Reavaluació de Matemàtiques 1 - Febrer 2019
GRAFS 3: Arbres

1. Demostreu que un graf connex d'ordre n i mida $n-1$ és un arbre.

2. Doneu almenys 2 propietats que tinguin tots els arbres, però que no siguin equivalents a ser arbre.

3. Sigui G un graf que té exactament un vèrtex de grau 1. Demostreu que G té almenys un cicle.

4. Sigui G un arbre d'ordre n que només té vèrtexs de grau 1 i grau 5. Doneu el nombre de vèrtexs de G de grau 5 i el nombre de fulles en funció de n.

5. (F1-QP14) Per a $n \geq 4$, determineu quants arbres (gras connexos i acíclics) hi ha d'ordre n i diàmetre $n-2$, llevat d'isomorfismes.

6. (P-QP11) Sigui G un graf connex d'ordre $n \geq 3$ tal que tots els vèrtexs tenen grau ≤ 3. Sigui k el número de vèrtexs de grau 3. Proveu que, si G té exactament un vèrtex de grau 2 i $k+2$ vèrtexs de grau 1, aleshores G és un arbre.

7. (F1-QP14) Determineu quants arbres hi ha d'ordre 10 i diàmetre 8 llevat d'isomorfismes. PEr a $n \geq 4$, determineu quants arbres hi ha d'ordre n i diàmetre $n-2$, llevat d'isomorfismes.

8. (F1-QP14) Siguin $T_1 = (V_1, A_1)$ i $T_2 = (V_2, A_2)$ dos arbres qualssevol. Fixem dos vèrtexs diferents x_1 i y_1 de T_1, i un vèrtex z_2 de T_2. Definim el graf $G = (V, A)$ per

$$\begin{aligned} V &= V_1 \cup V_2 \\ A &= A_1 \cup A_2 \cup \{x_1 z_2, y_1 z_2\}. \end{aligned}$$

   Quants cicles té G?

9. (F1-QT10) Diem que un graf és *singular* si té ordre n, mida $n-1$ i té exactament dos components connexos.

   (a) Demostreu que si G és singular, un component és un arbre i l'altre no ho és.

   (b) Doneu tots els grafs singulars no isomorfs d'ordre com a molt 5.

   (c) Sigui G un graf singular d'ordre n amb exactament $n-2$ vèrtexs de grau 2. Trobeu la seqüència de graus de G i descriviu el graf G.

10. (P-QT11) Sigui G un graf amb conjunt de vèrtexs $[8]$ i amb 10 arestes. Quan apliquem l'algorisme BFS començant pel vèrtex 1, trobem que l'algorisme passa pels vèrtexs en l'ordre $1, 4, 5, 2, 8, 7, 3, 6$, i que el vèrtex 1 té excentricitat 3. Doneu dos grafs amb cicles no isomorfs als que els hi passi això.

11. (P-QT11) Sigui T un arbre d'ordre $n \geq 5$. Proveu que T^c no és un arbre.

12. (P-QT14) Sigui G un graf connex d'ordre $n \geq 3$ i mida $m = n$.

    (a) Dibuixeu, llevat d'isomorfisme, tots els possibles grafs G si $n = 5$.

    (b) Quantes arestes com a molt es poden suprimir de G sense desconnectar-lo?

    (c) Proveu que si G és bipartit aleshores té un nombre parell d'arbres generadors.

    (d) Identifiqueu quins d'entre tots els possibles grafs G són hamiltonians per a $n \geq 3$ qualsevol.

13. (F1-QP15) Sigui $G = (V, A)$ un graf qualsevol d'ordre $n \geq 2$ i mida $m \geq 0$, amb $V = \{u_1, \ldots, u_n\}$. Considereu el graf $G^* = (V^*, A^*)$ amb

$$V^* = \{u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_n\},$$

$$A^* = A \cup \{u_i v_j \,:\, 1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq n\}.$$

Proveu que G^* té un arbre generador amb exactament $2n-2$ fulles i un arbre generador amb exactament 2 fulles.

14. Doneu la seqüència de Prüfer de l'arbre $T = ([8], \{12, 13, 14, 45, 46, 48, 47\})$.

15. Doneu l'arbre que té per seqüència de Prüfer $(3, 2, 3, 2, 8, 5, 3)$.