Unsupervise learning

Dim. Redeuce : *PCA Principal Componant Analysis

Clustering : K-mean
Hiradical
PBScan
} Algo.

PCA → ลดมิติ feature โดย plot ลงไปในแกนที่น้อยลง (Projection)

ต้องใช้ Linear Algebra ตัวนึง

Matrix Decomposition
แยกองค์ประกอบ

Concept → 10 = 5 × 2

[ ] = [ ] × [ ]

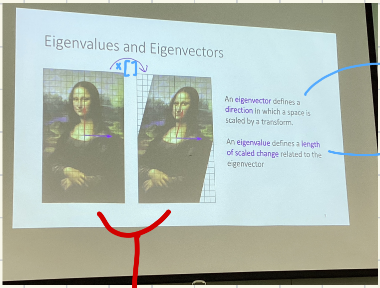
Basic component

วิธีแยกองค์ประกอบ

1) Eigen-decomposition

Eigen vector (v)
Eigen value (λ)

หาแกนที่ไม่หมุน (eigen vector)



vector ที่ไม่เปลี่ยนทิศทางระหว่าง transform (คูณ metrix)

ขนาดของ eigen vector ที่เปลี่ยนไป

shearing

สมการครอบจักรวาล

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v}$$

$A = \begin{bmatrix} -6 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ $\lambda = 6$ $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} -6 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} = 6 \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\left| \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 3 & -5 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right| = 0$$

$$\begin{bmatrix} 4-\lambda & 0-0 \\ 3-0 & -5-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$(4-\lambda)(5-\lambda) - 0 = 0$$

$$\lambda = 4, 5$$

Ex. หา v, λ ของ $\begin{bmatrix} -6 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$

$$Av = \lambda v$$

$$Av - \lambda v = 0$$

$$(A - \lambda) v = 0$$

ทิศทาง $\neq 0$ 100%.!

$I = \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix}$

$$A - \lambda I = 0$$

เพราะเป็น scalar -กันไม่ได้ ต้องเอาคูณ I

$$|A - \lambda I| = 0$$

$$\left| \begin{bmatrix} -6 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right| = 0$$

$$\begin{bmatrix} -6-\lambda & 3-0 \\ 4-0 & 5-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$(-6-\lambda)(5-\lambda) - 12 = 0$$

$$\lambda^2 + \lambda - 42 = 0$$

$$(\lambda + 7)(\lambda - 6) = 0$$

$$\lambda = -7, 6$$

a) $\lambda = -7$

$$Av = \lambda v$$

$$\begin{bmatrix} -6 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = (-7) \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

$$-6v_1 + 3v_2 = -7v_1 \quad ①$$

$$4v_1 + 5v_2 = -7v_2 \quad ②$$

Can't solve! ให้หาอัตราส่วน

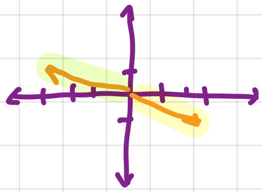
ⓐ $\lambda = -7$

$\boxed{AV = \lambda V}$ → ลักษณะแบบนี้จะเป็น แกนเดียวกัน ต่างกัน แค่ทิศทาง

เช่น สมมติเอาสมการที่สองมาหา อัตราส่วน

จะแก้สมการไปได้
ต้องเทียบ อัตราส่วน 2 ตัวแปรเอา

$$\begin{bmatrix} -6 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = (-7) \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$



$$-6V_1 + 3V_2 = -7V_1$$

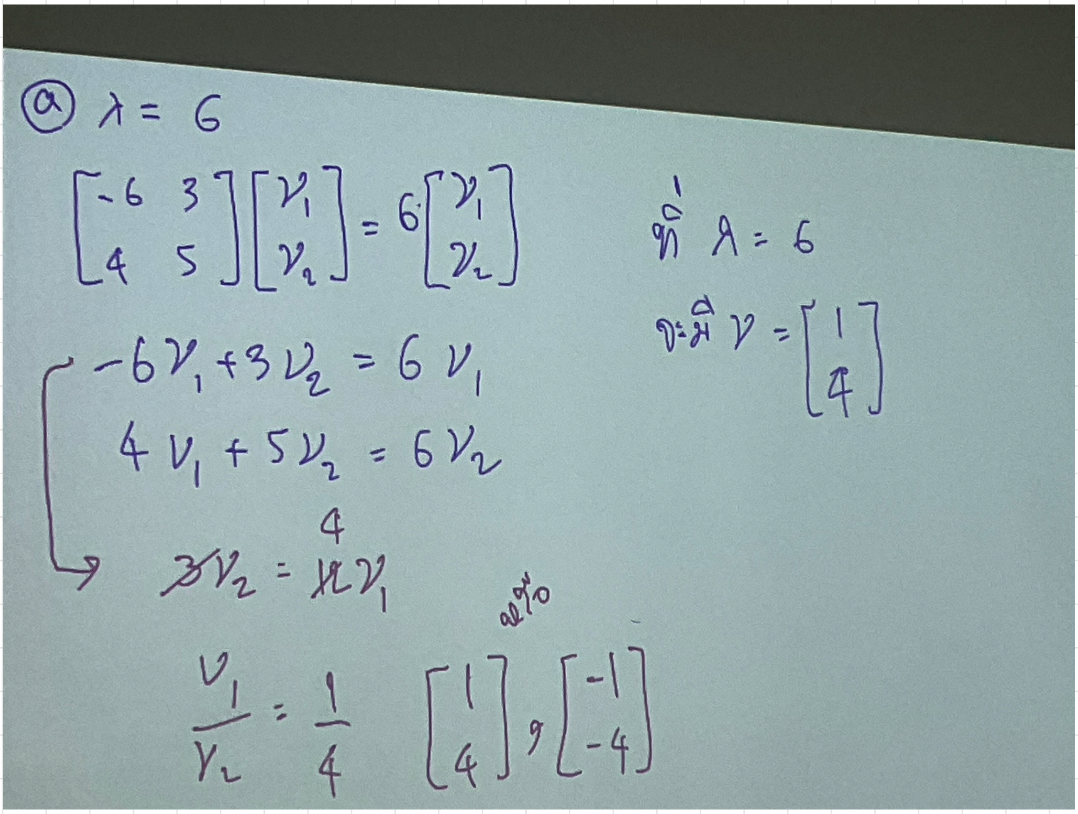
$$4V_1 + 5V_2 = -7V_2$$

$$4V_1 = -12V_2$$

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{-3}{1} \Rightarrow V = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ or } \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

สลับเครื่องหมาย
ใช้อันไหนก็ได้

$\therefore$ ที่ $\lambda = -7$ จะมี $V = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$



Ex. ลองทำ

$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$ หา λ, V

$$\left| \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 3 & -5 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right| = 0$$

$$\begin{bmatrix} 4-\lambda & 0-0 \\ 3-0 & -5-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$(4-\lambda)(-5-\lambda) - 0 = 0$$

$$\lambda = 4, -5$$

ⓐ $\lambda = 4$

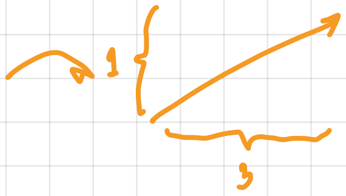
$\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$ ไม่แนะนำให้เอา สมการแนวแถวจะ มี 0

$3v_1 - 5v_2 = 4v_2$

$3v_1 = 9v_2$

$\frac{v_1}{v_2} = \frac{3}{1}$

$\therefore \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$



หา $\sqrt{3^2+1^2}$

แต่ใน python ค่าที่ได้มาจะเป็น เวกเตอร์เดียวกัน แต่ค.ยาว = 1 (unit vector) หาได้โดย $\begin{bmatrix} 3 \div \sqrt{10} \\ 1 \div \sqrt{10} \end{bmatrix}$

ⓑ $\lambda = -5$

ถ้าอยากใช้อันบน~ $4v_1 = -5v_1$

$v_1 = 0$ อยู่ดี

$3v_1 - 5v_2 = -5v_2$

$3v_1 = 0v_2$

$v_1 = 0$ จะนำ v_1 ที่ได้ ไปกำหนดค่า v_2

∴ กรณีที่ เวกเตอร์หนึ่ง มีค่าทิศทางหนึ่งเป็น 0 = เวกเตอร์นั้นเป็นแกน

$\therefore$ v_2 = อะไรก็ได้ แต่เลือกค่า 1

$= 1$

$= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

② singular value decomposition (SVD)

แยก 1 matrix ให้กลายเป็น 3 matrix ย่อย เราเรียกว่า component matrics

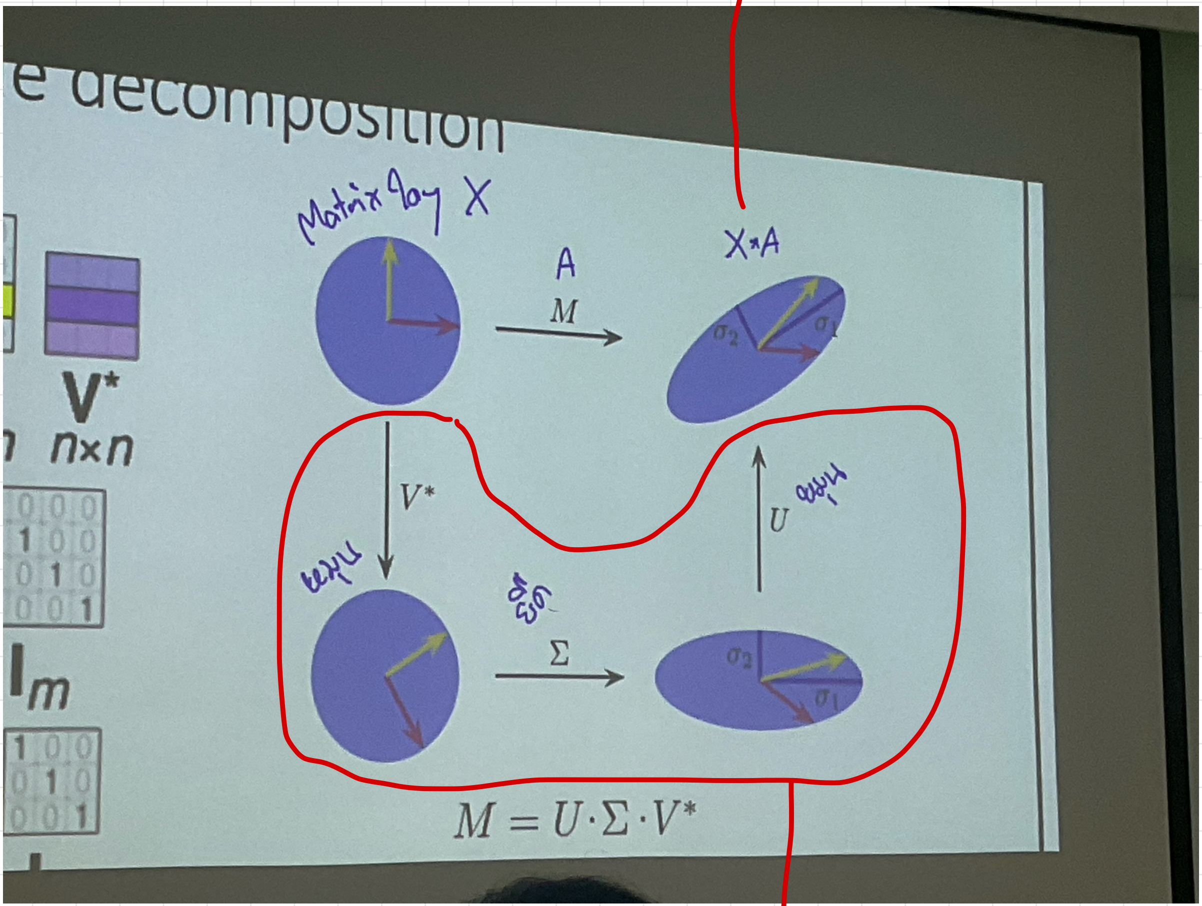
$A = \overset{1}{U} \times \overset{2}{\Sigma} \times \overset{3}{V^T}$

U = left singular matrix, แทนหมุน (rotation) in output space

Σ = diagonal metrix, บอก scaling (ยืด,หด)

V = right singular matrix, rotation in input space

ๆการ transform



ได้ผลเหมือน การ transform แต่เราแยกออกมาให้เป็น 3 ขั้นย่อย

*ข้อดีของ SVD คือ
ไม่สนใจขนาด matrix

ในขณะ eigen สนใจว่า ขนาด matrix ต้องเป็น square

โดยเราจะหยิบ V ในขั้นตอนนี้ไปทำ PCA

Ex. หา SVD ของ $\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 3 & -5 \end{bmatrix} \Rightarrow$ หา U, Σ, V^T

เพื่อทำให้ matrix ใดๆ กลายเป็น A square

step ① หา eigen vector, value ของ A^TA

$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$ $A^T = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$ $A^TA = \begin{bmatrix} 25 & -15 \\ -15 & 25 \end{bmatrix}$

$\begin{vmatrix} 25-\lambda & -15 \\ -15 & 25-\lambda \end{vmatrix} = 0$

$(25-\lambda)(25-\lambda) - (-15)(-15) = 0$

$\lambda^2 - 50\lambda + 400 = 0$

$\lambda = 10, 40$ eigen value

ⓐ $\lambda = 10$

$25v_1 - 15v_2 = 10v_1$

$\frac{v_1}{v_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

ⓑ $\lambda = 40$

$25v_1 - 15v_2 = 40v_1$

$\frac{v_1}{v_2} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

eigen vector

1.5) หา unit vector ของ eigen vector

ⓐ $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$

ⓑ $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$

step ② เอาไปประกอบเป็น SVD

2.1) Σ ก่อน

$\Sigma = \sqrt{\lambda}$, Σ ต้องเป็น $\begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix}$, Σ เรียง ค่ามากสุดไว้ซ้าย

$\lambda = 10, 40 \xrightarrow{\sqrt{\lambda}} \sqrt{10}, \sqrt{40} \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} \sqrt{10} & 0 \\ 0 & \sqrt{40} \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{เรียง}} \begin{bmatrix} \sqrt{40} & 0 \\ 0 & \sqrt{10} \end{bmatrix}$ //

2.2) V^T

$V \rightarrow$ เอา V มา เรียงตาม Σ

$U = \overset{40}{\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}}, \overset{40}{\begin{bmatrix} -1\sqrt{2} \\ 1\sqrt{2} \end{bmatrix}}$

$V = \begin{bmatrix} \overset{40}{\boxed{\begin{matrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{matrix}}} & \overset{10}{\boxed{\begin{matrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{matrix}}} \end{bmatrix} \rightarrow V^T = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$

2.3) U

แก้สมการ $A = U \Sigma V^T$ → สมการนี้เป็น matrix ย้ายข้างไม่ได้ ต้องคูณด้วย Inverse

$A {V^T}^{-1} \Sigma^{-1} = U$; $V^T = V^{-1}$ → แค่ของ eigen

$A V \Sigma^{-1} = U$

$U = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 3 & -5 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}}_{V} \underbrace{\begin{bmatrix} \sqrt{40} & 0 \\ 0 & \sqrt{10} \end{bmatrix}}_{\Sigma}^{-1}$ จะได้ $U = \underbrace{\begin{bmatrix} -0.447 & 0.894 \\ -0.894 & -0.447 \end{bmatrix}}_{U}$

V กับ U เป็น rotational หมายความว่า ถ้าคูณ matrix ตามเส้นทแยงมุมจะได้เลขเท่าเดิม

Σ จะมีแต่ค่าตามเส้นทแยงมุม ที่เหลือจะเป็น 0

สรุป

2D-transformation

① stretching / resize / scaling

x-axis (ตามแกน x)

$$\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

y-axis

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$$

xy

$$\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & l \end{bmatrix}$$

∴ Σ ให้ได้เลขมีค่าแค่ตามเส้นทแยงมุม
เพราะเป็น scaling ยืดหด ตามแกน x,y

② Rotation

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ +\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

หมุนทวนเข็ม ↺

$$\begin{bmatrix} & + \\ - & \end{bmatrix}$$

ตาม ↻

③ shearing → ขั้นตอนนี้ใน SVD ยัดรวมไปแล้ว ก็ต้องทำ rotation

x-axis

$$\begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

y-axis

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix}$$

PCA

step ① ทำ standardization ของ Data (x)

$$x' = \frac{x - \bar{x}}{\sigma}$$; x' = x ที่ทำ standard แล้ว

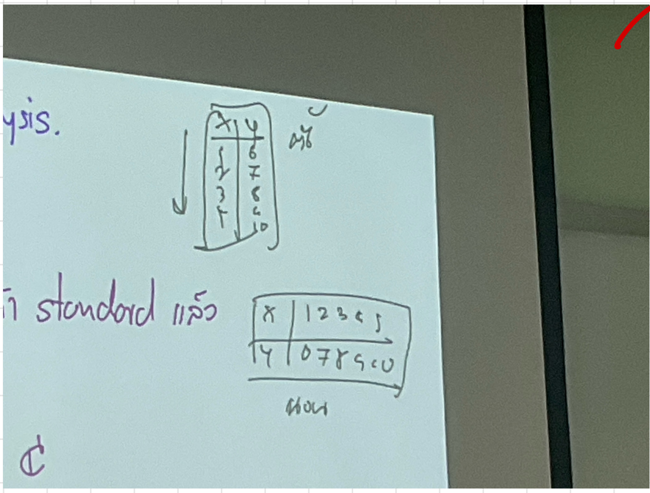
หน้าตาเหมือน z-score

step ② หา correlation matrix or CM or $\mathbb{C}$

$$\mathbb{C} = \frac{x' \cdot x^T}{N-1}$$; กรณีที่ x มี shape เป็น $(N, 1)$ → ตาราง x อยู่ในแนวนอน

ถ้า x อยู่ในแนวตั้ง ⇒ $x^T \cdot x$

แนวนอน, แนวตั้ง ไม่สำคัญ อะไรก็ได้



step ③ หา eigen vector, value ของ $\mathbb{C}$

PCA แต่ละแกน จะตั้งฉากกันไปเรื่อยๆ

step ④ เรียง eigen vector (v) ตาม eigen value (λ) ; โดย เยอะไปน้อย

λ สูงสุด = PC_1 (PCA แกนที่1)

v = เป็นแกน โดยที่ v ของ λ เยอะสุด จะเป็นแกนหลัก

step ⑤ projection (plot ข้อมูล ลงบนแกน)

$$X' \cdot \overset{\text{eigen vector}}{V} = Z \longrightarrow$$ z ที่ได้ก็คือค่าที่ลด dimension แล้ว

* PCA เป็น pre ของ data ก่อนจะนำไปทำ linear, classification, clustering