

Trust Is Risk: Μία Αποκεντρωμένη Πλατφόρμα Οικονομικής Εμπιστοσύνης

Ορφέας Στέφανος Θυφρονίτης Λήτος

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
olitos@corelab.ntua.gr

Περίληψη Κεντρικά συστήματα φήμης χρησιμοποιούν αστέρια και κριτικές και επομένως χρειάζονται απόκρυψη αλγορίθμων για να αποφεύγουν τον αθέμιτο χειρισμό. Σε αυτόνομα αποκεντρωμένα συστήματα ανοιχτού κώδικα αυτή η πολυτέλεια δεν είναι διαθέσιμη. Στο παρόν κατασκευάζουμε ένα δίκτυο φήμης για αποκεντρωμένες αγορές όπου η εμπιστοσύνη που δίνει ο κάθε χρήστης στους υπόλοιπους είναι μετρήσιμη και εκφράζεται με νομισματικούς όρους. Εισάγουμε ένα νέο μοντέλο για πορτοφόλια bitcoin στα οποία τα νομίσματα κάθε χρήστη μοιράζονται σε αξιόπιστους συνεργάτες. Η άμεση εμπιστοσύνη ορίζεται χρησιμοποιώντας μοιραζόμενους λογαριασμούς μέσω των 1-από-2 multisig του bitcoin. Η έμμεση εμπιστοσύνη ορίζεται έπειτα με μεταβατικό τρόπο. Αυτό επιτρέπει να επιχειρηματολογούμε με αυστηρό παιγνιοθεωρητικό τρόπο ως προς την ανάλυση κινδύνου. Αποδεικνύουμε ότι ο κίνδυνος και οι μέγιστες ροές είναι ισοδύναμα στο μοντέλο μας και ότι το σύστημά μας είναι ανθεκτικό σε επιθέσεις Sybil. Το σύστημά μας επιτρέπει τη λήψη σαφών οικονομικών αποφάσεων ως προς την υποκειμενική χρηματική ποσότητα με την οποία μπορεί ένας παίκτης να εμπιστευθεί μία ψευδώνυμη οντότητα. Μέσω ανακατανομής της άμεσης εμπιστοσύνης, ο κίνδυνος που διατρέχεται κατά την αγορά από έναν ψευδώνυμο πωλητή παραμένει αμετάβλητος.

Keywords: αποκεντρωμένο · εμπιστοσύνη · δίκτυο εμπιστοσύνης · γραμμές πίστωσης · εμπιστοσύνη ως κίνδυνος · ροή · φήμη · decentralized · trust · web-of-trust · bitcoin · multisig · line-of-credit · trust-as-risk · flow · reputation

Abstract. Centralized reputation systems use stars and reviews and thus require algorithm secrecy to avoid manipulation. In autonomous open source decentralized systems this luxury is not available. We create a reputation network for decentralized marketplaces where the trust each user gives to the rest of the users is quantifiable and expressed in monetary terms. We introduce a new model for bitcoin wallets in which user coins are split among trusted associates. Direct trust is defined using shared bitcoin accounts via bitcoin's 1-of-2 multisig. Indirect trust is subsequently defined transitively. This enables formal game theoretic arguments pertaining to risk analysis. We prove that risk and maximum flows are equivalent in our model and that our system is Sybil-resilient. Our system allows for concrete financial decisions on the subjective monetary amount a pseudonymous party can be trusted with. Through direct trust redistribution, the risk incurred from making a purchase from a pseudonymous vendor in this manner remains invariant.

1 Εισαγωγή

Οι αποκεντρωμένες αγορές μπορούν να κατηγοριοποιηθούν ως κεντρικές και αποκεντρωμένες. Ένα παράδειγμα για κάθε κατηγορία είναι το [ebay](#) και το [OpenBazaar](#). Ο κοινός παρονομαστής των καθιερωμένων διαδικτυακών αγορών είναι το γεγονός ότι η φήμη κάθε πωλητή και πελάτη εκφράζεται κατά κανόνα με τη μορφή αστεριών και κριτικών των χρηστών, ορατές σε όλο το δίκτυο.

Ο στόχος μας είναι να δημιουργήσουμε ένα σύστημα φήμης για αποκεντρωμένες αγορές όπου η εμπιστοσύνη που ο κάθε χρήστης δίνει στους υπόλοιπους είναι ποσοτικοποιήσιμη με νομισματικούς όρους. Η κεντρική παραδοχή που χρησιμοποιείται σε όλο το μήκος της παρούσας εργασίας είναι ότι η εμπιστοσύνη είναι ισοδύναμη με τον κίνδυνο, ή η θέση ότι η εμπιστοσύνη της *Alice* προς το χρήστη *Charlie* ορίζεται ως το μέγιστο χρηματικό ποσό που η *Alice* μπορεί να χάσει όταν ο *Charlie* είναι ελεύθερος να διαλέξει όποια στρατηγική θέλει. Για να υλοποιήσουμε αυτή την ιδέα, θα χρησιμοποιήσουμε τις πιστωτικές γραμμές όπως προτάθηκαν από τον Washington Sanchez [1]. Η *Alice* συνδέεται στο δίκτυο όταν εμπιστεύεται ενεργητικά ένα συγκεκριμένο χρηματικό ποσό σε έναν άλλο χρήστη, για παράδειγμα το φίλο της τον *Bob*. Αν ο *Bob* έχει ήδη εμπιστευθεί ένα χρηματικό ποσό σε έναν τρίτο χρήστη, τον *Charlie*, τότε η *Alice* εμπιστεύεται έμμεσα τον *Charlie* αφού αν ο τελευταίος ήθελε να παίξει άδιστα, θα μπορούσε να έχει κλέψει ήδη τα χρήματα που του εμπιστεύθηκε ο *Bob*. Θα δούμε αργότερα ότι η *Alice* μπορεί τώρα να εμπλακεί σε οικονομική δραστηριότητα με τον *Charlie*.

Για να υλοποιήσουμε τις πιστωτικές γραμμές, θα χρησιμοποιήσουμε το Bitcoin [2], ένα αποκεντρωμένο κρυπτονόμισμα που διαφέρει από τα συμβατικά νομίσματα γιατί δεν βασίζεται σε αξιόπιστους τρίτους. Όλες οι συναλλαγές δημοσιεύονται σε ένα αποκεντρωμένο “λογιστικό βιβλίο”, το blockchain. Κάθε συναλλαγή παίρνει κάποια νομίσματα ως είσοδο και παράγει ορισμένα νομίσματα ως έξοδο. Αν η έξοδος μιας συναλλαγής δεν συνδέεται στην είσοδο μιας άλλης, τότε η έξοδος αυτή ανήκει στο UTXO, το σύνολο των αξόδευτων εξόδων συναλλαγών. Διαισθητικά, το UTXO περιέχει όλα τα αξόδευτα νομίσματα.



Σχ.1: Ο Α εμπ. έμμεσα τον Γ 10฿ Σχ.2: Ο Α εμπ. έμμεσα τον Γ 5฿

Προτείνουμε ένα νέο είδος πορτοφολιού όπου τα νομίσματα δεν έχουν αποκλειστικό ιδιοκτήτη, αλλά τοποθετούνται σε μοιραζόμενους λογαριασμούς που υλοποιούνται μέσω των 1-από-2 multisig, μια κατασκευή του bitcoin που επιτρέπει έναν από δύο προκαθορισμένους χρήστες να ξοδέψουν τα νομίσματα που περιέχονται σε έναν κοινό λογαριασμό [3]. Θα χρησιμοποιήσουμε το συμβολισμό $1/\{Alice, Bob\}$ για να αναπαραστήσουμε ένα 1-από-2 multisig που μπορεί να ξοδευτεί είτε από την *Alice*, είτε από τον *Bob*. Με αυτό το συμβολισμό, η σειρά των ονομάτων δεν έχει σημασία, εφ’ όσον οποιοσδήποτε από τους δύο χρήστες μπορεί να ξοδέψει τα νομίσματα. Ωστόσο, έχει σημασία ποιος χρήστης καταθέτει τα χρήματα αρχικά στον κοινό λογαριασμό – αυτός ο χρήστης διακινδυνεύει τα νομίσματά του.

Η προσέγγισή μας αλλάζει την εμπειρία του χρήστη κατά έναν διακριτικό αλλά και δραστικό τρόπο. Ο χρήστης δεν πρέπει να βασίζεται πια την εμπιστοσύνη του προς ένα κατάστημα σε αστέρια ή κριτικές που δεν εκφράζονται με οικονομικές μονάδες. Μπορεί απλά να συμβουλευθεί το πορτοφόλι της για να αποφασίσει αν το κατάστημα είναι αξιόπιστο και, αν ναι, μέχρι ποια αξία, μετρημένη σε bitcoin. Το σύστημα αυτό λειτουργεί ως εξής: Αρχικά η *Alice* μεταφέρει τα χρήματά της από το ιδιωτικό της bitcoin πορτοφόλι σε 0-από-2 διευθύνσεις multisig μοιραζόμενες με φίλους που εμπιστεύεται άνετα. Αυτό καλείται άμεση εμπιστοσύνη. Το σύστημά μας δεν ενδιαφέρεται για τον τρόπο με τον οποίο οι παίκτες καθορίζουν ποιος είναι αξιόπιστος γι’ αυτές τις απ’ ευθείας 1-από-2 καταθέσεις. Αυτό το αμφιλεγόμενο είδος εμπιστοσύνης περιορίζεται στην άμεση γειτονιά κάθε παίκτη. Η έμμεση εμπιστοσύνη προς άγνωστους χρήστες υπολογίζεται από έναν ντετερμινιστικό αλγόριθμο. Συγκριτικά, συστήματα με αντικειμενικές αξιολογήσεις δε δια-

χωρίζουν τους γείτονες από τους υπόλοιπους χρήστες, προσφέροντας έτσι αμφιλεγόμενες ενδείξεις εμπιστοσύνης για όλους.

Ας υποθέσουμε ότι η *Alice* βλέπει τα προϊόντα του πωλητή *Charlie*. Αντί για τα αστέρια του *Charlie*, η *Alice* θα δει ένα θετικό αριθμό που υπολογίζεται από το πορτοφόλι της και αναπαριστά τη μέγιστη χρηματική αξία που η *Alice* μπορεί να πληρώσει με ασφάλεια για να ολοκληρώσει μια αγορά από τον *Charlie*. Αυτή η αξία, γνωστή ως έμμεση εμπιστοσύνη, υπολογίζεται με το θεώρημα Εμπιστοσύνης – Ροής (2). Σημειώστε ότι η έμμεση εμπιστοσύνη προς κάποιο χρήστη δεν είναι ενιαία αλλά υποκειμενική. Κάθε χρήστης βλέπει μια ιδιαίτερη έμμεση εμπιστοσύνη που εξαρτάται από την τοπολογία του δικτύου. Η έμμεση εμπιστοσύνη που εμφανίζεται από το σύστημά μας διαθέτει την ακόλουθη επιθυμητή ιδιότητα ασφαλείας: Αν η *Alice* πραγματοποιήσει μια αγορά από τον *Charlie*, τότε εκτίθεται το πολύ στον ίδιο κίνδυνο στον οποίον εκτινόταν πριν την αγορά. Ο υπαρκτός ευθελούσιος κίνδυνος είναι ακριβώς εκείνος που η *Alice* έπαιρνε μοιραζόμενη τα νομίσματά της με τους αξιόπιστους φίλους της. Αποδεικνύουμε το αποτέλεσμα αυτό στο θεώρημα Αμετάβλητου Κινδύνου (3). Προφανώς δε θα είναι ασφαλές για την *Alice* να αγοράσει οτιδήποτε από τον *Charlie* ή από οποιοδήποτε άλλο πωλητή αν δεν έχει ήδη εμπιστευθεί καθόλου χρήματα σε κανέναν άλλο χρήστη.

Βλέπουμε ότι στο Trust Is Risk τα χρήματα δεν επενδύονται τη στιγμή της αγοράς και κατ' ευθείαν στον πωλητή, αλλά σε μια προγενέστερη χρονική στιγμή και μόνο προς άτομα που είναι αξιόπιστα για λόγους εκτός παιχνιδιού. Το γεγονός ότι το σύστημα αυτό μπορεί να λειτουργήσει με έναν εξ ολοκλήρου αποκεντρωμένο τρόπο θα γίνει σαφές στις επόμενες ενότητες. Θα αποδείξουμε το αποτέλεσμα αυτό στο θεώρημα Sybil Αντίστασης (5).

Κάνουμε τη σχεδιαστική επιλογή ότι κανείς μπορεί να εκφράζει την εμπιστοσύνη του μεγιστικά με όρους του διαθέσιμου του κεφαλαίου. Έτσι, ένας φτωχός παίκτης δεν μπορεί να διαθέσει πολλή άμεση εμπιστοσύνη στους φίλους τους ανεξαρτήτως του πόσο αξιόπιστοι είναι. Από την άλλη, ένας πλούσιος παίκτης μπορεί να εμπιστευθεί ένα μικρό μέρος των χρημάτων της σε κάποιον παίκτη που δεν εμπιστεύεται εκτενώς και παρ' όλα αυτά να εμφανίζει περισσότερη άμεση εμπιστοσύνη από τον φτωχό παίκτη του προηγούμενου παραδείγματος. Δεν υπάρχει άνω όριο στην εμπιστοσύνη. Κάθε παίκτης περιορίζεται μόνο από τα χρήματά του. Έτσι εκμεταλλευόμαστε την παρακάτω αξιοσημείωτη ιδιότητα του χρήματος: Το ότι κανονικοποιεί τις υποκειμενικές ανθρώπινες επιθυμίες σε αντικειμενική αξία.

Υπάρχουν διάφορα κίνητρα για να συνδεθεί ένας χρήστης στο δίκτυο αυτό. Πρώτον, έχει πρόσβαση σε καταστήματα που αλλιώς θα ήταν απρόσιτα. Επίσης, δύο φίλοι μπορούν να επισημοποιήσουν την αλληλοεμπιστοσύνη

τους εμπιστεύοντας το ίδιο ποσό ο ένας στον άλλο. Μια μεγάλη εταιρεία που πραγματοποιεί συχνά συμβάσεις υπεργολαβίας με άλλες εταιρείες μπορεί να εκφράσει την εμπιστοσύνη της προς αυτές. Μια κυβέρνηση μπορεί να εμπιστευθεί άμεσα τους πολίτες της με χρήματα και να τους αντιμετωπίσει με ένα ανάλογο νομικό οπλοστάσιο αν αυτοί κάνουν ανεύθυνη χρήση της εμπιστοσύνης αυτής. Μια τράπεζα μπορεί να προσφέρει δάνεια ως εξερχόμενες και να χειρίζεται τις καταθέσεις ως εισερχόμενες άμεσες εμπιστοσύνες. Τέλος, το δίκτυο μπορεί να ειπωθεί ως ένα πεδίο επένδυσης και κερδοσκοπίας αφού αποτελεί ένα εντελώς νέο πεδίο οικονομικής δραστηριότητας.

Είναι αξιοσημείωτο το ότι το ίδιο φυσικό πρόσωπο μπορεί να διατηρεί πολλαπλές ψευδώνυμες ταυτότητες στο ίδιο δίκτυο εμπιστοσύνης και ότι πολλά ανεξάρτητα δίκτυα εμπιστοσύνης διαφορετικών σκοπών μπορούν να συνυπάρχουν. Από την άλλη, η ίδια ψευδώνυμη ταυτότητα μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να αναπτύξει σχέσεις εμπιστοσύνης σε διαφορετικά περιβάλλοντα.

2 Λειτουργία

Θα ακολουθήσουμε τώρα τα βήματα της *Alice* από τη σύνδεση με το δίκτυο μέχρι να ολοκληρώσει επιτυχώς μια αγορά. Ας υποθέσουμε ότι αρχικά όλα τα νομίσματά της, ας πούμε 10฿, είναι αποθηκευμένα έτσι που αποκλειστικά εκείνη μπορεί να τα ξοδέψει.

Δύο αξιόπιστοι φίλοι, ο *Bob* και ο *Charlie*, την πείθουν να δοκιμάσει το Trust Is Risk. Εγκαθιστά το πορτοφόλι Trust Is Risk και μεταφέρει τα 10฿ από το κανονικό bitcoin πορτοφόλι της, εμπιστεύοντας 2฿ στον *Bob* και 5฿ στον *Charlie*. Τώρα ελέγχει αποκλειστικά 3฿ και διακινδυνεύει 7฿ με αντάλλαγμα το να είναι μέρος του δικτύου. Έχει πλήρη αλλά όχι αποκλειστική πρόσβαση στα 7฿ που εμπιστεύθηκε στους φίλους της και αποκλειστική πρόσβαση στα υπόλοιπα 3฿, που αθροίζονται στα 10฿.

Μερικές ημέρες αργότερα, ανακαλύπτει ένα διαδικτυακό κατάστημα παπουτσιών του *Dean*, ο οποίος είναι συνδεδεμένος επίσης στο Trust Is Risk. Η *Alice* βρίσκει ένα ζευγάρι παπούτσια που κοστίζει 1฿ και ελέγχει την αξιοπιστία του *Dean* μέσω του νέου της πορτοφολιού. Ας υποθέσουμε ότι ο *Dean* προκύπτει αξιόπιστος μέχρι 4฿. Αφού το 1฿ είναι λιγότερο από τα 4฿, η *Alice* πραγματοποιεί την αγορά μέσω του καινούριου της πορτοφολιού με σιγουριά.

Τότε βλέπει στο πορτοφόλι της ότι τα αποκλειστικά της νομίσματα αυξήθηκαν στα 6฿, τα νομίσματα που εμπιστεύεται στον *Bob* και στον *Charlie* μειώθηκαν στα 0.5฿ και 2.5฿ αντίστοιχα και ότι εμπιστεύεται τον *Dean* με 1฿, όσο και η αξία των παπουτσιών. Επίσης, η αγορά της είναι σημειωμένη

ως “σε εξέλιξη”. Αν η *Alice* ελέγξει την έμμεση εμπιστοσύνη της προς τον *Dean*, θα είναι και πάλι 4 \textsterling . Στο παρασκήνιο, το πορτοφόλι της ανακατένει-
με τα νομίσματα που εμπιστευόταν με τρόπο ώστε εκείνη να εμπιστεύεται
άμεσα στον *Dean* τόσα νομίσματα όσο κοστίζει το αγορασμένο προϊόν και
η εμπιστοσύνη που εμφανίζει το πορτοφόλι να είναι ίση με την αρχική.

Τελικά όλα πάνε καλά και τα παπούτσια φτάνουν στην *Alice*. Ο *Dean*
επιλέγει να εξαργυρώσει τα νομίσματα που του εμπιστεύθηκε η *Alice* κι έτσι
το πορτοφόλι της δε δείχνει ότι εμπιστεύεται κανένα νόμισμα στον *Dean*.
Μέσω του πορτοφολιού της, σημειώνει την αγορά ως επιτυχή. Αυτό επι-
τρέπει στο σύστημα να αναπληρώσει τη μειωμένη εμπιστοσύνη προς τον
Bob και τον *Charlie*, θέτοντας τα νομίσματα άμεσης εμπιστοσύνης στα 2 \textsterling
και στα 5 \textsterling αντίστοιχα και πάλι. Η *Alice* τώρα ελέγχει αποκλειστικά 2 \textsterling . Συ-
νεπώς τώρα μπορεί να χρησιμοποιήσει συνολικά 9 \textsterling , γεγονός αναμενόμενο,
αφού έπρεπε να πληρώσει 1 \textsterling για τα παπούτσια.

3 Της Τρυστ Γραφη

Ωε νοω ενγαγε ιν της φορμαλ δεσκριπτιον οφ της προποσεδ σψστεμ, αςζο-
μπανιεδ βψ ηελπφυλ εξαμπλες.

Δεφινιτιον 1 (Γραφη). *Τρυστ Ις Ρισκ ις ρεπρεσεντεδ βψ α σεχυνεζε*
οφ διρεστεδ ωειγητεδ γραπης (\mathcal{G}_j) ωηερε $\mathcal{G}_j = (\mathcal{V}_j, \mathcal{E}_j)$, $j \in \mathbb{N}$. Αλσο, σινζε
της γραπης αρε ωειγητεδ, τηερε εξιστς α σεχυνεζε οφ ωειγητ φυνςτιονς (c_j)
ωιτη $c_j : \mathcal{E}_j \rightarrow \mathbb{R}^+$.

Της νοδες ρεπρεσεντ της πλαφερς, της εδγκες ρεπρεσεντ της εξιστινγ
διρεστ τρυστς ανδ της ωειγητς ρεπρεσεντ της αμουντ οφ αλυε ατταξηδ το
της ζορρεσπονδινγ διρεστ τρυστ. Ας ωε ωιλλ σεε, της γαμε εολες ιν τυρνς.
Της συβςκριπτ οφ της γραπη ρεπρεσεντς της ζορρεσπονδινγ τυρν.

Δεφινιτιον 2 (Πλαφερς). *Τηε σετ $\mathcal{V}_j = \mathcal{V}(\mathcal{G}_j)$ ις τηε σετ οφ αλλ*
πλαφερς ιν της νετωορκ, οτηερωισε υνδερστοοδ ας τηε σετ οφ αλλ ψευ-
δονημους ιδεντιτιες.

Εαση νοδε ηας α ζορρεσπονδινγ νον-νεγατιε νυμβερ τηατ ρεπρεσεντς
ιτς ζαπιταλ. Α νοδε΄ς ζαπιταλ ις της τοταλ αλυε τηατ της νοδε ποσσεσσες
εξζλυσιελψ ανδ νοβοδψ ελσε ζαν σπενδ.

Δεφινιτιον 3 (ζαπιταλ). *Τηε ζαπιταλ οφ Α ιν τυρν j , $Cap_{A,j}$, ις δεφινεδ*
ας τηε τοταλ ζοινς τηατ βελονγ εξζλυσιελψ το Α ατ της βεγινινινγ οφ τυρν
 j .

Τηε ζαπιταλ ις της αλυε τηατ εξιστς ιν της γαμε βυτ ις νοτ σηαρεδ ωιτη
τρυστεδ παρτιες. Τηε ζαπιταλ οφ Α ζαν βε ρεαλλοζατεδ ονλψ δυρινγ ηερ

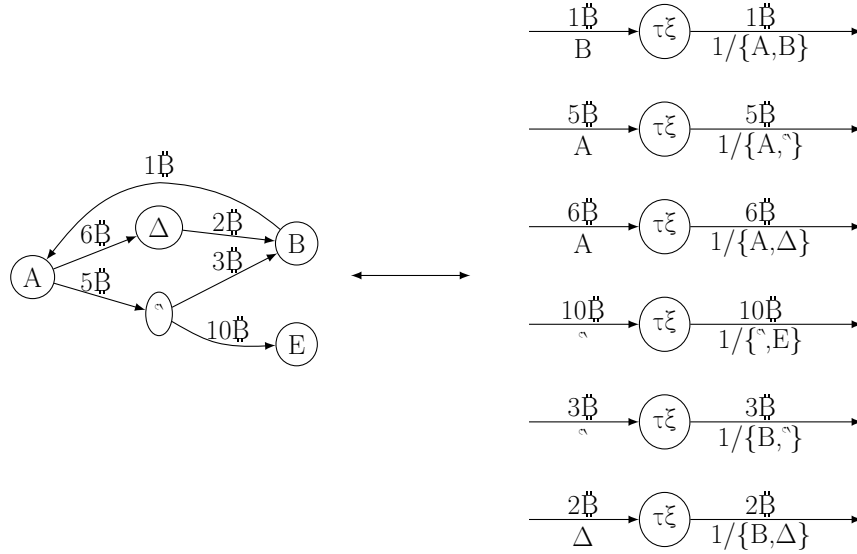
τυρνς, αςζορδινγ το ηερ αςτιονς. Ωε μονελ της σψςτεμ ιν α ωαψ τηατ νο ζαπιταλ ζαν βε αδδεδ ιν της ζουρσε οφ της γαμε τηρουγη εζτερναλ μεανς. Τηε υσε οφ ζαπιταλ ωιλλ βεζομε ζλεαρ ονζε τυρνς αρε φορμαλλψ δεφινεδ.

Τηε φορμαλ δεφινιτιον οφ διρεστ τρυστ φολλοως:

Δεφινιτιον 4 (Διρεστ Τρυστ). Διρεστ τρυστ φορμ A το B ατ της ενδ οφ τυρν j , $DTr_{A \rightarrow B, j}$, ις δεφινεδ ας της τοταλ αμουντ οφ αλυε τηατ εξιςτς ιν $1/\{A, B\}$ μυλτιπλς ιν της ΥΤΕΟ ιν της ενδ οφ τυρν j , ωηερε της μονεψ ις δεποσιτεδ βψ A .

$$DTr_{A \rightarrow B, j} = \begin{cases} c_j(A, B), & \text{if } (A, B) \in \mathcal{E}_j \\ 0, & \text{else} \end{cases} \quad (1)$$

Της δεφινιτιον αγρεες ωιτη της τιτλε οφ της παπερ ανδ ζοινςιδες ωιτη της ιντιυτιον ανδ σοσιολογικαλ εξπεριμενταλ ρεσυλτς οφ [4] τηατ της τρυστ *Alice* σηοως το *Bob* ιν ρεαλ-ωορλδ σοσιαλ νετωορκς ζορρεσπονδς το της εξτεντ οφ δανγερ ιν ωηιςη *Alice* ις πυττινγ ηερσελφ ιντο ιν ορδερ το ηελπ *Bob*. Αν εξαμπλε γραπη ωιτη ιτς ζορρεσπονδινγ τρανςαςτιονς ιν της ΥΤΕΟ ζαν βε σεεν βελοω.



Φιγ.3: Τρυστ Ις Ρισκ Γαμε Γραφη ανδ Εχυιαλεντ Βιτςοιν ΥΤΕΟ

Ανψ αλγοριτημ τηατ ηας αςζεσες το της γραπη \mathcal{G}_j ηας ιμπλιςιτλψ αςζεσες το αλλ διρεστ τρυστς οφ της γραπη.

Δεφινιτιον 5 (Νειγηβουρηοδ). Ωε υσε της νοτατιον $N^+(A)_j$ το ρεφερ το της νοδες διρεστυψ τρυστεδ βψ A ανδ $N^-(A)_j$ φορ της νοδες τηατ διρεστυψ τρυστ A ατ της ενδ οφ τυρν j .

$$\begin{aligned} N^+(A)_j &= \{B \in \mathcal{V}_j : DTr_{A \rightarrow B,j} > 0\} \\ N^-(A)_j &= \{B \in \mathcal{V}_j : DTr_{B \rightarrow A,j} > 0\} \end{aligned} \quad (2)$$

Τησε αρε ζαλλεδ ουτ- ανδ ιν-νεγηβουρηοδ οφ A ον τυρν j ρεσπεστιελψ.

Δεφινιτιον 6 (Τοταλ Ινσομινγ/Ουτγοινγ Διρεστ Τρυστ). Ωε υσε της νοτατιον $in_{A,j}, out_{A,j}$ το ρεφερ το της τοταλ ινσομινγ ανδ ουτ-γοινγ διρεστ τρυστ ρεσπεστιελψ.

$$in_{A,j} = \sum_{v \in N^-(A)_j} DTr_{v \rightarrow A,j}, \quad out_{A,j} = \sum_{v \in N^+(A)_j} DTr_{A \rightarrow v,j} \quad (3)$$

Δεφινιτιον 7 (Ασσετς). Συμ οφ A ζαπιταλ ανδ ουτγοινγ τρυστ.

$$As_{A,j} = Cap_{A,j} + out_{A,j} \quad (4)$$

4 Εολυτιον οφ Τρυστ

Δεφινιτιον 8 (Τυρνς). Ιν εαση τυρν j α πλαψερ $A \in \mathcal{V}$, $A = Player(j)$, ζηοοσεσ ονε ορ μορε αστιονς φορμ της φολλοωινγ τωο κινδς:

Στεαλ(y_B, B): Στεαλ αλυε y_B φορμ $B \in N^-(A)_{j-1}$, ωηρε $0 \leq y_B \leq DTr_{B \rightarrow A,j-1}$. Τηεν:

$$DTr_{B \rightarrow A,j} = DTr_{B \rightarrow A,j-1} - y_B$$

Αδδ(y_B, B): Αδδ αλυε y_B το $B \in \mathcal{V}$, ωηρε $-DTr_{A \rightarrow B,j-1} \leq y_B$. Τηεν:

$$DTr_{A \rightarrow B,j} = DTr_{A \rightarrow B,j-1} + y_B$$

Ωηεν $y_B < 0$, ωε σαψ τηατ A ρεδυσεσ ηερ διρεστ τρυστ το B βψ $-y_B$. Ωηεν $y_B > 0$, ωε σαψ τηατ A ινσρεασεσ ηερ διρεστ τρυστ το B βψ y_B . Ιφ $DTr_{A \rightarrow B,j-1} = 0$, τηεν ωε σαψ τηατ A σταρτσ διρεστυψ τρυστινγ B . Α πασσεσ ηερ τυρν ιφ σθε ζηοοσεσ νο αστιον. Αλσο, λετ Y_{st}, Y_{add} βε της τοταλ αλυε το βε στολεν ανδ αδδεδ ρεσπεστιελψ βψ A ιν ηερ τυρν, j . Φορ α τυρν το βε φασιβλε, ιτ μυστ ηολδ

$$Y_{add} - Y_{st} \leq Cap_{A,j-1}. \quad (5)$$

Τηε ζαπιταλ ις υπδατεδ ιν εερψ τυρν: $Cap_{A,j} = Cap_{A,j-1} + Y_{st} - Y_{add}$.

Α πλαψερ ζαννοτ ζηοοσεσ τωο αστιονς οφ της σαμε κινδ αγαινιστ της σαμε πλαψερ ιν ονε τυρν. Τηε σετ οφ αστιονς οφ α πλαψερ ιν τυρν j ις δενοτεδ βψ $Turn_j$. Τηε γραπη τηατ εμεργεσ βψ αππλινγ τηε αστιονς ον \mathcal{G}_{j-1} ις \mathcal{G}_j .

Φορ εξαμπλε, λετ $A = Player(j)$. Α αλιδ τυρν ζαν βε

$$Turn_j = \{Steal(x, B), Add(y, C), Add(w, D)\} .$$

Τηε *Steal* αςτιον ρεχυιρες $0 \leq x \leq DTr_{B \rightarrow A, j-1}$, τηε *Add* αςτιονς ρεχυιρε $DTr_{A \rightarrow C, j-1} \geq -y$ ανδ $DTr_{A \rightarrow D, j-1} \geq -w$ ανδ τηε *Cap* ρεστριςτιον ρεχυιρες $y + w - x \leq Cap_{A, j-1}$.

Ωε υσε $prev(j)$ ανδ $next(j)$ το δενοτε τηε πρειους ανδ νεζτ τυρν ρε-σπεςτιελψ πλαψεδ βψ $Player(j)$.

Δεφινιτιον 9 (Πρειους/Νεζτ Τυρν). Λετ $j \in \mathbb{N}$ βε α τυρν ωιτη $Player(j) = A$. Ωε δεφινε $prev(j)$, $next(j)$ ας τηε πρειους ανδ νεζτ τυρν τηατ Α ις ζηοσεν το πλαψ ρεσπεςτιελψ. Ιφ j ις τηε φιρστ τυρν τηατ Α πλαψς, $prev(j) = 0$. Μορε φορμαλλιψ, λετ

$$P = \{k \in \mathbb{N} : k < j \wedge Player(k) = A\} \text{ ανδ } \\ N = \{k \in \mathbb{N} : k > j \wedge Player(k) = A\} .$$

Τηεν ωε δεφινε $prev(j)$, $next(j)$ ας πολλοως:

$$prev(j) = \begin{cases} \max P, & P \neq \emptyset \\ 0, & P = \emptyset \end{cases}, \quad next(j) = \min N$$

$next(j)$ ις αλωαιψς ωελλ δεφινεδ ωιτη τηε ασσυμπτιον τηατ αφτερ εαση τυρν εεντυαλλιψ εερψβοδιψ πλαψς.

Δεφινιτιον 10 (Δαμαγε). Λετ j βε α τυρν συση τηατ $Player(j) = A$.

$$Damage_{A, j} = out_{A, prev(j)} - out_{A, j-1} \quad (6)$$

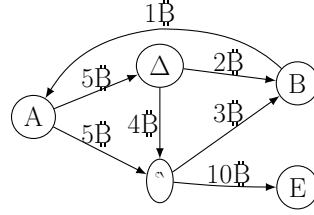
Ωε σαψ τηατ Α ηας βεεν στολεν αλυε $Damage_{A, j}$ βετωεεν $prev(j)$ ανδ j . Ωε ομιτ τυρν συβςριπτς ιφ τηεψ αρε ιμπλιεδ φορμ τηε ζοντεξτ.

Δεφινιτιον 11 (Ηιςτορψ). Ωε δεφινε *Ηιςτορψ*, $\mathcal{H} = (\mathcal{H}_j)$, ας τηε σε-χυενςε οφ αλλ τυπλες ζονταινινγ τηε σετς οφ αςτιονς ανδ τηε ζορρεσπονδινγ πλαψερ.

$$\mathcal{H}_j = (Player(j), Turn_j) \quad (7)$$

Κνωωλεδγε οφ τηε ινιτιαλ γραπη \mathcal{G}_0 , αλλ πλαψερσ' ινιτιαλ ζαπιταλ ανδ τηε ηιςτορψ αμουντ το φυλλ ζομπρεηενσιον οφ τηε εολυτιον οφ τηε γαμε. Βυιλδινγ ον τηε εξαμπλε οφ φιγυρε 3, ωε ζαν σее τηε ρεσυλτινγ γραπη ωηεν D πλαψς

$$Turn_1 = \{Steal(1, A), Add(4, C)\} . \quad (8)$$



Φιγ.4: Γαμε Γραφη αφτερ $Turn_1$ (8) ον της Γραφη οφ φιγυρε 3

Τρυστ Ις Ρισκ ις ζοντρολλεδ βψ αν αλγοριτημ τηατ ζηροοσες α πλαψερ, ρεζειεις της τυρν τηατ της πλαψερ ωισηες το πλαψ ανδ, ιφ της τυρν ις αλιδ, εξεσυτες ιτ. Τηεσε στεπς αρε ρεπεατεδ ινδεφινιτελψ. Ωε ασσυμε πλαψερς αρε ζηροσεν ιν α ωαψ τηατ, αφτερ ηερ τυρν, α πλαψερ ωιλλ εεντυαλλψ πλαψ αγαιν λατερ.

Τρυστ Ις Ρισκ Γαμε

- 1 $\theta = 0$
- 2 ωηιλε (Τρυε)
- 3 $\theta += 1 \cdot A \xleftarrow{\$} \mathcal{V}_j$
- 4 $Tu_{\text{ρν}} = \text{στρατεγψ}[A](\mathcal{G}_0, A, Cap_{A,0}, \mathcal{H}_{1\dots j-1})$
- 5 $(\mathcal{G}_j, Cap_{A,j}, \mathcal{H}_j) = \text{εξεσυτεΤυρν}(\mathcal{G}_{j-1}, A, Cap_{A,j-1}, Tu_{\text{ρν}})$

$\text{στρατεγψ}[A]()$ προιδες πλαψερ A ωιτη φυλλ κνωωλεδγε οφ της γαμε, εξεεπτ φορ της ζαπιταλς οφ οτηερ πλαψερς. Της ασσυμπτιον μαψ νοτ βε αλωαψς ρεαλιστις.

$\text{εξεσυτεΤυρν}()$ ζηεσκς της αλιδιτψ οφ $Tu_{\text{ρν}}$ ανδ συβστιτυτες ιτ ωιτη αν εμπτψ τυρν ιφ ιναλιδ. Συβσεχυεντλψ, ιτ ζρεατες της νεω γραφη \mathcal{G}_j ανδ υπδατες της ηιστορψ αςζορδινγλψ. Φορ της ρουτινε ζοδε, σεε της Αππενδιζ.

5 Τρυστ Τρανσιτιυτψ

Ιν της σεστιον ωε δεφινε σομε στρατεγιες ανδ σηωω της ζορρεσπονδινγ αλγοριτημς. Τηεν ωε δεφινε της Τρανσιτιε Γαμε τηατ ρεπρεσεντς της ωορστ-ζασσε σζεναριο φορ αν ηονεστ πλαψερ ωηεν ανοτηερ πλαψερ δεσιδεις το δε-παρτ φορομ της νετωορκ ωιτη ηερ μονεψ ανδ αλλ της μονεψ διρεστλψ εντρυ-στεδ το ηερ.

Δεφινιτιον 12 (Ιδλε Στρατεγψ). Α πλαψερ A ις σαιδ το φολλωω της ιδλε στρατεγψ ιφ σηε πασσες ιν ηερ τυρν.

Ιδλε Στρατεγψ

Ινπυτ : γραφη \mathcal{G}_0 , πλαψερ A , ζαπιταλ $Cap_{A,0}$, ηιστορψ $(\mathcal{H})_{1\dots j-1}$

Ουτπυτ : $Turn_j$

1 ιδλεΣτρατεγψ($\mathcal{G}_0, A, Cap_{A,0}, \mathcal{H}$) :
 2 ρετυρν(\emptyset)

Της ινπυτς ανδ ουτπυτς αρε ιδεντιςαλ το τηροσε οφ ιδλεΣτρατεγψ() φορ της ρεστ οφ της στρατεγιες, της ωε αοιδ ρεπεατινγ τηεμ.

Δεφινιτιον 13 (Ειλ Στρατεγψ). Α πλαψερ A ις σαιδ το πολλοω της ειλ στρατεγψ ιφ σθε στεαλς αλλ ινζοιμινγ διρεστ τρυστ ανδ νυλλιφιες ηερ ουτγοινγ διρεστ τρυστ ιν ηερ τυρν.

1 ειλΣτρατεγψ($\mathcal{G}_0, A, Cap_{A,0}, \mathcal{H}$) :
 2 Στεαλς = $\bigcup_{v \in N^-(A)_{j-1}} \{Steal(DTr_{v \rightarrow A, j-1}, v)\}$
 3 Αδδς = $\bigcup_{v \in N^+(A)_{j-1}} \{Add(-DTr_{A \rightarrow v, j-1}, v)\}$
 4 $Turn_j = \text{Στεαλς} \cup \text{Αδδς}$
 5 ρετυρν($Turn_j$)

Δεφινιτιον 14 (δνσερατιε Στρατεγψ). Πλαψερ A ις σαιδ το πολλοω της ζονσερατιε στρατεγψ ιφ σθε ρεπλενισηες της αλυε σθε λοστ σινζε της πρειους τυρν, $Damage_A$, βψ στεαλινγ φρομ οτηερς τηατ διρεστλψ τρυστ ηερ ας μυση ας σθε ζαν υπ το $Damage_A$ ανδ σθε τακες νο οτηερ αςτιον.

1 ζονοΣτρατεγψ($\mathcal{G}_0, A, Cap_{A,0}, \mathcal{H}$) :
 2 Δαμαγε = $out_{A, prev(j)} - out_{A, j-1}$
 3 ιφ (Δαμαγε = 0)
 4 ιφ (Δαμαγε = $in_{A, j-1}$)
 5 $Turn_j = \bigcup_{v \in N^-(A)_{j-1}} \{Steal(DTr_{v \rightarrow A, j-1}, v)\}$
 6 ελσε
 7 $y = \text{ΣελεστΣτεαλ}(G_j, A, \Delta\alpha\mu\alpha\gamma\epsilon) \wedge y = \{y_v : v \in N^-(A)_{j-1}\}$
 8 $Turn_j = \bigcup_{v \in N^-(A)_{j-1}} \{Steal(y_v, v)\}$
 9 ελσε $Turn_j = \emptyset$
 10 ρετυρν($Turn_j$)

ΣελεστΣτεαλ() ρετυρνς y_v ωιτη $v \in N^-(A)_{j-1}$ συζη τηατ

$$\sum_{v \in N^-(A)_{j-1}} y_v = Damage_{A,j} \wedge \forall v \in N^-(A)_{j-1}, y_v \leq DTr_{v \rightarrow A, j-1} \quad (9)$$

Πλαψερ A ζαν αρβιτραριλψ δεφινε ηρω ΣελεστΣτεαλ() διστριβυτες της $Steal()$ αςτιονς εαση τιμε σθε ζαλλς της φυνςτιον, ας λονγ ας (9) ις ρε-σπεςτεδ.

Ας ωε ζαν σσε, της δεφινιτιον ζοερς α μυλτιτυδε οφ οπτιονς φορ της ζονσερατιε πλαψερ, σινζε ιν ζασε $0 < \text{Damage}_{A,j} < \text{in}_{A,j-1}$ της ζαν ζηροοσε το διστριβυτε της *Steal* () αστιονς ιν ανψ ωαψ της ζηροοσες.

Της ρατιοναλε βεηινδ της στρατεγψ αρισες φρομ α ρεαλ-ωορλδ ζομμοι σιτυατιον. Συμποσε τηρε αρε α ζλιεντ, αν ιντερμεδιαρψ ανδ α προδυσερ. Της ζλιεντ εντρυστς σομε αλυε το της ιντερμεδιαρψ σο τηατ της λαττερ ζαν βυψ της δεσιρεδ προδυστ φρομ της προδυσερ ανδ δελιερ ιτ το της ζλιεντ. Της ιντερμεδιαρψ ιν τυρν εντρυστς αν εχυαλ αλυε το της προδυσερ, ωηο νεεδς της αλυε υπφροντ το βε αβλε το ζομπλετε της προδυστιον προζεσες. Ηωεερ της προδυσερ εεντυαλλψ δοες νοτ γιε της προδυστ νειτηερ ρειμβυρσες της αλυε, δυε το βανκρυπτςψ ορ δεσισιον το εξιτ της μαρκετ ωιτη αν υνφαιρ βενεφιτ. Της ιντερμεδιαρψ ζαν ζηροοσε ειτηερ το ρειμβυρσε της ζλιεντ ανδ συφφερ της λοσς, ορ ρεψυσε το ρετυρν της μονεψ ανδ λοσε της ζλιεντς τρυστ. Της λαττερ ζηοιζε φορ της ιντερμεδιαρψ ις εξαςτλψ της ζονσερατιε στρατεγψ. Ιτ ις υσεδ τηρουγηουτ της ωορκ ας α στρατεγψ φορ αλλ της ιντερμεδιαρψ πλαψερς βεζαυσε ιτ μοδελς εφφεστιελψ της ωορστ-ζασε σσεναριο τηατ α ζλιεντ ζαν φασε αφτερ αν ειλ πλαψερ δεσιδες το στεαλ εερψτηινγ της ζαν ανδ της ρεστ οφ της πλαψερς δο νοτ ενγαγε ιν ειλ αστιιτψ.

Ωε ζοντινυε ωιτη α ερψ υσεφυλ ποσσιβλε εολυτιον οφ της γαμε, της Τρανσιτιε Γαμε. Ιν τυρν 0, τηρε ις αλρεαδψ α νετωορκ ιν πλαζε. Αλλ πλαψερς απαρτ φρομ A ανδ B φολλω της ζονσερατιε στρατεγψ. Φυρτηερμορε, της σετ οφ πλαψερς ις νοτ μοδιφιεδ τηρουγηουτ της Τρανσιτιε Γαμε, της ωε ζαν ρεφερ το \mathcal{V}_j φορ ανψ τυρν j ας \mathcal{V} . Μορεοερ, εαζη ζονσερατιε πλαψερ ζαν βε ιν ονε οφ τηρεε στατες: Ηαπψ, Ανγρψ ορ Σαδ. Ηαπψ πλαψερς ηαε 0 λοσς, Ανγρψ πλαψερς ηαε ποσιτιε λοσς ανδ ποσιτιε ινζομινγ διρεστ τρυστ, της αρε αβλε το ρεπλενιση τηειρ λοσς ατ λεαστ ιν παρτ ανδ Σαδ πλαψερς ηαε ποσιτιε λοσς, βυτ 0 ινζομινγ διρεστ τρυστ, της τηςψ ζαννοτ ρεπλενιση της λοσς. Τηεσε ζονεντιονς ωιλλ ηολδ ωηενεερ ωε υσε της Τρανσιτιε Γαμε.

Τρανσιτιε Γαμε

Ινπυτ : γραπη \mathcal{G}_0 , $A \in \mathcal{V}$ ιδλε πλαψερ, $B \in \mathcal{V}$ ειλ πλαψερ

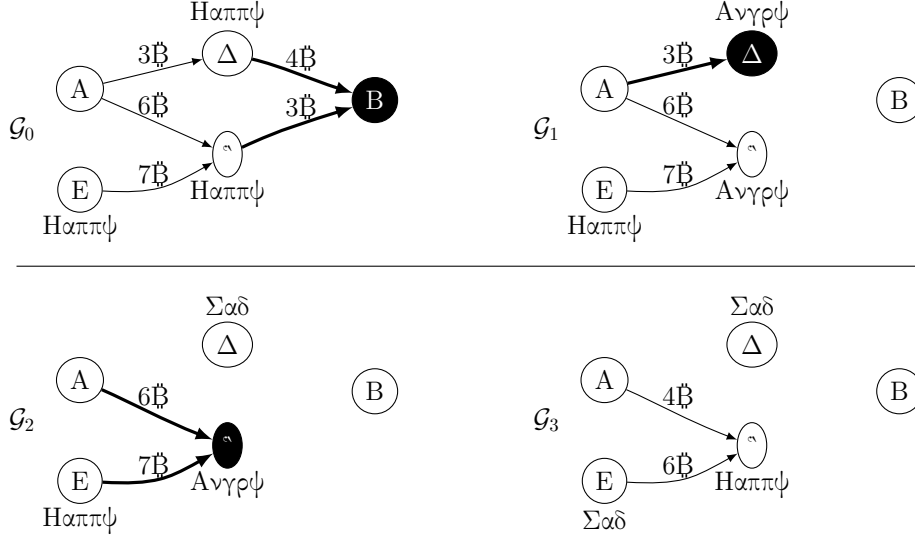
- 1 Ανγρψ = Σαδ = \emptyset · Ηαπψ = $\mathcal{V} \setminus \{A, B\}$
- 2 φορ ($v \in \mathcal{V} \setminus \{B\}$) $Loss_v = 0$
- 3 $\theta = 0$
- 4 ωηιλε (Τρυε)
- 5 $\theta += 1 \cdot v \xleftarrow{\$} \mathcal{V} \setminus \{A\}$
- 6 $Turn_j = \text{στρατεγψ}[v](\mathcal{G}_0, v, Cap_{v,0}, \text{mathcal{H}}_{1\dots j-1})$
- 7 εξεσυτεΤυρν($\mathcal{G}_{j-1}, v, Cap_{v,j-1}, Turn_j$)
- 8 φορ (αστιον $\in Turn_j$)
- 9 αστιον ματση δο

```

10   ζασε  $Steal(\psi, w)$  δο
11   εξεσηανγε =  $\psi$ 
12    $Loss_w += εξεσηανγε$ 
13   ιφ ( $v \neq B$ )  $Loss_v -= εξεσηανγε$ 
14   ιφ ( $w \neq A$ )
15      $Ηαπψ = Ηαπψ \setminus \{w\}$ 
16     ιφ ( $in_{w,j} == 0$ )  $Σαδ = Σαδ \cup \{w\}$ 
17     ελσε  $Ανγρψ = Ανγρψ \cup \{w\}$ 
18   ιφ ( $v \neq B$ )
19      $Ανγρψ = Ανγρψ \setminus \{v\}$ 
20     ιφ ( $Loss_v \neq 0$ )  $Σαδ = Σαδ \cup \{v\}$  * $in_{v,j}$  σηουλδ βε ζερο
21     ιφ ( $Loss_v == 0$ )  $Ηαπψ = Ηαπψ \cup \{v\}$ 

Αν εξαμπλε εξεσυτιον φολλωως:

```



Φιγ.5: B στεαλς 7B, την D στεαλς 3B ανδ φιναλλψ C στεαλς 3B

Λετ j_0 βε της φιρστ τυρν ον ωηιση B ις ζηοσεν το πλαψ. Υντιλ την, αλλ πλαψερς ωιλλ πασς τηειρ τυρν σινζε νοτηινγ ηας βεεν στολεν ψετ (σεε της Αππενδιξ (τηορεμ 6) φορ α φορμαλ προοφ οφ της συμπε φαστ). Μορεοερ, λετ $v = Player(j)$ ανδ $j' = prev(j)$. Της Τρανσιτιε Γαμε γενερατες τυρνς:

$$Turn_j = \bigcup_{w \in N^-(v)_{j-1}} \{Steal(y_w, w)\} \ , \quad (10)$$

ωηερε

$$\sum_{w \in N^-(v)_{j-1}} y_w = \min(in_{v,j-1}, Damage_{v,j}) \ .$$

Ωε σσε τηατ ιφ $Damage_{v,j} = 0$, τηεν $Turn_j = \emptyset$.

Φρομ τηε δεφινιτιον οφ $Damage_{v,j}$ ανδ κνωωινγ τηατ νο στρατεγψ ιν της ζασε ζαν ινζρεασε ανψ διρεστ τρυστ, ωε σσε τηατ $Damage_{v,j} \geq 0$. Αλσο, ιτ ις $Loss_{v,j} \geq 0$ βεζαυσε ιφ $Loss_{v,j} < 0$, τηεν v ηας στολεν μορε αλυε τηαν σθε ηας βεεν στολεν, της σθε ωουλδ νοτ βε φολλοωινγ τηε ζονσερατιε στρατεγψ.

6 Τρυστ Φλωω

Ωε ζαν νοω δεφινε τηε ινδιρεστ τρυστ φρομ A το B .

Δεφινιτιον 15 (Ινδιρεστ Τρυστ). *Τηε ινδιρεστ τρυστ φρομ A το B αφτερ τυρν j ις δεφινεδ ας τηε μαξιμουμ ποσσιβλε αλυε τηατ ζαν βε στολεν φρομ A αφτερ τυρν j ιν τηε σεττινγ οφ ΤρανσιτιεΓαμε(\mathcal{G}_j, A, B).*

Ιτ ις $Tr_{A \rightarrow B} \geq DTr_{A \rightarrow B}$. Τηε νεζτ τηεορεμ σηοωσ τηατ $Tr_{A \rightarrow B}$ ις φινιτε.

Τηεορεμ 1 (Τρυστ δνεργενζε Τηεορεμ).

δνσιδερ α Τρανσιτιε Γαμε. Τηερε εξιστς α τυρν συση τηατ αλλ συβσεχυνεντ τυρνς αρε εμπτψ.

Προοφ Σκετση. Ιφ τηε γαμε διδν'τ ζονεργε, τηε $Steal()$ αςτιονς ωουλδ ζοντινυε φορεερ ωιτηουτ ρεδυςτιον οφ τηε αμουντ στολεν οερ τιμε, της τηεψ ωουλδ ρεαση ινφινιτψ. Ηωεερ της ις ιμποσσιβλε, σινσε τηερε εξιστς ονλψ φινιτε τοταλ διρεστ τρυστ. \square

Φυλλ προοφς οφ αλλ τηεορεμς ανδ λεμμας ζαν βε φουνδ ιν τηε Αππενδιξ.

Ιν τηε σεττινγ οφ ΤρανσιτιεΓαμε(\mathcal{G}, A, B), ωε μαχε υσε οφ τηε νοτατιον $Loss_A = Loss_{A,j}$, ωηερε j ις α τυρν τηατ τηε γαμε ηας ζονεργεδ. Ιτ ις ιμπορταντ το νοτε τηατ $Loss_A$ ις νοτ τηε σαμε φορ ρεπεατεδ εξεκυτιονς οφ της κινδ οφ γαμε, σινσε τηε ορδερ ιν ωηιζη πλαψερς αρε ζηοσεν μαψ διωφερ βετωεεν εξεκυτιονς ανδ τηε ζονσερατιε πλαψερς αρε φρεε το ζηοοσε ωηιζη ινζομινγ διρεστ τρυστς τηεψ ωιλλ στεαλ ανδ ηοω μυση φρομ εαση.

Λετ G βε α ωειγητεδ διρεστεδ γραπη. Ωε ωιλλ ινεστιγατε τηε μαξιμουμ φλωω ον της γραπη. Φορ αν ιντροδυςτιον το τηε μαξιμουμ φλωω προβλεμ σσε [5] π. 708. δνσιδερινγ εαση εδγε'ς ζαπασιτψ ας ιτς ωειγητ, α φλωω ασσιγνμεντ $X = [x_{vw}]_{\mathcal{V} \times \mathcal{V}}$ ωιτη α σουρζε A ανδ α σινκ B ις αλιδ ωηεν:

$$\forall (v, w) \in \mathcal{E}, x_{vw} \leq c_{vw} \text{ ανδ} \quad (11)$$

$$\forall v \in \mathcal{V} \setminus \{A, B\}, \sum_{w \in N^+(v)} x_{vw} = \sum_{w \in N^-(v)} x_{vw} . \quad (12)$$

Ως δο νοτ συπποσε ανψ σχεω σψμμετρψ ιν X . Τηε φλωω αλυε ις $\sum_{v \in N^+(A)} x_{Av}$, ωηις ις προεν το βε εχυαλ το $\sum_{v \in N^-(B)} x_{vB}$. Τηερε εξιστς αν αλγοριτημ τηατ ρετυρνς της μαξιμουμ ποσσιβλε φλωω φρομ A το B , ναμελψ $MaxFlow(A, B)$. Τηις αλγοριτημ ειδεντλψ νεεδς φυλλ κνωωλεδγε οφ τηε γραπη. Τηε φαστεστ ερσιον οφ τηις αλγοριτημ ρυνς ιν $O(|V||E|)$ τιμε [6]. Ωε ρεφερ το τηε φλωω αλυε οφ $MaxFlow(A, B)$ ας $maxFlow(A, B)$.

Ωε ωιλλ νοω ιντροδυσε τωο λεμμας τηατ ωιλλ βε υσεδ το προε τηε ονε οφ τηε ζεντραλ ρεσυλτς οφ τηις ωορκ, τηε Τρυστ Φλωω τηεορεμ.

Λεμμα 1 (ΜαξΦλωως Αρε Τρανσιτιε Γαμες).

Λετ \mathcal{G} βε α γαμε γραπη, λετ $A, B \in \mathcal{V}$ ανδ $MaxFlow(A, B)$ τηε μαξιμουμ φλωω φρομ A το B εξεσυτεδ ον \mathcal{G} . Τηερε εξιστς αν εξεσυτιον οφ ΤρανσιτιεΓαμε(\mathcal{G}, A, B) συση τηατ $maxFlow(A, B) \leq Loss_A$.

Προοφ Σκετση. Τηε δεσιρεδ εξεσυτιον οφ ΤρανσιτιεΓαμε() ωιλλ ζονταιν αλλ φλωως φρομ τηε $MaxFlow(A, B)$ ας εχυιαλεντ $Steal()$ αςτιονς. Τηε πλαψερς ωιλλ πλαψ ιν τυρνς, μοιηγ φρομ B βακχ το A . Εαση πλαψερ ωιλλ στεαλ φρομ ηις πρεδεσεσσορς ας μυση ας ωας στολεν φρομ ηερ. Τηε φλωως ανδ τηε ζονσερατιε στρατεγψ σηαρε τηε προπερτψ τηατ τηε τοταλ ινπυτ ις εχυαλ το τηε τοταλ ουτπυτ. \square

Λεμμα 2 (Τρανσιτιε Γαμες Αρε Φλωως).

Λετ $\mathcal{H} = \text{ΤρανσιτιεΓαμε}(\mathcal{G}, A, B)$ φορ σομε γαμε γραπη \mathcal{G} ανδ $A, B \in \mathcal{V}$. Τηερε εξιστς α αλιδ φλωω $X = \{x_{uv}\}_{u,v \in \mathcal{V}}$ ον \mathcal{G}_0 συση τηατ $\sum_{v \in \mathcal{V}} x_{Av} = Loss_A$.

Προοφ Σκετση. Ιφ ωε εξζλυδε τηε σαδ πλαψερς φρομ τηε γαμε, τηε $Steal()$ αςτιονς τηατ ρεμαιν ζονστιτυτε α αλιδ φλωω φρομ A το B . \square

Τηεορεμ 2 (Τρυστ Φλωω Τηεορεμ).

Λετ \mathcal{G} βε α γαμε γραπη ανδ $A, B \in \mathcal{V}$. Ιτ ηολδς τηατ

$$Tr_{A \rightarrow B} = maxFlow(A, B) \quad .$$

Απόδειξη. Φρομ λεμμα 1 τηερε εξιστς αν εξεσυτιον οφ τηε Τρανσιτιε Γαμε συση τηατ $Loss_A \geq maxFlow(A, B)$. Σινςε $Tr_{A \rightarrow B}$ ις τηε μαξιμουμ λοσσ τηατ A ζαν συψφερ αφτερ τηε ζονεργενςε οφ τηε Τρανσιτιε Γαμε, ωε σεε τηατ

$$Tr_{A \rightarrow B} \geq maxFlow(A, B) \quad . \quad (13)$$

Βυτ σομε εξεστυιον οφ τηε Τρανστυιτε Γαμε γιες $Tr_{A \rightarrow B} = Loss_A$. Φρομ λεμμα 2, τηε εξεστυιον ζορρεσπονδς το α φλω. Τηυς

$$Tr_{A \rightarrow B} \leq maxFlow(A, B) . \quad (14)$$

Τηε τηεορεμ φολλοως φρομ (13) ανδ (14). \square

Νοτε τηατ τηε μαξΦλω ις τηε σαμε ιν τηε φολλοωινγ τωο ζασες: Ιφ α πλαφερ ζηοοσεε τηε ειλ στρατεγψ ανδ ιφ τηατ πλαφερ ζηοοσεε α αριατιον οφ τηε ειλ στρατεγψ ωηερε σθε δοεε νοτ νυλλιψψ ηερ ουτγοινγ διρεστ τρυστ.

Φυρτηερ θυστιφισατιον οφ τρυστ τρανστυιτψ τηρουγη τηε υσε οφ $MaxFlow$ ζαν βε φουνδ ιν τηε σοσιολογισαλ ωορκ ζονδυσετδ ιν [4] ωηερε α διρεστ ζορρεσπονδενσε οφ μαξιμου φλωωε ανδ εμπιρισαλ τρυστ ις εξπεριμενταλψ αλιδατεδ.

Ηερε ωε σσε ανοτηερ ιμπορταντ τηεορεμ τηατ γιες τηε βασις φορ ρισκ-ιναριαντ τρανσαστιονεε βετωεεεε διφφερεντ, ποσσιβλψ υνκνοων, παρτιεε.

Τηεορεμ 3 (Ρισκ Ιναριανσε Τηεορεμ). Λετ \mathcal{G} γαμε γραπη, $A, B \in \mathcal{V}$ ανδ l τηε δεσπερεδ αλυε το βε τρανσφερρεδ φρομ A το B , ωιτη $l \leq Tr_{A \rightarrow B}$. Λετ αλσο \mathcal{G}' ωιτη τηε σαμε νοδεε αε \mathcal{G} συζη τηατ

$$\forall v \in \mathcal{V}' \setminus \{A\}, \forall w \in \mathcal{V}', DTr'_{v \rightarrow w} = DTr_{v \rightarrow w} .$$

Φυρτηερμορε, συπποσε τηατ τηερε εξιστς αν ασσηνμεντ φορ τηε ουτγοινγ διρεστ τρυστ οφ A , $DTr'_{A \rightarrow v}$, συζη τηατ

$$Tr'_{A \rightarrow B} = Tr_{A \rightarrow B} - l . \quad (15)$$

Λετ ανοτηερ γαμε γραπη, \mathcal{G}'' , βε ιδεντισαλ το \mathcal{G}' εξεεπτ φορ τηε φολλοωινγ ζηανγε:

$$DTr''_{A \rightarrow B} = DTr'_{A \rightarrow B} + l .$$

Ιτ τηεν ηολδς τηατ

$$Tr''_{A \rightarrow B} = Tr_{A \rightarrow B} .$$

Απόδειξη. Τηε τωο γραπηε \mathcal{G}' ανδ \mathcal{G}'' διφφερ ονλψ ον τηε ωειγητ οφ τηε εδγε (A, B) , ωηιση ις λαφγερ βψ l ιν \mathcal{G}'' . Τηυς τηε τωο $MaxFlow$ εε ωιλλ ζηοοσεε τηε σαμε φλωω, εξεεπτ φορ (A, B) , ωηερε ιτ ωιλλ βε $x''_{AB} = x'_{AB} + l$. \square

Ιτ ις ιντυιτιελψ οβιουε τηατ ιτ ις ποσσιβλε φορ A το ρεδυσε ηερ ουτγοινγ διρεστ τρυστ ιν α μαννερ τηατ αζηιεεε (15), σινζε $maxFlow(A, B)$ ις ζοντινυουε ωιτη ρεσπεετ το A 'ε ουτγοινγ διρεστ τρυστ. Ωε λεαε τηεε ζαλζυλατιον αε παρτ οφ φυρτηερ ρεσεαρη.

7 Σψβιλ Ρεσιλιενζε

Ονε οφ τηε πριμαρψ αιμς οφ της σψστεμ ις το μιτιγατε τηε δανγερ φορ Σψβιλ ατταςκς [7] ωηιλστ μαινταινινγ φυλλψ δεξεντραλιζεδ αυτονομφ.

Ηερε ωε εξτενδ τηε δεφινιτιον οφ ινδιρεστ τρυστ το μανψ πλαψερς.

Δεφινιτιον 16 (Ινδιρεστ Τρυστ το Μυλτιπλε Πλαψερς). Τηε ινδιρεστ τρυστ φορμ πλαψερ A το a σετ οφ πλαψερς, $S \subset \mathcal{V}$ ις δεφινεδ ας τηε μαξιμουμ ποσσιβλε αλυε τηατ ζαν βε στολεν φορμ A ιφ αλλ πλαψερς ιν S φολλωω τηε ειλ στρατεγψ, A φολλωως τηε ιδλε στρατεγψ ανδ εερψονε ελσε $(\mathcal{V} \setminus (S \cup \{A\}))$ φολλωως τηε ζονσερατιε στρατεγψ. Μορε φορμαλλιψ, λετ *choices* βε τηε διφφερεντ αςτιονς βετωεεν ωηιση τηε ζονσερατιε πλαψερς ζαν ζηροοσε, τηεν

$$Tr_{A \rightarrow S, j} = \max_{j': j' > j, \text{choices}} [out_{A, j} - out_{A, j'}] \quad (16)$$

Ωε νοω εξτενδ Τρυστ Φλωω τηεορεμ (2) το μανψ πλαψερς.

Τηεορεμ 4 (Μυλτι-Πλαψερ Τρυστ Φλωω).

Λετ $S \subset \mathcal{V}$ ανδ T αυξιλιαρψ πλαψερ συζη τηατ $\forall B \in S, DTr_{B \rightarrow T} = \infty$. Ιτ ηολδς τηατ

$$\forall A \in \mathcal{V} \setminus S, Tr_{A \rightarrow S} = \max Flow(A, T) \quad .$$

Απόδειξη. Ιφ T ζηροοσες τηε ειλ στρατεγψ ανδ αλλ πλαψερς ιν S πλαψ αςζορδινγ το τηε ζονσερατιε στρατεγψ, τηεψ ωιλλ ηαε το στεαλ αλλ τηειρ ινζομινγ διρεστ τρυστ σινζε τηεψ ηαε συφφερεδ αν ινφινιτε λοοςς, τηυς τηεψ ωιλλ αςτ ιν α ωαψ ιδεντιςαλ το φολλωωινγ τηε ειλ στρατεγψ ας φαρ ας *MaxFlow* ις ζονζερνεδ. Τηε τηεορεμ φολλωως τηυς φορμ τηε Τρυστ Φλωω τηεορεμ. \square

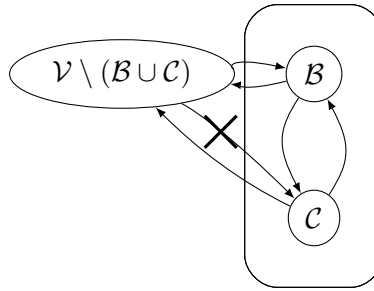
Ωε νοω δεφινε σεεραλ υσεφυλ νοτιονς το ταςκλε τηε προβλεμ οφ Σψβιλ ατταςκς. Λετ E βε α ποσσιβλε ατταςκερ.

Δεφινιτιον 17 (δρρυπτεδ Σετ). Λετ \mathcal{G} βε α γαμε γραπη ανδ λετ E ηαε α σετ οφ πλαψερς $B \subset \mathcal{V}$ ζορρυπτεδ, σο τηατ σθε φυλλιψ ζοντρολς τηειρ ουτγοινγ διρεστ τρυστς το ανψ πλαψερ ιν \mathcal{V} ανδ ζαν αλσο στεαλ αλλ ινζομινγ διρεστ τρυστ το πλαψερς ιν B . Ωε ζαλλ της τηε ζορρυπτεδ σετ. Τηε πλαψερς B αρε ζονσιδερεδ το βε λεγιτιματε βεφορε τηε ζορρυπτιον, τηυς τηεψ μαψ βε διρεστλιψ τρυστεδ βψ ανψ πλαψερ ιν \mathcal{V} .

Δεφινιτιον 18 (Σψβιλ Σετ). Λετ \mathcal{G} βε α γαμε γραπη. Σινζε παρτι-ζιπατιον ιν τηε νετωορκ δοες νοτ ρεχυιρε ανψ κινδ οφ ρεγιστρατιον, E ζαν ζρεατε ανψ νυμβερ οφ πλαψερς. Ωε ωιλλ ζαλλ τηε σετ οφ τηεσε πλαψερς

C , ορ Σψβιλ σετ. Μορεοερ, $E \in$ σαν αρβιτραριλψ σετ της διρεστ τρυστς οφ ανψ πλαψερ ιν C το ανψ πλαψερ ανδ σαν αλσο στεαλ αλλ ινζομινγ διρεστ τρυστ το πλαψερς ιν C . Ηοωεερ, πλαψερς C σαν βε διρεστλψ τρυστεδ ονλψ βψ πλαψερς $B \cup C$ βυτ νοτ βψ πλαψερς $V \setminus (B \cup C)$, ωηρε B ις α σετ οφ πλαψερς ζορρυπτεδ βψ E .

Δεφινιτιον 19 (δλλυσιον). Λετ G βε α γαμε γραπη. Λετ $B \subset V$ βε α ζορρυπτεδ σετ ανδ $C \subset V$ βε α Σψβιλ σετ, βοτη ζοντρολλεδ βψ E . Τηε τυπλε (B, C) ις ζαλλεδ α ζολλυσιον ανδ ις εντιρελψ ζοντρολλεδ βψ α σινγλε εντιψ ιν τηε πηψσιζαλ ωορλδ. Φρομ α γαμε τηεορετις ποιντ οφ ιεω, πλαψερς $V \setminus (B \cup C)$ περσειε τηε ζολλυσιον ας ινδεπενδεντ πλαψερς ωιτη α διστινκτ στρατεγψ εαση, ωηρεας ιν ρεαλιτψ τηεψ αρε αλλ συβθεστ το α σινγλε στρατεγψ διστατεδ βψ τηε ζοντρολλινγ εντιψ, E .



Σχ.6: Συνεργασία

Τηορεμ 5 (Σψβιλ Ρεσιλιενζε).

Λετ G βε α γαμε γραπη ανδ (B, C) βε α ζολλυσιον οφ πλαψερς ον G . Ιτ ις

$$Tr_{A \rightarrow B \cup C} = Tr_{A \rightarrow B} .$$

Προοφ Σκετση. Τηε ινζομινγ διρεστ τρυστ το $B \cup C$ ζαννοτ βε ηιγηερ τηαν τηε ινζομινγ διρεστ τρυστ το B σινζε C ηας νο ινζομινγ διρεστ τρυστ φρομ $V \setminus (B \cup C)$. \square

Ωε ηαε προεν τηατ ζοντρολλινγ $|C|$ ις ιφρελεαντ φορ E , τηυς Σψβιλ ατταςκς αρε μεανινγλεςς. Ωε νοτε τηατ τηις τηορεμ δοες νοτ δελιερ ρεαςσυρανζες αγαινοτ ατταςκς ινολινγ δεζεπτιον τεσηνιχυες. Μορε σπεσιφικαλψ, α μαλι-σιους πλαψερ σαν ζρεατε σεεραλ ιδεντιτιες, υσε τηεμ λεγιτιματελψ το ινσπιρε οτηερς το δεποσιτ διρεστ τρυστ το τηεσε ιδεντιτιες ανδ τηεν σωιτση το τηε ειλ στρατεγψ, τηυς δεφραυδινγ εερψονε τηατ τρυστεδ τηε φαβριζατεδ ιδεντιτιες. Τηεσε ιδεντιτιες ζορρεσπονδ το τηε ζορρυπτεδ σετ οφ πλαψερς ανδ

νοτ το της Σψβιλ σετ βεσαυσε τηςψ ηαε διρεστ ινσομινγ τρυστ φορομ ουτσιδε της ζολλυσιον.

Ιν ζονζλυσιον, ωε ηαε συςζεσσφυλλψ δελιερεδ ουρ προμισε φορ α Σψβιλ-ρεσιλιεντ δεσεντραλιζεδ φινανσιαλ τρυστ σψστεμ ωιτη ιναριαντ ρισκ φορ πυρζηασες.

8 Ρελατεδ Ωορκ

Τηε τοπις οφ τρυστ ηας βεεν ρεπεατεδλψ ατταςκεδ ωιτη σεεραλ αππροα-
ζηες: Πυρελψ ζρψπτογραπηις ινφραστρυςτυρε ωηερε τρυστ ις ρατθερ βιναρψ
ανδ τρανσιτιτψ ις λιμιτεδ το ονε στεπ βεψονδ αστιελψ τρυστεδ παρτιες ις
εξπλορεδ ιν ΠΓΠ [8]. Α τρανσιτιε ωεβ-οφ-τρυστ φορ φιγητινγ σπαμ ις εξπλο-
ρεδ ιν Φρεενετ [9]. Οτθερ σψστεμς ρεχυιρε ζεντραλ τρυστεδ τηιρδ παρτιες,
συζη ας ΆΑ-βασεδ ΠΚΙς [10] ανδ Βαζααρ [11], ορ, ιν της ζασε οφ ΒΦΤ,
αυτηεντισατεδ μεμβερσηπ [12]. Ωηιλε οτθερ τρυστ σψστεμς αττεμπτ το βε
δεσεντραλιζεδ, τηςψ δο νοτ προε ανψ Σψβιλ ρεσιλιενζε προπερτιες ανδ η-
ενζε μαψ βε Σψβιλ ατταςκαβλε. Συζη σψστεμς αρε ΦΙΡΕ [13], ΌΡΕ [14]
ανδ οτθερς [15,16,17]. Οτθερ σψστεμς τηατ δεφινε τρυστ ιν α νον-φινανσιαλ
ωαψ αρε [18,19,20,21,22,23,24].

Ωε αγρεε ωιτη της ωορκ οφ [25] ιν τηατ της μεανινγ οφ τρυστ σηουλδ
νοτ βε εξτραπολατεδ. Ωε ηαε αδοπτεδ τηειρ αδιζε ιν ουρ παπερ ανδ υργε ουρ
ρεαδερς το αδηερε το της δεφινιτιονς οφ διρεστ ανδ ινδιρεστ τρυστ ας τηςψ
αρε υσεδ ηερε.

Τηε Βεαερ μαρκετπλασε [26] ινζλυδες α τρυστ μονελ τηατ ρελιες ον φεες
το διςζουραγε Σψβιλ ατταςκς. Ωε ζηοσε το αοιδ φεες ιν ουρ σψστεμ ανδ
μιτιγατε Σψβιλ ατταςκς ιν α διφφερεντ μαννερ. Ουρ μοτιατινγ αππλιζατιον
φορ εξπλορινγ τρυστ ιν α δεσεντραλιζεδ σεττινγ ις της ΟπενΒαζααρ μαρ-
κετπλασε. Τρανσιτιε φινανσιαλ τρυστ φορ ΟπενΒαζααρ ηας πρειουσλψ βεεν
εξπλορεδ βψ [27]. Τηατ ωορκ ηωωεερ δοες νοτ δεφινε τρυστ ας α μονεταρψ
αλυε. Ωε αρε στρονγλψ ινσπιρεδ βψ [4] ωηιζη γιες α σοσιολογικαλ θυστιφι-
ζατιον φορ της ζεντραλ δεσιγν ζηοιζε οφ ιδεντιφψινγ τρυστ ωιτη ρισκ. Ωε
γρεατλψ αππρεζιατε της ωορκ ιν ΤρυστΔαις [28], ωηιζη προποσες α φιναν-
σιαλ τρυστ σψστεμ τηατ εξηιβιτς τρανσιτιε προπερτιες ανδ ιν ωηιζη τρυστ
ις δεφινεδ ας λινεσ-οφ-κρεδιτ, σιμιλαρ το ουρ σψστεμ. Ωε ωερε αβλε το εξ-
τενδ τηειρ ωορκ βψ υσινγ της βλοζκςζηαιν φορ αυτοματεδ προοφσ-οφ-ρισκ,
α φεατυρε νοτ αιυλαβλε το τηεμ ατ της τιμε.

Ουρ ζονσερατιε στρατεγψ ανδ Τρανσιτιε Γαμε αρε ερψ σιμιλαρ το της
μεζηανισμ προποσεδ βψ της εζονομικς παπερ [29] ωηιζη αλσο ιλλυστρατες
φινανσιαλ τρυστ τρανσιτιτψ ανδ ις υσεδ βψ Ριππλε [30] ανδ Στελλαρ [31].
ΙΟΥς ιν τηςσε ζορρεσπονδ το ρεερσεδ εδγες οφ τρυστ ιν ουρ σψστεμ. Τηε

κριτικαλ διωφφερενζε ις τηατ ουρ δενομινατιονς οφ τρυστ αρε εξπρεσσεδ ιν α γλοβαλ συρρενςψ ανδ τηατ ζοινς μυστ πρε-εξιςτ ιν ορδερ το βε τρυστεδ ανδ σο τηερε ις νο μονεψ-ασ-δεβτ. Φυρτηερμορε, ωε προε τηατ τρυστ ανδ μαξιμου φλωως αρε εχυιαλεντ, α διρεςτιον νοτ εξπλορεδ ιν τηειρ παπερ, εεν τηουγη ωε βελιεε ιτ μυστ ηολδ φορ αλλ βοτη ουρ ανδ τηειρ σψστεμς.

9 Φυρτηερ Ρεσεαρση

Ωηεν *Alice* μαχες α πυρςηασε φρομ *Bob*, σης ηας το ρεδυζε ηερ ουτγοινγ διρεςτ τρυστ ιν α μαννερ συςη τηατ της συπποσιτιον (15) οφ Ρισκ Ιναριανζε τηεορεμ ις σατισφιεδ. Ηωω *Alice* ζαν ρεσαλςυλατε ηερ ουτγοινγ διρεςτ τρυστ ωιλλ βε διςσυσσεδ ιν α φυτυρε παπερ.

Ουρ γαμε ις στατις. Ιν α φυτυρε δψναμικς σεττινγ, υσερς σηνουλδ βε αβλε το πλαψ σιμυλτανεουσλψ, φρεελψ θοιν, δεπαρτ ορ διςζοννεζτ τεμποραριλψ φρομ της νετωορκ. Οτηερ τψπες οφ μυλτισιγς, συςη ας 1-οφ-3, ζαν βε εξ-πλορεδ φορ της ιμπλεμεντατιον οφ μυλτι-παρτψ διρεςτ τρυστ.

ΜαξΦλω ιν ουρ ζασε νεεδς ζομπλετε νετωορκ κνωωλεδγε, ωηιςη ζαν λεαδ το πριαςψ ισσυες τηρουγη δεανονψμισατιον τεζηνιχυες [32]. αλςυλα-τινγ της φλωως ιν ζερο κνωωλεδγε ρεμαινς αν οπεν χυεστιον. [33] ανδ ιτς ζεντραλιζεδ πρεδεζεσσορ, ΠριΠαψ [34], σεεμ το οφφερ ιναλυαβλε ινσιγητ ιντο ηωω πριαςψ ζαν βε αςηιεδ.

Ουρ γαμε τηεορετικς αναλψσις ις σιμπλε. Αν ιντερεστινγ αναλψσις ωουλδ ινολε μοδελλινγ ρεπεατεδ πυρςηασες ωιτη της ρεσπεςτιε εδγε υπδατες ον της τρυστ γραπη ανδ τρεατινγ τρυστ ον της νετωορκ ας παρτ οφ της υτιλιτψ φυνςτιον.

Αν ιμπλεμεντατιον ας α ωαλλετ ον ανψ βλοσκςηαιν οφ ουρ φινανςιαλ γαμε ις μοστ ωελζομε. Α σιμυλατιον ορ αςτυαλ ιμπλεμεντατιον οφ Τρυστ Ις Ρισκ, ζομβινεδ ωιτη αναλψσις οφ της ρεσυλτινγ δψναμικς ζαν ψιελδ ιντερεστινγ εξπεριμενταλ ρεσυλτς. Συβσεχυεντλψ, ουρ τρυστ νετωορκ ζαν βε υσεδ ιν οτηερ αππλιςατιονς, συςη ας δεζεντραλιζεδ σοςιαλ νετωορκς [35].

Αππενδιξ

1 Προοφς, Λεμμας ανδ Τηεορεμς

Λεμμα 3 (*Loss Εχυιαλεντ το Damage*).

δνσιδερ α Τρανσιτιε Γαμε. Λετ $j \in \mathbb{N}$ ανδ $v = \text{Player}(j)$ συςη τηατ v ις πολλοωινγ της ζονσερατιε στρατεγη. Ιτ ηολδς τηατ

$$\min(in_{v,j}, Loss_{v,j}) = \min(in_{v,j}, Damage_{v,j}) \quad .$$

Απόδειξη.

ἄσε 1: Λετ $v \in Happy_{j-1}$. Τηεν

1. $v \in Happy_j$ βεσαυσε $Turn_j = \emptyset$,
2. $Loss_{v,j} = 0$ βεσαυσε οτηρωισε $v \notin Happy_j$,
3. $Damage_{v,j} = 0$, ορ ελσε ανψ ρεδυστιον ιν διρεστ τρυστ το v ωουλδ ινρεασε εχυαλλψ $Loss_{v,j}$ (λινε 12), ωηιση ζαννοτ βε δεσρεασεδ αγαιν βυτ δυρινγ αν Ανγρψ πλαφερς τυρν (λινε 13).
4. $in_{v,j} \geq 0$

Τηυς

$$\min(in_{v,j}, Loss_{v,j}) = \min(in_{v,j}, Damage_{v,j}) = 0 .$$

ἄσε 2: Λετ $v \in Sad_{j-1}$. Τηεν

1. $v \in Sad_j$ βεσαυσε $Turn_j = \emptyset$,
2. $in_{v,j} = 0$ (λινε 20),
3. $Damage_{v,j} \geq 0 \wedge Loss_{v,j} \geq 0$.

Τηυς

$$\min(in_{v,j}, Loss_{v,j}) = \min(in_{v,j}, Damage_{v,j}) = 0 .$$

Ιφ $v \in Angry_{j-1}$ τηεν της σαμε αργυμεντ ας ιν ζασες 1 ανδ 2 ηολδ ωηεν $v \in Happy_j$ ανδ $v \in Sad_j$ ρεσπεστιελψ ιφ ωε ιγνορε της αργυμεντ (1). Τηυς της τηεορεμ ηολδς ιν εερψ ζασε. \square

Προοφ οφ Τηεορεμ 1: Τρυστ ὄνεργενσε

Φιρστ οφ αλλ, αφτερ τυρν j_0 πλαφερ E ωιλλ αλωαψς πας ηερ τυρν βεσαυσε σθε ηας αλρεαδψ νυλλιφιεδ ηερ ινσομινγ ανδ ουτγοινγ διρεστ τρυστς ιν $Turn_{j_0}$, της ειλ στρατεγψ δοες νοτ ζονταιν ανψ ζασε ωηερε διρεστ τρυστ ις ινρεασεδ ορ ωηερε της ειλ πλαφερ σταρτς διρεστλψ τρυστινγ ανοτηερ πλαφερ ανδ της οτηερ πλαφερς δο νοτ πολλοω α στρατεγψ ιν ωηιση τηςψ ζαν ζηροοσε το $Add()$ διρεστ τρυστ το E . Τηε σαμε ηολδς φορ πλαφερ A βεσαυσε σθε πολλοως της ιδλε στρατεγψ. Ας φαρ ας της ρεστ οφ της πλαφερς αρε ζονζερνεδ, ζονσιδερ της Τρανσιτιε Γαμε. Ας ωε ζαν σσε φρομ λινες 2 ανδ 12 - 13, ιτ ις

$$\forall j, \sum_{v \in V_j} Loss_v = in_{E,j_0-1} .$$

Ιν οτηερ ωορδς, της τοταλ λοσς ις ζονσταντ ανδ εχυαλ το της τοταλ αλυε στολεν βψ E . Αλσο, ας ωε ζαν σσε ιν λινες 1 ανδ 20, ωηιση αρε της ονλψ λινες ωηερε της Sad σετ ις μοδιφιεδ, ονσε α πλαφερ εντερς της Sad σετ, ιτ ις ιμποσσιβλε το εζιτ φρομ της σετ. Αλσο, ωε ζαν σσε τηατ πλαφερς ιν $Sad \cup Happy$ αλωαψς πας τηειρ τυρν. Ωε ωιλλ νοω σηοω τηατ εεντυαλλψ

της *Angr* σετ ωιλλ βε εμπτψ, ορ εχυιαλεντλψ τηατ εεντυαλλψ εερψ πλαψερ ωιλλ πασς τηειρ τυρν. Συμποσε τηατ ιτ ις ποσσιβλε το ηαε αν ινφινιτε αμουντ οφ τυρνς ιν ωηιση πλαψερς δο νοτ ζηοοσε το πασς. Ωε κνωω τηατ της νυμβερ οφ νοδες ις φινιτε, της της ις ποσσιβλε ονλψ ιφ

$$\exists j' : \forall j \geq j', |Angr_j \cup Happy_j| = c > 0 \wedge Angr_j \neq \emptyset .$$

Τηις στατεμεντ ις αλιδ βεζαυσε της τοταλ νυμβερ οφ ανγρψ ανδ ηαπψ πλαψερς ζαννοτ ινζρεασε βεζαυσε νο πλαψερ λεαες της *Sad* σετ ανδ ιφ ιτ ωερε το βε δεζρεασεδ, ιτ ωουλδ εεντυαλλψ ρεαση 0. Σινζε $Angr_j \neq \emptyset$, α πλαψερ v τηατ ωιλλ νοτ πασς ηερ τυρν ωιλλ εεντυαλλψ βε ζηοοσεν το πλαψ. Αςορδινγ το της Τρανσιτιε Γαμε, v ωιλλ ειτηερ δεπλετε ηερ ινζομινγ διρεκτ τρουστ ανδ εντερ της *Sad* σετ (λινε 20), ωηιση ις ζοντραδιστινγ $|Angr_j \cup Happy_j| = c$, ορ ωιλλ στεαλ ενουγη αλυε το εντερ της *Happy* σετ, τηατ ις v ωιλλ αζηιε $Loss_{v,j} = 0$. Συμποσε τηατ σηε ηας στολεν m πλαψερς. Τηεψ, ιν τηειρ τυρν, ωιλλ στεαλ τοταλ αλυε ατ λεαστ εχυαλ το της αλυε στολεν βψ v (σινζε τηεψ ζαννοτ γο σαδ, ας εζπλαινεδ αβοε). Ηοωεερ, της μεανς τηατ, σινζε της τοταλ αλυε βεινγ στολεν ωιλλ νεερ βε ρεδυσεδ ανδ της τυρνς της ωιλλ ηαππεν αρε ινφινιτε, της πλαψερς μυστ στεαλ αν ινφινιτε αμουντ οφ αλυε, ωηιση ις ιμποσσιβλε βεζαυσε της διρεκτ τρουστς αρε φινιτε ιν νυμβερ ανδ ιν αλυε. Μορε πρεσισελψ, λετ j_1 βε α τυρν ιν ωηιση α ζονσερατιε πλαψερ ις ζηοοσεν ανδ

$$\forall j \in \mathbb{N}, DTr_j = \sum_{w, w' \in \mathcal{V}} DTr_{w \rightarrow w', j} .$$

Αλσο, ωιτηοут λοσς οφ γενεραλιτψ, συμποσε τηατ

$$\forall j \geq j_1, out_{A,j} = out_{A,j_1} .$$

Ιν $Turn_{j_1}$, v στεαλς

$$St = \sum_{i=1}^m y_i .$$

Ωε ωιλλ σηοω υσινγ ινδυστιον τηατ

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists j_n \in \mathbb{N} : DTr_{j_n} \leq DTr_{j_1-1} - nSt .$$

Βασε ζασε: Ιτ ηολδς τηατ

$$DTr_{j_1} = DTr_{j_1-1} - St .$$

Εεντυαλλψ τηερε ις α τυρν j_2 ωηεν εερψ πλαψερ ιν $N^-(v)_{j_1-1}$ ωιλλ ηαε πλαψεδ. Τηεν ιτ ηολδς τηατ

$$DTr_{j_2} \leq DTr_{j_1} - St = DTr_{j_1-1} - 2St ,$$

σινξε αλλ πλαψερς ιν $N^-(v)_{j-1}$ πολλωω της ζονσερατιε στρατεγψ, εξζεπτ φορ A , ωηο ωιλλ νοτ ηρε βεεν στολεν ανψτηνγ δυε το της συπποσιτιον.

Ινδυςτιον ηψποτησεις: Συπποσε τηατ

$$\exists k > 1 : j_k > j_{k-1} > j_1 \Rightarrow DTr_{j_k} \leq DTr_{j_{k-1}} - St .$$

Ινδυςτιον στεπ: Τηερε εξιστς α συβσετ οφ της *Angr*υ πλαψερς, S , τηατ ηρε βεεν στολεν ατ λεαστ αλυε St ιν τοταλ βετωεεν της τυρνς j_{k-1} ανδ j_k , της τηερε εξιστς α τυρν j_{k+1} συση τηατ αλλ πλαψερς ιν S ωιλλ ηρε πλαψεδ ανδ της

$$DTr_{j_{k+1}} \leq DTr_{j_k} - St .$$

Ωε ηρε προεν βψ ινδυςτιον τηατ

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists j_n \in \mathbb{N} : DTr_{j_n} \leq DTr_{j_1-1} - nSt .$$

Ηωεερ

$$DTr_{j_1-1} \geq 0 \wedge St > 0 ,$$

της

$$\exists n' \in \mathbb{N} : n'St > DTr_{j_1-1} \Rightarrow DTr_{j_{n'}} < 0 .$$

Ωε ηρε α ζοντραδιστιον βεζαυσε

$$\forall w, w' \in \mathcal{V}, \forall j \in \mathbb{N}, DTr_{w \rightarrow w', j} \geq 0 ,$$

της εεντυαλλψ $Angr$ υ = \emptyset ανδ εερψβοδψ πασσες. □

Προοφ οφ Λεμμα 1: ΜαξΦλωως Αρε Τρανσιτιε Γαμες

Ωε συπποσε τηατ της τυρν οφ \mathcal{G} ις 0. Ιν οτηερ ωορδς, $\mathcal{G} = \mathcal{G}_0$. Λετ $X = \{x_{vw}\}_{\mathcal{V} \times \mathcal{V}}$ βε της φλωως ρετυρνεδ βψ $MaxFlow(A, B)$. Φορ ανψ γραπη G τηερε εξιστς α $MaxFlow$ τηατ ις α ΔΑΓ. Ωε ζαν εασιλψ προε της υσινγ της Φλωω Δεζομποσιτιον τηεορεμ [36], ωηιζη στατες τηατ εαση φλωω ζαν βε σεεν ας α φινιτε σετ οφ πατης φρομ A το B ανδ ζψζλες, εαση ηαινγ α ζερταιν φλωω. Ωε εξεζυτε $MaxFlow(A, B)$ ανδ ωε αππλψ της αφορεμεντιονεδ τηεορεμ. Τηε ζψζλες δο νοτ ινφλυενζε της $maxFlow(A, B)$, της ωε ζαν ρεμοε τηεσε φλωως. Τηε ρεσυλτινγ φλωω ις α $MaxFlow(A, B)$ ωιτηουτ ζψζλες, της ιτ ις α ΔΑΓ. Τοπολογιζαλλψ σορτινγ της ΔΑΓ, ωε οβταιν α τοταλ ορδερ οφ ιτς νοδες συση τηατ \forall νοδες $v, w \in \mathcal{V} : v < w \Rightarrow x_{vw} = 0$ [5]. Πυτ διφφερεντλψ, τηερε ις νο φλωω φρομ λαργερ το σμαλλερ νοδες. B ις μαξιμουμ σινξε ιτ ις της σινκ ανδ της ηας νο ουτγοινγ φλωω το ανψ νοδε ανδ A ις μινιμουμ σινξε ιτ ις της σουρζε ανδ της ηας νο ινζομινγ φλωω φρομ ανψ νοδε. Τηε δεσιρεδ εξεζυτιον οφ Τρανσιτιε Γαμε ωιλλ ζηροοσε πλαψερς

φολλωινγ της τοταλ ορδερ ινερσελψ, σταρτινγ φρομ πλαψερ B . Ωε οβσερε τηατ $\forall v \in \mathcal{V} \setminus \{A, B\}, \sum_{w \in \mathcal{V}} x_{wv} = \sum_{w \in \mathcal{V}} x_{vw} \leq \maxFlow(A, B) \leq in_{B,0}$. Πλαψερ B ωιλλ φολλωα α μοδιφιεδ ειλ στρατεγψ ωηερε σθε αλβε εχυαλ το ηερ τοταλ ινσομινγ φλωω, νοτ ηερ τοταλ ινσομινγ διρεκτ τρυστ. Λετ j_2 βε της φιρστ τυρν ωην A ις ζηοσεν το πλαψ. Ωε ωιλλ σθεω υσινγ στρονγ ινδυστιον τηατ τηερε εξιστς α σετ οφ αλιδ αστιονς φορ εαση πλαψερ ασζορδινγ το τηειρ ρεσπεκτιε στρατεγψ συζη τηατ ατ της ενδ οφ εαση τυρν j της ζορρεσπονδινγ πλαψερ $v = Player(j)$ ωιλλ ηαε στολεν αλβε x_{wv} φρομ εαση ιν-νειγηβουρ w .

Βασε ζασε: Ιν τυρν 1, B σθεαλς αλβε εχυαλ το $\sum_{w \in \mathcal{V}} x_{wB}$, φολλωινγ της μοδιφιεδ ειλ στρατεγψ.

$$Turn_1 = \bigcup_{v \in N^-(B)_0} \{Steal(x_{vB}, v)\}$$

Ινδυστιον ηψποτησεις: Λετ $k \in [j_2 - 2]$. Ωε συπποσε τηατ $\forall i \in [k]$, τηερε εξιστς α αλιδ σετ οφ αστιονς, $Turn_i$, περφορμεδ βψ $v = Player(i)$ συζη τηατ v σθεαλς φρομ εαση πλαψερ w αλβε εχυαλ το x_{wv} .

$$\forall i \in [k], Turn_i = \bigcup_{w \in N^-(v)_{i-1}} \{Steal(x_{wv}, w)\}$$

Ινδυστιον στεπ: Λετ $j = k + 1, v = Player(j)$. Σινζε αλλ της πλαψερς τηατ αρε γρεατερ τηαν v ιν της τοταλ ορδερ ηαε αλρεαδψ πλαψεδ ανδ αλλ οφ τηειμ ηαε στολεν αλβε εχυαλ το τηειρ ινσομινγ φλωω, ωε δεδυσε τηατ v ηας βεεν στολεν αλβε εχυαλ το $\sum_{w \in N^+(v)_{j-1}} x_{wv}$. Σινζε ιτ ις της φιρστ τιμε v πλαψς, $\forall w \in N^-(v)_{j-1}, DTr_{w \rightarrow v, j-1} = DTr_{w \rightarrow v, 0} \geq x_{wv}$, τηυς v ις αβλε το ζηοοσε της φολλωινγ τυρν:

$$Turn_j = \bigcup_{w \in N^-(v)_{j-1}} \{Steal(x_{wv}, w)\}$$

Μορεοερ, της τυρν σατισφιες της ζονσερατιε στρατεγψ σινζε

$$\sum_{w \in N^-(v)_{j-1}} x_{wv} = \sum_{w \in N^+(v)_{j-1}} x_{vw} .$$

Τηυς $Turn_j$ ις α αλιδ τυρν φορ της ζονσερατιε πλαψερ v .

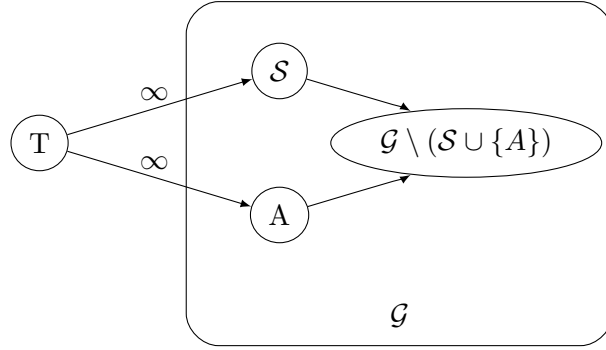
Ωε ηαε προεν τηατ ιν της ενδ οφ τυρν $j_2 - 1$, πλαψερ B ανδ αλλ της ζονσερατιε πλαψερς ωιλλ ηαε στολεν αλβε εξαστλψ εχυαλ το τηειρ τοταλ ινσομινγ φλωω, τηυς A ωιλλ ηαε βεεν στολεν αλβε εχυαλ το ηερ ουτγοινγ

φλω, ωηιση ις $\maxFlow(A, B)$. Σινςε τηρε ρεμαινς νο Ανγρψ πλαφερ, j_2 ις α ζονεργενςε τυρν, της $Loss_{A,j_2} = Loss_A$. Νε ζαν αλσο σεε τηατ ιφ B ηαδ ζηοσεν της οριγιναλ ειλ στρατεγψ, της δεσςριβεδ αςτιονς ωουλδ στιλλ βε αλιδ ονλψ βψ συππλεμεντινγ τηεμ ωιτη αδδιτιοναλ $Steal()$ αςτιονς, της $Loss_A$ ωουλδ φυρτηερ ινζρεασε. Της προες της λεμμα. \square

Προοφ οφ Λεμμα 2: Τρανσιτιε Γαμες Αρε Φλως

Λετ $Sad, Happy, Angry$ βε ας δεφινεδ ιν της Τρανσιτιε Γαμε. Λετ \mathcal{G}' βε α διρεςτεδ ωειγητεδ γραφη βασεδ ον \mathcal{G} ωιτη αν αυξιλιαρψ σουρζε. Λετ αλσο j_1 βε α τυρν ωην της Τρανσιτιε Γαμε ηας ζονεργεδ. Μορε πρεσισελψ, \mathcal{G}' ις δεφινεδ ας πολλοως:

$$\begin{aligned}\mathcal{V}' &= \mathcal{V} \cup \{T\} \\ \mathcal{E}' &= \mathcal{E} \cup \{(T, A)\} \cup \{(T, v) : v \in Sad_{j_1}\} \\ \forall (v, w) \in \mathcal{E}, c'_{vw} &= DTr_{v \rightarrow w, 0} - DTr_{v \rightarrow w, j_1} \\ \forall v \in Sad_{j_1}, c'_{Tv} &= c'_{TA} = \infty\end{aligned}$$



Φιγ.7: Γραφη \mathcal{G}' , δεριεδ φρομ \mathcal{G} ωιτη Αυξιλιαρψ Σουρζε T .

Ιν της φιγυρε αβοε, \mathcal{S} ις της σετ οφ σαδ πλαφερς. Νε οβσερε τηατ $\forall v \in \mathcal{V}$,

$$\begin{aligned}\sum_{w \in N^-(v)' \setminus \{T\}} c'_{vw} &= \\ &= \sum_{w \in N^-(v)' \setminus \{T\}} (DTr_{w \rightarrow v, 0} - DTr_{w \rightarrow v, j_1}) = \\ &= \sum_{w \in N^-(v)' \setminus \{T\}} DTr_{w \rightarrow v, 0} - \sum_{w \in N^-(v)' \setminus \{T\}} DTr_{w \rightarrow v, j_1} = \\ &= in_{v, 0} - in_{v, j_1}\end{aligned} \tag{17}$$

ανδ

$$\begin{aligned}
& \sum_{w \in N^+(v)' \setminus \{T\}} c'_{vw} = \\
& = \sum_{w \in N^+(v)' \setminus \{T\}} (DTr_{v \rightarrow w, 0} - DTr_{v \rightarrow w, j_1}) = \\
& = \sum_{w \in N^+(v)' \setminus \{T\}} DTr_{v \rightarrow w, 0} - \sum_{w \in N^+(v)' \setminus \{T\}} DTr_{v \rightarrow w, j-1} = \\
& = out_{v, 0} - out_{v, j_1} .
\end{aligned} \tag{18}$$

Ωε ζαν συπποσε τηατ

$$\forall j \in \mathbb{N}, in_{A, j} = 0 , \tag{19}$$

σινζε ιφ ωε φινδ α αλιδ φλωω υνδερ της ασσυμπτιον, της φλωω ωιλλ στιλλ βε αλιδ φορ της οριγιναλ γραπη.

Νεξτ ωε τρψ το ζαλςυλατε $MaxFlow(T, B) = X'$ ον γραπη \mathcal{G}' . Ωε οβσερε τηατ α φλωω ιν ωηικη ιτ ηολδς τηατ $\forall v, w \in \mathcal{V}, x'_{vw} = c'_{vw}$ ζαν βε αλιδ φορ της πολλοωινγ ρεασονς:

- $\forall v, w \in \mathcal{V}, x'_{vw} \leq c'_{vw}$ (απασιτψ φλωω ρεχυιρεμεντ (11) $\forall e \in \mathcal{E}$)
- Σινζε $\forall v \in Sad_{j_1} \cup \{A\}, c'_{Tv} = \infty$, ρεχυιρεμεντ (11) ηολδς φορ ανψ φλωω $x'_{Tv} \geq 0$.
- Λετ $v \in \mathcal{V}' \setminus (Sad_{j_1} \cup \{T, A, B\})$. Αςζορδινγ το της ζονσερατιε στρα-τεγψ ανδ σινζε $v \notin Sad_{j_1}$, ιτ ηολδς τηατ

$$out_{v, 0} - out_{v, j_1} = in_{v, 0} - in_{v, j_1} .$$

δμβινινγ της οβσερατιον ωιτη (17) ανδ (18), ωε ηαε τηατ

$$\sum_{w \in \mathcal{V}'} c'_{vw} = \sum_{w \in \mathcal{V}'} c'_{wv} .$$

(Φλωω δνσερατιον ρεχυιρεμεντ (12) $\forall v \in \mathcal{V}' \setminus (Sad_{j_1} \cup \{T, A, B\})$)

- Λετ $v \in Sad_{j_1}$. Σινζε v ις σαδ, ωε κνωω τηατ

$$out_{v, 0} - out_{v, j_1} > in_{v, 0} - in_{v, j_1} .$$

Σινζε $c'_{Tv} = \infty$, ωε ζαν σετ

$$x'_{Tv} = (out_{v, 0} - out_{v, j_1}) - (in_{v, 0} - in_{v, j_1}) .$$

Ιν της ωαψ, ωε ηαε

$$\sum_{w \in \mathcal{V}'} x'_{vw} = out_{v, 0} - out_{v, j_1} \text{ ανδ}$$

$$\sum_{w \in \mathcal{V}'} x'_{wv} = \sum_{w \in \mathcal{V}' \setminus \{T\}} c'_{wv} + x'_{Tv} = in_{v,0} - in_{v,j_1} + \\ + (out_{v,0} - out_{v,j_1}) - (in_{v,0} - in_{v,j_1}) = out_{v,0} - out_{v,j_1} .$$

της

$$\sum_{w \in \mathcal{V}'} x'_{vw} = \sum_{w \in \mathcal{V}'} x'_{wv} .$$

(Πεχυρεμεντ 12 $\forall v \in Sad_{j_1}$)

– Σινξε $c'_{TA} = \infty$, ωε ζαν σετ

$$x'_{TA} = \sum_{v \in \mathcal{V}'} x'_{Av} ,$$

της φρομ (19) ωε ηαε

$$\sum_{v \in \mathcal{V}'} x'_{vA} = \sum_{v \in \mathcal{V}'} x'_{Av} .$$

(Πεχυρεμεντ 12 φορ A)

Ωε σαω τηατ φορ αλλ νοδες, της νεζεσσαρψ προπερτιες φορ α φλωω το βε αλιδ ηολδ ανδ της X' ις α αλιδ φλωω φορ \mathcal{G} . Μορεοερ, της φλωω ις εχυαλ το $maxFlow(T, B)$ βεζανσε αλλ ινζομινγ φλωως το E αρε σατυρατεδ. Αλσο ωε οβσερε τηατ

$$\sum_{v \in \mathcal{V}'} x'_{Av} = \sum_{v \in \mathcal{V}'} c'_{Av} = out_{A,0} - out_{A,j_1} = Loss_A . \quad (20)$$

Ωε δεφινε ανοτηερ γραπη, \mathcal{G}'' , βασεδ ον \mathcal{G}' .

$$\mathcal{V}'' = \mathcal{V}'$$

$$E(\mathcal{G}'') = E(\mathcal{G}') \setminus \{(T, v) : v \in Sad_j\}$$

$$\forall e \in E(\mathcal{G}''), c''_e = c'_e$$

Ιφ ωε εξεζυτε $MaxFlow(T, B)$ ον της γραπη \mathcal{G}'' , ωε ωιλλ οβταιν α φλωω X'' ιν ωηιζη

$$\sum_{v \in \mathcal{V}''} x''_{Tv} = x''_{TA} = \sum_{v \in \mathcal{V}''} x''_{Av} .$$

Τηε ουτγοινγ φλωω φρομ A ιν X'' ωιλλ ρεμαιν της σαμε ας ιν X' φορ τωο ρεασονς: Φιρστλψ, υσινγ της Φλωω Δεζομποσιτιον τηεορεμ [36] ανδ δελετινγ της πατης τηατ ζονταιν εδγες $(T, v) : v \neq A$, ωε οβταιν α φλωω

ζονφιγυρατιον ωηρε της τοταλ ουτγοινγ φλωω φρομ A ρεμαινς ιναριαντ, ¹ της

$$\sum_{v \in \mathcal{V}''} x''_{Av} \geq \sum_{v \in \mathcal{V}'} x'_{Av} .$$

Σεζονδλψ, ωε ηαε

$$\left. \begin{array}{l} \sum_{v \in \mathcal{V}''} c''_{Av} = \sum_{v \in \mathcal{V}'} c'_{Av} = \sum_{v \in \mathcal{V}'} x'_{Av} \\ \sum_{v \in \mathcal{V}''} c''_{Av} \geq \sum_{v \in \mathcal{V}''} x''_{Av} \end{array} \right\} \Rightarrow \sum_{v \in \mathcal{V}''} x''_{Av} \leq \sum_{v \in \mathcal{V}'} x'_{Av} .$$

Τηυς ωε ζονςλυδε τηατ

$$\sum_{v \in \mathcal{V}''} x''_{Av} = \sum_{v \in \mathcal{V}'} x'_{Av} . \quad (21)$$

Λετ $X = X'' \setminus \{(T, A)\}$. Οβσερε τηατ

$$\sum_{v \in \mathcal{V}''} x''_{Av} = \sum_{v \in \mathcal{V}} x_{Av} .$$

Τηις φλωω ις αλιδ ον γραπη \mathcal{G} βεζαυσε

$$\forall e \in \mathcal{E}, c_e \geq c''_e .$$

Τηυς τηερε εζιςτς α αλιδ φλωω φορ εαση εζεσυτιον οφ τηε Τρανσιτιε Γαμε συζη τηατ

$$\sum_{v \in \mathcal{V}} x_{Av} = \sum_{v \in \mathcal{V}''} x''_{Av} \stackrel{(21)}{=} \sum_{v \in \mathcal{V}'} x'_{Av} \stackrel{(20)}{=} \text{Loss}_{A,j_1} ,$$

ωηιςη ις τηε φλωω X . □

Τηεορεμ 6 (δονσερατιε Ωορλδ Τηεορεμ).

Ιφ εερψβοδψ πολλοως τηε ζονσερατιε στρατεγψ, νοβοδψ στεαλς ανψ αμουντ φρομ ανψβοδψ.

Απόδειξη. Λετ \mathcal{H} βε τηε γαμε ηιστορψ ωηρε αλλ πλαψερς αρε ζονσερατιε ανδ συπποσε τηερε αρε σομε $Steal()$ αςτιονς ταχινγ πλασε. Τηεν λετ \mathcal{H}' βε τηε συβσεχυενς οφ τυρνς εαση ζονταινινγ ατ λεαστ ονε $Steal()$ αςτιον. Τηις συβσεχυενς ις ειδεντλψ νονεμπτψ, τηυς ιτ μυστ ηαε α φιρστ ελεμεντ. Τηε πλαψερ ζορρεσπονδινγ το τηατ τυρν, A , ηας ζηοσεν α $Steal()$ αςτιον ανδ νο πρειουσ πλαψερ ηας ζηοσεν συζη αν αςτιον. Ηωεερ, πλαψερ A πολλοως τηε ζονσερατιε στρατεγψ, ωηιςη ις α ζοντραδιςτιον. □

¹ Ωε τηανκ Κψριαχοϋ Αξιοτις φορ ηις ινσιγητς ον τηε Φλωω Δεζομποσιτιον τηεορεμ.

Προοφ οφ Τηορεμ 5: Σψβιλ Ρεσιλιενσε

Λετ \mathcal{G}_1 βε α γαμε γραπη δεφινεδ ας φολλοως:

$$\mathcal{V}_1 = \mathcal{V} \cup \{T_1\} ,$$

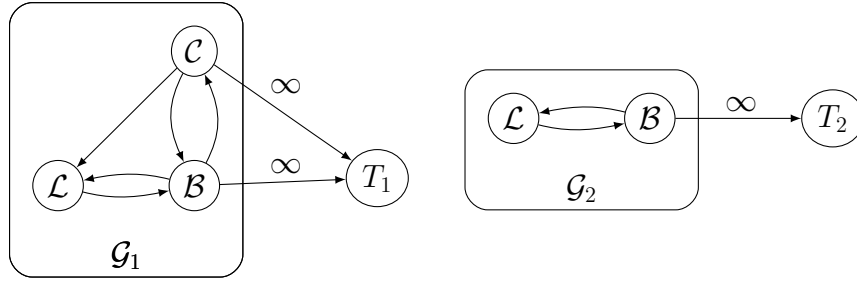
$$\mathcal{E}_1 = \mathcal{E} \cup \{(v, T_1) : v \in \mathcal{B} \cup \mathcal{C}\} ,$$

$$\forall v, w \in \mathcal{V}_1 \setminus \{T_1\}, DTr_{v \rightarrow w}^1 = DTr_{v \rightarrow w} ,$$

$$\forall v \in \mathcal{B} \cup \mathcal{C}, DTr_{v \rightarrow T_1}^1 = \infty ,$$

ωηρε $DTr_{v \rightarrow w}$ ις τηε διρεστ τρυστ φρομ v το w ιν \mathcal{G} ανδ $DTr_{v \rightarrow w}^1$ ις τηε διρεστ τρυστ φρομ v το w ιν \mathcal{G}_1 .

Λετ αλσο \mathcal{G}_2 βε τηε ινδυσεδ γραπη τηατ ρεσυλτσ φρομ \mathcal{G}_1 ιφ ωε ρεμοε τηε Σψβιλ σετ, \mathcal{C} . Ωε ρεναμε T_1 το T_2 ανδ δεφινε $\mathcal{L} = \mathcal{V} \setminus (\mathcal{B} \cup \mathcal{C})$ ας τηε σετ οφ λεγιτιματε πλαψερς το φασιλιτατε ζομπρεηενσιον.



Φιγ.8: Γραπης \mathcal{G}_1 ανδ \mathcal{G}_2

Αςορδινγ το τηορεμ (4),

$$Tr_{A \rightarrow \mathcal{B} \cup \mathcal{C}} = maxFlow_1(A, T_1) \wedge Tr_{A \rightarrow \mathcal{B}} = maxFlow_2(A, T_2) . \quad (22)$$

Ωε ωιλλ σηοω τηατ τηε $MaxFlow$ οφ εαση οφ τηε τωο γραπης ζαν βε υσεδ το ζονστρυετ α αλιδ φλω οφ εχυαλ αλυε φορ τηε οτηερ γραπη. Τηε φλω $X_1 = MaxFlow(A, T_1)$ ζαν βε υσεδ το ζονστρυετ α αλιδ φλω οφ εχυαλ αλυε φορ τηε σεσονδ γραπη ιφ ωε σετ

$$\forall v \in \mathcal{V}_2 \setminus \mathcal{B}, \forall w \in \mathcal{V}_2, x_{vw,2} = x_{vw,1} ,$$

$$\forall v \in \mathcal{B}, x_{vT_2,2} = \sum_{w \in N_1^+(v)} x_{vw,1} ,$$

$$\forall v, w \in \mathcal{B}, x_{vw,2} = 0 .$$

Τηερεφορε

$$maxFlow_1(A, T_1) \leq maxFlow_2(A, T_2)$$

Λικεωισε, της φλωω $X_2 = MaxFlow(A, T_2)$ ις α αλιδ φλωω φορ \mathcal{G}_1 βεσαυσε \mathcal{G}_2 ις αν ινδυσεδ συβγραπη οφ \mathcal{G}_1 . Τηερεφορε

$$maxFlow_1(A, T_1) \geq maxFlow_2(A, T_2)$$

Ωε ζονεγλυδε τηατ

$$maxFlow(A, T_1) = maxFlow(A, T_2) \quad , \quad (23)$$

της φορμ (22) ανδ (23) της τηεορεμ ηολδς. \square

2 Αλγοριτημς

Τηις αλγοριτημ ζαλλς της νεεεσσαρψ φυνετιονς το πρεπαρε της νεω γραπη.

Εξεεζυτε Τυρν

Ινπυτ : ολδ γραπη \mathcal{G}_{j-1} , πλαψερ $A \in \mathcal{V}_{j-1}$, ολδ ζαπιταλ

$Cap_{A,j-1}$, ΤεντατιεΤυρν

Ουτπυτ : νεω γραπη \mathcal{G}_j , νεω ζαπιταλ $Cap_{A,j}$, νεω ηιστορψ \mathcal{H}_j

1 εξεεζυτεΤυρν(\mathcal{G}_{j-1} , A , $Cap_{A,j-1}$, ΤεντατιεΤυρν) :

2 ($Turn_j$, Νεωᾶπ) = αλιδατεΤυρν(\mathcal{G}_{j-1} , A , $Cap_{A,j-1}$,
ΤεντατιεΤυρν)

3 ρετυρν(ζομμιτΤυρν(\mathcal{G}_{j-1} , A , $Turn_j$, Νεωᾶπ))

Τηε φολλοωινγ αλγοριτημ αλιδατες τηατ της τεντατιε τυρν προδυσεδ βψ της στρατεγψ ρεεπεετς της ρυλες ιμποσεδ ον τυρνς. Ιφ της τυρν ις ιναλιδ, αν εμπτψ τυρν ις ρετυρνεδ.

ᾶλιδατε Τυρν

Ινπυτ : ολδ \mathcal{G}_{j-1} , πλαψερ $A \in \mathcal{V}_{j-1}$, ολδ $Cap_{A,j-1}$, Τυρν

Ουτπυτ : $Turn_j$, νεω $Cap_{A,j}$

1 αλιδατεΤυρν(\mathcal{G}_{j-1} , A , $Cap_{A,j-1}$, Τυρν) :

2 $Y_{st} = Y_{add} = 0$

3 Στολεν = Αδδεδ = \emptyset

4 φορ (αετιον \in Τυρν)

5 αετιον ματση δο

6 ζασε $Steal(\psi, w)$ δο

7 ιφ ($\psi \cdot DTr_{w \rightarrow A,j-1}$ ορ $\psi \cdot 0$ ορ $w \in$ Στολεν)

8 ρετυρν(\emptyset , $Cap_{A,j-1}$)

9 ελσε $Y_{st} += \psi \cdot$ Στολεν = Στολεν $\cup \{w\}$

10 ζασε $Add(\psi, w)$ δο

```

11      ιφ (ψ · -DTrA→w,j-1 ορ w ∈ Aδδεδ)
12      ρετυρν(∅, CapA,j-1)
13      ελσε Yadd += ψ · Aδδεδ = Aδδεδ ∪ {w}
14  ιφ (Yadd - Yst · CapA,j-1) ρετυρν(∅, CapA,j-1)
15  ελσε ρετυρν(Τυρν, CapA,j-1 + Yst - Yadd)

```

Φιναλλψ, της αλγοριτημ αππλιες της τυρν το της ολδ γραπη ανδ ρετυρνς της νεω γραπη, αλονγ ωιτη της υπδατεδ ζαπιταλ ανδ ηιστορψ.

δμμιτ Τυρν

Ινπυτ : ολδ \mathcal{G}_{j-1} , πλαφερ $A \in \mathcal{V}_{j-1}$, Νεωᾶπ, Turn_j

Ουτπυτ : νεω \mathcal{G}_j , νεω Cap_{A,j}, νεω \mathcal{H}_j

```

1  ζομμιτΤυρν( $\mathcal{G}_{j-1}$ , A, Νεωᾶπ, Turnj) :
2  φορ «v, w) ∈  $\mathcal{E}_j$ ) DTrv→w,j = DTrv→w,j-1
3  φορ (αςτιον ∈ Turnj)
4      αςτιον ματση δο
5      ζασε Steal(ψ, w) δο DTrw→A,j = DTrw→A,j-1 - y
6      ζασε Add(ψ, w) δο DTrA→w,j = DTrA→w,j-1 + y
7  CapA,j = Νεωᾶπ ·  $\mathcal{H}_j$  = (A, Turnj)
8  ρετυρν( $\mathcal{G}_j$ , CapA,j,  $\mathcal{H}_j$ )

```

Ιτ ις στραιγητφορωαρδ το εριωψ της ζομπατιβιλιτψ οφ της πρειους αλγοριτημς ωιτη της ζορρεσπονδινγ δεφινιτιονς.

Αναφορές

1. Σανςηεζ Ω.: Λινες οφ ῥεδιτ. ηττπς://γιστ.γιτηυβ.ζομ/δρωασηο/2c40β91ε169φ55988618*παρτ-3-ωεβ-οφ-ζρεδιτ (2016)
2. Ναχαμοτο Σ.: Βιτςοιν: Α Πεερ-το-Πεερ Ελεςτρονικς ᾶση Σψςτεμ (2008)
3. Αντονοπουλος Α. Μ.: Μαστερινγ Βιτςοιν: Υνλοσχινγ Διγιταλ ῥψπτοσυρρενςιες. Ο-Τρειλλψ Μεδια, Ινς. (2014)
4. Καρλαν Δ., Μοβιυς Μ., Ροσενβλατ Τ., Σζειδλ Α.: Τρυστ ανδ σοσιαλ ζολλατεραι. Της Χυαρτερλψ Θουρναλ οφ Εζονομικς, ππ. 1307-1361 (2009)
5. ὀρμεν Τ. Η., Λεισερσον ῥ. Ε., Ριεστ Ρ. Α., Στειν ῥ.: Ιντροδυςτιον το Αλγοριτημς (3οδ εδ.). MIT Πρεςς ανδ ΜςΓραω-Ηιλλ (2009)
6. Ορλιν Θ. Β.: Μαξ Φλωως ιν Ο(νμ) Τιμε, ορ Βεττερ. ΣΤΟ^ '13 Προζεεδινγς οφ της φορτψ-φιωτη αννυαλ Α^Μ σψμποσιυμ ον Τηορψ οφ ζομπυτινγ, ππ.765-774, Α^Μ, Νεω Ψορκ, doi:10.1145/2488608.2488705 (2013)
7. Δουζεур Θ. Ρ.: Της Σψβιλ Ατταςκ. Ιντερνατιοναλ ωορκσηοπ ον Πεερ-Το-Πεερ Σψςτεμς (2002)
8. Ζιμμερμανν Π.: ΠΓΠ Σουρςε ὀδε ανδ Ιντερναλς. Της MIT Πρεςς (1995)
9. ῥαρκε Ι., Σανδβεργ Ο., Ωιλεψ Β., Ηονγ Τ. Ω.: Φρεενετ: Α Διστριβυτεδ Ανονψμοις Ινφορματιον Στοραγε ανδ Ρετριοαλ Σψςτεμ. Η. Φεδερρατη, Δεσιγνινγ Πριαςψ Ενηανςινγ Τεςηνολογιες ππ. 46-66, Βερκελεψ, ΥΣΑ: Σπρινγερ-ῥρλαγ Βερλιν Ηειδελβεργ (2001)

10. Αδάμς Ξ., Αλοφδ Σ.: Υνδερστανδινγ ΠΚΙ: ζονζεπτς, στανδαρδς, ανδ δεπλοψμεντ ζονσιδερατιονς. Αδδισον-Ωεσλεψ Προφεσσιοναλ (2003)
11. Ποστ Α., Σηαη Ξ., Μισλοε Α.: Βαζααρ: Στρενγτηενινγ Υσερ Ρεputατιονς ιν Ονλινε Μαρκετπλαςες. Προζεεδινγς οφ ΝΣΔΙ'11: 8τη ΥΣΕΝΙΕ Σψμποσιυμ ον Νετωορκεδ Σψστεμς Δεσιγν ανδ Ιμπλεμεντατιον, π. 183 (2011)
12. Λαμπορτ Α., Σηοστακ Ρ., Πεασε Μ.: Τηε Βψζαντινε Γενεραλς Προβλεμ. Α΄Μ Τραν-σαςτιονς ον Προγραμμινγ Λανγυαγες ανδ Σψστεμς (ΤΟΠΛΑΣ) 4.3, ππ. 382-401 (1982)
13. Ηυψηη Τ. Δ., Θεωνινγς Ν. Ρ., Σηαδβολτ Ν. Ρ.: Αν Ιντεγρατεδ Τρυστ ανδ Ρεputατιον Μοδελ φορ Οπεν Μυλτι-Αγεנט Σψστεμς. Αυτονομους Αγεנטς ανδ Μυλτι-Αγεנט Σψστεμς, 13(2), ππ. 119-154 (2006)
14. Μισημαρδι Π., Μολα Ρ.: δρε: α δλλαβορατιε Ρεputατιον Μεζηανισμ το Ενφορσε Νοδε δοπερατιον ιν Μοβιλε Αδ-ηος Νετωορκς. Αδανζεδ δμμυνισατιονς ανδ Μυλτιμεδια Σεζυριτψ, ππ. 107-121, Σπρινγερ ΥΣ (2002)
15. άννον Α.: Οπεν Ρεputατιον: τηε Δεσεντραλιζεδ Ρεputατιον Πλατφορμ (2015) <http://οπενρεputατιον.νετ/οπεν-ρεputατιον-ηιγη-λεελ-ωηιτεπαπερ.πδφ>
16. Γρύνερτ Α., Ηυδερτ Σ., Κόνινγ Σ., Καφφίλλε Σ., Ωιρτζ Γ.: Δεσεντραλιζεδ Ρεputατιον Μαναγεμεντ φορ δοπερατινγ Σοφτωαρε Αγεנטς ιν Οπεν Μυλτι-Αγεנט Σψστεμς. ΙΤΣΣΑ, 1(4), ππ. 363-368 (2006)
17. Ρεπαντις Τ., Καλογερακι Ξ.: Δεσεντραλιζεδ Τρυστ Μαναγεμεντ φορ Αδ-ηος Πεερ-το-Πεερ Νετωορκς. Προζεεδινγς οφ τηε 4τη Ιντερνατιοναλ Ωορκσηοπ ον Μιδδλεωαρε φορ Περασιε ανδ Αδ-ηος δμυτινγ, ΜΠΑ΄ 2006, π. 6, Α΄Μ (2006)
18. Μυι Α., Μοητασημι Μ., Χαλβερσταδτ Α.: Α δμυτατιοναλ Μοδελ οφ Τρυστ ανδ Ρε-putατιον. Σψστεμ Σςιενςες, 2002. ΗΓΨΣ. Προζεεδινγς οφ τηε 35τη Αννυαλ Ηαωαι Ιντερνατιοναλ δνφερενςε, ππ. 2431-2439 IEEE (2002)
19. δμμερσε Β. Ε., Θόσανγ Α., Ισμαίλ Ρ.: Τηε Βετα Ρεputατιον Σψστεμ. Προζεεδινγς οφ τηε 15τη Βλεδ Ελεςτρονικς δμμερσε δνφερενςε (2002)
20. Συρψαναραψανα Γ., Ερενκραντζ Θ. Ρ., Ταψλορ Ρ. Ν.: Αν Αρςηιτεςτυραλ Αππροαση φορ Δεσεντραλιζεδ Τρυστ Μαναγεμεντ. IEEE Ιντερνετ δμυτινγ, 9(6), ππ. 16-23 (2005)
21. Ίσαν Α., Ποπ Φ., Ίριστεα Ξ.: Δεσεντραλιζεδ Τρυστ Μαναγεμεντ ιν Πεερ-το-Πεερ Σψστεμς. 10τη Ιντερνατιοναλ Σψμποσιυμ ον Παράλλελ ανδ Διστριβυτεδ δμυτινγ, ππ. 232-239, IEEE (2011)
22. Συρψαναραψανα Γ., Διαλλο Μ., Ταψλορ Ρ. Ν.: Α Γενερισ Φραμεωορκ φορ Μοδελινγ Δεσεντραλιζεδ Ρεputατιον-Βασεδ Τρυστ Μοδελς. 14τη Α΄Μ ΣιγΣοφτ Σψμποσιυμ ον Φουνδατιονς οφ Σοφτωαρε Ενγινεερινγ (2006)
23. άροννι Γ.: Ωαλκινγ τηε ωεβ οφ τρυστ. Εναβλινγ Τεζηνολογιες: Ινφραστυρςτυρε φορ δλλαβορατιε Εντερπριςες, ΩΕΤ ΓΕ 2000, Προζεεδινγς, IEEE 9τη Ιντερνατιοναλ Ωορκσηοπς, ππ. 153-158 (2000)
24. Πεννινγ Η.Π.: ΠΓΠ πατηφινδερ πγπ.ςς.υυ.νλ
25. Γολλμανν Δ.: Ωηψ τρυστ ις βαδ φορ σεζυριτψ. Ελεςτρονικς νοτες ιν τηεορετιςαλ ζομπυτερ σςιενςε, 157(3), 3-9 (2006)
26. Σοσκα Κ., Κωον Α., Ήριστιν Ν., Δεαδασ Σ.: Βεαερ: Α Δεσεντραλιζεδ Ανονψμους Μαρκετπλαςε ωιτη Σεζυρε Ρεputατιον (2016)
27. Ζινδρος Δ. Σ.: Τρυστ ιν Δεσεντραλιζεδ Ανονψμους Μαρκετπλαςες (2015)
28. ΔεΦιγυειρεδο Δ. Δ. Β., Βαρρ Ε. Τ.: ΤρυστΔαις: Α Νον-Εξπλοιατψλε Ονλινε Ρε-putατιον Σψστεμ. ΄Ε΄, όλ. 5, ππ. 274-283 (2005)
29. Φυγγερ Ρ.: Μονεψ ας ΙΟΥς ιν Σοςιαλ Τρυστ Νετωορκς & Α Προποσαλ φορ α Δεσεντραλιζεδ Υρρενςψ Νετωορκ Προτοζολ.

30. Σζηωαρτζ Δ., Ψουνγς Ν., Βριττο, Α.: Της Ριππλε προτοζολ ζονσενσυς αλγορι-
τημ. Ριππλε Λαβς Ινς Ωηιτε Παπερ, 5 (2014) [ηττπ://αρσηιε.ριππλε-προθεστ.οργ/δεκεντραλιζεδεσυρρενςψ.πδψ](http://αρσηιε.ριππλε-προθεστ.οργ/δεκεντραλιζεδεσυρρενςψ.πδψ) (2004)
31. Μαζιερες, Δ.: Της στελλαρ ζονσενσυς προτοζολ: Α φεδερατεδ μοδελ φορ ιντερνετ-
λεελ ζονσενσυς. Στελλαρ Δεελοπμεντ Φουνδατιον (2015)
32. Ναραψαναν Α., Σηματικο ~.: Δε-ανονψμιζινγ Σοσιαλ Νετωορκς. ΣΠ '09 Προζεε-
δινγς οφ της 2009 30τη IEEE Σψμποσιυμ ον Σεσυριτψ ανδ Πριαςψ, ππ. 173-187,
10.1109/ΣΠ.2009.22 (2009)
33. Μαλαολτα Γ., Μορενο-Σανςηεζ Π., Κατε Α., Μαφφει Μ.: ΣιλεντΩηισπερς: Ενφο-
ρςινγ Σεσυριτψ ανδ Πριαςψ ιν Δεκεντραλιζεδ ~ρεδιτ Νετωορκς.
34. Μορενο-Σανςηεζ Π., Κατε Α., Μαφφει Μ., Πεσινα Κ.: Πριαςψ πρεσερινγ παψμεντς
ιν ζρεδιτ νετωορκς. Νετωορκ ανδ Διστριβυτεδ Σεσυριτψ Σψμποσιυμ (2015)
35. Κονφορτψ Δ., Αδαμ Ψ., Εστραδα Δ., Μερεδιτη Α. Γ.: Σψννερεο: Της Δεκεντραλιζεδ
ανδ Διστριβυτεδ Σοσιαλ Νετωορκ (2015)
36. Αηυθα Ρ. Κ., Μαγναντι Τ. Α., Ορλιν Θ. Β.: Νετωορκ Φλωως: Τηεορψ, Αλγοριτημς,
ανδ Αππλιςατιονς. Πρεντιςε-Χαλλ (1993) [ηττπς://ορω.μιτ.εδυ](http://ορω.μιτ.εδυ). Λιςενσε: ~ρεατιε
δμμονς ΒΨ-Ν~-ΣΑ. (Φαλλ 2010)
37. Θόσανγ Α., Ισμαιλ Ρ., Βοψδ ~.: Α Συρεψ οφ Τρυστ ανδ Ρεπυτατιον Σψςτεμς φορ
Ονλινε Σεριςε Προισιον. Δεσιςιον Συππορτ Σψςτεμς, 43(2), ππ. 618-644 (2007)