Reavaluació de Matemàtiques 1 - Gener 2020
DIA 5: Aplicacions lineals

1. (F2-QT11) Considereu l'endomorfisme $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que la seva matriu associada en base canònica és
$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$
Doneu la imatge d'un vector genèric (x, y, z). Doneu un vector $v \in \mathbb{R}^3$ tal que $f(v) = (0, 2/3, 2/3)$.

2. (F2-QT17) Considereu l'endomorfisme $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que
$$f(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} y + 2z \\ x + 2y - z \\ -x + y + 7z \end{pmatrix}.$$
   (a) Doneu la matriu de f en la base canònica de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Doneu la dimensió i una base de la imatge de f.
   (c) Esbrineu si f és exhaustiva i/o injectiva.
   (d) Trobeu la dimensió i una base de $\text{Ker}(f)$.
   (e) Doneu la matriu associada a f en la base B, sent
$$B = \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \}.$$

3. (F2-QP16) Sigui $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'aplicació lineal definida per
$$f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x - 2y + z \\ 2x - 2y + 2z \\ x - 2y + 3z \end{pmatrix}.$$
   (a) Trobeu la matriu de f en la base canònica de $\mathbb{R}^3$ i determineu si és exhaustiva.
   (b) Trobeu la dimensió i una base de $\text{Ker}(f)$.
   (c) Determineu si $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \text{Im}(f)$ i, en cas que ho sigui, calculeu $f^{-1} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

4. (F2-QT16) Considereu l'endomorfisme $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que
$$f \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad f \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad f \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}.$$
   (a) Utilitzant que f és lineal, deduïu la matriu de f en la base canònica de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Trobeu la dimensió i una base de $\text{Ker}(f)$. És f exhaustiva?

5. (F2-QT10) Sigui $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ una aplicació lineal tal que

$$f\left(\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = (2,2), \quad f\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = (5,4),$$
$$f\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{pmatrix}\right) = (-c,-d) \quad \text{per tot } c, d \in \mathbb{R}.$$

a) Trobeu la matriu associada a f en les bases canòniques de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ i $\mathbb{R}^2$.

b) Trobeu una base i la dimensió del nucli de f.

c) Digueu si f és injectiva, exhaustiva o bijectiva.

6. (F2-QT12) Siguin a un paràmetre real i $f_a \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ l'aplicació lineal amb matriu associada en les bases canòniques

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ a & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Determineu per a quins valors de a l'aplicació f_a és injectiva, exhaustiva i/o bijectiva.

7. (F2-QT12) Sigui $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ un conjunt de vectors de $\mathbb{R}^4$, i sigui $f \colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'endomorfisme definit per $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ 2z \\ 3t \\ 0 \end{pmatrix}$.

(a) Determineu les matrius $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(f)$ i $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ associades a f en les bases canònica i $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^4$, respectivament.

8. (F2-QP13) Sigui $f \colon P_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ l'aplicació lineal tal que

$$f(1+x) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \; f(1+x+x^2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \; f(3+2x^2) = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

(a) Comproveu que el conjunt $\{1+x, 1+x+x^2, 3+2x^2\}$ és una base de $P_2(\mathbb{R})$.

(b) Trobeu la matriu associada a f en les bases canòniques de $P_2(\mathbb{R})$ i $\mathbb{R}^3$.

(c) Doneu la imatge del polinomi $4+x$.

(d) Determineu si f és injectiva, exhaustiva i/o bijectiva.