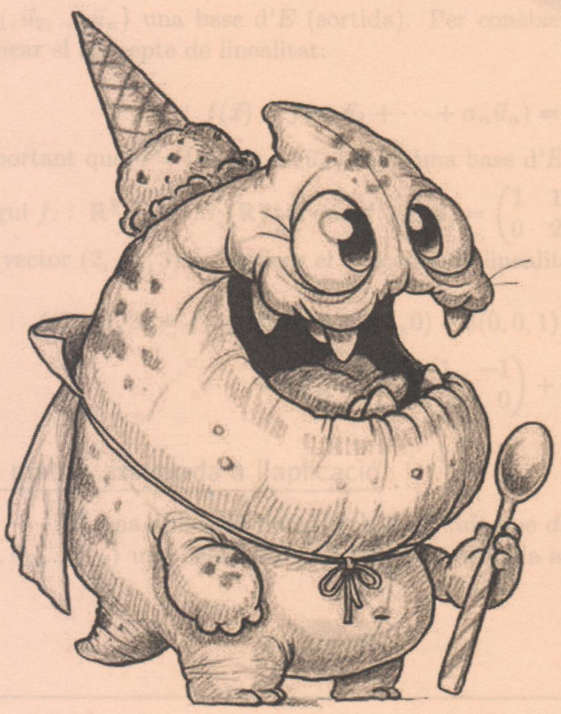
Àlgebra Lineal

Aplicacions Lineals

1.- Introducció.
2.- Formes de definir una Aplicació Lineal.
3.- Imatge i Nucli.
4.- Classificació.
5.- Canvi de Base.
6.- Composició i Aplicació Inversa.
7.- Subespai Invariant i Aplicació Restringida.



Departament d'Àlgebra
Acadèmia CEUS
www.academiaceus.cat

1 Introducció

Una **aplicació** f és una funció que pren uns vectors d'un espai vectorial E (espai de sortida) i els transforma en uns altres d'un altre espai vectorial F (espai d'arribada). En aquest tema treballarem amb aquelles aplicacions que siguin **lineals**, o sigui que hauran de verificar el següent:

$$\forall\lambda\in\mathbb{K},\ \forall\vec{u},\vec{v}\in E,\qquad f(\vec{u}+\vec{v})=f(\vec{u})+f(\vec{v})\qquad ;\qquad f(\lambda\vec{u})=\lambda f(\vec{u})$$

1.1 Exemples d'aplicacions lineals

espai de sortida

- $f(x,y,z)=\begin{pmatrix}x+y & x-y\\ z & 2x+z\end{pmatrix}$ espai d'arribada
- $f\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=(a+2b)+(a+b+c+d)t+(2c-d)t^2+(a-2c)t^3$
- $f(a+bt+ct^2)=(2a+b+c,a+b,a-3c)$

Les següents aplicacions **no** són lineals:
- $f(x,y)=x\cdot y$
- $f(x,y,z)=(x+1,y-2,x+y+z)$

2 Formes de definir una aplicació lineal

2.1 Per l'expressió (o imatge d'un vector genèric)

Acabem de veure uns exemples d'aquesta manera de definir una aplicació. Per trobar la imatge de qualsevol vector, simplement hem de substituir els paràmetres del vector genèric de sortida i obtindrem un vector de l'espai d'arribada.

▷*Exemple*: Sigui $f\ :\ \mathbb{R}^3\longrightarrow M_2(\mathbb{R})$ definida per $f(x,y,z)=\begin{pmatrix}x+y & x-y\\ z & 2x+z\end{pmatrix}$.

Per saber la imatge del vector $(2,-1,3)$ només cal fer:

$$f(2,-1,3)=\begin{pmatrix}2-1 & 2+1\\ 3 & 4+3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 3 & 7\end{pmatrix}$$

2.2 Per la imatge d'una base de l'espai de sortida E

Sigui $u=\{\vec{u}_1,\vec{u}_2,...,\vec{u}_n\}$ una base d'E (sortida). Per conèixer la imatge d'un vector $\vec{x}=\alpha_1\vec{u}_1+\alpha_2\vec{u}_2+\cdots+\alpha_n\vec{u}_n$, només cal aplicar el concepte de linealitat:

$$f(\vec{x})=f(\alpha_1\vec{u}_1+\cdots+\alpha_n\vec{u}_n)=\alpha_1 f(\vec{u}_1)+\cdots+\alpha_n f(\vec{u}_n)$$

▷*Nota*: és important que $u=\{\vec{u}_1,\vec{u}_2,...,\vec{u}_n\}$ sigui una base d'E, perquè si no l'aplicació f no queda ben definida.

▷*Exemple*: Sigui $f\ :\ \mathbb{R}^3\longrightarrow M_2(\mathbb{R})$ tal que $f(1,0,0)=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}$, $f(0,1,0)=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $f(0,0,1)=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$. Per saber la imatge del vector $(2,-1,3)$ cal aplicar el concepte de linealitat:

$$f(2,-1,3)=f(2(1,0,0)-1(0,1,0)+3(0,0,1))=2f(1,0,0)-f(0,1,0)+3f(0,0,1)=$$

$$=2\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 3 & 7\end{pmatrix}$$

2.3 Per la matriu associada a l'aplicació

Sigui $f\ :\ E\longrightarrow F$ una aplicació lineal amb E,F tals que $dim(E)=n$ i $dim(F)=m$, $u=\{\vec{u}_1,\vec{u}_2,...,\vec{u}_n\}$ una base d'E i $v=\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,...,\vec{v}_m\}$ una base de F. La matriu associada a f en la base u de sortida i v d'arribada és:

$$M_{uv}f = \begin{pmatrix} \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ f(\vec{u}_1)_v & f(\vec{u}_2)_v & \cdots & f(\vec{u}_n)_v \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{pmatrix}$$

O sigui, que només cal posar les imatges dels vectors de la base de sortida en funció de la base d'arribada, i per **columnes**. Fixem-nos que les dimensions d'aquesta matriu depenen de les dimensions d'E i F:

n° de columnes de $M_{uv}f$ = dim E
n° de files de $M_{uv}f$ = dim F

$\triangleright$*Exemple*: Sigui l'aplicació f definida per: $f(1,0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $f(0,1,0) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $f(0,0,1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Per trobar la matriu associada a l'aplicació f en les bases canòniques de $\mathbb{R}^3$ (e) i $M_2(\mathbb{R})$ (e') cal posar les imatges de la base canònica de $\mathbb{R}^3$ en columna:

$$M_{ee'}f = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

I ara, per saber la imatge del vector $(2,-1,3)$ només cal multiplicar aquesta matriu pel vector en columna i a la dreta:

$$f(2,-1,3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} \implies f(2,-1,3) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$$

$\triangleright$*Nota Important*: Una matriu associada ho està en dues bases diferents (en general): la de sortida i la d'arribada. És a dir, que per saber la imatge d'un vector $\vec{x}$ qualsevol mitjançant la matriu $M_{uv}f$ cal obtenir $\vec{x}_u$, i després mutiplicar-lo per la matriu. El resultat serà el vector $f(\vec{x})$ expressat en coordenades en la base v.

$$\begin{pmatrix} M_{uv}f \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vec{x}_u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(\vec{x})_v \end{pmatrix}$$

3 Imatge i Nucli

nuc(f) Im(f)
f: E → F

3.1 Imatge

El subespai vectorial **IMATGE de** f (Im f) és el conjunt de vectors de l'espai d'arribada que són imatge d'algun vector:

$$\text{Im}f = \{\vec{y} \in F \ / \ \exists \vec{x} \in E \ , \ f(\vec{x}) = \vec{y}\}$$

Hem vist anteriorment que la imatge de qualsevol vector és sempre una combinació lineal de $\{f(\vec{u}_1), ..., f(\vec{u}_n)\}$ essent $u = \{\vec{u}_1, ..., \vec{u}_n\}$ una base d'E. Així doncs podem afirmar que Im $f = [f(\vec{u}_1), ..., f(\vec{u}_n)]$.

La dimensió d'Im f serà doncs, el nombre de columnes L.I. que hi ha a la matriu associada a f, és a dir, el seu **rang**. A més, aquesta dimensió és independent de les bases en les que tinguem aquesta matriu associada. Així, la dimensió de Im f és una propietat inherent a f, i l'anomenarem **rang** f.

3.2 Nucli

El subespai vectorial **NUCLI de** f (Nuc f o bé Ker f) és el conjunt de vectors de l'espai de sortida que tenen imatge nul·la:

$$\text{Nuc}f = \{\vec{x} \in E \ / \ f(\vec{x}) = \vec{0}\}$$

O sigui, que és el conjunt de les "arrels" de f.
Per calcular el Nucli només cal que resolguem el sistema d'equacions homogeni $f(\vec{x}) = \vec{0}$ en format matricial.

3.3 Nucli a simple vista

De vegades ens interessarà trobar vectors que siguin del Nucli sense haver de resoldre el sistema d'equacions. Per fer això cal trobar la combinació lineal de les columnes de la matriu associada a f que ens permet obtenir una columna de zeros.

▷*Exemple*: El vector $(2,3,0)$ és del Nucli de f amb matriu associada $M_{ee}f = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -3 & 2 & -2 \\ 6 & -4 & 0 \end{pmatrix}$ ja que

$$f(2,3,0) = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -3 & 2 & -2 \\ 6 & -4 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3.4 Teorema Fonamental de Dimensions (T.F.D.)

Si $f : E \longrightarrow F$ i E és de dimensió finita, sempre es verifica que

$$\boxed{\dim E = \dim \text{Nuc } f + \dim \text{Im } f}$$

▷*Exemple*: Trobeu una base de la Imatge i una base del Nucli de l'aplicació $f(x,y,z) = (x+y+z, x+y-z, 2z)$ i verifiqueu el T.F.D.

Abans que res, el que farem serà trobar la matriu associada a f en les bases canòniques de $\mathbb{R}^3$:

$$M_{ee}f = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Pel que hem dit abans, $\text{Im } f = [f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), f(\vec{e}_3)] = [(1,1,0),(1,1,0),(1,-1,2)]$ (columnes de la matriu associada).

I per trobar el Nuc f només cal resoldre el següent sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} x+y+z = 0 \\ x+y-z = 0 \\ 2z = 0 \end{cases}$$

i directament, $\text{Nuc } f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x+y+z = x+y-z = 2z = 0\}$.

Per calcular una base de la Imatge treiem els vectors L.D. dels que hem trobat abans: $\text{Im } f = [(1,1,0),(1,-1,2)]$. Així, $\dim \text{Im } f = 2$.
Per calcular una base del Nucli resolem les equacions: $\text{Nuc } f = [(1,-1,0)]$. Així, $\dim \text{Nuc } f = 1$.
Finalment, veiem que es verifica el T.F.D.: $\dim \mathbb{R}^3 = 3 = \dim \text{Nuc } f + \dim \text{Im } f = 1+2$.

$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ Rang $= 2 = \dim(f) \to \text{Im}(f) = \mathbb{R}^2 \to$ exh

TFD $\to \text{Ker}(f) = 3-2 = 1 \to \text{Ker}(f) \neq \{\vec{0}\}$ no inj

4 Classificació d'aplicacions lineals

Sigui $f : E \longrightarrow F$ una aplicació lineal.

Direm que f és **injectiva** quan $\text{Nuc } f = \{\vec{0}\}$. $\text{Ker}(f) = (\vec{0})$
Direm que f és **exhaustiva** quan $\text{Im } f = F$. → espai d'arribada
Direm que f és **bijectiva** quan verifica les dues condicions anteriors.

f és endomorfisme si E=F

5 Canvi de base d'una aplicació lineal

Sabem que la matriu associada a una aplicació f està expressada en dues certes bases (una de sortida i una d'arribada). Per exemple, $M_{uv}f$ només ens servirà per conèixer la imatge de vectors expressats en la base u, i el vector resultant (imatge) estarà expressat en la base v. Però sovint ens caldrà treballar amb altres bases, i per això haurem de fer un Canvi de Base a $M_{uv}f$.

5.1 Matriu de Canvi de base

Una matriu de canvi de base és una matriu que ens serveix per canviar aplicacions lineals i vectors. La nomenclatura, S_{uv}, ens indica que estem passant de la base u a la base v.

Siguin $u = \{\vec{u}_1, ..., \vec{u}_n\}$, $v = \{\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n\}$ dues bases d'E. La **matriu de canvi de base** d'u a v serà

$$S_{uv} = \begin{pmatrix} \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ (\vec{u}_1)_v & (\vec{u}_2)_v & \cdots & (\vec{u}_n)_v \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{pmatrix}$$

És a dir, els vectors de la base u en funció de (en coordenades en) la base v per **columnes**.

▷*Propietat*: Una matriu de canvi de base **SEMPRE és QUADRADA i té INVERSA**. Si volem la matriu de canvi de base de v a u, només cal invertir l'anterior. És a dir, $S_{vu} = S_{uv}^{-1}$.

▷*Exemple*: Sigui $u = \{(2,0,0), (1,1,0), (1,1,2)\}$, $v = \{(1,1,1), (0,1,1), (0,0,1)\}$. Quina és la matriu de canvi de base d'u a e? I de v a e? I de u a v?

Com que els vectors donats estan expressats en base canònica e, directament:

$$S_{ue} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad S_{ve} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Si volem calcular S_{uv} farem servir la fórmula $\boxed{S_{uv} = S_{ev} \cdot S_{ue}}$

▷*Exemple*: Sigui $\vec{w}_u = (1, 1, -1)$. Quines són les seves coordenades en la base canònica e?

$$\vec{w}_e = S_{ue}\vec{w}_u = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

5.2 Circuit de bases

Suposem que $f : E \longrightarrow F$ amb u, a bases d'E i v, b bases de F. Si coneixem la matriu associada $M_{uv}f$, com podem aconseguir la matriu $M_{ab}f$? La fórmula és la següent: $M_{ab}f = S_{vb} \cdot M_{uv}f \cdot S_{au}$. Per recordar-la seguim l'esquema del "circuit de bases":

$$M_{\boxed{a}b} f = S_{vb}\ M_{uv} f\ S_{\boxed{a}u}$$

Seguirem 3 normes molt senzilles:

1) La base de sortida (esquerra) de la matriu de més a la dreta ha de ser a.
2) La base d'arribada (dreta) de la matriu de més a l'esquerra ha de ser b.
3) La resta de bases poden ser qualssevol, només que siguin iguals dues a dues en el circuit.

▷*Nota*: Si fent aquest circuit de bases ens trobem amb una matriu de canvi de base del tipus S_{uu} (amb les dues bases iguals), aquesta matriu és la Identitat, i per tant, la podem ignorar.

ATENCIÓ: Cal no confondre una **matriu de canvi de base** (que sempre és **quadrada i inversible** i designem amb una S) amb la **matriu associada a una aplicació** (que no té perquè ser ni quadrada ni inversible, i designem amb una M). La matriu de canvi de base *no transforma el vector*, sinó que simplement el canvia de base, deixant-lo en el mateix espai vectorial. En canvi, la matriu associada a una aplicació *sí* que transforma un vector en un altre que es pot quedar al mateix espai vectorial o en un altre qualsevol.

▷*Exemple*: Sigui $f(x,y,z) = (2y+z, 2x+5y-3z, x-y+z, -2x)$, $u = \{(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\}$ una base de $\mathbb{R}^3$ i $v = \{(1,0,0,0),(1,1,1,0),(0,1,0,0),(0,0,1,1)\}$ una base de $\mathbb{R}^4$. Quina és la matriu associada $M_{uv}f$?

A partir de les dades que ens donen podem obtenir fàcilment la matriu associada en bases canòniques (e_3 per a $\mathbb{R}^3$ i e_4 per a $\mathbb{R}^4$):

$$M_{e_3e_4}f = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

i llavors, per la fórmula de canvi de base,

$$M_{uv}f = S_{e_4v} \cdot M_{e_3e_4}f \cdot S_{ue_3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 3 \\ -1 & 5 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

6 Composició d'aplicacions i Aplicació Inversa

6.1 Composició d'aplicacions

Sigui $f : E \longrightarrow F$ i $g : F \longrightarrow G$ dues aplicacions lineals. Aleshores $g \cdot f$ és l'aplicació lineal que s'obté d'encadenar f i g, primer aplicant f i després aplicant g (atenció a l'ordre!):

$$\begin{array}{rcccccl} g \cdot f : & E & \longrightarrow & F & \longrightarrow & G \\ & \vec{u} & \longmapsto & f(\vec{u}) & \longmapsto & g(f(\vec{u})) = (g \cdot f)(\vec{u}) \end{array}$$

▷*Nota*: L'espai d'arribada de f ha de ser el mateix que l'espai de sortida de g, perquè si no, $g \cdot f$ no té sentit.

La matriu associada a $g \cdot f$, $M(g \cdot f)$ es troba multiplicant les matrius associades a g i a f, és a dir $M(g \cdot f) = Mg \cdot Mf$. Les bases han de ser tals que verifiquin el *circuit de bases* explicat anteriorment. És a dir,

$$M_{uv}(g \cdot f) = M_{wv}g \cdot M_{uw}f$$

▷*Propietats*:

- $g \cdot f \neq f \cdot g$, és a dir, la composició **no** és commutativa.
- $\text{Nuc } f \subset \text{Nuc } g \cdot f$
- $\text{Im } g \cdot f \subset \text{Im } g$
- $g \cdot f = 0 \iff \text{Im } f \subset \text{Nuc } g$.

6.2 Aplicació Inversa

Si f és una aplicació bijectiva (isomorfisme o automorfisme), llavors existeix la seva aplicació inversa f^{-1}, que és l'aplicació lineal que composada amb f dóna l'aplicació Identitat:

$$f \cdot f^{-1} = f^{-1} \cdot f = Id$$

▷*Nota*: f i f^{-1} sempre commuten.

La matriu associada a f^{-1} la tenim relacionada amb l'associada a f de la següent manera (atenció a com queden les bases):

$$M_{uv}f^{-1} = (M_{vu}f)^{-1}$$

7 Subespai Invariant i Aplicació Restringida

7.1 Imatge i Antiimatge d'un subespai

Donat un cert subespai H de l'espai de sortida E podem definir $f(H)$ (subespai *imatge de* H) com el següent subespai de l'espai d'arribada:

$$f(H) = \{\vec{y} \in F \;/\; \vec{y} = f(\vec{x}),\ \vec{x} \in H\}$$

▷*Exemple pràctic*: Si $H = [(1,0,1),(1,2,3)]$, llavors $f(H) = [f(1,0,1), f(1,2,3)]$.

Donat un cert subespai G de l'espai d'arribada F podem definir $f^{-1}(G)$ (subespai *antiimatge de* G) com el següent subespai de l'espai de sortida:

$$f^{-1}(G) = \{\vec{x} \in E \;/\; f(\vec{x}) \in G\}$$

▷*Exemple pràctic*: Si $G = [(1,0,1),(1,2,3)]$, llavors $f^{-1}(G)$ el trobem seguint el mateix procés de quan passem un subespai de base a equacions, però amb $f(\vec{x})$ enlloc de $\vec{x}$:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & \uparrow \\ 0 & 2 & f(\vec{x}) \\ 1 & 3 & \downarrow \end{array}\right) \Longrightarrow \textit{equacions de } f^{-1}(G)$$

▷*Nota:* $f^{-1}(G)$ existeix SEMPRE, tant si f té inversa com si no. Si f té inversa, podem calcular $f^{-1}(G)$ de forma immediata a partir de $f^{-1}(G) = [f^{-1}(1,0,1), f^{-1}(1,2,3)]$.

7.2 Subespai Invariant

Sigui $f : E \longrightarrow E$ un **endomorfisme** i $G \subset E$ un subespai vectorial amb $\{\vec{u}_1, ..., \vec{u}_r\}$ una base de G. Aleshores

$$G \text{ és un } \textbf{subespai invariant per } f \iff f(G) \subset G \iff f(\vec{u}_i) \in G,\ \forall i = 1, ..., r$$

▷*Nota:* Fixem-nos que si G és invariant per f, les imatges dels vectors que estaven a G segueixen estant dins de G, però no hi ha cap condició sobre les imatges dels vectors que **no** estaven a G. Aquestes poden pertànyer a G o no.

▷*Exemple*: Sigui $f(x,y,z) = (3x+y+z, x+2y+z, -3x-2y-z)$ i $G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;/\; x+y+z = 0\}$. En aquest cas G és invariant per f?

El que fem primer és calcular una base de G. Per exemple, $\{(1,-1,0),(1,0,-1)\}$. Tot seguit, mirem si les imatges d'aquests vectors pertanyen o no a G:

$$f(1,-1,0) = (2,-1,-1) = (1,-1,0) + (1,0,-1) \in G. \text{ Ok!}$$
$$f(1,0,-1) = (2,0,-2) = 2(1,0,-1) \in G. \text{ Ok!}$$

Per tant, G és invariant per f.

▷*Propietat:* Si G i H són invariants per f, llavors $G+H$ i $G \cap H$ també ho són.

▷*Propietat:* Tant $Im(f)$ com $Ker(f)$ sempre són subespais invariants.

7.3 Aplicació Restringida

Sigui f un endomorfisme definit en E i G un subespai invariant per f. Podem construir una aplicació $f_{|G}$ que enlloc de ser un endomorfisme en E sigui un endomorfisme en G. És a dir, "retallem" l'aplicació original i només ens fixem en les imatges dels vectors de G.

$$f_{|G} : G \longrightarrow G$$

L'aplicació segueix fent el mateix, és a dir $f_{|G}(\vec{u}) = f(\vec{u}),\ \forall \vec{u} \in G$. L'única diferència és que $f_{|G}$ es *restringeix* a vectors de G, de manera que no té sentit fer imatges de vectors $\vec{u} \notin G$. La matriu associada a l'aplicació restringida es troba exactament igual que la d'una aplicació lineal qualsevol. Cal buscar bases de G i posar les imatges dels vectors d'una en funció de l'altra.

▷*Nota*: La matriu associada a l'aplicació restringida segueix essent quadrada, però ara té tantes files i columnes com la dimensió de G (és més "petita" perquè està "retallada").

▷*Exemple*: Sigui $f(x,y,z) = (3x+y+z, x+2y+z, -3x-2y-z)$ i $G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x+y+z=0\}$. Trobeu $M_{uu}f_{|G}$ on $u = \{(1,-1,0),(1,0,-1)\}$.

Busquem les imatges dels vectors de la base u i les posem en funció de la base u:

$$f(1,-1,0) = (2,-1,-1) = 1(1,-1,0) + 1(1,0,-1) = (1,1)_u$$
$$f(1,0,-1) = (2,0,-2) = 2(1,0,-1) = (0,2)_u$$

Per tant,

$$M_u f_{|G} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

7.4 Superpropietat

SUPERPROPIETAT #1

$$\left\{ \begin{array}{c} u = \{\vec{u}_1, ..., \vec{u}_r\} \text{ és base de } F \\ v = \{\vec{v}_1, ..., \vec{v}_s\} \text{ és base de } G \\ w = \{\vec{u}_1, ..., \vec{u}_r, \vec{v}_1, ..., \vec{v}_s\} \text{ és base d'} E \\ F \text{ i } G \text{ són INVARIANTS i COMPLEMENTARIS} \end{array} \right\} \Longrightarrow M_w f = \begin{pmatrix} \boxed{M_u f_{|F}} & 0 \\ 0 & \boxed{M_v f_{|G}} \end{pmatrix}$$