1. (2 punts) Siguin E i F dos espais vectorials reals i sigui $f : E \longrightarrow F$ una aplicació.
   (a) Digueu què ha de satisfer f per tal que sigui una aplicació lineal.
   (b) Proveu que si S és subespai de E i f és lineal, aleshores $f(S)$ és un subespai de F.

Solució.

(a) f és lineal si preserva la suma i el producte per escalars, i.e. si compleix les dues condicions següents:

(i) Per a tot parell de vectors $u, v \in E$, $f(u+v) = f(u) + f(v)$.

(ii) Per a tot $u \in E$ i tot $\lambda \in \mathbb{R}$, $f(\lambda u) = \lambda f(u)$.

(b) $f(S)$ és no buit, ja que S conté el vector 0_E i, per tant, $f(S)$ conté almenys el vector $f(0_E) = 0_F$. A més, és tancat per sumes. En efecte, si $w, w' \in f(S)$, vol dir que existeixen $v, v' \in S$ tals que $w = f(v)$ i $w' = f(v')$. Per tant, per la linealitat de f tenim que

$$w + w' = f(v) + f(v') = f(v + v').$$

Però $f(v+v') \in f(S)$ ja que, en ser S subespai, és tancat per sumes i, per tant, $v+v'$ també és de S. Finalment, $f(S)$ també és tancat per producte per escalars. En efecte, si $w \in f(S)$ i $\lambda \in \mathbb{R}$, tenim que $w = f(v)$ per algun $v \in S$ i, per tant, per linealitat

$$\lambda w = \lambda f(v) = f(\lambda v).$$

Però λv també és de S perquè S és subespai, així que $\lambda w \in f(S)$.

2. (4 punts) Siguin E, F_a els subespais següents de $\mathbb{R}^4$, amb $a \in \mathbb{R}$:

$$E = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid x - 2z = 0,\ y - 2z + 2t = 0,\ x - 4y + 2z = 0,\ y - 2t = 0\}$$

$$F_a = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ a \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle.$$

   (a) Trobeu la dimensió i una base de E.
   (b) Trobeu la dimensió i una base de F_a segons el valor de a.
   (c) Trobeu la dimensió de $E \cap F_1$.
   (d) Determineu si el vector $\begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$ és de F_1 i, en cas afirmatiu, trobeu-ne les cooordenades en la base de l'apartat (b).

Solució.

(a) *La dimensió és el nombre de graus de llibertat del sistema. Si escalonem la matriu del sistema (no cal escriure la columna de termes independents perquè és tota l'estona de zeros) dóna*

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & -2 & 0\\ 1 & -4 & 2 & 0\\ 0 & 1 & -2 & 2\\ 0 & 1 & 0 & -2\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 0 & -2 & 0\\ 0 & -4 & 4 & 0\\ 0 & 1 & -2 & 2\\ 0 & 1 & 0 & -2\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 0 & -2 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -2\\ 0 & 0 & -2 & 4\\ 0 & 0 & 4 & -8\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 0 & -2 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -2\\ 0 & 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Per tant, el rang de la matriu és 3 i el nombre de graus de llibertat del sistema és 1, així que E és de dimensió 1. La base s'obté a partir de la forma paramètrica de la solució general del sistema anterior, que és (la variable sense pivot és la t)

$$x = 4t, \quad y = 2t, \quad z = 2t.$$

Per tant, la forma paramètrica és

$$\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\\ t\end{pmatrix} = t\begin{pmatrix}4\\ 2\\ 2\\ 1\end{pmatrix}$$

i una base de E és $\left\{\begin{pmatrix}4\\ 2\\ 2\\ 1\end{pmatrix}\right\}$.

(b) *La dimensió ara és el rang de la matriu que té els generadors per columnes (o per files). Fent transformacions s'obté que*

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 3 & 0 & a\\ a & 0 & 0\\ 0 & a & -1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 3 & a-3\\ 0 & a & -a\\ 0 & a & -1\end{pmatrix}$$

Si $a = 0$ és

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 3 & -3\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

i si $a \neq 0$ és

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 3 & a-3\\ 0 & a & -a\\ 0 & a & -1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 3 & a-3\\ 0 & a & -1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & a\\ 0 & 0 & a-1\end{pmatrix}.$$

Per tant, el rang sempre és tres i F_a és de dimensió 3 per a qualsevol valor de a. Una base és el propi conjunt de generadors.

(c) *Com que E és de dimensió 1, la dimensió de $E \cap F_1$ només pot ser 1 o 0, segons que el vector de la base de E sigui o no de F_1. Per saber si aquest vector és de F_1 només cal calcular el rang de la matriu 4×4 que té per columnes la base de F_1 més aquest vector (aquesta matriu és la matriu ampliada del sistema d'equacions que s'obté en imposar que la base de E és combinació lineal de la base de F_1). Ara aquesta matriu és*

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & -2 & -10 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

i, per tant, és de rang 4, així que els quatre vectors són LI i $E \cap F_1$ es redueix al vector zero.

(d) *Cal veure si el sistema d'equacions lineals en a, b, c corresponent a l'equació vectorial*

$$\begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

té solució o no. La matriu ampliada és

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 6 \\ 3 & 0 & 1 & 6 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 3 & -2 & -12 \\ 0 & 1 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & -5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Per tant, és sistema compatible determinat i la solució, que dóna les coordenades buscades, és $a = 1$, $b = -2$ i $c = 3$, és a dir

$$\begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}_B$$

on B és la base anterior de F_1.

3. (4 punts) Sigui $\alpha \in \mathbb{R}$ i $f_\alpha : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfisme definit per $f_\alpha \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x \\ -y + z \\ 3x + \alpha z \end{pmatrix}$.

(a) Trobeu la matriu associada a f_α en la base canònica de $\mathbb{R}^3$ i determineu si f_α és injectiva segons el valor de α.

(b) Trobeu la condició que ha de satisfer el vector $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ per tal que sigui de $\operatorname{Im} f_0$.

(c) Sabent que $B = \{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}\}$ és una base de $\mathbb{R}^3$, trobeu la matriu associada a f_0 en la base B.

(d) Determineu si l'endomorfisme f_5 és diagonalitzable o no i, en cas que ho sigui, doneu-ne la matriu diagonal corresponent.

Solució.

(a) Cal calcular les imatges dels vectors de la base canònica.

$$f\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\0\\3\end{pmatrix},\quad f\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix},\quad f\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\\alpha\end{pmatrix}$$

Per tant, la matriu associada a f_α en base canònica B_c és

$$M_{B_c}^{B_c}(f_\alpha)=\begin{pmatrix}5&0&0\\0&-1&1\\3&0&\alpha\end{pmatrix}.$$

Per tal de determinar si és injectiva, calculem el rang d'aquesta matriu. Una matriu escalonada equivalent és

$$M_{B_c}^{B_c}(f_\alpha)\sim\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&1\\0&0&\alpha\end{pmatrix}.$$

així que el rang és 3 si $\alpha\neq 0$ i 2 si $\alpha=0$. Per tant, és injectiva (de fet, bijectiva) si $\alpha\neq 0$ i no injectiva si $\alpha=0$.

(b) El vector $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ és de $\mathrm{Im}(f_0)$ si i només si és del subespai generat per les imatges de la base. Vol dir que el sistema d'equacions lineals en λ,μ,γ que correspon a l'equació vectorial

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}5\\0\\3\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

ha de ser compatible. Explícitament, és el sistema d'equacions de matriu ampliada

$$\left(\begin{array}{ccc|c}5&0&0&x\\0&-1&1&y\\3&0&0&z\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&x/5\\0&-1&1&y\\1&0&0&z/3\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&x/5\\0&-1&1&y\\0&0&0&(z/3)-(x/5)\end{array}\right)$$

La condició de compatibilitat és doncs $3x-5z=0$, que és la condició per tal que el vector $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ sigui de la imatge de f_0.

(c) D'acord amb la fórmula de canvi de base, la matriu associada a f_0 en la nova base ve donada per

$$M_B^B(f_0)=P_B^{B_c}\cdot M_{B_c}^{B_c}(f_0)\cdot P_{B_c}^B=\left(P_{B_c}^B\right)^{-1}\cdot M_{B_c}^{B_c}(f_0)\cdot P_{B_c}^B.$$

La matriu de canvi de base $P_{B_c}^B$ és

$$P_{B_c}^B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

En calculem la inversa pel mètode de Gauss-Jordan:

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$
$$\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$
$$\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Per tant

$$\left(P_{B_c}^B\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

i la matriu buscada és

$$M_B^B(f_0) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 3 & 5 & -3 \\ -5 & -3 & -3 \end{pmatrix}.$$

(d) *El polinomi característic és*

$$c_f(x) = \begin{vmatrix} 5-x & 0 & 0 \\ 0 & -1-x & 1 \\ 3 & 0 & 5-x \end{vmatrix} = -(5-x)^2(1+x)$$

Com que obtenim 3 VAPs (comptant multiplicitats), f_5 diagonalitzarà o no segons que el subespai propi E_5 de VAP igual a 5 sigui de dimensió 2 o 1, respectivament. E_5 és el subespai de solucions del sistema homogeni

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

la solució general del qual és $x = 0$ i $z = 6y$. Per tant, $E_5 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} \right\rangle$ és de dimensió 1 i f_5 no diagonalitza. De fet, observant que el rang de la matriu és 2 i, per tant, que el nombre de graus de llibertat és 1, ja n'hi ha prou, ja que la dimensió de E_5 ve donada pel nombre de graus de llibertat del sistema anterior.