סמינר במתמטיקה
אלגבראות לי

מנחה: ד״ר גיל אלון

מגיש: אורי בר גנדל

מרחב וקטורי L עם פונקציה בילינארית

$$[-,-] \ : \ L \times L \longrightarrow L$$

המקיימת

$$[x,x] = 0$$

$$[x,[y,z]] + [y,[z,x]] + [z,[x,y]] = 0$$

לכל $x,y,z \in L$ נקרא **אלגברת לי**.

תת-מרחב K של L הוא **תת-אלגברת לי** אם

$$[x,y]\in K$$

לכל $x,y\in K$.

תת-מרחב I של L הוא **אידיאל** אם

$$[x, y] \in I$$

לכל $x \in I, y \in L$.

אם I אידאל של L אז L/I אלגברת לי עם

$$[x+I, y+I] = [x,y] + I$$

לכל $x, y \in L$. לאלגברה נקרא **אלגברת מנה**.

פונקציה

$$\varphi \ : \ L_1 \longrightarrow L_2$$

היא **הומומורפיזם** אם היא לינארית ו-

$$\varphi([x,y]) = [\varphi(x), \varphi(y)]$$

לכל $x, y \in L_1$.

1) אם $L_1 \longrightarrow L_2 \ : \ \varphi$ הומומורפיזם אז

$$L_1 / Ker\,\varphi \cong Im\,\varphi$$

2) אם $I, J \subseteq L$ אידיאלים אז

$$(I+J)/J \cong I/(I \cap J)$$

3) ואם $I \subseteq J$ אז

$$(L / I) / (J / I) \cong L / J$$

הסכום הישר $L_1 \oplus L_2$ הוא אלגברת לי עם

$$[(x_1, x_2), (y_1, y_2)] = ([x_1, y_1], [x_2, y_2])$$

לכל $x_i, y_i \in L_i$.

לאלגברת לי הלא-אבלית ממימד 2 יש בסיס $\{x, y\}$ כך ש-$[x, y] = x$ והמרכז שלה הוא 0.

אלגברת הייזנברג היא האלגברה ממימד 3 עם בסיס $\{x, y, z\}$ כך ש-

$$[x, y] = z$$

$$Z(L) = L' = Sp\{z\}.$$

אם I אידיאל של L אז L / I אבלית אם ורק אם $I \subseteq L'$.

הסדרה הנגזרת:

$$L^{(k+1)} = [L^{(k)}, L^{(k)}]$$

אלגברת לי **פתירה** אם $L^{(n)} = 0$.

הסדרה המרכזית התחתונה:

$$L^{k+1} = [L, L^k]$$

אלגברת לי **נילפוטנטית** אם $L^n = 0$.

אלגברת לי **פשוטה** אם אין לה אידיאלים לא-טריויאלים.

אלגברת לי **פשוטה למחצה** אם אין לה אידיאלים פתירים שונים מאפס, כלומר

$$rad\,L = 0$$

האלגברה $L\,/\,rad\,L$ פשוטה למחצה.

למת האינווריאנטיות:

יהיו L תת-אלגברת לי של $gl(V)$ ו-A אידיאל של L מעל שדה F בעל אופיין 0. תהי

$$\lambda \; : \; A \longrightarrow F$$

פונקציית משקל. אז מרחב המשקל V_λ הוא L-שמור.

משפט אנגל:
אם L תת-אלגברת לי של $gl(V)$ כך שכל איבריה הן העתקות נילפוטנטיות אז קיים ל-V בסיס כך שכל איברי L מיוצגים על-ידי מטריצה משולשית עליונה ממש.

גרסה שנייה:
L נילפוטנטית אם ורק אם $ad\, x$ נילפוטנטית לכל $x \in L$.

משפט לי:
תת-אלגברת לי L של $gl(V)$ היא פתירה אם ורק אם קיים ל-V בסיס בו כל איברי L מיוצגים על-ידי מטריצה משולשית עליונה.

הצגה של אלגברת לי L מעל שדה F היא הומומורפיזם

$$\varphi : L \longrightarrow gl(V)$$

כאשר V מרחב מעל F.

אם L אלגברת לי מעל F אז **L-מודול** הוא מרחב V מעל F עם העתקה בילינארית

$$\begin{aligned} L \times V &\longrightarrow V \\ (x,v) &\longmapsto x \cdot v \end{aligned}$$

המקיימת

$$[x,y] \cdot v = x \cdot (y \cdot v) - y \cdot (x \cdot v)$$

לכל $x,y \in L$ ו-V-$v \in V$.

נניח ש-V הוא L-מודול. אם W תת-מרחב של V אז הוא L-**תת-מודול** אם לכל $x \in L \, , w \in W$ מתקיים $x \cdot w \in W$.

אם V הוא L-מודול ו-W תת-מודול אז V/W תת-מודול אם נגדיר

$$x \cdot (v + W) = (x \cdot v) + W$$

לכל $v \in V$, $x \in L$. למודול נקרא **מודול מנה**.

מודול הוא **פשוט** אם אינו אפס ואין לו תת-מודולים לא-טריוויאלים.

מודול **אי-פריק** אם אינו סכום ישר של תת-מודולים לא-טריוויאלים.

מודול **פריק לחלוטין** אם הוא סכום ישר של תת-מודולים פשוטים.

פונקציה לינארית

$$\theta \ : \ V \longrightarrow W$$

היא **הומומורפיזם בין L-מודולים** אם

$$\theta(x \cdot v) = x \cdot \theta(v)$$

לכל $v \in V \, , x \in L$.

הלמה של שור:
אם L אלגברת לי מרוכבת ו-S מודול פשוט ממימד סופי של L, אז העתקה

$$\theta \;:\; S \longrightarrow S$$

היא הומומורפיזם בין L-מודולים אם ורק אם היא כפולה של היחידה.

אם L תת-אלגברת לי פתירה של $gl(V)$ אז

$$tr\, xy = 0$$

לכל $x \in L, y \in L'$.

אם L תת-אלגברת לי של $gl(V)$ ו-

$$tr\, xy = 0$$

לכל $x \in L, y \in L'$ אז L פתירה.

הקריטריון הראשון של קרטן:
אלברת לי מרוכבת L פתירה אם ורק אם
$$tr(ad\,x \circ ad\,y) = 0$$
לכל $x \in L, y \in L'$.

הקריטריון השני של קרטן:
אלגברת לי מרוכבת L פשוטה למחצה אם ורק
אם התבנית קילינג שלה לא-מנוונת.

אם β לא-מנוונת אז העתקה

$$\varphi \;:\; L \longrightarrow L^*$$

המעתיקה את L $y \in$ ל-$\beta(x, y)$ $x \mapsto$ חח״ע ועל.

את $Hom(V,W)$ נהפוך למודול על-ידי הגדרת

$$(x\cdot\theta)v = x\cdot(\theta v) - \theta(x\cdot v)$$

לכל

$$x\in L,\ v\in V,\ \theta\in Hom(V,W).$$

עבור הצגה $\varphi : L \to gl(V)$ של L נגדיר את **התבנית עקבה**

$$\beta_V(x, y) = tr(\varphi(x) \circ \varphi(y))$$

לכל $x, y \in L$.

אופרטור קזימיר

$$c \ : \ V \longrightarrow V$$

מוגדר על-ידי

$$c(v) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot (y_i \cdot v)$$

לכל $v \in V$.

משפט וייל:
אלגברת לי מרוכבת ממימד סופי היא פשוטה למחצה אם ורק אם כל ההצגות הסוף-ממדיות שלה פריקות לחלוטין.