Trust Is Risk: Μία Αποκεντρωμένη Πλατφόρμα Οικονομικής Εμπιστοσύνης

Ορφέας Στέφανος Θυφρονίτης Λήτος

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
olitos@corelab.ntua.gr

Περίληψη Κεντρικά συστήματα φήμης χρησιμοποιούν αστέρια και κριτικές και επομένως χρειάζονται απόκρυψη αλγορίθμων για να αποφεύγουν τον αθέμιτο χειρισμό. Σε αυτόνομα αποκεντρωμένα συστήματα ανοιχτού κώδικα αυτή η πολυτέλεια δεν είναι διαθέσιμη. Στο παρόν κατασκευάζουμε ένα δίκτυο φήμης για αποκεντρωμένες αγορές όπου η εμπιστοσύνη που δίνει η κάθε χρήστης στις υπόλοιπες είναι μετρήσιμη και εκφράζεται με νομισματικούς όρους. Εισάγουμε ένα νέο μοντέλο για πορτοφόλια bitcoin στα οποία τα νομίσματα κάθε χρήστη μοιράζονται σε αξιόπιστες συνεργάτες. Η άμεση εμπιστοσύνη ορίζεται χρησιμοποιώντας μοιραζόμενους λογαριασμούς μέσω των 1-από-2 multisig του bitcoin. Η έμμεση εμπιστοσύνη ορίζεται έπειτα με μεταβατικό τρόπο. Αυτό επιτρέπει να επιχειρηματολογούμε με αυστηρό παιγνιοθεωρητικό τρόπο ως προς την ανάλυση κινδύνου. Αποδεικνύουμε ότι ο κίνδυνος και οι μέγιστες ροές είναι ισοδύναμα στο μοντέλο μας και ότι το σύστημά μας είναι ανθεκτικό σε επιθέσεις Sybil. Το σύστημά μας επιτρέπει τη λήψη σαφών οικονομικών αποφάσεων ως προς την υποκειμενική χρηματική ποσότητα με την οποία μπορεί ένας παίκτης να εμπιστευθεί μία ψευδώνυμη οντότητα. Μέσω ανακατανομής της άμεσης εμπιστοσύνης, ο κίνδυνος που διατρέχεται κατά την αγορά από μία ψευδώνυμη πωλήτρια παραμένει αμετάβλητος.

Keywords: αποκεντρωμένο · εμπιστοσύνη · δίκτυο εμπιστοσύνης · γραμμές πίστωσης · εμπιστοσύνη ως κίνδυνος · ροή · φήμη ·
decentralized · trust · web-of-trust · bitcoin · multisig · line-of-credit · trust-as-risk · flow · reputation

Abstract. Centralized reputation systems use stars and reviews and thus require algorithm secrecy to avoid manipulation. In autonomous open source decentralized systems this luxury is not available. We create a reputation network for decentralized marketplaces where the trust each user gives to the rest of the users is quantifiable and expressed in monetary terms. We introduce a new model for bitcoin wallets in which user coins are split among trusted associates. Direct trust is defined using shared bitcoin accounts via bitcoin's 1-of-2 multisig. Indirect trust is subsequently defined transitively. This enables formal game theoretic arguments pertaining to risk analysis. We prove that risk and maximum flows are equivalent in our model and that our system is Sybil-resilient. Our system allows for concrete financial decisions on the subjective monetary amount a pseudonymous party can be trusted with. Through direct trust redistribution, the risk incurred from making a purchase from a pseudonymous vendor in this manner remains invariant.

Περιεχόμενα

Κατάλογος Σχημάτων

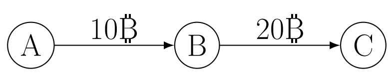
Κατάλογος Ψευδοκωδίκων

1 Εισαγωγή

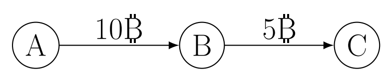
Οι αποκεντρωμένες αγορές μπορούν να κατηγοριοποιηθούν ως κεντρικές και αποκεντρωμένες. Ένα παράδειγμα για κάθε κατηγορία είναι το ebay και το OpenBazaar. Ο κοινός παρονομαστής των καθιερωμένων διαδικτυακών αγορών είναι το γεγονός ότι η φήμη κάθε πωλήτριας και πελάτισσας εκφράζεται κατά κανόνα με τη μορφή αστεριών και κριτικών των χρηστών, ορατές σε όλο το δίκτυο.

Ο στόχος μας είναι να δημιουργήσουμε ένα σύστημα φήμης για αποκεντρωμένες αγορές όπου η εμπιστοσύνη που η κάθε χρήστης δίνει στους υπόλοιπους είναι ποσοτικοποιήσιμη με νομισματικούς όρους. Η κεντρική παραδοχή που χρησιμοποιείται σε όλο το μήκος της παρούσας εργασίας είναι ότι η εμπιστοσύνη είναι ισοδύναμη με τον κίνδυνο, ή η θέση ότι η *εμπιστοσύνη* της *Alice* προς το χρήστη *Charlie* ορίζεται ως το *μέγιστο χρηματικό ποσό* που η *Alice* μπορεί να χάσει όταν ο *Charlie* είναι ελεύθερος να διαλέξει όποια στρατηγική θέλει. Για να υλοποιήσουμε αυτή την ιδέα, θα χρησιμοποιήσουμε τις *πιστωτικές γραμμές* όπως προτάθηκαν από τον Washington Sanchez [1]. Η *Alice* συνδέεται στο δίκτυο όταν εμπιστεύεται ενεργητικά ένα συγκεκριμένο χρηματικό ποσό σε έναν άλλο χρήστη, για παράδειγμα το φίλο της τον *Bob*. Αν ο *Bob* έχει ήδη εμπιστευθεί ένα χρηματικό ποσό σε έναν τρίτο χρήστη, τον *Charlie*, τότε η *Alice* εμπιστεύεται έμμεσα τον *Charlie* αφού αν ο τελευταίος ήθελε να παίξει άδικα, θα μπορούσε να έχει κλέψει ήδη τα χρήματα που του εμπιστεύθηκε ο *Bob*. Θα δούμε αργότερα ότι η *Alice* μπορεί τώρα να εμπλακεί σε οικονομική δραστηριότητα με τον *Charlie*.

Για να υλοποιήσουμε τις πιστωτικές γραμμές, θα χρησιμοποιήσουμε το Bitcoin [2], ένα αποκεντρωμένο κρυπτονόμισμα που διαφέρει από τα συμβατικά νομίσματα γιατί δεν βασίζεται σε αξιόπιστους τρίτους. Όλες οι συναλλαγές δημοσιεύονται σε ένα αποκεντρωμένο "λογιστικό βιβλίο", το blockchain. Κάθε συναλλαγή παίρνει κάποια νομίσματα ως είσοδο και παράγει ορισμένα νομίσματα ως έξοδο. Αν η έξοδος μιας συναλλαγής δεν συνδέεται στην είσοδο μιας άλλης, τότε η έξοδος αυτή ανήκει στο UTXO, το σύνολο των αξόδευτων εξόδων συναλλαγών. Διαισθητικά, το UTXO περιέχει όλα τα αξόδευτα νομίσματα.



Σχ. 1: Η A εμπ. έμμεσα τον C 10₿



Σχ. 2: Η A εμπ. έμμεσα τον C 5₿

Προτείνουμε ένα νέο είδος πορτοφολιού όπου τα νομίσματα δεν έχουν αποκλειστικό ιδιοκτήτη, αλλά τοποθετούνται σε μοιραζόμενους λογαριασμούς που υλοποιούνται μέσω των 1-από-2 multisig, μια κατασκευή του bitcoin που επιτρέπει σε μία από δύο προκαθορισμένες χρήστες να ξοδέψουν τα νομίσματα που περιέχονται σε έναν κοινό λογαριασμό [3]. Θα χρησιμοποιήσουμε το συμβολισμό $1/\{Alice, Bob\}$ για να αναπαραστήσουμε ένα 1-από-2 multisig που μπορεί να ξοδευτεί είτε από την $Alice$, είτε από τον Bob. Με αυτό το συμβολισμό, η σειρά των ονομάτων δεν έχει σημασία, εφ΄ όσον οποιαδήποτε από τις δύο χρήστες μπορεί να ξοδέψει τα νομίσματα. Ωστόσο, έχει σημασία ποια χρήστης καταθέτει τα χρήματα αρχικά στον κοινό λογαριασμό – αυτή η χρήστης διακινδυνεύει τα νομίσματά της.

Η προσέγγισή μας αλλάζει την εμπειρία της χρήστη κατά έναν διακριτικό αλλά και δραστικό τρόπο. Η χρήστης δεν πρέπει να βασίζει πια την εμπιστοσύνη της προς ένα κατάστημα σε αστέρια ή κριτικές που δεν εκφράζονται με οικονομικές μονάδες. Μπορεί απλά να συμβουλευθεί το πορτοφόλι της για να αποφασίσει αν το κατάστημα είναι αξιόπιστο και, αν ναι, μέχρι ποια αξία, μετρημένη σε bitcoin. Το σύστημα αυτό λειτουργεί ως εξής: Αρχικά η $Alice$ μεταφέρει τα χρήματά της από το ιδιωτικό της bitcoin πορτοφόλι σε 1-από-2 διευθύνσεις multisig μοιραζόμενες με φίλες που εμπιστεύεται άνετα. Αυτό καλείται άμεση εμπιστοσύνη. Το σύστημά μας δεν ενδιαφέρεται για τον τρόπο με τον οποίο οι παίκτες καθορίζουν ποιος είναι αξιόπιστος γι΄ αυτές τις απ΄ ευθείας 1-από-2 καταθέσεις. Αυτό το αμφιλεγόμενο είδος εμπιστοσύνης περιορίζεται στην άμεση γειτονιά κάθε παίκτη. Η έμμεση εμπιστοσύνη προς άγνωστους χρήστες υπολογίζεται από έναν ντετερμινιστικό αλγόριθμο. Συγκριτικά, συστήματα με αντικειμενικές αξιολογήσεις δε διαχωρίζουν τους γείτονες από τους υπόλοιπους χρήστες, προσφέροντας έτσι αμφιλεγόμενες ενδείξεις εμπιστοσύνης για όλους.

Ας υποθέσουμε ότι η $Alice$ βλέπει τα προϊόντα του πωλητή $Charlie$. Αντί για τα αστέρια του $Charlie$, η $Alice$ θα δει ένα θετικό αριθμό που υπολογίζεται από το πορτοφόλι της και αναπαριστά τη μέγιστη χρηματική αξία που η $Alice$ μπορεί να πληρώσει με ασφάλεια για να ολοκληρώσει μια αγορά από τον $Charlie$. Αυτή η αξία, γνωστή ως έμμεση εμπιστοσύνη, υπολογίζεται με το θεώρημα Εμπιστοσύνης – Ροής (6). Σημειώστε ότι η έμμεση εμπιστοσύνη προς κάποια χρήστη δεν είναι ενιαία αλλά υποκειμενική. Κάθε χρήστης βλέπει μια ιδιαίτερη έμμεση εμπιστοσύνη που εξαρτάται από την τοπολογία του δικτύου. Η έμμεση εμπιστοσύνη που εμφανίζεται από το σύστημά μας διαθέτει την ακόλουθη επιθυμητή ιδιότητα ασφαλείας: Αν η $Alice$ πραγματοποιήσει μια αγορά από τον $Charlie$, τότε εκτίθεται το πολύ στον ίδιο κίνδυνο στον οποίον εκτιθόταν πριν την αγορά. Ο υπαρκτός εθελούσιος κίνδυνος είναι ακριβώς εκείνος που η $Alice$ έπαιρνε μοιραζόμενη τα νομίσματά της με τις αξιόπιστες φίλες της. Αποδεικνύουμε το αποτέλεσμα αυτό στο θεώρημα Αμετάβλητου Κινδύνου (6). Προφανώς δε θα είναι ασφαλές για την *Alice* να αγοράσει οτιδήποτε από τον *Charlie* ή από οποιαδήποτε άλλη πωλήτρια αν δεν έχει ήδη εμπιστευθεί καθόλου χρήματα σε καμία άλλη χρήστη.

Βλέπουμε ότι στο Trust Is Risk τα χρήματα δεν επενδύονται τη στιγμή της αγοράς και κατ΄ ευθείαν στην πωλήτρια, αλλά σε μια προγενέστερη χρονική στιγμή και μόνο προς άτομα που είναι αξιόπιστα για λόγους εκτός παιχνιδιού. Το γεγονός ότι το σύστημα αυτό μπορεί να λειτουργήσει με έναν εξ ολοκλήρου αποκεντρωμένο τρόπο θα γίνει σαφές στις επόμενες ενότητες. Θα αποδείξουμε το αποτέλεσμα αυτό στο θεώρημα Sybil Αντίστασης (7).

Κάνουμε τη σχεδιαστική επιλογή ότι η κάθε παίκτης μπορεί να εκφράζει την εμπιστοσύνη της μεγιστικά με όρους του διαθέσιμού της κεφαλαίου. Έτσι, μία φτωχή παίκτης δεν μπορεί να διαθέσει πολλή άμεση εμπιστοσύνη στις φίλες της ανεξαρτήτως του πόσο αξιόπιστες είναι. Από την άλλη, μία πλούσια παίκτης μπορεί να εμπιστευθεί ένα μικρό μέρος των χρημάτων της σε κάποια παίκτη που δεν εμπιστεύεται εκτενώς και παρ΄ όλα αυτά να εμφανίζει περισσότερη άμεση εμπιστοσύνη από τη φτωχή παίκτη του προηγούμενου παραδείγματος. Δεν υπάρχει άνω όριο στην εμπιστοσύνη. Κάθε παίκτης περιορίζεται μόνο από τα χρήματά της. Έτσι εκμεταλλευόμαστε την παρακάτω αξιοσημείωτη ιδιότητα του χρήματος: Το ότι κανονικοποιεί τις υποκειμενικές ανθρώπινες επιθυμίες σε αντικειμενική αξία.

Υπάρχουν διάφορα κίνητρα για να συνδεθεί μία χρήστης στο δίκτυο αυτό. Πρώτον, έχει πρόσβαση σε καταστήματα που αλλιώς θα ήταν απρόσιτα. Επίσης, δύο φίλες μπορούν να επισημοποιήσουν την αλληλοεμπιστοσύνη τους εμπιστεύοντας το ίδιο ποσό η μία στην άλλη. Μια μεγάλη εταιρεία που πραγματοποιεί συχνά συμβάσεις υπεργολαβίας με άλλες εταιρείες μπορεί να εκφράσει την εμπιστοσύνη της προς αυτές. Μια κυβέρνηση μπορεί να εμπιστευθεί άμεσα τις πολίτες της με χρήματα και να τις αντιμετωπίσει με ένα ανάλογο νομικό οπλοστάσιο αν αυτές κάνουν ανεύθυνη χρήση της εμπιστοσύνης αυτής. Μια τράπεζα μπορεί να προσφέρει δάνεια ως εξερχόμενες και να χειρίζεται τις καταθέσεις ως εισερχόμενες άμεσες εμπιστοσύνες. Τέλος, το δίκτυο μπορεί να ειδωθεί ως ένα πεδίο επένδυσης και κερδοσκοπίας αφού αποτελεί ένα εντελώς νέο πεδίο οικονομικής δραστηριότητας.

Είναι αξισημείωτο το ότι το ίδιο φυσικό πρόσωπο μπορεί να διατηρεί πολλαπλές ψευδώνυμες ταυτότητες στο ίδιο δίκτυο εμπιστοσύνης και ότι πολλά ανεξάρτητα δίκτυα εμπιστοσύνης διαφορετικών σκοπών μπορούν να συνυπάρχουν. Από την άλλη, η ίδια ψευδώνυμη ταυτότητα μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να αναπτύξει σχέσεις εμπιστοσύνης σε διαφορετικά περιβάλλοντα.

2 Λειτουργία

Θα ακολουθήσουμε τώρα τα βήματα της *Alice* από τη σύνδεση με το δίκτυο μέχρι να ολοκληρώσει επιτυχώς μια αγορά. Ας υποθέσουμε ότι αρχικά όλα τα νομίσματά της, ας πούμε 10Ƀ, είναι αποθηκευμένα έτσι που αποκλειστικά εκείνη μπορεί να τα ξοδέψει.

Δύο αξιόπιστοι φίλοι, ο *Bob* και ο *Charlie*, την πείθουν να δοκιμάσει το Trust Is Risk. Εγκαθιστά το πορτοφόλι Trust Is Risk και μεταφέρει τα 10Ƀ από το κανονικό bitcoin πορτοφόλι της, εμπιστεύοντας 2Ƀ στον *Bob* και 5Ƀ στον *Charlie*. Τώρα ελέγχει αποκλειστικά 3Ƀ και διακινδυνεύει 7Ƀ με αντάλλαγμα το να είναι μέρος του δικτύου. Έχει πλήρη αλλά όχι αποκλειστική πρόσβαση στα 7Ƀ που εμπιστεύθηκε στους φίλους της και αποκλειστική πρόσβαση στα υπόλοιπα 3Ƀ, που αθροίζονται στα 10Ƀ.

Μερικές ημέρες αργότερα, ανακαλύπτει ένα διαδικτυακό κατάστημα παπουτσιών του *Dean*, ο οποίος είναι συνδεδεμένος επίσης στο Trust Is Risk. Η *Alice* βρίσκει ένα ζευγάρι παπούτσια που κοστίζει 1Ƀ και ελέγχει την αξιοπιστία του *Dean* μέσω του νέου της πορτοφολιού. Ας υποθέσουμε ότι ο *Dean* προκύπτει αξιόπιστος μέχρι 5Ƀ. Αφού το 1Ƀ είναι λιγότερο από τα 5Ƀ, η *Alice* πραγματοποιεί την αγορά μέσω του καινούριου της πορτοφολιού με σιγουριά.

Τότε βλέπει στο πορτοφόλι της ότι τα αποκλειστικά της νομίσματα παρέμειναν στα 3Ƀ, τα νομίσματα που εμπιστεύεται στον *Charlie* μειώθηκαν στα 4Ƀ και ότι εμπιστεύεται τον *Dean* με 1Ƀ, όσο και η αξία των παπουτσιών. Επίσης, η αγορά της είναι σημειωμένη ως "σε εξέλιξη". Αν η *Alice* ελέγξει την έμμεση εμπιστοσύνη της προς τον *Dean*, θα είναι και πάλι 4Ƀ. Στο παρασκήνιο, το πορτοφόλι της ανακατένειμε τα νομίσματα που εμπιστευόταν με τρόπο ώστε εκείνη να εμπιστεύεται άμεσα στον *Dean* τόσα νομίσματα όσο κοστίζει το αγορασμένο προϊόν και η εμπιστοσύνη που εμφανίζει το πορτοφόλι να είναι ίση με την αρχική.

Τελικά όλα πάνε καλά και τα παπούτσια φτάνουν στην *Alice*. Ο *Dean* επιλέγει να εξαργυρώσει τα νομίσματα που του εμπιστεύθηκε η *Alice* κι έτσι το πορτοφόλι της δε δείχνει ότι εμπιστεύεται κανένα νόμισμα στον *Dean*. Μέσω του πορτοφολιού της, σημειώνει την αγορά ως επιτυχή. Αυτό επιτρέπει στο σύστημα να αναπληρώσει τη μειωμένη εμπιστοσύνη προς τον *Charlie*, θέτοντας τα νομίσματα άμεσης εμπιστοσύνης στα 5Ƀ και πάλι. Η *Alice* τώρα ελέγχει αποκλειστικά 2Ƀ. Συνεπώς τώρα μπορεί να χρησιμοποιήσει συνολικά 9Ƀ, γεγονός αναμενόμενο, αφού έπρεπε να πληρώσει 1Ƀ για τα παπούτσια.

3 Ο γράφος εμπιστοσύνης

Ας ξεκινήσουμε μια αυστηρή περιγραφή του προτεινόμενου συστήματος, συνοδευόμενη από βοηθητικά παραδείγματα.

Ορισμός 1 (Γράφος). *Το Trust Is Risk αναπαρίσταται από μια ακολουθία κατευθυνόμενων γράφων με βάρη* $(\mathcal{G}_j)$ *όπου* $\mathcal{G}_j = (\mathcal{V}_j, \mathcal{E}_j), j \in \mathbb{N}$. *Επίσης, αφού οι γράφοι έχουν βάρη, υπάρχει μία ακολουθία συναρτήσεων βάρους* (c_j) *με* $c_j : \mathcal{E}_j \to \mathbb{R}^+$.

Οι κόμβοι αναπαριστούν τις παίκτες, οι ακμές αναπαριστούν τις υπάρχουσες άμεσες εμπιστοσύνες και τα βάρη το ποσό αξίας συνδεδεμένης με την αντίστοιχη άμεση εμπιστοσύνη. Όπως θα δούμε, το παιχνίδι εξελίσσεται σε γύρους. Ο δείκτης του γράφου αναπαριστά τον αντίστοιχο γύρο.

Ορισμός 2 (Παίκτες). *Το σύνολο* $\mathcal{V}_j = \mathcal{V}(\mathcal{G}_j)$ *είναι το σύνολο όλων των παικτών στο δίκτυο. Το σύνολο αυτό μπορεί να ειδωθεί ως το σύνολο όλων των ψευδώνυμων ταυτοτήτων.*

Κάθε κόμβος έχει έναν αντίστοιχο μη αρνητικό αριθμό που αναπαριστά το κεφάλαιό του. Το κεφάλαιο ενός κόμβου είναι η συνολική αξία που ο κόμβος κατέχει αποκλειστικά και κανείς άλλος δεν μπορεί να ξοδέψει.

Ορισμός 3 (Κεφάλαιο). *Το κεφάλαιο της* A *στο γύρο* j, $Cap_{A,j}$, *ορίζεται ως τα συνολικά νομίσματα που ανήκουν αποκλειστικά στην* A *στην αρχή του γύρου* j.

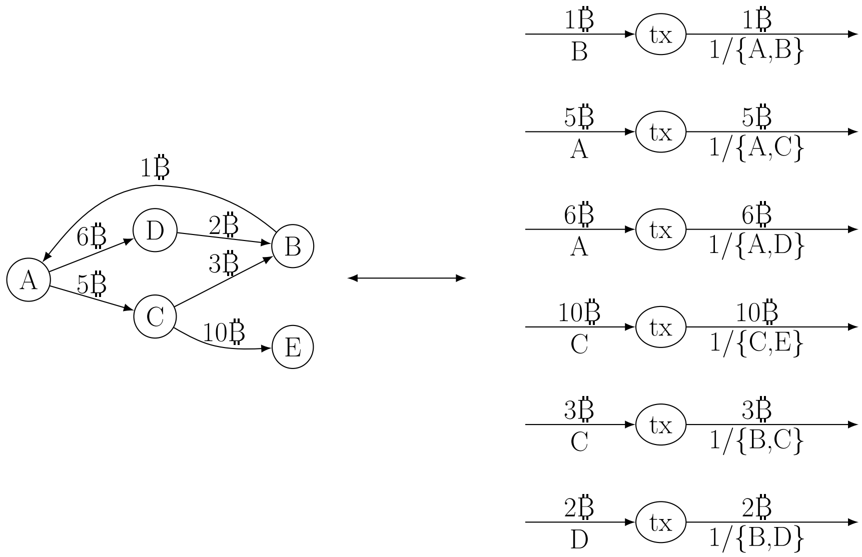
Το κεφάλαιο είναι η αξία που υπάρχει στο παιχνίδι αλλά δεν είναι μοιραζόμενη με έμπιστες τρίτες. Το κεφάλαιο μίας παίκτη μπορεί να ανακατανεμηθεί μόνο κατά τη διάρκεια των γύρων της, σύμφωνα με τις πράξεις της. Μοντελοποιούμε το σύστημα με τέτοιο τρόπο ώστε να είναι αδύνατο να προστεθεί κεφάλαιο στην πορεία του παιχνιδιού με εξωτερικά μέσα. Η χρήση του κεφαλαίου θα ξεκαθαρίσει μόλις οι γύροι ορισθούν με ακρίβεια.

Ο ορισμός της άμεσης εμπιστοσύνης ακολουθεί:

Ορισμός 4 (Άμεση Εμπιστοσύνη). *Η άμεση εμπιστοσύνη από την* A *στη* B *στο τέλος του γύρου* j, $DTr_{A\to B,j}$, *ορίζεται ως το συνολικό ποσό αξίας που υπάρχει σε 1/*$\{A,B\}$ *multisigs στο UTXO στο τέλος του γύρου* j, *όπου τα χρήματα έχουν κατατεθεί από την* A.

$$DTr_{A\to B,j} = \begin{cases} c_j(A,B), & \text{αν } (A,B) \in \mathcal{E}_j \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases} \tag{1}$$

Ο ορισμός αυτός συμφωνεί με τον τίτλο του παρόντος κειμένου και συμπίπτει με τη διαίσθηση και τα κοινωνιολογικά πειραματικά αποτελέσματα του [4] ότι η εμπιστοσύνη που η *Alice* δείχνει στον *Bob* σε κοινωνικά δίκτυα του φυσικού κόσμου αντιστοιχεί με την έκταση του κινδύνου στην οποία η *Alice* τοποθετεί τον εαυτό της με σκοπό να βοηθήσει τον *Bob*. Ένας γράφος παράδειγμα με τις αντίστοιχες συναλλαγές στο UTXO φαίνεται παρακάτω.



Σχ. 3: Ο Γράφος του Trust Is Risk το αντίστοιχο Bitcoin UTXO

Όποιος αλγόριθμος έχει πρόσβαση στο γράφο $\mathcal{G}_j$ έχει επίσης πρόσβαση σε όλες της άμεσες εμπιστοσύνες του γράφου αυτού.

Ορισμός 5 (Γειτονιά). *Χρησιμοποιούμε το συμβολισμό* $N^+(A)_j$ *για να αναφερθούμε σε κόμβους που η A εμπιστεύεται άμεσα και* $N^-(A)_j$ *για τους κόμβους που εμπιστεύονται άμεσα την A στο τέλος του γύρου* j.

$$\begin{aligned} N^+(A)_j &= \{B \in \mathcal{V}_j : DTr_{A\to B,j} > 0\} \\ N^-(A)_j &= \{B \in \mathcal{V}_j : DTr_{B\to A,j} > 0\} \end{aligned} \tag{2}$$

Αυτές καλούνται έξω και μέσα γειτονιές της A στο γύρο j αντίστοιχα.

Ορισμός 6 (Ολική Εισερχόμενη/Εξερχόμενη Άμεση Εμπιστοσύνη). *Χρησιμοποιούμε το συμβολισμό* $in_{A,j}, out_{A,j}$ *για να αναφερθούμε στη συνολική εισερχόμενη και εξερχόμενη άμεση εμπιστοσύνη αντίστοιχα.*

$$in_{A,j} = \sum_{v\in N^-(A)_j} DTr_{v\to A,j} \quad , \qquad out_{A,j} = \sum_{v\in N^+(A)_j} DTr_{A\to v,j} \tag{3}$$

Ορισμός 7 (Περιουσία). *Το άθροισμα του κεφαλαίου και της εξερχόμενης άμεσης εμπιστοσύνης της A.*

$$As_{A,j} = Cap_{A,j} + out_{A,j} \tag{4}$$

4 Η Εξέλιξη της Εμπιστοσύνης

Ορισμός 8 (Γύροι). *Σε κάθε γύρο j μία παίκτης $A \in \mathcal{V}, A = Player\left(j\right)$, επιλέγει μία ή περισσότερες πράξεις εκ των δύο ακόλουθων κατηγοριών:*
***Steal(**y_B**, B)**: Να κλέψει αξία y_B από τη $B \in N^-\left(A\right)_{j-1}$, όπου $0 \leq y_B \leq DTr_{B\rightarrow A,j-1}$. Τότε:*

$$DTr_{B\rightarrow A,j} = DTr_{B\rightarrow A,j-1} - y_B$$

***Add(**y_B**,B)**: Να προσθέσει αξία y_B στη $B \in \mathcal{V}$, όπου $-DTr_{A\rightarrow B,j-1} \leq y_B$. Τότε:*

$$DTr_{A\rightarrow B,j} = DTr_{A\rightarrow B,j-1} + y_B$$

Όταν $y_B < 0$, θα λέμε ότι η A μειώνει την άμεση εμπιστοσύνη του προς την B κατά $-y_B$. Όταν $y_B > 0$, θα λέμε ότι η A αυξάνει την άμεση εμπιστοσύνη της προς τη B κατά y_B. Αν $DTr_{A\rightarrow B,j-1} = 0$, τότε λέμε ότι η A αρχίζει να εμπιστεύεται άμεσα τη B. Η A επιλέγει "πάσο" αν δεν επιλέξει καμία πράξη. Επίσης, έστω Y_{st}, Y_{add} η συνολική αξία που πρόκειται να κλαπεί και να προστεθεί αντίστοιχα από την A στο γύρο της j. Για να είναι ένας γύρος δυνατός, θα πρέπει

$$Y_{add} - Y_{st} \leq Cap_{A,j-1} \ . \tag{5}$$

Το κεφάλαιο ανανεώνεται σε κάθε γύρο: $Cap_{A,j} = Cap_{A,j-1} + Y_{st} - Y_{add}$.

Μία παίκτης δεν μπορεί να επιλέξει δύο πράξεις της ίδιας κατηγορίας προς την ίδια παίκτη σε ένα γύρο. Το σύνολο πράξεων το γύρο j συμβολίζεται $Turn_j$. Ο γράφος που προκύπτει εφαρμόζοντας τις πράξεις στον $\mathcal{G}_{j-1}$ είναι ο $\mathcal{G}_j$.

Για παράδειγμα, έστω $A = Player(j)$. Ένας έγκυρος γύρος μπορεί να είναι

$$Turn_j = \left\{Steal\left(x, B\right), Add\left(y, C\right), Add\left(w, D\right)\right\} \ .$$

Η πράξη $Steal$ απαιτεί $0 \leq x \leq DTr_{B\rightarrow A,j-1}$, οι πράξεις Add απαιτούν $DTr_{A\rightarrow C,j-1} \geq -y$ και $DTr_{A\rightarrow D,j-1} \geq -w$ και ο περιορισμός του κεφαλαίου $y + w - x \leq Cap_{A,j-1}$.

Χρησιμοποιούμε $prev\left(j\right)$ και $next\left(j\right)$ για να δηλώσουμε τον προηγούμενο και τον επόμενο γύρο που παίχθηκε αντίστοιχα από την $Player\left(j\right)$.

Ορισμός 9 (Προηγούμενος/Επόμενος Γύρος). *Έστω $j \in \mathbb{N}$ ένας γύρος με $Player\left(j\right) = A$. Ορίζουμε τα $prev\left(j\right), next\left(j\right)$ ως τον προηγούμενο και τον επόμενο γύρο που η A επιλέγεται να παίξει αντίστοιχα. Αν ο πρώτος γύρος που παίζει η A είναι ο j, είναι $prev\left(j\right) = 0$. Πιο αυστηρά, έστω*

$$\begin{aligned} P &= \left\{k \in \mathbb{N} : k < j \wedge Player\left(k\right) = A\right\} \text{ και} \\ N &= \left\{k \in \mathbb{N} : k > j \wedge Player\left(k\right) = A\right\} \ . \end{aligned}$$

Τότε ορίζουμε $prev\left(j\right), next\left(j\right)$ ως εξής:

$$prev\left(j\right) = \begin{cases} \max P, & P \neq \emptyset \\ 0, & P = \emptyset \end{cases} , \ next\left(j\right) = \min N$$

Το $next\left(j\right)$ είναι πάντα καλώς ορισμένο με την παραδοχή ότι μετά από κάθε γύρο όλες οι παίκτες ξαναπαίζουν τελικά.

Ορισμός 10 (Ζημία). *Έστω j γύρος τέτοιος ώστε $Player\left(j\right) = A$.*

$$Damage_{A,j} = out_{A,prev(j)} - out_{A,j-1} \tag{6}$$

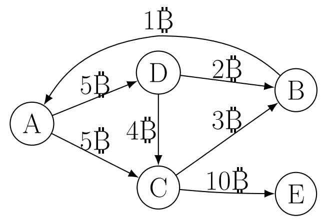
Λέμε ότι κλάπηκε από την A αξία $Damage_{A,j}$ ανάμεσα στον $prev\left(j\right)$ και στον j. Παραλείπουμε τους δείκτες γύρων όταν εννοούνται από τα συμφραζόμενα.

Ορισμός 11 (Ιστορία). *Ορίζουμε την Ιστορία, $\mathcal{H} = \left(\mathcal{H}_j\right)$, ως την ακολουθία όλων των διατεταγμένων ζευγών που περιέχουν τα σύνολα κινήσεων και την αντίστοιχη παίκτη.*

$$\mathcal{H}_j = \left(Player\left(j\right), Turn_j\right) \tag{7}$$

Γνώση του αρχικού γράφου $\mathcal{G}_0$, των αρχικών κεφαλαίων όλων των παικτών και της ιστορίας ισοδυναμούν με πλήρη κατανόηση της εξέλιξης του παιχνιδιού. Χτίζοντας στο παράδειγμα του σχήματος 3, μπορούμε να δούμε το γράφο που προκύπτει όταν η D παίξει

$$Turn_1 = \left\{Steal\left(1, A\right), Add\left(4, C\right)\right\} \ . \tag{8}$$



Σχ. 4: Ο Γράφος του Παιχνιδιού μετά τον $Turn_1$ (8) στο γράφο του Σχ. 3

Το Trust Is Risk ελέγχεται από έναν αλγόριθμο που επιλέγει μία παίκτη, λαμβάνει το γύρο που η παίκτης αυτή επιθυμεί να παίξει και, αν ο γύρος της είναι έγκυρος, τον εκτελεί. Αυτά τα βήματα επαναλαμβάνονται επ΄ αόριστον. Θεωρούμε ότι οι παίκτες επιλέγονται με τέτοιο τρόπο που μία παίκτης, μετά από τον γύρο της, τελικά θα ξαναπαίξει αργότερα.

```
Trust Is Risk Game
j = 0
while (True)
  j += 1; $A \xleftarrow{\$} \mathcal{V}_j$
  Turn = strategy[$A$]($\mathcal{G}_0$, $A$, $Cap_{A,0}$, $\mathcal{H}_{1\ldots j-1}$)
  ($\mathcal{G}_j$, $Cap_{A,j}$, $\mathcal{H}_j$) = executeTurn($\mathcal{G}_{j-1}$, $A$, $Cap_{A,j-1}$, Turn)
```

Η `strategy[`A`]()` προσφέρει στην παίκτη A πλήρη γνώση του παιχνιδιού, εκτός από τα κεφάλαια των άλλων παικτών. Αυτή η παραδοχή μπορεί να μην είναι πάντα ρεαλιστική.

Η `executeTurn()` ελέγχει την εγκυρότητα του γύρου `Turn` και τον αντικαθιστά με έναν κενό γύρο αν είναι άκυρος. Ακόλουθα, δημιουργεί ένα νέο γράφο $\mathcal{G}_j$ και ανανεώνει την ιστορία αναλόγως. Για τους αντίστοιχους ψευδοκώδικες, δείτε το Παράρτημα.

5 Μεταβατικότητα Εμπιστοσύνης

Στην ενότητα αυτή ορίζουμε μερικές στρατηγικές και δείχνουμε τους ανάλογους αλγορίθμους. Μετά ορίζουμε το Μεταβατικό Παιχνίδι (Transitive Game) που αναπαριστά το σενάριο χειρότερης περίπτωσης για μία τίμια παίκτη όταν κάποια άλλη παίκτης αποφασίζει να φύγει από το δίκτυο με τα χρήματά της και όλα τα χρήματα που άλλες εμπιστεύονται άμεσα σε αυτήν.

Ορισμός 12 (Αδρανής Στρατηγική (Idle Strategy)). *Μία παίκτης A ακολουθεί την αδρανή στρατηγική αν παίζει "πάσο" στο γύρο της.*

```
Idle Strategy
```

```
Input : graph $\mathcal{G}_0$, player $A$, capital $Cap_{A,0}$, history $(\mathcal{H})_{1\ldots j-1}$
Output : $Turn_j$
idleStrategy($\mathcal{G}_0$, $A$, $Cap_{A,0}$, $\mathcal{H}$) :
  return($\emptyset$)
```

Οι είσοδοι και οι έξοδοι είναι πανομοιότυποι με αυτούς της `idleStrategy()` στις υπόλοιπες στρατηγικές, συνεπώς αποφεύγουμε την επανάληψή τους.

Ορισμός 13 (Κακιά Στρατηγική). *Μία παίκτης A ακολουθεί την κακιά στρατηγική αν στο γύρο της κλέβει όλη την εισερχόμενη άμεση εμπιστοσύνη και μηδενίζει όλη την εξερχόμενη άμεση εμπιστοσύνη.*

```
evilStrategy($\mathcal{G}_0$, $A$, $Cap_{A,0}$, $\mathcal{H}$) :
  Steals = $\bigcup_{v \in N^-(A)_{j-1}} \{Steal(DTr_{v \to A,j-1}, v)\}$
  Adds = $\bigcup_{v \in N^+(A)_{j-1}} \{Add(-DTr_{A \to v,j-1}, v)\}$
  $Turn_j$ = Steals $\cup$ Adds
  return($Turn_j$)
```

Ορισμός 14 (Συντηρητική Στρατηγική). *Μία παίκτης A ακολουθεί τη συντηρητική στρατηγική αν αναπληρώνει την αξία που έχασε από τον προηγούμενο γύρο, $Damage_A$, κλέβοντας από άλλες που την εμπιστεύονται άμεσα τόσο όσο μπορεί μέχρι την τιμή $Damage_A$ και δεν εκτελεί άλλη πράξη.*

```
consStrategy($\mathcal{G}_0$, $A$, $Cap_{A,0}$, $\mathcal{H}$) :
  Damage = $out_{A,prev(j)}$ - $out_{A,j-1}$
  if (Damage > 0)
    if (Damage >= $in_{A,j-1}$)
      $Turn_j$ = $\bigcup_{v \in N^-(A)_{j-1}} \{Steal\,(DTr_{v \to A,j-1}, v)\}$
    else
      $y$ = SelectSteal($G_j$, $A$, Damage) #$y$ = $\{y_v : v \in N^-\,(A)_{j-1}\}$
      $Turn_j$ = $\bigcup_{v \in N^-(A)_{j-1}} \{Steal\,(y_v, v)\}$
  else $Turn_j$ = $\emptyset$
  return($Turn_j$)
```

Η `SelectSteal()` επιστρέφει y_v με $v \in N^-\,(A)_{j-1}$ τέτοιο ώστε

$$\sum_{v \in N^-(A)_{j-1}} y_v = Damage_{A,j} \wedge \forall v \in N^-\,(A)_{j-1}\,, y_v \leq DTr_{v \to A,j-1}\ . \quad (9)$$

Η παίκτης A μπορεί να ορίσει κατά βούληση πώς η `SelectSteal()` θα κατανείμει τις πράξεις $Steal\left(\right)$ κάθε φορά που καλεί τη συνάρτηση, εφ' όσον ο περιορισμός (9) είναι σεβαστός.

Όπως βλέπουμε, ο ορισμός καλύπτει μια πληθώρα επιλογών για τη συντηρητική παίκτη, αφού στην περίπτωση που $0 < Damage_{A,j} < in_{A,j-1}$ μπορεί να επιλέξει να κατανείμει τις πράξεις $Steal\left(\right)$ όπως επιθυμεί.

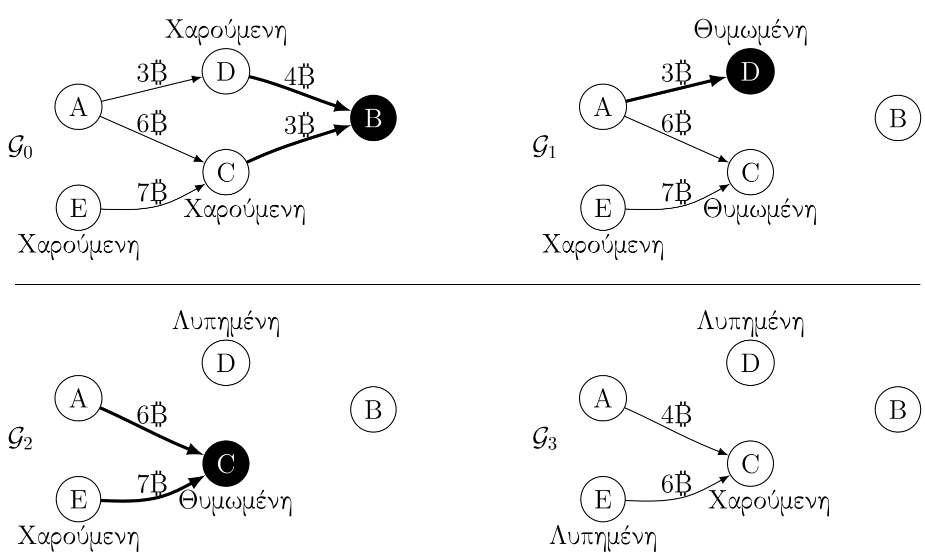
Ο συλλογισμός πίσω από αυτή τη στρατηγική προκύπτει από μια συνηθισμένη περίπτωση στον πραγματικό κόσμο. Έστω μία πελάτισσα, μία μεσάζοντας κι μία παραγωγός. Η πελάτισσα εμπιστεύεται κάποια αξία στη μεσάζοντα ώστε η τελευταία να μπορέσει να αγοράσει το επιθυμητό προϊόν από την παραγωγό και να το παραδώσει στην πελάτισσα. Η μεσάζοντας με τη σειρά της εμπιστεύεται ίση αξία στην παραγωγό, η οποία απαιτεί την προκαταβολή του ποσού για να μπορέσει να ολοκληρώσει τη διαδικασία παραγωγής. Ωστόσο, η παραγωγός τελικά δε δίνει το προϊόν ούτε επιστρέφει το ποσό λόγω πτώχευσης ή επιλογής να φύγει από την αγορά με ένα άδικο όφελος. Η μεσάζοντας τότε μπορεί να επιλέξει είτε να αποζημιώσει την πελάτισσα και να υποστεί τη ζημία, ή να αρνηθεί την αποζημίωση και να χάσει την εμπιστοσύνη της πελάτισσας. Η τελευταία επιλογή για τη μεσάζοντα είναι ακριβώς η συντηρητική στρατηγική. Χρησιμοποιείται στη συνέχεια του παρόντος ως η στρατηγική για όλες τις ενδιάμεσες παίκτες γιατί μοντελοποιεί με επιτυχία το σενάριο χειρότερης περίπτωσης που μία πελάτισσα μπορεί να αντιμετωπίσει αφού μία κακιά παίκτης αποφασίσει να κλέψει ό,τι μπορεί και οι υπόλοιπες παίκτες δεν εμπλέκονται σε κακή δράση.

Συνεχίζουμε με μία δυνατή εξέλιξη του παιχνιδιού, το Μεταβατικό Παιχνίδι. Στο γύρο 0, υπάρχει ήδη ένα συγκεκριμένο δίκτυο. Όλες οι παίκτες εκτός της A και της B ακολουθούν τη συντηρητική στρατηγική. Επιπλέον, το σύνολο των παικτών δε μεταβάλλεται κατά τη διάρκεια του Μεταβατικού Παιχνιδιού, συνεπώς μπορούμε να αναφερθούμε στο $\mathcal{V}_j$ για κάθε γύρο j ως $\mathcal{V}$. Επίσης, κάθε συντηρητική παίκτης μπορεί να βρίσκεται σε μία από τρεις καταστάσεις: Χαρούμενη (Happy), Θυμωμένη (Angry) ή Λυπημένη (Sad). Οι Χαρούμενες παίκτες έχουν ζημία 0, οι Θυμωμένες παίκτες έχουν θετική ζημία και θετική εισερχόμενη άμεση εμπιστοσύνη, άρα μπορούν να αναπληρώσουν τη ζημία τους τουλάχιστον μερικώς και οι Λυπημένες παίκτες έχουν θετική ζημία, αλλά 0 εισερχόμενη άμεση εμπιστοσύνη, άρα δεν μπορούν να αναπληρώσουν τη ζημία. Αυτές οι συμβάσεις θα ισχύουν όποτε χρησιμοποιούμε το Μεταβατικό Παιχνίδι.

Transitive Game
Input : graph $\mathcal{G}_0$, $A \in \mathcal{V}$ idle player, $B \in \mathcal{V}$ evil player
Angry = Sad = $\emptyset$; Happy = $\mathcal{V} \setminus \{A, B\}$
for $(v \in \mathcal{V} \setminus \{B\})$ $Loss_v$ = 0

```
j = 0
while (True)
  j += 1; v ←$ 𝒱 \ {A}
  Turn_j = strategy[v](𝒢_0, v, Cap_{v,0}, mathcalH_{1...j−1})
  executeTurn(𝒢_{j−1}, v, Cap_{v,j−1}, Turn_j)
  for (action ∈ Turn_j)
    action match do
      case Steal(y, w) do
        exchange = y
        Loss_w += exchange
        if (v != B) Loss_v -= exchange
        if (w != A)
          Happy = Happy \ {w}
          if (in_{w,j} == 0) Sad = Sad ∪ {w}
          else Angry = Angry ∪ {w}
  if (v != B)
    Angry = Angry \ {v}
    if (Loss_v > 0)  Sad = Sad ∪ {v}        #in_{v,j} should be zero
    if (Loss_v == 0) Happy = Happy ∪ {v}
```

Ένα παράδειγμα εκτέλεσης ακολουθεί:



Σχ. 5: Η B κλέβει 7Ƀ, μετά η D κλέβει 3Ƀ και η C κλέβει 3Ƀ

Έστω j_0 ο πρώτος γύρος στον οποίο η B επιλέγεται. Μέχρι τότε, όλες οι παίκτες θα παίζουν "πάσο" αφού τίποτα δεν έχει κλαπεί ακόμα (βλέπε το

Παράρτημα (Θεώρημα 1) για μια αυστηρή απόδειξη αυτού του απλού γεγονότος). Επιπλέον, έστω $v = Player(j)$ και $j' = prev\,(j)$. Το Μεταβατικό Παιχνίδι παράγει γύρους:

$$Turn_j = \bigcup_{w \in N^-(v)_{j-1}} \{Steal\,(y_w, w)\} \ , \tag{10}$$

όπου

$$\sum_{w \in N^-(v)_{j-1}} y_w = \min\left(in_{v,j-1}, Damage_{v,j}\right) \ .$$

Βλέπουμε ότι αν $Damage_{v,j} = 0$, τότε $Turn_j = \emptyset$.

Από τον ορισμό του $Damage_{v,j}$ και γνωρίζοντας ότι καμία στρατηγική σε αυτή την περίπτωση δεν μπορεί να αυξήσει καμία άμεση εμπιστοσύνη, βλέπουμε ότι $Damage_{v,j} \geq 0$. Επίσης, είναι $Loss_{v,j} \geq 0$ γιατί αν $Loss_{v,j} < 0$, τότε η v θα είχε κλέψει περισσότερη αξία απ᾽ ότι της έχει κλαπεί, συνεπώς δε θα ακολουθούσε τη συντηρητική στρατηγική.

6 Ροή Εμπιστοσύνης

Μπορούμε τώρα να ορίσουμε την έμμεση εμπιστοσύνη από την A στη B.

Ορισμός 15 (Έμμεση Εμπιστοσύνη). *Η έμμεση εμπιστοσύνη από την A στη B μετά το γύρο j ορίζεται ως η μέγιστη δυνατή αξία που μπορεί να κλαπεί από την A μετά το γύρο j στο* `TransitiveGame(`$\mathcal{G}_j$`,`A`,`B`)`.

Είναι $Tr_{A \to B} \geq DTr_{A \to B}$. Το επόμενο θεώρημα δείχνει ότι η $Tr_{A \to B}$ είναι πεπερασμένη.

Θεώρημα 1 (Θεώρημα Σύγκλισης Εμπιστοσύνης). *Έστω ένα Μεταβατικό Παιχνίδι. Υπάρχει γύρος τέτοιος ώστε όλοι οι επόμενοι γύροι να είναι κενοί.*

Διάγραμμα Απόδειξης. Αν το παιχνίδι δεν συνέκλινε, οι πράξεις $Steal\,()$ θα συνέχιζαν για πάντα χωρίς μείωση του συνολικού κλεμμένου ποσού σε βάθος χρόνου, συνεπώς το ποσό αυτό θα απειριζόταν. Αυτό ωστόσο είναι αδύνατο, αφού υπάρχει μόνο πεπερασμένη συνολική άμεση εμπιστοσύνη. □

Πλήρεις αποδείξεις όλων των θεωρημάτων και λημμάτων υπάρχουν στο Παράρτημα.

Στην περίπτωση ενός `TransitiveGame(`$\mathcal{G}$`,`A`,`B`)`, χρησιμοποιούμε το συμβολισμό $Loss_A = Loss_{A,j}$, όπου j είναι ένας γύρος στον οποίο το παιχνίδι έχει συγκλίνει. Είναι σημαντικό να σημειώσουμε ότι η $Loss_A$ δεν είναι η ίδια για επανειλημμένες εκτελέσεις αυτού του είδους παιχνιδιού, αφού η σειρά με την οποία επιλέγονται οι παίκτες μπορεί να διαφέρει ανάμεσα σε εκτελέσεις και οι συντηρητικές παίκτες έχουν το περιθώριο να επιλέξουν ποιες εισερχόμενες άμεσες εμπιστοσύνες θα κλέψουν και πόσο από την καθεμία.

Έστω ένας κατευθυνόμενος γράφος με βάρη G. Θα μελετήσουμε τη μέγιστη ροή στο γράφο αυτό. Για μία εισαγωγή στο πρόβλημα μέγιστης ροής βλέπε [5] σελ. 708. Θεωρώντας το βάρος κάθε ακμής ως τη χωρητικότητά της, μία απόδοση ροής $X = [x_{vw}]_{\mathcal{V}\times\mathcal{V}}$ με πηγή A και καταβόθρα B είναι έγκυρη όταν:

$$\forall (v,w) \in \mathcal{E}, x_{vw} \leq c_{vw} \text{ και} \tag{11}$$

$$\forall v \in \mathcal{V} \setminus \{A,B\}, \sum_{w\in N^+(v)} x_{wv} = \sum_{w\in N^-(v)} x_{vw} \ . \tag{12}$$

Δεν υποθέτουμε συμμετρία κατεύθυνσης στην απόδοση X. Η τιμή ροής είναι $\sum\limits_{v\in N^+(A)} x_{Av}$, η οποία προκύπτει ίση με $\sum\limits_{v\in N^-(B)} x_{vB}$. Υπάρχει αλγόριθμος που επιστρέφει τη μέγιστη δυνατή ροή από την A στη B, γνωστός ως $MaxFlow\,(A,B)$. Αυτός ο αλγόριθμος χρειάζεται πλήρη γνώση του γράφου. Η γρηγορότερη εκδοχή του έχει χρονική πολυπλοκότητα $O\left(|\mathcal{V}||\mathcal{E}|\right)$ [6]. Η τιμή ροής του $MaxFlow\,(A,B)$ συμβολίζεται $maxFlow\,(A,B)$.

Θα εισάγουμε τώρα δύο λήμματα που θα χρησιμοποιηθούν για την απόδειξη ενός από τα κεντρικά αποτελέσματα αυτής της εργασίας, το θεώρημα Εμπιστοσύνης – Ροής.

Λήμμα 1 (Οι Μέγιστες Ροές είναι Μεταβατικά Παιχνίδια). *Έστω $\mathcal{G}$ γράφος παιχνιδιού, $A,B \in \mathcal{V}$ και $MaxFlow\,(A,B)$ η μέγιστη ροή από την A στη B εκτελεσμένη στον $\mathcal{G}$. Υπάρχει εκτέλεση του `TransitiveGame`$(\mathcal{G},A,B)$ τέτοια ώστε $maxFlow\,(A,B) \leq Loss_A$.*

Διάγραμμα Απόδειξης. Η επιθυμητή εκτέλεση του `TransitiveGame()` θα περιέχει όλες τις ροές από την $MaxFlow\,(A,B)$ ως ισοδύναμες πράξεις $Steal\,()$. Οι παίκτες θα παίζουν η μία μετά την άλλη, από την B προς την A. Κάθε παίκτης θα κλέψει από τις προκατόχους της τόσο όσο κλάπηκε από αυτή. Οι ροές και η συντηρητική στρατηγική μοιράζονται την ιδιότητα ότι η συνολική είσοδος είναι ίση με τη συνολική έξοδο. □

Λήμμα 2 (Τα Μεταβατικά Παιχνίδια είναι Μέγιστες Ροές). *Έστω $\mathcal{H} =$`TransitiveGame`$(\mathcal{G},A,B)$ για κάποιο γράφο $\mathcal{G}$ και $A,B \in \mathcal{V}$. Υπάρχει έγκυρη ροή $X = \{x_{wv}\}_{\mathcal{V}\times\mathcal{V}}$ στον $\mathcal{G}_0$ τέτοια ώστε $\sum\limits_{v\in\mathcal{V}} x_{Av} = Loss_A$.*

Διάγραμμα Απόδειξης. Αν αποκλείσουμε τις Λυπημένες παίκτες από το παιχνίδι, οι πράξεις $Steal\,()$ που απομένουν συνιστούν μία έγκυρη ροή από την A στη B. □

Θεώρημα 2 (Θεώρημα Εμπιστοσύνης – Ροής).
Έστω $\mathcal{G}$ ένας γράφος παιχνιδιού και $A, B \in \mathcal{V}$. Ισχύει ότι

$$Tr_{A \to B} = maxFlow\,(A, B) \ .$$

Απόδειξη. Από το Λήμμα 6 υπάρχει εκτέλεση του Μεταβατικού Παιχνιδιού τέτοια ώστε $Loss_A \geq maxFlow\,(A, B)$. Αφού η $Tr_{A \to B}$ είναι η μέγιστη ζημία που μπορεί να έχει υποστεί η A μετά τη σύγκλιση του Μεταβατικού Παιχνιδιού, βλέπουμε ότι

$$Tr_{A \to B} \geq maxFlow\,(A, B) \ . \tag{13}$$

Όμως κάποια εκτέλεση του Μετατβατικού Παιχνιδιού δίνει $Tr_{A \to B} = Loss_A$. Από το Λήμμα 6, αυτή η εκτέλεση αντιστοιχεί σε μία ροή. Συνεπώς

$$Tr_{A \to B} \leq maxFlow\,(A, B) \ . \tag{14}$$

Το θεώρημα προκύπτει από το (13) και το (14). □

Ας σημειωθεί ότι η μέγιστη ροή είναι η ίδια στις ακόλουθες δύο περιπτώσεις: Αν μία παίκτης επιλέξει την κακιά στρατηγική και αν αυτή η παίκτης επιλέξει μία παραλλαγή της κακιάς στρατηγικής στην οποία δεν μηδενίζει την εξερχόμενη άμεση εμπιστοσύνη της.

Επιπλέον δικαιολόγηση της μεταβατικότητας της εμπιστοσύνης με χρήση της μέγιστης ροής μπορεί να βρεθεί στην κοινωνιολογική εργασία [4] όπου η άμεση αντιστοίχιση των μέγιστων ροών και της εμπειρικής εμπιστοσύνης επαληθεύεται πειραματικά.

Εδώ βλέπουμε ένα ακόμη σημαντικό θεώρημα που δίνει τη βάση για συναλλαγές αμετάβλητου κινδύνου μεταξύ διαφορετικών, πιθανώς αγνώστων, ατόμων.

Θεώρημα 3 (Θεώρημα Αμετάβλητου Κινδύνου). *Έστω $\mathcal{G}$ γράφος παιχνιδιού, $A, B \in \mathcal{V}$ και l η επιθυμητή αξία προς μεταφορά από την A στην B, με $l \leq Tr_{A \to B}$. Έστω επίσης $\mathcal{G}'$ με τους ίδιους κόμβους με τον $\mathcal{G}$ τέτοιος ώστε*

$$\forall v \in \mathcal{V}' \setminus \{A\}, \forall w \in \mathcal{V}', DTr'_{v \to w} = DTr_{v \to w} \ .$$

Επιπλέον, υποθέτουμε ότι υπάρχουν τιμές για τις εξερχόμενες άμεσες εμπιστοσύνες της A, $DTr'_{A \to v}$, τέτοιες ώστε

$$Tr'_{A \to B} = Tr_{A \to B} - l \ . \tag{15}$$

Έστω ένας άλλος γράφος παιχνιδιού, $\mathcal{G}''$, ταυτόσημος με τον $\mathcal{G}'$ εκτός της παρακάτω διαφοράς:

$$DTr''_{A\to B} = DTr'_{A\to B} + l \ .$$

Ισχύει τότε ότι

$$Tr''_{A\to B} = Tr_{A\to B} \ .$$

Απόδειξη. Οι δύο γράφοι $\mathcal{G}'$ και $\mathcal{G}''$ διαφέρουν μόνο στο βάρος της ακμής (A, B), το οποίο είναι μεγαλύτερο κατά l στον $\mathcal{G}''$. Συνεπώς οι δύο αλγόριθμοι $MaxFlow$ θα επιλέξουν την ίδια ροή, εκτός από την ακμή (A, B), όπου θα είναι $x''_{AB} = x'_{AB} + l$. □

Είναι διαισθητικά προφανές ότι η A μπορεί να μειώσει την εξερχόμενη άμεση εμπιστοσύνη με τρόπου που να επιτυγχάνει το (15), αφού το $maxFlow\,(A, B)$ είναι συνεχές ως προς τις εξερχόμενες άμεσες εμπιστοσύνες της A. Αφήνουμε αυτόν τον υπολογισμό ως μέρος μελλοντικής έρευνας.

7 Σψβιλ Ρεσιλιενςε

Ονε οφ τηε πριμαρψ αιμς οφ τηις σψστεμ ις το μιτιγατε τηε δανγερ φορ Σψβιλ ατταςκς [7] ωηιλστ μαινταινινγ φυλλψ δεςεντραλιζεδ αυτονομψ.

Ηερε ωε εξτενδ τηε δεφινιτιον οφ ινδιρεςτ τρυστ το μανψ πλαψερς.

Ορισμός 16 (Ινδιρεςτ Τρυστ το Μυλτιπλε Πλαψερς). *Τηε ινδιρεςτ τρυστ φρομ πλαψερ A το α σετ οφ πλαψερς, $S \subset \mathcal{V}$ ις δεφινεδ ας τηε μαξιμυμ ποσσιβλε αλυε τηατ ςαν βε στολεν φρομ A ιφ αλλ πλαψερς ιν S φολλοω τηε ειλ στρατεγψ, A φολλοως τηε ιδλε στρατεγψ ανδ εερψονε ελσε ($\mathcal{V} \setminus (S \cup \{A\})$) φολλοως τηε ςονσερατιε στρατεγψ. Μορε φορμαλλψ, λετ $choices$ βε τηε διφφερεντ αςτιονς βετωεεν ωηιςη τηε ςονσερατιε πλαψερς ςαν ςηοοσε, τηεν*

$$Tr_{A\to S,j} = \max_{j':j'>j,choices} \left[out_{A,j} - out_{A,j'}\right] \tag{16}$$

Ωε νοω εξτενδ Τρυστ Φλοω τηεορεμ (6) το μανψ πλαψερς.

Θεώρημα 4 (Μυλτι-Πλαψερ Τρυστ Φλοω).
Λετ $S \subset \mathcal{V}$ ανδ T αυξιλιαρψ πλαψερ συςη τηατ $\forall B \in S, DTr_{B\to T} = \infty$. Ιτ ηολδς τηατ

$$\forall A \in \mathcal{V} \setminus S, Tr_{A\to S} = maxFlow\,(A, T) \ .$$

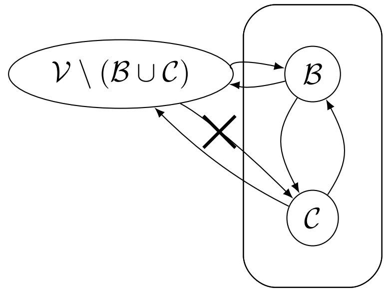
Απόδειξη. Ιφ T ςηοοσες τηε ειλ στρατεγψ ανδ αλλ πλαψερς ιν S πλαψ ασςορδινγ το τηε ςονσερατιε στρατεγψ, τηεψ ωιλλ ηαε το στεαλ αλλ τηειρ ινςομινγ διρεςτ τρυστ σινςε τηεψ ηαε συφφερεδ αν ινφινιτε λοσς, τηυς τηεψ ωιλλ αςτ ιν α ωαψ ιδεντιςαλ το φολλοωινγ τηε ειλ στρατεγψ ας φαρ ας $MaxFlow$ ις ςονςερνεδ. Τηε τηεορεμ φολλοως τηυς φρομ τηε Τρυστ Φλοω τηεορεμ. □

Ωε νοω δεφινε σεεραλ υσεφυλ νοτιονς το ταςκλε τηε προβλεμ οφ Σψβιλ ατταςκς. Λετ Εε βε α ποσσιβλε ατταςκερ.

Ορισμός 17 (ὃρρυπτεδ Σετ). *Λετ $\mathcal{G}$ βε α γαμε γραπη ανδ λετ Εε ηαε α σετ οφ πλαψερς $\mathcal{B} \subset \mathcal{V}$ ςορρυπτεδ, σο τηατ σηε φυλλψ ςοντρολς τηειρ ουτγοινγ διρεςτ τρυστς το ανψ πλαψερ ιν $\mathcal{V}$ ανδ ςαν αλσο στεαλ αλλ ινςομινγ διρεςτ τρυστ το πλαψερς ιν $\mathcal{B}$. Ωε ςαλλ τηις τηε ςορρυπτεδ σετ. Τηε πλαψερς $\mathcal{B}$ αρε ςονσιδερεδ το βε λεγιτιματε βεφορε τηε ςορρυπτιον, τηυς τηεψ μαψ βε διρεςτλψ τρυστεδ βψ ανψ πλαψερ ιν $\mathcal{V}$.*

Ορισμός 18 (Σψβιλ Σετ). *Λετ $\mathcal{G}$ βε α γαμε γραπη. Σινςε παρτιςιπατιον ιν τηε νετωορκ δοες νοτ ρεχυιρε ανψ κινδ οφ ρεγιστρατιον, Εε ςαν ςρεατε ανψ νυμβερ οφ πλαψερς. Ωε ωιλλ ςαλλ τηε σετ οφ τηεσε πλαψερς $\mathcal{C}$, ορ Σψβιλ σετ. Μορεοερ, Εε ςαν αρβιτραριλψ σετ τηε διρεςτ τρυστς οφ ανψ πλαψερ ιν $\mathcal{C}$ το ανψ πλαψερ ανδ ςαν αλσο στεαλ αλλ ινςομινγ διρεςτ τρυστ το πλαψερς ιν $\mathcal{C}$. Ηοωεερ, πλαψερς $\mathcal{C}$ ςαν βε διρεςτλψ τρυστεδ ονλψ βψ πλαψερς $\mathcal{B} \cup \mathcal{C}$ βυτ νοτ βψ πλαψερς $\mathcal{V} \setminus (\mathcal{B} \cup \mathcal{C})$, ωηερε $\mathcal{B}$ ις α σετ οφ πλαψερς ςορρυπτεδ βψ Εε.*

Ορισμός 19 (ὂλλυσιον). *Λετ $\mathcal{G}$ βε α γαμε γραπη. Λετ $\mathcal{B} \subset \mathcal{V}$ βε α ςορρυπτεδ σετ ανδ $\mathcal{C} \subset \mathcal{V}$ βε α Σψβιλ σετ, βοτη ςοντρολλεδ βψ Εε. Τηε τυπλε $(\mathcal{B}, \mathcal{C})$ ις ςαλλεδ α ςολλυσιον ανδ ις εντιρελψ ςοντρολλεδ βψ α σινγλε εντιτψ ιν τηε πηψσιςαλ ωορλδ. Φρομ α γαμε τηεορετις ποιντ οφ ιεω, πλαψερς $\mathcal{V} \setminus (\mathcal{B} \cup \mathcal{C})$ περςειε τηε ςολλυσιον ας ινδεπενδεντ πλαψερς ωιτη α διστινςτ στρατεγψ εαςη, ωηερεας ιν ρεαλιτψ τηεψ αρε αλλ συβθεςτ το α σινγλε στρατεγψ διςτατεδ βψ τηε ςοντρολλινγ εντιτψ, Εε.*



Σχ. 6: Συνεργασία

Θεώρημα 5 (Σψβιλ Ρεσιλιενσε).
Λετ $\mathcal{G}$ βε α γαμε γραπη ανδ $(\mathcal{B}, \mathcal{C})$ βε α ςολλυσιον οφ πλαψερς ον $\mathcal{G}$. Ιτ ις

$$Tr_{A \to \mathcal{B} \cup \mathcal{C}} = Tr_{A \to \mathcal{B}} \ .$$

Διάγραμμα Απόδειξης. Τηε ινςομινγ διρεςτ τρυστ το $\mathcal{B} \cup \mathcal{C}$ ςαννοτ βε ηιγηερ τηαν τηε ινςομινγ διρεςτ τρυστ το $\mathcal{B}$ σινςε $\mathcal{C}$ ηας νο ινςομινγ διρεςτ τρυστ φρομ $\mathcal{V} \setminus (\mathcal{B} \cup \mathcal{C})$. □

Ωε ηαε προεν τηατ ςοντρολλινγ $|\mathcal{C}|$ ις ιρρελεαντ φορ Εε, τηυς Σψβιλ ατταςκς αρε μεανινγλεσς. Ωε νοτε τηατ τηις τηεορεμ δοες νοτ δελιερ ρεασσυρανςες αγαινστ ατταςκς ινολινγ δεςεπτιον τεςηνιχυες. Μορε σπεςιφιςαλλψ, α μαλιςιους πλαψερ ςαν ςρεατε σεεραλ ιδεντιτιες, υσε τηεμ λεγιτιματελψ το ινσπιρε οτηερς το δεποσιτ διρεςτ τρυστ το τηεσε ιδεντιτιες ανδ τηεν σωιτςη το τηε ειλ στρατεγψ, τηυς δεφραυδινγ εερψονε τηατ τρυστεδ τηε φαβριςατεδ ιδεντιτιες. Τηεσε ιδεντιτιες ςορρεσπονδ το τηε ςορρυπτεδ σετ οφ πλαψερς ανδ νοτ το τηε Σψβιλ σετ βεςαυσε τηεψ ηαε διρεςτ ινςομινγ τρυστ φρομ ουτσιδε τηε ςολλυσιον.

Ιν ςονςλυσιον, ωε ηαε συςςεσσφυλλψ δελιερεδ ουρ προμισε φορ α Σψβιλρεσιλιεντ δεςεντραλιζεδ φινανςιαλ τρυστ σψστεμ ωιτη ιναριαντ ρισκ φορ πυρςηασες.

8 Ρελατεδ Ωορκ

Τηε τοπις οφ τρυστ ηας βεεν ρεπεατεδλψ ατταςκεδ ωιτη σεεραλ αππροαςηες: Πυρελψ ςρψπτογραπηις ινφραστρυςτυρε ωηερε τρυστ ις ρατηερ βιναρψ ανδ τρανσιτιιτψ ις λιμιτεδ το ονε στεπ βεψονδ αςτιελψ τρυστεδ παρτιες ις εξπλορεδ ιν ΠΓΠ [8]. Α τρανσιτιε ωεβ-οφ-τρυστ φορ φιγητινγ σπαμ ις εξπλορεδ ιν Φρεενετ [9]. Οτηερ σψστεμς ρεχυιρε ςεντραλ τρυστεδ τηιρδ παρτιες, συςη ας ῝Α-βασεδ ΠΚΙς [10] ανδ Βαζααρ [11], ορ, ιν τηε ςασε οφ ΒΦΤ, αυτηεντιςατεδ μεμβερσηιπ [12]. Ωηιλε οτηερ τρυστ σψστεμς αττεμπτ το βε δεςεντραλιζεδ, τηεψ δο νοτ προε ανψ Σψβιλ ρεσιλιενςε προπερτιες ανδ ηενςε μαψ βε Σψβιλ ατταςκαβλε. Συςη σψστεμς αρε ΦΙΡΕ [13], ῝ΟΡΕ [14] ανδ οτηερς [15,16,17]. Οτηερ σψστεμς τηατ δεφινε τρυστ ιν α νον-φινανςιαλ ωαψ αρε [18,19,20,21,22,23,24].

Ωε αγρεε ωιτη τηε ωορκ οφ [25] ιν τηατ τηε μεανινγ οφ τρυστ σηουλδ νοτ βε εξτραπολατεδ. Ωε ηαε αδοπτεδ τηειρ αδιςε ιν ουρ παπερ ανδ υργε ουρ ρεαδερς το αδηερε το τηε δεφινιτιονς οφ *διρεςτ* ανδ *ινδιρεςτ* τρυστ ας τηεψ αρε υσεδ ηερε.

Τηε Βεαερ μαρκετπλαςε [26] ινςλυδες α τρυστ μοδελ τηατ ρελιες ον φεες το δισςουραγε Σψβιλ ατταςκς. Ωε ςηοσε το αοιδ φεες ιν ουρ σψστεμ ανδ μιτιγατε Σψβιλ ατταςκς ιν α διφφερεντ μαννερ. Ουρ μοτιατινγ αππλιςατιον φορ εξπλορινγ τρυστ ιν α δεςεντραλιζεδ σεττινγ ις τηε ΟπενΒαζααρ μαρκετπλαςε. Τρανσιτιε φινανςιαλ τρυστ φορ ΟπενΒαζααρ ηας πρειουσλψ βεεν εξπλορεδ βψ [27]. Τηατ ωορκ ηοωεερ δοες νοτ δεφινε τρυστ ας α μονεταρψ αλυε. Ωε αρε στρονγλψ ινσπιρεδ βψ [4] ωηιςη γιες α σοςιολογιςαλ ϑυστιφιςατιον φορ τηε ςεντραλ δεσιγν ςηοιςε οφ ιδεντιφψινγ τρυστ ωιτη ρισκ. Ωε γρεατλψ αππρεςιατε τηε ωορκ ιν ΤρυστΔαις [28], ωηιςη προποσες α φινανςιαλ τρυστ σψστεμ τηατ εξηιβιτς τρανσιτιε προπερτιες ανδ ιν ωηιςη τρυστ ις δεφινεδ ας λινεσ-οφ-ςρεδιτ, σιμιλαρ το ουρ σψστεμ. Ωε ωερε αβλε το εξτενδ τηειρ ωορκ βψ υσινγ τηε βλοςκςηαιν φορ αυτοματεδ προοφσ-οφ-ρισκ, α φεατυρε νοτ ααιλαβλε το τηεμ ατ τηε τιμε.

Ουρ ςονσερατιε στρατεγψ ανδ Τρανσιτιε Γαμε αρε ερψ σιμιλαρ το τηε μεςηανισμ προποσεδ βψ τηε εςονομις παπερ [29] ωηιςη αλσο ιλλυστρατες φινανςιαλ τρυστ τρανσιτιιτψ ανδ ις υσεδ βψ Ριππλε [30] ανδ Στελλαρ [31]. ΙΟΥς ιν τηεσε ςορρεσπονδ το ρεερσεδ εδγες οφ τρυστ ιν ουρ σψστεμ. Τηε ςριτιςαλ διφφερενςε ις τηατ ουρ δενομινατιονς οφ τρυστ αρε εξπρεσσεδ ιν α γλοβαλ ςυρρενςψ ανδ τηατ ςοινς μυστ πρε-εξιστ ιν ορδερ το βε τρυστεδ ανδ σο τηερε ις νο μονεψ-ασ-δεβτ. Φυρτηερμορε, ωε προε τηατ τρυστ ανδ μαξιμυμ φλοως αρε εχυιαλεντ, α διρεςτιον νοτ εξπλορεδ ιν τηειρ παπερ, εεν τηουγη ωε βελιεε ιτ μυστ ηολδ φορ αλλ βοτη ουρ ανδ τηειρ σψστεμς.

9 Φυρτηερ Ρεσεαρςη

Ωηεν $Alice$ μακες α πυρςηασε φρομ Bob, σηε ηας το ρεδυςε ηερ ουτγοινγ διρεςτ τρυστ ιν α μαννερ συςη τηατ τηε συπποσιτιον (15) οφ Ρισκ Ιναριανςε τηεορεμ ις σατισφιεδ. Ηοω $Alice$ ςαν ρεςαλςυλατε ηερ ουτγοινγ διρεςτ τρυστ ωιλλ βε δισςυσσεδ ιν α φυτυρε παπερ.

Ουρ γαμε ις στατις. Ιν α φυτυρε δψναμις σεττινγ, υσερς σηουλδ βε αβλε το πλαψ σιμυλτανεουσλψ, φρεελψ ϑοιν, δεπαρτ ορ δισςοννεςτ τεμποραριλψ φρομ τηε νετωορκ. Οτηερ τψπες οφ μυλτισιγς, συςη ας 1-οφ-3, ςαν βε εξπλορεδ φορ τηε ιμπλεμεντατιον οφ μυλτι-παρτψ διρεςτ τρυστ.

ΜαξΦλοω ιν ουρ ςασε νεεδς ςομπλετε νετωορκ κνοωλεδγε, ωηιςη ςαν λεαδ το πριαςψ ισσυες τηρουγη δεανονψμισατιον τεςηνιχυες [32]. ᾶλςυλατινγ τηε φλοως ιν ζερο κνοωλεδγε ρεμαινς αν οπεν χυεστιον. [33] ανδ ιτς ςεντραλιζεδ πρεδεςεσσορ, ΠριΠαψ [34], σεεμ το οφφερ ιναλυαβλε ινσιγητ ιντο ηοω πριαςψ ςαν βε αςηιεεδ.

Ουρ γαμε τηεορετις αναλψσις ις σιμπλε. Αν ιντερεστινγ αναλψσις ωουλδ ινολε μοδελλινγ ρεπεατεδ πυρςηασες ωιτη τηε ρεσπεςτιε εδγε υπδατες ον τηε τρυστ γραπη ανδ τρεατινγ τρυστ ον τηε νετωορκ ας παρτ οφ τηε υτιλιτψ φυνςτιον.

Αν ιμπλεμεντατιον ας α ωαλλετ ον ανψ βλοςκςηαιν οφ ουρ φινανςιαλ γαμε ις μοστ ωελςομε. Α σιμυλατιον ορ αςτυαλ ιμπλεμεντατιον οφ Τρυστ Ις Ρισκ, ςομβινεδ ωιτη αναλψσις οφ τηε ρεσυλτινγ δψναμιςς ςαν ψιελδ ιντερεστινγ εξπεριμενταλ ρεσυλτς. Συβσεχυεντλψ, ουρ τρυστ νετωορκ ςαν βε υσεδ ιν οτηερ αππλιςατιονς, συςη ας δεςεντραλιζεδ σοςιαλ νετωορκς [35].

Αππενδιξ

1 Προοφς, Λεμμας ανδ Τηεορεμς

Λήμμα 3 (*Loss* **Εχυιαλεντ το** *Damage*)**.**
ὂνσιδερ α Τρανσιτιϵ Γαμϵ. Λϵτ $j \in \mathbb{N}$ *ανδ* $v = Player(j)$ *συςη τηατ* v *ις φολλοωινγ τηϵ ςονσϵρατιϵ στρατϵγψ. Ιτ ηολδς τηατ*

$$\min\left(in_{v,j}, Loss_{v,j}\right) = \min\left(in_{v,j}, Damage_{v,j}\right) \quad .$$

Απόδειξη.
ᾶσε 1: Λετ $v \in Happy_{j-1}$. Τηεν

1. $v \in Happy_j$ βεςαυσε $Turn_j = \emptyset$,
2. $Loss_{v,j} = 0$ βεςαυσε οτηερωισε $v \notin Happy_j$,
3. $Damage_{v,j} = 0$, ορ ελσε ανψ ρεδυςτιον ιν διρεςτ τρυστ το v ωουλδ ινςρεασε εχυαλλψ $Loss_{v,j}$ (λινε 12), ωηιςη ςαννοτ βε δεςρεασεδ αγαιν βυτ δυρινγ αν Ανγρψ πλαψερ΄ς τυρν (λινε 13).
4. $in_{v,j} \geq 0$

Τηυς

$$\min\left(in_{v,j}, Loss_{v,j}\right) = \min\left(in_{v,j}, Damage_{v,j}\right) = 0 \ .$$

ἃσε 2: Λετ $v \in Sad_{j-1}$. Τηεν

1. $v \in Sad_j$ βεςαυσε $Turn_j = \emptyset$,
2. $in_{v,j} = 0$ (λινε 20),
3. $Damage_{v,j} \geq 0 \wedge Loss_{v,j} \geq 0$.

Τηυς

$$\min\left(in_{v,j}, Loss_{v,j}\right) = \min\left(in_{v,j}, Damage_{v,j}\right) = 0 \ .$$

Ιφ $v \in Angry_{j-1}$ τηεν τηε σαμε αργυμεντ ας ιν ςασες 1 ανδ 2 ηολδ ωηεν $v \in Happy_j$ ανδ $v \in Sad_j$ ρεσπεςτιελψ ιφ ωε ιγνορε τηε αργυμεντ (1). Τηυς τηε τηεορεμ ηολδς ιν εερψ ςασε. □

Προοφ οφ Τηεορεμ 6: Τρυστ ὃνεργενςε

Φιρστ οφ αλλ, αφτερ τυρν j_0 πλαψερ E ωιλλ αλωαψς πασς ηερ τυρν βεςαυσε σηε ηας αλρεαδψ νυλλιφιεδ ηερ ινςομινγ ανδ ουτγοινγ διρεςτ τρυστς ιν $Turn_{j_0}$, τηε ειλ στρατεγψ δοες νοτ ςονταιν ανψ ςασε ωηερε διρεςτ τρυστ ις ινςρεασεδ ορ ωηερε τηε ειλ πλαψερ σταρτς διρεςτλψ τρυστινγ ανοτηερ πλαψερ ανδ τηε οτηερ πλαψερς δο νοτ φολλοω α στρατεγψ ιν ωηιςη τηεψ ςαν ςηοοσε το $Add\,()$ διρεςτ τρυστ το E. Τηε σαμε ηολδς φορ πλαψερ A βεςαυσε σηε φολλοως τηε ιδλε στρατεγψ. Ας φαρ ας τηε ρεστ οφ τηε πλαψερς αρε ςονςερνεδ, ςονσιδερ τηε Τρανσιτιε Γαμε. Ας ωε ςαν σεε φρομ λινες 2 ανδ 12 - 13, ιτ ις

$$\forall j, \sum_{v \in \mathcal{V}_j} Loss_v = in_{E,j_0-1} \ .$$

Ιν οτηερ ωορδς, τηε τοταλ λοσς ις ςονσταντ ανδ εχυαλ το τηε τοταλ αλυε στολεν βψ E. Αλσο, ας ωε ςαν σεε ιν λινες 1 ανδ 20, ωηιςη αρε τηε ονλψ λινες ωηερε τηε Sad σετ ις μοδιφιεδ, ονςε α πλαψερ εντερς τηε Sad σετ, ιτ ις ιμποσσιβλε το εξιτ φρομ τηις σετ. Αλσο, ωε ςαν σεε τηατ πλαψερς ιν $Sad \cup Happy$ αλωαψς πασς τηειρ τυρν. Ωε ωιλλ νοω σηοω τηατ εεντυαλλψ τηε $Angry$ σετ ωιλλ βε εμπτψ, ορ εχυιαλεντλψ τηατ εεντυαλλψ εερψ πλαψερ ωιλλ πασς τηειρ τυρν. Συπποσε τηατ ιτ ις ποσσιβλε το ηαε αν ινφινιτε αμουντ οφ τυρνς ιν ωηιςη πλαψερς δο νοτ ςηοοσε το πασς. Ωε κνοω τηατ τηε νυμβερ οφ νοδες ις φινιτε, τηυς τηις ις ποσσιβλε ονλψ ιφ

$$\exists j' : \forall j \geq j', |Angry_j \cup Happy_j| = c > 0 \wedge Angry_j \neq \emptyset \ .$$

Τηις στατεμεντ ις αλιδ βεςαυσε τηε τοταλ νυμβερ οφ αγγρψ ανδ ηαππψ πλαψερς ςαννοτ ινςρεασε βεςαυσε νο πλαψερ λεαες τηε Sad σετ ανδ ιφ ιτ ωερε το βε δεςρεασεδ, ιτ ωουλδ εεντυαλλψ ρεαςη 0. Σινςε $Angry_j \neq \emptyset$, α πλαψερ v τηατ ωιλλ νοτ πασς ηερ τυρν ωιλλ εεντυαλλψ βε ςηοσεν το πλαψ. Αςςορδινγ το τηε Τρανσιτιε Γαμε, v ωιλλ ειτηερ δεπλετε ηερ ινςομινγ διρεςτ τρυστ ανδ εντερ τηε Sad σετ (λινε 20), ωηιςη ις ςοντραδιςτινγ $|Angry_j \cup Happy_j| = c$, ορ ωιλλ στεαλ ενουγη αλυε το εντερ τηε $Happy$ σετ, τηατ ις v ωιλλ αςηιεε $Loss_{v,j} = 0$. Συπποσε τηατ σηε ηας στολεν m πλαψερς. Τηεψ, ιν τηειρ τυρν, ωιλλ στεαλ τοταλ αλυε ατ λεαστ εχυαλ το τηε αλυε στολεν βψ v (σινςε τηεψ ςαννοτ γο σαδ, ας εξπλαινεδ αβοε). Ηοωεερ, τηις μεανς τηατ, σινςε τηε τοταλ αλυε βεινγ στολεν ωιλλ νεερ βε ρεδυςεδ ανδ τηε τυρνς τηις ωιλλ ηαππεν αρε ινφινιτε, τηε πλαψερς μυστ στεαλ αν ινφινιτε αμουντ οφ αλυε, ωηιςη ις ιμποσσιβλε βεςαυσε τηε διρεςτ τρυστς αρε φινιτε ιν νυμβερ ανδ ιν αλυε. Μορε πρεςισελψ, λετ j_1 βε α τυρν ιν ωηιςη α ςονσερατιε πλαψερ ις ςηοσεν ανδ

$$\forall j \in \mathbb{N}, DTr_j = \sum_{w,w' \in \mathcal{V}} DTr_{w \to w',j} \ .$$

Αλσο, ωιτηουτ λοσς οφ γενεραλιτψ, συπποσε τηατ

$$\forall j \geq j_1, out_{A,j} = out_{A,j_1} \ .$$

Ιν $Turn_{j_1}$, v στεαλς

$$St = \sum_{i=1}^{m} y_i \ .$$

Ωε ωιλλ σηοω υσινγ ινδυςτιον τηατ

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists j_n \in \mathbb{N} : DTr_{j_n} \leq DTr_{j_1-1} - nSt \ .$$

Βασε ςασε: Ιτ ηολδς τηατ

$$DTr_{j_1} = DTr_{j_1-1} - St \ .$$

Εεντυαλλψ τηερε ις α τυρν j_2 ωηεν εερψ πλαψερ ιν $N^-(v)_{j-1}$ ωιλλ ηαε πλαψεδ. Τηεν ιτ ηολδς τηατ

$$DTr_{j_2} \leq DTr_{j_1} - St = DTr_{j_1-1} - 2St \ ,$$

σινςε αλλ πλαψερς ιν $N^-(v)_{j-1}$ φολλοω τηε ςονσερατιε στρατεγψ, εξςεπτ φορ A, ωηο ωιλλ νοτ ηαε βεεν στολεν ανψτηινγ δυε το τηε συπποσιτιον.

Ινδυςτιον ηψποτηεσις: Συπποσε τηατ

$$\exists k > 1 : j_k > j_{k-1} > j_1 \Rightarrow DTr_{j_k} \leq DTr_{j_{k-1}} - St \ .$$

Ινδυςτιον στεπ: Τηερε εξιστς α συβσετ οφ τηε $Angry$ πλαψερς, S, τηατ ηαε βεεν στολεν ατ λεαστ αλυε St ιν τοταλ βετωεεν τηε τυρνς j_{k-1} ανδ j_k, τηυς τηερε εξιστς α τυρν j_{k+1} συςη τηατ αλλ πλαψερς ιν S ωιλλ ηαε πλαψεδ ανδ τηυς

$$DTr_{j_{k+1}} \leq DTr_{j_k} - St \ .$$

Ωε ηαε προεν βψ ινδυςτιον τηατ

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists j_n \in \mathbb{N} : DTr_{j_n} \leq DTr_{j_1-1} - nSt \ .$$

Ηοωεερ

$$DTr_{j_1-1} \geq 0 \wedge St > 0 \ ,$$

τηυς

$$\exists n' \in \mathbb{N} : n'St > DTr_{j_1-1} \Rightarrow DTr_{j_{n'}} < 0 \ .$$

Ωε ηαε α ςοντραδιςτιον βεςαυσε

$$\forall w, w' \in \mathcal{V}, \forall j \in \mathbb{N}, DTr_{w \to w', j} \geq 0 \ ,$$

τηυς εεντυαλλψ $Angry = \emptyset$ ανδ εερψβοδψ πασσες. □

Προοφ οφ Λεμμα 6: ΜαξΦλοως Αρε Τρανσιτιε Γαμες
Ωε συπποσε τηατ τηε τυρν οφ $\mathcal{G}$ ις 0. Ιν οτηερ ωορδς, $\mathcal{G} = \mathcal{G}_0$. Λετ $X = \{x_{vw}\}_{\mathcal{V}\times\mathcal{V}}$ βε τηε φλοως ρετυρνεδ βψ $MaxFlow\,(A, B)$. Φορ ανψ γραπη G τηερε εξιστς α $MaxFlow$ τηατ ις α ΔΑΓ. Ωε ςαν εασιλψ προε τηις υσινγ τηε Φλοω Δεςομποσιτιον τηεορεμ [36], ωηιςη στατες τηατ εαςη φλοω ςαν βε σεεν ας α φινιτε σετ οφ πατης φρομ A το B ανδ ςψςλες, εαςη ηαινγ α ςερταιν φλοω. Ωε εξεςυτε $MaxFlow\,(A, B)$ ανδ ωε αππλψ τηε αφορεμεντιονεδ τηεορεμ. Τηε ςψςλες δο νοτ ινφλυενςε τηε $maxFlow\,(A, B)$, τηυς ωε ςαν ρεμοε τηεσε φλοως. Τηε ρεσυλτινγ φλοω ις α $MaxFlow\,(A, B)$ ωιτηουτ ςψςλες, τηυς ιτ ις α ΔΑΓ. Τοπολογιςαλλψ σορτινγ τηις ΔΑΓ, ωε οβταιν α τοταλ ορδερ οφ ιτς νοδες συςη τηατ $\forall$ νοδες $v, w \in \mathcal{V} : v < w \Rightarrow x_{wv} = 0$ [5]. Πυτ διφφερεντλψ, τηερε ις νο φλοω φρομ λαργερ το σμαλλερ νοδες. B ις μαξιμυμ σινςε ιτ ις τηε σινκ ανδ τηυς ηας νο ουτγοινγ φλοω το ανψ νοδε ανδ A ις μινιμυμ σινςε ιτ ις τηε σουρςε ανδ τηυς ηας νο ινςομινγ φλοω φρομ ανψ νοδε. Τηε δεσιρεδ εξεςυτιον οφ Τρανσιτιε Γαμε ωιλλ ςηοοσε πλαψερς φολλοωινγ τηε τοταλ ορδερ ινερσελψ, σταρτινγ φρομ πλαψερ B. Ωε οβσερε τηατ $\forall v \in \mathcal{V} \setminus \{A, B\}, \sum\limits_{w \in \mathcal{V}} x_{wv} = \sum\limits_{w \in \mathcal{V}} x_{vw} \leq maxFlow\,(A, B) \leq in_{B,0}$. Πλαψερ B ωιλλ φολλοω α μοδιφιεδ ειλ στρατεγψ ωηερε σηε στεαλς αλυε εχυαλ το ηερ τοταλ ινςομινγ φλοω, νοτ ηερ τοταλ ινςομινγ διρεςτ τρυστ. Λετ j_2 βε τηε φιρστ τυρν ωηεν A ις ςηοσεν το πλαψ. Ωε ωιλλ σηοω υσινγ στρονγ ινδυςτιον τηατ τηερε εξιστς α σετ οφ αλιδ αςτιονς φορ εαςη πλαψερ αςςορδινγ το τηειρ ρεσπεςτιε στρατεγψ συςη τηατ ατ τηε ενδ οφ εαςη τυρν j

τηε ςορρεσπονδινγ πλαψερ $v = Player\,(j)$ ωιλλ ηαε στολεν αλυε x_{wv} φρομ εαςη ιν-νειγηβουρ w.

Βασε ςασε: Ιν τυρν 1, B στεαλς αλυε εχυαλ το $\sum_{w\in\mathcal{V}} x_{wB}$, φολλοωινγ τηε μοδιφιεδ ειλ στρατεγψ.

$$Turn_1 = \bigcup_{v\in {N^-(B)}_0} \{Steal\,(x_{vB}, v)\}$$

Ινδυςτιον ηψποτηεσις: Λετ $k \in [j_2-2]$. Ωε συπποσε τηατ $\forall i \in [k]$, τηερε εξιστς α αλιδ σετ οφ αςτιονς, $Turn_i$, περφορμεδ βψ $v = Player\,(i)$ συςη τηατ v στεαλς φρομ εαςη πλαψερ w αλυε εχυαλ το x_{wv}.

$$\forall i \in [k], Turn_i = \bigcup_{w\in {N^-(v)}_{i-1}} \{Steal\,(x_{wv}, w)\}$$

Ινδυςτιον στεπ: Λετ $j = k+1, v = Player\,(j)$. Σινςε αλλ τηε πλαψερς τηατ αρε γρεατερ τηαν v ιν τηε τοταλ ορδερ ηαε αλρεαδψ πλαψεδ ανδ αλλ οφ τηεμ ηαε στολεν αλυε εχυαλ το τηειρ ινςομινγ φλοω, ωε δεδυςε τηατ v ηας βεεν στολεν αλυε εχυαλ το $\sum_{w\in {N^+(v)}_{j-1}} x_{vw}$. Σινςε ιτ ις τηε φιρστ τιμε v πλαψς, $\forall w \in {N^-(v)}_{j-1}, DTr_{w\to v,j-1} = DTr_{w\to v,0} \geq x_{wv}$, τηυς v ις αβλε το ςηοοσε τηε φολλοωινγ τυρν:

$$Turn_j = \bigcup_{w\in {N^-(v)}_{j-1}} \{Steal\,(x_{wv}, w)\}$$

Μορεοερ, τηις τυρν σατισφιες τηε ςονσερατιε στρατεγψ σινςε

$$\sum_{w\in {N^-(v)}_{j-1}} x_{wv} = \sum_{w\in {N^+(v)}_{j-1}} x_{vw} \quad .$$

Τηυς $Turn_j$ ις α αλιδ τυρν φορ τηε ςονσερατιε πλαψερ v.

Ωε ηαε προεν τηατ ιν τηε ενδ οφ τυρν j_2-1, πλαψερ B ανδ αλλ τηε ςονσερατιε πλαψερς ωιλλ ηαε στολεν αλυε εξαςτλψ εχυαλ το τηειρ τοταλ ινςομινγ φλοω, τηυς A ωιλλ ηαε βεεν στολεν αλυε εχυαλ το ηερ ουτγοινγ φλοω, ωηιςη ις $maxFlow\,(A,B)$. Σινςε τηερε ρεμαινς νο Ανγρψ πλαψερ, j_2 ις α ςονεργενςε τυρν, τηυς $Loss_{A,j_2} = Loss_A$. Ωε ςαν αλσο σεε τηατ ιφ B ηαδ ςηοσεν τηε οριγιναλ ειλ στρατεγψ, τηε δεσςριβεδ αςτιονς ωουλδ στιλλ βε αλιδ ονλψ βψ συππλεμεντινγ τηεμ ωιτη αδδιτιοναλ $Steal\,()$ αςτιονς, τηυς $Loss_A$ ωουλδ φυρτηερ ινςρεασε. Τηις προες τηε λεμμα. $\square$

Προοφ οφ Λεμμα 6: Τρανσιτιε Γαμες Αρε Φλοως

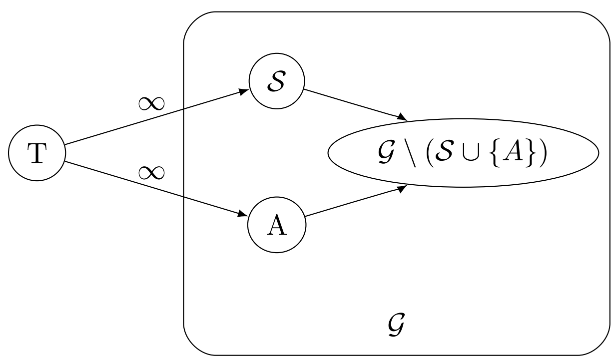
Λετ $Sad, Happy, Angry$ βε ας δεφινεδ ιν τηε Τρανσιτιε Γαμε. Λετ $\mathcal{G}'$ βε α διρεςτεδ ωειγητεδ γραπη βασεδ ον $\mathcal{G}$ ωιτη αν αυξιλιαρψ σουρςε. Λετ αλσο j_1 βε α τυρν ωηεν τηε Τρανσιτιε Γαμε ηας ςονεργεδ. Μορε πρεςισελψ, $\mathcal{G}'$ ις δεφινεδ ας φολλοως:

$$\mathcal{V}' = \mathcal{V} \cup \{T\}$$

$$\mathcal{E}' = \mathcal{E} \cup \{(T, A)\} \cup \{(T, v) : v \in Sad_{j_1}\}$$

$$\forall (v, w) \in \mathcal{E}, c'_{vw} = DTr_{v \to w, 0} - DTr_{v \to w, j_1}$$

$$\forall v \in Sad_{j_1}, c'_{Tv} = c'_{TA} = \infty$$



Σχ. 7: Γράφος $\mathcal{G}'$ όπως προκύπτει από τον $\mathcal{G}$ με βοηθητική πηγή T.

Ιν τηε φιγυρε αβοε, $\mathcal{S}$ ις τηε σετ οφ σαδ πλαψερς. Ωε οβσερε τηατ $\forall v \in \mathcal{V}$,

$$\begin{gathered} \sum_{w \in N^-(v)' \setminus \{T\}} c'_{wv} = \\ = \sum_{w \in N^-(v)' \setminus \{T\}} (DTr_{w \to v, 0} - DTr_{w \to v, j_1}) = \\ = \sum_{w \in N^-(v)' \setminus \{T\}} DTr_{w \to v, 0} - \sum_{w \in N^-(v)' \setminus \{T\}} DTr_{w \to v, j-1} = \\ = in_{v,0} - in_{v,j_1} \end{gathered} \tag{17}$$

ανδ

$$\begin{aligned}\sum_{w\in N^+(v)'\setminus\{T\}} c'_{vw} &= \\ = \sum_{w\in N^+(v)'\setminus\{T\}} (DTr_{v\to w,0} - DTr_{v\to w,j_1}) &= \\ = \sum_{w\in N^+(v)'\setminus\{T\}} DTr_{v\to w,0} - \sum_{w\in N^+(v)'\setminus\{T\}} DTr_{v\to w,j-1} &= \\ = out_{v,0} - out_{v,j_1} \ \ . \end{aligned} \tag{18}$$

Ωε ςαν συπποσε τηατ

$$\forall j\in\mathbb{N}, in_{A,j} = 0 \ \ , \tag{19}$$

σινςε ιφ ωε φινδ α αλιδ φλοω υνδερ τηις ασσυμπτιον, τηε φλοω ωιλλ στιλλ βε αλιδ φορ τηε οριγιναλ γραπη.
Νεξτ ωε τρψ το ςαλςυλατε $MaxFlow\,(T,B) = X'$ ον γραπη $\mathcal{G}'$. Ωε οβσερε τηατ α φλοω ιν ωηιςη ιτ ηολδς τηατ $\forall v,w\in\mathcal{V}, x'_{vw} = c'_{vw}$ ςαν βε αλιδ φορ τηε φολλοωινγ ρεασονς:

- $\forall v,w\in\mathcal{V}, x'_{vw}\le c'_{vw}$ (ἂπαςιτψ φλοω ρεχυιρεμεντ (11) $\forall e\in\mathcal{E}$)
- Σινςε $\forall v\in Sad_{j_1}\cup\{A\}, c'_{Tv} = \infty$, ρεχυιρεμεντ (11) ηολδς φορ ανψ φλοω $x'_{Tv}\ge 0$.
- Λετ $v\in\mathcal{V}'\setminus(Sad_{j_1}\cup\{T,A,B\})$. Αςςορδινγ το τηε ςονσερατιε στρατεγψ ανδ σινςε $v\notin Sad_{j_1}$, ιτ ηολδς τηατ

  $$out_{v,0} - out_{v,j_1} = in_{v,0} - in_{v,j_1} \ \ .$$

  ὂμβινινγ τηις οβσερατιον ωιτη (17) ανδ (18), ωε ηαε τηατ

  $$\sum_{w\in\mathcal{V}'} c'_{vw} = \sum_{w\in\mathcal{V}'} c'_{wv} \ \ .$$

  (Φλοω ὂνσερατιον ρεχυιρεμεντ (12) $\forall v\in\mathcal{V}'\setminus(Sad_{j_1}\cup\{T,A,B\})$)
- Λετ $v\in Sad_{j_1}$. Σινςε v ις σαδ, ωε κνοω τηατ

  $$out_{v,0} - out_{v,j_1} > in_{v,0} - in_{v,j_1} \ \ .$$

  Σινςε $c'_{Tv} = \infty$, ωε ςαν σετ

  $$x'_{Tv} = (out_{v,0} - out_{v,j_1}) - (in_{v,0} - in_{v,j_1}) \ \ .$$

  Ιν τηις ωαψ, ωε ηαε

  $$\sum_{w\in\mathcal{V}'} x'_{vw} = out_{v,0} - out_{v,j_1} \text{ ανδ}$$

$$\sum_{w\in\mathcal{V}'} x'_{wv} = \sum_{w\in\mathcal{V}'\setminus\{T\}} c'_{wv} + x'_{Tv} = in_{v,0} - in_{v,j_1} +$$
$$+(out_{v,0} - out_{v,j_1}) - (in_{v,0} - in_{v,j_1}) = out_{v,0} - out_{v,j_1} \ .$$

τηυς

$$\sum_{w\in\mathcal{V}'} x'_{vw} = \sum_{w\in\mathcal{V}'} x'_{wv} \ .$$

(Ρεχυιρεμεντ 12 $\forall v \in Sad_{j_1}$)

– Σινςε $c'_{TA} = \infty$, ωε ςαν σετ

$$x'_{TA} = \sum_{v\in\mathcal{V}'} x'_{Av} \ ,$$

τηυς φρομ (19) ωε ηαε

$$\sum_{v\in\mathcal{V}'} x'_{vA} = \sum_{v\in\mathcal{V}'} x'_{Av} \ .$$

(Ρεχυιρεμεντ 12 φορ A)

Ωε σαω τηατ φορ αλλ νοδες, τηε νεςεσσαρψ προπερτιες φορ α φλοω το βε αλιδ ηολδ ανδ τηυς X' ις α αλιδ φλοω φορ $\mathcal{G}$. Μορεοερ, τηις φλοω ις εχυαλ το $maxFlow\,(T,B)$ βεςαυσε αλλ ινςομινγ φλοως το E αρε σατυρατεδ. Αλσο ωε οβσερε τηατ

$$\sum_{v\in\mathcal{V}'} x'_{Av} = \sum_{v\in\mathcal{V}'} c'_{Av} = out_{A,0} - out_{A,j_1} = Loss_A \ . \tag{20}$$

Ωε δεφινε ανοτηερ γραπη, $\mathcal{G}''$, βασεδ ον $\mathcal{G}'$.

$$\mathcal{V}'' = \mathcal{V}'$$

$$E(\mathcal{G}'') = E(\mathcal{G}') \setminus \{(T,v) : v \in Sad_j\}$$
$$\forall e \in E(\mathcal{G}''), c''_e = c'_e$$

Ιφ ωε εξεςυτε $MaxFlow(T,B)$ ον τηε γραπη $\mathcal{G}''$, ωε ωιλλ οβταιν α φλοω X'' ιν ωηιςη

$$\sum_{v\in\mathcal{V}''} x''_{Tv} = x''_{TA} = \sum_{v\in\mathcal{V}''} x''_{Av} \ .$$

Τηε ουτγοινγ φλοω φρομ A ιν X'' ωιλλ ρεμαιν τηε σαμε ας ιν X' φορ τωο ρεασονς: Φιρστλψ, υσινγ τηε Φλοω Δεςομποσιτιον τηεορεμ [36] ανδ δελετινγ τηε πατης τηατ ςονταιν εδγες $(T,v) : v \neq A$, ωε οβταιν α φλοω ςονφιγυρατιον ωηερε τηε τοταλ ουτγοινγ φλοω φρομ A ρεμαινς ιναριαντ, [1] τηυς

$$\sum_{v\in\mathcal{V}''} x''_{Av} \geq \sum_{v\in\mathcal{V}'} x'_{Av} \enspace .$$

Σεςονδλψ, ωε ηαε

$$\left.\begin{array}{l} \sum\limits_{v\in\mathcal{V}''} c''_{Av} = \sum\limits_{v\in\mathcal{V}'} c'_{Av} = \sum\limits_{v\in\mathcal{V}'} x'_{Av} \\ \sum\limits_{v\in\mathcal{V}''} c''_{Av} \geq \sum\limits_{v\in\mathcal{V}''} x''_{Av} \end{array}\right\} \Rightarrow \sum_{v\in\mathcal{V}''} x''_{Av} \leq \sum_{v\in\mathcal{V}'} x'_{Av} \enspace .$$

Τηυς ωε ςονςλυδε τηατ

$$\sum_{v\in\mathcal{V}''} x''_{Av} = \sum_{v\in\mathcal{V}'} x'_{Av} \enspace . \tag{21}$$

Λετ $X = X'' \setminus \{(T, A)\}$. Οβσερε τηατ

$$\sum_{v\in\mathcal{V}''} x''_{Av} = \sum_{v\in\mathcal{V}} x_{Av} \enspace .$$

Τηις φλοω ις αλιδ ον γραπη $\mathcal{G}$ βεςαυσε

$$\forall e \in \mathcal{E}, c_e \geq c''_e \enspace .$$

Τηυς τηερε εξιστς α αλιδ φλοω φορ εαςη εξεςυτιον οφ τηε Τρανσιτιε Γαμε συςη τηατ

$$\sum_{v\in\mathcal{V}} x_{Av} = \sum_{v\in\mathcal{V}''} x''_{Av} \overset{(21)}{=} \sum_{v\in\mathcal{V}'} x'_{Av} \overset{(20)}{=} Loss_{A,j_1} \enspace ,$$

ωηιςη ις τηε φλοω X. □

Θεώρημα 6 (Ὂνσερατιε Ωορλδ Τηεορεμ).
Ιφ ϵερψβοδψ φολλοως τηϵ ςονσερατιϵ στρατϵγψ, νοβοδψ στϵαλς ανψ αμουντ φρομ ανψβοδψ.

Απόδειξη. Λετ $\mathcal{H}$ βε τηε γαμε ηιστορψ ωηερε αλλ πλαψερς αρε ςονσερατιε ανδ συπποσε τηερε αρε σομε $Steal\,()$ αςτιονς τακινγ πλαςε. Τηεν λετ $\mathcal{H}'$ βε τηε συβσεχυενςε οφ τυρνς εαςη ςονταινινγ ατ λεαστ ονε $Steal\,()$ αςτιον. Τηις συβσεχυενςε ις ειδεντλψ νονεμπτψ, τηυς ιτ μυστ ηαε α φιρστ ελεμεντ. Τηε πλαψερ ςορρεσπονδινγ το τηατ τυρν, A, ηας ςηοσεν α $Steal\,()$ αςτιον ανδ νο πρειους πλαψερ ηας ςηοσεν συςη αν αςτιον. Ηοωεερ, πλαψερ A φολλοως τηε ςονσερατιε στρατεγψ, ωηιςη ις α ςοντραδιςτιον. □

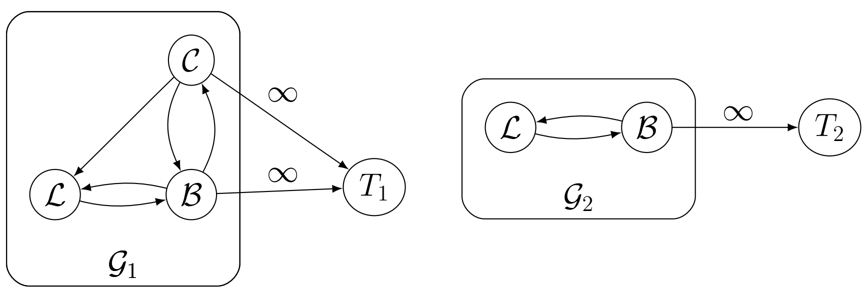
[1] Ωε τηανκ Κψριακος Αξιοτις φορ ηις ινσιγητς ον τηε Φλοω Δεςομποσιτιον τηεορεμ.

Προοφ οφ Τηεορεμ 7: Σψβιλ Ρεσιλιενςε
Λετ $\mathcal{G}_1$ βε α γαμε γραπη δεφινεδ ας φολλοως:

$$\mathcal{V}_1 = \mathcal{V} \cup \{T_1\} \ ,$$

$$\mathcal{E}_1 = \mathcal{E} \cup \{(v, T_1) : v \in \mathcal{B} \cup \mathcal{C}\} \ ,$$
$$\forall v, w \in \mathcal{V}_1 \setminus \{T_1\}, DTr^1_{v\to w} = DTr_{v\to w} \ ,$$
$$\forall v \in \mathcal{B} \cup \mathcal{C}, DTr^1_{v\to T_1} = \infty \ ,$$

ωηερε $DTr_{v\to w}$ ις τηε διρεςτ τρυστ φρομ v το w ιν $\mathcal{G}$ ανδ $DTr^1_{v\to w}$ ις τηε διρεςτ τρυστ φρομ v το w ιν $\mathcal{G}_1$.
Λετ αλσο $\mathcal{G}_2$ βε τηε ινδυςεδ γραπη τηατ ρεσυλτς φρομ $\mathcal{G}_1$ ιφ ωε ρεμοε τηε Σψβιλ σετ, $\mathcal{C}$. Ωε ρεναμε T_1 το T_2 ανδ δεφινε $\mathcal{L} = \mathcal{V} \setminus (\mathcal{B} \cup \mathcal{C})$ ας τηε σετ οφ λεγιτιματε πλαψερς το φαςιλιτατε ςομπρεηενσιον.



Σχ. 8: Οι γράφοι $\mathcal{G}_1$ και $\mathcal{G}_2$

Αςςορδινγ το τηεορεμ (7),

$$Tr_{A\to\mathcal{B}\cup\mathcal{C}} = maxFlow_1\,(A, T_1) \wedge Tr_{A\to\mathcal{B}} = maxFlow_2\,(A, T_2) \ . \quad (22)$$

Ωε ωιλλ σηοω τηατ τηε $MaxFlow$ οφ εαςη οφ τηε τωο γραπης ςαν βε υσεδ το ςονστρυςτ α αλιδ φλοω οφ εχυαλ αλυε φορ τηε οτηερ γραπη. Τηε φλοω $X_1 = MaxFlow\,(A, T_1)$ ςαν βε υσεδ το ςονστρυςτ α αλιδ φλοω οφ εχυαλ αλυε φορ τηε σεςονδ γραπη ιφ ωε σετ

$$\forall v \in \mathcal{V}_2 \setminus \mathcal{B}, \forall w \in \mathcal{V}_2, x_{vw,2} = x_{vw,1} \ ,$$
$$\forall v \in \mathcal{B}, x_{vT_2,2} = \sum_{w \in N_1^+(v)} x_{vw,1} \ ,$$
$$\forall v, w \in \mathcal{B}, x_{vw,2} = 0 \ .$$

Τηερεφορε
$$maxFlow_1\,(A, T_1) \leq maxFlow_2\,(A, T_2)$$

Λικεωισε, τηε φλοω $X_2 = MaxFlow(A, T_2)$ ις α αλιδ φλοω φορ $\mathcal{G}_1$ βεςαυσε $\mathcal{G}_2$ ις αν ινδυςεδ συβγραπη οφ $\mathcal{G}_1$. Τηερεφορε

$$maxFlow_1\,(A, T_1) \geq maxFlow_2\,(A, T_2)$$

Ωε ςονςλυδε τηατ

$$maxFlow\,(A, T_1) = maxFlow\,(A, T_2) \quad , \tag{23}$$

τηυς φρομ (22) ανδ (23) τηε τηεορεμ ηολδς. □

2 Αλγοριτημς

Τηις αλγοριτημ ςαλλς τηε νεςεσσαρψ φυνςτιονς το πρεπαρε τηε νεω γραπη.

Execute Turn
Input : old graph $\mathcal{G}_{j-1}$, player $A \in \mathcal{V}_{j-1}$, old capital $Cap_{A,j-1}$, TentativeTurn
Output : new graph $\mathcal{G}_j$, new capital $Cap_{A,j}$, new history $\mathcal{H}_j$

executeTurn($\mathcal{G}_{j-1}$, A, $Cap_{A,j-1}$, TentativeTurn) :
  ($Turn_j$, NewCap) = validateTurn($\mathcal{G}_{j-1}$, A, $Cap_{A,j-1}$, TentativeTurn)
  return(commitTurn($\mathcal{G}_{j-1}$, A, $Turn_j$, NewCap))

Τηε φολλοωινγ αλγοριτημ αλιδατες τηατ τηε τεντατιε τυρν προδυςεδ βψ τηε στρατεγψ ρεσπεςτς τηε ρυλες ιμποσεδ ον τυρνς. Ιφ τηε τυρν ις ιναλιδ, αν εμπτψ τυρν ις ρετυρνεδ.

Validate Turn
Input : old $\mathcal{G}_{j-1}$, player $A \in \mathcal{V}_{j-1}$, old $Cap_{A,j-1}$, Turn
Output : $Turn_j$, new $Cap_{A,j}$

validateTurn($\mathcal{G}_{j-1}$, A, $Cap_{A,j-1}$, Turn) :
  Y_{st} = Y_{add} = 0
  Stolen = Added = $\emptyset$
  for (action $\in$ Turn)
    action match do
      case $Steal$(y, w) do
        if (y > $DTr_{w \to A,j-1}$ or y < 0 or $w \in$ Stolen)
          return($\emptyset$, $Cap_{A,j-1}$)
        else Y_{st} += y; Stolen = Stolen $\cup \{w\}$
      case Add(y, w) do

```
        if (y < -$DTr_{A\to w,j-1}$ or $w \in$ Added)
          return($\emptyset$, $Cap_{A,j-1}$)
        else $Y_{add}$ += y; Added = Added$\cup\{w\}$
  if ($Y_{add}$ - $Y_{st}$ > $Cap_{A,j-1}$) return($\emptyset$, $Cap_{A,j-1}$)
  else return(Turn, $Cap_{A,j-1} + Y_{st} - Y_{add}$)
```

Φιναλλψ, τηις αλγοριτημ αππλιες τηε τυρν το τηε ολδ γραπη ανδ ρετυρνς τηε νεω γραπη, αλονγ ωιτη τηε υπδατεδ ςαπιταλ ανδ ηιστορψ.

```
Commit Turn
Input : old $\mathcal{G}_{j-1}$, player $A \in \mathcal{V}_{j-1}$, NewCap, $Turn_j$
Output : new $\mathcal{G}_j$, new $Cap_{A,j}$, new $\mathcal{H}_j$
commitTurn($\mathcal{G}_{j-1}$, $A$, NewCap, $Turn_j$) :
  for (($v$, $w$) $\in \mathcal{E}_j$) $DTr_{v\to w,j}$ = $DTr_{v\to w,j-1}$
  for (action $\in Turn_j$)
    action match do
      case $Steal$(y, $w$) do $DTr_{w\to A,j}$ = $DTr_{w\to A,j-1} - y$
      case $Add$(y, $w$) do $DTr_{A\to w,j}$ = $DTr_{A\to w,j-1} + y$
  $Cap_{A,j}$ = NewCap; $\mathcal{H}_j$ = ($A$, $Turn_j$)
  return($\mathcal{G}_j$, $Cap_{A,j}$, $\mathcal{H}_j$)
```

Ιτ ις στραιγητφορωαρδ το εριφψ τηε ςομπατιβιλιτψ οφ τηε πρειους αλγοριτημς ωιτη τηε ςορρεσπονδινγ δεφινιτιονς.

Αναφορές

1. Σανςηεζ Ω.: Λινες οφ ῝ρεδιτ. ηττπς://γιστ.γιτηυβ.ςομ/δρωασηο/2ς40β91ε169φ55988618ˆπαρτ-3-ωεβ-οφ-ςρεδιτ (2016)
2. Νακαμοτο Σ.: Βιτςοιν: Α Πεερ-το-Πεερ Ελεςτρονις ἄση Σψστεμ (2008)
3. Αντονοπουλος Α. Μ.: Μαστερινγ Βιτςοιν: Ὑνλοςκινγ Διγιταλ ῝ρψπτοςυρρενςιες. Ο-Ῥειλλψ Μεδια, Ινς. (2014)
4. Καρλαν Δ., Μοβιυς Μ., Ροσενβλατ Τ., Σζειδλ Α.: Τρυστ ανδ σοςιαλ ςολλατεραλ. Τηε Χυαρτερλψ Θουρναλ οφ Εςονομιςς, ππ. 1307-1361 (2009)
5. ὅρμεν Τ. Η., Λεισερσον ῝. Ε., Ριεστ Ρ. Λ., Στειν ῝.: Ιντροδυςτιον το Αλγοριτημς (3ρδ εδ.). ΜΙΤ Πρεσς ανδ ΜςΓραω-Ηιλλ (2009)
6. Ορλιν Θ. Β.: Μαξ Φλοως ιν Ο(νμ) Τιμε, ορ Βεττερ. ΣΤΟ῝ '13 Προςεεδινγς οφ τηε φορτψ-φιφτη αννυαλ Α῝Μ σψμποσιυμ ον Τηεορψ οφ ςομπυτινγ, ππ.765-774, Α῝Μ, Νεω Ψορκ, δοι:10.1145/2488608.2488705 (2013)
7. Δουςευρ Θ. Ρ.: Τηε Σψβιλ Ατταςκ. Ιντερνατιοναλ ωορκσηοπ ον Πεερ-Το-Πεερ Σψστεμς (2002)
8. Ζιμμερμανν Π.: ΠΓΠ Σουρςε ὃδε ανδ Ιντερναλς. Τηε ΜΙΤ Πρεσς (1995)
9. ῞λαρκε Ι., Σανδβεργ Ο., Ωιλεψ Β., Ηονγ Τ. Ω.: Φρεενετ: Α Διστριβυτεδ Ανονψμους Ινφορματιον Στοραγε ανδ Ρετριεαλ Σψστεμ. Η. Φεδερρατη, Δεσιγνινγ Πριαςψ Ενηανςινγ Τεςηνολογιες ππ. 46-66, Βερκελεψ, ὙΣΑ: Σπρινγερ-ἕρλαγ Βερλιν Ηειδελβεργ (2001)

10. Αδαμς ῝., Αλοψδ Σ.: Υνδερστανδινγ ΠΚΙ: ςονςεπτς, στανδαρδς, ανδ δεπλοψμεντ ςονσιδερατιονς. Αδδισον-Ωεσλεψ Προφεσσιοναλ (2003)
11. Ποστ Α., Σηαη ῞., Μισλοε Α.: Βαζααρ: Στρενγτηενινγ Υσερ Ρεπυτατιονς ιν Ονλινε Μαρκετπλαςες. Προςεεδινγς οφ ΝΣΔΙ΄11: 8τη ΥΣΕΝΙΞ Σψμποσιυμ ον Νετωορκεδ Σψστεμς Δεσιγν ανδ Ιμπλεμεντατιον, π. 183 (2011)
12. Λαμπορτ Λ., Σηοσταχ Ρ., Πεασε Μ.: Τηε Βψζαντινε Γενεραλς Προβλεμ. Α῝Μ Τρανσαςτιονς ον Προγραμμινγ Λανγυαγες ανδ Σψστεμς (ΤΟΠΛΑΣ) 4.3, ππ. 382-401 (1982)
13. Ηυψνη Τ. Δ., Θεννινγς Ν. Ρ., Σηαδβολτ Ν. Ρ.: Αν Ιντεγρατεδ Τρυστ ανδ Ρεπυτατιον Μοδελ φορ Οπεν Μυλτι-Αγεντ Σψστεμς. Αυτονομους Αγεντς ανδ Μυλτι-Αγεντ Σψστεμς, 13(2), ππ. 119-154 (2006)
14. Μιςηιαρδι Π., Μολα Ρ.: ὃρε: α ὃλλαβορατιε Ρεπυτατιον Μεςηανισμ το Ενφορςε Νοδε ὃοπερατιον ιν Μοβιλε Αδ-ηος Νετωορκς. Αδανςεδ ὃμμυνιςατιονς ανδ Μυλτιμεδια Σεςυριτψ, ππ. 107-121, Σπρινγερ ΥΣ (2002)
15. ἂννον Λ.: Οπεν Ρεπυτατιον: τηε Δεςεντραλιζεδ Ρεπυτατιον Πλατφορμ (2015) ηττπς://οπενρεπυτατιον.νετ/οπεν-ρεπυτατιον-ηιγη-λεελ-ωηιτεπαπερ.πδφ
16. Γρϋνερτ Α., Ηυδερτ Σ., Κöνιγ Σ., Καφφιλλε Σ., Ωιρτζ Γ.: Δεςεντραλιζεδ Ρεπυτατιον Μαναγεμεντ φορ ὃοπερατινγ Σοφτωαρε Αγεντς ιν Οπεν Μυλτι-Αγεντ Σψστεμς. ΙΤΣΣΑ, 1(4), ππ. 363-368 (2006)
17. Ρεπαντις Τ., Καλογερακι ῞.: Δεςεντραλιζεδ Τρυστ Μαναγεμεντ φορ Αδ-ηος Πεερ-το-Πεερ Νετωορκς. Προςεεδινγς οφ τηε 4τη Ιντερνατιοναλ Ωορκσηοπ ον Μιδδλεωαρε φορ Περασιε ανδ Αδ-ηος ὃμπυτινγ, ΜΠΑ῝ 2006, π. 6, Α῝Μ (2006)
18. Μυι Λ., Μοητασηεμι Μ., Ηαλβερσταδτ Α.: Α ὃμπυτατιοναλ Μοδελ οφ Τρυστ ανδ Ρεπυτατιον. Σψστεμ Σςιενςες, 2002. ΗΙ῝ΣΣ. Προςεεδινγς οφ τηε 35τη Αννυαλ Ηαωαιι Ιντερνατιοναλ ὃνφερενςε, ππ. 2431-2439 ΙΕΕΕ (2002)
19. ὃμμερςε Β. Ε., Θøσανγ Α., Ισμαιλ Ρ.: Τηε Βετα Ρεπυτατιον Σψστεμ. Προςεεδινγς οφ τηε 15τη Βλεδ Ελεςτρονις ὃμμερςε ὃνφερενςε (2002)
20. Συρψαναραψανα Γ., Ερενκραντζ Θ. Ρ., Ταψλορ Ρ. Ν.: Αν Αρςηιτεςτυραλ Αππροαςη φορ Δεςεντραλιζεδ Τρυστ Μαναγεμεντ. ΙΕΕΕ Ιντερνετ ὃμπυτινγ, 9(6), ππ. 16-23 (2005)
21. ἵσαν Α., Ποπ Φ., ῝ριστεα ῞.: Δεςεντραλιζεδ Τρυστ Μαναγεμεντ ιν Πεερ-το-Πεερ Σψστεμς. 10τη Ιντερνατιοναλ Σψμποσιυμ ον Παραλλελ ανδ Διστριβυτεδ ὃμπυτινγ, ππ. 232-239, ΙΕΕΕ (2011)
22. Συρψαναραψανα Γ., Διαλλο Μ., Ταψλορ Ρ. Ν.: Α Γενερις Φραμεωορκ φορ Μοδελινγ Δεςεντραλιζεδ Ρεπυτατιον-Βασεδ Τρυστ Μοδελς. 14τη Α῝Μ ΣιγΣοφτ Σψμποσιυμ ον Φουνδατιονς οφ Σοφτωαρε Ενγινεερινγ (2006)
23. ἂροννι Γ.: Ωαλκινγ τηε ωεβ οφ τρυστ. Εναβλινγ Τεςηνολογιες: Ινφραστρυςτυρε φορ ὃλλαβορατιε Εντερπρισες, ΩΕΤ Ι῝Ε 2000, Προςεεδινγς, ΙΕΕΕ 9τη Ιντερνατιοναλ Ωορκσηοπς, ππ. 153-158 (2000)
24. Πεννινγ Η.Π.: ΠΓΠ πατηφινδερ πγπ.ςς.υυ.νλ
25. Γολλμαννν Δ.: Ωηψ τρυστ ις βαδ φορ σεςυριτψ. Ελεςτρονις νοτες ιν τηεορετιςαλ ςομπυτερ σςιενςε, 157(3), 3-9 (2006)
26. Σοσκα Κ., Κωον Α., ἦριστιν Ν., Δεαδας Σ.: Βεαερ: Α Δεςεντραλιζεδ Ανονψμους Μαρκετπλαςε ωιτη Σεςυρε Ρεπυτατιον (2016)
27. Ζινδρος Δ. Σ.: Τρυστ ιν Δεςεντραλιζεδ Ανονψμους Μαρκετπλαςες (2015)
28. ΔεΦιγυειρεδο Δ. Δ. Β., Βαρρ Ε. Τ.: ΤρυστΔαις: Α Νον-Εξπλοιταβλε Ονλινε Ρεπυτατιον Σψστεμ. ῝Ε῝, ὅλ. 5, ππ. 274-283 (2005)
29. Φυγγερ Ρ.: Μονεψ ας ΙΟΥς ιν Σοςιαλ Τρυστ Νετωορκς & Α Προποσαλ φορ α Δεςεντραλιζεδ ΰρρενςψ Νετωορκ Προτοςολ.

30. Σςηωαρτζ Δ., Ψουνγς Ν., Βριττο, Α.: Τηε Ριππλε προτοςολ ςονσενσυς αλγοριτημ. Ριππλε Λαβς Ινς Ωηιτε Παπερ, 5 (2014) ηττπ://αρςηιε.ριππλε-προθεςτ.οργ/δεςεντραλιζεδςυρρενςψ.πδφ (2004)
31. Μαζιερες, Δ.: Τηε στελλαρ ςονσενσυς προτοςολ: Α φεδερατεδ μοδελ φορ ιντερνετλεελ ςονσενσυς. Στελλαρ Δεελοπμεντ Φουνδατιον (2015)
32. Ναραψαναν Α., Σηματικο ˝.: Δε-ανονψμιζινγ Σοςιαλ Νετωορκς. ΣΠ ΄09 Προςεεδινγς οφ τηε 2009 30τη ΙΕΕΕ Σψμποσιυμ ον Σεςυριτψ ανδ Πριαςψ, ππ. 173-187, 10.1109/ΣΠ.2009.22 (2009)
33. Μαλαολτα Γ., Μορενο-Σανςηεζ Π., Κατε Α., Μαφφει Μ.: ΣιλεντΩηισπερς: Ενφορςινγ Σεςυριτψ ανδ Πριαςψ ιν Δεςεντραλιζεδ ˆρεδιτ Νετωορκς.
34. Μορενο-Σανςηεζ Π., Κατε Α., Μαφφει Μ., Πεςινα Κ.: Πριαςψ πρεσερινγ παψμεντς ιν ςρεδιτ νετωορκς. Νετωορκ ανδ Διστριβυτεδ Σεςυριτψ Σψμποσιυμ (2015)
35. Κονφορτψ Δ., Αδαμ Ψ., Εστραδα Δ., Μερεδιτη Λ. Γ.: Σψνερεο: Τηε Δεςεντραλιζεδ ανδ Διστριβυτεδ Σοςιαλ Νετωορκ (2015)
36. Αηυϑα Ρ. Κ., Μαγναντι Τ. Λ., Ορλιν Θ. Β.: Νετωορκ Φλοως: Τηεορψ, Αλγοριτημς, ανδ Αππλιςατιονς. Πρεντιςε-Ηαλλ (1993) ηττπς://οςω.μιτ.εδυ. Λιςενσε: ˆρεατιε ὃμμονς ΒΨ-Ν˜-ΣΑ. (Φαλλ 2010)
37. Θøσανγ Α., Ισμαιλ Ρ., Βοψδ ˆ.: Α Συρεψ οφ Τρυστ ανδ Ρεπυτατιον Σψστεμς φορ Ονλινε Σεριςε Προισιον. Δεςισιον Συππορτ Σψστεμς, 43(2), ππ. 618-644 (2007)