Reavaluació de Matemàtiques 1 - Gener 2020
DIA 6: Diagonalització

1. Considereu l'endomorfisme $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definit mitjançant la matriu associada en base canònica o per la imatge d'un vector genèric:

$$\text{(a)} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \text{(b)}\ f(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} y+2z \\ x+2y-z \\ -x+y+7z \end{pmatrix}, \qquad f(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 3x-2y+z \\ 2x-2y+2z \\ x-2y+3z \end{pmatrix}.$$

Per a cada valor de F, esbrineu si és diagonalitzable i, en cas afirmatiu, doneu una base en la que diagonalitzi i la matriu associada en aquesta base.

Els exerici apareixen en els exàmens finals següents: (a) F2-QT11, (b) F2-QT17, (c) F2-QP16.

2. Considereu l'endomorfisme $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ amb la matriu associada en base la canònica següent:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Doneu els valors propis de f i esbrineu si f és diagonalitzable.

3. (F2-QT16) Considereu l'endomorfisme $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que

$$f\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Esbrineu si f és diagonalitzable. (Pots usar els càlculs realitzats l'exercici 4 del full DIA 5)

4. (F2-QT12) Sigui $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'endomorfisme definit per $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ 2z \\ 3t \\ 0 \end{pmatrix}$. Esbrineu si l'endomorfisme f és diagonalitzable. En cas afirmatiu, doneu una base en la que diagonalitzi i la matriu associada en aquesta base.

5. (F2-QP13)

   (a) Sigui $f : E \to E$ un endomorfisme. Considerem els vectors u i v de E i suposem que són vectors propis de valor propi λ. Esbrineu si el vector $w = 7u + 3v$ és un vector propi, i en cas afirmatiu doneu el valor propi al que està associat.

   (b) Sigui $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ un endomorfisme amb la matriu associada en la base canònica de $\mathbb{R}^4$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

   Trobeu els valors propis de l'endomorfisme f i esbrineu si diagonalitza. En cas afirmatiu, doneu una base en la que diagonalitzi i la matriu associada en aquesta base.

6. (F2-QT10) Considereu l'endomorfisme següent de $\mathbb{R}^3$:

$$f_k(x, y, z) = (2x + ky + k^2 z, y, z + kz),$$

on $k \in \mathbb{R}$ és un paràmetre.

a) Escriviu la matriu associada a f_k en la base canònica de $\mathbb{R}^3$. Trobeu el polinomi característic de f_k i els seus valors propis.

b) Estudieu si f_k diagonalitza segons el valor del paràmetre k.