REPAS ALGEBRA: MATRIUS

TIPUS DE MATRIUS

- **Matriu nul·la**: tots els elements són 0
- **Matriu quadrada**: tenen dimensió $n \times n$
  - Matriu triangular superior: tiene 0 por DEBAJO de la diagonal
  - Matriu triangular inferior: tiene 0 por ENCIMA de la diagonal
- **Matriu diagonal**: tiene 0 por ENCIMA y por DEBAJO de la diagonal
- **Matriu Identitat**: matriu diagonal amb valor 1 a la diagonal

SUMA DE MATRIUS

Per sumar dues matrius ho hem de fer component a component. El component ij de la matriu resultant serà simplement la suma dels components ij de les dues matrius que es volen sumar.

PROPIETATS

- (Associativa) $(A + B) + C = A + (B + C)$
- (Commutativa) $A + B = B + A$
- (Element neutre) $A + O = O + A = A$
- (Element oposat) Existeix una matriu B tal que $A + B = B + A = O$ (a aquesta B l'anomenem $-A$)

Anotació: totes les matrius han de tenir la mateixa dimensió

PRODUCTE PER ESCALARS

Per multiplicar una matriu per un escalar (un número), simplement hem de multiplicar cadascun dels elements de la matriu per aquest escalar.

PROPIETATS

- (Pseudoassociativa) $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$
- (Distributiva 1) $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$
- (Distributiva 2) $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$
- (Identitat) $1A = A$

  Fixem-nos que $(-1)A = -A$

TRANSPOSICIÓ

Per transposar una matriu el que hem de fer és intercanviar els valors ij, pels valors ji. Observem que els valors de la diagonal es mantenen a la mateixa posició.

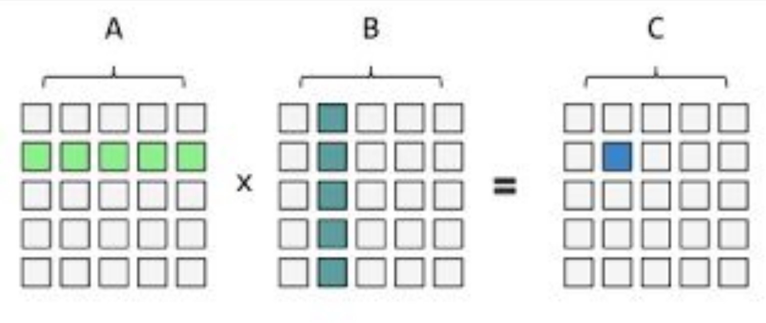
PROPIETATS

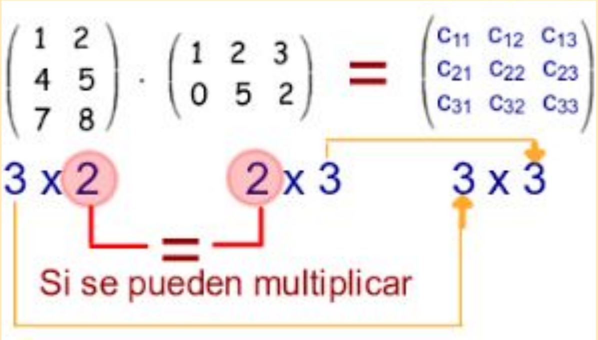
- Si transposem dues vegades obtenim la mateixa matriu $(A^t)^t = A$
- $(AB)^t = B^t * A^t$
- Una matriu quadrada A és:
    - simètrica si $A^t = A$
    - antisimètrica si $A^t = -A$

Anotació: si la matriu A té tamany $m \times n$, la transposada A^t té tamany $n \times m$

PRODUCTE DE MATRIUS

Per multiplicar dues matrius A i B, sent A mxn, i B uxv, n hauria de ser igual a u. Sent A mxn, i B nxv. La matriu resultant C, serà mxv.





- El producte de dues matrius qualsevol no té perquè estar definit
- AB pot estar definit però BA no
- Encara que AB i BA estiguin definits, en general AB ≠ BA

PROPIETATS PRODUCTE

- (Associativa) $(AB)C = A(BC)$
- (Distributives) $A(B + C) = AB + AC$ i $(A + B)C = AC + BC$
- (Element unitat) $IA = A = AI$, on I és la matriu identitat del tipus que convingui
- (Relació amb la transposada) $(AB)t = Bt * At$

MATRIU INVERSA

Diem que una matriu B és la inversa d’una matriu A quan AB = BA = I. Si es compleix aquesta condició, diem que A és invertible (i B també), i anomenarem a B com A^(-1)

OBSERVACIONS

- Si existeix la inversa, és única
- No tota matriu té inversa
- Les matrius invertibles no tenen files ni columnes nul·les

PROPIETATS MATRIU INVERSA

Si A i B són matrius invertibles del mateix tipus i λ és un escalar no nul, es compleix:

- la matriu A^{-1} és invertible i $(A^{-1})^{-1} = A$
- la matriu A^k és invertible i $(A^k)^{-1} = (A^{-1})^k$
- la matriu λA és invertible i $(\lambda A)^{-1} = (\lambda)^{-1} A^{-1}$
- la matriu A^t és invertible i $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$
- el producte AB és invertible i $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

TRANSFORMACIONS ELEMENTALS

Una transformació elemental per files d'A consisteix en una de les tres operacions següents:

- Intercanviar dues files d'A
- Multiplicar una fila d'A per un escalar no nul
- Sumar a una fila d'A el resultat de multiplicar una altra fila per un escalar no nul

Una matriu és elemental (per files) si es pot obtenir a partir d'una matriu identitat mitjançant una única transformació elemental per files

MATRIUS EQUIVALENTS

Teorema: Si a una matriu A li apliquem un número finit de transformacions elementals per files, obtenim una matriu B. Aquestes dues matrius A i B es diu que són equivalents.

MATRIUS ESGLAONADES

Una matriu és escalonada (per files) si:

- Una fila és nul·la (composta enterament per zeros), totes les que estan per sota d'ella també son nul·les
- En cada fila no nul·la, el primer element no nul és un 1 (anomenat l'1 dominant o el pivot de la fila)
- El pivot d'una fila sempre es troba més a la dreta que el pivot de la fila anterior

GAUSS-JORDAN (CÀLCUL INVERSA)

Donada A, podem seguir els passos següents per trobar $A^{(-1)}$, si és que existeix:

- Comencem amb la matriu $(A|I_n)$
- Apliquem transformacions elementals a $(A|I_n)$, amb l'objectiu d'arribar a $(I_n|B)$
- Si ho aconseguim, $A^{(-1)} = B$
- Altrament, A no és invertible

REPAS ALGEBRA: SISTEMES

SISTEMES D'EQUACIONS LINEALS

Una **equació lineal** en les variables $x_1, \ldots, x_n$ és una expressió del tipus

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b,$$

on $a_1, \ldots, a_n, b$ pertanyen al cos d'escalars $\mathbb{K}$

Una **solució** és $(s_1, \ldots, s_n) \in \mathbb{K}^n$ tal que

$$a_1s_1 + a_2s_2 + \cdots + a_ns_n = b$$

(Obs. Una equació lineal pot tenir entre zero i infinites solucions)

SISTEMES D'EQUACIONS LINEALS

Un **sistema d'equacions lineals** és un conjunt d'equacions lineals (totes amb les mateixes variables $x_1, \ldots, x_n$)

La forma genèrica d'un sistema d'equacions lineals seria doncs:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \right.$$

Una **solució del sistema** és una n-upla $(s_1, \ldots, s_n) \in \mathbb{K}^n$ que és solució de totes les equacions del sistema

SOLUCIONS D’UN SISTEMA D’EQUACIONS LINEAL

En funció de la quantitat de solucions que tingui el sistema, pot ser:

- INCOMPATIBLE: si no té cap solució
- Compatible DETERMINAT: si té UNA única solució
- Compatible INDETERMINAT: si té més d’una solució

La **solució general** d’un sistema és el conjunt de totes les seves solucions. Dos sistemes són **equivalents** si tenen la mateixa solució general.

SISTEMES EQUIVALENTS

Dos sistemes amb les mateixes equacions però ordenades de manera diferent són equivalents.

Si en un sistema:

- Multipliquem una equació per un escalar (no nul), o bé
- A una equació li sumem un múltiple d'una altra

el sistema resultant és equivalent al primer

Observació: el sistema resultant és equivalent al primer si la matriu resultant és equivalent a la matriu del primer sistema. Si apliquem trans. elementals per files, seran equivalents

MATRIU ASSOCIADA A UN SISTEMA

Donat el sistema

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}$$

la seva **matriu associada** i les matrius de variables i de termes independents són

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Podem escriure el sistema com un producte de matrius:

$$Ax = b$$

MATRIU AMPLIADA D'UN SISTEMA

La **matriu ampliada** és la matriu $(A|b)$, és a dir,

$$(A|b) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

Obs. Si es realitzen transformacions elementals a la matriu ampliada d'un sistema, el sistema resultant és equivalent al primer

Per tant, tot sistema d'equacions lineals és equivalent a un en què la matriu ampliada és escalonada

SISTEMES ESCALONATS I COM RESOLDRE'LS

Un sistema escalonat genèric seria

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3 + \cdots + c_{1r}x_r + \cdots + c_{1n}x_n & = & d_1 \\ x_2 + c_{23}x_3 + \cdots + c_{2r}x_r + \cdots + c_{2n}x_n & = & d_2 \\ \vdots & & \vdots \\ x_r + \cdots + c_{rn}x_n & = & d_r \end{array}\right.$$

(si cal reordenem les variables)

Les variables $x_1, \ldots, x_r$ les anomenarem principals i la resta les anomenarem lliures

Podem resoldre el sistema aïllant "cap amunt"

La variable principal x_r la podem aïllar en termes de les variables lliures:

$$x_r = d_r - c_{r,r+1}x_{r+1} - \cdots - c_{rn}x_n$$

Ara podem aïllar x_{r-1} en termes de x_r i de les variables lliures, etc

SISTEMES ESCALONATS: SOLUCIÓ GENERAL

En un sistema escalonat podem expressar totes les variables principals en termes de les lliures (i de constants escalars):

$$\begin{array}{rcl} x_1 & = & f_1 + e_{1,r+1}x_{r+1} + \cdots + e_{1,n}x_n \\ x_2 & = & f_2 + e_{2,r+1}x_{r+1} + \cdots + e_{2,n}x_n \\ \vdots & & \vdots \\ x_r & = & f_r + e_{r,r+1}x_{r+1} + \cdots + e_{r,n}x_n \end{array}$$

Aquesta és la solució general del sistema

Obs. Per a cada assignació de valors que donem a les variables lliures $x_{r+1}, \ldots, x_n$ obtindrem una solució particular del sistema

Diem que el sistema té $n - r$ graus de llibertat

SISTEMES ESCALONATS: SOLUCIÓ PARAMÈTRICA

Si la solució general d'un sistema és

$$\begin{aligned} x_1 &= f_1 + e_{1,r+1}x_{r+1} + \cdots + e_{1,n}x_n \\ x_2 &= f_2 + e_{2,r+1}x_{r+1} + \cdots + e_{2,n}x_n \\ &\vdots \\ x_r &= f_r + e_{r,r+1}x_{r+1} + \cdots + e_{r,n}x_n \end{aligned}$$

anomenarem forma paramètrica de la solució a l'expressió

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \\ x_{r+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + x_{r+1} \begin{pmatrix} e_{1,r+1} \\ e_{2,r+1} \\ \vdots \\ e_{r,r+1} \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} e_{1,n} \\ e_{2,n} \\ \vdots \\ e_{r,n} \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aquesta és la solució general del sistema

Obs. Per a cada assignació de valors que donem a les variables lliures $x_{r+1}, \ldots, x_n$ obtindrem una solució particular del sistema

Diem que el sistema té $n - r$ graus de llibertat

SISTEMES: ROUCHÉ-FROBENIUS

Teorema: Sistema d'equacions lineals amb matriu associada A (només valors que multipliquen a les variables), i matriu ampliada (A|b) (anterior + columna a la dreta amb els **termes independents**).

Rang (A) = r
Rang (A|b) = r'

Si r < r' => SISTEMA INCOMPATIBLE (SI, no té solució)
Si r = r' = n => SISTEMA COMPATIBLE DETERMINAT (SCD, solució única)
Si r = r' < n => SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINAT (SCI, moltes solucions amb n-r "graus de llibertat")

Rang del SISTEMA D'EQUACIONS = Rang (A)

Diapositiva duplicada al ppt de teoremas

SISTEMES HOMOGENIS

Un sistema d'equacions lineals és homogeni si tots els termes independents són iguals a 0.

Important: Un sistema homogeni sempre és compatible (ja que tenim la solució trivial)

Corol·lari: Sigui A la matriu associada a un sistema homogeni en n variables, sigui r el rang d'A. Aleshores:

- si $r = n$, el sistema és compatible DETERMINAT i l'única solució és la trivial
- si $r < n$, el sistema és compatible INDETERMINAT i té alguna solució diferent de la trivial

Diapositiva duplicada al ppt de teoremas

SISTEMES: SOLUCIÓ PER ELIMINACIÓ GAUSSIANA

Per trobar la solució general d'un sistema d'equacions lineals qualsevol fem el següent:

1. Cerquem la matriu ampliada (A|b)

2. Cerquem la matriu escalonada M equivalent a (A|b)

3. Apliquem el teorema de Rouché-Frobenius per determinar si el sistema és compatible

4. En el cas que el sistema sigui compatible, trobem la solució general a partir del sistema equivalent amb la matriu ampliada M

REPAS ALGEBRA: DETERMINANTS

DEFINICIÓ

Sigui $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Un **menor d'$A$** és qualsevol matriu formada a partir d'A eliminant un cert nombre de files i el mateix nombre de columnes

El **menor associat a l'element** a_{ij} és la matriu A_{ij} obtinguda en eliminar la fila i i la columna j de la matriu A.
El menor A_{ij} és una matriu quadrada de tipus $(n-1) \times (n-1)$

El **determinant d'A** es defineix recursivament com

- si $n = 1$, aleshores $\det(A) = a_{11}$
- si $n \geq 2$, aleshores

$$\begin{aligned}\det(A) &= a_{11}\det(A_{11}) - a_{12}\det(A_{12}) + \cdots + \\ &\quad (-1)^{1+j}a_{1j}\det(A_{1j}) + \cdots + (-1)^{n+1}a_{1n}\det(A_{1n})\end{aligned}$$

CÀLCUL DETERMINANTS

(Enlloc de $\det(A)$, a vegades escriurem $|A|$)

- Matrius 2×2 i 3×3:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a\det((d)) - b\det((c)) = ad - bc$$

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} &= a\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} \\ &= a(ei - fh) - b(di - fg) + c(dh - eg) \\ &= aei + cdh + bfg - ceg - afh - bdi \end{aligned}$$

- Si A té una fila o una columna nul·la llavors $\det(A) = 0$
  Si $A = Diag(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, llavors $\det(A) = a_1 a_2 \ldots a_n$

EFECTE DE LES TRANS. ELEMENTALS EN ELS DETERMINANTS

- intercanviant dues files, aleshores $\det(B) = -\det(A)$ (transformació tipus (I))
- multiplicant la fila i-èsima d'A per λ, aleshores $\det(B) = \lambda \det(A)$ (transformació tipus (II))
- sumant-li a una fila un múltiple d'una altra, aleshores $\det(B) = \det(A)$ (transformació tipus (III))

DETERMINANTS I TRANSFORMACIONS ELEMENTALS

Corol·lari: Si dues matrius A i M són matrius equivalents aleshores, $\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow \det(M) \neq 0$

PROPIETATS DETERMINANTS

- $\det(AB) = \det(A)\det(B)$
- $\det(A^t) = \det(A)$
- si A és invertible, $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$

  Però en general, $\det(A + B) \neq \det(A) + \det(B)$

CARACTERITZACIÓ MATRIUS INVERTIBLES

Teorema: Una matriu A és invertible si, i només si, $\det(A) \neq 0$.

Corol·lari: Una matriu A té $\text{rang}(A) = n$ si, i només si, $\det(A) \neq 0$.

Teorema: Una matriu A té $\text{rang}(A) = r$ si, i només si, el menor d'A més gran que tingui determinant no nul és $r \times r$.

Anotació: sent la matriu $n \times n$, i el menor més gran amb determinant no nul $r \times r$, amb $r = n$, el rang serà n, ja que el determinant de la matriu sencera és diferent de 0, com diu el primer teorema.

Diapositiva duplicada al ppt de teoremas