# REPAS ALGEBRA: APLICACIONS

## 7.1 Definicions, exemples i propietats

Siguin $E$ i $F$ dos $\mathbb{K}$-espais vectorials. Una aplicació $f : E \to F$ és **lineal** si satisfà:

(a1) per tot $u, v \in E$, $f(u + v) = f(u) + f(v)$

(a2) per tot $u \in E$ i tot $\lambda \in \mathbb{K}$, $f(\lambda u) = \lambda f(u)$

Si $E = F$, direm que $f$ és un **endomorfisme**

### Exemples

- Aplicació trivial. $f : E \to F$ on $f(u) = 0_F$, $u \in E$, és lineal
- Aplicació identitat. $I_E : E \to E$ on $I_E(u) = u$, $u \in E$, és lineal
- L'aplicació següent no és lineal

$$f : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_2[x], \quad f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = x^2-(a+d)x+(2c-b)$$

- L'aplicació $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\quad f(x, y) = (x^2y^2, x + y)$ no és lineal

# PROPIETATS

Sigui $f : E \to F$ una aplicació lineal. Aleshores

- $f(\mathbf{0}_E) = \mathbf{0}_F$
- $f(-u) = -f(u)$, per a tot $u \in E$
- si $S$ és un subespai d'$E$, $f(S)$ és un subespai d'$F$
- si $S'$ és un subespai d'$F$, $f^{-1}(S')$ és un subespai d'$E$

**Proposició**

Sigui $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ una base d'$E$. Aleshores $f$ està unívocament determinada per $f(b_1), \dots, f(b_n)$

És a dir, a partir de la imatge d'una base podem obtenir la imatge de qualsevol vector d'$E$:
si $u = \alpha_1 b_1 + \cdots + \alpha_n b_n$, aleshores $f(u) = \alpha_1 f(b_1) + \cdots + \alpha_n f(b_n)$

**Corol·lari**

Si $S = \langle v_1, \dots, v_k \rangle$ és un subespai d'$E$, aleshores

$$f(S) = \langle f(v_1), \dots, f(v_k) \rangle$$

Siguin $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ una base d'$E$, $W$ una base de $F$ i $m$ la dimensió de $F$

La **matriu associada a $f$ en les bases $B$ i $W$** és la matriu que té per columnes les imatges dels vectors de la base $B$ expressades en coordenades en la base $W$. La denotem per $\mathbf{M_W^B(f)}$

$$M_W^B(f) = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ f(b_1)_W & f(b_2)_W & \dots & f(b_n)_W \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$$

Per trobar el vector de coordenades de la imatge d'un vector $u \in E$ n'hi ha prou en fer el següent producte matricial:

$$f(u)_W = M_W^B(f) u_B,$$

posant els vectors de coordenades en columna

## NUCLI I IMATGE

Sigui $f : E \to F$ una aplicació lineal

El **nucli** d'$f$ és

$$\mathrm{Ker}(f) = \{u \in E : f(u) = \mathbf{0}_F\}$$

La **imatge** d'$f$ és

$$\mathrm{Im}(f) = \{v \in F : v = f(u) \text{ per algun } u \in E\} = \{f(u) : u \in E\}$$

**Proposició**

$\mathrm{Ker}(f)$ i $\mathrm{Im}(f)$ són subespais vectorials d'$E$ i $F$, respectivament

# NUCLI I IMATGE

Siguin $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ i $W = \{w_1, \dots, w_m\}$ bases d'$E$ i $F$, resp., i sigui $M = M_W^B(f)$ la matriu associada a $f$ en aquestes bases

- Nucli: treballant amb coordenades, els vectors del nucli són les solucions del sistema homogeni de $m$ equacions i $n$ incògnites

$$M \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

  La dimensió del nucli és $n - \text{rang}(M)$

- Imatge: $\text{Im}(f) = \langle f(b_1), \dots, f(b_n) \rangle$
  La dimensió de la imatge és el rang de $M$
  Considerant una matriu escalonada equivalent a $M$, les columnes on hi ha els pivots corresponen a les columnes de $M$ que són vectors LI, i per tant formen una base de la imatge

# APLICACIONS

Ker(f) = nucli de f, Im(f) = Imatge de f, M = matriu associada a f

**Teorema**: dim(E) = dim(Ker(f )) + dim(Im(f))

**Caracteritzacions**

- f és injectiva si, i només si, Ker(f ) = $\{0_E\}$ ⇔ rang(M) = dim(E)
- f és exhaustiva si, i només si, dim(Im(f )) = dim(F) ⇔ rang(M) = dim(F)
- f és un isomorfisme (bijectiva) si, i només si, rang(M) = dim(E) = dim(F)
- Si E i F tenen la mateixa dimensió, llavors f és un isomorfisme ⇔ f és injectiva ⇔ f és exhaustiva

Diapositiva duplicada al ppt de teoremas

# COMPOSICIÓ D'APLICACIONS LINEALS

**Proposició**

Si $f : E \to F$ i $g : F \to G$ són aplicacions lineals, l'aplicació composició $g \circ f : E \to G$ també és lineal

**Proposició**

Si $f : E \to F$ és un isomorfisme, $f^{-1} : F \to E$ també ho és

Si les bases d'$E$, $F$ i $G$ són $B, W$ i $V$ respectivament, tenim:

$$M_V^B(g \circ f) = M_V^W(g) M_W^B(f)$$

$$M_B^W(f^{-1}) = (M_W^B(f))^{-1}$$

# CANVIS DE BASE

Veiem com es relacionen dues matrius associades a una mateixa aplicació lineal fixant bases diferents a l'espai de sortida i/o a l'espai d'arribada.

Siguin $f : E \to F$ una aplicació lineal, $B$ i $B'$ bases d'$E$, i $W$ i $W'$ bases d'$F$

$$\begin{array}{ccc} E_B & \xrightarrow[M_W^B(f)]{f} & F_W \\ {\scriptstyle I_E}\big\uparrow {\scriptstyle P_B^{B'}} & & {\scriptstyle P_{W'}^{W}}\big\downarrow {\scriptstyle I_F} \\ E_{B'} & \xrightarrow[M_{W'}^{B'}(f)]{f} & F_{W'} \end{array}$$

$$f = I_F \circ f \circ I_E$$

$$M_{W'}^{B'}(f) = P_{W'}^{W}\, M_W^B(f)\, P_B^{B'}$$