Lista zadań nr 3: Algebra zbiorów.

Zad.1. Podać wszystkie elementy następujących zbiorów:

a) $A = \{0,1,2,3\}$
b) $A = \{n \in N : n = NWD(248{,}624) \ \vee n = NWW(248{,}624)\}$
c) $A = \ \{x \in R : x^2 + 2 = 0\}$
d) $A = \{1, \{2,3\}, 4\}$
e) $A = \ \{x \in N : |3 - x| < 3\}$
f) $A = \ \{x \in N : (x + 1)^2 \leq 0\}$
g) $A = \{x \in R : x^2 - 2 = 0 \ \wedge \ x^2 + 3x + 2 > 0\}$
h) $A = \emptyset$
i) $A = \{\emptyset\}$

Zad.2. Wypisać wszystkie podzbiory zbioru *A:*

a) $A = \{1,2, \{3\}\}$
b) $A = \{1, \{2,3\}\}$
c) $A = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$
d) $A = \{a, \{a\}, \{\{a\}\}\}$

Zad.3. Zbadać, które z podanych niżej implikacji są prawdziwe dla dowolnych zbiorów *X*, *Y*, *Z:*

a) $(X \not\subset Y \ \ \wedge \ \ Y \subset Z) \Rightarrow X \not\subset Z$
b) $(X \subset Y \ \ \wedge \ \ Y \cap Z = \emptyset) \Rightarrow X \not\subset Z$
c) $(X \cap Y = \emptyset \ \ \wedge \ \ Y \cap Z = \emptyset) \Rightarrow X \cap Z = \emptyset$
d) $(X \cap Y = X \cup Y) \Rightarrow X = Y$

Zad.4. Zbadać, czy zbiory *A* i *B* pozostają w relacji inkluzji:

a) $A = \{1,2,3,4\}$ $\quad B = \{1,2,3,4,9\}$
b) $A = \{ax^2 + bx + c \ \in R[x] : a, b, c \in R\}$ $\quad B = \{ax^2 + bx + c \ \ \in Q[x] : a, b, c \in Q\}$
c) $A = \{x \in N : x > 2\}$ $\quad B = \{y \in N : y > 2\}$
d) $A = \{ax + b + 2 : a, b \in R\}$ $\quad B = \{bx + a : a, b \in R\}$
e) *A* – zbiór wszystkich trójkątów równoramiennych, *B* – zbiór wszystkich trójkątów równobocznych
f) $A = \{x \in Q : x^2 \leq 1\}$ $\quad B = \{x \in R : 2x^3 - 5x^2 + 4x = 1\}$
g) $A = \{-1, 0, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}\}$ $\quad B = \left\{x \in R : x = \frac{n^2-1}{2n+1} \wedge n \in N\right\}$

Zad.5. Spośród 100 studentów 31 uczy się języka angielskiego, 33 - niemieckiego, 45 - francuskiego, 8 - angielskiego i niemieckiego, 12 - angielskiego i francuskiego, 7 - niemieckiego i francuskiego, a 4 studentów uczy się wszystkich trzech języków. Ilu studentów uczy się tylko języka francuskiego, a ilu studentów nie uczy się żadnego z wymienionych języków?

Zad.6. Wyznacz $A \cup B, A \cap B, A \setminus B, B \setminus A, A', B', A' \cap B', \ A' \cup B', A' \setminus B', B' \setminus A'$ jeżeli:

a) $A = \{1,2,3,4\}$ $\quad B = \{1,2,3,4,9\}$ i $\Omega = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$
b) $A = \langle -2; 7\rangle$ $\quad B = (-\infty; 6\rangle$ i $\Omega = \mathbb{R}$
c) $A = \{x \in R : \ |x - 1| \geq 3\}$ i $B = \{x \in R : \ x^2 - 7x + 6 < 0\}$ i $\Omega = \mathbb{R}$
d) $A = \{\{a, \{a\}\}, a\}$ $\quad B = \{a, \{a\}\}$, jeśli $\Omega = \{a, \{a\}, \{a, \{a\}\}, \{a, \{a, \{a\}\}\}\}$
e) $A = \{x \in N : x < 3\}$ $\quad B = \{x \in R : x > 2\}$, jeśli $\Omega = \mathbb{R}$
f) $A = Q$ i $B = N$ i $\Omega = \mathbb{R}$
g) $A = Z$ i $B = R \setminus Q$ i $\Omega = \mathbb{R}$
h) $A = \{x \in R : \ |x| = x\}$ i $B = \left\{x \in R : \ \frac{4}{x+2} > 1\right\}$ i $\Omega = \mathbb{R}$
i) $A = \{x \in R : x^2 - 9 \leq 0\}$ i $B = \{x \in R : x = n^4 + 1 \wedge n \in N\}$ i $\Omega = \mathbb{R}$

Zad.7. Wyznaczyć zbiór A × B, jeżeli:

a) $A = \{1,2\}$ $\quad B = \{3,4,5\}$
b) $A = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ $\quad B = \{\emptyset\}$
c) $A = \{\langle 1,2\rangle, \langle 3,4\rangle\}$ $\quad B = \{1, 2, \langle 3,4\rangle\}$

Zad.8. Wśród podanych poniżej równości wskaż te, które są twierdzeniami rachunku zbiorów i udowodnij je. Dla pozostałych podaj kontrprzykłady.

a) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
b) $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$
c) $(A \cup B) \setminus B = A \setminus B$

d) $A \setminus B = B \setminus A$
a) $(A \cup B) \setminus B = A$
b) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$
c) $A \setminus (A \cap B) = A \setminus B$
d) $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$
e) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \setminus C$
f) $A \cup (A \cap B) = A$
g) $A \cup (A \cup B) = A \cup B$
h) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

Zad.9. Czy spełnione są równości dla dowolnych zbiorów *A*, *B* i *C*?
a) $A \cup (B \times C) = (A \cup B) \times (A \cup C)$
b) $A \cap (B \times C) = (A \cap B) \times (A \cap C)$

Zad.10. Wyznacz sumę i iloczyn indeksowanej rodziny zbiorów (bez dowodów):
a) $A_n = \{x \in R\colon\ |x| < n\},\ n \in N_1$
b) $A_t = \{x \in R\colon\ |x| < t\},\ t \in (0, +\infty)$
c) $A_n = \left\{x \in R\colon\ 0 \le x \le \frac{1}{n+1}\right\},\ n \in N$
d) $A_n = \{x \in R\colon\ sinx = n\},\ n \in N$