Listing All Maximal Cliques in Sparse Graphs in Near-optimal Time

David Eppstein, Maarten L ooffler, and Darren Strash

Department of Computer Science, University of California, Irvine, USA

International Symposium on Algorithms and Computation 2010

Δομή παρουσίασης

1. Εισαγωγή προβλήματος
2. Κίνητρα μελέτης
3. Κίνητρα FPT μελέτης
4. Εισαγωγή αλγορίθμου Bron–Kerbosch
5. FPT παραλλαγή του

Εισαγωγή

Η εύρεση κλικών σε ένα γράφημα προκύπτει ως ζητούμενο σε πληθώρα εφαρμογών

Εφαρμογές

Εισαγωγή

Η εύρεση κλικών σε ένα γράφημα προκύπτει ως ζητούμενο σε πληθώρα εφαρμογών

Εφαρμογές

- Ανάλυση κοινωνικών δικτύων
  - Nina Berry et al. "Emergent clique formation in terrorist recruitment." Jan. 2016.

Εισαγωγή

Η εύρεση κλικών σε ένα γράφημα προκύπτει ως ζητούμενο σε πληθώρα εφαρμογών

Εφαρμογές

- Ανάλυση κοινωνικών δικτύων
  - Nina Berry et al. "Emergent clique formation in terrorist recruitment." Jan. 2016.
- Βιοπληροφορική
  - Ina Koch, Thomas Lengauer, and Egon Wanke. "An Algorithm for Finding Maximal Common Subtopologies in a Set of Protein Structures" 1996

Εισαγωγή

Η εύρεση κλικών σε ένα γράφημα προκύπτει ως ζητούμενο σε πληθώρα εφαρμογών

Εφαρμογές

- Ανάλυση κοινωνικών δικτύων
  - Nina Berry et al. "Emergent clique formation in terrorist recruitment." Jan. 2016.
- Βιοπληροφορική
  - Ina Koch, Thomas Lengauer, and Egon Wanke. "An Algorithm for Finding Maximal Common Subtopologies in a Set of Protein Structures" 1996
- Clustering εγγράφων (documents) κειμένου

Εισαγωγή

Η εύρεση κλικών σε ένα γράφημα προκύπτει ως ζητούμενο σε πληθώρα εφαρμογών

Εφαρμογές

- Ανάλυση κοινωνικών δικτύων
  - Nina Berry et al. "Emergent clique formation in terrorist recruitment." Jan. 2016.
- Βιοπληροφορική
  - Ina Koch, Thomas Lengauer, and Egon Wanke. “An Algorithm for Finding Maximal Common Subtopologies in a Set of Protein Structures” 1996
- Clustering εγγράφων (documents) κειμένου
- Ανάκτηση βάθους από δεδομένα στερεοσκοπικών εικόνων

Εισαγωγή

Η εύρεση κλικών σε ένα γράφημα προκύπτει ως ζητούμενο σε πληθώρα εφαρμογών

Εφαρμογές

- Ανάλυση κοινωνικών δικτύων
  - Nina Berry et al. "Emergent clique formation in terrorist recruitment." Jan. 2016.
- Βιοπληροφορική
  - Ina Koch, Thomas Lengauer, and Egon Wanke. “An Algorithm for Finding Maximal Common Subtopologies in a Set of Protein Structures” 1996
- Clustering εγγράφων (documents) κειμένου
- Ανάκτηση βάθους από δεδομένα στερεοσκοπικών εικόνων
- Υπολογιστική τοπολογία
  - Afra Zomorodian. “The Tidy Set: A Minimal Simplicial Set for Computing Homology of Clique Complexes”. Jan. 2010,

Εισαγωγή

Η εύρεση κλικών σε ένα γράφημα προκύπτει ως ζητούμενο σε πληθώρα εφαρμογών

Εφαρμογές

- Ανάλυση κοινωνικών δικτύων
  - Nina Berry et al. "Emergent clique formation in terrorist recruitment." Jan. 2016.
- Βιοπληροφορική
  - Ina Koch, Thomas Lengauer, and Egon Wanke. "An Algorithm for Finding Maximal Common Subtopologies in a Set of Protein Structures" 1996
- Clustering εγγράφων (documents) κειμένου
- Ανάκτηση βάθους από δεδομένα στερεοσκοπικών εικόνων
- Υπολογιστική τοπολογία
  - Afra Zomorodian. "The Tidy Set: A Minimal Simplicial Set for Computing Homology of Clique Complexes". Jan. 2010,
- (Ηλεκτρονικό) εμπόριο

Εισαγωγή

Συχνά επιθυμούμε να βρούμε όλες τις μεγιστικές κλίκες ενός γραφήματος.

Εισαγωγή

Συχνά επιθυμούμε να βρούμε όλες τις μεγιστικές κλίκες ενός γραφήματος.

Πρόβλημα στο EXP

Χρειαζόμαστε χρόνο τουλάχιστον ανάλογο του πλήθους των μεγιστικών κλικών.
πχ. Τα turan γραφήματα n κόμβων $K_{n/k, n/k, \ldots}$ έχουν $(n/k)^k$ μεγιστικές κλίκες μεγέθους k.

Εισαγωγή

Συχνά επιθυμούμε να βρούμε όλες τις μεγιστικές κλίκες ενός γραφήματος.

Πρόβλημα στο EXP

Χρειαζόμαστε χρόνο τουλάχιστον ανάλογο του πλήθους των μεγιστικών κλικών.
πχ. Τα turan γραφήματα n κόμβων $K_{n/k, n/k, \ldots}$ έχουν $(n/k)^k$ μεγιστικές κλίκες μεγέθους k.

Γνωστό γεγονός

Για να απαριθμήσουμε όλες τις μεγιστικές κλίκες ενός γραφήματος αρκεί χρόνος ανάλογος του μέγιστου πλήθους μεγιστικών κλικών που μπορεί να υπάρχουν σε γράφημα n κόμβων.

Εισαγωγή

- Ο Bron-Kerbosch είναι ένας από αυτούς τους αλγόριθμους οπού αρκεί τόσος χρόνος.

Εισαγωγή

- Ο Bron-Kerbosch είναι ένας από αυτούς τους αλγόριθμους οπού αρκεί τόσος χρόνος.
- Καλύτερη πρακτική αντιμετώπιση;

Εισαγωγή

- Ο Bron-Kerbosch είναι ένας από αυτούς τους αλγόριθμους οπού αρκεί τόσος χρόνος.
- Καλύτερη πρακτική αντιμετώπιση;
- Στην πράξη, ο Bron-Kerbosch είναι αποδοτικός και ένας από τους πιο επιτυχείς και επιτυχής αλγόριθμος.

Εισαγωγή

- Ο Bron-Kerbosch είναι ένας από αυτούς τους αλγόριθμους οπού αρκεί τόσος χρόνος.
- Καλύτερη πρακτική αντιμετώπιση;
- Στην πράξη, ο Bron-Kerbosch είναι αποδοτικός και ένας από τους πιο επιτυχείς και επιτυχής αλγόριθμος.
- Μα το πρόβλημα είναι εκθετικό στην χειρότερη περίπτωση;

Εισαγωγή

- Ίσως τα προβλήματα πραγματικού κόσμου έχουν συγκεκριμένες παραμέτρους μικρές.

Εισαγωγή

- Ίσως τα προβλήματα πραγματικού κόσμου έχουν συγκεκριμένες παραμέτρους μικρές.
- Υπό την υπόθεση ότι είναι μικρές, ίσως ο Bron-Kerbosch τρέχει γρήγορα.

Εισαγωγή

- Ίσως τα προβλήματα πραγματικού κόσμου έχουν συγκεκριμένες παραμέτρους μικρές.
- Υπό την υπόθεση ότι είναι μικρές, ίσως ο Bron-Kerbosch τρέχει γρήγορα.
- Fixed-parameter tractable ανάλυση

Εισαγωγή

- Μέγεθος μέγιστης κλίκας ως μικρή παράμετρος;

Εισαγωγή

- Μέγεθος μέγιστης κλίκας ως μικρή παράμετρος;
  - Turan γραφήματα n κόμβων $K_{n/k,n/k,\ldots}$ έχουν $({}^{n}/_{k})^{k}$ μεγιστικές κλίκες μεγέθους k
  - H εύρεση κλίκας μεγέθους $\geq k$ είναι W[1]-hard
  - $n^{o(k)}$ αλγόριθμος δεν υπάρχει εκτός αν δεν ισχύει η exponential time hypothesis

Βαθμός εκφυλισμού:

- Συχνά μικρός στην πράξη.

Βαθμός εκφυλισμού:

- Συχνά μικρός στην πράξη.
- Μέτρο της πυκνότητας ενός γραφήματος.

Βαθμός εκφυλισμού:

- Συχνά μικρός στην πράξη.
- Μέτρο της πυκνότητας ενός γραφήματος.
- Ως μέτρο της πυκνότητας ενός γραφήματος, είναι λογικό ότι για μικρές τιμές του το πρόβλημα απαρίθμησης όλως των κλικών θα είναι πιο βατό.

Βαθμός εκφυλισμού:

- Συχνά μικρός στην πράξη.
- Μέτρο της πυκνότητας ενός γραφήματος.
- Ως μέτρο της πυκνότητας ενός γραφήματος, είναι λογικό ότι για μικρές τιμές του το πρόβλημα απαρίθμησης όλων των κλικών θα είναι πιο βατό.

Μικρός σε

- επίπεδα γραφήματα
- παγκόσμιο ιστό,
- δίκτυα citations,
- κοινωνικά δύκτια,
- protein-protein interaction networks

D. Eppstein and E. S. Spiro. "The h-index of a graph and its application to dynamic subgraph statistics". 11th Symp. Algorithms and Data Structures (2009)

Πειραματικά δεδομένα υποδεικνύουν ότι το h-index, το οποίο είναι άνω φράγμα του εκφυλισμού είναι μικρό σε κοινωνικά δίκτυα.

Ορισμός

Ο εκφυλισμός γραφήματος G είναι Ο μικρότερος αριθμός d τ.ω

Ορισμός

Ο εκφυλισμός γραφήματος G είναι Ο μικρότερος αριθμός d τ.ω

- G δεν εμπεριέχει εναγώμενο υπογράφημα H με $\delta(H) \geq d + 1$.

Ορισμός

Ο εκφυλισμός γραφήματος G είναι Ο μικρότερος αριθμός d τ.ω

- G δεν εμπεριέχει εναγώμενο υπογράφημα H με $\delta(H) \geq d + 1$.
- Ισοδύναμα, κάθε εναγώμενο υπογράφημα του έχει $\delta(H) \leq d$.

Ορισμός

Ο εκφυλισμός γραφήματος G είναι Ο μικρότερος αριθμός d τ.ω

- G δεν εμπεριέχει εναγώμενο υπογράφημα H με $\delta(H) \geq d + 1$.
- Ισοδύναμα, κάθε εναγώμενο υπογράφημα του έχει $\delta(H) \leq d$.
- Ισοδύναμα, να υπάρχει διάταξη των κόμβων οπού κάθε κόμβος να έχει $\leq d$ γείτονες μετά από αυτόν στην διάταξη.

Ορισμός

Ο εκφυλισμός γραφήματος G είναι Ο μικρότερος αριθμός d τ.ω

- G δεν εμπεριέχει εναγώμενο υπογράφημα H με $\delta(H) \geq d+1$.
- Ισοδύναμα, κάθε εναγώμενο υπογράφημα του έχει $\delta(H) \leq d$.
- Ισοδύναμα, να υπάρχει διάταξη των κόμβων οπού κάθε κόμβος να έχει $\leq d$ γείτονες μετά από αυτόν στην διάταξη.
- Ισοδύναμα, έστω $f : G \to G$, $f(G) =$ το G δίχως κορυφές βαθμού d. $f(f(...(f(G)))) =$ το κενό γράφημα.

Ορισμός

Ο εκφυλισμός γραφήματος G είναι Ο μικρότερος αριθμός d τ.ω

- G δεν εμπεριέχει εναγώμενο υπογράφημα H με $\delta(H) \geq d+1$.
- Ισοδύναμα, κάθε εναγώμενο υπογράφημα του έχει $\delta(H) \leq d$.
- Ισοδύναμα, να υπάρχει διάταξη των κόμβων οπού κάθε κόμβος να έχει $\leq d$ γείτονες μετά από αυτόν στην διάταξη.
- Ισοδύναμα, έστω $f : G \to G$, $f(G) =$ το G δίχως κορυφές βαθμού d. $f(f(...(f(G)))) =$ το κενό γράφημα.

- Υπολογίζεται σε $\mathcal{O}(m+n)$.
- $\frac{d(d+1)}{2} \leq m \leq d(n - \frac{d+1}{2})$

Αλγοριθμική επίλυση

Ορισμός

Ορίζουμε ως $\Gamma(v)$ την γειτονιά του κόμβου v και για $V \subseteq V(G)$ ορίζουμε $\Gamma(V)$ ως την κοινή γειτονιά των κόμβων του $V = \bigcap_{v \in V} \Gamma(v)$.

Αλγοριθμική επίλυση

Ορισμός

Ορίζουμε ως $\Gamma(v)$ την γειτονιά του κόμβου v και για $V \subseteq V(G)$ ορίζουμε $\Gamma(V)$ ως την κοινή γειτονιά των κόμβων του $V = \bigcap_{v \in V} \Gamma(v)$.

(Προσέγγιση ωμής δύναμης)

Μία προσέγγιση για την εύρεση όλων των μεγιστικών κλικών θα ήταν να δοκιμάσουμε όλα δυνατά 2^n σύνολα κόμβων.

Bron–Kerbosch διαισθητικά

- Χτίζουμε σιγά-σιγά μία μεγιστική κλίκα, βάζοντας σε ένα αρχικά κενό σύνολο R έναν αυθαίρετο κόμβο v και μετά βάζοντας επαναληπτικά στον R έναν αυθαίρετο κόμβο απ'το $\Gamma(R)$. Αυτό για μία κλίκα.

Bron–Kerbosch διαισθητικά

- Χτίζουμε σιγά-σιγά μία μεγιστική κλίκα, βάζοντας σε ένα αρχικά κενό σύνολο R έναν αυθαίρετο κόμβο v και μετά βάζοντας επαναληπτικά στον R έναν αυθαίρετο κόμβο απ'το $\Gamma(R)$. Αυτό για μία κλίκα.
- Προκειμένου να δημιουργήσουμε όλες τις μεγιστικές κλίκες, δοκιμάζουμε σε κάθε βήμα όλες τις δυνατές αυθαίρετες επιλογές (dfs σειρά)

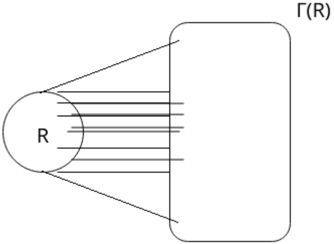
Bron–Kerbosch διαισθητικά

- Χτίζουμε σιγά-σιγά μία μεγιστική κλίκα, βάζοντας σε ένα αρχικά κενό σύνολο R έναν αυθαίρετο κόμβο v και μετά βάζοντας επαναληπτικά στον R έναν αυθαίρετο κόμβο απ'το $\Gamma(R)$. Αυτό για μία κλίκα.
- Προκειμένου να δημιουργήσουμε όλες τις μεγιστικές κλίκες, δοκιμάζουμε σε κάθε βήμα όλες τις δυνατές αυθαίρετες επιλογές (dfs σειρά)
- ()Προκειμένου να μην εμφανιστεί μία μεγιστική κλίκα δύο φορές, αφότου επιλεχθεί ο κόμβος v να προστεθεί στην κλίκα R, δεν θα επιτρέπεται να προστεθεί ο v σε οποιαδήποτε κλίκα υπερσύνολο της R. Το σύνολο των απαγορευμένων αυτών κόμβων αποκαλείται X.

Bron–Kerbosch διαισθητικά

- Χτίζουμε σιγά-σιγά μία μεγιστική κλίκα, βάζοντας σε ένα αρχικά κενό σύνολο R έναν αυθαίρετο κόμβο v και μετά βάζοντας επαναληπτικά στον R έναν αυθαίρετο κόμβο απ'το $\Gamma(R)$. Αυτό για μία κλίκα.
- Προκειμένου να δημιουργήσουμε όλες τις μεγιστικές κλίκες, δοκιμάζουμε σε κάθε βήμα όλες τις δυνατές αυθαίρετες επιλογές (dfs σειρά)
- ()Προκειμένου να μην εμφανιστεί μία μεγιστική κλίκα δύο φορές, αφότου επιλεχθεί ο κόμβος v να προστεθεί στην κλίκα R, δεν θα επιτρέπεται να προστεθεί ο v σε οποιαδήποτε κλίκα υπερσύνολο της R. Το σύνολο των απαγορευμένων αυτών κόμβων αποκαλείται X.
- ()Οι ακόμα μη δοκιμασμένοι κόμβοι του $\Gamma(R)$ διατειρούνται χάριν απόδοσης σε ένα σύνολο P. Προσέξτε πως το $P \cup X$ διαμερίζει το $\Gamma(R)$. Καθώς η διαδικασία είναι επαναληπτική περιγράφεται αναδρομικά.

procedure $\textsc{BronKerbosch}(R)$
  if $\Gamma(R) = \emptyset$ **then** Report R as maximal clique
  end if
  for each vertex $v \in \Gamma(R)$ **do**
    $BronKerbosch(R \cup \{v\})$
  end for
end procedure

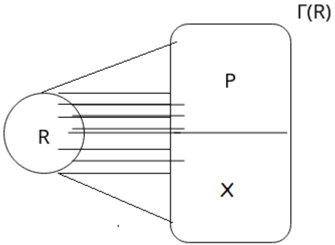


procedure $\textsc{BronKerbosch}(R,X)$
  if $\Gamma(R) = \emptyset$ **then** Report R as maximal clique
  end if
  for each vertex $v \in \Gamma(R) \backslash X$ **do**
    $BronKerbosch(R \cup \{v\}, X \cap \Gamma(v))$
    $X \leftarrow X \cup \{v\}$
  end for
end procedure

procedure $\textsc{BronKerbosch}(R,X)$
if $\Gamma(R) = \emptyset$ **then** Report R as maximal clique
end if
for each vertex $v \in \Gamma(R) \backslash X$ **do**
$BronKerbosch(R \cup \{v\}, X \cap \Gamma(v))$
$X \leftarrow X \cup \{v\}$
end for
end procedure

Θέτοντας $P := \Gamma(R) \setminus X$ για λόγους αποδοτικότητας, έχουμε

procedure $\textsc{BronKerbosch}(P, R, X)$
  if $P \cup X = \emptyset$ **then** Report R as maximal clique
  end if
  for each vertex $v \in P$ **do**
    $BronKerbosch(P \cap \Gamma(v), R \cup \{v\}, X \cap \Gamma(v))$
    $P \leftarrow P \setminus \{v\}$
    $X \leftarrow X \cup \{v\}$
  end for
end procedure



procedure $\textsc{BronKerbosch}(P,R,X)$

if $P \cup X = \emptyset$ **then** Report R as maximal clique

end if

for each vertex $v \in P$ **do**

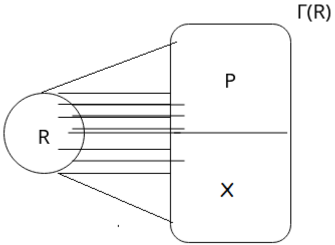
$BronKerbosch(P \cap \Gamma(v), R \cup \{v\}, X \cap \Gamma(v))$

$P \leftarrow P \setminus \{v\}$

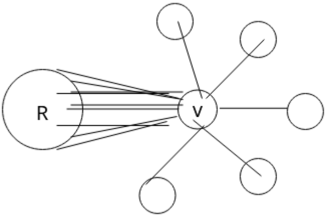
$X \leftarrow X \cup \{v\}$

end for

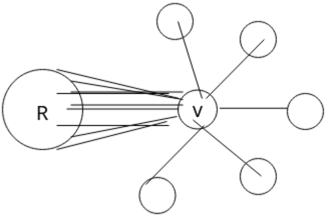
end procedure



Ο αλγόριθμος καλείται αρχικά με είσοδο $(V(G), \emptyset, \emptyset)$.

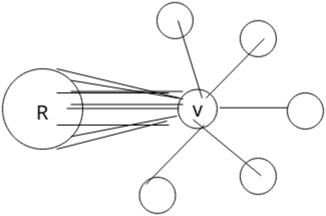


Βελτίωση



Βελτίωση

- Προσέξτε πως αν για κάποιον $v \in \Gamma(R)$ το $R \cup \Gamma(v)$ είναι κλίκα, το $R \cup \Gamma(v) \cup \{v\}$ είναι. Οπότε κάθε μεγιστική κλίκα δεν θα είναι της μορφής $R \cup \Gamma(v)$, δηλαδή θα περιέχει κόμβο του $\Gamma(R) \setminus \Gamma(v)$.



Βελτίωση

- Προσέξτε πως αν για κάποιον $v \in \Gamma(R)$ το $R \cup \Gamma(v)$ είναι κλίκα, το $R \cup \Gamma(v) \cup \{v\}$ είναι. Οπότε κάθε μεγιστική κλίκα δεν θα είναι της μορφής $R \cup \Gamma(v)$, δηλαδή θα περιέχει κόμβο του $\Gamma(R) \setminus \Gamma(v)$.
- Μία βελτίωση λοιπόν του αλγορίθμου δεν δοκιμάζει την γειτονιά κάποιου σταθεροποιημένου v.

procedure $\textsc{BronKerboschPivot}(P,R,X)$

  if $P \cup X = \emptyset$ **then** Report R as maximal clique

  end if

  Choose a pivot $u \in P \cup X$

  for each vertex $v \in P \setminus \Gamma(u)$ **do**

    $X \leftarrow BronKerboschPivot(P \cap \Gamma(v), R \cup \{v\}, X \cap \Gamma(v))$

    $P \leftarrow P \setminus \{v\}$

    $X \leftarrow X \cup \{v\}$

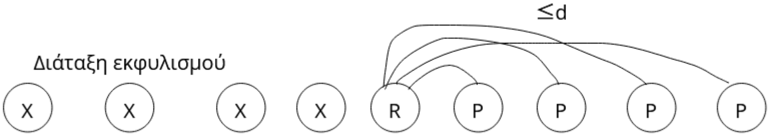
  end for

end procedure

Το pivot της επιλογής μας μεγιστοποιεί το $|P \cap \Gamma(u)|$, ισοδύναμα ελαχιστοποιεί το $|P \setminus \Gamma(u)|$.

Ανάλυση;

Τόσο το branching factor όσο και το ύψος του δέντρου είναι ασαφή. Το ύψος είναι το πολύ το μέγεθος της μέγιστης κλίκας. Το branching φράσσεται χαλαρά απ'το n.

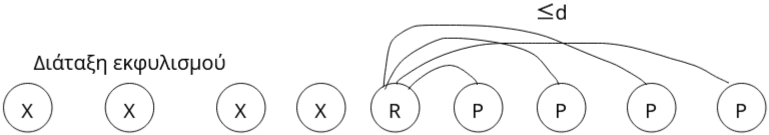


Παρατήρηση

Στην ρίζα της αναδρομής, διαττάσοντας τους κόμβους του γραφήματος και κοιτάζοντας τους με αυτή την σειρά, οι κόμβοι διαχωρίζονται σε αυτόν που βάζουμε στο R, τους προηγούμενους του που είναι στο X και τους μετέπειτα στο P.

Παραμετροποίηση

Θεωρώντας σταθερό βαθμό εκφυλισμού d, και παίρνοντας την διάταξη οπισθόβαθμου d, έπεται ότι $|P| \leq d$



Παρατήρηση

Στην ρίζα της αναδρομής, διαττάσοντας τους κόμβους του γραφήματος και κοιτάζοντας τους με αυτή την σειρά, οι κόμβοι διαχωρίζονται σε αυτόν που βάζουμε στο R, τους προηγούμενους του που είναι στο X και τους μετέπειτα στο P.

Παραμετροποίηση

Θεωρώντας σταθερό βαθμό εκφυλισμού d, και παίρνοντας την διάταξη οπισθόβαθμου d, έπεται ότι $|P| \leq d$

Πλεόν, breadth $\leq d$ και το μέγεθος της μέγιστης κλίκας $\leq d + 1$. Το δέντρο αναδρομής έχει FPT το πλήθος κόμβους.

procedure $\textsc{BronKerboschDegeneracy}(V,E)$

for each vertex v_i in a degeneracy ordering $v_0, v_1, v_2, \ldots$ of (V, E) **do**

$P \leftarrow \Gamma(v_i) \cap \{v_{i+1}, \ldots, v_{n-1}\}$

$X \leftarrow \Gamma(v_i) \cap \{v_0, \ldots, v_{i-1}\}$

BronKerboschPivot$(P, \{v_i\}, X)$

end for

end procedure

Δεν κερδίζουμε κάτι κάνοντας το αυτό στους εσωτερικούς κόμβους της αναδρομής, οπότε το κάνουμε μόνο στην ρίζα.

Πλεόν, breadth $\leq d$ και το μέγεθος της μέγιστης κλίκας $\leq d+1$. Το δέντρο αναδρομής έχει FPT το πλήθος κόμβους.

Βελτίωση ανάλυσης: Μέγεθος δέντρου αναδρομής

Παρότι έχουμε φράξει το μέγεθος του δέντρου, το ίδιο φράγμα θα παίρναμε εάν κάθε μονοπάτι του είχε μήκος και κάθε κόμβος διακλάδωση d.

Ανάλυση

Καθώς ο παρόμοιος BronKerboschPivot λειτουργεί καλά στην πράξη, αναμένουμε να μπορεί να βρεθεί μικρή εξάρτηση απ΄την σταθερά d.

Ανάλυση

Καθώς ο παρόμοιος BronKerboschPivot λειτουργεί καλά στην πράξη, αναμένουμε να μπορεί να βρεθεί μικρή εξάρτηση απ'την σταθερά d.

Βελτίωση χρόνου κόμβων δέντρου

Πρώτα μικραίνουμε όσο γίνεται τον υπολογιστικό χρόνο κάθε κόμβου του δέντρου.

Ανάλυση

Καθώς ο παρόμοιος BronKerboschPivot λειτουργεί καλά στην πράξη, αναμένουμε να μπορεί να βρεθεί μικρή εξάρτηση απ'την σταθερά d.

Βελτίωση χρόνου κόμβων δέντρου

Πρώτα μικραίνουμε όσο γίνεται τον υπολογιστικό χρόνο κάθε κόμβου του δέντρου. Για να επιλέγουμε γρήγορα pivot, δίνουμε σε κάθε κλήση του BronKerboschPivot με έξτρα παράμετρο το υπογράφημα $H_{P,X} = P \cup X$ κρατώντας μόνο ακμές με άκρο στο P.

Ανάλυση

Καθώς ο παρόμοιος BronKerboschPivot λειτουργεί καλά στην πράξη, αναμένουμε να μπορεί να βρεθεί μικρή εξάρτηση απ'την σταθερά d.

Βελτίωση χρόνου κόμβων δέντρου

Πρώτα μικραίνουμε όσο γίνεται τον υπολογιστικό χρόνο κάθε κόμβου του δέντρου. Για να επιλέγουμε γρήγορα pivot, δίνουμε σε κάθε κλήση του BronKerboschPivot με έξτρα παράμετρο το υπογράφημα $H_{P,X} = P \cup X$ κρατώντας μόνο ακμές με άκρο στο P. Προκύπτει εύκολα ότι η ρίζα χρειάζεται $\mathcal{O}(d(|P| + |X|))$ για ένα $H_{P,X}$ που φτιάχνει και ένας άλλος κόμβους του δέντρο αναδρομής $\mathcal{O}(|P|^2(|P| + |X|))$ για όλα τα $H_{P,X}$ που θα φτιάξει.

Ανάλυση

Καθώς ο παρόμοιος BronKerboschPivot λειτουργεί καλά στην πράξη, αναμένουμε να μπορεί να βρεθεί μικρή εξάρτηση απ΄την σταθερά d.

Βελτίωση χρόνου κόμβων δέντρου

Πρώτα μικραίνουμε όσο γίνεται τον υπολογιστικό χρόνο κάθε κόμβου του δέντρου. Για να επιλέγουμε γρήγορα pivot, δίνουμε σε κάθε κλήση του BronKerboschPivot με έξτρα παράμετρο το υπογράφημα $H_{P,X} = P \cup X$ κρατώντας μόνο ακμές με άκρο στο P. Προκύπτει εύκολα ότι η ρίζα χρειάζεται $\mathcal{O}(d(|P| + |X|))$ για ένα $H_{P,X}$ που φτιάχνει και ένας άλλος κόμβους του δέντρο αναδρομής $\mathcal{O}(|P|^2(|P| + |X|))$ για όλα τα $H_{P,X}$ που θα φτιάξει. Η δημιουργία των $H_{P,X}$ κυριαρχεί χρονικά τις διεργασίες εντός του κόμβου.

Ανάλυση

Καθώς ο παρόμοιος BronKerboschPivot λειτουργεί καλά στην πράξη, αναμένουμε να μπορεί να βρεθεί μικρή εξάρτηση απ΄την σταθερά d.

Βελτίωση ανάλυσης: Μέγεθος δέντρου αναδρομής

Παρότι έχουμε φράξει το μέγεθος του δέντρου, το ίδιο φράγμα θα παίρναμε εάν κάθε μονοπάτι του είχε μήκος και κάθε κόμβος διακλάδωση d.

procedure $\textsc{BronKerboschPivot}(P,R,X)$

if $P \cup X = \emptyset$ **then** Report R as maximal clique

end if

Choose a pivot $u \in P \cup X$ with $\max_u |P \cap \Gamma(u)|$

for each vertex $v \in P \setminus \Gamma(u)$ **do**

$X \leftarrow BronKerboschPivot(P \cap \Gamma(v), R \cup \{v\}, X \cap \Gamma(v))$

$P \leftarrow P \setminus \{v\}$

$X \leftarrow X \cup \{v\}$

end for

end procedure

Βελτίωση ανάλυσης: Μέγεθος δέντρου αναδρομής

Έστω $D(p,r,x)$ ο χρόνος του BronKerboschPivot(P,R,X).

procedure $\textsc{BronKerboschPivot}(P,R,X)$
  if $P \cup X = \emptyset$ **then** Report R as maximal clique
  end if
  Choose a pivot $u \in P \cup X$ with $\max_u |P \cap \Gamma(u)|$
  for each vertex $v \in P \setminus \Gamma(u)$ **do**
    $X \leftarrow BronKerboschPivot(P \cap \Gamma(v), R \cup \{v\}, X \cap \Gamma(v))$
    $P \leftarrow P \setminus \{v\}$
    $X \leftarrow X \cup \{v\}$
  end for
end procedure

Βελτίωση ανάλυσης: Μέγεθος δέντρου αναδρομής

Έστω $D(p, r, x)$ ο χρόνος του BronKerboschPivot(P, R, X). Το R επιρεάζει τον χρόνο μόνο στην αναφορά της κλίκας στα φύλλα, τον οποίο αγνοούμε προς το παρόν οπότε $\forall r \ D(p, r, x) = D(p, x)$.

procedure $\textsc{BronKerboschPivot}(P,R,X)$

  if $P \cup X = \emptyset$ **then** Report R as maximal clique

  end if

  Choose a pivot $u \in P \cup X$ with $\max_u |P \cap \Gamma(u)|$

  for each vertex $v \in P \setminus \Gamma(u)$ **do**

    $X \leftarrow BronKerboschPivot(P \cap \Gamma(v), R \cup \{v\}, X \cap \Gamma(v))$

    $P \leftarrow P \setminus \{v\}$

    $X \leftarrow X \cup \{v\}$

  end for

end procedure

Βελτίωση ανάλυσης: Μέγεθος δέντρου αναδρομής

Έστω $D(p,r,x)$ ο χρόνος του BronKerboschPivot(P,R,X). Το R επιρεάζει τον χρόνο μόνο στην αναφορά της κλίκας στα φύλλα, τον οποίο αγνοούμε προς το παρόν οπότε $\forall r\ D(p,r,x) = D(p,x)$. Προς μία καλύτερη ανάλυση, παρατηρούμε ότι για $k' := |P \setminus \Gamma(u)|$, $|P \cap \Gamma(v)| \leq |P \cap \Gamma(u)| = |P| - k'$.

procedure $\textsc{BronKerboschPivot}(P,R,X)$

  if $P \cup X = \emptyset$ **then** Report R as maximal clique

  end if

  Choose a pivot $u \in P \cup X$ with $\max_u |P \cap \Gamma(u)|$

  for each vertex $v \in P \setminus \Gamma(u)$ **do**

    $X \leftarrow BronKerboschPivot(P \cap \Gamma(v), R \cup \{v\}, X \cap \Gamma(v))$

    $P \leftarrow P \setminus \{v\}$

    $X \leftarrow X \cup \{v\}$

  end for

end procedure

Βελτίωση ανάλυσης

Από την περιγραφή του αλγορίθμου, έχουμε για κάποιο $k \in \mathbb{N}$, $D(|P|, |X|) = D(p, x) \leq kD(p-k, x) + c_1 p^2(p+x) \leq \max_{k\in\mathbb{N}}\{kD(p-k, x)\} + c_1 p^2(p+x)$. Προκύπτει ότι αυτό είναι καλό φράγμα.

Ανάλυση

Θεώρημα

Έστω μία συνάρτηση με την ιδιότητα

$$T(p) = \left\{ \begin{array}{ll} \max_k\{kT(p-k)\} + c_1p^2, & \text{if } p > 0 \\ c_2, & \text{if } p = 0 \end{array} \right\}$$

οπού c_1, c_2 θετικές σταθερές, p, k ακέραιοι με $p \geq k$. Από θεώρημα των Etsuji Tomita, Akira Tanaka, and Haruhisa Takahashi. που χρησιμοποιεί ανάλυση, $T(p) = \max_k\{kT(p-k)\} + c_1p^2 = \mathcal{O}(3^{p/3})$.

Ανάλυση

Θεώρημα

Έστω μία συνάρτηση με την ιδιότητα

$$T(p) = \left\{ \begin{array}{ll} \max_k\{kT(p-k)\} + c_1 p^2, & \text{if } p > 0 \\ c_2, & \text{if } p = 0 \end{array} \right\}$$

οπού c_1, c_2 θετικές σταθερές, p, k ακέραιοι με $p \geq k$. Από θεώρημα των Etsuji Tomita, Akira Tanaka, and Haruhisa Takahashi. που χρησιμοποιεί ανάλυση, $T(p) = \max_k\{kT(p-k)\} + c_1 p^2 = \mathcal{O}(3^{p/3})$.

Ανάλυση

$$D(p,x) \leq \left\{ \begin{array}{ll} \max_{k\in\mathbb{N}}\{kD(p-k,x)\} + c_1 p^2 (p+x). & \\ c_2, & \text{if } p = 0 \end{array} \right\}$$

Ανάλυση

Θεώρημα

Έστω μία συνάρτηση με την ιδιότητα

$$T(p) = \left\{ \begin{array}{ll} \max_k\{kT(p-k)\} + c_1 p^2, & \text{if } p > 0 \\ c_2, & \text{if } p = 0 \end{array} \right\}$$

οπού c_1, c_2 θετικές σταθερές, p, k ακέραιοι με $p \geq k$. Από θεώρημα των Etsuji Tomita, Akira Tanaka, and Haruhisa Takahashi. που χρησιμοποιεί ανάλυση, $T(p) = \max_k\{kT(p-k)\} + c_1 p^2 = \mathcal{O}(3^{p/3})$.

Ανάλυση

Προκύπτει ότι $D(p, x) = \mathcal{O}((p + x)3^{p/3}) = \mathcal{O}((d + x)3^{p/3})$:

Ανάλυση

Θεώρημα

Έστω μία συνάρτηση με την ιδιότητα

$$T(p) = \left\{ \begin{array}{ll} \max_k\{kT(p-k)\} + c_1p^2, & \text{if } p > 0 \\ c_2, & \text{if } p = 0 \end{array} \right\}$$

οπού c_1, c_2 θετικές σταθερές, p, k ακέραιοι με $p \geq k$. Από θεώρημα των Etsuji Tomita, Akira Tanaka, and Haruhisa Takahashi. που χρησιμοποιεί ανάλυση, $T(p) = \max_k\{kT(p-k)\} + c_1p^2 = \mathcal{O}(3^{p/3})$.

Ανάλυση

Προκύπτει ότι $D(p,x) = \mathcal{O}((p+x)3^{p/3}) = \mathcal{O}((d+x)3^{p/3})$:
$D(p,x) \leq \max_k\{kD(p-k,x)\} + c_1p^2(p+x) \implies \frac{D(p,x)}{(p+x)} \leq \max_k\{k\frac{D(p-k,x)}{(p+x)}\} + c_1p^2 \leq \max_k\{k\frac{D(p-k,x)}{((p-k)+x)}\} + c_1p^2 \implies \frac{D(p,x)}{p+x} = \mathcal{O}(3^{p/3}) = \mathcal{O}(1.4422^p)$.

Θεώρημα

Δοσμένου γράφου n κόμβων και εκφυλισμού d, ο αλγόριθμος BronKerboschDegeneracy τρέχει και τυπώνει όλες τις μεγιστικές κλίκες σε χρόνο $\mathcal{O}(dn3^{d/3})$

Θεώρημα

Δοσμένου γράφου n κόμβων και εκφυλισμού d, ο αλγόριθμος BronKerboschDegeneracy τρέχει και τυπώνει όλες τις μεγιστικές κλίκες σε χρόνο $\mathcal{O}(dn3^{d/3})$

Απόδειξη

Σε $\mathcal{O}(m+n)$ βρίσκουμε την διάταξη εκφυλισμού.

Θεώρημα

Δοσμένου γράφου n κόμβων και εκφυλισμού d, ο αλγόριθμος BronKerboschDegeneracy τρέχει και τυπώνει όλες τις μεγιστικές κλίκες σε χρόνο $\mathcal{O}(dn3^{d/3})$

Απόδειξη

Σε $\mathcal{O}(m+n)$ βρίσκουμε την διάταξη εκφυλισμού.
Χτίζουμε τους γράφους H_{P_v,X_v} σε
$\sum_v \mathcal{O}(d(|P_v|+|X_v|))$

Θεώρημα

Δοσμένου γράφου n κόμβων και εκφυλισμού d, ο αλγόριθμος BronKerboschDegeneracy τρέχει και τυπώνει όλες τις μεγιστικές κλίκες σε χρόνο $\mathcal{O}(dn3^{d/3})$

Απόδειξη

Σε $\mathcal{O}(m+n)$ βρίσκουμε την διάταξη εκφυλισμού.
Χτίζουμε τους γράφους H_{P_v,X_v} σε
$\sum_v \mathcal{O}(d(|P_v|+|X_v|)) = \sum_v \mathcal{O}(d(deg(v))) = \mathcal{O}(dm) = \mathcal{O}(d^2n)$.

Θεώρημα

Δοσμένου γράφου n κόμβων και εκφυλισμού d, ο αλγόριθμος BronKerboschDegeneracy τρέχει και τυπώνει όλες τις μεγιστικές κλίκες σε χρόνο $\mathcal{O}(dn3^{d/3})$

Απόδειξη

Σε $\mathcal{O}(m+n)$ βρίσκουμε την διάταξη εκφυλισμού.
Χτίζουμε τους γράφους H_{P_v,X_v} σε
$\sum_v \mathcal{O}(d(|P_v|+|X_v|)) = \sum_v \mathcal{O}(d(deg(v))) = \mathcal{O}(dm) = \mathcal{O}(d^2n)$.
Οι n κλήσεις στον BronKerboschPivot, $\sum_v \mathcal{O}((d+|X_v|)3^{P_v/3} = \mathcal{O}(3^{d/3}\sum_v d + \sum_v |X_v|) = \mathcal{O}((dn+m)3^{d/3}) = \mathcal{O}(dn3^{d/3})$.

Θεώρημα

Δοσμένου γράφου n κόμβων και εκφυλισμού d, ο αλγόριθμος BronKerboschDegeneracy τρέχει και τυπώνει όλες τις μεγιστικές κλίκες σε χρόνο $\mathcal{O}(dn3^{d/3})$

Απόδειξη

Σε $\mathcal{O}(m+n)$ βρίσκουμε την διάταξη εκφυλισμού.
Χτίζουμε τους γράφους H_{P_v,X_v} σε
$\sum_v \mathcal{O}(d(|P_v|+|X_v|)) = \sum_v \mathcal{O}(d(deg(v))) = \mathcal{O}(dm) = \mathcal{O}(d^2n)$.
Οι n κλήσεις στον BronKerboschPivot, $\sum_v \mathcal{O}((d+|X_v|)3^{P_v/3} = \mathcal{O}(3^{d/3}\sum_v d + \sum_v |X_v|) = \mathcal{O}((dn+m)3^{d/3}) = \mathcal{O}(dn3^{d/3})$.
Η αναφορά των κλικών χρειάζεται χρόνο dμ οπού μ το πλήθος των μεγιστικών κλικών. Θα δειχθεί ότι στην χειρότερη $\mu = (n-d)3^{d/3}$, οπότε και ο αλγόριθμος θέλει χρόνο $\mathcal{O}(dn3^{d/3})$.

Θεώρημα

Δοσμένου γράφου n κόμβων και εκφυλισμού d, ο αλγόριθμος BronKerboschDegeneracy τρέχει και τυπώνει όλες τις μεγιστικές κλίκες σε χρόνο $\mathcal{O}(dn3^{d/3})$

Απόδειξη

Σε $\mathcal{O}(m+n)$ βρίσκουμε την διάταξη εκφυλισμού.
Χτίζουμε τους γράφους H_{P_v,X_v} σε
$\sum_v \mathcal{O}(d(|P_v|+|X_v|)) = \sum_v \mathcal{O}(d(deg(v))) = \mathcal{O}(dm) = \mathcal{O}(d^2 n)$.
Οι n κλήσεις στον BronKerboschPivot, $\sum_v \mathcal{O}((d+|X_v|)3^{P_v/3} = \mathcal{O}(3^{d/3}\sum_v d + \sum_v |X_v|) = \mathcal{O}((dn+m)3^{d/3}) = \mathcal{O}(dn3^{d/3})$.
Η αναφορά των κλικών χρειάζεται χρόνο dμ οπού μ το πλήθος των μεγιστικών κλικών. Θα δειχθεί ότι στην χειρότερη $\mu = (n-d)3^{d/3}$, οπότε και ο αλγόριθμος θέλει χρόνο $\mathcal{O}(dn3^{d/3})$. Δεδομένου ότι το μ είναι κάτω φράγμα του χρόνου του αλγόριθμου, ο αλγόριθμος μας είναι αρκετά κοντά στην βέλτιστη τιμή χειρότερης περίπτωσης.

Ανάλυση

Θεώρημα

Έστω d πολλαπλάσιο του 3 με $n \geq d+3$. Σε ένα γράφημα n κόμβων, βαθμού εκφυλισμού d υπάρχουν το πολύ $(n-d)3^{d-3}$ μεγιστικές κλίκες.

Για την απόδειξη χρησιμοποιούμε ένα άλλο γνωστό θεώρημα

Φράγμα moon-moser (1965)

$$\mu(G) = \left\{ \begin{array}{ll} 3^{n/3}, & \text{if } n \ mod \ 3 = 0 \\ 4 \cdot 3^{(n-4)/3}, & \text{if } n \ mod \ 3 = 1 \\ 2 \cdot 3^{(n-2)/3}, & \text{if } n \ mod \ 3 = 2 \end{array} \right\}$$

Θεώρημα

Έστω d πολλαπλάσιο του 3 με $n \geq d+3$. Σε ένα γράφημα n κόμβων, βαθμού εκφυλισμού d υπάρχουν το πολύ $(n-d)3^{d-3}$ μεγιστικές κλίκες.

Απόδειξη

Παίρνουμε την διάταξη εκφυλισμού του G.

Θεώρημα

Έστω d πολλαπλάσιο του 3 με $n \geq d+3$. Σε ένα γράφημα n κόμβων, βαθμού εκφυλισμού d υπάρχουν το πολύ $(n-d)3^{d-3}$ μεγιστικές κλίκες.

Απόδειξη

Παίρνουμε την διάταξη εκφυλισμού του G. Το γράφημα που ενάγεται απ'τους τελευταίους $d+3$ κόμβους του G έχει το πολύ $3^{(d+3)/3}$ μεγιστικές κλίκες.

Θεώρημα

Έστω d πολλαπλάσιο του 3 με $n \geq d+3$. Σε ένα γράφημα n κόμβων, βαθμού εκφυλισμού d υπάρχουν το πολύ $(n-d)3^{d-3}$ μεγιστικές κλίκες.

Απόδειξη

Παίρνουμε την διάταξη εκφυλισμού του G. Το γράφημα που ενάγεται απ'τους τελευταίους $d+3$ κόμβους του G έχει το πολύ $3^{(d+3)/3}$ μεγιστικές κλίκες.
Ένα κόμβος v των πρώτων $n-(d+3)$ έχει το πολύ d μετέπειτα γείτονες. Το γράφημα που ενάγεται από τους μετέπειτα γείτονες έχει το πολύ $3^{d/3}$ μεγιστικές κλίκες, οπότε και οι μεγιστικές κλίκες στις οποίες μπορεί να συμμετάσχει ο v με μετέπειτα γείτονες είναι $3^{d/3}$.

Θεώρημα

Έστω d πολλαπλάσιο του 3 με $n \geq d+3$. Σε ένα γράφημα n κόμβων, βαθμού εκφυλισμού d υπάρχουν το πολύ $(n-d)3^{d-3}$ μεγιστικές κλίκες.

Απόδειξη

Παίρνουμε την διάταξη εκφυλισμού του G. Το γράφημα που ενάγεται απ'τους τελευταίους $d+3$ κόμβους του G έχει το πολύ $3^{(d+3)/3}$ μεγιστικές κλίκες.

Ένα κόμβος v των πρώτων $n-(d+3)$ έχει το πολύ d μετέπειτα γείτονες. Το γράφημα που ενάγεται από τους μετέπειτα γείτονες έχει το πολύ $3^{d/3}$ μεγιστικές κλίκες, οπότε και οι μεγιστικές κλίκες στις οποίες μπορεί να συμμετάσχει ο v με μετέπειτα γείτονες είναι $3^{d/3}$.

Άρα οι πρώτοι $(n-(d+3))$ κόμβοι μπορούν να συμμετέχουν σε $3^{d/3}(n-(d+3))$ μεγιστικές κλίκες συνολικά.

Θεώρημα

Έστω d πολλαπλάσιο του 3 με $n \geq d + 3$. Σε ένα γράφημα n κόμβων, βαθμού εκφυλισμού d υπάρχουν το πολύ $(n-d)3^{d-3}$ μεγιστικές κλίκες.

Απόδειξη

Παίρνουμε την διάταξη εκφυλισμού του G. Το γράφημα που ενάγεται απ'τους τελευταίους $d+3$ κόμβους του G έχει το πολύ $3^{(d+3)/3}$ μεγιστικές κλίκες.
Ένα κόμβος v των πρώτων $n-(d+3)$ έχει το πολύ d μετέπειτα γείτονες. Το γράφημα που ενάγεται από τους μετέπειτα γείτονες έχει το πολύ $3^{d/3}$ μεγιστικές κλίκες, οπότε και οι μεγιστικές κλίκες στις οποίες μπορεί να συμμετάσχει ο v με μετέπειτα γείτονες είναι $3^{d/3}$.
Άρα οι πρώτοι $(n-(d+3))$ κόμβοι μπορούν να συμμετέχουν σε $3^{d/3}(n-(d+3))$ μεγιστικές κλίκες συνολικά.
Αθροίζοντας και τα 2, κλίκες πρώτων $(n-(d+3))$ και τελευταίων $d+3$ προκύπτουν το πολύ $(n-d)3^{d/3}$.

Ανάλυση

Παρατήρηση

Υπάρχει γράφος n κόμβων εκφυλισμού d με ακριβώς τόσες μεγιστικές κλίκες: $K_{3,3,\ldots,3,n-d}$.

Καταληκτικά συμπεράσματα

Θεωρητική αιτιολόγηση αποδοτικότητας

Δόθηκαν θεωρητικά αποδεικτικά στοιχεία για την αποδοτικότητα του Bron-Kerbosch, όπως έχει φανεί στην πράξη. Παραμετροποιημένο με τον βαθμό εκφυλισμού, μία χαμήλή σε πόλλα προβλήματα της πραγματικής ζωής παράμετρο, δίνεται μία αμυδρή παραλλαγή του αλγορίθμου με χαμηλή εξάρτιση από την παράμετρο και σχεδόν βέλτιστο χρόνο χείριστης περίπτωσης.

Καταληκτικά συμπεράσματα

Θεωρητική αιτιολόγηση αποδοτικότητας

Δόθηκαν θεωρητικά αποδεικτικά στοιχεία για την αποδοτικότητα του Bron-Kerbosch, όπως έχει φανεί στην πράξη. Παραμετροποιημένο με τον βαθμό εκφυλισμού, μία χαμήλή σε πόλλα προβλήματα της πραγματικής ζωής παράμετρο, δίνεται μία αμυδρή παραλλαγή του αλγορίθμου με χαμηλή εξάρτιση από την παράμετρο και σχεδόν βέλτιστο χρόνο χείριστης περίπτωσης.

Ανοιχτό ερώτημα

Δίχως την επεξεργασία των κορυφών με την διάταξη εκφυλισμού, δεν θα είχε παραχθεί το συγκεκριμένο όριο χρόνου. Τίθεται το ερώτημα εάν μία τυχαία σειρά δίνει παρόμοια αποτελέσματα, καθώς αυτό θα εξηγούσε περαιτέρω την καλή απόδοση του Bron-Kerbosch στην πράξη.

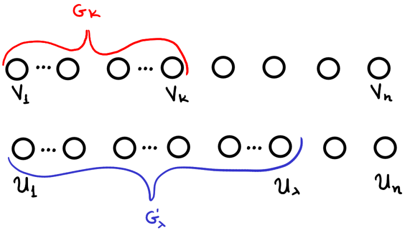
Ευχαριστίες

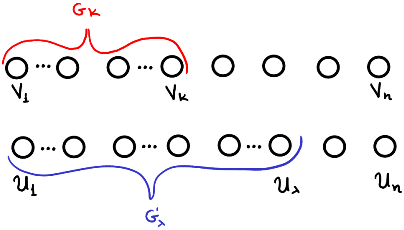
Ευχαριστίες

Οι συγγραφείς ευχαριστούνε τον Αμερικάνικο στρατό για την χορηγία του.

Και εμείς εσάς!

Ευχαριστούμε!





Βιβλιογραφία

1. R. D. Carr, L. Fleischer, V. J. Leung, and C. A. Phillips, Strengthening integrality gaps for capacitated network design and covering problems, in Proceedings of the ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms, 2000, pp. 106–115.
2. N. Bansal and K. Pruhs, Weighted geometric set multi-cover via quasi-uniform sampling, in Proceedings of the European Symposium on Algorithms, 2012, pp. 145–156.