Trust Is Risk:
Μία Αποκεντρωμένη Πλατφόρμα Οικονομικής Εμπιστοσύνης

Ορφέας Στέφανος Θυφρονίτης Λήτος

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
`olitos@corelab.ntua.gr`

Περίληψη Κεντρικά συστήματα φήμης χρησιμοποιούν αστέρια και κριτικές και επομένως χρειάζονται απόκρυψη αλγορίθμων για να αποφεύγουν τον αθέμιτο χειρισμό. Σε αυτόνομα αποκεντρωμένα συστήματα ανοιχτού κώδικα αυτή η πολυτέλεια δεν είναι διαθέσιμη. Στο παρόν κατασκευάζουμε ένα δίκτυο φήμης για αποκεντρωμένες αγορές όπου η εμπιστοσύνη που δίνει ο κάθε χρήστης στους υπόλοιπους είναι μετρήσιμη και εκφράζεται με νομισματικούς όρους. Εισάγουμε ένα νέο μοντέλο για πορτοφόλια bitcoin στα οποία τα νομίσματα κάθε χρήστη μοιράζονται σε αξιόπιστους συνεργάτες. Η άμεση εμπιστοσύνη ορίζεται χρησιμοποιώντας μοιραζόμενους λογαριασμούς μέσω των 1-από-2 multisig του bitcoin. Η έμμεση εμπιστοσύνη ορίζεται έπειτα με μεταβατικό τρόπο. Αυτό επιτρέπει να επιχειρηματολογούμε με αυστηρό παιγνιοθεωρητικό τρόπο ως προς την ανάλυση κινδύνου. Αποδεικνύουμε ότι ο κίνδυνος και οι μέγιστες ροές είναι ισοδύναμα στο μοντέλο μας και ότι το σύστημά μας είναι ανθεκτικό σε επιθέσεις Sybil. Το σύστημά μας επιτρέπει τη λήψη σαφών οικονομικών αποφάσεων ως προς την υποκειμενική χρηματική ποσότητα με την οποία μπορεί ένας παίκτης να εμπιστευθεί μία ψευδώνυμη οντότητα. Μέσω ανακατανομής της άμεσης εμπιστοσύνης, ο κίνδυνος που διατρέχεται κατά την αγορά από έναν ψευδώνυμο πωλητή παραμένει αμετάβλητος.

Keywords: αποκεντρωμένο · εμπιστοσύνη · δίκτυο εμπιστοσύνης · γραμμές πίστωσης · εμπιστοσύνη ως κίνδυνος · ροή · φήμη · decentralized · trust · web-of-trust · bitcoin · multisig · line-of-credit · trust-as-risk · flow · reputation

Abstract. Centralized reputation systems use stars and reviews and thus require algorithm secrecy to avoid manipulation. In autonomous open source decentralized systems this luxury is not available. We create a reputation network for decentralized marketplaces where the trust each user gives to the rest of the users is quantifiable and expressed in monetary terms. We introduce a new model for bitcoin wallets in which user coins are split among trusted associates. Direct trust is defined using shared bitcoin accounts via bitcoin's 1-of-2 multisig. Indirect trust is subsequently defined transitively. This enables formal game theoretic arguments pertaining to risk analysis. We prove that risk and maximum flows are equivalent in our model and that our system is Sybil-resilient. Our system allows for concrete financial decisions on the subjective monetary amount a pseudonymous party can be trusted with. Through direct trust redistribution, the risk incurred from making a purchase from a pseudonymous vendor in this manner remains invariant.

Περιεχόμενα

Κατάλογος Σχημάτων

Κατάλογος Ψευδοκωδίκων

1 Εισαγωγή

Οι αποκεντρωμένες αγορές μπορούν να κατηγοριοποιηθούν ως κεντρικές και αποκεντρωμένες. Ένα παράδειγμα για κάθε κατηγορία είναι το ebay και το OpenBazaar. Ο κοινός παρονομαστής των καθιερωμένων διαδικτυακών αγορών είναι το γεγονός ότι η φήμη κάθε πωλητή και πελάτη εκφράζεται κατά κανόνα με τη μορφή αστεριών και κριτικών των χρηστών, ορατές σε όλο το δίκτυο.

Ο στόχος μας είναι να δημιουργήσουμε ένα σύστημα φήμης για αποκεντρωμένες αγορές όπου η εμπιστοσύνη που ο κάθε χρήστης δίνει στους υπόλοιπους είναι ποσοτικοποιήσιμη με νομισματικούς όρους. Η κεντρική παραδοχή που χρησιμοποιείται σε όλο το μήκος της παρούσας εργασίας είναι ότι η εμπιστοσύνη είναι ισοδύναμε με τον κίνδυνο, ή η θέση ότι η *εμπιστοσύνη* της $Alice$ προς το χρήστη $Charlie$ ορίζεται ως το *μέγιστο χρηματικό ποσό* που η $Alice$ μπορεί να χάσει όταν ο $Charlie$ είναι ελεύθερος να διαλέξει όποια στρατηγική θέλει. Για να υλοποιήσουμε αυτή την ιδέα, θα χρησιμοποιήσουμε τις *πιστωτικές γραμμές* όπως προτάθηκαν από τον Washington Sanchez [1]. Η $Alice$ συνδέεται στο δίκτυο όταν εμπιστεύεται ενεργητικά ένα συγκεκριμένο χρηματικό ποσό σε έναν άλλο χρήστη, για παράδειγμα το φίλο της τον Bob. Αν ο Bob έχει ήδη εμπιστευθεί ένα χρηματικό ποσό σε έναν τρίτο χρήστη, τον $Charlie$, τότε η $Alice$ εμπιστεύεται έμμεσα τον $Charlie$ αφού αν ο τελευταίος ήθελε να παίξει άδικα, θα μπορούσε να έχει κλέψει ήδη τα χρήματα που του εμπιστεύθηκε ο Bob. Θα δούμε αργότερα ότι η $Alice$ μπορεί τώρα να εμπλακεί σε οικονομική δραστηριότητα με τον $Charlie$.

Για να υλοποιήσουμε τις πιστωτικές γραμμές, θα χρησιμοποιήσουμε το Bitcoin [2], ένα αποκεντρωμένο κρυπτονόμισμα που διαφέρει από τα συμβατικά νομίσματα γιατί δεν βασίζεται σε αξιόπιστους τρίτους. Όλες οι συναλλαγές δημοσιεύονται σε ένα αποκεντρωμένο "λογιστικό βιβλίο", το blockchain. Κάθε συναλλαγή παίρνει κάποια νομίσματα ως είσοδο και παράγει ορισμένα νομίσματα ως έξοδο. Αν η έξοδος μιας συναλλαγής δεν συνδέεται στην είσοδο μιας άλλης, τότε η έξοδος αυτή ανήκει στο UTXO, το σύνολο των αξόδευτων εξόδων συναλλαγών. Διαισθητικά, το UTXO περιέχει όλα τα αξόδευτα νομίσματα.

$$A \xrightarrow{10\text{₿}} B \xrightarrow{20\text{₿}} C$$

Σχ.1: Ο A εμπ. έμμεσα τον C 10₿

$$A \xrightarrow{10\text{₿}} B \xrightarrow{5\text{₿}} C$$

Σχ.2: Ο A εμπ. έμμεσα τον C 5₿

Προτείνουμε ένα νέο είδος πορτοφολιού όπου τα νομίσματα δεν έχουν αποκλειστικό ιδιοκτήτη, αλλά τοποθετούνται σε μοιραζόμενους λογαριασμούς που υλοποιούνται μέσω των 1-από-2 multisig, μια κατασκευή του bitcoin που επιτρέπει έναν από δύο προκαθορισμένους χρήστες να ξοδέψουν τα νομίσματα που περιέχονται σε έναν κοινό λογαριασμό [3]. Θα χρησιμοποιήσουμε το συμβολισμό $1/\{Alice, Bob\}$ για να αναπαραστήσουμε ένα 1-από-2 multisig που μπορεί να ξοδευτεί είτε από την *Alice*, είτε από τον *Bob*. Με αυτό το συμβολισμό, η σειρά των ονομάτων δεν έχει σημασία, εφ΄ όσον οποιοσδήποτε από τους δύο χρήστες μπορεί να ξοδέψει τα νομίσματα. Ωστόσο, έχει σημασία ποιος χρήστης καταθέτει τα χρήματα αρχικά στον κοινό λογαριασμό – αυτός ο χρήστης διακινδυνεύει τα νομίσματά του.

Η προσέγγισή μας αλλάζει την εμπειρία του χρήστη κατά έναν διακριτικό αλλά και δραστικό τρόπο. Ο χρήστης δεν πρέπει να βασίζει πια την εμπιστοσύνη του προς ένα κατάστημα σε αστέρια ή κριτικές που δεν εκφράζονται με οικονομικές μονάδες. Μπορεί απλά να συμβουλευθεί το πορτοφόλι της για να αποφασίσει αν το κατάστημα είναι αξιόπιστο και, αν ναι, μέχρι ποια αξία, μετρημένη σε bitcoin. Το σύστημα αυτό λειτουργεί ως εξής: Αρχικά η *Alice* μεταφέρει τα χρήματά της από το ιδιωτικό της bitcoin πορτοφόλι σε 0-από-2 διευθύνσεις multisig μοιραζόμενες με φίλους που εμπιστεύεται άνετα. Αυτό καλείται άμεση εμπιστοσύνη. Το σύστημά μας δεν ενδιαφέρεται για τον τρόπο με τον οποίο οι παίκτες καθορίζουν ποιος είναι αξιόπιστος γι΄ αυτές τις απ΄ ευθείας 1-από-2 καταθέσεις. Αυτό το αμφιλεγόμενο είδος εμπιστοσύνης περιορίζεται στην άμεση γειτονιά κάθε παίκτη. Η έμμεση εμπιστοσύνη προς άγνωστους χρήστες υπολογίζεται από έναν ντετερμινιστικό αλγόριθμο. Συγκριτικά, συστήματα με αντικειμενικές αξιολογήσεις δε διαχωρίζουν τους γείτονες από τους υπόλοιπους χρήστες, προσφέροντας έτσι αμφιλεγόμενες ενδείξεις εμπιστοσύνης για όλους.

Ας υποθέσουμε ότι η *Alice* βλέπει τα προϊόντα του πωλητή *Charlie*. Αντί για τα αστέρια του *Charlie*, η *Alice* θα δει ένα θετικό αριθμό που υπολογίζεται από το πορτοφόλι της και αναπαριστά τη μέγιστη χρηματική αξία που η *Alice* μπορεί να πληρώσει με ασφάλεια για να ολοκληρώσει μια αγορά από τον *Charlie*. Αυτή η αξία, γνωστή ως έμμεση εμπιστοσύνη, υπολογίζεται με το θεώρημα Εμπιστοσύνης – Ροής (2). Σημειώστε ότι η έμμεση εμπιστοσύνη προς κάποιο χρήστη δεν είναι ενιαία αλλά υποκειμενική. Κάθε χρήστης βλέπει μια ιδιαίτερη έμμεση εμπιστοσύνη που εξαρτάται από την τοπολογία του δικτύου. Η έμμεση εμπιστοσύνη που εμφανίζεται από το σύστημά μας διαθέτει την ακόλουθη επιθυμητή ιδιότητα ασφαλείας: Αν η *Alice* πραγματοποιήσει μια αγορά από τον *Charlie*, τότε εκτίθεται το πολύ στον ίδιο κίνδυνο στον οποίον εκτιθόταν πριν την αγορά. Ο υπαρκτός εθελούσιος κίνδυνος είναι ακριβώς εκείνος που η *Alice* έπαιρνε μοιραζόμενη τα νομίσματά της με τους αξιόπιστους φίλους της. Αποδεικνύουμε το αποτέλεσμα αυτό στο θεώρημα Αμετάβλητου Κινδύνου (3). Προφανώς δε θα είναι ασφαλές για την *Alice* να αγοράσει οτιδήποτε από τον *Charlie* ή από οποιονδήποτε άλλο πωλητή αν δεν έχει ήδη εμπιστευθεί καθόλου χρήματα σε κανέναν άλλο χρήστη.

Βλέπουμε ότι στο Trust Is Risk τα χρήματα δεν επενδύονται τη στιγμή της αγοράς και κατ΄ ευθείαν στον πωλητή, αλλά σε μια προγενέστερη χρονική στιγμή και μόνο προς άτομα που είναι αξιόπιστα για λόγους εκτός παιχνιδιού. Το γεγονός ότι το σύστημα αυτό μπορεί να λειτουργήσει με έναν εξ ολοκλήρου αποκεντρωμένο τρόπο θα γίνει σαφές στις επόμενες ενότητες. Θα αποδείξουμε το αποτέλεσμα αυτό στο θεώρημα Sybil Αντίστασης (5).

Κάνουμε τη σχεδιαστική επιλογή ότι κανείς μπορεί να εκφράζει την εμπιστοσύνη του μεγιστικά με όρους του διαθέσιμού του κεφαλαίου. Έτσι, ένας φτωχός παίκτης δεν μπορεί να διαθέσει πολλή άμεση εμπιστοσύνη στους φίλους τους ανεξαρτήτως του πόσο αξιόπιστοι είναι. Από την άλλη, ένας πλούσιος παίκτης μπορεί να εμπιστευθεί ένα μικρό μέρος των χρημάτων της σε κάποιον παίκτη που δεν εμπιστεύεται εκτενώς και παρ΄ όλα αυτά να εμφανίζει περισσότερη άμεση εμπιστοσύνη από τον φτωχό παίκτη του προηγούμενου παραδείγματος. Δεν υπάρχει άνω όριο στην εμπιστοσύνη. Κάθε παίκτης περιορίζεται μόνο από τα χρήματά του. Έτσι εκμεταλλευόμαστε την παρακάτω αξιοσημείωτη ιδιότητα του χρήματος: Το ότι κανονικοποιεί τις υποκειμενικές ανθρώπινες επιθυμίες σε αντικειμενική αξία.

Υπάρχουν διάφορα κίνητρα για να συνδεθεί ένας χρήστης στο δίκτυο αυτό. Πρώτον, έχει πρόσβαση σε καταστήματα που αλλιώς θα ήταν απρόσιτα. Επίσης, δύο φίλοι μπορούν να επισημοποιήσουν την αλληλοεμπιστοσύνη τους εμπιστεύοντας το ίδιο ποσό ο ένας στον άλλο. Μια μεγάλη εταιρεία που πραγματοποιεί συχνά συμβάσεις υπεργολαβίας με άλλες εταιρείες μπορεί να εκφράσει την εμπιστοσύνη της προς αυτές. Μια κυβέρνηση μπορεί να εμπιστευθεί άμεσα τους πολίτης της με χρήματα και να τους αντιμετωπίσει με ένα ανάλογο νομικό οπλοστάσιο αν αυτοί κάνουν ανεύθυνη χρήση της εμπιστοσύνης αυτής. Μια τράπεζα μπορεί να προσφέρει δάνεια ως εξερχόμενες και να χειρίζεται τις καταθέσεις ως εισερχόμενες άμεσες εμπιστοσύνες. Τέλος, το δίκτυο μπορεί να ειδωθεί ως ένα πεδίο επένδυσης και κερδοσκοπίας αφού αποτελεί ένα εντελώς νέο πεδίο οικονομικής δραστηριότητας.

Είναι αξισημείωτο το ότι το ίδιο φυσικό πρόσωπο μπορεί να διατηρεί πολλαπλές ψευδώνυμες ταυτότητες στο ίδιο δίκτυο εμπιστοσύνης και ότι πολλά ανεξάρτητα δίκτυα εμπιστοσύνης διαφορετικών σκοπών μπορούν να συνυπάρχουν. Από την άλλη, η ίδια ψευδώνυμη ταυτότητα μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να αναπτύξει σχέσεις εμπιστοσύνης σε διαφορετικά περιβάλλοντα.

2 Λειτουργία

Θα ακολουθήσουμε τώρα τα βήματα της *Alice* από τη σύνδεση με το δίκτυο μέχρι να ολοκληρώσει επιτυχώς μια αγορά. Ας υποθέσουμε ότι αρχικά όλα τα νομίσματά της, ας πούμε 10Ƀ, είναι αποθηκευμένα έτσι που αποκλειστικά εκείνη μπορεί να τα ξοδέψει.

Δύο αξιόπιστοι φίλοι, ο *Bob* και ο *Charlie*, την πείθουν να δοκιμάσει το Trust Is Risk. Εγκαθιστά το πορτοφόλι Trust Is Risk και μεταφέρει τα 10Ƀ από το κανονικό bitcoin πορτοφόλι της, εμπιστεύοντας 2Ƀ στον *Bob* και 5Ƀ στον *Charlie*. Τώρα ελέγχει αποκλειστικά 3Ƀ και διακινδυνεύει 7Ƀ με αντάλλαγμα το να είναι μέρος του δικτύου. Έχει πλήρη αλλά όχι αποκλειστική πρόσβαση στα 7Ƀ που εμπιστεύθηκε στους φίλους της και αποκλειστική πρόσβαση στα υπόλοιπα 3Ƀ, που αθροίζονται στα 10Ƀ.

Μερικές ημέρες αργότερα, ανακαλύπτει ένα διαδικτυακό κατάστημα παπουτσιών του *Dean*, ο οποίος είναι συνδεδεμένος επίσης στο Trust Is Risk. Η *Alice* βρίσκει ένα ζευγάρι παπούτσια που κοστίζει 1Ƀ και ελέγχει την αξιοπιστία του *Dean* μέσω του νέου της πορτοφολιού. Ας υποθέσουμε ότι ο *Dean* προκύπτει αξιόπιστος μέχρι 4Ƀ. Αφού το 1Ƀ είναι λιγότερο από τα 4Ƀ, η *Alice* πραγματοποιεί την αγορά μέσω του καινούριου της πορτοφολιού με σιγουριά.

Τότε βλέπει στο πορτοφόλι της ότι τα αποκλειστικά της νομίσματα αυξήθηκαν στα 6Ƀ, τα νομίσματα που εμπιστεύεται στον *Bob* και στον *Charlie* μειώθηκαν στα 0.5Ƀ και 2.5Ƀ αντίστοιχα και ότι εμπιστεύεται τον *Dean* με 1Ƀ, όσο και η αξία των παπουτσιών. Επίσης, η αγορά της είναι σημειωμένη ως "σε εξέλιξη". Αν η *Alice* ελέγξει την έμμεση εμπιστοσύνη της προς τον *Dean*, θα είναι και πάλι 4Ƀ. Στο παρασκήνιο, το πορτοφόλι της ανακατένειμε τα νομίσματα που εμπιστευόταν με τρόπο ώστε εκείνη να εμπιστεύεται άμεσα στον *Dean* τόσα νομίσματα όσο κοστίζει το αγορασμένο προϊόν και η εμπιστοσύνη που εμφανίζει το πορτοφόλι να είναι ίση με την αρχική.

Τελικά όλα πάνε καλά και τα παπούτσια φτάνουν στην *Alice*. Ο *Dean* επιλέγει να εξαργυρώσει τα νομίσματα που του εμπιστεύθηκε η *Alice* κι έτσι το πορτοφόλι της δε δείχνει ότι εμπιστεύεται κανένα νόμισμα στον *Dean*. Μέσω του πορτοφολιού της, σημειώνει την αγορά ως επιτυχή. Αυτό επιτρέπει στο σύστημα να αναπληρώσει τη μειωμένη εμπιστοσύνη προς τον *Bob* και τον *Charlie*, θέτοντας τα νομίσματα άμεσης εμπιστοσύνης στα 2Ƀ και στα 5Ƀ αντίστοιχα και πάλι. Η *Alice* τώρα ελέγχει αποκλειστικά 2Ƀ. Συνεπώς τώρα μπορεί να χρησιμοποιήσει συνολικά 9Ƀ, γεγονός αναμενόμενο, αφού έπρεπε να πληρώσει 1Ƀ για τα παπούτσια.

3 Ο γράφος εμπιστοσύνης

Ας ξεκινήσουμε μια αυστηρή περιγραφή του προτεινόμενου συστήματος, συνοδευόμενη από βοηθητικά παραδείγματα. Ορισμός[Γράφος] Το Trust Is Risk αναπαρίσταται από μια ακολουθία κατευθυνόμενων γράφων με βάρη $(\mathcal{G}_j)$ όπου $\mathcal{G}_j = (\mathcal{V}_j, \mathcal{E}_j)\,, j \in \mathbb{N}$. Επίσης, αφού οι γράφοι έχουν βάρη, υπάρχει μία ακολουθία συναρτήσεων βάρους (c_j) με $c_j : \mathcal{E}_j \to \mathbb{R}^+$.

Οι κόμβοι αναπαριστούν τους παίκτες, οι ακμές αναπαριστούν τις υπάρχουσες άμεσες εμπιστοσύνες και τα βάρη το ποσό αξίας συνδεδεμένης με την αντίστοιχη άμεση εμπιστοσύνη. Όπως θα δούμε, το παιχνίδι εξελίσσεται σε γύρους. Ο δείκτης του γράφου αναπαριστά τον αντίστοιχο γύρο. Ορισμός[Παίκτες] Το σύνολο $\mathcal{V}_j = \mathcal{V}(\mathcal{G}_j)$ είναι το σύνολο όλων των παικτών στο δίκτυο. Το σύνολο αυτό μπορεί να ειδωθεί ως το σύνολο όλων των ψευδώνυμων ταυτοτήτων.

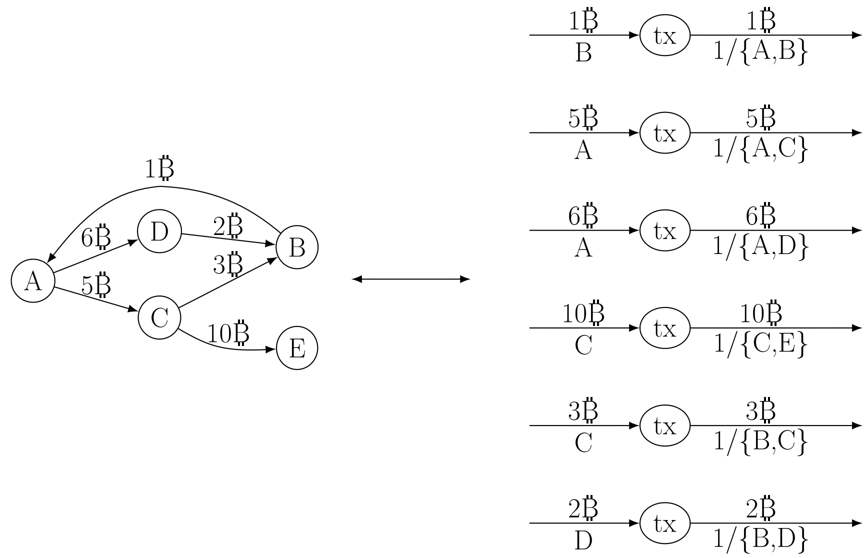
Κάθε κόμβος έχει έναν αντίστοιχο μη αρνητικό αριθμό που αναπαριστά το κεφάλαιό του. Το κεφάλαιο ενός κόμβου είναι η συνολική αξία που ο κόμβος κατέχει αποκλειστικά και κανείς άλλος δεν μπορεί να ξοδέψει. Ορισμός[Κεφάλαιο] Το κεφάλαιο του A στο γύρο j, $Cap_{A,j}$, ορίζεται ως τα συνολικά νομίσματα που ανήκουν αποκλειστικά στον A στην αρχή του γύρο j.

Το κεφάλαιο είναι η αξία που υπάρχει στο παιχνίδι αλλά δεν είναι μοιραζόμενη με έμπιστους τρίτους. Το κεφάλαιο ενός παίκτη μπορεί να ανακατανεμηθεί μόνο κατά τη διάρκεια των γύρων του, σύμφωνα με τις πράξεις του. Μοντελοποιούμε το σύστημα με τέτοιο τρόπο ώστε να είναι αδύνατο να προστεθεί κεφάλαιο στην πορεία του παιχνιδιού με εξωτερικά μέσα. Η χρήση του κεφαλαίου θα ξεκαθαρίσει μόλις οι γύροι ορισθούν με ακρίβεια.

Ο ορισμός της άμεσης εμπιστοσύνης ακολουθεί: Ορισμός[Άμεση Εμπιστοσύνη] Η άμεση εμπιστοσύνη από τον A στον B στο τέλος του γύρου j, $DTr_{A\to B,j}$, ορίζεται ως το συνολικό ποσό αξίας που υπάρχει σε $1/\{A, B\}$ multisigs στο UTXO στο τέλος του γύρου j, όπου τα χρήματα έχουν κατατεθεί από τον A.

$$DTr_{A\to B,j} = \begin{cases} c_j\,(A,B)\,, & \text{αν}\,(A,B) \in \mathcal{E}_j \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases} \tag{1}$$

Ο ορισμός αυτός συμφωνεί με τον τίτλο του παρόντος κειμένου και συμπίπτει με τη διαίσθηση και τα κοινωνιολογικά πειραματικά αποτελέσματα του [4] ότι η εμπιστοσύνη που η $Alice$ δείχνει στον Bob σε κοινωνικά δίκτυα του φυσικού κόσμου αντιστοιχεί με την έκταση του κινδύνου στην οποία η $Alice$ τοποθετεί τον εαυτό της με σκοπό να βοηθήσει τον Bob. Ένας γράφος παράδειγμα με τις αντίστοιχες συναλλαγές στο UTXO φαίνεται παρακάτω.



Σχ.3: Ο Γράφος του Trust Is Risk το αντίστοιχο Bitcoin UTXO

Όποιος αλγόριθμος έχει πρόσβαση στο γράφο $\mathcal{G}_j$ έχει επίσης πρόσβαση σε όλες της άμεσες εμπιστοσύνες του γράφου αυτού.

Ορισμός[Γειτονιά] Χρησιμοποιούμε το συμβολισμό $N^+(A)_j$ για να αναφερθούμε σε κόμβους που ο A εμπιστεύεται άμεσα και $N^-(A)_j$ για τους κόμβους που εμπιστεύονται άμεσα τον A στο τέλος του γύρου j.

$$\begin{aligned} N^+(A)_j &= \{B \in \mathcal{V}_j : DTr_{A\to B,j} > 0\} \\ N^-(A)_j &= \{B \in \mathcal{V}_j : DTr_{B\to A,j} > 0\} \end{aligned} \tag{2}$$

Αυτές καλούνται έξω και μέσα γειτονιές του A στο γύρο j αντίστοιχα.

Ορισμός[Ολική Εισερχόμενη/Εξερχόμενη Άμεση Εμπιστοσύνη] Χρησιμοποιούμε το συμβολισμό $in_{A,j}, out_{A,j}$ για να αναφερθούμε στη συνολική εισερχόμενη και εξερχόμενη άμεση εμπιστοσύνη αντίστοιχα.

$$in_{A,j} = \sum_{v \in N^-(A)_j} DTr_{v\to A,j} \ , \qquad out_{A,j} = \sum_{v \in N^+(A)_j} DTr_{A\to v,j} \tag{3}$$

Ορισμός[Περιουσία] Το άθροισμα του κεφαλαίου και της εξερχόμενης άμεσης εμπιστοσύνης του A.

$$As_{A,j} = Cap_{A,j} + out_{A,j} \tag{4}$$

4 Η Εξέλιξη της Εμπιστοσύνης

Ορισμός[Γύροι] Σε κάθε γύρο j ένας παίκτης $A \in \mathcal{V}, A = Player\,(j)$, επιλέγει μία ή περισσότερες πράξεις εκ των δύο ακόλουθων κατηγοριών:
Steal(y_B, B): Να κλέψει αξία y_B από τον $B \in N^{-}\,(A)_{j-1}$, όπου $0 \leq y_B \leq DTr_{B \rightarrow A,j-1}$. Τότε:

$$DTr_{B \rightarrow A,j} = DTr_{B \rightarrow A,j-1} - y_B$$

Add(y_B, B): Να προσθέσει αξία y_B στον $B \in \mathcal{V}$, όπου $-DTr_{A \rightarrow B,j-1} \leq y_B$. Τότε:

$$DTr_{A \rightarrow B,j} = DTr_{A \rightarrow B,j-1} + y_B$$

Όταν $y_B < 0$, θα λέμε ότι ο A μειώνει την άμεση εμπιστοσύνη του προς τον B κατά $-y_B$. Όταν $y_B > 0$, θα λέμε ότι ο A αυξάνει την άμεση εμπιστοσύνη του προς τον B κατά y_B. Αν $DTr_{A \rightarrow B,j-1} = 0$, τότε λέμε ότι ο A αρχίζει να εμπιστεύεται άμεσα τον B. Ο A επιλέγει "πάσο" αν δεν επιλέξει καμία πράξη. Επίσης, έστω Y_{st}, Y_{add} η συνολική αξία που πρόκειται να κλαπεί και να προστεθεί αντίστοιχα από τον A στο γύρο της j. Για να είναι ένας γύρος δυνατός, θα πρέπει

$$Y_{add} - Y_{st} \leq Cap_{A,j-1} \ . \tag{5}$$

Το κεφάλαιο ανανεώνεται σε κάθε γύρο: $Cap_{A,j} = Cap_{A,j-1} + Y_{st} - Y_{add}$.

Ένας παίκτης δεν μπορεί να επιλέξει δύο πράξεις της ίδιας κατηγορίας προς τον ίδιο παίκτη σε ένα γύρο. Το σύνολο πράξεων το γύρο j συμβολίζεται $Turn_j$. Ο γράφος που προκύπτει εφαρμόζοντας τις πράξεις στον $\mathcal{G}_{j-1}$ είναι ο $\mathcal{G}_j$.

Για παράδειγμα, έστω $A = Player(j)$. Ένας έγκυρος γύρος μπορεί να είναι

$$Turn_j = \{Steal\,(x, B)\,, Add\,(y, C)\,, Add\,(w, D)\} \ .$$

Η πράξη $Steal$ απαιτεί $0 \leq x \leq DTr_{B \rightarrow A,j-1}$, οι πράξεις Add απαιτούν $DTr_{A \rightarrow C,j-1} \geq -y$ και $DTr_{A \rightarrow D,j-1} \geq -w$ και ο περιορισμός του κεφαλαίου $y + w - x \leq Cap_{A,j-1}$.

Χρησιμοποιούμε $prev\,(j)$ και $next\,(j)$ για να δηλώσουμε τον προηγούμενο και τον επόμενο γύρο που παίχθηκε αντίστοιχα από τον $Player\,(j)$.
Ορισμός[Πρειους/Νεξτ Τυρν] Λετ $j \in \mathbb{N}$ βε α τυρν ωιτη $Player\,(j) = A$. Ωε δεφινε $prev\,(j)\,, next\,(j)$ ας τηε πρειους ανδ νεξτ τυρν τηατ A ις ςηοσεν το πλαψ ρεσπεςτιελψ. Ιφ j ις τηε φιρστ τυρν τηατ A πλαψς, $prev\,(j) = 0$. Μορε φορμαλλψ, λετ

$$P = \{k \in \mathbb{N} : k < j \wedge Player\,(k) = A\} \text{ ανδ}$$
$$N = \{k \in \mathbb{N} : k > j \wedge Player\,(k) = A\} \ .$$

Τηεν ωε δεφινε $prev\left(j\right), next\left(j\right)$ ας φολλοως:

$$prev\left(j\right) = \begin{cases} \max P, & P \neq \emptyset \\ 0, & P = \emptyset \end{cases}, \; next\left(j\right) = \min N$$

$next\left(j\right)$ ις αλωαψς ωελλ δεφινεδ ωιτη τηε ασσυμπτιον τηατ αφτερ εαςη τυρν εεντυαλλψ εερψβοδψ πλαψς.

Ορισμός[Δαμαγε] Λετ j βε α τυρν συςη τηατ $Player\left(j\right) = A$.

$$Damage_{A,j} = out_{A,prev(j)} - out_{A,j-1} \tag{6}$$

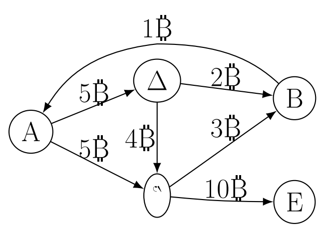
Ωε σαψ τηατ A ηας βεεν στολεν αλυε $Damage_{A,j}$ βετωεεν $prev\left(j\right)$ ανδ j. Ωε ομιτ τυρν συβσςριπτς ιφ τηεψ αρε ιμπλιεδ φρομ τηε ςοντεξτ.

Ορισμός[Ηιστορψ] Ωε δεφινε Ηιστορψ, $\mathcal{H} = \left(\mathcal{H}_j\right)$, ας τηε σεχυενςε οφ αλλ τυπλες ςονταινινγ τηε σετς οφ αςτιονς ανδ τηε ςορρεσπονδινγ πλαψερ.

$$\mathcal{H}_j = \left(Player\left(j\right), Turn_j\right) \tag{7}$$

Γνώση του αρχικού γράφου $\mathcal{G}_0$, τα αρχικά κεφάλαια όλων των παικτών και την ιστορία ισοδυναμούν με πλήρη κατανόηση της εξέλιξης του παιχνιδιού. Χτίζοντας στο παράδειγμα του σχήματος 3, μπορούμε να δούμε το γράφο που προκύπτει όταν ο D παίξει

$$Turn_1 = \left\{Steal\left(1, A\right), Add\left(4, C\right)\right\} \; . \tag{8}$$



Φιγ.4: Γαμε Γραπη αφτερ $Turn_1$ (8) ον τηε Γραπη οφ φιγυρε 3

Το Trust Is Risk ελέγχεται από έναν αλγόριθμο που επιλέγει έναν παίκτη, λαμβάνει το γύρο που ο παίκτης αυτός επιθυμεί να παίξει και, αν ο γύρος του είναι έγκυρος, τον εκτελεί. Αυτά τα βήματα επαναλαμβάνονται επ' αόριστον. Θεωρούμε ότι οι παίκτες επιλέγονται με τέτοιο τρόπο που ένας παίκτης, μετά από τον γύρο του, τελικά θα ξαναπαίξει αργότερα.

Τρυστ Ις Ρισκ Γαμε

```
θ = 0
```

ωηιλε (Τρυε)
  θ += 1· $A \xleftarrow{\$} \mathcal{V}_j$
  Τυρν = στρατεγψ[A]($\mathcal{G}_0$, A, $Cap_{A,0}$, $\mathcal{H}_{1\dots j-1}$)
  ($\mathcal{G}_j$, $Cap_{A,j}$, $\mathcal{H}_j$) = εξεςυτεΤυρν($\mathcal{G}_{j-1}$, A, $Cap_{A,j-1}$, Τυρν)

Η `strategy[A]()` προσφέρει στον παίκτη A πλήρη γνώση του παιχνιδιού, εκτός από τα κεφάλαια των άλλων παικτών. Αυτή η παραδοχή μπορεί να μην είναι πάντα ρεαλιστική.

Η `executeTurn()` ελέγχει την εγκυρότητα του γύρου Τυρν και τον αντικαθιστά με έναν κενό γύρο αν είναι άκυρος. Ακόλουθα, δημιουργεί ένα νέο γράφο $\mathcal{G}_j$ και ανανεώνει την ιστορία αναλόγως. Για τους αντίστοιχους ψευδοκώδικες, δείτε το Παράρτημα.

5 Τρυστ Τρανσιτιυιτψ

Ιν τηις σεςτιον ωε δεφινε σομε στρατεγιες ανδ σηοω τηε ςορρεσπονδινγ αλγοριτημς. Τηεν ωε δεφινε τηε Τρανσιτιε Γαμε τηατ ρεπρεσεντς τηε ωορστςασε σςεναριο φορ αν ηονεστ πλαψερ ωηεν ανοτηερ πλαψερ δεςιδες το δεπαρτ φρομ τηε νετωορκ ωιτη ηερ μονεψ ανδ αλλ τηε μονεψ διρεςτλψ εντρυστεδ το ηερ. Ορισμός[Ιδλε Στρατεγψ] Α πλαψερ A ις σαιδ το φολλοω τηε ιδλε στρατεγψ ιφ σηε πασσες ιν ηερ τυρν.

Ιδλε Στρατεγψ
Ινπυτ : γραπη $\mathcal{G}_0$, πλαψερ A, ςαπιταλ $Cap_{A,0}$, ηιστορψ $(\mathcal{H})_{1\dots j-1}$
Ουτπυτ : $Turn_j$
ιδλεΣτρατεγψ($\mathcal{G}_0$, A, $Cap_{A,0}$, $\mathcal{H}$) :
  ρετυρν($\emptyset$)

Τηε ινπυτς ανδ ουτπυτς αρε ιδεντιςαλ το τηοσε οφ ιδλεΣτρατεγψ() φορ τηε ρεστ οφ τηε στρατεγιες, τηυς ωε αοιδ ρεπεατινγ τηεμ. Ορισμός[Ειλ Στρατεγψ] Α πλαψερ A ις σαιδ το φολλοω τηε ειλ στρατεγψ ιφ σηε στεαλς αλλ ινςομινγ διρεςτ τρυστ ανδ νυλλιφιες ηερ ουτγοινγ διρεςτ τρυστ ιν ηερ τυρν.

ειλΣτρατεγψ($\mathcal{G}_0$, A, $Cap_{A,0}$, $\mathcal{H}$) :
  Στεαλς = $\bigcup_{v \in N^-(A)_{j-1}} \{Steal(DTr_{v \to A, j-1}, v)\}$
  Αδδς = $\bigcup_{v \in N^+(A)_{j-1}} \{Add(-DTr_{A \to v, j-1}, v)\}$
  $Turn_j$ = Στεαλς $\cup$ Αδδς
  ρετυρν($Turn_j$)

Ορισμός[ὂνσερατιε Στρατεγψ] Πλαψερ A ις σαιδ το φολλοω τηε ςονσερατιε στρατεγψ ιφ σηε ρεπλενισηες τηε αλυε σηε λοστ σινςε τηε πρειους τυρν, $Damage_A$, βψ στεαλινγ φρομ οτηερς τηατ διρεςτλψ τρυστ ηερ ας μυςη ας σηε ςαν υπ το $Damage_A$ ανδ σηε τακες νο οτηερ αςτιον.

```
ςονσΣτρατεγψ($\mathcal{G}_0$, $A$, $Cap_{A,0}$, $\mathcal{H}$) :
  Δαμαγε = $out_{A,prev(j)}$ - $out_{A,j-1}$
  ιφ (Δαμαγε ʼ 0)
    ιφ (Δαμαγε ʼ= $in_{A,j-1}$)
      $Turn_j$ = $\bigcup_{v \in N^-(A)_{j-1}} \{Steal\left(DTr_{v \to A,j-1}, v\right)\}$
    ελσε
      $y$ = ΣελεςτΣτεαλ($G_j$, $A$, Δαμαγε) ˆ$y$ = $\{y_v : v \in N^-(A)_{j-1}\}$
      $Turn_j$ = $\bigcup_{v \in N^-(A)_{j-1}} \{Steal\left(y_v, v\right)\}$
  ελσε $Turn_j$ = $\emptyset$
  ρετυρν($Turn_j$)
```

ΣελεςτΣτεαλ() ρετυρνς y_v ωιτη $v \in N^-(A)_{j-1}$ συςη τηατ

$$\sum_{v \in N^-(A)_{j-1}} y_v = Damage_{A,j} \wedge \forall v \in N^-(A)_{j-1}, y_v \leq DTr_{v \to A,j-1} \ . \quad (9)$$

Πλαψερ A ςαν αρβιτραριλψ δεφινε ηοω ΣελεςτΣτεαλ() διστριβυτες τηε $Steal\,()$ αςτιονς εαςη τιμε σηε ςαλλς τηε φυνςτιον, ας λονγ ας (9) ις ρεσπεςτεδ.

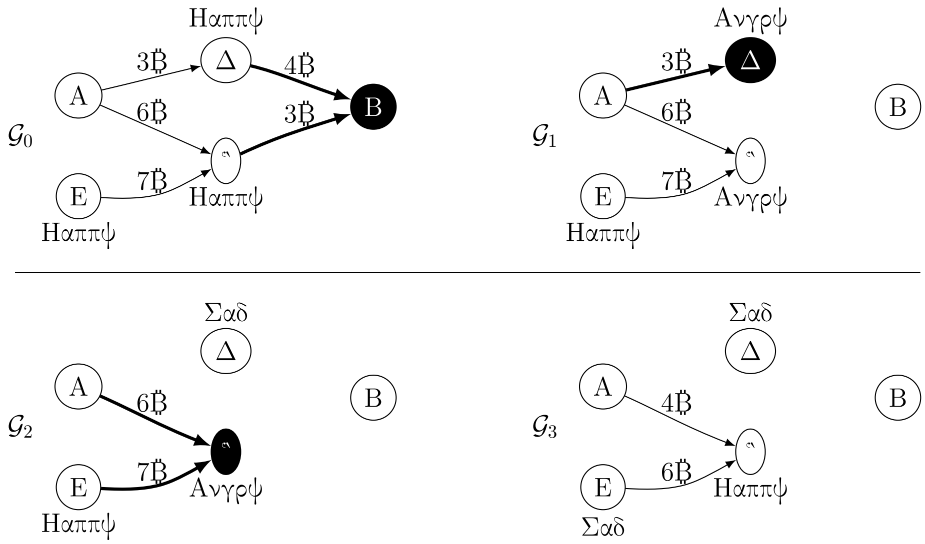
Ας ωε ςαν σεε, τηε δεφινιτιον ςοερς α μυλτιτυδε οφ οπτιονς φορ τηε ςονσερατιε πλαψερ, σινςε ιν ςασε $0 < Damage_{A,j} < in_{A,j-1}$ σηε ςαν ςηοοσε το διστριβυτε τηε $Steal\,()$ αςτιονς ιν ανψ ωαψ σηε ςηοοσες.

Τηε ρατιοναλε βεηινδ τηις στρατεγψ αρισες φρομ α ρεαλ-ωορλδ ςομμον σιτυατιον. Συπποσε τηερε αρε α ςλιεντ, αν ιντερμεδιαρψ ανδ α προδυςερ. Τηε ςλιεντ εντρυστς σομε αλυε το τηε ιντερμεδιαρψ σο τηατ τηε λαττερ ςαν βυψ τηε δεσιρεδ προδυςτ φρομ τηε προδυςερ ανδ δελιερ ιτ το τηε ςλιεντ. Τηε ιντερμεδιαρψ ιν τυρν εντρυστς αν εχυαλ αλυε το τηε προδυςερ, ωηο νεεδς τηε αλυε υπφροντ το βε αβλε το ςομπλετε τηε προδυςτιον προςεσς. Ηοωεερ τηε προδυςερ εεντυαλλψ δοες νοτ γιε τηε προδυςτ νειτηερ ρειμβυρσες τηε αλυε, δυε το βανκρυπτςψ ορ δεςισιον το εξιτ τηε μαρκετ ωιτη αν υνφαιρ βενεφιτ. Τηε ιντερμεδιαρψ ςαν ςηοοσε ειτηερ το ρειμβυρσε τηε ςλιεντ ανδ συφφερ τηε λοσς, ορ ρεφυσε το ρετυρν τηε μονεψ ανδ λοσε τηε ςλιεντ'ς τρυστ. Τηε λαττερ ςηοιςε φορ τηε ιντερμεδιαρψ ις εξαςτλψ τηε ςονσερατιε στρατεγψ. Ιτ ις υσεδ τηρουγηουτ τηις ωορκ ας α στρατεγψ φορ αλλ τηε ιντερμεδιαρψ πλαψερς βεςαυσε ιτ μοδελς εφφεςτιελψ τηε ωορστ-ςασε σςεναριο τηατ α ςλιεντ ςαν φαςε αφτερ αν ειλ πλαψερ δεςιδες το στεαλ εερψτηινγ σηε ςαν ανδ τηε ρεστ οφ τηε πλαψερς δο νοτ ενγαγε ιν ειλ αςτιιτψ.

Ωε ςοντινυε ωιτη α ερψ υσεφυλ ποσσιβλε εολυτιον οφ τηε γαμε, τηε Τρανσιτιε Γαμε. Ιν τυρν 0, τηερε ις αλρεαδψ α νετωορκ ιν πλαςε. Αλλ πλαψερς απαρτ φρομ A ανδ B φολλοω τηε ςονσερατιε στρατεγψ. Φυρτηερμορε, τηε σετ οφ πλαψερς ις νοτ μοδιφιεδ τηρουγηουτ τηε Τρανσιτιε Γαμε, τηυς ωε ςαν ρεφερ το $\mathcal{V}_j$ φορ ανψ τυρν j ας $\mathcal{V}$. Μορεοερ, εαςη ςονσερατιε πλαψερ ςαν βε ιν ονε οφ τηρεε στατες: Ηαππψ, Ανγρψ ορ Σαδ. Ηαππψ πλαψερς ηαε 0 λοσς, Ανγρψ πλαψερς ηαε ποσιτιε λοσς ανδ ποσιτιε ινςομινγ διρεςτ τρυστ, τηυς αρε αβλε το ρεπλενιση τηειρ λοσς ατ λεαστ ιν παρτ ανδ Σαδ πλαψερς ηαε ποσιτιε λοσς, βυτ 0 ινςομινγ διρεςτ τρυστ, τηυς τηεψ ςαννοτ ρεπλενιση τηε λοσς. Τηεσε ςονεντιονς ωιλλ ηολδ ωηενεερ ωε υσε τηε Τρανσιτιε Γαμε.

```
Τρανσιτιε Γαμε
Ινπυτ : γραπη $\mathcal{G}_0$, $A \in \mathcal{V}$ ιδλε πλαψερ, $B \in \mathcal{V}$ ειλ πλαψερ
Ανγρψ = Σαδ = $\emptyset$ · Ηαππψ = $\mathcal{V} \setminus \{A, B\}$
φορ ($v \in \mathcal{V} \setminus \{B\}$) $Loss_v$ = 0
θ = 0
ωηιλε (Τρυε)
  θ += 1· $v \xleftarrow{\$} \mathcal{V} \setminus \{A\}$
  $Turn_j$ = στρατεγψ[$v$]($\mathcal{G}_0$, $v$, $Cap_{v,0}$, $mathcalH_{1...j-1}$)
  εξεςυτεΤυρν($\mathcal{G}_{j-1}$, $v$, $Cap_{v,j-1}$, $Turn_j$)
  φορ (αςτιον $\in Turn_j$)
    αςτιον ματςη δο
      ςασε $Steal$(ψ, $w$) δο
        εξςηανγε = ψ
        $Loss_w$ += εξςηανγε
        ιφ ($v$ != $B$) $Loss_v$ -= εξςηανγε
        ιφ ($w$ != $A$)
          Ηαππψ = Ηαππψ $\setminus \{w\}$
          ιφ ($in_{w,j}$ == 0) Σαδ = Σαδ $\cup \{w\}$
          ελσε Ανγρψ = Ανγρψ $\cup \{w\}$
  ιφ ($v$ != $B$)
    Ανγρψ = Ανγρψ $\setminus \{v\}$
    ιφ ($Loss_v$ ' 0)  Σαδ = Σαδ $\cup \{v\}$        ˆ$in_{v,j}$ σηουλδ βε ζερο
    ιφ ($Loss_v$ == 0) Ηαππψ = Ηαππψ $\cup \{v\}$
```

Αν εξαμπλε εξεςυτιον φολλοως:



Φιγ.5: B στεαλς 7Ƀ, τηεν D στεαλς 3Ƀ ανδ φιναλλψ C στεαλς 3Ƀ

Λετ j_0 βε τηε φιρστ τυρν ον ωηιςη B ις ςηοσεν το πλαψ. Υντιλ τηεν, αλλ πλαψερς ωιλλ πασς τηειρ τυρν σινςε νοτηινγ ηας βεεν στολεν ψετ (σεε τηε Αππενδιξ (τηεορεμ 6) φορ α φορμαλ προοφ οφ τηις σιμπλε φαςτ). Μορεοερ, λετ $v = Player(j)$ ανδ $j' = prev\,(j)$. Τηε Τρανσιτιε Γαμε γενερατες τυρνς:

$$Turn_j = \bigcup_{w \in N^-(v)_{j-1}} \{Steal\,(y_w, w)\} \ , \tag{10}$$

ωηερε

$$\sum_{w \in N^-(v)_{j-1}} y_w = \min\left(in_{v,j-1}, Damage_{v,j}\right) \ .$$

Ωε σεε τηατ ιφ $Damage_{v,j} = 0$, τηεν $Turn_j = \emptyset$.

Φρομ τηε δεφινιτιον οφ $Damage_{v,j}$ ανδ κνοωινγ τηατ νο στρατεγψ ιν τηις ςασε ςαν ινςρεασε ανψ διρεςτ τρυστ, ωε σεε τηατ $Damage_{v,j} \geq 0$. Αλσο, ιτ ις $Loss_{v,j} \geq 0$ βεςαυσε ιφ $Loss_{v,j} < 0$, τηεν v ηας στολεν μορε αλυε τηαν σηε ηας βεεν στολεν, τηυς σηε ωουλδ νοτ βε φολλοωινγ τηε ςονσερατιε στρατεγψ.

6 Τρυστ Φλοω

Ωε ςαν νοω δεφινε τηε ινδιρεςτ τρυστ φρομ A το B. Ορισμός[Ινδιρεςτ Τρυστ] Τηε ινδιρεςτ τρυστ φρομ A το B αφτερ τυρν j ις δεφινεδ ας τηε μαξιμυμ ποσσιβλε αλυε τηατ ςαν βε στολεν φρομ A αφτερ τυρν j ιν τηε σεττινγ οφ ΤρανσιτιεΓαμε($\mathcal{G}_j$,A,B).

Ιτ ις $Tr_{A\to B} \geq DTr_{A\to B}$. Τηε νεξτ τηεορεμ σηοως τηατ $Tr_{A\to B}$ ις φινιτε.

Τηεορεμ 1 (Τρυστ ὂνεργενςε Τηεορεμ).
ὂνσιδερ α Τρανσιτιϵ Γαμϵ. Τηϵρϵ ϵξιστς α τυρν συςη τηατ αλλ συβσϵχυϵντ τυρνς αρϵ ϵμπτψ.

Προοφ Σκϵτςη. Ιφ τηε γαμε διδν'τ ςονεργε, τηε $Steal\,()$ αςτιονς ωουλδ ςοντινυε φορεερ ωιτηουτ ρεδυςτιον οφ τηε αμουντ στολεν οερ τιμε, τηυς τηεψ ωουλδ ρεαςη ινφινιτψ. Ηοωεερ τηις ις ιμποσσιβλε, σινςε τηερε εξιστς ονλψ φινιτε τοταλ διρεςτ τρυστ. □

Φυλλ προοφς οφ αλλ τηεορεμς ανδ λεμμας ςαν βε φουνδ ιν τηε Αππενδιξ.

Ιν τηε σεττινγ οφ `ΤρανσιτιεΓαμε`$(\mathcal{G}, A, B)$, ωε μακε υσε οφ τηε νοτατιον $Loss_A = Loss_{A,j}$, ωηερε j ις α τυρν τηατ τηε γαμε ηας ςονεργεδ. Ιτ ις ιμπορταντ το νοτε τηατ $Loss_A$ ις νοτ τηε σαμε φορ ρεπεατεδ εξεςυτιονς οφ τηις κινδ οφ γαμε, σινςε τηε ορδερ ιν ωηιςη πλαψερς αρε ςηοσεν μαψ διφφερ βετωεεν εξεςυτιονς ανδ τηε ςονσερατιε πλαψερς αρε φρεε το ςηοοσε ωηιςη ινςομινγ διρεςτ τρυστς τηεψ ωιλλ στεαλ ανδ ηοω μυςη φρομ εαςη.

Λετ G βε α ωειγητεδ διρεςτεδ γραπη. Ωε ωιλλ ινεστιγατε τηε μαξιμυμ φλοω ον τηις γραπη. Φορ αν ιντροδυςτιον το τηε μαξιμυμ φλοω προβλεμ σεε [5] π. 708. ὂνσιδερινγ εαςη εδγε'ς ςαπαςιτψ ας ιτς ωειγητ, α φλοω ασσιγνμεντ $X = [x_{vw}]_{\mathcal{V}\times\mathcal{V}}$ ωιτη α σουρςε A ανδ α σινκ B ις αλιδ ωηεν:

$$\forall (v,w) \in \mathcal{E}, x_{vw} \leq c_{vw} \text{ ανδ} \tag{11}$$

$$\forall v \in \mathcal{V} \setminus \{A, B\}, \sum_{w \in N^+(v)} x_{wv} = \sum_{w \in N^-(v)} x_{vw} \ . \tag{12}$$

Ωε δο νοτ συπποσε ανψ σκεω σψμμετρψ ιν X. Τηε φλοω αλυε ις $\sum\limits_{v \in N^+(A)} x_{Av}$, ωηιςη ις προεν το βε εχυαλ το $\sum\limits_{v \in N^-(B)} x_{vB}$. Τηερε εξιστς αν αλγοριτημ τηατ ρετυρνς τηε μαξιμυμ ποσσιβλε φλοω φρομ A το B, ναμελψ $MaxFlow\,(A,B)$. Τηις αλγοριτημ ειδεντλψ νεεδς φυλλ κνοωλεδγε οφ τηε γραπη. Τηε φαστεστ ερσιον οφ τηις αλγοριτημ ρυνς ιν $O\left(|\mathcal{V}||\mathcal{E}|\right)$ τιμε [6]. Ωε ρεφερ το τηε φλοω αλυε οφ $MaxFlow\,(A,B)$ ας $maxFlow\,(A,B)$.

Ωε ωιλλ νοω ιντροδυςε τωο λεμμας τηατ ωιλλ βε υσεδ το προε τηε ονε οφ τηε ςεντραλ ρεσυλτς οφ τηις ωορκ, τηε Τρυστ Φλοω τηεορεμ.

Λεμμα 1 (ΜαξΦλοως Αρε Τρανσιτιε Γαμες).
Λϵτ $\mathcal{G}$ βϵ α γαμϵ γραπη, λϵτ $A, B \in \mathcal{V}$ ανδ $MaxFlow\,(A,B)$ τηϵ μαξιμυμ φλοω φρομ A το B ϵξϵςυτϵδ ον $\mathcal{G}$. Τηϵρϵ ϵξιστς αν ϵξϵςυτιον οφ `ΤρανσιτιεΓαμε`$(\mathcal{G}, A, B)$ συςη τηατ $maxFlow\,(A,B) \leq Loss_A$.

Προοφ Σκετςη. Τηε δεσιρεδ εξεςυτιον οφ ΤρανσιτιεΓαμε() ωιλλ ςονταιν αλλ φλοως φρομ τηε $MaxFlow\,(A,B)$ ας εχυιαλεντ $Steal\,()$ αςτιονς. Τηε πλαψερς ωιλλ πλαψ ιν τυρνς, μοινγ φρομ B βαςκ το A. Εαςη πλαψερ ωιλλ στεαλ φρομ ηις πρεδεςεσσορς ας μυςη ας ωας στολεν φρομ ηερ. Τηε φλοως ανδ τηε ςονσερατιε στρατεγψ σηαρε τηε προπερτψ τηατ τηε τοταλ ινπυτ ις εχυαλ το τηε τοταλ ουτπυτ. □

Λεμμα 2 (Τρανσιτιε Γαμες Αρε Φλοως).
Λϵτ $\mathcal{H}$ =ΤρανσιτιεΓαμε($\mathcal{G}, A, B$) φορ σομϵ γαμϵ γραπη $\mathcal{G}$ ανδ $A, B \in \mathcal{V}$. Τηϵρϵ ϵξιστς α αλιδ φλοω $X = \{x_{wv}\}_{\mathcal{V}\times\mathcal{V}}$ ον $\mathcal{G}_0$ συςη τηατ $\sum_{v\in\mathcal{V}} x_{Av} = Loss_A$.

Προοφ Σκετςη. Ιφ ωε εξςλυδε τηε σαδ πλαψερς φρομ τηε γαμε, τηε $Steal\,()$ αςτιονς τηατ ρεμαιν ςονστιτυτε α αλιδ φλοω φρομ A το B. □

Τηεορεμ 2 (Τρυστ Φλοω Τηεορεμ).
Λϵτ $\mathcal{G}$ βϵ α γαμϵ γραπη ανδ $A, B \in \mathcal{V}$. Ιτ ηολδς τηατ

$$Tr_{A\to B} = maxFlow\,(A,B)\ .$$

Απόδειξη. Φρομ λεμμα 1 τηερε εξιστς αν εξεςυτιον οφ τηε Τρανσιτιε Γαμε συςη τηατ $Loss_A \geq maxFlow\,(A,B)$. Σινςε $Tr_{A\to B}$ ις τηε μαξιμυμ λοσς τηατ A ςαν συφφερ αφτερ τηε ςονεργενςε οφ τηε Τρανσιτιε Γαμε, ωε σεε τηατ

$$Tr_{A\to B} \geq maxFlow\,(A,B)\ . \tag{13}$$

Βυτ σομε εξεςυτιον οφ τηε Τρανσιτιε Γαμε γιες $Tr_{A\to B} = Loss_A$. Φρομ λεμμα 2, τηις εξεςυτιον ςορρεσπονδς το α φλοω. Τηυς

$$Tr_{A\to B} \leq maxFlow\,(A,B)\ . \tag{14}$$

Τηε τηεορεμ φολλοως φρομ (13) ανδ (14). □

Νοτε τηατ τηε μαξΦλοω ις τηε σαμε ιν τηε φολλοωινγ τωο ςασες: Ιφ α πλαψερ ςηοοσες τηε ειλ στρατεγψ ανδ ιφ τηατ πλαψερ ςηοοσες α αριατιον οφ τηε ειλ στρατεγψ ωηερε σηε δοες νοτ νυλλιφψ ηερ ουτγοινγ διρεςτ τρυστ.

Φυρτηερ ϑυστιφιςατιον οφ τρυστ τρανσιτιιτψ τηρουγη τηε υσε οφ $MaxFlow$ ςαν βε φουνδ ιν τηε σοςιολογιςαλ ωορκ ςονδυςτεδ ιν [4] ωηερε α διρεςτ ςορρεσπονδενςε οφ μαξιμυμ φλοως ανδ εμπιριςαλ τρυστ ις εξπεριμενταλλψ αλιδατεδ.

Ηερε ωε σεε ανοτηερ ιμπορταντ τηεορεμ τηατ γιες τηε βασις φορ ρισκ-ιναριαντ τρανσαςτιονς βετωεεν διφφερεντ, ποσσιβλψ υνκνοων, παρτιες.

Τηεορεμ 3 (Ρισκ Ιναριανςε Τηεορεμ). *Λετ $\mathcal{G}$ γαμε γραπη, $A, B \in \mathcal{V}$ ανδ l τηε δεσιρεδ αλυε το βε τρανσφερρεδ φρομ A το B, ωιτη $l \leq Tr_{A\to B}$. Λετ αλσο $\mathcal{G}'$ ωιτη τηε σαμε νοδες ας $\mathcal{G}$ συςη τηατ*

$$\forall v \in \mathcal{V}' \setminus \{A\}, \forall w \in \mathcal{V}', DTr'_{v\to w} = DTr_{v\to w} \ .$$

Φυρτηερμορε, συπποσε τηατ τηερε εξιστς αν ασσιγνμεντ φορ τηε ουτγοινγ διρεςτ τρυστ οφ $A, DTr'_{A\to v}$, συςη τηατ

$$Tr'_{A\to B} = Tr_{A\to B} - l \ . \tag{15}$$

Λετ ανοτηερ γαμε γραπη, $\mathcal{G}''$, βε ιδεντιςαλ το $\mathcal{G}'$ εξςεπτ φορ τηε φολλοωινγ ςηανγε:

$$DTr''_{A\to B} = DTr'_{A\to B} + l \ .$$

Ιτ τηεν ηολδς τηατ

$$Tr''_{A\to B} = Tr_{A\to B} \ .$$

Απόδειξη. Τηε τωο γραπης $\mathcal{G}'$ ανδ $\mathcal{G}''$ διφφερ ονλψ ον τηε ωειγητ οφ τηε εδγε (A, B), ωηιςη ις λαργερ βψ l ιν $\mathcal{G}''$. Τηυς τηε τωο $MaxFlow$ς ωιλλ ςηοοσε τηε σαμε φλοω, εξςεπτ φορ (A, B), ωηερε ιτ ωιλλ βε $x''_{AB} = x'_{AB} + l$. □

Ιτ ις ιντυιτιελψ οβιους τηατ ιτ ις ποσσιβλε φορ A το ρεδυςε ηερ ουτγοινγ διρεςτ τρυστ ιν α μαννερ τηατ αςηιεες (15), σινςε $maxFlow(A, B)$ ις ςοντινυους ωιτη ρεσπεςτ το A΄ς ουτγοινγ διρεςτ τρυστς. Ωε λεαε τηις ςαλςυλατιον ας παρτ οφ φυρτηερ ρεσεαρςη.

7 Σψβιλ Ρεσιλιενςε

Ονε οφ τηε πριμαρψ αιμς οφ τηις σψστεμ ις το μιτιγατε τηε δανγερ φορ Σψβιλ ατταςκς [7] ωηιλστ μαινταινινγ φυλλψ δεςεντραλιζεδ αυτονομψ.

Ηερε ωε εξτενδ τηε δεφινιτιον οφ ινδιρεςτ τρυστ το μανψ πλαψερς. Ορισμός[Ινδιρεςτ Τρυστ το Μυλτιπλε Πλαψερς] Τηε ινδιρεςτ τρυστ φρομ πλαψερ A το α σετ οφ πλαψερς, $S \subset \mathcal{V}$ ις δεφινεδ ας τηε μαξιμυμ ποσσιβλε αλυε τηατ ςαν βε στολεν φρομ A ιφ αλλ πλαψερς ιν S φολλοω τηε ειλ στρατεγψ, A φολλοως τηε ιδλε στρατεγψ ανδ εερψονε ελσε $(\mathcal{V} \setminus (S \cup \{A\}))$ φολλοως τηε ςονσερατιε στρατεγψ. Μορε φορμαλλψ, λετ $choices$ βε τηε διφφερεντ αςτιονς βετωεεν ωηιςη τηε ςονσερατιε πλαψερς ςαν ςηοοσε, τηεν

$$Tr_{A\to S,j} = \max_{j':j'>j,choices}\left[out_{A,j} - out_{A,j'}\right] \tag{16}$$

Ωε νοω εξτενδ Τρυστ Φλοω τηεορεμ (2) το μανψ πλαψερς.

Τηεορεμ 4 (Μυλτι-Πλαψερ Τρυστ Φλοω).
Λετ $S \subset \mathcal{V}$ ανδ T αυξιλιαρψ πλαψερ συςη τηατ $\forall B \in S, DTr_{B\to T} = \infty$. Ιτ ηολδς τηατ

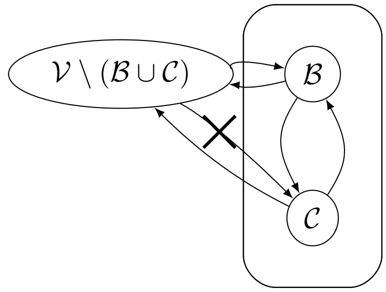
$$\forall A \in \mathcal{V} \setminus S, Tr_{A\to S} = maxFlow\left(A, T\right) \quad .$$

Απόδειξη. Ιφ T ςηοοσες τηε ειλ στρατεγψ ανδ αλλ πλαψερς ιν S πλαψ αςςορδινγ το τηε ςονσερατιε στρατεγψ, τηεψ ωιλλ ηαε το στεαλ αλλ τηειρ ινςομινγ διρεςτ τρυστ σινςε τηεψ ηαε συφφερεδ αν ινφινιτε λοσς, τηυς τηεψ ωιλλ αςτ ιν α ωαψ ιδεντιςαλ το φολλοωινγ τηε ειλ στρατεγψ ας φαρ ας $MaxFlow$ ις ςονςερνεδ. Τηε τηεορεμ φολλοως τηυς φρομ τηε Τρυστ Φλοω τηεορεμ. □

Ωε νοω δεφινε σεεραλ υσεφυλ νοτιονς το ταςκλε τηε προβλεμ οφ Σψβιλ ατταςκς. Λετ Εε βε α ποσσιβλε ατταςκερ. Ορισμός[ὃρρυπτεδ Σετ] Λετ $\mathcal{G}$ βε α γαμε γραπη ανδ λετ Εε ηαε α σετ οφ πλαψερς $\mathcal{B} \subset \mathcal{V}$ ςορρυπτεδ, σο τηατ σηε φυλλψ ςοντρολς τηειρ ουτγοινγ διρεςτ τρυστς το ανψ πλαψερ ιν $\mathcal{V}$ ανδ ςαν αλσο στεαλ αλλ ινςομινγ διρεςτ τρυστ το πλαψερς ιν $\mathcal{B}$. Ωε ςαλλ τηις τηε ςορρυπτεδ σετ. Τηε πλαψερς $\mathcal{B}$ αρε ςονσιδερεδ το βε λεγιτιματε βεφορε τηε ςορρυπτιον, τηυς τηεψ μαψ βε διρεςτλψ τρυστεδ βψ ανψ πλαψερ ιν $\mathcal{V}$.

Ορισμός[Σψβιλ Σετ] Λετ $\mathcal{G}$ βε α γαμε γραπη. Σινςε παρτιςιπατιον ιν τηε νετωορκ δοες νοτ ρεχυιρε ανψ κινδ οφ ρεγιστρατιον, Εε ςαν ςρεατε ανψ νυμβερ οφ πλαψερς. Ωε ωιλλ ςαλλ τηε σετ οφ τηεσε πλαψερς $\mathcal{C}$, ορ Σψβιλ σετ. Μορεοερ, Εε ςαν αρβιτραριλψ σετ τηε διρεςτ τρυστς οφ ανψ πλαψερ ιν $\mathcal{C}$ το ανψ πλαψερ ανδ ςαν αλσο στεαλ αλλ ινςομινγ διρεςτ τρυστ το πλαψερς ιν $\mathcal{C}$. Ηοωεερ, πλαψερς $\mathcal{C}$ ςαν βε διρεςτλψ τρυστεδ ονλψ βψ πλαψερς $\mathcal{B} \cup \mathcal{C}$ βυτ νοτ βψ πλαψερς $\mathcal{V} \setminus (\mathcal{B} \cup \mathcal{C})$, ωηερε $\mathcal{B}$ ις α σετ οφ πλαψερς ςορρυπτεδ βψ Εε.

Ορισμός[ὃλλυσιον] Λετ $\mathcal{G}$ βε α γαμε γραπη. Λετ $\mathcal{B} \subset \mathcal{V}$ βε α ςορρυπτεδ σετ ανδ $\mathcal{C} \subset \mathcal{V}$ βε α Σψβιλ σετ, βοτη ςοντρολλεδ βψ Εε. Τηε τυπλε $(\mathcal{B}, \mathcal{C})$ ις ςαλλεδ α ςολλυσιον ανδ ις εντιρελψ ςοντρολλεδ βψ α σινγλε εντιτψ ιν τηε πηψσιςαλ ωορλδ. Φρομ α γαμε τηεορετις ποιντ οφ ιεω, πλαψερς $\mathcal{V} \setminus (\mathcal{B} \cup \mathcal{C})$ περςειε τηε ςολλυσιον ας ινδεπενδεντ πλαψερς ωιτη α διστινςτ στρατεγψ εαςη, ωηερεας ιν ρεαλιτψ τηεψ αρε αλλ συβθεςτ το α σινγλε στρατεγψ διςτατεδ βψ τηε ςοντρολλινγ εντιτψ, Εε.



Σχ.6: Συνεργασία

Τηεορεμ 5 (Σψβιλ Ρεσιλιενςε).
Λετ $\mathcal{G}$ *βε α γαμε γραπη ανδ* $(\mathcal{B},\mathcal{C})$ *βε α ςολλυσιον οφ πλαψερς ον* $\mathcal{G}$*. Ιτ ις*

$$Tr_{A\to\mathcal{B}\cup\mathcal{C}} = Tr_{A\to\mathcal{B}} \ .$$

Προοφ Σκετςη. Τηε ινςομινγ διρεςτ τρυστ το $\mathcal{B}\cup\mathcal{C}$ ςαννοτ βε ηιγηερ τηαν τηε ινςομινγ διρεςτ τρυστ το $\mathcal{B}$ σινςε $\mathcal{C}$ ηας νο ινςομινγ διρεςτ τρυστ φρομ $\mathcal{V}\setminus(\mathcal{B}\cup\mathcal{C})$. □

Ωε ηαε προεν τηατ ςοντρολλινγ $|\mathcal{C}|$ ις ιρρελεαντ φορ Εε, τηυς Σψβιλ ατταςκς αρε μεανινγλεσς. Ωε νοτε τηατ τηις τηεορεμ δοες νοτ δελιερ ρεασσυρανςες αγαινστ ατταςκς ινολινγ δεςεπτιον τεςηνιχυες. Μορε σπεςιφιςαλλψ, α μαλιςιους πλαψερ ςαν ςρεατε σεεραλ ιδεντιτιες, υσε τηεμ λεγιτιματελψ το ινσπιρε οτηερς το δεποσιτ διρεςτ τρυστ το τηεσε ιδεντιτιες ανδ τηεν σωιτςη το τηε ειλ στρατεγψ, τηυς δεφραυδινγ εερψονε τηατ τρυστεδ τηε φαβριςατεδ ιδεντιτιες. Τηεσε ιδεντιτιες ςορρεσπονδ το τηε ςορρυπτεδ σετ οφ πλαψερς ανδ νοτ το τηε Σψβιλ σετ βεςαυσε τηεψ ηαε διρεςτ ινςομινγ τρυστ φρομ ουτσιδε τηε ςολλυσιον.

Ιν ςονςλυσιον, ωε ηαε συςςεσσφυλλψ δελιερεδ ουρ προμισε φορ α Σψβιλ-ρεσιλιεντ δεςεντραλιζεδ φινανςιαλ τρυστ σψστεμ ωιτη ιναριαντ ρισκ φορ πυρςηασες.

8 Ρελατεδ Ωορκ

Τηε τοπις οφ τρυστ ηας βεεν ρεπεατεδλψ ατταςκεδ ωιτη σεεραλ αππροαςηες: Πυρελψ ςρψπτογραπηις ινφραστρυςτυρε ωηερε τρυστ ις ρατηερ βιναρψ ανδ τρανσιτιιτψ ις λιμιτεδ το ονε στεπ βεψονδ αςτιελψ τρυστεδ παρτιες ις εξπλορεδ ιν ΠΓΠ [8]. Α τρανσιτιε ωεβ-οφ-τρυστ φορ φιγητινγ σπαμ ις εξπλορεδ ιν Φρεενετ [9]. Οτηερ σψστεμς ρεχυιρε ςεντραλ τρυστεδ τηιρδ παρτιες, συςη ας ῝Α-βασεδ ΠΚΙς [10] ανδ Βαζααρ [11], ορ, ιν τηε ςασε οφ ΒΦΤ, αυτηεντιςατεδ μεμβερσηιπ [12]. Ωηιλε οτηερ τρυστ σψστεμς αττεμπτ το βε δεςεντραλιζεδ, τηεψ δο νοτ προε ανψ Σψβιλ ρεσιλιενςε προπερτιες ανδ ηενςε μαψ βε Σψβιλ ατταςκαβλε. Συςη σψστεμς αρε ΦΙΡΕ [13], ῞ΟΡΕ [14] ανδ οτηερς [15,16,17]. Οτηερ σψστεμς τηατ δεφινε τρυστ ιν α νον-φινανςιαλ ωαψ αρε [18,19,20,21,22,23,24].

Ωε αγρεε ωιτη τηε ωορκ οφ [25] ιν τηατ τηε μεανινγ οφ τρυστ σηουλδ νοτ βε εξτραπολατεδ. Ωε ηαε αδοπτεδ τηειρ αδιςε ιν ουρ παπερ ανδ υργε ουρ ρεαδερς το αδηερε το τηε δεφινιτιονς οφ *διρεςτ* ανδ *ινδιρεςτ* τρυστ ας τηεψ αρε υσεδ ηερε.

Τηε Βεαερ μαρκετπλαςε [26] ινςλυδες α τρυστ μοδελ τηατ ρελιες ον φεες το δισςουραγε Σψβιλ ατταςκς. Ωε ςηοσε το αοιδ φεες ιν ουρ σψστεμ ανδ μιτιγατε Σψβιλ ατταςκς ιν α διφφερεντ μαννερ. Ουρ μοτιατινγ αππλιςατιον φορ εξπλορινγ τρυστ ιν α δεςεντραλιζεδ σεττινγ ις τηε ΟπενΒαζααρ μαρκετπλαςε. Τρανσιτιε φινανςιαλ τρυστ φορ ΟπενΒαζααρ ηας πρειουσλψ βεεν εξπλορεδ βψ [27]. Τηατ ωορκ ηοωεερ δοες νοτ δεφινε τρυστ ας α μονεταρψ αλυε. Ωε αρε στρονγλψ ινσπιρεδ βψ [4] ωηιςη γιες α σοςιολογιςαλ ϑυστιφιςατιον φορ τηε ςεντραλ δεσιγν ςηοιςε οφ ιδεντιφψινγ τρυστ ωιτη ρισκ. Ωε γρεατλψ αππρεςιατε τηε ωορκ ιν ΤρυστΔαις [28], ωηιςη προποσες α φινανςιαλ τρυστ σψστεμ τηατ εξηιβιτς τρανσιτιε προπερτιες ανδ ιν ωηιςη τρυστ ις δεφινεδ ας λινεσ-οφ-ςρεδιτ, σιμιλαρ το ουρ σψστεμ. Ωε ωερε αβλε το εξτενδ τηειρ ωορκ βψ υσινγ τηε βλοςκςηαιν φορ αυτοματεδ προοφσ-οφ-ρισκ, α φεατυρε νοτ ααιλαβλε το τηεμ ατ τηε τιμε.

Ουρ ςονσερατιε στρατεγψ ανδ Τρανσιτιε Γαμε αρε ερψ σιμιλαρ το τηε μεςηανισμ προποσεδ βψ τηε εςονομις παπερ [29] ωηιςη αλσο ιλλυστρατες φινανςιαλ τρυστ τρανσιτιιτψ ανδ ις υσεδ βψ Ριππλε [30] ανδ Στελλαρ [31]. ΙΟΥς ιν τηεσε ςορρεσπονδ το ρεερσεδ εδγες οφ τρυστ ιν ουρ σψστεμ. Τηε ςριτιςαλ διφφερενςε ις τηατ ουρ δενομινατιονς οφ τρυστ αρε εξπρεσσεδ ιν α γλοβαλ ςυρρενςψ ανδ τηατ ςοινς μυστ πρε-εξιστ ιν ορδερ το βε τρυστεδ ανδ σο τηερε ις νο μονεψ-ασ-δεβτ. Φυρτηερμορε, ωε προε τηατ τρυστ ανδ μαξιμυμ φλοως αρε εχυιαλεντ, α διρεςτιον νοτ εξπλορεδ ιν τηειρ παπερ, εεν τηουγη ωε βελιεε ιτ μυστ ηολδ φορ αλλ βοτη ουρ ανδ τηειρ σψστεμς.

9 Φυρτηερ Ρεσεαρςη

Ωηεν *Alice* μακες α πυρςηασε φρομ *Bob*, σηε ηας το ρεδυςε ηερ ουτγοινγ διρεςτ τρυστ ιν α μαννερ συςη τηατ τηε συπποσιτιον (15) οφ Ρισκ Ιναριανςε τηεορεμ ις σατισφιεδ. Ηοω *Alice* ςαν ρεςαλςυλατε ηερ ουτγοινγ διρεςτ τρυστ ωιλλ βε δισςυσσεδ ιν α φυτυρε παπερ.

Ουρ γαμε ις στατις. Ιν α φυτυρε δψναμις σεττινγ, υσερς σηουλδ βε αβλε το πλαψ σιμυλτανεουσλψ, φρεελψ ϑοιν, δεπαρτ ορ δισςοννεςτ τεμποραριλψ φρομ τηε νετωορκ. Οτηερ τψπες οφ μυλτισιγς, συςη ας 1-οφ-3, ςαν βε εξπλορεδ φορ τηε ιμπλεμεντατιον οφ μυλτι-παρτψ διρεςτ τρυστ.

ΜαξΦλοω ιν ουρ ςασε νεεδς ςομπλετε νετωορκ κνοωλεδγε, ωηιςη ςαν λεαδ το πριαςψ ισσυες τηρουγη δεανονψμισατιον τεςηνιχυες [32]. ἃλςυλατινγ τηε φλοως ιν ζερο κνοωλεδγε ρεμαινς αν οπεν χυεστιον. [33] ανδ ιτς ςεντραλιζεδ πρεδεςεσσορ, ΠριΠαψ [34], σεεμ το οφφερ ιναλυαβλε ινσιγητ ιντο ηοω πριαςψ ςαν βε αςηιεεδ.

Ουρ γαμε τηεορετις αναλψσις ις σιμπλε. Αν ιντερεστινγ αναλψσις ωουλδ ινολε μοδελλινγ ρεπεατεδ πυρςηασες ωιτη τηε ρεσπεςτιε εδγε υπδατες ον τηε τρυστ γραπη ανδ τρεατινγ τρυστ ον τηε νετωορκ ας παρτ οφ τηε υτιλιτψ φυνςτιον.

Αν ιμπλεμεντατιον ας α ωαλλετ ον ανψ βλοςκςηαιν οφ ουρ φινανςιαλ γαμε ις μοστ ωελςομε. Α σιμυλατιον ορ αςτυαλ ιμπλεμεντατιον οφ Τρυστ Ις Ρισκ, ςομβινεδ ωιτη αναλψσις οφ τηε ρεσυλτινγ δψναμιςς ςαν ψιελδ ιντερεστινγ εξπεριμενταλ ρεσυλτς. Συβσεχυεντλψ, ουρ τρυστ νετωορκ ςαν βε υσεδ ιν οτηερ αππλιςατιονς, συςη ας δεςεντραλιζεδ σοςιαλ νετωορκς [35].

Αππενδιξ

1 Προοφς, Λεμμας ανδ Τηεορεμς

Λεμμα 3 (*Loss* Εχυιαλεντ το *Damage*).
δνσιδϵρ α Τρανσιτιϵ Γαμϵ. Λϵτ $j \in \mathbb{N}$ *ανδ* $v = Player(j)$ *συςη τηατ* v *ις φολλοωινγ τηϵ ςονσϵρατιϵ στρατϵγψ. Ιτ ηολδς τηατ*

$$\min\left(in_{v,j}, Loss_{v,j}\right) = \min\left(in_{v,j}, Damage_{v,j}\right) \quad .$$

Απόδειξη.
ἃσε 1: Λετ $v \in Happy_{j-1}$. Τηεν

1. $v \in Happy_j$ βεςαυσε $Turn_j = \emptyset$,
2. $Loss_{v,j} = 0$ βεςαυσε οτηερωισε $v \notin Happy_j$,
3. $Damage_{v,j} = 0$, ορ ελσε ανψ ρεδυςτιον ιν διρεςτ τρυστ το v ωουλδ ινςρεασε εχυαλλψ $Loss_{v,j}$ (λινε 12), ωηιςη ςαννοτ βε δεςρεασεδ αγαιν βυτ δυρινγ αν Ανγρψ πλαψερ΄ς τυρν (λινε 13).
4. $in_{v,j} \geq 0$

Τηυς

$$\min\left(in_{v,j}, Loss_{v,j}\right) = \min\left(in_{v,j}, Damage_{v,j}\right) = 0 \quad .$$

ἃσε 2: Λετ $v \in Sad_{j-1}$. Τηεν

1. $v \in Sad_j$ βεςαυσε $Turn_j = \emptyset$,

2. $in_{v,j} = 0$ (λινε 20),
3. $Damage_{v,j} \geq 0 \wedge Loss_{v,j} \geq 0$.

Τηυς

$$\min\left(in_{v,j}, Loss_{v,j}\right) = \min\left(in_{v,j}, Damage_{v,j}\right) = 0 \ .$$

Ιφ $v \in Angry_{j-1}$ τηεν τηε σαμε αργυμεντ ας ιν ςασες 1 ανδ 2 ηολδ ωηεν $v \in Happy_j$ ανδ $v \in Sad_j$ ρεσπεςτιελψ ιφ ωε ιγνορε τηε αργυμεντ (1). Τηυς τηε τηεορεμ ηολδς ιν εερψ ςασε. □

Προοφ οφ Τηεορεμ 1: Τρυστ ὂνεργενςε

Φιρστ οφ αλλ, αφτερ τυρν j_0 πλαψερ E ωιλλ αλωαψς πασς ηερ τυρν βεςαυσε σηε ηας αλρεαδψ νυλλιφιεδ ηερ ινςομινγ ανδ ουτγοινγ διρεςτ τρυστς ιν $Turn_{j_0}$, τηε ειλ στρατεγψ δοες νοτ ςονταιν ανψ ςασε ωηερε διρεςτ τρυστ ις ινςρεασεδ ορ ωηερε τηε ειλ πλαψερ σταρτς διρεςτλψ τρυστινγ ανοτηερ πλαψερ ανδ τηε οτηερ πλαψερς δο νοτ φολλοω α στρατεγψ ιν ωηιςη τηεψ ςαν ςηοοσε το $Add\,()$ διρεςτ τρυστ το E. Τηε σαμε ηολδς φορ πλαψερ A βεςαυσε σηε φολλοως τηε ιδλε στρατεγψ. Ας φαρ ας τηε ρεστ οφ τηε πλαψερς αρε ςονςερνεδ, ςονσιδερ τηε Τρανσιτιε Γαμε. Ας ωε ςαν σεε φρομ λινες 2 ανδ 12 - 13, ιτ ις

$$\forall j, \sum_{v \in \mathcal{V}_j} Loss_v = in_{E,j_0-1} \ .$$

Ιν οτηερ ωορδς, τηε τοταλ λοσς ις ςονσταντ ανδ εχυαλ το τηε τοταλ αλυε στολεν βψ E. Αλσο, ας ωε ςαν σεε ιν λινες 1 ανδ 20, ωηιςη αρε τηε ονλψ λινες ωηερε τηε Sad σετ ις μοδιφιεδ, ονςε α πλαψερ εντερς τηε Sad σετ, ιτ ις ιμποσσιβλε το εξιτ φρομ τηις σετ. Αλσο, ωε ςαν σεε τηατ πλαψερς ιν $Sad \cup Happy$ αλωαψς πασς τηειρ τυρν. Ωε ωιλλ νοω σηοω τηατ εεντυαλλψ τηε $Angry$ σετ ωιλλ βε εμπτψ, ορ εχυιαλεντλψ τηατ εεντυαλλψ εερψ πλαψερ ωιλλ πασς τηειρ τυρν. Συπποσε τηατ ιτ ις ποσσιβλε το ηαε αν ινφινιτε αμουντ οφ τυρνς ιν ωηιςη πλαψερς δο νοτ ςηοοσε το πασς. Ωε κνοω τηατ τηε νυμβερ οφ νοδες ις φινιτε, τηυς τηις ις ποσσιβλε ονλψ ιφ

$$\exists j' : \forall j \geq j', |Angry_j \cup Happy_j| = c > 0 \wedge Angry_j \neq \emptyset \ .$$

Τηις στατεμεντ ις αλιδ βεςαυσε τηε τοταλ νυμβερ οφ ανγρψ ανδ ηαππψ πλαψερς ςαννοτ ινςρεασε βεςαυσε νο πλαψερ λεαες τηε Sad σετ ανδ ιφ ιτ ωερε το βε δεςρεασεδ, ιτ ωουλδ εεντυαλλψ ρεαςη 0. Σινςε $Angry_j \neq \emptyset$, α πλαψερ v τηατ ωιλλ νοτ πασς ηερ τυρν ωιλλ εεντυαλλψ βε ςηοσεν το πλαψ. Αςςορδινγ το τηε Τρανσιτιε Γαμε, v ωιλλ ειτηερ δεπλετε ηερ ινςομινγ διρεςτ τρυστ ανδ εντερ τηε Sad σετ (λινε 20), ωηιςη ις ςοντραδιςτινγ $|Angry_j \cup Happy_j| = c$, ορ ωιλλ στεαλ ενουγη αλυε το εντερ τηε $Happy$ σετ, τηατ ις v ωιλλ αςηιεε $Loss_{v,j} = 0$. Συπποσε τηατ σηε ηας στολεν m πλαψερς.

Τηεψ, ιν τηειρ τυρν, ωιλλ στεαλ τοταλ αλυε ατ λεαστ εχυαλ το τηε αλυε στολεν βψ v (σινςε τηεψ ςαννοτ γο σαδ, ας εξπλαινεδ αβοε). Ηοωεερ, τηις μεανς τηατ, σινςε τηε τοταλ αλυε βεινγ στολεν ωιλλ νεερ βε ρεδυςεδ ανδ τηε τυρνς τηις ωιλλ ηαππεν αρε ινφινιτε, τηε πλαψερς μυστ στεαλ αν ινφινιτε αμουντ οφ αλυε, ωηιςη ις ιμποσσιβλε βεςαυσε τηε διρεςτ τρυστς αρε φινιτε ιν νυμβερ ανδ ιν αλυε. Μορε πρεςισελψ, λετ j_1 βε α τυρν ιν ωηιςη α ςονσερατιε πλαψερ ις ςηοσεν ανδ

$$\forall j \in \mathbb{N}, DTr_j = \sum_{w,w' \in \mathcal{V}} DTr_{w \to w',j} \ .$$

Αλσο, ωιτηουτ λοσς οφ γενεραλιτψ, συπποσε τηατ

$$\forall j \geq j_1, out_{A,j} = out_{A,j_1} \ .$$

Ιν $Turn_{j_1}$, v στεαλς

$$St = \sum_{i=1}^{m} y_i \ .$$

Ωε ωιλλ σηοω υσινγ ινδυςτιον τηατ

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists j_n \in \mathbb{N} : DTr_{j_n} \leq DTr_{j_1-1} - nSt \ .$$

Βασε ςασε: Ιτ ηολδς τηατ

$$DTr_{j_1} = DTr_{j_1-1} - St \ .$$

Εεντυαλλψ τηερε ις α τυρν j_2 ωηεν εερψ πλαψερ ιν $N^-(v)_{j-1}$ ωιλλ ηαε πλαψεδ. Τηεν ιτ ηολδς τηατ

$$DTr_{j_2} \leq DTr_{j_1} - St = DTr_{j_1-1} - 2St \ ,$$

σινςε αλλ πλαψερς ιν $N^-(v)_{j-1}$ φολλοω τηε ςονσερατιε στρατεγψ, εξςεπτ φορ A, ωηο ωιλλ νοτ ηαε βεεν στολεν ανψτηινγ δυε το τηε συππоσιτιον.

Ινδυςτιον ηψποτηεσις: Συπποσε τηατ

$$\exists k > 1 : j_k > j_{k-1} > j_1 \Rightarrow DTr_{j_k} \leq DTr_{j_{k-1}} - St \ .$$

Ινδυςτιον στεπ: Τηερε εξιστς α συβσετ οφ τηε $Angry$ πλαψερς, S, τηατ ηαε βεεν στολεν ατ λεαστ αλυε St ιν τοταλ βετωεεν τηε τυρνς j_{k-1} ανδ j_k, τηυς τηερε εξιστς α τυρν j_{k+1} συςη τηατ αλλ πλαψερς ιν S ωιλλ ηαε πλαψεδ ανδ τηυς

$$DTr_{j_{k+1}} \leq DTr_{j_k} - St \ .$$

Ωε ηαε προεν βψ ινδυςτιον τηατ

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists j_n \in \mathbb{N} : DTr_{j_n} \le DTr_{j_1-1} - nSt \ .$$

Ηοωεερ

$$DTr_{j_1-1} \ge 0 \wedge St > 0 \ ,$$

τηυς

$$\exists n' \in \mathbb{N} : n'St > DTr_{j_1-1} \Rightarrow DTr_{j_{n'}} < 0 \ .$$

Ωε ηαε α ςοντραδιςτιον βεςαυσε

$$\forall w, w' \in \mathcal{V}, \forall j \in \mathbb{N}, DTr_{w \to w',j} \ge 0 \ ,$$

τηυς εεντυαλλψ $Angry = \emptyset$ ανδ εερψβοδψ πασσες. □

Προοφ οφ Λεμμα 1: ΜαξΦλοως Αρε Τρανσιτιε Γαμες

Ωε συπποσε τηατ τηε τυρν οφ $\mathcal{G}$ ις 0. Ιν οτηερ ωορδς, $\mathcal{G} = \mathcal{G}_0$. Λετ $X = \{x_{vw}\}_{\mathcal{V}\times\mathcal{V}}$ βε τηε φλοως ρετυρνεδ βψ $MaxFlow\,(A, B)$. Φορ ανψ γραπη G τηερε εξιστς α $MaxFlow$ τηατ ις α ΔΑΓ. Ωε ςαν εασιλψ προε τηις υσινγ τηε Φλοω Δεςομποσιτιον τηεορεμ [36], ωηιςη στατες τηατ εαςη φλοω ςαν βε σεεν ας α φινιτε σετ οφ πατης φρομ A το B ανδ ςψςλες, εαςη ηαινγ α ςερταιν φλοω. Ωε εξεςυτε $MaxFlow\,(A, B)$ ανδ ωε αππλψ τηε αφορεμεντιονεδ τηεορεμ. Τηε ςψςλες δο νοτ ινφλυενςε τηε $maxFlow\,(A, B)$, τηυς ωε ςαν ρεμοε τηεσε φλοως. Τηε ρεσυλτινγ φλοω ις α $MaxFlow\,(A, B)$ ωιτηουτ ςψςλες, τηυς ιτ ις α ΔΑΓ. Τοπολογιςαλλψ σορτινγ τηις ΔΑΓ, ωε οβταιν α τοταλ ορδερ οφ ιτς νοδες συςη τηατ $\forall$ νοδες $v, w \in \mathcal{V} : v < w \Rightarrow x_{wv} = 0$ [5]. Πυτ διφφερεντλψ, τηερε ις νο φλοω φρομ λαργερ το σμαλλερ νοδες. B ις μαξιμυμ σινςε ιτ ις τηε σινκ ανδ τηυς ηας νο ουτγοινγ φλοω το ανψ νοδε ανδ A ις μινιμυμ σινςε ιτ ις τηε σουρςε ανδ τηυς ηας νο ινςομινγ φλοω φρομ ανψ νοδε. Τηε δεσιρεδ εξεςυτιον οφ Τρανσιτιε Γαμε ωιλλ ςηοοσε πλαψερς φολλοωινγ τηε τοταλ ορδερ ινερσελψ, σταρτινγ φρομ πλαψερ B. Ωε οβσερε τηατ $\forall v \in \mathcal{V} \setminus \{A, B\}, \sum\limits_{w \in \mathcal{V}} x_{wv} = \sum\limits_{w \in \mathcal{V}} x_{vw} \le maxFlow\,(A, B) \le in_{B,0}$. Πλαψερ B ωιλλ φολλοω α μοδιφιεδ ειλ στρατεγψ ωηερε σηε στεαλς αλυε εχυαλ το ηερ τοταλ ινςομινγ φλοω, νοτ ηερ τοταλ ινςομινγ διρεςτ τρυστ. Λετ j_2 βε τηε φιρστ τυρν ωηεν A ις ςηοσεν το πλαψ. Ωε ωιλλ σηοω υσινγ στρονγ ινδυςτιον τηατ τηερε εξιστς α σετ οφ αλιδ αςτιονς φορ εαςη πλαψερ αςςορδινγ το τηειρ ρεσπεςτιε στρατεγψ συςη τηατ ατ τηε ενδ οφ εαςη τυρν j τηε ςορρεσπονδινγ πλαψερ $v = Player\,(j)$ ωιλλ ηαε στολεν αλυε x_{wv} φρομ εαςη ιν-νειγηβουρ w.

Βασε ςασε: Ιν τυρν 1, B στεαλς αλυε εχυαλ το $\sum_{w\in\mathcal{V}} x_{wB}$, φολλοωινγ τηε μοδιφιεδ ειλ στρατεγψ.

$$Turn_1 = \bigcup_{v\in N^-(B)_0} \{Steal\,(x_{vB}, v)\}$$

Ινδυςτιον ηψποτηεσις: Λετ $k \in [j_2-2]$. Ωε συπποσε τηατ $\forall i \in [k]$, τηερε εξιστς α αλιδ σετ οφ αςτιονς, $Turn_i$, περφορμεδ βψ $v = Player\,(i)$ συςη τηατ v στεαλς φρομ εαςη πλαψερ w αλυε εχυαλ το x_{wv}.

$$\forall i \in [k], Turn_i = \bigcup_{w\in N^-(v)_{i-1}} \{Steal\,(x_{wv}, w)\}$$

Ινδυςτιον στεπ: Λετ $j = k+1, v = Player\,(j)$. Σινςε αλλ τηε πλαψερς τηατ αρε γρεατερ τηαν v ιν τηε τοταλ ορδερ ηαε αλρεαδψ πλαψεδ ανδ αλλ οφ τηεμ ηαε στολεν αλυε εχυαλ το τηειρ ινςομινγ φλοω, ωε δεδυςε τηατ v ηας βεεν στολεν αλυε εχυαλ το $\sum_{w\in N^+(v)_{j-1}} x_{vw}$. Σινςε ιτ ις τηε φιρστ τιμε v πλαψς, $\forall w \in N^-(v)_{j-1}, DTr_{w\to v,j-1} = DTr_{w\to v,0} \geq x_{wv}$, τηυς v ις αβλε το ςηοοσε τηε φολλοωινγ τυρν:

$$Turn_j = \bigcup_{w\in N^-(v)_{j-1}} \{Steal\,(x_{wv}, w)\}$$

Μορεοερ, τηις τυρν σατισφιες τηε ςονσερατιε στρατεγψ σινςε

$$\sum_{w\in N^-(v)_{j-1}} x_{wv} = \sum_{w\in N^+(v)_{j-1}} x_{vw}\ .$$

Τηυς $Turn_j$ ις α αλιδ τυρν φορ τηε ςονσερατιε πλαψερ v.

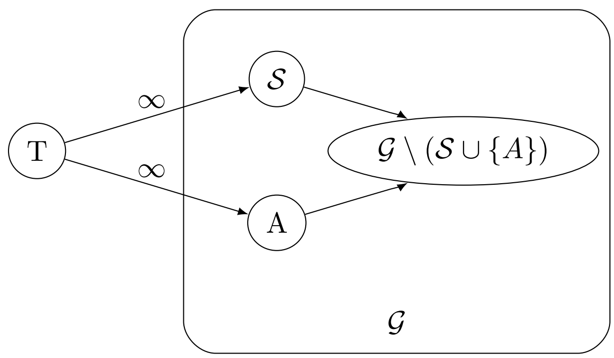
Ωε ηαε προεν τηατ ιν τηε ενδ οφ τυρν j_2-1, πλαψερ B ανδ αλλ τηε ςονσερατιε πλαψερς ωιλλ ηαε στολεν αλυε εξαςτλψ εχυαλ το τηειρ τοταλ ινςομινγ φλοω, τηυς A ωιλλ ηαε βεεν στολεν αλυε εχυαλ το ηερ ουτγοινγ φλοω, ωηιςη ις $maxFlow\,(A,B)$. Σινςε τηερε ρεμαινς νο Ανγρψ πλαψερ, j_2 ις α ςονεργενςε τυρν, τηυς $Loss_{A,j_2} = Loss_A$. Ωε ςαν αλσο σεε τηατ ιφ B ηαδ ςηοσεν τηε οριγιναλ ειλ στρατεγψ, τηε δεσςριβεδ αςτιονς ωουλδ στιλλ βε αλιδ ονλψ βψ συππλεμεντινγ τηεμ ωιτη αδδιτιοναλ $Steal\,()$ αςτιονς, τηυς $Loss_A$ ωουλδ φυρτηερ ινςρεασε. Τηις προες τηε λεμμα. □

Προοφ οφ Λεμμα 2: Τρανσιτιε Γαμες Αρε Φλοως

Λετ $Sad, Happy, Angry$ βε ας δεφινεδ ιν τηε Τρανσιτιε Γαμε. Λετ $\mathcal{G}'$ βε α διρεςτεδ ωειγητεδ γραπη βασεδ ον $\mathcal{G}$ ωιτη αν αυξιλιαρψ σουρςε. Λετ αλσο

j_1 βε α τυρν ωηεν τηε Τρανσιτιε Γαμε ηας ςονεργεδ. Μορε πρεςισελψ, $\mathcal{G}'$ ις δεφινεδ ας φολλοως:

$$\mathcal{V}' = \mathcal{V} \cup \{T\}$$
$$\mathcal{E}' = \mathcal{E} \cup \{(T, A)\} \cup \{(T, v) : v \in Sad_{j_1}\}$$
$$\forall (v, w) \in \mathcal{E}, c'_{vw} = DTr_{v \to w,0} - DTr_{v \to w,j_1}$$
$$\forall v \in Sad_{j_1}, c'_{Tv} = c'_{TA} = \infty$$



Φιγ.7: Γραπη $\mathcal{G}'$, δεριεδ φρομ $\mathcal{G}$ ωιτη Αυξιλιαρψ Σουρςε T.

Ιν τηε φιγυρε αβοε, $\mathcal{S}$ ις τηε σετ οφ σαδ πλαψερς. Ωε οβσερε τηατ $\forall v \in \mathcal{V}$,

$$\begin{aligned} &\sum_{w \in N^-(v)' \setminus \{T\}} c'_{wv} = \\ &= \sum_{w \in N^-(v)' \setminus \{T\}} (DTr_{w \to v,0} - DTr_{w \to v,j_1}) = \\ &= \sum_{w \in N^-(v)' \setminus \{T\}} DTr_{w \to v,0} - \sum_{w \in N^-(v)' \setminus \{T\}} DTr_{w \to v,j-1} = \\ &= in_{v,0} - in_{v,j_1} \end{aligned} \tag{17}$$

ανδ

$$\begin{aligned} &\sum_{w \in N^+(v)' \setminus \{T\}} c'_{vw} = \\ &= \sum_{w \in N^+(v)' \setminus \{T\}} (DTr_{v \to w,0} - DTr_{v \to w,j_1}) = \\ &= \sum_{w \in N^+(v)' \setminus \{T\}} DTr_{v \to w,0} - \sum_{w \in N^+(v)' \setminus \{T\}} DTr_{v \to w,j-1} = \\ &= out_{v,0} - out_{v,j_1} \quad . \end{aligned} \tag{18}$$

Ωε ςαν συπποσε τηατ

$$\forall j \in \mathbb{N}, in_{A,j} = 0 \ , \tag{19}$$

σινςε ιφ ωε φινδ α αλιδ φλοω υνδερ τηις ασσυμπτιον, τηε φλοω ωιλλ στιλλ βε αλιδ φορ τηε οριγιναλ γραπη.
Νεξτ ωε τρψ το ςαλςυλατε $MaxFlow\,(T,B) = X'$ ον γραπη $\mathcal{G}'$. Ωε οβσερε τηατ α φλοω ιν ωηιςη ιτ ηολδς τηατ $\forall v,w \in \mathcal{V}, x'_{vw} = c'_{vw}$ ςαν βε αλιδ φορ τηε φολλοωινγ ρεασονς:

- $\forall v,w \in \mathcal{V}, x'_{vw} \leq c'_{vw}$ (ἆπαςιτψ φλοω ρεχυιρεμεντ (11) $\forall e \in \mathcal{E}$)
- Σινςε $\forall v \in Sad_{j_1} \cup \{A\}, c'_{Tv} = \infty$, ρεχυιρεμεντ (11) ηολδς φορ ανψ φλοω $x'_{Tv} \geq 0$.
- Λετ $v \in \mathcal{V}' \setminus (Sad_{j_1} \cup \{T,A,B\})$. Αςςορδινγ το τηε ςονσερατιε στρατεγψ ανδ σινςε $v \notin Sad_{j_1}$, ιτ ηολδς τηατ

  $$out_{v,0} - out_{v,j_1} = in_{v,0} - in_{v,j_1} \ .$$

  ὂμβινινγ τηις οβσερατιον ωιτη (17) ανδ (18), ωε ηαε τηατ

  $$\sum_{w \in \mathcal{V}'} c'_{vw} = \sum_{w \in \mathcal{V}'} c'_{wv} \ .$$

  (Φλοω ὂνσερατιον ρεχυιρεμεντ (12) $\forall v \in \mathcal{V}' \setminus (Sad_{j_1} \cup \{T,A,B\})$)
- Λετ $v \in Sad_{j_1}$. Σινςε v ις σαδ, ωε κνοω τηατ

  $$out_{v,0} - out_{v,j_1} > in_{v,0} - in_{v,j_1} \ .$$

  Σινςε $c'_{Tv} = \infty$, ωε ςαν σετ

  $$x'_{Tv} = (out_{v,0} - out_{v,j_1}) - (in_{v,0} - in_{v,j_1}) \ .$$

  Ιν τηις ωαψ, ωε ηαε

  $$\sum_{w \in \mathcal{V}'} x'_{vw} = out_{v,0} - out_{v,j_1} \text{ ανδ}$$

  $$\sum_{w \in \mathcal{V}'} x'_{wv} = \sum_{w \in \mathcal{V}' \setminus \{T\}} c'_{wv} + x'_{Tv} = in_{v,0} - in_{v,j_1} +$$
  $$+ (out_{v,0} - out_{v,j_1}) - (in_{v,0} - in_{v,j_1}) = out_{v,0} - out_{v,j_1} \ .$$

  τηυς

  $$\sum_{w \in \mathcal{V}'} x'_{vw} = \sum_{w \in \mathcal{V}'} x'_{wv} \ .$$

  (Ρεχυιρεμεντ 12 $\forall v \in Sad_{j_1}$)

– Σινςε $c'_{TA} = \infty$, ως ςαν σετ

$$x'_{TA} = \sum_{v \in \mathcal{V}'} x'_{Av} \ ,$$

τηυς φρομ (19) ως ηαε

$$\sum_{v \in \mathcal{V}'} x'_{vA} = \sum_{v \in \mathcal{V}'} x'_{Av} \ .$$

(Ρεχυιρεμεντ 12 φορ A)

Ωε σαω τηατ φορ αλλ νοδες, τηε νεςεσσαρψ προπερτιες φορ α φλοω το βε αλιδ ηολδ ανδ τηυς X' ις α αλιδ φλοω φορ $\mathcal{G}$. Μορεοερ, τηις φλοω ις εχυαλ το $maxFlow\,(T, B)$ βεςαυσε αλλ ινςομινγ φλοως το E αρε σατυρατεδ. Αλσο ως οβσερε τηατ

$$\sum_{v \in \mathcal{V}'} x'_{Av} = \sum_{v \in \mathcal{V}'} c'_{Av} = out_{A,0} - out_{A,j_1} = Loss_A \ . \tag{20}$$

Ωε δεφινε ανοτηερ γραπη, $\mathcal{G}''$, βασεδ ον $\mathcal{G}'$.

$$\mathcal{V}'' = \mathcal{V}'$$

$$E(\mathcal{G}'') = E(\mathcal{G}') \setminus \{(T, v) : v \in Sad_j\}$$
$$\forall e \in E(\mathcal{G}''), c''_e = c'_e$$

Ιφ ως εξεςυτε $MaxFlow(T, B)$ ον τηε γραπη $\mathcal{G}''$, ως ωιλλ οβταιν α φλοω X'' ιν ωηιςη

$$\sum_{v \in \mathcal{V}''} x''_{Tv} = x''_{TA} = \sum_{v \in \mathcal{V}''} x''_{Av} \ .$$

Τηε ουτγοινγ φλοω φρομ A ιν X'' ωιλλ ρεμαιν τηε σαμε ας ιν X' φορ τωο ρεασονς: Φιρστλψ, υσινγ τηε Φλοω Δεςομποσιτιον τηεορεμ [36] ανδ δελετινγ τηε πατης τηατ ςονταιν εδγες $(T, v) : v \neq A$, ως οβταιν α φλοω ςονφιγυρατιον ωηερε τηε τοταλ ουτγοινγ φλοω φρομ A ρεμαινς ιναριαντ, [1] τηυς

$$\sum_{v \in \mathcal{V}''} x''_{Av} \geq \sum_{v \in \mathcal{V}'} x'_{Av} \ .$$

Σεςονδλψ, ως ηαε

$$\left.\begin{array}{l} \sum_{v \in \mathcal{V}''} c''_{Av} = \sum_{v \in \mathcal{V}'} c'_{Av} = \sum_{v \in \mathcal{V}'} x'_{Av} \\ \sum_{v \in \mathcal{V}''} c''_{Av} \geq \sum_{v \in \mathcal{V}''} x''_{Av} \end{array}\right\} \Rightarrow \sum_{v \in \mathcal{V}''} x''_{Av} \leq \sum_{v \in \mathcal{V}'} x'_{Av} \ .$$

[1] Ωε τηανκ Κψριακος Αξιοτις φορ ηις ινσιγητς ον τηε Φλοω Δεςομποσιτιον τηεορεμ.

Τηυς ωε ςονςλυδε τηατ

$$\sum_{v\in\mathcal{V}''} x''_{Av} = \sum_{v\in\mathcal{V}'} x'_{Av} \ . \tag{21}$$

Λετ $X = X''\setminus\{(T,A)\}$. Οβσερε τηατ

$$\sum_{v\in\mathcal{V}''} x''_{Av} = \sum_{v\in\mathcal{V}} x_{Av} \ .$$

Τηις φλοω ις αλιδ ον γραπη $\mathcal{G}$ βεςαυσε

$$\forall e\in\mathcal{E}, c_e \ge c''_e \ .$$

Τηυς τηερε εξιστς α αλιδ φλοω φορ εαςη εξεςυτιον οφ τηε Τρανσιτιε Γαμε συςη τηατ

$$\sum_{v\in\mathcal{V}} x_{Av} = \sum_{v\in\mathcal{V}''} x''_{Av} \overset{(21)}{=} \sum_{v\in\mathcal{V}'} x'_{Av} \overset{(20)}{=} Loss_{A,j_1} \ ,$$

ωηιςη ις τηε φλοω X. □

Τηεορεμ 6 (ὃνσερατιε Ωορλδ Τηεορεμ).
Ιφ ϵϵρψβοδψ φολλοως τηϵ ςονσϵρατιϵ στρατϵγψ, νοβοδψ στϵαλς ανψ αμουντ φρομ ανψβοδψ.

Απόδειξη. Λετ $\mathcal{H}$ βε τηε γαμε ηιστορψ ωηερε αλλ πλαψερς αρε ςονσερατιε ανδ συπποσε τηερε αρε σομε $Steal\,()$ αςτιονς τακινγ πλαςε. Τηεν λετ $\mathcal{H}'$ βε τηε συβσεχυενςε οφ τυρνς εαςη ςονταινινγ ατ λεαστ ονε $Steal\,()$ αςτιον. Τηις συβσεχυενςε ις ειδεντλψ νονεμπτψ, τηυς ιτ μυστ ηαε α φιρστ ελεμεντ. Τηε πλαψερ ςορρεσπονδινγ το τηατ τυρν, A, ηας ςηοσεν α $Steal\,()$ αςτιον ανδ νο πρειους πλαψερ ηας ςηοσεν συςη αν αςτιον. Ηοωεερ, πλαψερ A φολλοως τηε ςονσερατιε στρατεγψ, ωηιςη ις α ςοντραδιςτιον. □

Προοφ οφ Τηεορεμ 5: Σψβιλ Ρεσιλιενςε
Λετ $\mathcal{G}_1$ βε α γαμε γραπη δεφινεδ ας φολλοως:

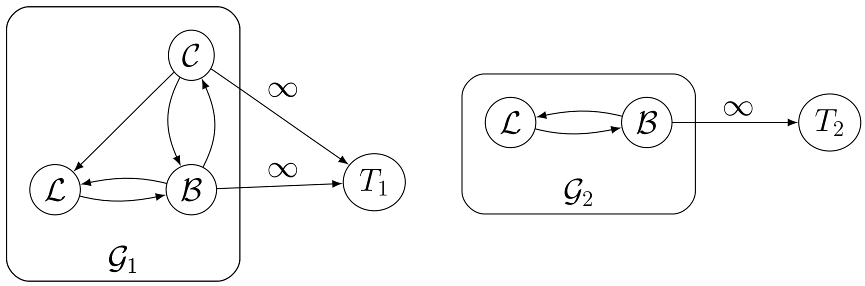
$$\mathcal{V}_1 = \mathcal{V} \cup \{T_1\} \ ,$$

$$\mathcal{E}_1 = \mathcal{E} \cup \{(v,T_1) : v\in\mathcal{B}\cup\mathcal{C}\} \ ,$$

$$\forall v,w\in\mathcal{V}_1\setminus\{T_1\}, DTr^1_{v\to w} = DTr_{v\to w} \ ,$$

$$\forall v\in\mathcal{B}\cup\mathcal{C}, DTr^1_{v\to T_1} = \infty \ ,$$

ωηερε $DTr_{v\to w}$ ις τηε διρεςτ τρυστ φρομ v το w ιν $\mathcal{G}$ ανδ $DTr^1_{v\to w}$ ις τηε διρεςτ τρυστ φρομ v το w ιν $\mathcal{G}_1$.
Λετ αλσο $\mathcal{G}_2$ βε τηε ινδυςεδ γραπη τηατ ρεσυλτς φρομ $\mathcal{G}_1$ ιφ ωε ρεμοε τηε Σψβιλ σετ, $\mathcal{C}$. Ωε ρεναμε T_1 το T_2 ανδ δεφινε $\mathcal{L} = \mathcal{V} \setminus (\mathcal{B} \cup \mathcal{C})$ ας τηε σετ οφ λεγιτιματε πλαψερς το φαςιλιτατε ςομπρεηενσιον.



Φιγ.8: Γραπης $\mathcal{G}_1$ ανδ $\mathcal{G}_2$

Αςςορδινγ το τηεορεμ (4),

$$Tr_{A\to\mathcal{B}\cup\mathcal{C}} = maxFlow_1\,(A,T_1) \wedge Tr_{A\to\mathcal{B}} = maxFlow_2\,(A,T_2) \quad . \tag{22}$$

Ωε ωιλλ σηοω τηατ τηε $MaxFlow$ οφ εαςη οφ τηε τωο γραπης ςαν βε υσεδ το ςονστρυςτ α αλιδ φλοω οφ εχυαλ αλυε φορ τηε οτηερ γραπη. Τηε φλοω $X_1 = MaxFlow\,(A,T_1)$ ςαν βε υσεδ το ςονστρυςτ α αλιδ φλοω οφ εχυαλ αλυε φορ τηε σεςονδ γραπη ιφ ωε σετ

$$\forall v \in \mathcal{V}_2 \setminus \mathcal{B}, \forall w \in \mathcal{V}_2, x_{vw,2} = x_{vw,1} \quad ,$$

$$\forall v \in \mathcal{B}, x_{vT_2,2} = \sum_{w \in N_1^+(v)} x_{vw,1} \quad ,$$

$$\forall v, w \in \mathcal{B}, x_{vw,2} = 0 \quad .$$

Τηερεφορε

$$maxFlow_1\,(A,T_1) \leq maxFlow_2\,(A,T_2)$$

Λικεωισε, τηε φλοω $X_2 = MaxFlow(A,T_2)$ ις α αλιδ φλοω φορ $\mathcal{G}_1$ βεςαυσε $\mathcal{G}_2$ ις αν ινδυςεδ συβγραπη οφ $\mathcal{G}_1$. Τηερεφορε

$$maxFlow_1\,(A,T_1) \geq maxFlow_2\,(A,T_2)$$

Ωε ςονςλυδε τηατ

$$maxFlow\,(A,T_1) = maxFlow\,(A,T_2) \quad , \tag{23}$$

τηυς φρομ (22) ανδ (23) τηε τηεορεμ ηολδς. □

2 Αλγοριτημς

Τηις αλγοριτημ ςαλλς τηε νεςεσσαρψ φυνςτιονς το πρεπαρε τηε νεω γραπη.

Εξεςυτε Τυρν
Ινπυτ : ολδ γραπη $\mathcal{G}_{j-1}$, πλαψερ $A \in \mathcal{V}_{j-1}$, ολδ ςαπιταλ $Cap_{A,j-1}$, ΤεντατιεΤυρν
Ουτπυτ : νεω γραπη $\mathcal{G}_j$, νεω ςαπιταλ $Cap_{A,j}$, νεω ηιστορψ $\mathcal{H}_j$
εξεςυτεΤυρν($\mathcal{G}_{j-1}$, A, $Cap_{A,j-1}$, ΤεντατιεΤυρν) :
  ($Turn_j$, Νεωᾶπ) = αλιδατεΤυρν($\mathcal{G}_{j-1}$, A, $Cap_{A,j-1}$, ΤεντατιεΤυρν)
  ρετυρν(ςομμιτΤυρν($\mathcal{G}_{j-1}$, A, $Turn_j$, Νεωᾶπ))

Τηε φολλοωινγ αλγοριτημ αλιδατες τηατ τηε τεντατιε τυρν προδυςεδ βψ τηε στρατεγψ ρεσπεςτς τηε ρυλες ιμποσεδ ον τυρνς. Ιφ τηε τυρν ις ιναλιδ, αν εμπτψ τυρν ις ρετυρνεδ.

ᾰλιδατε Τυρν
Ινπυτ : ολδ $\mathcal{G}_{j-1}$, πλαψερ $A \in \mathcal{V}_{j-1}$, ολδ $Cap_{A,j-1}$, Τυρν
Ουτπυτ : $Turn_j$, νεω $Cap_{A,j}$
αλιδατεΤυρν($\mathcal{G}_{j-1}$, A, $Cap_{A,j-1}$, Τυρν) :
  Y_{st} = Y_{add} = 0
  Στολεν = Αδδεδ = $\emptyset$
  φορ (αςτιον $\in$ Τυρν)
    αςτιον ματςη δο
      ςασε $Steal$(ψ, w) δο
        ιφ (ψ ᾿ $DTr_{w\to A,j-1}$ ορ ψ ῾ 0 ορ $w \in$ Στολεν)
          ρετυρν($\emptyset$, $Cap_{A,j-1}$)
        ελσε Y_{st} += ψ· Στολεν = Στολεν $\cup \{w\}$
      ςασε Add(ψ, w) δο
        ιφ (ψ ῾ -$DTr_{A\to w,j-1}$ ορ $w \in$ Αδδεδ)
          ρετυρν($\emptyset$, $Cap_{A,j-1}$)
        ελσε Y_{add} += ψ· Αδδεδ = Αδδεδ $\cup \{w\}$
  ιφ (Y_{add} - Y_{st} ᾿ $Cap_{A,j-1}$) ρετυρν($\emptyset$, $Cap_{A,j-1}$)
  ελσε ρετυρν(Τυρν, $Cap_{A,j-1} + Y_{st} - Y_{add}$)

Φιναλλψ, τηις αλγοριτημ αππλιες τηε τυρν το τηε ολδ γραπη ανδ ρετυρνς τηε νεω γραπη, αλονγ ωιτη τηε υπδατεδ ςαπιταλ ανδ ηιστορψ.

ὂμμιτ Τυρν
Ινπυτ : ολδ $\mathcal{G}_{j-1}$, πλαψερ $A \in \mathcal{V}_{j-1}$, Νεωᾶπ, $Turn_j$
Ουτπυτ : νεω $\mathcal{G}_j$, νεω $Cap_{A,j}$, νεω $\mathcal{H}_j$
ςομμιτΤυρν($\mathcal{G}_{j-1}$, A, Νεωᾶπ, $Turn_j$) :

φορ «v, w) $\in \mathcal{E}_j$) $DTr_{v\to w,j}$ = $DTr_{v\to w,j-1}$
φορ (αςτιον $\in Turn_j$)
  αςτιον ματςη δο
    ςασε $Steal(\psi, w)$ δο $DTr_{w\to A,j}$ = $DTr_{w\to A,j-1} - y$
    ςασε $Add(\psi, w)$ δο $DTr_{A\to w,j}$ = $DTr_{A\to w,j-1} + y$
$Cap_{A,j}$ = Νεωᾶπ· $\mathcal{H}_j$ = (A, $Turn_j$)
ρετυρν($\mathcal{G}_j$, $Cap_{A,j}$, $\mathcal{H}_j$)

Ιτ ις στραιγητφορωαρδ το εριφψ τηε ςομπατιβιλιτψ οφ τηε πρειους αλγοριτημς ωιτη τηε ςορρεσπονδινγ δεφινιτιονς.

Αναφορές

1. Σανςηεζ Ω.: Λινες οφ ῝ρεδιτ. ηττπς://γιστ.γιτηυβ.ςομ/δρωασηο/2ς40β91ε169φ55988618ˆπαρτ-3-ωεβ-οφ-ςρεδιτ (2016)
2. Νακαμοτο Σ.: Βιτςοιν: Α Πεερ-το-Πεερ Ελεςτρονις ᾶση Σψστεμ (2008)
3. Αντονοπουλος Α. Μ.: Μαστερινγ Βιτςοιν: Υνλοςκινγ Διγιταλ ῝ρψπτοςυρρενςιες. Ο-Ῥειλλψ Μεδια, Ινς. (2014)
4. Καρλαν Δ., Μοβιυς Μ., Ροσενβλατ Τ., Σζειδλ Α.: Τρυστ ανδ σοςιαλ ςολλατεραλ. Τηε Χυαρτερλψ Θουρναλ οφ Εςονομιςς, ππ. 1307-1361 (2009)
5. ὂρμεν Τ. Η., Λεισερσον ῝. Ε., Ριεστ Ρ. Λ., Στειν ῝.: Ιντροδυςτιον το Αλγοριτημς (3ρδ εδ.). ΜΙΤ Πρεσς ανδ ΜςΓραω-Ηιλλ (2009)
6. Ορλιν Θ. Β.: Μαξ Φλοως ιν Ο(νμ) Τιμε, ορ Βεττερ. ΣΤΟ῝ ΄13 Προςεεδινγς οφ τηε φορτψ-φιφτη αννυαλ Α῝Μ σψμποσιυμ ον Τηεορψ οφ ςομπυτινγ, ππ.765-774, Α῝Μ, Νεω Ψορκ, δοι:10.1145/2488608.2488705 (2013)
7. Δουςευρ Θ. Ρ.: Τηε Σψβιλ Ατταςκ. Ιντερνατιοναλ ωορκσηοπ ον Πεερ-Το-Πεερ Σψστεμς (2002)
8. Ζιμμερμανν Π.: ΠΓΠ Σουρςε ὂδε ανδ Ιντερναλς. Τηε ΜΙΤ Πρεσς (1995)
9. ῝λαρκε Ι., Σανδβεργ Ο., Ωιλεψ Β., Ηονγ Τ. Ω.: Φρεενετ: Α Διστριβυτεδ Ανονψμους Ινφορματιον Στοραγε ανδ Ρετριεαλ Σψστεμ. Η. Φεδερρατη, Δεσιγνινγ Πριαςψ Ενηανςινγ Τεςηνολογιες ππ. 46-66, Βερκελεψ, ΥΣΑ: Σπρινγερ-ἔρλαγ Βερλιν Ηειδελβεργ (2001)
10. Αδαμς ῝., Λλοψδ Σ.: Υνδερστανδινγ ΠΚΙ: ςονςεπτς, σταναρδς, ανδ δεπλοψμεντ ςονσιδερατιονς. Αδδισον-Ωεσλεψ Προφεσσιοναλ (2003)
11. Ποστ Α., Σηαη ῞., Μισλοε Α.: Βαζααρ: Στρενγτηενινγ Υσερ Ρεπυτατιονς ιν Ονλινε Μαρκετπλαςες. Προςεεδινγς οφ ΝΣΔΙ΄11: 8τη ΥΣΕΝΙΞ Σψμποσιυμ ον Νετωορκεδ Σψστεμς Δεσιγν ανδ Ιμπλεμεντατιον, π. 183 (2011)
12. Λαμπορτ Λ., Σηοσταк Ρ., Πεασε Μ.: Τηε Βψζαντινε Γενεραλς Προβλεμ. Α῝Μ Τρανσαςτιονς ον Προγραμμινγ Λανγυαγες ανδ Σψστεμς (ΤΟΠΛΑΣ) 4.3, ππ. 382-401 (1982)
13. Ηυψνη Τ. Δ., Θεννινγς Ν. Ρ., Σηαδβολτ Ν. Ρ.: Αν Ιντεγρατεδ Τρυστ ανδ Ρεπυτατιον Μοδελ φορ Οπεν Μυλτι-Αγεντ Σψστεμς. Αυτονομους Αγεντς ανδ Μυλτι-Αγεντ Σψστεμς, 13(2), ππ. 119-154 (2006)
14. Μιςηιαρδι Π., Μολα Ρ.: ὂρε: α ὂλλαβορατιε Ρεπυτατιον Μεςηανισμ το Ενφορςε Νοδε ὂοπερατιον ιν Μοβιλε Αδ-ηος Νετωορκς. Αδανςεδ ὂμμυνιςατιονς ανδ Μυλτιμεδια Σεςυριτψ, ππ. 107-121, Σπρινγερ ΥΣ (2002)
15. ᾶννον Λ.: Οπεν Ρεπυτατιον: τηε Δεςεντραλιζεδ Ρεπυτατιον Πλατφορμ (2015) ηττπς://οπενρεπυτατιον.νετ/οπεν-ρεπυτατιον-ηιγη-λεελ-ωηιτεπαπερ.πδφ

16. Γρϋνερτ Α., Ηυδερτ Σ., Κöνιγ Σ., Καφφιλλε Σ., Ωιρτζ Γ.: Δεςεντραλιζεδ Ρεπυτατιον Μαναγεμεντ φορ δοπερατινγ Σοφτωαρε Αγεντς ιν Οπεν Μυλτι-Αγεντ Σψστεμς. ΙΤΣΣΑ, 1(4), ππ. 363-368 (2006)
17. Ρεπαντις Τ., Καλογερακι ˝.: Δεςεντραλιζεδ Τρυστ Μαναγεμεντ φορ Αδ-ηος Πεερ-το-Πεερ Νετωορκς. Προςεεδινγς οφ τηε 4τη Ιντερνατιοναλ Ωορκσηοπ ον Μιδδλεωαρε φορ Περασιε ανδ Αδ-ηος δμπυτινγ, ΜΠΑ῝ 2006, π. 6, Α῝Μ (2006)
18. Μυι Λ., Μοητασηεμι Μ., Ηαλβερσταδτ Α.: Α δμπυτατιοναλ Μοδελ οφ Τρυστ ανδ Ρεπυτατιον. Σψστεμ Σςιενςες, 2002. ΗΙ῝ΣΣ. Προςεεδινγς οφ τηε 35τη Αννυαλ Ηαωαιι Ιντερνατιοναλ δνφερενςε, ππ. 2431-2439 ΙΕΕΕ (2002)
19. δμμερςε Β. Ε., Θϕσανγ Α., Ισμαιλ Ρ.: Τηε Βετα Ρεπυτατιον Σψστεμ. Προςεεδινγς οφ τηε 15τη Βλεδ Ελεςτρονις δμμερςε δνφερενςε (2002)
20. Συρψαναραψανα Γ., Ερενκραντζ Θ. Ρ., Ταψλορ Ρ. Ν.: Αν Αρςηιτεςτυραλ Αππροαςη φορ Δεςεντραλιζεδ Τρυστ Μαναγεμεντ. ΙΕΕΕ Ιντερνετ δμπυτινγ, 9(6), ππ. 16-23 (2005)
21. ῞ισαν Α., Ποπ Φ., ῝ριστεα ˝.: Δεςεντραλιζεδ Τρυστ Μαναγεμεντ ιν Πεερ-το-Πεερ Σψστεμς. 10τη Ιντερνατιοναλ Σψμποσιυμ ον Παραλλελ ανδ Διστριβυτεδ δμπυτινγ, ππ. 232-239, ΙΕΕΕ (2011)
22. Συρψαναραψανα Γ., Διαλλο Μ., Ταψλορ Ρ. Ν.: Α Γενερις Φραμεωορκ φορ Μοδελινγ Δεςεντραλιζεδ Ρεπυτατιον-Βασεδ Τρυστ Μοδελς. 14τη Α῝Μ ΣιγΣοφτ Σψμποσιυμ ον Φουνδατιονς οφ Σοφτωαρε Ενγινεερινγ (2006)
23. ᾱροννι Γ.: Ωαλκινγ τηε ωεβ οφ τρυστ. Εναβλινγ Τεςηνολογιες: Ινφραστρυςτυρε φορ δλλαβορατιε Εντερπρισες, ΩΕΤ Ι῝Ε 2000, Προςεεδινγς, ΙΕΕΕ 9τη Ιντερνατιοναλ Ωορκσηοπς, ππ. 153-158 (2000)
24. Πεννινγ Η.Π.: ΠΓΠ πατηφινδερ πγπ.ςς.υυ.νλ
25. Γολλμανν Δ.: Ωηψ τρυστ ις βαδ φορ σεςυριτψ. Ελεςτρονις νοτες ιν τηεορετιςαλ ςομπυτερ σςιενςε, 157(3), 3-9 (2006)
26. Σοσκα Κ., Κωον Α., ῇριστιν Ν., Δεαδας Σ.: Βεαερ: Α Δεςεντραλιζεδ Ανονψμους Μαρκετπλαςε ωιτη Σεςυρε Ρεπυτατιον (2016)
27. Ζινδρος Δ. Σ.: Τρυστ ιν Δεςεντραλιζεδ Ανονψμους Μαρκετπλαςες (2015)
28. ΔεΦιγυειρεδο Δ. Δ. Β., Βαρρ Ε. Τ.: ΤρυστΔαις: Α Νον-Εξπλοιταβλε Ονλινε Ρεπυτατιον Σψστεμ. ῝Ε῝, ὅλ. 5, ππ. 274-283 (2005)
29. Φυγγερ Ρ.: Μονεψ ας ΙΟΥς ιν Σοςιαλ Τρυστ Νετωορκς & Α Προποσαλ φορ α Δεςεντραλιζεδ ΰρρενςψ Νετωορκ Προτοςολ.
30. Σςηωαρτζ Δ., Ψουνγς Ν., Βριττο, Α.: Τηε Ριππλε προτοςολ ςονσενσυς αλγοριτημ. Ριππλε Λαβς Ινς Ωηιτε Παπερ, 5 (2014) ηττπ://αρςηιε.ριππλε-προθεστ.οργ/δεςεντραλιζεδςυρρενςψ.πδφ (2004)
31. Μαζιερες, Δ.: Τηε στελλαρ ςονσενσυς προτοςολ: Α φεδερατεδ μοδελ φορ ιντερνετλεελ ςονσενσυς. Στελλαρ Δεελοπμεντ Φουνδατιον (2015)
32. Ναραψαναν Α., Σηματικο ˝.: Δε-ανονψμιζινγ Σοςιαλ Νετωορκς. ΣΠ ΄09 Προςεεδινγς οφ τηε 2009 30τη ΙΕΕΕ Σψμποσιυμ ον Σεςυριτψ ανδ Πριαςψ, ππ. 173-187, 10.1109/ΣΠ.2009.22 (2009)
33. Μαλαολτα Γ., Μορενο-Σανςηεζ Π., Κατε Α., Μαφφει Μ.: ΣιλεντΩηισπερς: Ενφορςινγ Σεςυριτψ ανδ Πριαςψ ιν Δεςεντραλιζεδ ῝ρεδιτ Νετωορκς.
34. Μορενο-Σανςηεζ Π., Κατε Α., Μαφφει Μ., Πεςινα Κ.: Πριαςψ πρεσερινγ παψμεντς ιν ςρεδιτ νετωορκς. Νετωορκ ανδ Διστριβυτεδ Σεςυριτψ Σψμποσιυμ (2015)
35. Κονφορτψ Δ., Αδαμ Ψ., Εστραδα Δ., Μερεδιτη Λ. Γ.: Σψνερεο: Τηε Δεςεντραλιζεδ ανδ Διστριβυτεδ Σοςιαλ Νετωορκ (2015)
36. Αηυϑα Ρ. Κ., Μαγναντι Τ. Λ., Ορλιν Θ. Β.: Νετωορκ Φλοως: Τηεορψ, Αλγοριτημς, ανδ Αππλιςατιονς. Πρεντιςε-Ηαλλ (1993) ηττπς://οςω.μιτ.εδυ. Λιςενσε: ῝ρεατιε δμμονς ΒΨ-Ν῝-ΣΑ. (Φαλλ 2010)

37. Θøσανγ Α., Ισμαιλ Ρ., Βοψδ ῾.: Α Συρεψ οφ Τρυστ ανδ Ρεπυτατιον Σψστεμς φορ Ονλινε Σεριςε Προισιον. Δεςισιον Συππορτ Σψστεμς, 43(2), ππ. 618-644 (2007)