

算法是一种使用全局信息的算法。说它是分布式的，是因为每个结点都要从一个或多个直接相连邻居接收某些信息，执行计算，然后将其计算结果分发给邻居。说它是迭代的，是因为此过程一直要持续到邻居之间无更多信息要交换为止。（有趣的是，此算法是自我终止的，即没有计算应该停止的信号，它就停止了。）说它是异步的，是因为它不要求所有结点相互之间步伐一致地操作。我们将看到一个异步的、迭代的、自我终止的、分布式的算法比一个集中式的算法要有趣得多。

在我们给出 DV 算法之前，有必要讨论一下存在于最低费用路径的费用之间的一种重要关系。令  $d_x(y)$  是从结点  $x$  到结点  $y$  的最低费用路径的费用。则该最低费用与著名的 Bellman-Ford 方程相关，即

$$d_x(y) = \min_v \{c(x, v) + d_v(y)\} \quad (4-1)$$

方程中的  $\min_v$  是对于  $x$  的所有邻居的。Bellman-Ford 方程是相当直观的。实际上，从  $x$  到  $v$  遍历之后，如果我们接下来取从  $v$  到  $y$  的最低费用路径，则该路径费用将是  $c(x, v) + d_v(y)$ 。因此我们必须通过遍历某些邻居  $v$  开始，从  $x$  到  $y$  的最低费用是对所有邻居  $v$  的  $c(x, v) + d_v(y)$  的最小值。

但是对于那些可能怀疑该方程正确性的人，我们核查在图 4-27 中的源结点  $u$  和目的结点  $z$ 。源结点  $u$  有 3 个邻居：结点  $v$ 、 $x$  和  $w$ 。通过遍历该图中的各条路径，容易看出  $d_v(z)=5$ 、 $d_x(z)=3$  和  $d_w(z)=3$ 。将这些值连同费用  $c(u, v)=2$ 、 $c(u, x)=1$  和  $c(u, w)=5$  代入方程 (4-1)，得出  $d_u(z) = \min\{2+5, 1+3, 5+3\} = 4$ ，这显然是正确的，并且对同一个网络来说，这正是 Dijkstra 算法为我们提供的结果。这种快速验证应当有助于消除你可能具有的任何怀疑。

Bellman-Ford 方程不止是一种智力上的珍品，它实际上具有重大的实践重要性。特别是对 Bellman-Ford 方程的解为结点  $x$  的转发表提供了表项。为了理解这一点，令  $v^*$  是取得方程 (4-1) 中最小值的任何相邻结点。接下来，如果结点  $x$  要沿着最低费用路径向结点  $y$  发送一个分组，它应当首先向结点  $v^*$  转发该分组。因此，结点  $x$  的转发表将指定结点  $v^*$  作为最终目的地  $y$  的下一跳路由器。Bellman-Ford 方程的另一个重要实际贡献是它提出了将在 DV 算法中发生的邻居到邻居通信的形式。

其基本思想如下。每个结点  $x$  以  $D_x(y)$  开始，对在  $N$  中的所有结点，估计从它自己到结点  $y$  的最低费用路径的费用。令  $D_x = [D_x(y) : y \in N]$  是结点  $x$  的距离向量，该向量是从  $x$  到在  $N$  中的所有其他结点  $y$  的费用估计的向量。使用 DV 算法，每个结点  $x$  维护下列路由选择信息：

- 对于每个邻居  $v$ ，从  $x$  到直接相连邻居  $v$  的费用为  $c(x, v)$ 。
- 结点  $x$  的距离向量，即  $D_x = [D_x(y) : y \in N]$ ，包含了  $x$  到  $N$  中所有目的地  $y$  的费用的估计值。
- 它的每个邻居的距离向量，即对  $x$  的每个邻居  $v$ ，有  $D_v = [D_v(y) : y \in N]$ 。

在该分布式、异步算法中，每个结点不时地向它的每个邻居发送它的距离向量副本。当结点  $x$  从它的任何一个邻居  $v$  接收到一个新距离向量，它保存  $v$  的距离向量，然后使用 Bellman-Ford 方程更新它自己的距离向量如下：

$$D_x(y) = \min_v \{c(x, v) + D_v(y)\} \quad \text{对 } N \text{ 中的每个结点}$$

如果结点  $x$  的距离向量因这个更新步骤而改变，结点  $x$  接下来将向它的每个邻居发送其更新后的距离向量。令人惊奇的是，只要所有的结点继续以异步方式交换它们的距离向