1}\leqslant z'<2^{w}$。检查等式(2.7)，我们看到 z' 在满足 $z''=z'-2^{w}$ 的范围之内，因此 $z''=z'-2^{w}=z+2^{w}-2^{w}=z$。也就是说，我们的补码和 z'' 等于整数和 $x+y$。

3）$0\leqslant z<2^{w-1}$。那么，我们将有 $z'=z$，得到 $0\leqslant z'<2^{w-1}$，因此 $z''=z'=z$。补码和