TEOREMES I COROL·LARIS

M1: GRAFS

LEMA DE LES ENCAIXADES

Corol·lari: Tot graf té un nombre parell de vèrtexs de grau senar

RECORREGUTS

Teorema: Siguin $G = (V, A)$ un graf i u, v vèrtexs diferents. Si a G hi ha un u-v recorregut de longitud k, aleshores hi ha un u-v camí de longitud $\leq k$

Teorema: Siguin $G = (V, A)$ un graf i u, v vèrtexs diferents. Si G té dos u-v camins diferents, llavors G conté un cicle

GRAFS CONNEXOS

Teorema: Un graf és 2-regular si, i només si, els seus components connexos són cicles

Teorema: Sigui $G = (V, A)$ un graf connex i siguin $e = xy \in A$ i $u \in V$. Aleshores

1. el graf $G - e$ té com a molt 2 components connexos; si en té 2, a un hi ha el vèrtex x i a l'altre el vèrtex y

2. el graf $G - u$ té com a molt $g(u)$ components connexos

Teorema: Tot graf connex d'ordre n té com a mínim $n - 1$ arestes

Caracterització VÈRTEXS DE TALL

Teorema: Sigui G = (V, A) un graf connex. Un vèrtex u de G és de tall si, i només si, existeixen un parell de vèrtexs x, y diferents d'u tals que tot x-y camí passa per u

Caracterització ARESTES PONT

Teorema: Sigui G = (V, A) un graf connex i a = uv una aresta de G. Són equivalents:

a) a és una aresta pont
b) existeixen un parell de vèrtexs x, y tals que tot x-y camí passa per a
c) per l'aresta a no passa cap cicle

Cal remarcar que:

- Un graf pot tenir vèrtexs de tall però cap aresta pont
- Sigui a = uv una aresta pont. Si g(u) = 1, u no és un vèrtex de tall; si g(u) ≥ 2, el vèrtex u és de tall
- L'únic graf connex amb una aresta pont i cap vèrtex de tall és el K_2

DFS

Teorema: Sigui $G = (V, A)$ un graf i v un vèrtex de G. El subgraf $G[W]$ induït pels vèrtexs de G visitats emprant l'algorisme DFS és el component connex de G que conté v

BFS

Teorema: Sigui $G = (V, A)$ un graf i $v \in V$. El vector D donat per l'algorisme BFS emmagatzema la distància del vèrtex v a qualsevol altre vèrtex del graf

GRAFS BIPARTITS

Teorema: Sigui G = (V, A) un graf

1. Si a G hi ha un recorregut tancat de longitud senar, a G hi ha un cicle de longitud senar

2. L'existència de recorreguts tancats de longitud parella a G no assegura la existència de cicles a G.

Caracterització GRAFS BIPARTITS

Teorema: Un graf d'ordre ≥ 2 és bipartit si, i només si, no té cicles de longitud senar

Caracterització GRAFS EULERIANS

Teorema: Sigui G un graf connex no trivial. Aleshores, G és eulerià si, i només si, tots els vèrtexs tenen grau parell

Corol·lari: Un graf connex té un senderó eulerià si, i només si, té exactament dos vèrtexs de grau senar En aquest cas, el senderó eulerià comença en un vèrtex de grau senar i acaba en l’altre vèrtex de grau senar

Caracterització GRAFS HAMILTONIANS

Condicions necessàries: Sigui $G = (V, A)$ un graf hamiltonià d'ordre n, aleshores:

1. $g(v) \geq 2$, per a tot $v \in V$
2. Si $S \subset V$ i $k = |S|$, el graf $G - S$ té com a molt k components connexos

Condicions suficients:

Teorema de Ore: $G = (V, A)$ graf d'ordre $n \geq 3$ tal que per a tot $u, v \in V$ diferents i no adjacents es té $g(u) + g(v) \geq n$. Aleshores, G és un graf hamiltonià

Teorema de Dirac: $G = (V, A)$ graf d'ordre $n \geq 3$ tal que $g(u) \geq n/2$, per a tot $u \in V$. Aleshores, G és hamiltonià

ARBRES

Teorema: Tot graf acíclic d’ordre n té mida com a molt $n - 1$

Corol·lari: Un bosc G d’ordre n i k components connexos té mida $n - k$

Corol·lari: Si T és un arbre d’ordre $n \geq 2$, T té almenys dos vèrtexs de grau 1

ARBRES GENERADORS

Teorema: $G = (V, A)$ és un graf connex si, i només si, G té un arbre generador

DFS I BFS

Teorema: $T = (W , B)$ és un arbre generador del component connex de G que conté v

Caracterització ARBRES

Teorema: Sigui $T = (V, A)$ un graf d'ordre n i mida m. Aleshores, són equivalents

a) T és un arbre
b) T és acíclic i $m = n - 1$
c) T és connex i $m = n - 1$
d) T és connex i tota aresta és pont
e) per cada parell de vèrtexs u i v hi ha un únic u-v camí a T
f) T és acíclic i l'addició d'una aresta crea exactament un cicle