Reavaluació de Matemàtiques 1 - Febrer 2020
DIA 4: Espai vectorials.

1. (F2-QP11) Sigui $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Proveu que el conjunt $S = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid A^t C = 2A\}$ és un subespai vectorial de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2. (F2-QT10) Considereu el subespai $F =< (1, 2, -1), (3, 0, 1), (-1, 4, -3), (-10, 4, -6) >$ de $\mathbb{R}^3$.
   (a) Trobeu una base i la dimensió de F. Esbrineu si el vector $(-9, 6, -6)$ pertany a F.
   (b) Exteneu la base que heu trobat a l'apartat a) a una base B de $\mathbb{R}^3$.
   (c) Doneu les coordenades en base B d'un vector que en base canònica de $\mathbb{R}^3$ té coordenades (a, b, c).

3. (F2-QP13) Considerem el vectors $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ a \\ a+2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, $a \in \mathbb{R}$. Sigui $F = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$.
   (a) Demostreu que F té dimensió 3 si i només si $a \neq -6$.
   (b) Preneu $a = -6$. Doneu una base de F i les coordenades de $v = \begin{pmatrix} 9/2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ en aquesta base.
   (c) Preneu $a = -6$. Trobeu les condicions que han de satisfer x, y, z per a què el vector $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ pertanyi a F.

4. (F2-QT11) Sigui a un nombre real. Considereu el subespai

$$S_a = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : ax + y + z = 0,\ x + ay + z = 0,\ x + y + az = 0\right\},\ a \in \mathbb{R}.$$

   (a) Trobeu els valors del paràmetre a per als que el subespai S_a té dimensió 1.
   (b) Doneu una base de S_1.

5. (F2-QP11) Sigui $S_1 = \langle (1, 3, 2, 0), (-1, 0, 0, 1), (0, 1, 0, -1), (5, 11, 4, -8) \rangle$ un subespai vectorial de $\mathbb{R}^4$.
   (a) Trobeu una base i la dimensió de S_1.
   (b) Proveu que els vectors (x, y, z, t) de S_1 són els que satisfan l'equació $x + y - 2z + t = 0$.
   (c) Sigui $S_2 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + z + t = 0,\ x - 4y - z + t = 0,\ 2x + y + 2t = 0\}$. Doneu la dimensió i una base de $S_1 \cap S_2$.

6. (F2-QT17) Sigui $\lambda \in \mathbb{R}$. Considereu el subespai de $\mathbb{R}^4$ següent

$$F_\lambda = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : x + y - 2z + t = 0,\ 3x + 2y - 3z + (2 + \lambda)t = 0,\ y - 3z + (-2\lambda - 1)t = 0 \right\}.$$

   (a) Doneu la dimensió de F_λ en funció del paràmetre $\lambda \in \mathbb{R}$.
   (b) Doneu una base B del subespai F_{-2}. Completeu aquesta base de F_{-2} a una base W de $\mathbb{R}^4$.

(c) Doneu el vector de coordenades del vector $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in F_{-2}$ en la base B de l'apartat (b).

(d) Considereu el subespai $G = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$. Quines condicions ha de satisfer un vector $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$ per ser vector de G?

7. (F2-QP12) Considereu els vectors següents de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \; u_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \; u_3 = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ a & -a \end{pmatrix}$$

amb $a \in \mathbb{R}$. Doneu la dimensió del subespai $\langle u_1, u_2, u_3 \rangle$ en funció d'a i una base.

8. (F2-QP16)

(a) Calculeu la dimensió del subespai $F =< \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} >\subseteq \mathbb{R}^3$ segons el valor del paràmetre $a \in \mathbb{R}$.

(b) Sigui E el subespai següent de matrius:

$$E = \{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) : x+y+z+t = 0, x-y+z-t = 0, 3x+y+2z = 0, 4x+4y+3z+3t = 0 \}.$$

Trobeu la dimensió i una base de E.

(c) Proveu que $B = \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \}$ i $B' = \{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \}$ són bases de $\mathbb{R}^3$ i trobeu la matriu canvi de base $P_B^{B'}$.

9. Sigui $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ un conjunt de vectors de $\mathbb{R}^4$ i $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ un vector.

(a) Demostreu que $\mathcal{B}$ és una base de $\mathbb{R}^4$ i trobeu les coordenades de v en aquesta base.

(b) Doneu les matrius del canvi de base $\mathcal{P}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$ i $\mathcal{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$.

10. (F2-QT11) Considereu l'espai $\mathbb{R}_2[x]$ de polinomis de grau més petit o igual a 2.

(a) Proveu que $B = \{-1 + 2x + 3x^2, x - x^2, x - 2x^2\}$ és una base de $\mathbb{R}_2[x]$. Doneu la matriu del canvi de base de la base B a la base canònica $C = \{1, x, x^2\}$.

(b) Doneu les coordenades en la base B del polinomi $p(x) = -1 + x + 2x^2$.

(c) Doneu una base del subespai $S = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 \in \mathbb{R}_2[x] : a_1 + a_2 = 0\}$.