Matemàtiques 1 - FIB 21-6-2017
Examen Final F2 Àlgebra Lineal

Qualsevol sistema d'equacions s'ha de discutir i/o resoldre pel mètode de Gauss, i el càlcul de la inversa d'una matriu s'ha de fer pel mètode de Gauss-Jordan.
JUSTIFIQUEU TOTES LES RESPOSTES

1. (a) [0.5 punts] Doneu la definició de subespai vectorial.
   (b) [1.5 punts] Siguin S i S' subespais vectorials d'un espai vectorial E. Demostreu que $S \cap S'$ és subespai vectorial d'E i doneu un exemple que mostri que $S \cup S'$ no és necessàriament un subespai vectorial.

2. Sigui $F = \langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle$, on $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.
   (a) [1 punt] Trobeu la dimensió de F i doneu-ne una base formada només per vectors del conjunt $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$.
   (b) [1 punt] Expresseu la resta de vectors generadors de F com a combinació lineal de la base de l'apartat anterior.
   (c) [1 punt] Trobeu la o les condicions sobre x, y, z, t per tal que $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in F$.
   (d) [1 punt] Si $F' = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \rangle$, trobeu la dimensió i una base de $F \cap F'$.

3. Sigui $\lambda \in \mathbb{R}$ i sigui $f_\lambda : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfisme de $\mathbb{R}^3$ que té per matriu en base canònica
$$M(f_\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ 0 & 5 & 0 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$
   (a) [1 punt] Determineu si f_λ és injectiva i/o exhaustiva segons el valor de λ.
   (b) [1 punt] Trobeu la dimensió i una base del nucli de $f_{5/3}$.
   (c) [1 punt] Trobeu la matriu de f_0 en la base $\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \}$ en aquest ordre.
   (d) [1 punt] Doneu un vector propi de f_0 i determineu si f_0 diagonalitza.

Informacions:

- La durada de l'examen és de 2h15m.
- Entregueu cadascuna de les tres preguntes en un full o fulls diferents i escriviu amb tinta negra o blava.
- Les notes es publicaran al Racó el 26 de juny de 2017 i la revisió serà l'endemà 27 de juny a les 15:00 (l'aula s'indicarà quan es publiquin les notes).

Solució.

1. (a) Si E és un k-espai vectorial, un subespai de E és un subconjunt no buit $S \subseteq E$ que és tancat per sumes (i.e. si $v, v' \in F$ aleshores $v + v' \in F$) i per producte per escalars (i.e. si $v \in F$ aleshores $\lambda v \in F$ per a tot $\lambda \in k$).

   (b) Qualsevol subespai conté el vector zero, així que $S \cap S'$ és no buit perquè també contindrà el vector zero. Per altra banda, si $u, v \in S \cap S'$ és que $u, v \in S$ i, per tant, $u+v \in S$ (S tancat per sumes) i alhora $u, v \in S'$ i, per tant, $u+v \in S'$ (S' tancat per sumes). Per tant, $u+v \in S \cap S'$, i.e. $S \cap S'$ és tancat per sumes. Finalment, si $v \in S \cap S'$, és que $v \in S$ i, per tant, $\lambda v \in S$ per a tot $\lambda \in k$ (S tancat per producte per escalars) i alhora $v \in S'$ i, per tant, $\lambda v \in S'$ per a tot $\lambda \in k$ (S' tancat per producte per escalars). Per tant, $\lambda v \in S \cap S'$ per a tot $\lambda \in k$.

   Un exemple que mostra que la reunió de subespais no és un subespai és $E = \mathbb{R}^2$ i $S = \{(x, 0),\, x \in \mathbb{R}\}$, $S' = \{(0, y),\, y \in \mathbb{R}\}$. Tant S com S' són tancats per sumes i per producte per escalars, però $S \cup S'$ no. Per exemple, $(1, 0), (0, 1) \in S \cup S'$ però $(1, 0) + (0, 1) = (1, 1) \notin S \cup S'$.

2. (a) La dimensió de F ve donada pel nombre de generadors linealment independents. Ara

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & -2 & -5 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & -2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   Per tant, F és de dimensió 3 i una base és $\{v_1, v_2, v_4\}$ (són els vectors corresponents a les columnes amb pivot).

   (b) Cal resoldre el sistema d'equacions corresponent a l'equació vectorial

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

   La solució és $\alpha = 1/2$, $\beta = -1/2$ i $\gamma = 0$.

   (c) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in F$ si i només si existeixen reals $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tals que

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

   és a dir, si i només si el sistema d'equacions lineals

$$\begin{aligned} \lambda_1 - \lambda_2 + 4\lambda_3 &= x \\ 2\lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 &= y \\ \lambda_1 + \lambda_2 + 3\lambda_3 &= z \\ \lambda_1 + 3\lambda_2 + 2\lambda_3 &= t \end{aligned}$$

   és compatible. La matriu ampliada del sistema és

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 4 & x \\ 2 & 2 & 3 & y \\ 1 & 1 & 3 & z \\ 1 & 3 & 2 & t \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 4 & x \\ 0 & 4 & -5 & y-2x \\ 0 & 2 & -1 & z-x \\ 0 & 4 & -2 & t-x \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 4 & x \\ 0 & 2 & -1 & z-x \\ 0 & 0 & -3 & y-2x-2(z-x) \\ 0 & 0 & 0 & t-x-2(z-x) \end{array}\right)$$

   Per tant, la condició de compatibilitat és $x - 2z + t = 0$.

(d) El vector $\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ satisfà la condició anterior i, per tant, és de F. Això significa que $F' \subseteq F$ i, per tant, $F \cap F' = F'$. La intersecció és, doncs, de dimensió 1 i una base és la formada pel vector $\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

3. Sigui $\lambda \in \mathbb{R}$ i sigui $f_\lambda : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfisme de $\mathbb{R}^3$ que té per matriu en base canònica

$$M(f_\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ 0 & 5 & 0 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

(a) Per saber si és injectiva/exhaustiva només cal calcular el rang de $M(f_\lambda)$ i comparar-lo amb la dimensió de l'espai de partida/arribada, que en aquest cas és el mateix. Es té que

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ 0 & 5 & 0 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & -2 & 5-3\lambda \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5-3\lambda \end{pmatrix}$$

Per tant

$$rang(M(f_\lambda)) = \begin{cases} 3 & \text{si } \lambda \neq 5/3 \\ 2 & \text{si } \lambda = 5/3 \end{cases}$$

i f_λ és injectiva i exhaustiva si $\lambda \neq 5/3$, i no és ni injectiva ni exhaustiva si $\lambda = 5/3$.

(b) El nucli de $f_{5/3}$ és el conjunt de solucions del sistema d'equacions homogeni

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 5/3 \\ 0 & 5 & 0 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

i, per tant, la seva dimensió és el nombre de graus de llibertat del sistema i una base és la de les solucions que apareixen a la forma paramètrica de la solució general. Utilitzant el mètode de Gauss, el sistema és equivalent al de matriu ampliada

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 5/3 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 5 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 5/3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

és a dir, al sistema d'equacions $x + y + (5/3)z = 0$, $y = 0$, que té 1 grau de llibertat, amb z com a variable lliure. La solució general del sistema és $x = -(5/3)z$, $y = 0$. Per tant, el nucli és de dimensió 1 i una base és la formada pel vector $\begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$.

(c) Sigui B_c la base canònica i B la nova base. La matriu de f_0 en la base B és

$$M_B^B(f_0) = P_B^{B_c} \cdot M_{B_c}^{B_c}(f_0) \cdot P_{B_c}^B$$

Ara

$$P_{B_c}^B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

i $P_B^{B_c} = (P_{B_c}^B)^{-1}$. Calculem la inversa utilitzant el mètode de Gauss-Jordan:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Per tant

$$P_B^{B_c} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

i substituint a la fórmula anterior queda que

$$M_B^B(f_0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(d) De l'expressió de la matriu de f_0 en base canònica queda clar que el vector $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ és propi de valor propi 5. Per tal de saber si diagonalitza, calculem el polinomi característic.

$$c(x) = \begin{vmatrix} 1-x & 1 & 0 \\ 0 & 5-x & 0 \\ 3 & 1 & 5-x \end{vmatrix} = (5-x)^2(1-x)$$

Per tant, f_0 té dos valors propis $\lambda_1 = 1$, de multiplicitat algebraica (i, per tant, també geomètrica) igual a 1, i $\lambda_2 = 5$, de multiplicitat algebraica 2. f_0 diagonalitzarà si i només si la multiplicitat geomètrica de 5 també és 2. Ara, aquesta és la dimensió de l'espai de solucions del sistema d'equacions lineals homogeni

$$\begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

el nombre de graus de llibertat del qual és 1. Per tant, la multiplicitat geomètrica de $\lambda_2 = 5$ és 1 i l'endomorfisme no diagonalitza.