1a. K, L $\to$ kernel:

Prove $(\alpha K) + (\beta L) \Rightarrow$ kernel.

$\exists v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$,

$\exists \phi(v_1) \in \mathbb{R}^N$, $\phi(v_2) \in \mathbb{R}^N$ $\qquad N > n$

$\exists \phi^{*}(v_1) \in \mathbb{R}^N$, $\phi^{*}(v_2) \in \mathbb{R}^N$

$$\phi^{*\alpha} = \left(\phi(v_1) \cdot \frac{1}{\gamma}\right)$$

$$K^{*} ? = \alpha(v_1, v_2) + \beta(v_1, v_2) =$$

$$= \alpha\phi(v_1) \cdot \phi(v_2) + \beta\phi^{*}(v_1)\phi^{*}(v_2)$$

$\phi^{*\alpha}$ ...

$$\phi^{*\alpha}(v_1) = [\overbrace{\sqrt{\alpha}\,\phi(v_1)}^{\mathbb{R}^N}, \overbrace{\sqrt{\beta}\,\phi^{*}(v_1)}^{\mathbb{R}^N}] \in \mathbb{R}^{1 \times 2N}$$

$$\phi^{*\alpha}(v_2) = \begin{bmatrix} \sqrt{\alpha}\,\phi(v_2) \\ \sqrt{\beta}\,\phi^{*}(v_2) \end{bmatrix} \begin{matrix} \mathbb{R}^N \\ \mathbb{R}^N \end{matrix} \in \mathbb{R}^{2N \times 1} \qquad \in \mathbb{R}^{2N}$$

מכאן הרכבנו אופרציית כפל ומכפלה
במימד גבוה יותר.

$$R^{2n} \qquad R^{2n}$$

כלומר:
$$\phi^{**}(v_1)\cdot\phi^{**}(v_2) =$$

$$a\phi(v_1)\cdot\phi(v_2)+\beta\phi^{*}(v_1)\cdot\phi^{*}(v_2)$$

שזה בעצם $ak(v_1,v_2)+\beta L(v_1,v_2)$,

ולכן זהו מהווה kernel

1.b.

$$k(v_1,v_2)=\phi(v_1)\cdot\phi(v_2)$$

עבור הפלט, ה-kernel של וקטור עם עצמו:

$$k(v_1,v_1) = \phi(v_1)\cdot\phi(v_1) =$$

מורכב מרבוע של סכומים:

$$\sum_{i=1}^{n}(v_i)^2 =$$ כלומר תמיד יצא חיובי.

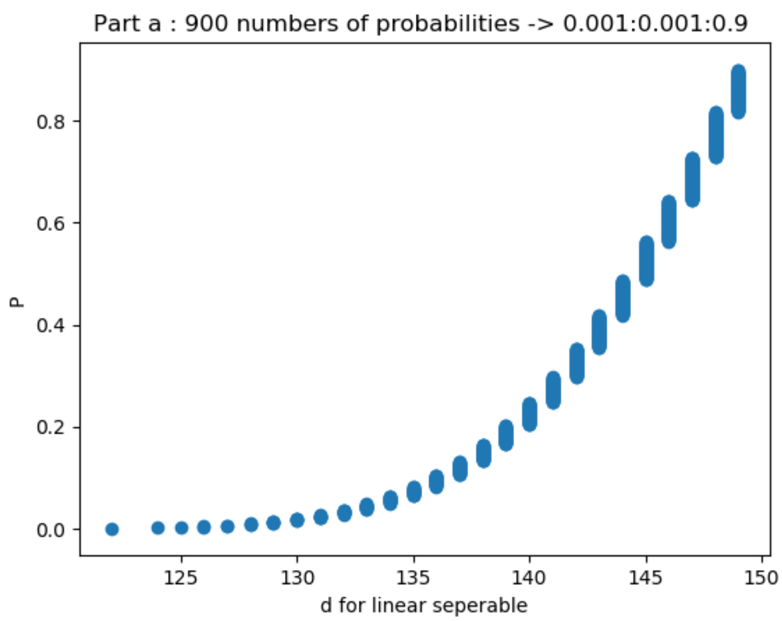
ולכן מכפלה של וקטור עם עצמו $k<0$ לא בעצם
לא יהיה נכון ולכן פה מתקיים לא kernel.
כלומר לא נוכל לייצג מכפלת וקטור עם עצמו
המתקבלת K שלילי.

2. graphs:

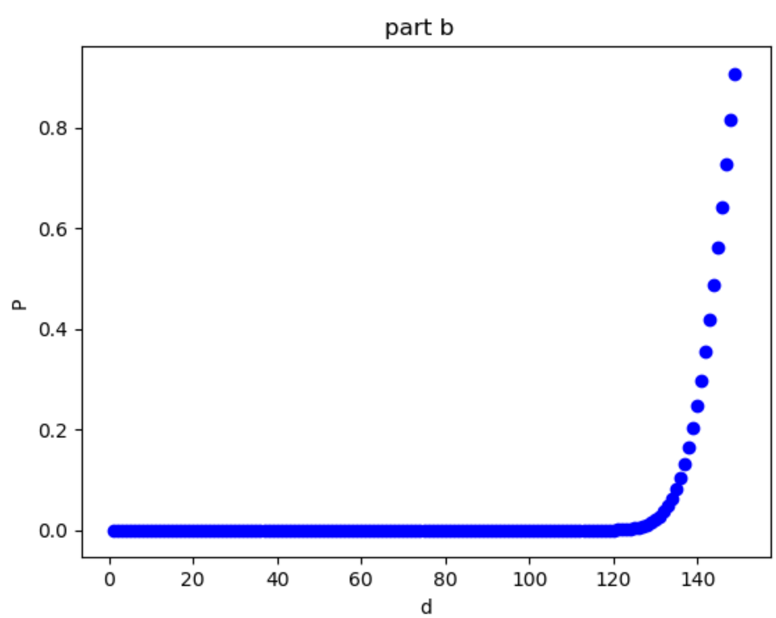
Part a:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Dimension	122	124	125	126	127	128	129	130	131	132	133	134	135	136
Probability	0.001	0.002	0.003	0.004	0.006	0.008	0.011	0.016	0.021	0.028	0.038	0.05	0.065	0.083

14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
137	138	139	140	141	142	143	144	145	146	147	148	149
0.106	0.133	0.166	0.204	0.248	0.298	0.355	0.419	0.488	0.564	0.644	0.729	0.818



Part b:



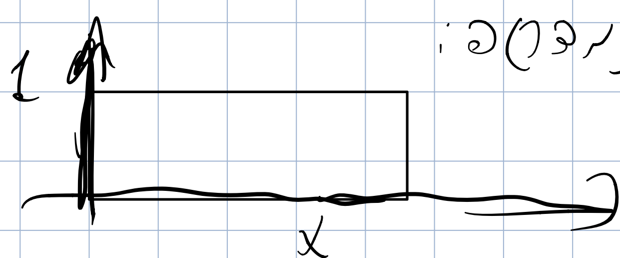
3. $N \in \mathbb{N} \quad x, x' \in \{1, 2 \dots N\}$

$$K(x, x') = \min(x, x')$$

Prove K a valid kernel, $\varphi\{1 \dots N\} \to \mathbb{R}^{\infty}$
such that: $\forall x, x', K(x, x') = \langle \varphi(x), \varphi(x') \rangle$

$\phi(x) = \mathbb{1}_{[0, x)}$ שפין:

הכוונה: פונקציית מדרגה:



$$\phi(x): \begin{cases} t = 1 & t \leq x \\ t = 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

$\Rightarrow \phi(x_i) \in \mathbb{R}^N$

לדוגמא:

$x = \{1, 3\}, y = \{2, 1\}$

$\phi(x) = [1 \overbrace{0 \dots 0}^{N} \,\vdots\, 1 \overbrace{1\ 1\ 0\ 0\ 0 \dots 0}^{N}]$

$\phi(y) = [1\ 1 \overbrace{0 \dots 0}^{N} \,\vdots\, 1 \overbrace{0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0}^{N}]$

$$<\underbrace{\phi(x),\phi(y)}> = 1 + 1 = 2 \quad (ב$$

$$\phi(x)\ 1\times 2N,\ \phi(y)\ 2N\times 1$$

$$k(x,y) = \sum \min(x_i,y_i) \quad : א$$

כלומר המיפוי של ϕ הוא לפונקציית מדרגה

ולכן הסכום שנוצר הינו: שקול: $V_1 = \phi(x_i)$

$V_2 = \phi(y_i)$

$$\sum_{i=1}^{\infty} V_1(i)\cdot V_2(i) = \sum_{i=1}^{\min(x(i),y(i))} V_1(i)\cdot V_2(i) = \min(x_i,y_i)$$

כמובן כל השלבות הכלליות וכיון שזה הוכחנו עבור קורדינטה אחת $x(i)$ $y(i)$, מתקיים פה לכל מושג.

לכן זה מתקיים לכל x_i, y_i ששייכים של תנאי השאלה.

מכיוון ש ϕ ממפה למימד גבוה מספיק כל קורדינטה מוגדרת ב-N מימדים ולכן סך הכל וקטור x ממימד d, ϕ ממפה וקטור x למימד $N\cdot d$.

ומכיוון נוכל ש ה $\min(x_i,y_i)$ kernel הוא kernel חוקי.

4. $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$,

$g(x,y,z) = \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} = 1$

$\alpha > \beta > \gamma > 0$

$$L = (x^2+y^2+z^2) + \lambda\left(\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} - 1\right)$$

$$\frac{dL}{dx} = 2x + \frac{\lambda 2x}{\alpha^2}, \quad 2x\left(\frac{\lambda}{\alpha^2} + 1\right)$$

$$\frac{dL}{dy} = 2y + \frac{\lambda 2y}{\beta^2}, \quad 2y\left(\frac{\lambda}{\beta^2} + 1\right)$$

$$\frac{dL}{dz} = 2z + \frac{\lambda 2z}{\gamma^2}, \quad 2z\left(\frac{\lambda}{\gamma^2} + 1\right)$$

$$\frac{dL}{d\lambda} = \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} - 1,$$

$2xa^2 = -\lambda 2x$ / $\cdot yz$ $\rightarrow$ $2xyza^2 = -\lambda 2xyz$

$2y\beta^2 = -\lambda 2y$ / $\cdot xz$ $\rightarrow$ $2xyz\beta^2 = -\lambda 2xyz$

$2z\gamma^2 = -\lambda 2z$ / $\cdot xy$ $\rightarrow$ $2xyz\gamma^2 = -\lambda 2xyz$

$$2xyza^2 = 2xyz\beta^2 = 2xyz\gamma^2$$

הפתרונות הטריוויאליים

$(x=0, y, z)$
$(x, y=0, z)$ $\quad a=\beta=\gamma$ $\quad$ או:
$(x, y, z=0)$ $\quad (x, y, z)$

הצבה באילוץ:

$x^2\beta^2\gamma^2 + y^2a^2\gamma^2 + z^2a^2\beta^2 = a^2\beta^2\gamma^2$ $\quad$ לבור כאן:

$y^2a^2\gamma^2 + z^2a^2\beta^2 = a^2\beta^2\gamma^2$ / $: a^2$

$y^2\gamma^2 + z^2\beta^2 = \beta^2\gamma^2$

$$y^2\gamma^2 + z^2\beta^2 - 0.5y^2\beta^2 - 0.5\gamma^2\beta^2 = 0$$

$$y^2(\gamma^2 - 0.5\beta^2) + \beta^2(z^2 - 0.5\gamma^2) = 0$$

$$y^2 = 0.5\beta^2 \,,\quad z^2 = 0.5\gamma^2$$

$$y = \pm(\sqrt{0.5})\cdot\beta \,,\quad z = \pm\sqrt{0.5}\cdot\gamma \,,\quad x = 0$$

$$\Downarrow$$

$$(0,\ \pm\sqrt{0.5}\beta,\ \pm\sqrt{0.5}\gamma)$$

בדומה ב-y:

$$x^2\beta^2\gamma^2 + z^2\alpha^2\beta^2 = \alpha^2\beta^2\gamma^2 \quad /:\beta^2$$

$$x^2\gamma^2 + z^2\alpha^2 = \alpha^2\gamma^2$$

$$\gamma^2(x^2 - 0.5\alpha^2) + \alpha^2(z^2 - 0.5\gamma^2) = 0$$

$$x = \pm\sqrt{0.5}\,\alpha \,,\quad z = \pm\sqrt{0.5}\,\gamma \,,\quad y = 0$$

$$\Downarrow$$

$$(\pm\sqrt{0.5}\alpha,\ 0,\ \pm\sqrt{0.5}\gamma)$$

עבור $z=0$:

$$x^2\beta^2\gamma^2 + y^2\alpha^2\gamma^2 = \alpha^2\beta^2\gamma^2 \quad /:\gamma^2$$

$$x^2\beta^2 + y^2\alpha^2 = \alpha^2\beta^2$$

$$x = \pm\sqrt{0.5}\,\alpha \,,\quad y = \pm\sqrt{0.5}\,\beta \,,\quad z=0$$

$$\left(\pm\sqrt{0.5}\,\alpha \,,\ \pm\sqrt{0.5}\,\beta \,,\ 0\right)$$

נמצאו 3 נקודות החשודות למינימום והמקסימום
וכעת נציב:

I. $0.5\beta^2 + 0.5\gamma^2$

II $0.5\alpha^2 + 0.5\gamma^2$

III $0.5\alpha^2 + 0.5\beta^2$

לפי: $\alpha > \beta > \gamma$:

הנקודה ה: $\left(x=\pm\sqrt{0.5}\,\alpha,\ y=\pm\sqrt{0.5}\,\beta,\ z=0\right)$ III

היא המקסימלית

הנקודה ה-I : $\left(x=0,\ y=\pm\sqrt{0.5}\,\beta,\ z=\pm\sqrt{0.5}\,\gamma\right)$

היא המינימלית

5.

$$C = H : \{h(l,u,r)\} = \{(x,y,z) \text{ s.t } x^2+y^2 \le r,\ l \le z \le u\} \text{ s.t } l,u \in \mathbb{R}, r \in$$

בדומה למה שהוכח בתרגול, בכיתה

נחשב r, u, l. עבור חישוב r:

נחשב את המרחק הרחוק ביותר של קואורדינטות (x,y) מ-$(0,0)$.

עבור חישוב l:

ניקח את ערך קואורדינטת z המינימלית

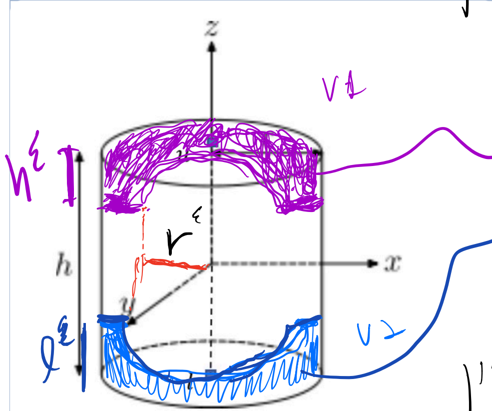
עבור חישוב u:

נחשב את קואורדינטת z המקסימלית.

* בבחירה הזאת נוסיף את מימד הגובה. זהו PAC כיוון שלכל תת קבוצה שנלמד עליה ניקח את ערכי הקצוות הגבוהים ביותר ולכן תמיד זה יהיה עקבי עם שאר הנקודות. (בדומה למלבן שהוכח בתרגול)

נרצה לחסום את הטעות שעבור הצילינדר ב-ε

נחלק את הגליל לשני חלקים:



נסמן V_1 ו-V_2 שבו (פרוש פס) הדיוק יסבך

$$P(V_1) = P(r \ge r^\varepsilon)\cdot P(h \ge h^\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{2}$$

$$P(V_2) = P(r \ge r^3)\cdot P(l \le l^\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{2}$$

* לאחר מכן נחסום את השגיאה ונשלים הצילינדר, ס הדיוק צריך לחבר בשני הצדדים הפנימיים שהוספנו!

- טעות נפח V_ε ← צילינדר שנוצר עבור $(r=r^\varepsilon, h=h^\varepsilon, l=l^\varepsilon)$
- " " V ← הצילינדר האמיתי

$$|V - V_\varepsilon| = \varepsilon = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$$

כלומר בהינתן שפונקציות הפרמטרים מיקרו בפני
הנפחים V_1 / V_2 ! ערך השגיאה והיא לכל היותר
לכן עבור מצב שבו $V_p \subseteq$ הנפח המשוער
אצלנו: $|V - V_p| > \varepsilon$, נרצה לחסום
הסתברות את המצב הזה, המצב הזה ייקרה
אם דוגמת האימון לא יבקרו ב-2 הנפחים שהוגדרו.
לכן החישוב:

$$P(D \in X^m : \mathrm{Err}(L(D), c) > \varepsilon) \le$$

$$\sum_{i=1}^{2} (P(x - V_i))^m \le 2\left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)^m \le 2e^{-\frac{m\varepsilon}{2}}$$

$$2e^{-\frac{m\varepsilon}{2}} \le \delta \quad / \ln$$

$$\ln(2) - \frac{m\varepsilon}{2} \le \ln(\delta)$$

$$-\frac{m\varepsilon}{2} \le \ln\left(\frac{\delta}{2}\right) \quad / \cdot -1 \cdot \frac{2}{\varepsilon}$$

$$m \ge \frac{2\ln\left(\frac{2}{\delta}\right)}{\varepsilon}$$

חישובי זמן:

עבור חישוב ה- v נחשב מרחק m פעמים $O(m)$
חיפוש ה- v המקסימלי $O(m)$.
אותו הדבר עבור חישוב ה- s וה- u.
לכן סה״כ $\sim 6\,O(m)$ Time complexity

* לגבי הדיוק האלגוריתם שעבור כל חישוב
מוצא היפרבולה ספציפית שבה עבור u ו-
s הווימין. עבור אותה היפרבולה חישבנו מה המרחק
שהשגיאה שלה תהיה קטנה מ-ε כהיינתן שווינו
ויותר שזה עד עבור u ו-s הווימין.
ולפי הניסיונות שהוצגו בגרף (תרגיל) בתרגיל זה
רשומות התוצאות כפי שמופיע בהתחלה הנספח שלנו.