TEOREMES I COROL·LARIS

M1: ALGEBRA LINEAL

MATRIUS EQUIVALENTS

Teorema: Si a una matriu A li apliquem un número finit de transformacions elementals per files, obtenim una matriu B. Aquestes dues matrius A i B es diu que són equivalents.

MATRIUS ESGLAONADES

Teorema: Seguint el cas anterior, el **rang** de la matriu A és equivalent al nombre de files NO NUL·LES de la matriu B. (B = qualsevol matriu que es pugui aconseguir aplicant trans. elementals per files)

MATRIU INVERSA

Corol·lari: Suposant que A és quadrada tamany nxn, A serà invertible si, i només si, rang(A) = n.

Rang(A) = n és equivalent a dir rang màxim o diagonal diferent de 0.

SISTEMES: ROUCHÉ-FROBENIUS

Teorema: Sistema d'equacions lineals amb matriu associada A (només valors que multipliquen a les variables), i matriu ampliada (A|b) (anterior + columna a la dreta amb els **termes independents**).

Rang (A) = r
Rang (A|b) = r'

Si r < r' => SISTEMA INCOMPATIBLE (SI, no té solució)
Si r = r' = n => SISTEMA COMPATIBLE DETERMINAT (SCD, solució única)
Si r = r' < n => SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINAT (SCI, moltes solucions amb n-r "graus de llibertat")

Rang del SISTEMA D'EQUACIONS = Rang (A)

SISTEMES HOMOGENIS

Un sistema d'equacions lineals és homogeni si tots els termes independents són iguals a 0.

Important: Un sistema homogeni sempre és compatible (ja que tenim la solució trivial)

Corol·lari: Sigui A la matriu associada a un sistema homogeni en n variables, sigui r el rang d'A. Aleshores:

- si $r = n$, el sistema és compatible DETERMINAT i l'única solució és la trivial
- si $r < n$, el sistema és compatible INDETERMINAT i té alguna solució diferent de la trivial

DETERMINANTS I TRANSFORMACIONS ELEMENTALS

Corol·lari: Si dues matrius A i M són matrius equivalents aleshores, $\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow \det(M) \neq 0$

CARACTERITZACIÓ MATRIUS INVERTIBLES

Teorema: Una matriu A és invertible si, i només si, $\det(A) \neq 0$.

Corol·lari: Una matriu A té $\text{rang}(A) = n$ si, i només si, $\det(A) \neq 0$.

Teorema: Una matriu A té $\text{rang}(A) = r$ si, i només si, el menor d'A més gran que tingui determinant no nul és $r \times r$.

Anotació: sent la matriu $n \times n$, i el menor més gran amb determinant no nul $r \times r$, amb $r = n$, el rang serà n, ja que el determinant de la matriu sencera és diferent de 0, com diu el primer teorema.

INDEPENDÈNCIA LINEAL

Tenim un conjunt de vectors S:

- Si 0_E pertany a S, els vector de S son LD (amb el vector 0_E i un altre, podem fer tots els vector de S)
- Si els vectors de S són LI, el vector 0_E no pertany a S
- Si els vectors de S són LI, tot subconjunt de S serà LI
- Si els vectors de S són LD, tot conjunt que inclogui al conjunt S, serà LD

Teorema: Si els vectors de S són LD, i el vector v és combinació lineal dels altres, aleshores els S-v genera el mateix espai vectorial que S.

CARACTERITZACIONS INDEPENDÈNCIA LINEAL

Teorema: Un conjunt de vectors és LD si, i només si, hi ha (com a mínim) un vector a S que és combinació lineal dels altres.

Corol·lari: Sigui v un vector de E i S un conjunt de vectors LI de E, llavors, S + v és LI si, i només si, v no és combinació lineal de S. (Per afegir un vector a un conjunt LI i que segueixi sent LI, el vector no pot ser generat pel conjunt inicial)

APLICACIONS

Ker(f) = nucli de f, Im(f) = Imatge de f, M = matriu associada a f

Teorema: dim(E) = dim(Ker(f)) + dim(Im(f))

Caracteritzacions

- f és injectiva si, i només si, Ker(f) = $\{0_E\}$ ⇔ rang(M) = dim(E)
- f és exhaustiva si, i només si, dim(Im(f)) = dim(F) ⇔ rang(M) = dim(F)
- f és un isomorfisme (bijectiva) si, i només si, rang(M) = dim(E) = dim(F)
- Si E i F tenen la mateixa dimensió, llavors f és un isomorfisme ⇔ f és injectiva ⇔ f és exhaustiva

VALORS I VECTORS PROPIS

Teorema: L'endomorfisme $f : E \to E$ diagonalitza si i només si hi ha alguna base d'E formada per vectors propis

Teorema: Els valors propis d'f són les arrels del polinomi característic. La multiplicitat algebraica d'un valor propi λ és la multiplicitat de λ com a arrel de $p_f(x)$ i es denota m_λ. L'equació $p_f(x) = 0$ s'anomena equació característica

Teorema: El polinomi característic no depèn de la base en la que calculem la matriu associada M

ENDOMORFISME DIAGONALITZABLE

Teorema: L'endomorfisme $f : E \to E$ és diagonalitzable si, i només si, té n valors propis (comptant multiplicitats) i per a cada valor propi les multiplicitats algebraica i geomètrica coincideixen.

Corol·lari: Si f té n valors propis diferents, aleshores és diagonalitzable.