

Funkcje

Zad. 1. Dane są funkcje:

a) $f(x) = \frac{3x-12}{x-3}$

b) $f(x) = \begin{cases} \frac{4}{x} & \text{dla } x > 0 \\ -\frac{4}{x-2} & \text{dla } x \leq 0 \end{cases}$

c) $f(x) = |2^{x+1} - 4|$

d) $f(x) = 2^{-|x|} + 4$

e) $f(x) = |1 - \log_2 x|$

1. Naskicuj wykres funkcji
2. Wyznacz dziedzinę funkcji
3. Wyznacz zbiór wartości funkcji
4. Wyznacz miejsca zerowe funkcji
5. Określ monotoniczność funkcji
6. Wyznacz zbiór argumentów, dla których funkcja przyjmuje wartości dodatnie
7. Wyznacz zbiór argumentów, dla których funkcja przyjmuje wartości ujemne
8. Wyznacz zbiór argumentów, dla których funkcja przyjmuje wartości niedodatnie
9. Wyznacz zbiór argumentów, dla których funkcja przyjmuje wartości nieujemne
10. Wyznacz wartość największą i najmniejszą (jeżeli istnieją)
11. Wyznacz wartości funkcji dla argumentu równego $\sqrt{2}$
12. Wyznacz argumenty funkcji, dla których funkcja przyjmuje wartość równą 2
13. Sprawdź parzystość/nieparzystość funkcji

Zad.2. Wyznacz dziedzinę funkcji:

a) $f(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 6}$

b) $f(x) = \sqrt{\frac{x+3}{5-x}}$

c) $f(x) = \frac{\sqrt{12+x-x^2}}{x^2-9}$

d) $f(x) = \frac{1}{3-\log_3(x-3)}$

e) $f(x) = \arcsin 3^x$

f) $f(x) = \log(\sqrt{8^{-2+\log x}} - \sqrt[3]{4^{2-\log x}})$

g) $f(x) = \arcsin \frac{x-3}{2} - \log(4-x)$

Zad.3. Wyznacz dziedzinę i zbiór wartości funkcji:

a) $f(x) = \frac{x}{|x|}$

b) $f(x) = \sqrt{3x^2 - 4x + 5}$

c) $f(x) = \log(5x^2 - 8x + 4)$

d) $f(x) = \sqrt{x-1} + 2\sqrt{3-x}$

Zad.4. Dana jest funkcja $f(x) = x^2 - 3x + 2$. Wyznacz:

a) $f(\{1,2\})$

b) $f([0,1])$

c) $f([-2,-1])$

d) $f^{-1}(\{0\})$

e) $f^{-1}([0,2])$

f) $f^{-1}((-\infty, -6])$

Zad.5. Dana jest funkcja f oraz zbiory A i B . Wyznacz obraz $f(A)$ i przeciwobraz $f^{-1}(B)$:

a) $f(x) = |x^2 - 1|$, $A = (-2,2)$, $B = (1,2)$

b) $f(x) = |x| + 1$, $A = \{-1\} \cup (2,3)$, $B = (-1,1)$

c) $f(x) = \begin{cases} x-1 & \text{dla } x > 0 \\ x & \text{dla } x \leq 0 \end{cases}$ $A = [-2,1]$, $B = [-2,1]$

Zad.6. Dana jest funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określona następująco:

a) $f(x) = x^2 + 1$

b) $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{dla } x \geq 0 \\ x-1 & \text{dla } x < 0 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dla } x \geq 0 \\ 2x+3 & \text{dla } x < 0 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} \log|x| & \text{dla } x \neq 0 \\ 0 & \text{dla } x = 0 \end{cases}$

e) $f(x) = \begin{cases} \frac{2x+1}{x-1} & \text{dla } x \neq 1 \\ 0 & \text{dla } x = 1 \end{cases}$

Zbadać, czy funkcja f jest iniekcją, surjekcją.

Zad.7. Zbadać, czy funkcja f jest injekcją, surjekcją, bijekcją. Jeżeli funkcja f jest injekcją, to wyznaczyć funkcję odwrotną f^{-1}

a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$

b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x + 2$

c) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{dla } x \geq 0 \\ -x^2 - 1 & \text{dla } x < 0 \end{cases}$

Zad.8. Niech \mathbb{N}_p oznacza zbiór liczb naturalnych parzystych, zaś \mathbb{N}_n - zbiór liczb naturalnych nieparzystych.

Podać przykłady funkcji $f: \mathbb{N}_n \rightarrow \mathbb{N}_p$ takich, że:

a) f jest bijekcją

b) f nie jest ani injekcją, ani surjekcją

c) f jest injekcją, ale nie jest surjekcją

d) f nie jest injekcją, ale jest surjekcją

Zad.9. Określamy trzy funkcje przekształcające zbiór \mathbb{R} w zbiór \mathbb{R} w następujący sposób:

$$f(x) = x^3 - 4x, \quad g(x) = \frac{1}{x^2 + 1}, \quad h(x) = x^4. \text{ Znajdź:}$$

a) $f \circ f$

b) $g \circ g$

c) $h \circ g$

d) $g \circ h$

e) $f \circ g \circ h$

f) $f \circ h \circ g$

g) $h \circ g \circ f$

Zad.10. Funkcje $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określone są następującymi wzorami:

$$f(x) = x^2$$

$$g(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{dla } x \geq 0 \\ -x & \text{dla } x < 0 \end{cases}$$

Wyznacz wzory określające funkcje:

a) $f \circ f$

b) $f \circ g$

c) $g \circ f$

d) $g \circ g$

Zad.11. Funkcje $f: \mathbb{R} \rightarrow [-1,1]$ i $g: [-1,1] \rightarrow \mathbb{R}$ określone są wzorami:

$$f(x) = \sin x$$

$$g(x) = \sqrt{1-x^2}$$

Znaleźć wzory określające funkcje:

a) $f \circ g$

b) $g \circ f$

Wyznacz dziedzinę i zbiór wartości funkcji $f \circ g$ i $g \circ f$.

Zad.12. Sprawdź, czy funkcje $f(x)$ i $g(x)$ są równe

a) $f(x) = x + \sqrt{5} - 2$ $g(x) = x + \frac{1}{\sqrt{5}-2}$

b) $f(x) = \frac{2x-4}{4x^2-16x+16}$ $g(x) = \frac{1}{2x-4}$

c) $f(x) = \frac{x^3+x}{x^2+1}$ $g(x) = x$

d) $f(x) = \sqrt{9x^2 - 42x + 49}$ $g(x) = 3x - 7$

Zad.13. Dla jakiej wartości parametru a funkcje $f(x)$ i $g(x)$ są równe?

a) $f(x) = \begin{cases} a, & \text{jeśli } x \neq 0 \\ 0, & \text{jesli } x = 0 \end{cases}$ i $g(x) = |\operatorname{sgn} x|$

b) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3-1}{x-1}, & \text{jeśli } x \neq 1 \\ a, & \text{jesli } x = 1 \end{cases}$ i $g(x) = x^2 + x + 1$