**原理**：补码编码的定义

对向量 $\vec{x}=[x_{w-1}, x_{w-2}, \cdots, x_0]$：

$$B2T_w(\vec{x}) \doteq -x_{w-1}2^{w-1}+\sum_{i=0}^{w-2}x_i 2^i \tag{2.3}$$

最高有效位 $x_{w-1}$ 也称为符号位，它的“权重”为 $-2^{w-1}$，是无符号表示中权重的负数。符号位被设置为 1 时，表示值为负，而当设置为 0 时，值为非负。这里来看一个示例，图 2-13 展示的是下面几种情况下 $B2T$ 给出的从位向量到整数的映射。

$$\begin{aligned}
B2T_4([0001]) &= -0\cdot 2^3+0\cdot 2^2+0\cdot 2^1+1\cdot 2^0 = 0+0+0+1 = 1\\
B2T_4([0101]) &= -0\cdot 2^3+1\cdot 2^2+0\cdot 2^1+1\cdot 2^0 = 0+4+0+1 = 5\\
B2T_4([1011]) &= -1\cdot 2^3+0\cdot 2^2+1\cdot 2^1+1\cdot 2^0 = -8+0+2+1 = -5\\
B2T_4([1111]) &= -1\cdot 2^3+1\cdot 2^2+1\cdot 2^1+1\cdot 2^0 = -8+4+2+1 = -1
\end{aligned} \tag{2.4}$$

在这个图中，我们用向左指的条表示符号位具有负权重。于是，与一个位向量相关联的数值是由可能的向左指的条和向右指的条加起来决定的。

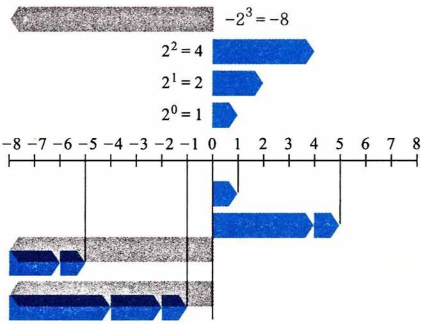


图 2-13 $w=4$ 的补码示例。把位 3 作为符号位，因此当它为 1 时，对数值的影响是 $-2^3=-8$。这个权重在图中用带向左箭头的条表示

我们可以看到，图 2-12 和图 2-13 中的位模式都是一样的，对等式(2.2)和等式(2.4)来说也是一样，但是当最高有效位是 1 时，数值是不同的，这是因为在一种情况中，最高有效位的权重是+8，而在另一种情况中，它的权重是−8。

让我们来考虑一下 $w$ 位补码所能表示的值的范围。它能表示的最小值是位向量[10…0](也就是设置这个位为负权，但是清除其他所有的位)，其整数值为 $TMin_w \doteq -2^{w-1}$。而最大值是位向量[01…1](清除具有负权的位，而设置其他所有的位)，其整数值为 $TMax_w \doteq \sum_{i=0}^{w-2}2^i = 2^{w-1}-1$。以长度为 4 为例，我们有 $TMin_4=B2T_4([1000])=-2^3=-8$，而 $TMax_4=B2T_4([0111])=2^2+2^1+2^0=4+2+1=7$。

我们可以看出 $B2T_w$ 是一个从长度为 $w$ 的位模式到 $TMin_w$ 和 $TMax_w$ 之间数字的映射，写作 $B2T_w$：$\{0, 1\}^w \rightarrow \{TMin_w, \cdots, TMax_w\}$。同无符号表示一样，在可表示的取值范围内的每个数字都有一个唯一的 $w$ 位的补码编码。这就导出了与无符号数相似的补码数原理：

**原理**：补码编码的唯一性

函数 $B2T_w$ 是一个双射。

我们定义函数 $T2B_w$(即“补码到二进制”)作为 $B2T_w$ 的反函数。也就是说，对于每个数 $x$，满足 $TMin_w \leqslant x \leqslant TMax_w$，则 $T2B_w(x)$是 $x$ 的(唯一的)$w$ 位模式。

**练习题 2.17** 假设 $w=4$，我们能给每个可能的十六进制数字赋予一个数值，假设用一个无符号或者补码表示。请根据这些表示，通过写出等式(2.1)和等式(2.3)所示的求和公式中的 2 的非零次幂，填写下表：