2.4.1　二进制小数

理解浮点数的第一步是考虑含有小数值的二进制数字。首先，让我们来看看更熟悉的十进制表示法。十进制表示法使用如下形式的表示：

$$d_m d_{m-1} \cdots d_1 d_0 . d_{-1} d_{-2} \cdots d_{-n}$$

其中每个十进制数 d_i 的取值范围是 0～9。这个表达描述的数值 d 定义如下：

$$d = \sum_{i=-n}^{m} 10^i \times d_i$$

数字权的定义与十进制小数点符号（‘.’）相关，这意味着小数点左边的数字的权是 10 的正幂，得到整数值，而小数点右边的数字的权是 10 的负幂，得到小数值。例如，12.34_{10} 表示数字 $1\times10^1+2\times10^0+3\times10^{-1}+4\times10^{-2}=12\frac{34}{100}$。

类似，考虑一个形如

$$b_m b_{m-1} \cdots b_1 b_0 . b_{-1} b_{-2} \cdots b_{-n-1} b_{-n}$$

的表示法，其中每个二进制数字，或者称为位，b_i 的取值范围是 0 和 1，如图 2-31 所示。这种表示方法表示的数 b 定义如下：

$$b = \sum_{i=-n}^{m} 2^i \times b_i \qquad (2.19)$$

符号‘.’现在变为了二进制的点，点左边的位的权是 2 的正幂，点右边的位的权是 2 的负幂。例如，101.11_2 表示数字 $1\times2^2+0\times2^1+1\times2^0+1\times2^{-1}+1\times2^{-2}=4+0+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=5\frac{3}{4}$。

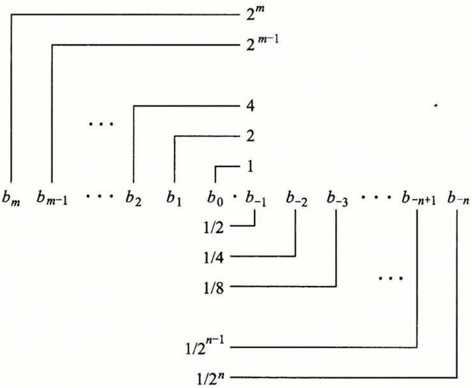

图 2-31　小数的二进制表示。二进制点左边的数字的权形如 2^i，而右边的数字的权形如 $1/2^i$

从等式（2.19）中可以很容易地看出，二进制小数点向左移动一位相当于这个数被 2 除。例如，101.11_2 表示数 $5\frac{3}{4}$，而 10.111_2 表示数 $2+0+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=2\frac{7}{8}$。类似，二进制小数点向右移动一位相当于将该数乘 2。例如 1011.1_2 表示数 $8+0+2+1+\frac{1}{2}=11\frac{1}{2}$。

注意，形如 $0.11\cdots1_2$ 的数表示的是刚好小于 1 的数。例如，0.111111_2 表示 $\frac{63}{64}$，我们将用简单的表达法 $1.0-\varepsilon$ 来表示这样的数值。

假定我们仅考虑有限长度的编码，那么十进制表示法不能准确地表达像 $\frac{1}{3}$ 和 $\frac{5}{7}$ 这样的数。类似，小数的二进制表示法只能表示那些能够被写成 $x\times2^y$ 的数。其他的值只能够被近似地表示。例如，数字 $\frac{1}{5}$ 可以用十进制小数 0.20 精确表示。不过，我们并不能把它准确地表示为一个二进制小数，我们只能近似地表示它，增加二进制表示的长度可以提高表示的精度：