Matematyka 1

Lista nr 1: „Rachunek zdań. Zdania logiczne. Funktory. Formuły zdaniowe. Tautologia i kontrtautologia. Prawa rachunku zdań"

Zad.1. Które z podanych wyrażeń są zdaniami logicznymi?

a) Rozwiąż zadanie!

b) Jutro będzie piękna pogoda.

c) Czy pójdziesz dzisiaj do kina?

d) Zamek wawelski w Krakowie był siedzibą polskich królów.

e) Wieloryb jest ssakiem.

f) Funkcja f jest rosnąca.

g) Kwadrat dowolnej niezerowej liczby rzeczywistej jest liczbą dodatnią.

h) 2+3 = 6

i) x+2 > 0

j) Która godzina?

k) Zamknij okno!

l) x jest liczbą ujemną.

m) $x^2 + 2x - 35 > 0$.

n) 5 jest liczbą pierwszą

o) π jest liczbą wymierną

Zad.2. Oceń wartość logiczną następujących zdań.

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2+4+6+\cdots+2n}{n^2+n}$ jest liczbą naturalną i $\frac{9^6+81^2\cdot 9^3}{3^{10}-9^9+27^6} = 90$.

b) Liczba $\sqrt{29+12\sqrt{5}} + \sqrt{29-12\sqrt{5}}$ jest naturalna lub spełniona jest nierówność $3\sqrt{2} < 2\sqrt{3}$.

c) $3|5 \Leftrightarrow (2|8 \Rightarrow 2|7)$.

d) $(\sqrt{3} \le \sqrt{2}) \Rightarrow \left[(2\sqrt{3})^2 \le \left(2\sqrt{2}\right)^2 \vee -\sqrt{3} \ge -\sqrt{2}\right]$.

e) Zero jest niedodatnie i zero jest nieujemne.

f) Jeśli nieprawdą jest, że $2 < 1$, to $2 < 0$ lub $2 \ge 1$.

g) Jeżeli liczby 3, 4, 5 są długościami boków trójkąta, to obwód tego trójkąta jest równy 12 i trójkąt ten jest prostokątny.

h) $log_{\sqrt{2}}16$ jest liczbą naturalną, co jest równoważne temu, że jeśli $x \le y$, to $log_{\frac{1}{4}}x \ge log_{\frac{1}{4}}y$.

i) 2 > 1 i log 1 = 10.

j) $2|6 \vee 3^2 = 8$.

k) Suma dwóch liczb nieparzystych jest liczbą parzystą

l) $\sqrt{x^2} = x$

m) Jeśli liczba $\sqrt{6+4\sqrt{2}} \cdot \sqrt{6-4\sqrt{2}}$ jest naturalna, to $\frac{1}{\sqrt{2}}$ jest wymierna.

Zad.3. Sprawdzić, które z podanych formuł są tautologiami/kontrtautologiami rachunku zdań.

a) $p \Longrightarrow (\sim p \vee p)$

b) $[(p \vee q) \wedge \sim p] \Rightarrow q$

c) $\sim(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \wedge q)$

d) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge \sim q)$

e) $[(p \Longrightarrow q) \wedge p] \Longrightarrow q$

f) $(p \Longrightarrow q) \Longrightarrow (q \Longrightarrow p)$

g) $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow ((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p))$

h) $\big((p \vee q) \Rightarrow (p \vee \sim q)\big) \Rightarrow (\sim p \vee q)$

i) $[p \vee (q \vee r)] \Leftrightarrow [(p \vee q) \vee r]$

j) $[(p \vee q) \wedge (p \Rightarrow q)] \Longrightarrow (q \Longrightarrow p)$

Zad.4. Sprawdzić, metodą nie wprost, które z podanych formuł są tautologiami rachunku zdań.

a) $(\alpha \wedge \sim\alpha) \Rightarrow (\alpha \vee \sim\alpha)$

b) $\sim(\alpha \Rightarrow \beta) \wedge (\beta \vee \alpha)$

c) $\alpha \Rightarrow (\beta \Rightarrow \alpha \wedge \beta)$

d) $[\alpha \Rightarrow (\beta \Rightarrow \gamma)] \Rightarrow [\beta \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \gamma)]$

e) $\{[(\alpha \wedge \beta) \Rightarrow \gamma] \wedge [(\alpha \wedge \beta) \Rightarrow \sim\gamma]\} \Rightarrow (\sim\alpha \wedge \sim\beta \wedge \sim\gamma)$

Zad.5. Konstruując odpowiednią formułę rachunku zdań sprawdzić, czy prawdziwe jest zdanie:

a) jeżeli 13 dzieli się przez 2, to z faktu, że 13 nie dzieli się przez 2 wynika, że 13 dzieli się przez 3.

b) jeżeli $8 > 5$, to warunek $8 \leq 5$ jest równoważny równości $8 = 5$.

c) jeżeli $\sqrt{3}$ jest liczbą wymierną i nieprawdą jest, że $\sqrt{3}$ jest liczbą mniejszą od 1, to $3^2 = 10$.

Zad.6. Zdefiniować alternatywę, koniunkcję i równoważność za pomocą implikacji i negacji.

Zad.7. Zdefiniować koniunkcję, implikację i równoważność za pomocą alternatywy i negacji.

Zad.8. Zdefiniować alternatywę, implikację i równoważność za pomocą koniunkcji i negacji.

Zad.9. Zaznaczyć na płaszczyźnie zbiory punktów, których współrzędne spełniają następujące formuły zdaniowe.

a) $x^2 + y^2 \leq 4$.

b) $y + 1 < x$.

c) $xy > 0$.

d) $|xy| \leq 0$.

e) $|x| = |y|$.

Zad.10. Dana jest funkcja $f(x) = \dfrac{5}{(x-1)(x+2)}$. Określić, kiedy liczba *a* należy do jej dziedziny. Jakie prawo rachunku zdań trzeba wykorzystać, aby sprawdzić, że liczba *a* nie należy do dziedziny.