1.2 Exercicis

1.1 Per a cadascun dels grafs N_n, K_n, T_n, C_n i W_n, doneu-ne:

1) una representació gràfica per a $n = 4$ i $n = 6$;

2) la matriu d'adjacència per a $n = 5$;

3) l'ordre, la mida, el grau màxim i el grau mínim en funció de n.

1.2 Per a cadascun dels enunciats següents, doneu un graf amb la propietat que es demana, explicitant-ne la llista d'adjacències i una representació gràfica.

1) Un graf 3-regular d'ordre com a mínim 5.

2) Un graf bipartit d'ordre 6.

3) Un graf bipartit complet d'ordre 7.

4) Un graf estrella d'ordre 7.

1.3 Esbrineu si els grafs complet, trajecte i cicle d'ordre n, amb $n \geq 1$ o $n \geq 3$ segons el cas, són bipartits i/o regulars.

1.4 Doneu la mida:

1) d'un graf r-regular d'ordre n;

2) del graf bipartit complet $K_{r,s}$.

1.5 Siguin $V = \{a, b, c, d, e, f\}$, $A = \{ab, af, ad, be, de, ef\}$ i $G = (V, A)$. Determineu tots els subgrafs de G d'ordre 4 i mida 4.

1.6 Els cinc apartats següents fan referència al graf G definit com segueix. El conjunt de vèrtexs és $V = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, i dos vèrtexs u i v són adjacents si $|u - v| \in \{1, 4, 5, 8\}$. Determineu l'ordre i la mida dels subgrafs de G següents:

1) El subgraf induït pels vèrtexs parells.

2) El subgraf induït pels vèrtexs senars.

3) El subgraf induït pel conjunt $\{0, 1, 2, 3, 4\}$.

4) Un subgraf generador que tingui el màxim nombre possible d'arestes però no contingui cicles.

1.7 Considereu un graf $G = (V, A)$ amb $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ i $A = \{12, 13, 23, 24, 34, 45\}$. Doneu el conjunt d'arestes, les matrius d'incidència i adjacència, i una representació gràfica dels grafs G^c, $G - 4$, $G - 45$ i $G + 25$.

1.8 Considereu un graf $G = (V, A)$ d'ordre n i mida m. Siguin v un vèrtex i a una aresta de G. Doneu l'ordre i la mida de G^c, $G - v$ i $G - a$.

1.9 Esbrineu si el complementari d'un graf regular és regular, i si el complementari d'un graf bipartit és bipartit. En cas afirmatiu, demostreu-ho; en cas negatiu, doneu un contraexemple.

1.10 Doneu el conjunt d'arestes i una representació gràfica dels grafs $K_3 \cup T_3$ i $T_3 \times K_3$, suposant que els conjunts de vèrtexs de K_3 i de T_3 són disjunts.

1.11 Considereu els grafs $G_1 = (V_1, A_1)$ i $G_2 = (V_2, A_2)$. Doneu l'ordre, el grau dels vèrtexs i la mida de $G_1 \times G_2$ en funció dels de G_1 i G_2.

1.12 Proveu o refuteu les afirmacions següents:

1) Si G_1 i G_2 són grafs regulars, aleshores $G_1 \times G_2$ és regular.
2) Si G_1 i G_2 són grafs bipartits, aleshores $G_1 \times G_2$ és bipartit.

1.13 Doneu tots els grafs que tenen $V = \{a, b, c\}$ com a conjunt de vèrtexs i representeu-los gràficament.

1.14 Considereu els grafs que tenen conjunt de vèrtexs $[7] = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Calculeu quants grafs n'hi ha ...

1) ... amb exactament 20 arestes.
2) ... amb exactament 16 arestes.
3) ... en total.

1.15 Per a cadascuna de les seqüències següents, esbrineu si existeixen grafs d'ordre 5 de forma que els graus dels vèrtexs siguin els valors donats. Si existeixen, doneu-ne un exemple.

1) 3, 3, 2, 2, 2.
2) 4, 4, 3, 2, 1.
3) 4, 3, 3, 2, 2.
4) 3, 3, 3, 2, 2.
5) 3, 3, 3, 3, 2.
6) 5, 3, 2, 2, 2.

1.16 Demostreu que si un graf és regular de grau senar, aleshores té ordre parell.

1.17 Sigui G un graf bipartit d'ordre n i regular de grau $d \geq 1$. Quina és la mida de G? Pot ser que l'ordre de G sigui senar?