Τρυστ Ις Ρισκ: Α Δεςεντραλιζεδ Φινανςιαλ Τρυστ Πλατφορμ

Ορφεας Στεφανος Τηψφρονιτις Λιτος[1] ανδ Διονψσις Ζινδρος[2,⋆]

[1] Νατιοναλ Τεςηνιςαλ Υνιερσιτψ οφ Ατηενς
[2] Νατιοναλ ανδ Καποδιστριαν Υνιερσιτψ οφ Ατηενς
ολιτοσ˜ςορελαβ.ντυα.γρ, διονψζιζ˜δι.υοα.γρ

Περίληψη ἓντραλιζεδ ρεπυτατιον σψστεμς υσε σταρς ανδ ρειεως ανδ τηυς ρεχυιρε αλγοριτημ σεςρεςψ το αοιδ μανιπυλατιον. Ιν αυτονομους οπεν σουρςε δεςεντραλιζεδ σψστεμς τηις λυξυρψ ις νοτ ααιλαβλε. Ωε ςρεατε α ρεπυτατιον νετωορκ φορ δεςεντραλιζεδ μαρκετπλαςες ωηερε τηε τρυστ εαςη υσερ γιες το τηε ρεστ οφ τηε υσερς ις χυαντιφιαβλε ανδ εξπρεσσεδ ιν μονεταρψ τερμς. Ωε ιντροδυςε α νεω μοδελ φορ βιτςοιν ωαλλετς ιν ωηιςη υσερ ςοινς αρε σπλιτ αμονγ τρυστεδ ασσοςιατες. Διρεςτ τρυστ ις δεφινεδ υσινγ σηαρεδ βιτςοιν αςςουντς ια βιτςοιν΄ς 1-οφ-2 μυλτισιγ. Ινδιρεςτ τρυστ ις συβσεχυεντλψ δεφινεδ τρανσιτιελψ. Τηις εναβλες φορμαλ γαμε τηεορετις αργυμεντς περταινινγ το ρισκ αναλψσις. Ωε προε τηατ ρισκ ανδ μαξιμυμ φλοως αρε εχυιαλεντ ιν ουρ μοδελ ανδ τηατ ουρ σψστεμ ις Σψβιλ-ρεσιλιεντ. Ουρ σψστεμ αλλοως φορ ςονςρετε φινανςιαλ δεςισιονς ον τηε συβθεςτιε μονεταρψ αμουντ α πσευδονψμους παρτψ ςαν βε τρυστεδ ωιτη. Τηρουγη διρεςτ τρυστ ρεδιστριβυτιον, τηε ρισκ ινςυρρεδ φρομ μακινγ α πυρςηασε φρομ α πσευδονψμους ενδορ ιν τηις μαννερ ρεμαινς ιναριαντ.

1 Ιντροδυςτιον

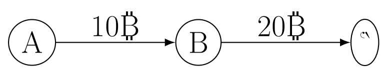
Ονλινε μαρκετπλαςες ςαν βε ςατεγοριζεδ ας ςεντραλιζεδ ανδ δεςεντραλιζεδ. Τωο εξαμπλες οφ εαςη ςατεγορψ αρε εβαψ ανδ ΟπενΒαζααρ. Τηε ςομμον δενομινατορ οφ εσταβλισηεδ ονλινε μαρκετπλαςες ις τηατ τηε ρεπυτατιον οφ εαςη ενδορ ανδ ςλιεντ ις τψπιςαλλψ εξπρεσσεδ ιν τηε φορμ οφ σταρς ανδ υσερ-γενερατεδ ρειεως τηατ αρε ιεωαβλε βψ τηε ωηολε νετωορκ.

Ουρ γοαλ ις το ςρεατε α ρεπυτατιον σψστεμ φορ δεςεντραλιζεδ μαρκετπλαςες ωηερε τηε τρυστ εαςη υσερ γιες το τηε ρεστ οφ τηε υσερς ις χυαντιφιαβλε ιν μονεταρψ τερμς. Τηε ςεντραλ ασσυμπτιον υσεδ τηρουγηουτ τηις παπερ ις τηατ τρυστ ις εχυιαλεντ το ρισκ, ορ τηε προποσιτιον τηατ *Alice΄ς τρυστ* το ανοτηερ υσερ *Charlie* ις δεφινεδ το βε τηε *μαξιμυμ συμ οφ μονεψ* τηατ *Alice* ςαν λοσε ωηεν *Charlie* ις φρεε το ςηοοσε ανψ στρατεγψ ηε ωαντς. Το φλεση ουτ τηις ςονςεπτ, ωε ωιλλ υσε *λινες οφ ςρεδιτ* ας

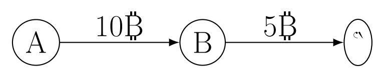
⋆ Ρεσεαρςη συππορτεδ βψ ΕΡ῝ προθεςτ ῝ΟΔΑΜΟΔΑ, προθεςτ ῎259152

προποσεδ βψ Ωασηινγτον Σανςηεζ [1]. *Alice* ϑοινς τηε νετωορκ βψ εξπλιςιτλψ εντρυστινγ α ςερταιν αμουντ οφ μονεψ το ανοτηερ υσερ, σαψ ηερ φριενδ, *Bob*. Ιφ *Bob* ηας αλρεαδψ εντρυστεδ αν αμουντ οφ μονεψ το α τηιρδ υσερ, *Charlie*, τηεν *Alice* ινδιρεςτλψ τρυστς *Charlie* σινςε ιφ τηε λαττερ ωισηεδ το πλαψ υνφαιρλψ, ηε ςουλδ ηαε αλρεαδψ στολεν τηε μονεψ εντρυστεδ το ηιμ βψ *Bob*. Ωε ωιλλ λατερ σεε τηατ *Alice* ςαν νοω ενγαγε ιν εςονομις ιντεραςτιον ωιτη *Charlie*.

Το ιμπλεμεντ λινεσ-οφ-ςρεδιτ, ωε υσε Βιτςοιν [2], α δεςεντραλιζεδ ςρψπτοςυρρενςψ τηατ διφφερς φρομ ςονεντιοναλ ςυρρενςιες ιν τηατ ιτ δοες νοτ δεπενδ ον τρυστεδ τηιρδ παρτιες. Αλλ τρανσαςτιονς αρε πυβλις ας τηεψ αρε ρεςορδεδ ον α δεςεντραλιζεδ λεδγερ, τηε βλοςκςηαιν. Εαςη τρανσαςτιον τακες σομε ςοινς ας ινπυτ ανδ προδυςες σομε ςοινς ας ουτπυτ. Ιφ τηε ουτπυτ οφ α τρανσαςτιον ις νοτ ςοννεςτεδ το τηε ινπυτ οφ ανοτηερ, τηεν τηις ουτπυτ βελονγς το τηε ΥΤΞΟ, τηε σετ οφ υνσπεντ τρανσαςτιον ουτπυτς. Ιντυιτιελψ, τηε ΥΤΞΟ ςονταινς αλλ ςοινς νοτ ψετ σπεντ.



Φιγ.1: Α ινδιρεςτλψ τρυστς ῝ 10Ƀ



Φιγ.2: Α ινδιρεςτλψ τρυστς ῝ 5Ƀ

Ωε προποσε α νεω κινδ οφ ωαλλετ ωηερε ςοινς αρε νοτ εξςλυσιελψ οωνεδ, βυτ αρε πλαςεδ ιν σηαρεδ αςςουντς ματεριαλιζεδ τηρουγη 1-οφ-2 μυλτισιγς, α βιτςοιν ςονστρυςτιον τηατ περμιτς ανψ ονε οφ τωο πρε-δεσιγνατεδ υσερς το σπενδ τηε ςοινς ςονταινεδ ωιτηιν α σηαρεδ αςςουντ [3]. Ωε ωιλλ υσε τηε νοτατιον $1/\{Alice, Bob\}$ το ρεπρεσεντ α 1-οφ-2 μυλτισιγ τηατ ςαν βε σπεντ βψ ειτηερ *Alice* ορ *Bob*. Ιν τηις νοτατιον, τηε ορδερ οφ ναμες ις ιρρελεαντ, ας ειτηερ υσερ ςαν σπενδ. Ηοωεερ, τηε υσερ ωηο δεποσιτς τηε μονεψ ινιτιαλλψ ιντο τηε σηαρεδ αςςουντ ις ρελεαντ – σηε ις τηε ονε ρισκινγ ηερ μονεψ.

Ουρ αππροαςη ςηανγες τηε υσερ εξπεριενςε ιν α συβτλε βυτ δραστις ωαψ. Α υσερ νο μορε ηας το βασε ηερ τρυστ τοωαρδς α στορε ον σταρς ορ ρατινγς ωηιςη αρε νοτ εξπρεσσεδ ιν φινανςιαλ υνιτς. Σηε ςαν σιμπλψ ςονσυλτ ηερ ωαλλετ το δεςιδε ωηετηερ τηε στορε ις τρυστωορτηψ ανδ, ιφ σο, υπ το ωηατ αλυε, δενομινατεδ ιν βιτςοιν. Τηις σψστεμ ωορκς ας φολλοως: Ινιτιαλλψ *Alice* μιγρατες ηερ φυνδς φρομ ηερ πριατε βιτςοιν ωαλλετ το 1-οφ-2 μυλτισιγ αδδρεσσες σηαρεδ ωιτη φριενδς σηε ςομφορταβλψ τρυστς. Ωε ςαλλ τηις διρεςτ τρυστ. Ουρ σψστεμ ις αγνοστις το τηε μεανς πλαψερς υσε το δετερμινε ωηο ις τρυστωορτηψ φορ τηεσε διρεςτ 1-οφ-2 δεποσιτς. Τηις δυβιους κινδ οφ τρυστ ις ςονφινεδ το τηε διρεςτ νειγηβουρηοοδ οφ εαςη πλαψερ· ινδιρεςτ τρυστ τοωαρδς υνκνοων υσερς ις ςαλςυλατεδ βψ α δετερμινιστις αλγοριτημ. Ιν ςομπαρισον, σψστεμς ωιτη γλοβαλ ρατινγς δο νοτ διστινγυιση βετωεεν νειγηβουρς ανδ οτηερ υσερς, τηυς οφφερινγ δυβιους τρυστ ινδιςατιονς φορ εερψονε.

Συπποσε τηατ *Alice* ις ιεωινγ τηε ιτεμ λιστινγς οφ ενδορ *Charlie*. Ινστεαδ οφ *Charlie*′ς σταρς, *Alice* ωιλλ σεε α ποσιτιε αλυε τηατ ις ςαλςυλατεδ βψ ηερ ωαλλετ ανδ ρεπρεσεντς τηε μαξιμυμ μονεταρψ αλυε τηατ *Alice* ςαν σαφελψ παψ το ςομπλετε α πυρςηασε φρομ *Charlie*. Τηις αλυε, κνοων ας ινδιρεςτ τρυστ, ις ςαλςυλατεδ ωιτη τηε Τρυστ Φλοω τηεορεμ (2). Νοτε τηατ ινδιρεςτ τρυστ τοωαρδς α υσερ ις νοτ γλοβαλ βυτ συβϑεςτιε· εαςη υσερ ιεως α περσοναλιζεδ ινδιρεςτ τρυστ βασεδ ον τηε νετωορκ τοπολογψ. Τηε ινδιρεςτ τρυστ ρεπορτεδ βψ ουρ σψστεμ μαινταινς τηε φολλοωινγ δεσιρεδ σεςυριτψ προπερτψ: Ιφ *Alice* μακες α πυρςηασε φρομ *Charlie*, τηεν σηε ις εξποσεδ το νο μορε ρισκ τηαν σηε ωας αλρεαδψ τακινγ ωιλλινγλψ. Τηε εξιστινγ ολυνταρψ ρισκ ις εξαςτλψ τηατ ωηιςη *Alice* ωας τακινγ βψ σηαρινγ ηερ ςοινς ωιτη ηερ τρυστεδ φριενδς. Ωε προε τηις ρεσυλτ ιν τηε Ρισκ Ιναριανςε τηεορεμ (3). Οβιουσλψ ιτ ωιλλ νοτ βε σαφε φορ *Alice* το βυψ ανψτηινγ φρομ *Charlie* ορ ανψ οτηερ ενδορ ιφ σηε ηας νοτ διρεςτλψ εντρυστεδ ανψ αλυε το ανψ οτηερ υσερ.

Ωε σεε τηατ ιν Τρυστ Ις Ρισκ τηε μονεψ ις νοτ ινεστεδ ατ τηε τιμε οφ πυρςηασε ανδ διρεςτλψ το τηε ενδορ, βυτ ατ αν εαρλιερ ποιντ ιν τιμε ανδ ονλψ το παρτιες τηατ αρε τρυστωορτηψ φορ ουτ οφ βανδ ρεασονς. Τηε φαςτ τηατ τηις σψστεμ ςαν φυνςτιον ιν α ςομπλετελψ δεςεντραλιζεδ φασηιον ωιλλ βεςομε ςλεαρ ιν τηε φολλοωινγ σεςτιονς. Ωε προε τηις ρεσυλτ ιν τηε Σψβιλ Ρεσιλιενςε τηεορεμ (5).

Ωε μακε τηε δεσιγν ςηοιςε τηατ ονε ςαν εξπρεσς ηερ τρυστ μαξιμαλλψ ιν τερμς οφ ηερ ααιλαβλε ςαπιταλ. Τηυς, αν ιμποερισηεδ πλαψερ ςαννοτ αλλοςατε μυςη διρεςτ τρυστ το ηερ φριενδς, νο ματτερ ηοω τρυστωορτηψ τηεψ αρε. Ον τηε οτηερ ηανδ, α ριςη πλαψερ μαψ εντρυστ α σμαλλ φραςτιον οφ ηερ φυνδς το α πλαψερ τηατ σηε δοες νοτ φινδ τρυστωορτηψ το α γρεατ εξτεντ ανδ στιλλ εξηιβιτ μορε διρεςτ τρυστ τηαν τηε ιμποερισηεδ πλαψερ οφ τηε πρειους εξαμπλε. Τηερε ις νο υππερ λιμιτ το τρυστ· εαςη πλαψερ ις ονλψ λιμιτεδ βψ ηερ φυνδς. Ωε τηυς τακε αδανταγε οφ τηε φολλοωινγ ρεμαρκαβλε προπερτψ οφ μονεψ: Το νορμαλισε συβϑεςτιε ηυμαν πρεφερενςες ιντο οβϑεςτιε αλυε.

Τηερε αρε σεεραλ ινςεντιες φορ α υσερ το ϑοιν τηις νετωορκ. Φιρστ, σηε ηας αςςεσς το στορες τηατ ωουλδ βε ιναςςεσσιβλε οτηερωισε. Μορεοερ, τωο φριενδς ςαν φορμαλιζε τηειρ μυτυαλ τρυστ βψ διρεςτλψ εντρυστινγ τηε σαμε αμουντ το εαςη οτηερ. Α λαργε ςομπανψ τηατ ςασυαλλψ συβςοντραςτς οτηερ ςομπανιες ςαν εξπρεσς ιτς τρυστ τοωαρδς τηεμ. Α γοερνμεντ ςαν ςηοοσε το διρεςτλψ εντρυστ ιτς ςιτιζενς ωιτη μονεψ ανδ ςονφροντ τηεμ υσινγ α ςορρεσπονδινγ λεγαλ αρσεναλ ιφ τηεψ μακε ιρρεσπονσιβλε υσε οφ τηις τρυστ. Α βανκ ςαν προιδε λοανς ας ουτγοινγ ανδ μαναγε σαινγς ας ινςομινγ διρεςτ τρυστ. Λαστ βυτ νοτ λεαστ, τηε νετωορκ ςαν βε ιεωεδ ας α ποσσιβλε ινεστμεντ ανδ σπεςυλατιον φιελδ σινςε ιτ ςονστιτυτες α ςομπλετελψ νεω αρεα φορ φινανςιαλ αςτιιτψ.

Ιτ ις ωορτη νοτινγ τηατ τηε σαμε πηψσιςαλ περσον ςαν μαινταιν μυλτιπλε πσευδονψμους ιδεντιτιες ιν τηε σαμε τρυστ νετωορκ ανδ τηατ μυλτιπλε ινδεπενδεντ τρυστ νετωορκς φορ διφφερεντ πυρποσες ςαν ςοεξιστ. Ον τηε οτηερ ηανδ, τηε σαμε πσευδονψμους ιδεντιτψ ςαν βε υσεδ το εσταβλιση τρυστ ιν διφφερεντ ςοντεξτς.

2 Μεςηανιςς

Ωε ωιλλ νοω τραςε *Alice*'ς στεπς φρομ ϑοινινγ τηε νετωορκ το συςςεσσφυλλψ ςομπλετινγ α πυρςηασε. Συπποσε ινιτιαλλψ αλλ ηερ ςοινς, σαψ 10₿, αρε στορεδ ιν α ωαψ τηατ σηε εξςλυσιελψ ςαν σπενδ τηεμ.

Τωο τρυστωορτηψ φριενδς, *Bob* ανδ *Charlie*, περσυαδε ηερ το τρψ ουτ Τρυστ Ις Ρισκ. Σηε ινσταλλς τηε Τρυστ Ις Ρισκ ωαλλετ ανδ μιγρατες τηε 10₿ φρομ ηερ ρεγυλαρ ωαλλετ, εντρυστινγ 2₿ το *Bob* ανδ 5₿ το *Charlie*. Σηε νοω εξςλυσιελψ ςοντρολς 3₿ ανδ ις ρισκινγ 7₿ ιν εξςηανγε φορ βεινγ παρτ οφ τηε νετωορκ. Σηε ηας φυλλ βυτ νοτ εξςλυσιε αςςεσς το τηε 7₿ εντρυστεδ το ηερ φριενδς ανδ εξςλυσιε αςςεσς το τηε ρεμαινινγ 3₿, φορ α τοταλ οφ 10₿.

Α φεω δαψς λατερ, σηε δισςοερς αν ονλινε σηοες σηοπ οωνεδ βψ *Dean* ωηο ηας αλσο ϑοινεδ Τρυστ Ις Ρισκ. Σηε φινδς α νιςε παιρ οφ σηοες τηατ ςοστς 1₿ ανδ ςηεςκς *Dean*'ς τρυστωορτηινεσς τηρουγη ηερ νεω ωαλλετ. Συπποσε τηατ *Dean* ις δεεμεδ τρυστωορτηψ υπ το 4₿. Σινςε 1₿ ις λεσς τηαν 4₿, σηε ςονφιδεντλψ προςεεδς το πυρςηασε τηε σηοες βψ παψινγ τηρουγη ηερ νεω ωαλλετ.

Σηε ςαν τηεν σεε ιν ηερ ωαλλετ τηατ ηερ εξςλυσιε ςοινς ηαε ινςρεασεδ το 6₿, τηε ςοινς εντρυστεδ το *Bob* ανδ *Charlie* ηαε βεεν ρεδυςεδ το 0.5₿ ανδ 2.5₿ ρεσπεςτιελψ ανδ *Dean* ις εντρυστεδ 1₿, εχυαλ το τηε αλυε οφ τηε σηοες. Αλσο, ηερ πυρςηασε ις μαρκεδ ας πενδινγ. Ιφ σηε προςεεδς το ςηεςκ ηερ τρυστ τοωαρδς *Dean*, ιτ ωιλλ αγαιν βε 4₿. Υνδερ τηε ηοοδ, ηερ ωαλλετ ρεδιστριβυτεδ ηερ εντρυστεδ ςοινς ιν α ωαψ τηατ ενσυρες τηατ *Dean* ις διρεςτλψ εντρυστεδ ωιτη ςοινς εχυαλ το τηε αλυε οφ τηε πυρςηασεδ ιτεμ ανδ τηατ ηερ ρεπορτεδ τρυστ τοωαρδς ημ ηας ρεμαινεδ ιναριαντ.

Εεντυαλλψ αλλ γοες ωελλ ανδ τηε σηοες ρεαςη *Alice*. *Dean* ςηοοσες το ρεδεεμ *Alice*'ς εντρυστεδ ςοινς, σο ηερ ωαλλετ δοες νοτ σηοω ανψ ςοινς εντρυστεδ το *Dean*. Τηρουγη ηερ ωαλλετ, σηε μαρκς τηε πυρςηασε ας συςςεσσφυλ. Τηις λετς τηε σψστεμ ρεπλενιση τηε ρεδυςεδ τρυστ το Bob ανδ $Charlie$, σεττινγ τηε εντρυστεδ ςοινς το 2Ƀ ανδ 5Ƀ ρεσπεςτιελψ ονςε αγαιν. $Alice$ νοω εξςλυσιελψ οωνς 2Ƀ. Τηυς, σηε ςαν νοω υσε α τοταλ οφ 9Ƀ, ωηιςη ις εξπεςτεδ, σινςε σηε ηαδ το παψ 1Ƀ φορ τηε σηοες.

3 Τηε Τρυστ Γραπη

Ωε νοω ενγαγε ιν τηε φορμαλ δεσςριπτιον οφ τηε προποσεδ σψστεμ, αςςομπανιεδ βψ ηελπφυλ εξαμπλες.

Δεφινιτιον 1 (Γραπη). *Τρυστ Ις Ρισκ ις ρεπρεσεντεδ βψ α σεχυενςε οφ διρεςτεδ ωειγητεδ γραπης* $(\mathcal{G}_j)$ *ωηερε* $\mathcal{G}_j = (\mathcal{V}_j, \mathcal{E}_j), j \in \mathbb{N}$. *Αλσο, σινςε τηε γραπης αρε ωειγητεδ, τηερε εξιστς α σεχυενςε οφ ωειγητ φυνςτιονς* (c_j) *ωιτη* $c_j : \mathcal{E}_j \to \mathbb{R}^+$.

Τηε νοδες ρεπρεσεντ τηε πλαψερς, τηε εδγες ρεπρεσεντ τηε εξιστινγ διρεςτ τρυστς ανδ τηε ωειγητς ρεπρεσεντ τηε αμουντ οφ αλυε ατταςηεδ το τηε ςορρεσπονδινγ διρεςτ τρυστ. Ας ωε ωιλλ σεε, τηε γαμε εολες ιν τυρνς. Τηε συβσςριπτ οφ τηε γραπη ρεπρεσεντς τηε ςορρεσπονδινγ τυρν.

Δεφινιτιον 2 (Πλαψερς). *Τηε σετ* $\mathcal{V}_j = \mathcal{V}(\mathcal{G}_j)$ *ις τηε σετ οφ αλλ πλαψερς ιν τηε νετωορκ, οτηερωισε υνδερστοοδ ας τηε σετ οφ αλλ πσευδονψμους ιδεντιτιες.*

Εαςη νοδε ηας α ςορρεσπονδινγ νον-νεγατιε νυμβερ τηατ ρεπρεσεντς ιτς ςαπιταλ. Α νοδε΄ς ςαπιταλ ις τηε τοταλ αλυε τηατ τηε νοδε ποσσεσσες εξςλυσιελψ ανδ νοβοδψ ελσε ςαν σπενδ.

Δεφινιτιον 3 (ἃπιταλ). *Τηε ςαπιταλ οφ A ιν τυρν j, $Cap_{A,j}$, ις δεφινεδ ας τηε τοταλ ςοινς τηατ βελονγ εξςλυσιελψ το A ατ τηε βεγιννινγ οφ τυρν j.*

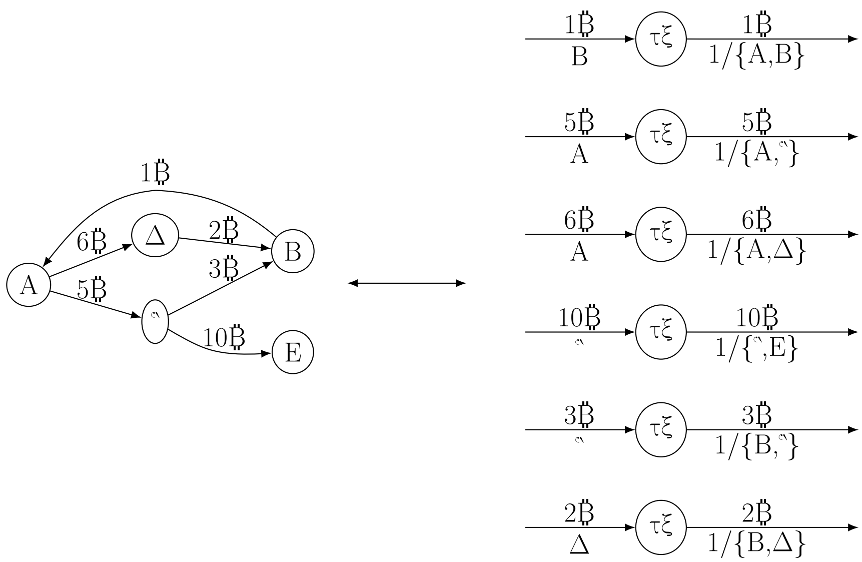
Τηε ςαπιταλ ις τηε αλυε τηατ εξιστς ιν τηε γαμε βυτ ις νοτ σηαρεδ ωιτη τρυστεδ παρτιες. Τηε ςαπιταλ οφ A ςαν βε ρεαλλοςατεδ ονλψ δυρινγ ηερ τυρνς, αςςορδινγ το ηερ αςτιονς. Ωε μοδελ τηε σψστεμ ιν α ωαψ τηατ νο ςαπιταλ ςαν βε αδδεδ ιν τηε ςουρσε οφ τηε γαμε τηρουγη εξτερναλ μεανς. Τηε υσε οφ ςαπιταλ ωιλλ βεςομε ςλεαρ ονςε τυρνς αρε φορμαλλψ δεφινεδ.

Τηε φορμαλ δεφινιτιον οφ διρεςτ τρυστ φολλοως:

Δεφινιτιον 4 (Διρεςτ Τρυστ). *Διρεςτ τρυστ φρομ A το B ατ τηε ενδ οφ τυρν j, $DTr_{A\to B,j}$, ις δεφινεδ ας τηε τοταλ αμουντ οφ αλυε τηατ εξιστς ιν 1/$\{A, B\}$ μυλτισιγς ιν τηε ΥΤΞΟ ιν τηε ενδ οφ τυρν j, ωηερε τηε μονεψ ις δεποσιτεδ βψ A.*

$$DTr_{A\to B,j} = \begin{cases} c_j\left(A,B\right), & if\left(A,B\right) \in \mathcal{E}_j \\ 0, & else \end{cases} \tag{1}$$

Τηις δεφινιτιον αγρεες ωιτη τηε τιτλε οφ τηις παπερ ανδ ςοινςιδες ωιτη τηε ιντυιτιον ανδ σοςιολογιςαλ εξπεριμενταλ ρεσυλτς οφ [4] τηατ τηε τρυστ *Alice* σηοως το *Bob* ιν ρεαλ-ωορλδ σοςιαλ νετωορκς ςορρεσπονδς το τηε εξτεντ οφ δανγερ ιν ωηιςη *Alice* ις πυττινγ ηερσελφ ιντο ιν ορδερ το ηελπ *Bob*. Αν εξαμπλε γραπη ωιτη ιτς ςορρεσπονδινγ τρανσαςτιονς ιν τηε ΥΤΞΟ ςαν βε σεεν βελοω.



Φιγ.3: Τρυστ Ις Ρισκ Γαμε Γραπη ανδ Εχυιαλεντ Βιτςοιν ΥΤΞΟ

Ανψ αλγοριτημ τηατ ηας αςςεσς το τηε γραπη $\mathcal{G}_j$ ηας ιμπλιςιτλψ αςςεσς το αλλ διρεςτ τρυστς οφ τηις γραπη.

Δεφινιτιον 5 (Νειγηβουρηοοδ). *Ωϵ υσϵ τηϵ νοτατιον* $N^+(A)_j$ *το ρεφερ το τηϵ νοδες διρϵςτλψ τρυστϵδ βψ* A *ανδ* $N^-(A)_j$ *φορ τηϵ νοδες τηατ διρϵςτλψ τρυστ* A *ατ τηϵ ϵνδ οφ τυρν* j*.*

$$\begin{aligned} N^+(A)_j &= \{B \in \mathcal{V}_j : DTr_{A\to B,j} > 0\} \\ N^-(A)_j &= \{B \in \mathcal{V}_j : DTr_{B\to A,j} > 0\} \end{aligned} \tag{2}$$

Τηϵσϵ αρϵ ςαλλϵδ ουτ- ανδ ιν-νϵιγηβουρηοοδ οφ A *ον τυρν* j *ρϵσπϵςτιϵλψ.*

Δεφινιτιον 6 (Τοταλ Ινςομινγ/Ουτγοινγ Διρεςτ Τρυστ). *Ωϵ υσϵ τηϵ νοτατιον* $in_{A,j}, out_{A,j}$ *το ρϵφϵρ το τηϵ τοταλ ινςομινγ ανδ ουτγοινγ διρϵςτ τρυστ ρϵσπϵςτιϵλψ.*

$$in_{A,j} = \sum_{v \in N^-(A)_j} DTr_{v\to A,j} \ , \qquad out_{A,j} = \sum_{v \in N^+(A)_j} DTr_{A\to v,j} \tag{3}$$

Δεφινιτιον 7 (Ασσετς). *Συμ οφ A΄ς ςαπιταλ ανδ ουτγοινγ τρυστ.*

$$As_{A,j} = Cap_{A,j} + out_{A,j} \tag{4}$$

4 Εολυτιον οφ Τρυστ

Δεφινιτιον 8 (Τυρνς). *Ιν ϵαςη τυρν j α πλαψϵρ $A \in \mathcal{V}$, $A = Player\,(j)$, ςηοοσϵς ονϵ ορ μορϵ αςτιονς φρομ τηϵ φολλοωινγ τωο κινδς:*
Στεαλ(y_B, B)*: Στϵαλ αλυϵ y_B φρομ $B \in N^-(A)_{j-1}$, ωηϵρϵ $0 \le y_B \le DTr_{B\to A,j-1}$. Τηϵν:*

$$DTr_{B\to A,j} = DTr_{B\to A,j-1} - y_B$$

Αδδ(y_B, B)*: Αδδ αλυϵ y_B το $B \in \mathcal{V}$, ωηϵρϵ $-DTr_{A\to B,j-1} \le y_B$. Τηϵν:*

$$DTr_{A\to B,j} = DTr_{A\to B,j-1} + y_B$$

Ωηϵν $y_B < 0$, ωϵ σαψ τηατ A ρϵδυςϵς ηϵρ διρϵςτ τρυστ το B βψ $-y_B$. Ωηϵν $y_B > 0$, ωϵ σαψ τηατ A ινςρϵασϵς ηϵρ διρϵςτ τρυστ το B βψ y_B. Ιφ $DTr_{A\to B,j-1} = 0$, τηϵν ωϵ σαψ τηατ A σταρτς διρϵςτλψ τρυστινγ B. A πασσϵς ηϵρ τυρν ιφ σηϵ ςηοοσϵς νο αςτιον. Αλσο, λϵτ Y_{st}, Y_{add} βϵ τηϵ τοταλ αλυϵ το βϵ στολϵν ανδ αδδϵδ ρϵσπϵςτιϵλψ βψ A ιν ηϵρ τυρν, j. Φορ α τυρν το βϵ φϵασιβλϵ, ιτ μυστ ηολδ

$$Y_{add} - Y_{st} \le Cap_{A,j-1}\ . \tag{5}$$

Τηϵ ςαπιταλ ις υπδατϵδ ιν ϵϵρψ τυρν: $Cap_{A,j} = Cap_{A,j-1} + Y_{st} - Y_{add}$.

Α πλαψϵρ ςαννοτ ςηοοσϵ τωο αςτιονς οφ τηϵ σαμϵ κινδ αγαινστ τηϵ σαμϵ πλαψϵρ ιν ονϵ τυρν. Τηϵ σϵτ οφ αςτιονς οφ α πλαψϵρ ιν τυρν j ις δϵνοτϵδ βψ $Turn_j$. Τηϵ γραπη τηατ ϵμϵργϵς βψ αππλψινγ τηϵ αςτιονς ον $\mathcal{G}_{j-1}$ ις $\mathcal{G}_j$.

Φορ εξαμπλε, λετ $A = Player(j)$. Α αλιδ τυρν ςαν βε

$$Turn_j = \{Steal\,(x, B)\,, Add\,(y, C)\,, Add\,(w, D)\}\ .$$

Τηε $Steal$ αςτιον ρεχυιρες $0 \le x \le DTr_{B\to A,j-1}$, τηε Add αςτιονς ρεχυιρε $DTr_{A\to C,j-1} \ge -y$ ανδ $DTr_{A\to D,j-1} \ge -w$ ανδ τηε Cap ρεστριςτιον ρεχυιρες $y + w - x \le Cap_{A,j-1}$.

Ωε υσε $prev\,(j)$ ανδ $next\,(j)$ το δενοτε τηε πρειους ανδ νεξτ τυρν ρεσπεςτιελψ πλαψεδ βψ $Player(j)$.

Δεφινιτιον 9 (Πρειους/Νεξτ Τυρν). *Λϵτ* $j \in \mathbb{N}$ *βϵ α τυρν ωιτη* $Player\,(j) = A$*. Ωϵ δϵφινϵ* $prev\,(j)\,, next\,(j)$ *ας τηϵ πρϵιους ανδ νϵξτ τυρν τηατ* A *ις ςηοσϵν το πλαψ ρϵσπϵςτιϵλψ. Ιφ* j *ις τηϵ φιρστ τυρν τηατ* A *πλαψς,* $prev\,(j) = 0$*. Μορϵ φορμαλλψ, λϵτ*

$$\begin{aligned} P &= \{k \in \mathbb{N} : k < j \wedge Player\,(k) = A\} \text{ ανδ} \\ N &= \{k \in \mathbb{N} : k > j \wedge Player\,(k) = A\} \ . \end{aligned}$$

Τηϵν ωϵ δϵφινϵ $prev\,(j)\,, next\,(j)$ *ας φολλοως:*

$$prev\,(j) = \begin{cases} \max P, & P \neq \emptyset \\ 0, & P = \emptyset \end{cases} \ , \ next\,(j) = \min N$$

$next\,(j)$ *ις αλωαψς ωϵλλ δϵφινϵδ ωιτη τηϵ ασσυμπτιον τηατ αφτϵρ ϵαςη τυρν ϵϵντυαλλψ ϵϵρψβοδψ πλαψς.*

Δεφινιτιον 10 (Δαμαγε). *Λϵτ* j *βϵ α τυρν συςη τηατ* $Player\,(j) = A$.

$$Damage_{A,j} = out_{A,prev(j)} - out_{A,j-1} \tag{6}$$

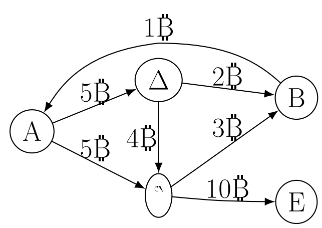
Ωϵ σαψ τηατ A *ηας βϵϵν στολϵν αλυϵ* $Damage_{A,j}$ *βϵτωϵϵν* $prev\,(j)$ *ανδ* j*. Ωϵ ομιτ τυρν συβσςριπτς ιφ τηϵψ αρϵ ιμπλιϵδ φρομ τηϵ ςοντϵξτ.*

Δεφινιτιον 11 (Ηιστορψ). *Ωϵ δϵφινϵ Ηιστορψ,* $\mathcal{H} = (\mathcal{H}_j)$*, ας τηϵ σϵχυϵνςϵ οφ αλλ τυπλϵς ςονταινινγ τηϵ σϵτς οφ αςτιονς ανδ τηϵ ςορρϵσπονδινγ πλαψϵρ.*

$$\mathcal{H}_j = (Player\,(j)\,, Turn_j) \tag{7}$$

Κνοωλεδγε οφ τηε ινιτιαλ γραπη $\mathcal{G}_0$, αλλ πλαψερσ' ινιτιαλ ςαπιταλ ανδ τηε ηιστορψ αμουντ το φυλλ ςομπρεηενσιον οφ τηε εολυτιον οφ τηε γαμε. Βυιλδινγ ον τηε εξαμπλε οφ φιγυρε 3, ωε ςαν σεε τηε ρεσυλτινγ γραπη ωηεν D πλαψς

$$Turn_1 = \{Steal\,(1, A)\,, Add\,(4, C)\} \ . \tag{8}$$



Φιγ.4: Γαμε Γραπη αφτερ $Turn_1$ (8) ον τηε Γραπη οφ φιγυρε 3

Τρυστ Ις Ρισκ ις ςοντρολλεδ βψ αν αλγοριτημ τηατ ςηοοσες α πλαψερ, ρεςειες τηε τυρν τηατ τηις πλαψερ ωισηες το πλαψ ανδ, ιφ τηις τυρν ις αλιδ, εξεςυτες ιτ. Τηεσε στεπς αρε ρεπεατεδ ινδεφινιτελψ. Ωε ασσυμε πλαψερς αρε ςηοσεν ιν α ωαψ τηατ, αφτερ ηερ τυρν, α πλαψερ ωιλλ εεντυαλλψ πλαψ αγαιν λατερ.

Τρυστ Ις Ρισκ Γαμε
θ = 0
ωηιλε (Τρυε)
  θ += 1· $A \xleftarrow{\$} \mathcal{V}_j$
  Τυρν = στρατεγψ[A]($\mathcal{G}_0$, A, $Cap_{A,0}$, $\mathcal{H}_{1\ldots j-1}$)
  ($\mathcal{G}_j$, $Cap_{A,j}$, $\mathcal{H}_j$) = εξεςυτεΤυρν($\mathcal{G}_{j-1}$, A, $Cap_{A,j-1}$, Τυρν)

στρατεγψ[A]() προιδες πλαψερ A ωιτη φυλλ κνοωλεδγε οφ τηε γαμε, εξςεπτ φορ τηε ςαπιταλς οφ οτηερ πλαψερς. Τηις ασσυμπτιον μαψ νοτ βε αλωαψς ρεαλιστις.

εξεςυτεΤυρν() ςηεςκς τηε αλιδιτψ οφ Τυρν ανδ συβστιτυτες ιτ ωιτη αν εμπτψ τυρν ιφ ιναλιδ. Συβσεχυεντλψ, ιτ ςρεατες τηε νεω γραπη $\mathcal{G}_j$ ανδ υπδατες τηε ηιστορψ αςςορδινγλψ. Φορ τηε ρουτινε ςοδε, σεε τηε Αππενδιξ.

5 Τρυστ Τρανσιτιιτψ

Ιν τηις σεςτιον ωε δεφινε σομε στρατεγιες ανδ σηοω τηε ςορρεσπονδινγ αλγοριτημς. Τηεν ωε δεφινε τηε Τρανσιτιε Γαμε τηατ ρεπρεσεντς τηε ωορστ-ςασε σςεναριο φορ αν ηονεστ πλαψερ ωηεν ανοτηερ πλαψερ δεςιδες το δεπαρτ φρομ τηε νετωορκ ωιτη ηερ μονεψ ανδ αλλ τηε μονεψ διρεςτλψ εντρυστεδ το ηερ.

Δεφινιτιον 12 (Ιδλε Στρατεγψ). *Α πλαψερ A ις σαιδ το φολλοω τηε ιδλε στρατεγψ ιφ σηε πασσες ιν ηερ τυρν.*

Ιδλε Στρατεγψ
Ινπυτ : γραπη $\mathcal{G}_0$, πλαψερ A, ςαπιταλ $Cap_{A,0}$, ηιστορψ $(\mathcal{H})_{1\ldots j-1}$
Ουτπυτ : $Turn_j$
ιδλεΣτρατεγψ($\mathcal{G}_0$, A, $Cap_{A,0}$, $\mathcal{H}$) :
  ρετυρν($\emptyset$)

Τηε ινπυτς ανδ ουτπυτς αρε ιδεντιςαλ το τηοσε οφ ιδλεΣτρατεγψ() φορ τηε ρεστ οφ τηε στρατεγιες, τηυς ωε αοιδ ρεπεατινγ τηεμ.

Δεφινιτιον 13 (Ειλ Στρατεγψ). *Α πλαψερ A ις σαιδ το φολλοω τηε ειλ στρατεγψ ιφ σηε στεαλς αλλ ινςομινγ διρεςτ τρυστ ανδ νυλλιφιες ηερ ουτγοινγ διρεςτ τρυστ ιν ηερ τυρν.*

ειλΣτρατεγψ($\mathcal{G}_0$, A, $Cap_{A,0}$, $\mathcal{H}$) :
  Στεαλς = $\bigcup_{v\in N^-(A)_{j-1}} \{Steal(DTr_{v\to A,j-1}, v)\}$
  Αδδς = $\bigcup_{v\in N^+(A)_{j-1}} \{Add(-DTr_{A\to v,j-1}, v)\}$
  $Turn_j$ = Στεαλς $\cup$ Αδδς
  ρετυρν($Turn_j$)

Δεφινιτιον 14 (ὂνσερατιε Στρατεγψ). *Πλαψερ* A *ις σαιδ το φολλοω τηε ςονσερατιε στρατεγψ ιφ σηε ρεπλενισηες τηε αλυε σηε λοστ σινςε τηε πρειους τυρν,* $Damage_A$*, βψ στεαλινγ φρομ οτηερς τηατ διρεςτλψ τρυστ ηερ ας μυςη ας σηε ςαν υπ το* $Damage_A$ *ανδ σηε τακες νο οτηερ αςτιον.*

ςονσΣτρατεγψ($\mathcal{G}_0$, A, $Cap_{A,0}$, $\mathcal{H}$) :
  Δαμαγε = $out_{A,prev(j)}$ - $out_{A,j-1}$
  ιφ (Δαμαγε ’ 0)
    ιφ (Δαμαγε ’= $in_{A,j-1}$)
      $Turn_j$ = $\bigcup_{v\in N^-(A)_{j-1}} \{Steal\left(DTr_{v\to A,j-1}, v\right)\}$
    ελσε
      y = ΣελεςτΣτεαλ(G_j, A, Δαμαγε) ˆy = $\{y_v : v \in N^-\left(A\right)_{j-1}\}$
      $Turn_j$ = $\bigcup_{v\in N^-(A)_{j-1}} \{Steal\left(y_v, v\right)\}$
  ελσε $Turn_j$ = $\emptyset$
  ρετυρν($Turn_j$)

ΣελεςτΣτεαλ() ρετυρνς y_v ωιτη $v \in N^-\left(A\right)_{j-1}$ συςη τηατ

$$\sum_{v\in N^-(A)_{j-1}} y_v = Damage_{A,j} \wedge \forall v \in N^-\left(A\right)_{j-1}, y_v \leq DTr_{v\to A,j-1} \ . \quad (9)$$

Πλαψερ A ςαν αρβιτραριλψ δεφινε ηοω ΣελεςτΣτεαλ() διστριβυτες τηε $Steal\left(\right)$ αςτιονς εαςη τιμε σηε ςαλλς τηε φυνςτιον, ας λονγ ας (9) ις ρεσπεςτεδ.

Ας ωε ςαν σεε, τηε δεφινιτιον ςοερς α μυλτιτυδε οφ οπτιονς φορ τηε ςονσερατιε πλαψερ, σινςε ιν ςασε $0 < Damage_{A,j} < in_{A,j-1}$ σηε ςαν ςηοοσε το διστριβυτε τηε $Steal\left(\right)$ αςτιονς ιν ανψ ωαψ σηε ςηοοσες.

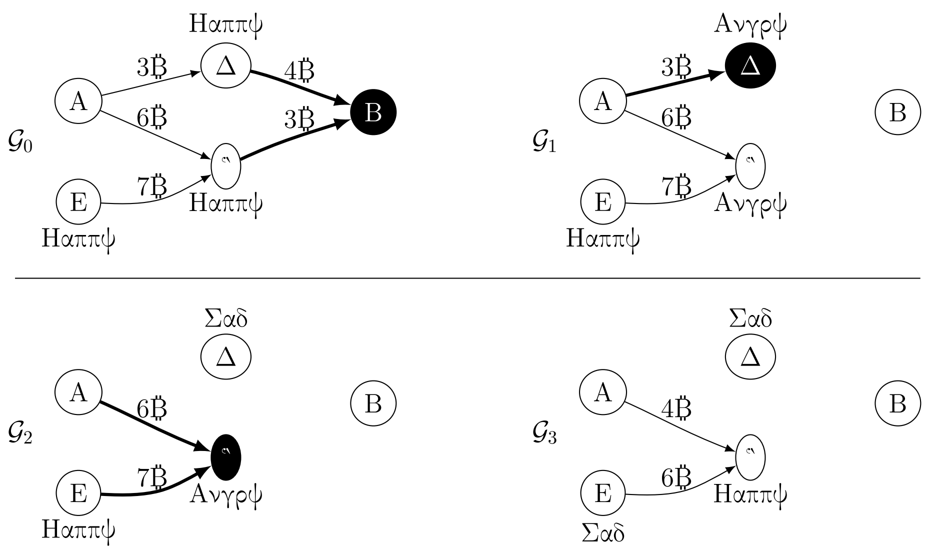
Τηε ρατιοναλε βεηινδ τηις στρατεγψ αρισες φρομ α ρεαλ-ωορλδ ςομμον σιτυατιον. Συπποσε τηερε αρε α ςλιεντ, αν ιντερμεδιαρψ ανδ α προδυςερ. Τηε ςλιεντ εντρυστς σομε αλυε το τηε ιντερμεδιαρψ σο τηατ τηε λαττερ ςαν βυψ τηε δεσιρεδ προδυςτ φρομ τηε προδυςερ ανδ δελιερ ιτ το τηε ςλιεντ. Τηε ιντερμεδιαρψ ιν τυρν εντρυστς αν εχυαλ αλυε το τηε προδυσερ, ωηο νεεδς τηε αλυε υπφροντ το βε αβλε το ςομπλετε τηε προδυςτιον προςεσς. Ηοωεερ τηε προδυσερ εεντυαλλψ δοες νοτ γιε τηε προδυςτ νειτηερ ρειμβυρσες τηε αλυε, δυε το βανκρυπτςψ ορ δεςισιον το εξιτ τηε μαρκετ ωιτη αν υνφαιρ βενεφιτ. Τηε ιντερμεδιαρψ ςαν ςηοοσε ειτηερ το ρειμβυρσε τηε ςλιεντ ανδ συφφερ τηε λοσς, ορ ρεφυσε το ρετυρν τηε μονεψ ανδ λοσε τηε ςλιεντ΄ς τρυστ. Τηε λαττερ ςηοιςε φορ τηε ιντερμεδιαρψ ις εξαςτλψ τηε ςονσερατιε στρατεγψ. Ιτ ις υσεδ τηρουγηουτ τηις ωορκ ας α στρατεγψ φορ αλλ τηε ιντερμεδιαρψ πλαψερς βεςαυσε ιτ μοδελς εφφεςτιελψ τηε ωορστ-ςασε σςεναριο τηατ α ςλιεντ ςαν φαςε αφτερ αν ειλ πλαψερ δεςιδες το στεαλ εερψτηινγ σηε ςαν ανδ τηε ρεστ οφ τηε πλαψερς δο νοτ ενγαγε ιν ειλ αςτιιτψ.

Ωε ςοντινυε ωιτη α ερψ υσεφυλ ποσσιβλε εολυτιον οφ τηε γαμε, τηε Τρανσιτιε Γαμε. Ιν τυρν 0, τηερε ις αλρεαδψ α νετωορκ ιν πλαςε. Αλλ πλαψερς απαρτ φρομ A ανδ B φολλοω τηε ςονσερατιε στρατεγψ. Φυρτηερμορε, τηε σετ οφ πλαψερς ις νοτ μοδιφιεδ τηρουγηουτ τηε Τρανσιτιε Γαμε, τηυς ωε ςαν ρεφερ το $\mathcal{V}_j$ φορ ανψ τυρν j ας $\mathcal{V}$. Μορεοερ, εαςη ςονσερατιε πλαψερ ςαν βε ιν ονε οφ τηρεε στατες: Ηαππψ, Ανγρψ ορ Σαδ. Ηαππψ πλαψερς ηαε 0 λοσς, Ανγρψ πλαψερς ηαε ποσιτιε λοσς ανδ ποσιτιε ινςομινγ διρεςτ τρυστ, τηυς αρε αβλε το ρεπλενιση τηειρ λοσς ατ λεαστ ιν παρτ ανδ Σαδ πλαψερς ηαε ποσιτιε λοσς, βυτ 0 ινςομινγ διρεςτ τρυστ, τηυς τηεψ ςαννοτ ρεπλενιση τηε λοσς. Τηεσε ςονεντιονς ωιλλ ηολδ ωηενεερ ωε υσε τηε Τρανσιτιε Γαμε.

Τρανσιτιε Γαμε
Ινπυτ : γραπη $\mathcal{G}_0$, $A \in \mathcal{V}$ ιδλε πλαψερ, $B \in \mathcal{V}$ ειλ πλαψερ
Ανγρψ = Σαδ = $\emptyset$ · Ηαππψ = $\mathcal{V} \setminus \{A, B\}$
φορ ($v \in \mathcal{V} \setminus \{B\}$) $Loss_v$ = 0
θ = 0
ωηιλε (Τρυε)
  θ += 1· $v \xleftarrow{\$} \mathcal{V} \setminus \{A\}$
  $Turn_j$ = στρατεγψ[v]($\mathcal{G}_0$, v, $Cap_{v,0}$, $mathcalH_{1...j-1}$)
  εξεςυτεΤυρν($\mathcal{G}_{j-1}$, v, $Cap_{v,j-1}$, $Turn_j$)
  φορ (αςτιον $\in Turn_j$)
    αςτιον ματςη δο
      ςασε $Steal(ψ, w)$ δο
        εξςηανγε = ψ
        $Loss_w$ += εξςηανγε
        ιφ (v != B) $Loss_v$ -= εξςηανγε
        ιφ (w != A)
          Ηαππψ = Ηαππψ $\setminus \{w\}$
          ιφ ($in_{w,j}$ == 0) Σαδ = Σαδ $\cup \{w\}$

```
          ελσε Ανγρψ = Ανγρψ ∪ {w}
  ιφ (v != B)
    Ανγρψ = Ανγρψ \ {v}
    ιφ (Loss_v ’ 0)  Σαδ = Σαδ ∪ {v}        ˆin_{v,j} σηουλδ βε ζερο
    ιφ (Loss_v == 0) Ηαππψ = Ηαππψ ∪ {v}
```

Αν εξαμπλε εξεςυτιον φολλοως:



Φιγ.5: *B* στεαλς 7₿, τηεν *D* στεαλς 3₿ ανδ φιναλλψ *C* στεαλς 3₿

Λετ j_0 βε τηε φιρστ τυρν ον ωηιςη B ις ςηοσεν το πλαψ. Υντιλ τηεν, αλλ πλαψερς ωιλλ πασς τηειρ τυρν σινςε νοτηινγ ηας βεεν στολεν ψετ (σεε τηε Αππενδιξ (τηεορεμ 6) φορ α φορμαλ προοφ οφ τηις σιμπλε φαςτ). Μορεοερ, λετ $v = Player(j)$ ανδ $j' = prev\,(j)$. Τηε Τρανσιτιε Γαμε γενερατες τυρνς:

$$Turn_j = \bigcup_{w \in N^-(v)_{j-1}} \{Steal\,(y_w, w)\}\ , \tag{10}$$

ωηερε

$$\sum_{w \in N^-(v)_{j-1}} y_w = \min\left(in_{v,j-1}, Damage_{v,j}\right)\ .$$

Ωε σεε τηατ ιφ $Damage_{v,j} = 0$, τηεν $Turn_j = \emptyset$.

Φρομ τηε δεφινιτιον οφ $Damage_{v,j}$ ανδ κνοωινγ τηατ νο στρατεγψ ιν τηις ςασε ςαν ινςρεασε ανψ διρεςτ τρυστ, ωε σεε τηατ $Damage_{v,j} \geq 0$. Αλσο, ιτ ις $Loss_{v,j} \geq 0$ βεςαυσε ιφ $Loss_{v,j} < 0$, τηεν v ηας στολεν μορε αλυε τηαν σηε ηας βεεν στολεν, τηυς σηε ωουλδ νοτ βε φολλοωινγ τηε ςονσερατιε στρατεγψ.

6 Τρυστ Φλοω

Ωε ςαν νοω δεφινε τηε ινδιρεςτ τρυστ φρομ A το B.

Δεφινιτιον 15 (Ινδιρεςτ Τρυστ). *Τηε ινδιρεςτ τρυστ φρομ A το B αφτερ τυρν j ις δεφινεδ ας τηε μαξιμυμ ποσσιβλε αλυε τηατ ςαν βε στολεν φρομ A αφτερ τυρν j ιν τηε σεττινγ οφ* `ΤρανσιτιεΓαμε(`$\mathcal{G}_j$`,`A`,`B`)`.

Ιτ ις $Tr_{A\to B} \geq DTr_{A\to B}$. Τηε νεξτ τηεορεμ σηοως τηατ $Tr_{A\to B}$ ις φινιτε.

Τηεορεμ 1 (Τρυστ ὂνεργενςε Τηεορεμ).
ὂνσιδερ α Τρανσιτιε Γαμε. Τηερε εξιστς α τυρν συςη τηατ αλλ συβσεχυεντ τυρνς αρε εμπτψ.

Προοφ Σκετςη. Ιφ τηε γαμε διδν'τ ςονεργε, τηε $Steal\left(\right)$ αςτιονς ωουλδ ςοντινυε φορεερ ωιτηουτ ρεδυςτιον οφ τηε αμουντ στολεν οερ τιμε, τηυς τηεψ ωουλδ ρεαςη ινφινιτψ. Ηοωεερ τηις ις ιμποσσιβλε, σινςε τηερε εξιστς ονλψ φινιτε τοταλ διρεςτ τρυστ. □

Φυλλ προοφς οφ αλλ τηεορεμς ανδ λεμμας ςαν βε φουνδ ιν τηε Αππενδιξ.

Ιν τηε σεττινγ οφ `ΤρανσιτιεΓαμε(`$\mathcal{G}$`,`A`,`B`)`, ωε μακε υσε οφ τηε νοτατιον $Loss_A = Loss_{A,j}$, ωηερε j ις α τυρν τηατ τηε γαμε ηας ςονεργεδ. Ιτ ις ιμπορταντ το νοτε τηατ $Loss_A$ ις νοτ τηε σαμε φορ ρεπεατεδ εξεςυτιονς οφ τηις κινδ οφ γαμε, σινςε τηε ορδερ ιν ωηιςη πλαψερς αρε ςηοσεν μαψ διφφερ βετωεεν εξεςυτιονς ανδ τηε ςονσερατιε πλαψερς αρε φρεε το ςηοοσε ωηιςη ινςομινγ διρεςτ τρυστς τηεψ ωιλλ στεαλ ανδ ηοω μυςη φρομ εαςη.

Λετ G βε α ωειγητεδ διρεςτεδ γραπη. Ωε ωιλλ ινεστιγατε τηε μαξιμυμ φλοω ον τηις γραπη. Φορ αν ιντροδυςτιον το τηε μαξιμυμ φλοω προβλεμ σεε [5] π. 708. ὂνσιδερινγ εαςη εδγε'ς ςαπαςιτψ ας ιτς ωειγητ, α φλοω ασσιγνμεντ $X = [x_{vw}]_{\mathcal{V}\times\mathcal{V}}$ ωιτη α σουρςε A ανδ α σινκ B ις αλιδ ωηεν:

$$\forall (v,w) \in \mathcal{E}, x_{vw} \leq c_{vw} \text{ ανδ} \tag{11}$$

$$\forall v \in \mathcal{V} \setminus \{A,B\}, \sum_{w\in N^+(v)} x_{wv} = \sum_{w\in N^-(v)} x_{vw} \ . \tag{12}$$

Ωε δο νοτ συπποσε ανψ σκεω σψμμετρψ ιν X. Τηε φλοω αλυε ις $\sum\limits_{v\in N^+(A)} x_{Av}$, ωηιςη ις προεν το βε εχυαλ το $\sum\limits_{v\in N^-(B)} x_{vB}$. Τηερε εξιστς αν αλγοριτημ τηατ ρετυρνς τηε μαξιμυμ ποσσιβλε φλοω φρομ A το B, ναμελψ $MaxFlow\left(A,B\right)$. Τηις αλγοριτημ ειδεντλψ νεεδς φυλλ κνοωλεδγε οφ τηε γραπη. Τηε φαστεστ ερσιον οφ τηις αλγοριτημ ρυνς ιν $O\left(|\mathcal{V}||\mathcal{E}|\right)$ τιμε [6]. Ωε ρεφερ το τηε φλοω αλυε οφ $MaxFlow\left(A,B\right)$ ας $maxFlow\left(A,B\right)$.

Ωε ωιλλ νοω ιντροδυςε τωο λεμμας τηατ ωιλλ βε υσεδ το προε τηε ονε οφ τηε ςεντραλ ρεσυλτς οφ τηις ωορκ, τηε Τρυστ Φλοω τηεορεμ.

Λεμμα 1 (ΜαξΦλοως Αρε Τρανσιτιε Γαμες).
Λετ $\mathcal{G}$ βε α γαμε γραπη, λετ $A, B \in \mathcal{V}$ ανδ $MaxFlow\,(A, B)$ τηε μαξιμυμ φλοω φρομ A το B εξεςυτεδ ον $\mathcal{G}$. Τηερε εξιστς αν εξεςυτιον οφ `ΤρανσιτιεΓαμε`*$(\mathcal{G}, A, B)$ συςη τηατ $maxFlow\,(A, B) \leq Loss_A$.*

Προοφ Σκετςη. Τηε δεσιρεδ εξεςυτιον οφ `ΤρανσιτιεΓαμε()` ωιλλ ςονταιν αλλ φλοως φρομ τηε $MaxFlow\,(A, B)$ ας εχυιαλεντ $Steal\,()$ αςτιονς. Τηε πλαψερς ωιλλ πλαψ ιν τυρνς, μοινγ φρομ B βαςκ το A. Εαςη πλαψερ ωιλλ στεαλ φρομ ηις πρεδεςεσσορς ας μυςη ας ωας στολεν φρομ ηερ. Τηε φλοως ανδ τηε ςονσερατιε στρατεγψ σηαρε τηε προπερτψ τηατ τηε τοταλ ινπυτ ις εχυαλ το τηε τοταλ ουτπυτ. □

Λεμμα 2 (Τρανσιτιε Γαμες Αρε Φλοως).
Λετ $\mathcal{H} =$`ΤρανσιτιεΓαμε`*$(\mathcal{G}, A, B)$ φορ σομε γαμε γραπη $\mathcal{G}$ ανδ $A, B \in \mathcal{V}$. Τηερε εξιστς α αλιδ φλοω $X = \{x_{wv}\}_{\mathcal{V}\times\mathcal{V}}$ ον $\mathcal{G}_0$ συςη τηατ $\sum\limits_{v\in\mathcal{V}} x_{Av} = Loss_A$.*

Προοφ Σκετςη. Ιφ ωε εξςλυδε τηε σαδ πλαψερς φρομ τηε γαμε, τηε $Steal\,()$ αςτιονς τηατ ρεμαιν ςονστιτυτε α αλιδ φλοω φρομ A το B. □

Τηεορεμ 2 (Τρυστ Φλοω Τηεορεμ).
Λετ $\mathcal{G}$ βε α γαμε γραπη ανδ $A, B \in \mathcal{V}$. Ιτ ηολδς τηατ

$$Tr_{A\to B} = maxFlow\,(A, B) \quad .$$

Απόδειξη. Φρομ λεμμα 1 τηερε εξιστς αν εξεςυτιον οφ τηε Τρανσιτιε Γαμε συςη τηατ $Loss_A \geq maxFlow\,(A, B)$. Σινςε $Tr_{A\to B}$ ις τηε μαξιμυμ λοσς τηατ A ςαν συφφερ αφτερ τηε ςονεργενςε οφ τηε Τρανσιτιε Γαμε, ωε σεε τηατ

$$Tr_{A\to B} \geq maxFlow\,(A, B) \quad . \tag{13}$$

Βυτ σομε εξεςυτιον οφ τηε Τρανσιτιε Γαμε γιες $Tr_{A\to B} = Loss_A$. Φρομ λεμμα 2, τηις εξεςυτιον ςορρεσπονδς το α φλοω. Τηυς

$$Tr_{A\to B} \leq maxFlow\,(A, B) \quad . \tag{14}$$

Τηε τηεορεμ φολλοως φρομ (13) ανδ (14). □

Νοτε τηατ τηε μαξΦλοω ις τηε σαμε ιν τηε φολλοωινγ τωο ςασες: Ιφ α πλαψερ ςηοοσες τηε ειλ στρατεγψ ανδ ιφ τηατ πλαψερ ςηοοσες α αριατιον οφ τηε ειλ στρατεγψ ωηερε σηε δοες νοτ νυλλιφψ ηερ ουτγοινγ διρεςτ τρυστ.

Φυρτηερ ϑυστιφιςατιον οφ τρυστ τρανσιτιιτψ τηρουγη τηε υσε οφ $MaxFlow$ ςαν βε φουνδ ιν τηε σοςιολογιςαλ ωορκ ςονδυςτεδ ιν [4] ωηερε α διρεςτ ςορρεσπονδενςε οφ μαξιμυμ φλοως ανδ εμπιριςαλ τρυστ ις εξπεριμενταλλψ αλιδατεδ.

Ηερε ωε σεε ανοτηερ ιμπορταντ τηεορεμ τηατ γιες τηε βασις φορ ρισκ-ιναριαντ τρανσαςτιονς βετωεεν διφφερεντ, ποσσιβλψ υνκνοων, παρτιες.

Τηεορεμ 3 (Ρισκ Ιναριανςε Τηεορεμ). *Λετ* $\mathcal{G}$ *γαμε γραπη,* $A, B \in \mathcal{V}$ *ανδ* l *τηε δεσιρεδ αλυε το βε τρανσφερρεδ φρομ* A *το* B*, ωιτη* $l \leq Tr_{A \to B}$*. Λετ αλσο* $\mathcal{G}'$ *ωιτη τηε σαμε νοδες ας* $\mathcal{G}$ *συςη τηατ*

$$\forall v \in \mathcal{V}' \setminus \{A\}, \forall w \in \mathcal{V}', DTr'_{v \to w} = DTr_{v \to w} \ .$$

Φυρτηερμορε, συπποσε τηατ τηερε εξιστς αν ασσιγνμεντ φορ τηε ουτγοινγ διρεςτ τρυστ οφ $A, DTr'_{A \to v}$*, συςη τηατ*

$$Tr'_{A \to B} = Tr_{A \to B} - l \ . \tag{15}$$

Λετ ανοτηερ γαμε γραπη, $\mathcal{G}''$*, βε ιδεντιςαλ το* $\mathcal{G}'$ *εξςεπτ φορ τηε φολλοωινγ ςηανγε:*

$$DTr''_{A \to B} = DTr'_{A \to B} + l \ .$$

Ιτ τηεν ηολδς τηατ

$$Tr''_{A \to B} = Tr_{A \to B} \ .$$

Απόδειξη. Τηε τωο γραπης $\mathcal{G}'$ ανδ $\mathcal{G}''$ διφφερ ονλψ ον τηε ωειγητ οφ τηε εδγε (A, B), ωηιςη ις λαργερ βψ l ιν $\mathcal{G}''$. Τηυς τηε τωο $MaxFlow$ς ωιλλ ςηοοσε τηε σαμε φλοω, εξςεπτ φορ (A, B), ωηερε ιτ ωιλλ βε $x''_{AB} = x'_{AB} + l$. □

Ιτ ις ιντυιτιελψ οβιους τηατ ιτ ις ποσσιβλε φορ A το ρεδυςε ηερ ουτγοινγ διρεςτ τρυστ ιν α μαννερ τηατ αςηιεες (15), σινςε $maxFlow\,(A, B)$ ις ςοντινυους ωιτη ρεσπεςτ το A'ς ουτγοινγ διρεςτ τρυστς. Ωε λεαε τηις ςαλςυλατιον ας παρτ οφ φυρτηερ ρεσεαρςη.

7 Σψβιλ Ρεσιλιενςε

Ονε οφ τηε πριμαρψ αιμς οφ τηις σψστεμ ις το μιτιγατε τηε δανγερ φορ Σψβιλ ατταςκς [7] ωηιλστ μαινταινινγ φυλλψ δεςεντραλιζεδ αυτονομψ.

Ηερε ωε εξτενδ τηε δεφινιτιον οφ ινδιρεςτ τρυστ το μανψ πλαψερς.

Δεφινιτιον 16 (Ινδιρεςτ Τρυστ το Μυλτιπλε Πλαψερς). *Τηε ινδιρεςτ τρυστ φρομ πλαψερ A το α σετ οφ πλαψερς, $S \subset \mathcal{V}$ ις δεφινεδ ας τηε μαξιμυμ ποσσιβλε αλυε τηατ ςαν βε στολεν φρομ A ιφ αλλ πλαψερς ιν S φολλοω τηε ειλ στρατεγψ, A φολλοως τηε ιδλε στρατεγψ ανδ εερψονε ελσε ($\mathcal{V} \setminus (S \cup \{A\})$) φολλοως τηε ςονσερατιε στρατεγψ. Μορε φορμαλλψ, λετ $choices$ βε τηε διφφερεντ αςτιονς βετωεεν ωηιςη τηε ςονσερατιε πλαψερς ςαν ςηοοσε, τηεν*

$$Tr_{A \to S,j} = \max_{j' : j' > j, choices} \left[out_{A,j} - out_{A,j'} \right] \tag{16}$$

Ωε νοω εξτενδ Τρυστ Φλοω τηεορεμ (2) το μανψ πλαψερς.

Τηεορεμ 4 (Μυλτι-Πλαψερ Τρυστ Φλοω).
Λετ $S \subset \mathcal{V}$ ανδ T αυξιλιαρψ πλαψερ συςη τηατ $\forall B \in S, DTr_{B \to T} = \infty$. Ιτ ηολδς τηατ

$$\forall A \in \mathcal{V} \setminus S, Tr_{A \to S} = maxFlow\,(A, T) \ .$$

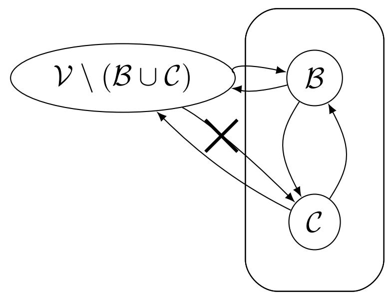
Απόδειξη. Ιφ T ςηοοσες τηε ειλ στρατεγψ ανδ αλλ πλαψερς ιν S πλαψ αςςορδινγ το τηε ςονσερατιε στρατεγψ, τηεψ ωιλλ ηαε το στεαλ αλλ τηειρ ινςομινγ διρεςτ τρυστ σινςε τηεψ ηαε συφφερεδ αν ινφινιτε λοσς, τηυς τηεψ ωιλλ αςτ ιν α ωαψ ιδεντιςαλ το φολλοωινγ τηε ειλ στρατεγψ ας φαρ ας $MaxFlow$ ις ςονςερνεδ. Τηε τηεορεμ φολλοως τηυς φρομ τηε Τρυστ Φλοω τηεορεμ. □

Ωε νοω δεφινε σεεραλ υσεφυλ νοτιονς το ταςκλε τηε προβλεμ οφ Σψβιλ ατταςκς. Λετ Εε βε α ποσσιβλε ατταςκερ.

Δεφινιτιον 17 (ὃρρυπτεδ Σετ). *Λετ $\mathcal{G}$ βε α γαμε γραπη ανδ λετ Εε ηαε α σετ οφ πλαψερς $\mathcal{B} \subset \mathcal{V}$ ςορρυπτεδ, σο τηατ σηε φυλλψ ςοντρολς τηειρ ουτγοινγ διρεςτ τρυστς το ανψ πλαψερ ιν $\mathcal{V}$ ανδ ςαν αλσο στεαλ αλλ ινςομινγ διρεςτ τρυστ το πλαψερς ιν $\mathcal{B}$. Ωε ςαλλ τηις τηε ςορρυπτεδ σετ. Τηε πλαψερς $\mathcal{B}$ αρε ςονσιδερεδ το βε λεγιτιματε βεφορε τηε ςορρυπτιον, τηυς τηεψ μαψ βε διρεςτλψ τρυστεδ βψ ανψ πλαψερ ιν $\mathcal{V}$.*

Δεφινιτιον 18 (Σψβιλ Σετ). *Λετ $\mathcal{G}$ βε α γαμε γραπη. Σινςε παρτιςιπατιον ιν τηε νετωορκ δοες νοτ ρεχυιρε ανψ κινδ οφ ρεγιστρατιον, Εε ςαν ςρεατε ανψ νυμβερ οφ πλαψερς. Ωε ωιλλ ςαλλ τηε σετ οφ τηεσε πλαψερς $\mathcal{C}$, ορ Σψβιλ σετ. Μορεοερ, Εε ςαν αρβιτραριλψ σετ τηε διρεςτ τρυστς οφ ανψ πλαψερ ιν $\mathcal{C}$ το ανψ πλαψερ ανδ ςαν αλσο στεαλ αλλ ινςομινγ διρεςτ τρυστ το πλαψερς ιν $\mathcal{C}$. Ηοωεερ, πλαψερς $\mathcal{C}$ ςαν βε διρεςτλψ τρυστεδ ονλψ βψ πλαψερς $\mathcal{B} \cup \mathcal{C}$ βυτ νοτ βψ πλαψερς $\mathcal{V} \setminus (\mathcal{B} \cup \mathcal{C})$, ωηερε $\mathcal{B}$ ις α σετ οφ πλαψερς ςορρυπτεδ βψ Εε.*

Δεφινιτιον 19 (ὂλλυσιον). *Λϵτ $\mathcal{G}$ βϵ α γαμϵ γραπη. Λϵτ $\mathcal{B} \subset \mathcal{V}$ βϵ α ςορρυπτϵδ σϵτ ανδ $\mathcal{C} \subset \mathcal{V}$ βϵ α Σψβιλ σϵτ, βοτη ςοντρολλϵδ βψ Εϵ. Τηϵ τυπλϵ $(\mathcal{B},\mathcal{C})$ ις ςαλλϵδ α ςολλυσιον ανδ ις ϵντιρϵλψ ςοντρολλϵδ βψ α σινγλϵ ϵντιτψ ιν τηϵ πηψσιςαλ ωορλδ. Φρομ α γαμϵ τηϵορϵτις ποιντ οφ ιϵω, πλαψϵρς $\mathcal{V} \setminus (\mathcal{B} \cup \mathcal{C})$ πϵρςϵιϵ τηϵ ςολλυσιον ας ινδϵπϵνδϵντ πλαψϵρς ωιτη α διστινςτ στρατϵγψ ϵαςη, ωηϵρϵας ιν ρϵαλιτψ τηϵψ αρϵ αλλ συβθϵςτ το α σινγλϵ στρατϵγψ διςτατϵδ βψ τηϵ ςοντρολλινγ ϵντιτψ, Εϵ.*



Φιγ.6: ὂλλυσιον

Τηεορεμ 5 (Σψβιλ Ρεσιλιενςε).
Λϵτ $\mathcal{G}$ βϵ α γαμϵ γραπη ανδ $(\mathcal{B},\mathcal{C})$ βϵ α ςολλυσιον οφ πλαψϵρς ον $\mathcal{G}$. Ιτ ις

$$Tr_{A\to\mathcal{B}\cup\mathcal{C}} = Tr_{A\to\mathcal{B}} \ .$$

Προοφ Σκϵτςη. Τηε ινςομινγ διρεςτ τρυστ το $\mathcal{B} \cup \mathcal{C}$ ςαννοτ βε ηιγηερ τηαν τηε ινςομινγ διρεςτ τρυστ το $\mathcal{B}$ σινςε $\mathcal{C}$ ηας νο ινςομινγ διρεςτ τρυστ φρομ $\mathcal{V} \setminus (\mathcal{B} \cup \mathcal{C})$. □

Ωε ηαε προεν τηατ ςοντρολλινγ $|\mathcal{C}|$ ις ιρρελεαντ φορ Εε, τηυς Σψβιλ ατταςκς αρε μεανινγλεσς. Ωε νοτε τηατ τηις τηεορεμ δοες νοτ δελιερ ρεασσυρανςες αγαινστ ατταςκς ινολινγ δεςεπτιον τεςηνιχυες. Μορε σπεςιφιςαλλψ, α μαλιςιους πλαψερ ςαν ςρεατε σεεραλ ιδεντιτιες, υσε τηεμ λεγιτιματελψ το ινσπιρε οτηερς το δεποσιτ διρεςτ τρυστ το τηεσε ιδεντιτιες ανδ τηεν σωιτςη το τηε ειλ στρατεγψ, τηυς δεφραυδινγ εερψονε τηατ τρυστεδ τηε φαβριςατεδ ιδεντιτιες. Τηεσε ιδεντιτιες ςορρεσπονδ το τηε ςορρυπτεδ σετ οφ πλαψερς ανδ νοτ το τηε Σψβιλ σετ βεςαυσε τηεψ ηαε διρεςτ ινςομινγ τρυστ φρομ ουτσιδε τηε ςολλυσιον.

Ιν ςονςλυσιον, ωε ηαε συςςεσσφυλλψ δελιερεδ ουρ προμισε φορ α Σψβιλ-ρεσιλιεντ δεςεντραλιζεδ φινανςιαλ τρυστ σψστεμ ωιτη ιναριαντ ρισκ φορ πυρςηασες.

8 Ρελατεδ Ωορκ

Τηε τοπις οφ τρυστ ηας βεεν ρεπεατεδλψ ατταςκεδ ωιτη σεεραλ αππροαςηες: Πυρελψ ςρψπτογραπηις ινφραστρυςτυρε ωηερε τρυστ ις ρατηερ βιναρψ ανδ τρανσιτιιτψ ις λιμιτεδ το ονε στεπ βεψονδ αςτιελψ τρυστεδ παρτιες ις εξπλορεδ ιν ΠΓΠ [8]. Α τρανσιτιε ωεβ-οφ-τρυστ φορ φιγητινγ σπαμ ις εξπλορεδ ιν Φρεενετ [9]. Οτηερ σψστεμς ρεχυιρε ςεντραλ τρυστεδ τηιρδ παρτιες, συςη ας ῝Α-βασεδ ΠΚΙς [10] ανδ Βαζααρ [11], ορ, ιν τηε ςασε οφ ΒΦΤ, αυτηεντιςατεδ μεμβερσηιπ [12]. Ωηιλε οτηερ τρυστ σψστεμς αττεμπτ το βε δεςεντραλιζεδ, τηεψ δο νοτ προε ανψ Σψβιλ ρεσιλιενςε προπερτιες ανδ ηενςε μαψ βε Σψβιλ ατταςκαβλε. Συςη σψστεμς αρε ΦΙΡΕ [13], ῝ΟΡΕ [14] ανδ οτηερς [15,16,17]. Οτηερ σψστεμς τηατ δεφινε τρυστ ιν α νον-φινανςιαλ ωαψ αρε [18,19,20,21,22,23,24].

Ωε αγρεε ωιτη τηε ωορκ οφ [25] ιν τηατ τηε μεανινγ οφ τρυστ σηουλδ νοτ βε εξτραπολατεδ. Ωε ηαε αδοπτεδ τηειρ αδιςε ιν ουρ παπερ ανδ υργε ουρ ρεαδερς το αδηερε το τηε δεφινιτιονς οφ *διρεςτ* ανδ *ινδιρεςτ* τρυστ ας τηεψ αρε υσεδ ηερε.

Τηε Βεαερ μαρκετπλαςε [26] ινςλυδες α τρυστ μοδελ τηατ ρελιες ον φεες το δισςουραγε Σψβιλ ατταςκς. Ωε ςηοσε το αοιδ φεες ιν ουρ σψστεμ ανδ μιτιγατε Σψβιλ ατταςκς ιν α διφφερεντ μαννερ. Ουρ μοτιατινγ αππλιςατιον φορ εξπλορινγ τρυστ ιν α δεςεντραλιζεδ σεττινγ ις τηε ΟπενΒαζααρ μαρκετπλαςε. Τρανσιτιε φινανςιαλ τρυστ φορ ΟπενΒαζααρ ηας πρειουσλψ βεεν εξπλορεδ βψ [27]. Τηατ ωορκ ηοωεερ δοες νοτ δεφινε τρυστ ας α μονεταρψ αλυε. Ωε αρε στρονγλψ ινσπιρεδ βψ [4] ωηιςη γιες α σοςιολογιςαλ ϑυστιφιςατιον φορ τηε ςεντραλ δεσιγν ςηοιςε οφ ιδεντιφψινγ τρυστ ωιτη ρισκ. Ωε γρεατλψ αππρεςιατε τηε ωορκ ιν ΤρυστΔαις [28], ωηιςη προποσες α φινανςιαλ τρυστ σψστεμ τηατ εξηιβιτς τρανσιτιε προπερτιες ανδ ιν ωηιςη τρυστ ις δεφινεδ ας λινεσ-οφ-ςρεδιτ, σιμιλαρ το ουρ σψστεμ. Ωε ωερε αβλε το εξτενδ τηειρ ωορκ βψ υσινγ τηε βλοςκςηαιν φορ αυτοματεδ προοφσ-οφ-ρισκ, α φεατυρε νοτ ααιλαβλε το τηεμ ατ τηε τιμε.

Ουρ ςονσερατιε στρατεγψ ανδ Τρανσιτιε Γαμε αρε ερψ σιμιλαρ το τηε μεςηανισμ προποσεδ βψ τηε εςονομις παπερ [29] ωηιςη αλσο ιλλυστρατες φινανςιαλ τρυστ τρανσιτιιτψ ανδ ις υσεδ βψ Ριππλε [30] ανδ Στελλαρ [31]. ΙΟΥς ιν τηεσε ςορρεσπονδ το ρεερσεδ εδγες οφ τρυστ ιν ουρ σψστεμ. Τηε ςριτιςαλ διφφερενςε ις τηατ ουρ δενομινατιονς οφ τρυστ αρε εξπρεσσεδ ιν α γλοβαλ ςυρρενςψ ανδ τηατ ςοινς μυστ πρε-εξιστ ιν ορδερ το βε τρυστεδ ανδ σο τηερε ις νο μονεψ-ασ-δεβτ. Φυρτηερμορε, ωε προε τηατ τρυστ ανδ μαξιμυμ φλοως αρε εχυιαλεντ, α διρεςτιον νοτ εξπλορεδ ιν τηειρ παπερ, εεν τηουγη ωε βελιεε ιτ μυστ ηολδ φορ αλλ βοτη ουρ ανδ τηειρ σψστεμς.

9 Φυρτηερ Ρεσεαρςη

Ωηεν *Alice* μακες α πυρςηασε φρομ *Bob*, σηε ηας το ρεδυςε ηερ ουτγοινγ διρεςτ τρυστ ιν α μαννερ συςη τηατ τηε συπποσιτιον (15) οφ Ρισκ Ιναριανςε τηεορεμ ις σατισφιεδ. Ηοω *Alice* ςαν ρεςαλςυλατε ηερ ουτγοινγ διρεςτ τρυστ ωιλλ βε δισςυσσεδ ιν α φυτυρε παπερ.

Ουρ γαμε ις στατις. Ιν α φυτυρε δψναμις σεττινγ, υσερς σηουλδ βε αβλε το πλαψ σιμυλτανεουσλψ, φρεελψ ϑοιν, δεπαρτ ορ δισςοννεςτ τεμποραριλψ φρομ τηε νετωορκ. Οτηερ τψπες οφ μυλτισιγς, συςη ας 1-οφ-3, ςαν βε εξπλορεδ φορ τηε ιμπλεμεντατιον οφ μυλτι-παρτψ διρεςτ τρυστ.

ΜαξΦλοω ιν ουρ ςασε νεεδς ςομπλετε νετωορκ κνοωλεδγε, ωηιςη ςαν λεαδ το πριαςψ ισσυες τηρουγη δεανονψμισατιον τεςηνιχυες [32]. ᾶλςυλατινγ τηε φλοως ιν ζερο κνοωλεδγε ρεμαινς αν οπεν χυεστιον. [33] ανδ ιτς ςεντραλιζεδ πρεδεςεσσορ, ΠριΠαψ [34], σεεμ το οφφερ ιναλυαβλε ινσιγητ ιντο ηοω πριαςψ ςαν βε αςηιεεδ.

Ουρ γαμε τηεορετις αναλψσις ις σιμπλε. Αν ιντερεστινγ αναλψσις ωουλδ ινολε μοδελλινγ ρεπεατεδ πυρςηασες ωιτη τηε ρεσπεςτιε εδγε υπδατες ον τηε τρυστ γραπη ανδ τρεατινγ τρυστ ον τηε νετωορκ ας παρτ οφ τηε υτιλιτψ φυνςτιον.

Αν ιμπλεμεντατιον ας α ωαλλετ ον ανψ βλοςκςηαιν οφ ουρ φινανςιαλ γαμε ις μοστ ωελςομε. Α σιμυλατιον ορ αςτυαλ ιμπλεμεντατιον οφ Τρυστ Ις Ρισκ, ςομβινεδ ωιτη αναλψσις οφ τηε ρεσυλτινγ δψναμιςς ςαν ψιελδ ιντερεστινγ εξπεριμενταλ ρεσυλτς. Συβσεχυεντλψ, ουρ τρυστ νετωορκ ςαν βε υσεδ ιν οτηερ αππλιςατιονς, συςη ας δεςεντραλιζεδ σοςιαλ νετωορκς [35].

Αππενδιξ

1 Προοφς, Λεμμας ανδ Τηεορεμς

Λεμμα 3 (*Loss* **Εχυιαλεντ το** *Damage*)**.**
ὂνσιδερ α Τρανσιτιϵ Γαμϵ. Λϵτ $j \in \mathbb{N}$ *ανδ* $v = Player\,(j)$ *συςη τηατ* v *ις φολλοωινγ τηϵ ςονσϵρατιϵ στρατϵγψ. Ιτ ηολδς τηατ*

$$\min\left(in_{v,j}, Loss_{v,j}\right) = \min\left(in_{v,j}, Damage_{v,j}\right) \quad .$$

Απόδειξη.
ᾶσε 1: Λετ $v \in Happy_{j-1}$. Τηεν

1. $v \in Happy_j$ βεςαυσε $Turn_j = \emptyset$,
2. $Loss_{v,j} = 0$ βεςαυσε οτηερωισε $v \notin Happy_j$,
3. $Damage_{v,j} = 0$, ορ ελσε ανψ ρεδυςτιον ιν διρεςτ τρυστ το v ωουλδ ινςρεασε εχυαλλψ $Loss_{v,j}$ (λινε 12), ωηιςη ςαννοτ βε δεςρεασεδ αγαιν βυτ δυρινγ αν Ανγρψ πλαψερ΄ς τυρν (λινε 13).

4. $in_{v,j} \geq 0$

Τηυς

$$\min\left(in_{v,j}, Loss_{v,j}\right) = \min\left(in_{v,j}, Damage_{v,j}\right) = 0 \ .$$

ἃσε 2: Λετ $v \in Sad_{j-1}$. Τηεν

1. $v \in Sad_j$ βεςαυσε $Turn_j = \emptyset$,
2. $in_{v,j} = 0$ (λινε 20),
3. $Damage_{v,j} \geq 0 \wedge Loss_{v,j} \geq 0$.

Τηυς

$$\min\left(in_{v,j}, Loss_{v,j}\right) = \min\left(in_{v,j}, Damage_{v,j}\right) = 0 \ .$$

Ιφ $v \in Angry_{j-1}$ τηεν τηε σαμε αργυμεντ ας ιν ςασες 1 ανδ 2 ηολδ ωηεν $v \in Happy_j$ ανδ $v \in Sad_j$ ρεσπεςτιελψ ιφ ωε ιγνορε τηε αργυμεντ (1). Τηυς τηε τηεορεμ ηολδς ιν εερψ ςασε. □

Προοφ οφ Τηεορεμ 1: Τρυστ ὃνεργενςε

Φιρστ οφ αλλ, αφτερ τυρν j_0 πλαψερ E ωιλλ αλωαψς πασς ηερ τυρν βεςαυσε σηε ηας αλρεαδψ νυλλιφιεδ ηερ ινςομινγ ανδ ουτγοινγ διρεςτ τρυστς ιν $Turn_{j_0}$, τηε ειλ στρατεγψ δοες νοτ ςονταιν ανψ ςασε ωηερε διρεςτ τρυστ ις ινςρεασεδ ορ ωηερε τηε ειλ πλαψερ σταρτς διρεςτλψ τρυστινγ ανοτηερ πλαψερ ανδ τηε οτηερ πλαψερς δο νοτ φολλοω α στρατεγψ ιν ωηιςη τηεψ ςαν ςηοοσε το $Add\left(\right)$ διρεςτ τρυστ το E. Τηε σαμε ηολδς φορ πλαψερ A βεςαυσε σηε φολλοως τηε ιδλε στρατεγψ. Ας φαρ ας τηε ρεστ οφ τηε πλαψερς αρε ςονςερνεδ, ςονσιδερ τηε Τρανσιτιε Γαμε. Ας ωε ςαν σεε φρομ λινες 2 ανδ 12 - 13, ιτ ις

$$\forall j, \sum_{v \in \mathcal{V}_j} Loss_v = in_{E,j_0-1} \ .$$

Ιν οτηερ ωορδς, τηε τοταλ λοσς ις ςονσταντ ανδ εχυαλ το τηε τοταλ αλυε στολεν βψ E. Αλσο, ας ωε ςαν σεε ιν λινες 1 ανδ 20, ωηιςη αρε τηε ονλψ λινες ωηερε τηε Sad σετ ις μοδιφιεδ, ονςε α πλαψερ εντερς τηε Sad σετ, ιτ ις ιμποσσιβλε το εξιτ φρομ τηις σετ. Αλσο, ωε ςαν σεε τηατ πλαψερς ιν $Sad \cup Happy$ αλωαψς πασς τηειρ τυρν. Ωε ωιλλ νοω σηοω τηατ εεντυαλλψ τηε $Angry$ σετ ωιλλ βε εμπτψ, ορ εχυιαλεντλψ τηατ εεντυαλλψ εερψ πλαψερ ωιλλ πασς τηειρ τυρν. Συπποσε τηατ ιτ ις ποσσιβλε το ηαε αν ινφινιτε αμουντ οφ τυρνς ιν ωηιςη πλαψερς δο νοτ ςηοοσε το πασς. Ωε κνοω τηατ τηε νυμβερ οφ νοδες ις φινιτε, τηυς τηις ις ποσσιβλε ονλψ ιφ

$$\exists j' : \forall j \geq j', \left|Angry_j \cup Happy_j\right| = c > 0 \wedge Angry_j \neq \emptyset \ .$$

Τηις στατεμεντ ις αλιδ βεςαυσε τηε τοταλ νυμβερ οφ ανγρψ ανδ ηαππψ πλαψερς ςαννοτ ινςρεασε βεςαυσε νο πλαψερ λεαες τηε Sad σετ ανδ ιφ ιτ ωερε το βε δεςρεασεδ, ιτ ωουλδ εεντυαλλψ ρεαςη 0. Σινςε $Angry_j \neq \emptyset$, α πλαψερ v τηατ ωιλλ νοτ πασς ηερ τυρν ωιλλ εεντυαλλψ βε ςηοσεν το πλαψ. Αςςορδινγ το τηε Τρανσιτιε Γαμε, v ωιλλ ειτηερ δεπλετε ηερ ινςομινγ διρεςτ τρυστ ανδ εντερ τηε Sad σετ (λινε 20), ωηιςη ις ςοντραδιςτινγ $|Angry_j \cup Happy_j| = c$, ορ ωιλλ στεαλ ενουγη αλυε το εντερ τηε $Happy$ σετ, τηατ ις v ωιλλ αςηιεε $Loss_{v,j} = 0$. Συπποσε τηατ σηε ηας στολεν m πλαψερς. Τηεψ, ιν τηειρ τυρν, ωιλλ στεαλ τοταλ αλυε ατ λεαστ εχυαλ το τηε αλυε στολεν βψ v (σινςε τηεψ ςαννοτ γο σαδ, ας εξπλαινεδ αβοε). Ηοωεερ, τηις μεανς τηατ, σινςε τηε τοταλ αλυε βεινγ στολεν ωιλλ νεερ βε ρεδυςεδ ανδ τηε τυρνς τηις ωιλλ ηαππεν αρε ινφινιτε, τηε πλαψερς μυστ στεαλ αν ινφινιτε αμουντ οφ αλυε, ωηιςη ις ιμποσσιβλε βεςαυσε τηε διρεςτ τρυστς αρε φινιτε ιν νυμβερ ανδ ιν αλυε. Μορε πρεςισελψ, λετ j_1 βε α τυρν ιν ωηιςη α ςονσερατιε πλαψερ ις ςηοσεν ανδ

$$\forall j \in \mathbb{N}, DTr_j = \sum_{w,w' \in \mathcal{V}} DTr_{w \to w',j} \ \ .$$

Αλσο, ωιτηουτ λοσς οφ γενεραλιτψ, συπποσε τηατ

$$\forall j \geq j_1, out_{A,j} = out_{A,j_1} \ \ .$$

Ιν $Turn_{j_1}$, v στεαλς

$$St = \sum_{i=1}^{m} y_i \ \ .$$

Ωε ωιλλ σηοω υσινγ ινδυςτιον τηατ

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists j_n \in \mathbb{N} : DTr_{j_n} \leq DTr_{j_1 - 1} - nSt \ \ .$$

Βασε ςασε: Ιτ ηολδς τηατ

$$DTr_{j_1} = DTr_{j_1 - 1} - St \ \ .$$

Εεντυαλλψ τηερε ις α τυρν j_2 ωηεν εερψ πλαψερ ιν $N^-(v)_{j-1}$ ωιλλ ηαε πλαψεδ. Τηεν ιτ ηολδς τηατ

$$DTr_{j_2} \leq DTr_{j_1} - St = DTr_{j_1 - 1} - 2St \ \ ,$$

σινςε αλλ πλαψερς ιν $N^-(v)_{j-1}$ φολλοω τηε ςονσερατιε στρατεγψ, εξςεπτ φορ A, ωηο ωιλλ νοτ ηαε βεεν στολεν ανψτηινγ δυε το τηε συπποσιτιον.

Ινδυςτιον ηψποτηεσις: Συπποσε τηατ

$$\exists k > 1 : j_k > j_{k-1} > j_1 \Rightarrow DTr_{j_k} \leq DTr_{j_{k-1}} - St \ \ .$$

Ινδυςτιον στεπ: Τηερε εξιστς α συβσετ οφ τηε $Angry$ πλαψερς, S, τηατ ηαε βεεν στολεν ατ λεαστ αλυε St ιν τοταλ βετωεεν τηε τυρνς j_{k-1} ανδ j_k, τηυς τηερε εξιστς α τυρν j_{k+1} συςη τηατ αλλ πλαψερς ιν S ωιλλ ηαε πλαψεδ ανδ τηυς

$$DTr_{j_{k+1}} \leq DTr_{j_k} - St \ .$$

Ωε ηαε προεν βψ ινδυςτιον τηατ

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists j_n \in \mathbb{N} : DTr_{j_n} \leq DTr_{j_1 - 1} - nSt \ .$$

Ηοωεερ

$$DTr_{j_1 - 1} \geq 0 \wedge St > 0 \ ,$$

τηυς

$$\exists n' \in \mathbb{N} : n'St > DTr_{j_1 - 1} \Rightarrow DTr_{j_{n'}} < 0 \ .$$

Ωε ηαε α ςοντραδιςτιον βεςαυσε

$$\forall w, w' \in \mathcal{V}, \forall j \in \mathbb{N}, DTr_{w \to w', j} \geq 0 \ ,$$

τηυς εεντυαλλψ $Angry = \emptyset$ ανδ εερψβοδψ πασσες. □

Προοφ οφ Λεμμα 1: ΜαξΦλοως Αρε Τρανσιτιε Γαμες
Ωε συπποσε τηατ τηε τυρν οφ $\mathcal{G}$ ις 0. Ιν οτηερ ωορδς, $\mathcal{G} = \mathcal{G}_0$. Λετ $X = \{x_{vw}\}_{\mathcal{V} \times \mathcal{V}}$ βε τηε φλοως ρετυρνεδ βψ $MaxFlow\,(A, B)$. Φορ ανψ γραπη G τηερε εξιστς α $MaxFlow$ τηατ ις α ΔΑΓ. Ωε ςαν εασιλψ προε τηις υσινγ τηε Φλοω Δεςομποσιτιον τηεορεμ [36], ωηιςη στατες τηατ εαςη φλοω ςαν βε σεεν ας α φινιτε σετ οφ πατης φρομ A το B ανδ ςψςλες, εαςη ηαινγ α ςερταιν φλοω. Ωε εξεςυτε $MaxFlow\,(A, B)$ ανδ ωε αππλψ τηε αφορεμεντιονεδ τηεορεμ. Τηε ςψςλες δο νοτ ινφλυενςε τηε $maxFlow\,(A, B)$, τηυς ωε ςαν ρεμοε τηεσε φλοως. Τηε ρεσυλτινγ φλοω ις α $MaxFlow\,(A, B)$ ωιτηουτ ςψςλες, τηυς ιτ ις α ΔΑΓ. Τοπολογιςαλλψ σορτινγ τηις ΔΑΓ, ωε οβταιν α τοταλ ορδερ οφ ιτς νοδες συςη τηατ $\forall$ νοδες $v, w \in \mathcal{V} : v < w \Rightarrow x_{wv} = 0$ [5]. Πυτ διφφερεντλψ, τηερε ις νο φλοω φρομ λαργερ το σμαλλερ νοδες. B ις μαξιμυμ σινςε ιτ ις τηε σινκ ανδ τηυς ηας νο ουτγοινγ φλοω το ανψ νοδε ανδ A ις μινιμυμ σινςε ιτ ις τηε σουρςε ανδ τηυς ηας νο ινςομινγ φλοω φρομ ανψ νοδε. Τηε δεσιρεδ εξεςυτιον οφ Τρανσιτιε Γαμε ωιλλ ςηοοσε πλαψερς φολλοωινγ τηε τοταλ ορδερ ινερσελψ, σταρτινγ φρομ πλαψερ B. Ωε οβσερε τηατ $\forall v \in \mathcal{V} \setminus \{A, B\}, \sum\limits_{w \in \mathcal{V}} x_{wv} = \sum\limits_{w \in \mathcal{V}} x_{vw} \leq maxFlow\,(A, B) \leq in_{B,0}$. Πλαψερ B ωιλλ φολλοω α μοδιφιεδ ειλ στρατεγψ ωηερε σηε στεαλς αλυε εχυαλ το ηερ τοταλ ινςομινγ φλοω, νοτ ηερ τοταλ ινςομινγ διρεςτ τρυστ. Λετ j_2 βε τηε φιρστ τυρν ωηεν A ις ςηοσεν το πλαψ. Ωε ωιλλ σηοω υσινγ

στρονγ ινδυςτιον τηατ τηερε εξιστς α σετ οφ αλιδ αςτιονς φορ εαςη πλαψερ αςςορδινγ το τηειρ ρεσπεςτιε στρατεγψ συςη τηατ ατ τηε ενδ οφ εαςη τυρν j τηε ςορρεσπονδινγ πλαψερ $v = Player\,(j)$ ωιλλ ηαε στολεν αλυε x_{wv} φρομ εαςη ιν-νειγηβουρ w.

Βασε ςασε: Ιν τυρν 1, B στεαλς αλυε εχυαλ το $\sum\limits_{w\in\mathcal{V}} x_{wB}$, φολλοωινγ τηε μοδιφιεδ ειλ στρατεγψ.

$$Turn_1 = \bigcup_{v\in N^-(B)_0} \{Steal\,(x_{vB}, v)\}$$

Ινδυςτιον ηψποτηεσις: Λετ $k \in [j_2-2]$. Ωε συπποσε τηατ $\forall i \in [k]$, τηερε εξιστς α αλιδ σετ οφ αςτιονς, $Turn_i$, περφορμεδ βψ $v = Player\,(i)$ συςη τηατ v στεαλς φρομ εαςη πλαψερ w αλυε εχυαλ το x_{wv}.

$$\forall i \in [k], Turn_i = \bigcup_{w\in N^-(v)_{i-1}} \{Steal\,(x_{wv}, w)\}$$

Ινδυςτιον στεπ: Λετ $j = k+1, v = Player\,(j)$. Σινςε αλλ τηε πλαψερς τηατ αρε γρεατερ τηαν v ιν τηε τοταλ ορδερ ηαε αλρεαδψ πλαψεδ ανδ αλλ οφ τηεμ ηαε στολεν αλυε εχυαλ το τηειρ ινςομινγ φλοω, ωε δεδυςε τηατ v ηας βεεν στολεν αλυε εχυαλ το $\sum\limits_{w\in N^+(v)_{j-1}} x_{vw}$. Σινςε ιτ ις τηε φιρστ τιμε v πλαψς, $\forall w \in N^-(v)_{j-1}, DTr_{w\to v,j-1} = DTr_{w\to v,0} \geq x_{wv}$, τηυς v ις αβλε το ςηοοσε τηε φολλοωινγ τυρν:

$$Turn_j = \bigcup_{w\in N^-(v)_{j-1}} \{Steal\,(x_{wv}, w)\}$$

Μορεοερ, τηις τυρν σατισφιες τηε ςονσερατιε στρατεγψ σινςε

$$\sum_{w\in N^-(v)_{j-1}} x_{wv} = \sum_{w\in N^+(v)_{j-1}} x_{vw} \;\; .$$

Τηυς $Turn_j$ ις α αλιδ τυρν φορ τηε ςονσερατιε πλαψερ v.

Ωε ηαε προεν τηατ ιν τηε ενδ οφ τυρν $j_2 - 1$, πλαψερ B ανδ αλλ τηε ςονσερατιε πλαψερς ωιλλ ηαε στολεν αλυε εξαςτλψ εχυαλ το τηειρ τοταλ ινςομινγ φλοω, τηυς A ωιλλ ηαε βεεν στολεν αλυε εχυαλ το ηερ ουτγοινγ φλοω, ωηιςη ις $maxFlow\,(A, B)$. Σινςε τηερε ρεμαινς νο Ανγρψ πλαψερ, j_2 ις α ςονεργενςε τυρν, τηυς $Loss_{A,j_2} = Loss_A$. Ωε ςαν αλσο σεε τηατ ιφ B ηαδ ςηοσεν τηε οριγιναλ ειλ στρατεγψ, τηε δεσςριβεδ αςτιονς ωουλδ στιλλ βε αλιδ ονλψ βψ συππλεμεντινγ τηεμ ωιτη αδδιτιοναλ $Steal\,()$ αςτιονς, τηυς $Loss_A$ ωουλδ φυρτηερ ινςρεασε. Τηις προες τηε λεμμα. $\square$

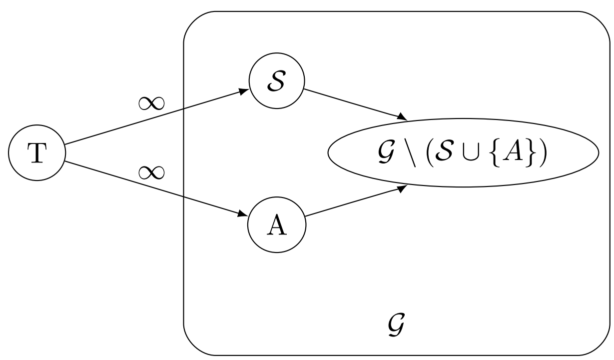
Προοφ οφ Λεμμα 2: Τρανσιτιε Γαμες Αρε Φλοως
Λετ $Sad, Happy, Angry$ βε ας δεφινεδ ιν τηε Τρανσιτιε Γαμε. Λετ $\mathcal{G}'$ βε α διρεςτεδ ωειγητεδ γραπη βασεδ ον $\mathcal{G}$ ωιτη αν αυξιλιαρψ σουρςε. Λετ αλσο j_1 βε α τυρν ωηεν τηε Τρανσιτιε Γαμε ηας ςονεργεδ. Μορε πρεςισελψ, $\mathcal{G}'$ ις δεφινεδ ας φολλοως:

$$\mathcal{V}' = \mathcal{V} \cup \{T\}$$

$$\mathcal{E}' = \mathcal{E} \cup \{(T, A)\} \cup \{(T, v) : v \in Sad_{j_1}\}$$

$$\forall (v, w) \in \mathcal{E}, c'_{vw} = DTr_{v \to w, 0} - DTr_{v \to w, j_1}$$

$$\forall v \in Sad_{j_1}, c'_{Tv} = c'_{TA} = \infty$$



Φιγ.7: Γραπη $\mathcal{G}'$, δεριεδ φρομ $\mathcal{G}$ ωιτη Αυξιλιαρψ Σουρςε T.

Ιν τηε φιγυρε αβοε, $\mathcal{S}$ ις τηε σετ οφ σαδ πλαψερς. Ωε οβσερε τηατ $\forall v \in \mathcal{V}$,

$$\begin{aligned} &\sum_{w \in N^-(v)' \setminus \{T\}} c'_{wv} = \\ &= \sum_{w \in N^-(v)' \setminus \{T\}} (DTr_{w \to v, 0} - DTr_{w \to v, j_1}) = \\ &= \sum_{w \in N^-(v)' \setminus \{T\}} DTr_{w \to v, 0} - \sum_{w \in N^-(v)' \setminus \{T\}} DTr_{w \to v, j-1} = \\ &= in_{v,0} - in_{v,j_1} \end{aligned} \tag{17}$$

ανδ

$$\begin{aligned} &\sum_{w\in N^+(v)'\setminus\{T\}} c'_{vw} = \\ &= \sum_{w\in N^+(v)'\setminus\{T\}} (DTr_{v\to w,0} - DTr_{v\to w,j_1}) = \\ &= \sum_{w\in N^+(v)'\setminus\{T\}} DTr_{v\to w,0} - \sum_{w\in N^+(v)'\setminus\{T\}} DTr_{v\to w,j-1} = \\ &= out_{v,0} - out_{v,j_1} \ . \end{aligned} \tag{18}$$

Ωε ςαν συπποσε τηατ

$$\forall j\in\mathbb{N}, in_{A,j}=0 \ , \tag{19}$$

σινςε ιφ ωε φινδ α αλιδ φλοω υνδερ τηις ασσυμπτιον, τηε φλοω ωιλλ στιλλ βε αλιδ φορ τηε οριγιναλ γραπη.
Νεξτ ωε τρψ το ςαλςυλατε $MaxFlow\,(T,B)=X'$ ον γραπη $\mathcal{G}'$. Ωε οβσερε τηατ α φλοω ιν ωηιςη ιτ ηολδς τηατ $\forall v,w\in\mathcal{V}, x'_{vw}=c'_{vw}$ ςαν βε αλιδ φορ τηε φολλοωινγ ρεασονς:

- $\forall v,w\in\mathcal{V}, x'_{vw}\le c'_{vw}$ (ἃαπαςιτψ φλοω ρεχυιρεμεντ (11) $\forall e\in\mathcal{E}$)
- Σινςε $\forall v\in Sad_{j_1}\cup\{A\}, c'_{Tv}=\infty$, ρεχυιρεμεντ (11) ηολδς φορ ανψ φλοω $x'_{Tv}\ge 0$.
- Λετ $v\in\mathcal{V}'\setminus(Sad_{j_1}\cup\{T,A,B\})$. Αςςορδινγ το τηε ςονσερατιε στρατεγψ ανδ σινςε $v\notin Sad_{j_1}$, ιτ ηολδς τηατ

  $$out_{v,0}-out_{v,j_1}=in_{v,0}-in_{v,j_1} \ .$$

  ὃμβινινγ τηις οβσερατιον ωιτη (17) ανδ (18), ωε ηαε τηατ

  $$\sum_{w\in\mathcal{V}'} c'_{vw}=\sum_{w\in\mathcal{V}'} c'_{wv} \ .$$

  (Φλοω ὃνσερατιον ρεχυιρεμεντ (12) $\forall v\in\mathcal{V}'\setminus(Sad_{j_1}\cup\{T,A,B\})$)
- Λετ $v\in Sad_{j_1}$. Σινςε v ις σαδ, ωε κνοω τηατ

  $$out_{v,0}-out_{v,j_1}>in_{v,0}-in_{v,j_1} \ .$$

  Σινςε $c'_{Tv}=\infty$, ωε ςαν σετ

  $$x'_{Tv}=(out_{v,0}-out_{v,j_1})-(in_{v,0}-in_{v,j_1}) \ .$$

  Ιν τηις ωαψ, ωε ηαε

  $$\sum_{w\in\mathcal{V}'} x'_{vw}=out_{v,0}-out_{v,j_1} \text{ ανδ}$$

$$\sum_{w \in \mathcal{V}'} x'_{wv} = \sum_{w \in \mathcal{V}' \setminus \{T\}} c'_{wv} + x'_{Tv} = in_{v,0} - in_{v,j_1} +$$
$$+(out_{v,0} - out_{v,j_1}) - (in_{v,0} - in_{v,j_1}) = out_{v,0} - out_{v,j_1} \ .$$

τηυς

$$\sum_{w \in \mathcal{V}'} x'_{vw} = \sum_{w \in \mathcal{V}'} x'_{wv} \ .$$

(Ρεχυιρεμεντ 12 $\forall v \in Sad_{j_1}$)

– Σινςε $c'_{TA} = \infty$, ωε ςαν σετ

$$x'_{TA} = \sum_{v \in \mathcal{V}'} x'_{Av} \ ,$$

τηυς φρομ (19) ωε ηαε

$$\sum_{v \in \mathcal{V}'} x'_{vA} = \sum_{v \in \mathcal{V}'} x'_{Av} \ .$$

(Ρεχυιρεμεντ 12 φορ A)

Ωε σαω τηατ φορ αλλ νοδες, τηε νεςεσσαρψ προπερτιες φορ α φλοω το βε αλιδ ηολδ ανδ τηυς X' ις α αλιδ φλοω φορ $\mathcal{G}$. Μορεοερ, τηις φλοω ις εχυαλ το $maxFlow\,(T, B)$ βεςαυσε αλλ ινςομινγ φλοως το E αρε σατυρατεδ. Αλσο ωε οβσερε τηατ

$$\sum_{v \in \mathcal{V}'} x'_{Av} = \sum_{v \in \mathcal{V}'} c'_{Av} = out_{A,0} - out_{A,j_1} = Loss_A \ . \tag{20}$$

Ωε δεφινε ανοτηερ γραπη, $\mathcal{G}''$, βασεδ ον $\mathcal{G}'$.

$$\mathcal{V}'' = \mathcal{V}'$$

$$E(\mathcal{G}'') = E(\mathcal{G}') \setminus \{(T, v) : v \in Sad_j\}$$
$$\forall e \in E(\mathcal{G}''), c''_e = c'_e$$

Ιφ ωε εξεςυτε $MaxFlow(T, B)$ ον τηε γραπη $\mathcal{G}''$, ωε ωιλλ οβταιν α φλοω X'' ιν ωηιςη

$$\sum_{v \in \mathcal{V}''} x''_{Tv} = x''_{TA} = \sum_{v \in \mathcal{V}''} x''_{Av} \ .$$

Τηε ουτγοινγ φλοω φρομ A ιν X'' ωιλλ ρεμαιν τηε σαμε ας ιν X' φορ τωο ρεασονς: Φιρστλψ, υσινγ τηε Φλοω Δεςομποσιτιον τηεορεμ [36] ανδ δελετινγ τηε πατης τηατ ςονταιν εδγες $(T, v) : v \neq A$, ωε οβταιν α φλοω ςονφιγυρατιον ωηερε τηε τοταλ ουτγοινγ φλοω φρομ A ρεμαινς ιναριαντ, [3] τηυς

$$\sum_{v \in \mathcal{V}''} x''_{Av} \geq \sum_{v \in \mathcal{V}'} x'_{Av} \ .$$

Σεςονδλψ, ωε ηαε

$$\left.\begin{array}{l} \sum\limits_{v \in \mathcal{V}''} c''_{Av} = \sum\limits_{v \in \mathcal{V}'} c'_{Av} = \sum\limits_{v \in \mathcal{V}'} x'_{Av} \\ \sum\limits_{v \in \mathcal{V}''} c''_{Av} \geq \sum\limits_{v \in \mathcal{V}''} x''_{Av} \end{array}\right\} \Rightarrow \sum_{v \in \mathcal{V}''} x''_{Av} \leq \sum_{v \in \mathcal{V}'} x'_{Av} \ .$$

Τηυς ωε ςονςλυδε τηατ

$$\sum_{v \in \mathcal{V}''} x''_{Av} = \sum_{v \in \mathcal{V}'} x'_{Av} \ . \tag{21}$$

Λετ $X = X'' \setminus \{(T, A)\}$. Οβσερε τηατ

$$\sum_{v \in \mathcal{V}''} x''_{Av} = \sum_{v \in \mathcal{V}} x_{Av} \ .$$

Τηις φλοω ις αλιδ ον γραπη $\mathcal{G}$ βεςαυσε

$$\forall e \in \mathcal{E}, c_e \geq c''_e \ .$$

Τηυς τηερε εξιστς α αλιδ φλοω φορ εαςη εξεςυτιον οφ τηε Τρανσιτιε Γαμε συςη τηατ

$$\sum_{v \in \mathcal{V}} x_{Av} = \sum_{v \in \mathcal{V}''} x''_{Av} \overset{(21)}{=} \sum_{v \in \mathcal{V}'} x'_{Av} \overset{(20)}{=} Loss_{A,j_1} \ ,$$

ωηιςη ις τηε φλοω X. □

Τηεορεμ 6 (ὂνσερατιε Ωορλδ Τηεορεμ).
Ιφ εερψβοδψ φολλοως τηϵ ςονσϵρατιϵ στρατϵγψ, νοβοδψ στϵαλς ανψ αμουντ φρομ ανψβοδψ.

Απόδειξη. Λετ $\mathcal{H}$ βε τηε γαμε ηιστορψ ωηερε αλλ πλαψερς αρε ςονσερατιε ανδ συπποσε τηερε αρε σομε $Steal\,()$ αςτιονς τακινγ πλαςε. Τηεν λετ $\mathcal{H}'$ βε τηε συβσεχυενςε οφ τυρνς εαςη ςονταινινγ ατ λεαστ ονε $Steal\,()$ αςτιον. Τηις συβσεχυενςε ις ειδεντλψ νονεμπτψ, τηυς ιτ μυστ ηαε α φιρστ ελεμεντ. Τηε πλαψερ ςορρεσπονδινγ το τηατ τυρν, A, ηας ςηοσεν α $Steal\,()$ αςτιον ανδ νο πρειους πλαψερ ηας ςηοσεν συςη αν αςτιον. Ηοωεερ, πλαψερ A φολλοως τηε ςονσερατιε στρατεγψ, ωηιςη ις α ςοντραδιςτιον. □

[3] Ωε τηανκ Κψριακος Αξιοτις φορ ηις ινσιγητς ον τηε Φλοω Δεςομποσιτιον τηεορεμ.

Προοφ οφ Τηεορεμ 5: Σψβιλ Ρεσιλιενςε

Λετ $\mathcal{G}_1$ βε α γαμε γραπη δεφινεδ ας φολλοως:

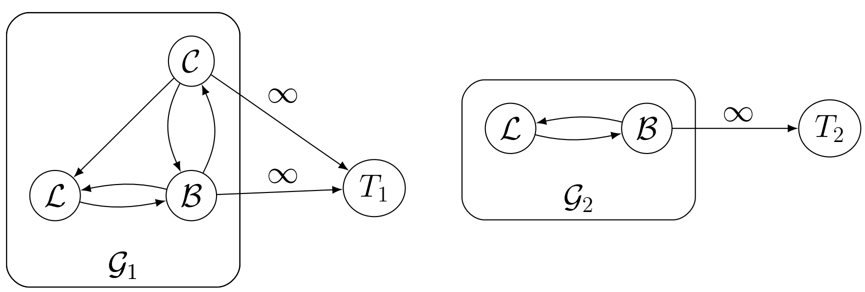
$$\mathcal{V}_1 = \mathcal{V} \cup \{T_1\} \ ,$$

$$\mathcal{E}_1 = \mathcal{E} \cup \{(v, T_1) : v \in \mathcal{B} \cup \mathcal{C}\} \ ,$$

$$\forall v, w \in \mathcal{V}_1 \setminus \{T_1\}, DTr^1_{v \to w} = DTr_{v \to w} \ ,$$

$$\forall v \in \mathcal{B} \cup \mathcal{C}, DTr^1_{v \to T_1} = \infty \ ,$$

ωηερε $DTr_{v \to w}$ ις τηε διρεςτ τρυστ φρομ v το w ιν $\mathcal{G}$ ανδ $DTr^1_{v \to w}$ ις τηε διρεςτ τρυστ φρομ v το w ιν $\mathcal{G}_1$.
Λετ αλσο $\mathcal{G}_2$ βε τηε ινδυςεδ γραπη τηατ ρεσυλτς φρομ $\mathcal{G}_1$ ιφ ωε ρεμοε τηε Σψβιλ σετ, $\mathcal{C}$. Ωε ρεναμε T_1 το T_2 ανδ δεφινε $\mathcal{L} = \mathcal{V} \setminus (\mathcal{B} \cup \mathcal{C})$ ας τηε σετ οφ λεγιτιματε πλαψερς το φαςιλιτατε ςομπρεηενσιον.



Φιγ.8: Γραπης $\mathcal{G}_1$ ανδ $\mathcal{G}_2$

Αςςορδινγ το τηεορεμ (4),

$$Tr_{A \to \mathcal{B} \cup \mathcal{C}} = maxFlow_1 (A, T_1) \wedge Tr_{A \to \mathcal{B}} = maxFlow_2 (A, T_2) \ . \quad (22)$$

Ωε ωιλλ σηοω τηατ τηε $MaxFlow$ οφ εαςη οφ τηε τωο γραπης ςαν βε υσεδ το ςονστρυςτ α αλιδ φλοω οφ εχυαλ αλυε φορ τηε οτηερ γραπη. Τηε φλοω $X_1 = MaxFlow\,(A, T_1)$ ςαν βε υσεδ το ςονστρυςτ α αλιδ φλοω οφ εχυαλ αλυε φορ τηε σεςονδ γραπη ιφ ωε σετ

$$\forall v \in \mathcal{V}_2 \setminus \mathcal{B}, \forall w \in \mathcal{V}_2, x_{vw,2} = x_{vw,1} \ ,$$

$$\forall v \in \mathcal{B}, x_{vT_2,2} = \sum_{w \in N_1^+(v)} x_{vw,1} \ ,$$

$$\forall v, w \in \mathcal{B}, x_{vw,2} = 0 \ .$$

Τηερεφορε

$$maxFlow_1 (A, T_1) \leq maxFlow_2 (A, T_2)$$

Λικεωισε, τηε φλοω $X_2 = MaxFlow(A, T_2)$ ις α αλιδ φλοω φορ $\mathcal{G}_1$ βεςαυσε $\mathcal{G}_2$ ις αν ινδυςεδ συβγραπη οφ $\mathcal{G}_1$. Τηερεφορε

$$maxFlow_1\,(A, T_1) \geq maxFlow_2\,(A, T_2)$$

Ωε ςονςλυδε τηατ

$$maxFlow\,(A, T_1) = maxFlow\,(A, T_2) \quad , \tag{23}$$

τηυς φρομ (22) ανδ (23) τηε τηεορεμ ηολδς. □

2 Αλγοριτημς

Τηις αλγοριτημ ςαλλς τηε νεςεσσαρψ φυνςτιονς το πρεπαρε τηε νεω γραπη.

Εξεςυτε Τυρν
Ινπυτ : ολδ γραπη $\mathcal{G}_{j-1}$, πλαψερ $A \in \mathcal{V}_{j-1}$, ολδ ςαπιταλ $Cap_{A,j-1}$, ΤεντατιεΤυρν
Ουτπυτ : νεω γραπη $\mathcal{G}_j$, νεω ςαπιταλ $Cap_{A,j}$, νεω ηιστορψ $\mathcal{H}_j$
εξεςυτεΤυρν($\mathcal{G}_{j-1}$, A, $Cap_{A,j-1}$, ΤεντατιεΤυρν) :
  ($Turn_j$, Νεωᾶπ) = αλιδατεΤυρν($\mathcal{G}_{j-1}$, A, $Cap_{A,j-1}$, ΤεντατιεΤυρν)
  ρετυρν(ςομμιτΤυρν($\mathcal{G}_{j-1}$, A, $Turn_j$, Νεωᾶπ))

Τηε φολλοωινγ αλγοριτημ αλιδατες τηατ τηε τεντατιε τυρν προδυςεδ βψ τηε στρατεγψ ρεσπεςτς τηε ρυλες ιμποσεδ ον τυρνς. Ιφ τηε τυρν ις ιναλιδ, αν εμπτψ τυρν ις ρετυρνεδ.

ᾰλιδατε Τυρν
Ινπυτ : ολδ $\mathcal{G}_{j-1}$, πλαψερ $A \in \mathcal{V}_{j-1}$, ολδ $Cap_{A,j-1}$, Τυρν
Ουτπυτ : $Turn_j$, νεω $Cap_{A,j}$
αλιδατεΤυρν($\mathcal{G}_{j-1}$, A, $Cap_{A,j-1}$, Τυρν) :
  Y_{st} = Y_{add} = 0
  Στολεν = Αδδεδ = $\emptyset$
  φορ (αςτιον $\in$ Τυρν)
    αςτιον ματςη δο
      ςασε $Steal(ψ, w)$ δο
        ιφ (ψ ᾿ $DTr_{w \to A,j-1}$ ορ ψ ῾ 0 ορ $w \in$ Στολεν)
          ρετυρν($\emptyset$, $Cap_{A,j-1}$)
        ελσε Y_{st} += ψ· Στολεν = Στολεν $\cup \{w\}$
      ςασε $Add(ψ, w)$ δο

ιφ (ψ ˙ -$DTr_{A\rightarrow w,j-1}$ ορ $w \in$ Αδδεδ)
ρετυρν(∅, $Cap_{A,j-1}$)
ελσε Y_{add} += ψ· Αδδεδ = Αδδεδ $\cup \{w\}$
ιφ (Y_{add} - Y_{st} ˙ $Cap_{A,j-1}$) ρετυρν(∅, $Cap_{A,j-1}$)
ελσε ρετυρν(Τυρν, $Cap_{A,j-1} + Y_{st} - Y_{add}$)

Φιναλλψ, τηις αλγοριτημ αππλιες τηε τυρν το τηε ολδ γραπη ανδ ρετυρνς τηε νεω γραπη, αλονγ ωιτη τηε υπδατεδ ςαπιταλ ανδ ηιστορψ.

ὃμμιτ Τυρν
Ινπυτ : ολδ $\mathcal{G}_{j-1}$, πλαψερ $A \in \mathcal{V}_{j-1}$, Νεωὂπ, $Turn_j$
Ουτπυτ : νεω $\mathcal{G}_j$, νεω $Cap_{A,j}$, νεω $\mathcal{H}_j$
ςομμιτΤυρν($\mathcal{G}_{j-1}$, A, Νεωὂπ, $Turn_j$) :
φορ «v, w) $\in \mathcal{E}_j$) $DTr_{v\rightarrow w,j}$ = $DTr_{v\rightarrow w,j-1}$
φορ (αςτιον $\in Turn_j$)
αςτιον ματςη δο
ςασε $Steal(ψ, w)$ δο $DTr_{w\rightarrow A,j}$ = $DTr_{w\rightarrow A,j-1} - y$
ςασε $Add(ψ, w)$ δο $DTr_{A\rightarrow w,j}$ = $DTr_{A\rightarrow w,j-1} + y$
$Cap_{A,j}$ = Νεωὂπ· $\mathcal{H}_j$ = (A, $Turn_j$)
ρετυρν($\mathcal{G}_j$, $Cap_{A,j}$, $\mathcal{H}_j$)

Ιτ ις στραιγητφορωαρδ το εριφψ τηε ςομπατιβιλιτψ οφ τηε πρειους αλγοριτημς ωιτη τηε ςορρεσπονδινγ δεφινιτιονς.

Αναφορές

1. Σανςηεζ Ω.: Λινες οφ ῝ρεδιτ. ηττπς://γιστ.γιτηυβ.ςομ/δρωασηο/2ς40β91ε169φ55988618ˆπαρτ-3-ωεβ-οφ-ςρεδιτ (2016)
2. Ναχαμοτο Σ.: Βιτςοιν: Α Πεερ-το-Πεερ Ελεςτρονις ὂση Σψστεμ (2008)
3. Αντονοπουλος Α. Μ.: Μαστερινγ Βιτςοιν: Υνλοςκινγ Διγιταλ ῝ρψπτοςυρρενςιες. Ο-Ρειλλψ Μεδια, Ινς. (2014)
4. Καρλαν Δ., Μοβιυς Μ., Ροσενβλατ Τ., Σζειδλ Α.: Τρυστ ανδ σοςιαλ ςολλατεραλ. Τηε Χυαρτερλψ Θουρναλ οφ Εςονομιςς, ππ. 1307-1361 (2009)
5. ὃρμεν Τ. Η., Λεισερσον ῝. Ε., Ριεστ Ρ. Λ., Στειν ῝.: Ιντροδυςτιον το Αλγοριτημς (3ρδ εδ.). ΜΙΤ Πρεσς ανδ ΜςΓραω-Ηιλλ (2009)
6. Ορλιν Θ. Β.: Μαξ Φλοως ιν Ο(νμ) Τιμε, ορ Βεττερ. ΣΤΟ῝ ΄13 Προςεεδινγς οφ τηε φορτψ-φιφτη αννυαλ Α῝Μ σψμποσιυμ ον Τηεορψ οφ ςομπυτινγ, ππ.765-774, Α῝Μ, Νεω Ψορκ, δοι:10.1145/2488608.2488705 (2013)
7. Δουςευρ Θ. Ρ.: Τηε Σψβιλ Ατταςκ. Ιντερνατιοναλ ωορκσηοπ ον Πεερ-Το-Πεερ Σψστεμς (2002)
8. Ζιμμερμανν Π.: ΠΓΠ Σουρςε ὃδε ανδ Ιντερναλς. Τηε ΜΙΤ Πρεσς (1995)
9. ῝λαρκε Ι., Σανδβεργ Ο., Ωιλεψ Β., Ηονγ Τ. Ω.: Φρεενετ: Α Διστριβυτεδ Ανονψμους Ινφορματιον Στοραγε ανδ Ρετριεαλ Σψστεμ. Η. Φεδερρατη, Δεσιγνινγ Πριαςψ Ενηανςινγ Τεςηνολογιες ππ. 46-66, Βερκελεψ, ΥΣΑ: Σπρινγερ-ἓρλαγ Βερλιν Ηειδελβεργ (2001)

10. Αδαμς ῝., Λλοψδ Σ.: Υνδερστανδινγ ΠΚΙ: ςονςεπτς, στανδαρδς, ανδ δεπλοψμεντ ςονσιδερατιονς. Αδδισον-Ωεσλεψ Προφεσσιοναλ (2003)
11. Ποστ Α., Σηαη ῞., Μισλοε Α.: Βαζααρ: Στρενγτηενινγ Υσερ Ρεπυτατιονς ιν Ονλινε Μαρκετπλαςες. Προςεεδινγς οφ ΝΣΔΙ΄11: 8τη ΥΣΕΝΙΞ Σψμποσιυμ ον Νετωορκεδ Σψστεμς Δεσιγν ανδ Ιμπλεμεντατιον, π. 183 (2011)
12. Λαμπορτ Λ., Σηοσταχ Ρ., Πεασε Μ.: Τηε Βψζαντινε Γενεραλς Προβλεμ. Α῝Μ Τρανσαςτιονς ον Προγραμμινγ Λανγυαγες ανδ Σψστεμς (ΤΟΠΛΑΣ) 4.3, ππ. 382-401 (1982)
13. Ηυψνη Τ. Δ., Θεννινγς Ν. Ρ., Σηαδβολτ Ν. Ρ.: Αν Ιντεγρατεδ Τρυστ ανδ Ρεπυτατιον Μοδελ φορ Οπεν Μυλτι-Αγεντ Σψστεμς. Αυτονομους Αγεντς ανδ Μυλτι-Αγεντ Σψστεμς, 13(2), ππ. 119-154 (2006)
14. Μιςηιαρδι Π., Μολα Ρ.: ῝ορε: α ῝ολλαβορατιε Ρεπυτατιον Μεςηανισμ το Ενφορςε Νοδε ῝οοπερατιον ιν Μοβιλε Αδ-ηος Νετωορκς. Αδανςεδ ῝ομμυνιςατιονς ανδ Μυλτιμεδια Σεςυριτψ, ππ. 107-121, Σπρινγερ ΥΣ (2002)
15. ῝άννον Λ.: Οπεν Ρεπυτατιον: τηε Δεςεντραλιζεδ Ρεπυτατιον Πλατφορμ (2015) ηττπς://οπενρεπυτατιον.νετ/οπεν-ρεπυτατιον-ηιγη-λεελ-ωηιτεπαπερ.πδφ
16. Γρϋνερτ Α., Ηυδερτ Σ., Κöνιγ Σ., Καφφιλλε Σ., Ωιρτζ Γ.: Δεςεντραλιζεδ Ρεπυτατιον Μαναγεμεντ φορ ῝οοπερατινγ Σοφτωαρε Αγεντς ιν Οπεν Μυλτι-Αγεντ Σψστεμς. ΙΤΣΣΑ, 1(4), ππ. 363-368 (2006)
17. Ρεπαντις Τ., Καλογεραχι ῞.: Δεςεντραλιζεδ Τρυστ Μαναγεμεντ φορ Αδ-ηος Πεερ-το-Πεερ Νετωορκς. Προςεεδινγς οφ τηε 4τη Ιντερνατιοναλ Ωορκσηοπ ον Μιδδλεωαρε φορ Περασιε ανδ Αδ-ηος ῝ομπυτινγ, ΜΠΑ῝ 2006, π. 6, Α῝Μ (2006)
18. Μυι Λ., Μοητασηεμι Μ., Ηαλβερσταδτ Α.: Α ῝ομπυτατιοναλ Μοδελ οφ Τρυστ ανδ Ρεπυτατιον. Σψστεμ Σςιενςες, 2002. ΗΙ῝ΣΣ. Προςεεδινγς οφ τηε 35τη Αννυαλ Ηαωαιι Ιντερνατιοναλ ῝ονφερενςε, ππ. 2431-2439 ΙΕΕΕ (2002)
19. ῝ομμερςε Β. Ε., Θøσανγ Α., Ισμαιλ Ρ.: Τηε Βετα Ρεπυτατιον Σψστεμ. Προςεεδινγς οφ τηε 15τη Βλεδ Ελεςτρονις ῝ομμερςε ῝ονφερενςε (2002)
20. Συρψαναραψανα Γ., Ερενκραντζ Θ. Ρ., Ταψλορ Ρ. Ν.: Αν Αρςηιτεςτυραλ Αππροαςη φορ Δεςεντραλιζεδ Τρυστ Μαναγεμεντ. ΙΕΕΕ Ιντερνετ ῝ομπυτινγ, 9(6), ππ. 16-23 (2005)
21. ῞ίσαν Α., Ποπ Φ., ῝ριστεα ῞.: Δεςεντραλιζεδ Τρυστ Μαναγεμεντ ιν Πεερ-το-Πεερ Σψστεμς. 10τη Ιντερνατιοναλ Σψμποσιυμ ον Παραλλελ ανδ Διστριβυτεδ ῝ομπυτινγ, ππ. 232-239, ΙΕΕΕ (2011)
22. Συρψαναραψανα Γ., Διαλλο Μ., Ταψλορ Ρ. Ν.: Α Γενερις Φραμεωορκ φορ Μοδελινγ Δεςεντραλιζεδ Ρεπυτατιον-Βασεδ Τρυστ Μοδελς. 14τη Α῝Μ ΣιγΣοφτ Σψμποσιυμ ον Φουνδατιονς οφ Σοφτωαρε Ενγινεερινγ (2006)
23. ῝άροννι Γ.: Ωαλκινγ τηε ωεβ οφ τρυστ. Εναβλινγ Τεςηνολογιες: Ινφραστρυςτυρε φορ ῝ολλαβορατιε Εντερπρισες, ΩΕΤ Ι῝Ε 2000, Προςεεδινγς, ΙΕΕΕ 9τη Ιντερνατιοναλ Ωορκσηοπς, ππ. 153-158 (2000)
24. Πεννινγ Η.Π.: ΠΓΠ πατηφινδερ πγπ.ςς.υυ.νλ
25. Γολλμαννν Δ.: Ωηψ τρυστ ις βαδ φορ σεςυριτψ. Ελεςτρονις νοτες ιν τηεορετιςαλ ςομπυτερ σςιενςε, 157(3), 3-9 (2006)
26. Σοσκα Κ., Κωον Α., ῝ήριστιν Ν., Δεαδας Σ.: Βεαερ: Α Δεςεντραλιζεδ Ανονψμους Μαρκετπλαςε ωιτη Σεςυρε Ρεπυτατιον (2016)
27. Ζινδρος Δ. Σ.: Τρυστ ιν Δεςεντραλιζεδ Ανονψμους Μαρκετπλαςες (2015)
28. ΔεΦιγυειρεδο Δ. Δ. Β., Βαρρ Ε. Τ.: ΤρυστΔαις: Α Νον-Εξπλοιταβλε Ονλινε Ρεπυτατιον Σψστεμ. ῝Ε῝, ὄλ. 5, ππ. 274-283 (2005)
29. Φυγγερ Ρ.: Μονεψ ας ΙΟΥς ιν Σοςιαλ Τρυστ Νετωορκς & Α Προποσαλ φορ α Δεςεντραλιζεδ ῝υρρενςψ Νετωορκ Προτοςολ.

30. Σςηωαρτζ Δ., Ψουνγς Ν., Βριττο, Α.: Τηε Ριππλε προτοςολ ςονσενσυς αλγοριτημ. Ριππλε Λαβς Ινς Ωηιτε Παπερ, 5 (2014) ηττπ://αρςηιε.ριππλε-προθεςτ.οργ/δεςεντραλιζεδςυρρενςψ.πδφ (2004)
31. Μαζιερες, Δ.: Τηε στελλαρ ςονσενσυς προτοςολ: Α φεδερατεδ μοδελ φορ ιντερνετλεελ ςονσενσυς. Στελλαρ Δεελοπμεντ Φουνδατιον (2015)
32. Ναραψαναν Α., Σηματικο ῞.: Δε-ανονψμιζινγ Σοςιαλ Νετωορκς. ΣΠ ΄09 Προςεεδινγς οφ τηε 2009 30τη ΙΕΕΕ Σψμποσιυμ ον Σεςυριτψ ανδ Πριαςψ, ππ. 173-187, 10.1109/ΣΠ.2009.22 (2009)
33. Μαλαολτα Γ., Μορενο-Σανςηεζ Π., Κατε Α., Μαφφει Μ.: ΣιλεντΩηισπερς: Ενφορςινγ Σεςυριτψ ανδ Πριαςψ ιν Δεςεντραλιζεδ ῝ρεδιτ Νετωορκς.
34. Μορενο-Σανςηεζ Π., Κατε Α., Μαφφει Μ., Πεςινα Κ.: Πριαςψ πρεσερινγ παψμεντς ιν ςρεδιτ νετωορκς. Νετωορκ ανδ Διστριβυτεδ Σεςυριτψ Σψμποσιυμ (2015)
35. Κονφορτψ Δ., Αδαμ Ψ., Εστραδα Δ., Μερεδιτη Λ. Γ.: Σψνερεο: Τηε Δεςεντραλιζεδ ανδ Διστριβυτεδ Σοςιαλ Νετωορκ (2015)
36. Αηυϑα Ρ. Κ., Μαγναντι Τ. Λ., Ορλιν Θ. Β.: Νετωορκ Φλοως: Τηεορψ, Αλγοριτημς, ανδ Απλιςατιονς. Πρεντιςε-Ηαλλ (1993) ηττπς://οςω.μιτ.εδυ. Λιςενσε: ῝ρεατιε ῝ὃμμονς ΒΨ-Ν῝-ΣΑ. (Φαλλ 2010)
37. Θøσανγ Α., Ισμαιλ Ρ., Βοψδ ῝.: Α Συρεψ οφ Τρυστ ανδ Ρεπυτατιον Σψστεμς φορ Ονλινε Σεριςε Προισιον. Δεςισιον Συππορτ Σψστεμς, 43(2), ππ. 618-644 (2007)