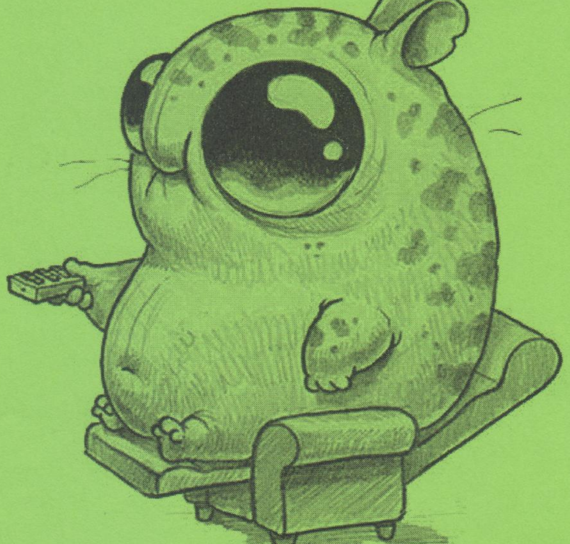
Àlgebra Lineal

Matrius, Sistemes i Determinants



Departament d'Àlgebra
Acadèmia CEUS
www.academiaceus.cat

1 Definicions (matrius)

Una **matriu** és una ordenació d'elements en una graella rectangular de m files i n columnes:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Anomenarem "element a_{ij}" a aquell element de la matriu que es troba a la fila i, columna j.

2 Operacions amb matrius

2.1 Suma

Dues matrius només les podem sumar si tenen el mateix nombre de files i de columnes. Siguin dues matrius $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, aleshores la suma es defineix com:

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

2.2 Producte per un escalar

Si volem multiplicar un escalar λ per una matriu, multiplicarem tots els elements de la matriu A per λ:

$$\lambda \cdot A = \lambda \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$$

2.3 Producte de matrius

Sigui A una matriu $m \times n$ i B una matriu $n \times p$ (si el nombre de files de B, n, no és el nombre de columnes d'A no existeix el producte $A \cdot B$), el seu producte donarà una matriu $C = A \cdot B$ que és d'ordre $m \times p$, on l'element situat a la fila i columna j de C és resultat de multiplicar la fila i-èssima d'A per la columna j-èssima de B:

$$c_{ij} = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$$

Exemple:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -5 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -1 \\ -2 & -6 & 12 \\ -3 & 8 & 1 \end{pmatrix}$$

Per blocs (submatrius):

$$\left(\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline B & D \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|c} E & G \\ \hline F & H \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} AE+CF & AG+CH \\ \hline BE+DF & BG+DH \end{array}\right)$$

Conceptes bàsics que cal tenir en compte:

- El producte de matrius **no és commutatiu**. És a dir: no és el mateix (en general) AB que BA.
- $A^2 = 0$ no implica que $A = 0$. En general, $AB = 0$ no implica que $A = 0$ o $B = 0$.
- $AC = BC$ no implica que $A = B$ (no podem tatxar la C!).

2.4 Transposada

Si A és una matriu $m \times n$, la seva transposada A^t és de dimensió $n \times m$ i equival a canviar les files per les columnes.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -5 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad A^t = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

Propietats:
- $(A+B)^t = A^t + B^t$
- $(A^t)^t = A$
- $(kA)^t = kA^t$
- $(AB)^t = B^t A^t$
- $(ABCDE)^t = E^t D^t C^t B^t A^t$

3 Rang d'una matriu

El rang d'una matriu $A \in M_{m\times n}$ és un número que es pot interpretar de diverses maneres:

- És el nombre màxim de columnes L.I. d'A
- És el nombre màxim de files L.I. d'A
- És l'ordre màxim dels menors d'A diferents de 0

Per calcular el rang esgraonarem la matriu A a partir d'operacions de fila i comptarem les files no nul·les.

Propietats:

- rang(A^t) =rang(A)
- rang$A$ $\leq$min$\{m, n\}$
- rang$(A \cdot B)$ $\leq$min$\{rang(A), rang(B)\}$
- rang$(A+B) \leq rang(A) + rang(B)$

4 Matrius Quadrades ($m = n$)

4.1 Diagonal d'una matriu quadrada

La diagonal d'una matriu quadrada són els elements a_{ij} tals que $i = j$.

4.2 Traça d'una matriu quadrada

Anomenem traça d'una matriu quadrada a la suma dels elements de la diagonal: tr$(A) = \sum a_{ii}$
Propietats:

- $tr(A+B) = tr(A) + tr(B)$
- $tr(\lambda A) = \lambda tr(A)$
- $tr(AB) = tr(BA)$
- $tr(A^t) = tr(A)$

4.3 Tipus

Triangular:

Triangular superior: És la matriu que compleix que $a_{ij} = 0$ per a tot $i > j$. És a dir, tots els elements de sota de la diagonal són nuls.

$$\begin{pmatrix} 1 & 9 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Triangular inferior: És la matriu que compleix que $a_{ij} = 0$ per a tot $i < j$. És a dir, tots els elements de sobre de la diagonal són nuls.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Diagonal: És la matriu que compleix que $a_{ij} = 0$ per a tot $i \neq j$. És a dir, tots els elements de fora de la diagonal són nuls. És una matriu triangular superior i a la vegada triangular inferior.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}$$

Simètrica: Una matriu A és simètrica si $A = A^t$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 9 & 0 \\ 9 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Antisimètrica: Una matriu A és antisimètrica si $A = -A^t$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 9 & 0 \\ -9 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Nul·la: És la matriu que té tots els coeficients 0.
Identitat: És una matriu diagonal amb 1 a la diagonal. Verifica $A \cdot Id = Id \cdot A = A$.
Nilpotent: A és nilpotent si existeix una potència p tal que $A^p = 0$.
Idempotent: A és idempotent si existeix una potència p tal que $A^p = Id$.

4.4 Inversa d'una matriu quadrada

La matriu inversa A^{-1} d'una certa matriu quadrada A (que només existeix quan és de rang màxim) és aquella matriu tal que $A \cdot A^{-1} = Id$. En aquest cas també es verifica $A^{-1} \cdot A = Id$.

Propietats:

- $(A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$
- $(A^{-1})^{-1} = A$
- $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$ $(k \neq 0)$
- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
- $(ABCDE)^{-1} = E^{-1}D^{-1}C^{-1}B^{-1}A^{-1}$

Hi ha dos mètodes per trobar la matriu inversa:

1) Resolent el sistema d'equacions $AX = Id$.

2) Mitjançant la fórmula $A^{-1} = \frac{1}{det(A)}(adj(A))^t$.

5 Sistemes d'Equacions

Per resoldre un sistema d'equacions lineals cal trobar la matriu X tal que $AX = B$, on A és $m \times n$, X és $n \times p$ i B és $m \times p$.

5.1 Teorema de Rouché-Frobenius

Aquest teorema classifica els sistemes tipus $AX = B$ en funció del rang d'A i el rang de la matriu ampliada $(A|B)$.
• Si rang(A) <rang$(A|B)$: **Sistema Incompatible (S.I.)**. No té solució.
• Si rang(A) =rang$(A|B)$: **Sistema Compatible**. Té solució. Cal distingir dos casos:
 1) rang(A) =n° de columnes d'A: **Sistema Compatible Determinat (S.C.D.)**. Té una única solució.
 2) rang(A) <n° de columnes d'A: **Sistema Compatible Indeterminat (S.C.I.)**. Té infinites solucions.

5.2 Sistemes Homogenis

Si $B = 0$ diem que el sistema és **Homogeni** i en aquest cas sempre és compatible. I encara més: el conjunt de solucions S és un subespai vectorial (ho veurem al següent tema) de $M_{n\times p}(\mathbb{R})$ amb dimensió

$$dimS = p(n - rang(A))$$

5.3 Com solucionar l'equació $AX = B$?

El primer que cal fer és esbrinar quines són les dimensions de la matriu X que estem buscant. Després esgraonem la matriu $(A|B)$ per tal de veure els rangs d'A i $(A|B)$ i saber pel teorema anterior quin tipus de sistema és: S.I., S.C.D. o S.C.I. Si el sistema és compatible sovint caldrà trobar les solucions (siguin úniques o no). Vegem un exemple de cada cas:

Sistema Incompatible S.I.. Aquest és el més fàcil. Un cop haguem vist que és incompatible ja hem acabat. Diem que no té solució i ja està. Suposem que el sistema $AX = B$ és

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Llavors, esgraonant la matriu ampliada $(A|B)$,

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ -f_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & -3 & 3 & -2 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ +3f_2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 9 & -8 \end{array}\right)$$

Com que $2 = rang(A) \neq rang(A|B) = 3$, el sistema és incompatible.

Sistema Compatible Determinat S.C.D.. Suposem que el sistema $AX = B$ és

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

Llavors, esgraonant la matriu ampliada $(A|B)$,

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 3 & -2 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ +f_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ -f_2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Com que $2 = rang(A) = rang(A|B) = 2 =$ n° de columnes d'A, el sistema és compatible determinat. Per trobar la solució única, fem operacions de fila per intentar que a dalt a l'esquerra quedi una submatriu Identitat. En aquest cas,

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} -2f_2 \\ \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -5 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

i així,

$$X = \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Sistema Compatible Indeterminat S.C.I.. Suposem que el sistema $AX = B$ és

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

Llavors, esgraonant la matriu ampliada $(A|B)$,

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 0 & 3 & -2 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ +f_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -2 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ -f_2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Com que $2 = rang(A) = rang(A|B) = 2 \neq$ n° de columnes d'A, el sistema és compatible indeterminat. Per trobar les solucions, fem operacions de fila per netejar al màxim la matriu A. En aquest cas,

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} -2f_2 \\ \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & -1 & -5 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Si ara tornem a muntar el sistema,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ 2 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

aquest té les mateixes solucions que l'original. Així, si anomenem

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \\ x_5 & x_6 \end{pmatrix}$$

tenim

$$\begin{cases} x_1 = -5 + x_5 \\ x_2 = 4 + x_6 \\ x_3 = 2 - x_5 \\ x_4 = -2 - x_6 \end{cases} \quad \forall x_5, x_6 \qquad \Longrightarrow X = \begin{pmatrix} -5 + x_5 & 4 + x_6 \\ 2 - x_5 & -2 - x_6 \\ x_5 & x_6 \end{pmatrix} \quad \forall x_5, x_6$$

Graus de llibertat d'un S.C.I.: Les incògnites secundàries, que han quedat indeterminades a l'exemple anterior (x_5 i x_6) també s'anomenen **graus de llibertat** o **ordre del sistema**.

En general, tindrem sempre

- Nombre d'incògnites principals: $p \cdot rang(A)$
- Nombre d'incògnites secundàries: $p \cdot (n - rang(A))$

5.4 Com solucionar l'equació $XA = B$?

Ha de quedar clar que nosaltres només sabem resoldre equacions del tipus $AX = B$. Per transformar $XA = B$ només caldrà transposar-ho tot: $(XA)^t = A^t X^t = B^t$. Amb això podem calcular X^t esgraonant la matriu $(A^t|B^t)$.
Nota: Com a solució obtindrem X^t, però ens demanen X. No ens oblidem de transposar la matriu solució: $(X^t)^t = X$.

6 Definicions (determinants)

Un **determinant** és un escalar que associem a una matriu quadrada a partir de fer certes operacions. Per exemple,

$$det\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 1 & -2 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix} = \begin{vmatrix}1 & 2 & 0\\ 1 & -2 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{vmatrix} = 5$$

Fixeu-vos en la notació: quan volem expressar el determinant d'una matriu, ho posem **entre barres verticals.**

6.1 Menor

Si tenim una matriu A que és $m \times n$, anomenem **Menor** al determinant d'una submatriu quadrada obtinguda eliminant unes quantes files i columnes. Per exemple, si tenim

$$A = \begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}$$

i eliminem les columnes $3, ..., n$ i les files $3, ..., m$ obtenim la submatriu $A' = \begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$. Anomenarem **Menor** al determinant de A'.

Si A és **quadrada**, ens referirem al "menor de l'element a_{ij}" quan calculem el menor que s'obté d'eliminar la i-èssima fila i la j-èssima columna d'A. El denotarem per m_{ij}.

6.2 Adjunt

Anomenem **Adjunt** de l'element a_{ij} al menor m_{ij} amb el seu signe corresponent. Ho denotarem per A_{ij}, de manera que

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot m_{ij}$$

Una manera de recordar el signe de cada adjunt és amb la següent regla de signes:

$$\begin{pmatrix}+ & - & + & \cdots\\ - & + & - & \cdots\\ + & - & + & \cdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots\end{pmatrix}$$

6.3 Matriu Adjunta

La **Matriu Adjunta** d'una certa matriu quadrada A, és una matriu (que anomenarem $adj(A)$) on a cada posició se li fa correspondre el seu adjunt, és a dir, el seu menor amb el signe corresponent. Per exemple,

$$A = \begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 1 & -2 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad adj(A) = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & -1 & 1\\ 2 & -1 & -4\end{pmatrix}$$

7 Propietats de determinants

1.- Només podem calcular el determinant d'una matriu **quadrada**
2.- $det(AB) = det(A)det(B)$
3.- $det(AB) = det(BA)$
4.- $det(A + B) \neq det(A) + det(B)$
5.- $det(A^t) = det(A)$
6.- $det(A^{-1}) = \frac{1}{det(A)}$

7.- $det(Id) = 1$
8.- $det(-Id) = (-1)^n$
9.- $det(\lambda A) = \lambda^n det(A)$
10.- Si A té 2 files (o columnes) iguals, $det(A) = 0$
11.- Si A té 1 fila (o columna) nul·la, $det(A) = 0$
12.- Si A té 1 fila (o columna) que és combinació lineal de les altres files (o columnes), $det(A) = 0$
13.- Si a una fila (o columna) li sumem una combinació de la resta de files (o de columnes) el determinant no varia.
14.- Si permutem dues files (o dues columnes) el determinant canvia de signe.
15.- Si tota una fila (o columna) està multiplicada per λ, podem treure λ fora del determinant.
16.- Si posem una fila (o columna) com a suma de dues, llavors el determinant el podem posar com a suma de dos. Exemple:

$$\begin{vmatrix} 1+2 & 3-3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

17.- El determinant d'una matriu triangular és el producte dels elements de la diagonal.
18.- El determinant d'una matriu triangular en blocs és el producte del determinant de cada bloc situat a la diagonal.

8 Càlcul de determinants

8.1 Sarrus

Per calcular un determinant 2×2 o 3×3 podem aplicar la següent regla:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \qquad \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + dhc + bfg - gec - hfa - dbi$$

8.2 Desenvolupament per una fila o una columna

Podem calcular el determinant d'una matriu A $n \times n$ desenvolupant per una fila (o per una columna), és a dir, sumant els elements de la fila (o columna) multiplicats pels seus corresponents adjunts:
Si volem desenvolupar per la fila i:

$$det(A) = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}$$

on a_{ij} són els elements de la fila i, i A_{ij} els adjunts corresponents.
Si volem desenvolupar per la columna j:

$$det(A) = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}$$

Exemple: Desenvolupant per la segona fila,

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + (-2) \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 5$$

8.3 Gauss

Fent operacions de fila esglaonem la matriu original A fins obtenir una matriu T que sempre serà **triangular superior** (ja que A és quadrada). Com que coneixem el $det(T)$ i com afecten les operacions de fila efectuades, podem calcular sense problemes $det(A)$.

8.4 Mètode Combinat

Per resoldre determinants per a matrius grans, el millor és:
- per Gauss (operacions de fila i/o de columna) intentem que apareixin el màxim nombre de zeros possible (i si pot ser, triangular, i resolem directament).
- desenvolupem per la fila (o la columna) amb més zeros.

9 Aplicacions de determinants

9.1 Per trobar rangs de matrius

El rang d'una matriu és l'ordre més gran dels menors diferents de zero. És a dir, trobem si trobem un menor d'ordre r que és no nul, el rang de la matriu serà més gran o igual que r. Exemple:

$$rang \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

ja que el menor d'ordre 3 (que és el determinant de la matriu sencera) és nul però hi ha menors d'ordre 2 no nuls, per exemple $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$.

9.2 Per invertir matrius

Podem calcular matrius inverses a partir de la fórmula $A^{-1} = \frac{1}{det(A)}(adj(A))^t$

En particular, per a una matriu 2×2 la fórmula queda de la següent manera: $A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

9.3 Regla de Cramer

La regla de Cramer dóna un mètode per trobar les solucions d'un sistema d'equacions lineals compatible determinat, amb matriu principal quadrada. L'avantatge d'aquest mètode és que dóna el resultat de cada variable independentment del resultat de les altres.
Considerem el sistema d'equacions lineals $AX = b$ (A quadrada i inversible, i X, b columnes). Aleshores, les solucions d'aquest sistema vénen donades per:

$$x_i = \frac{det(A_i)}{det(A)}$$

on A_i és la matriu que s'obté de substituir la columna i de la matriu A per la columna b. Exemple:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 9 \\ 3x + y + 2z = 2 \\ 2x + z = 6 \end{cases}$$

Les solucions del sistema són:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 9 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 6 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{det(A)} = \frac{35}{5} = 7 \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 9 & -1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix}}{det(A)} = \frac{-15}{5} = -3 \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 9 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 6 \end{vmatrix}}{det(A)} = \frac{-40}{5} = 8$$