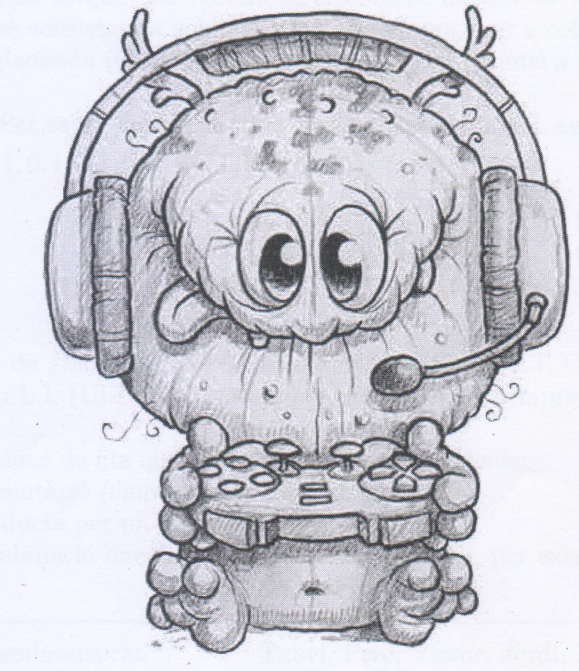
Àlgebra Lineal

Espais Vectorials

1.- Tipologia
2.- Combinació Lineal.
3.- Dependència i Independència Lineal.
4.- Subespai Vectorial.
5.- Operacions amb Subespais.
6.- Subespais Complementaris i Bases Adaptades.
7.- Canvis de Base.



Departament d'Àlgebra
Acadèmia CEUS
www.academiaceus.cat

1 Tipologia

Un **espai vectorial** és un conjunt d'elements (que anomenarem **vectors**) els quals tenen ben definida la seva suma i el producte per escalars i han de complir un conjunt de propietats.

Els espais vectorials que treballarem seran els següents:

- $\mathbb{R}^n$ i $\mathbb{C}^n$
- Matrius $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ i $M_{m\times n}(\mathbb{C})$
- Polinomis $\mathbb{R}_n[x]$ i $\mathbb{C}_n[x]$

2 Combinació Lineal

Sigui $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n\}$ un conjunt de vectors. Una **combinació lineal** d'aquests vectors és:

$$\lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + \cdots + \lambda_n\vec{v}_n$$

on λ_i són escalars. És a dir, no és res més que multiplicar els vectors per escalars, i sumar-los.
Llavors $\vec{u}$ és **combinació lineal** dels vectors $\{\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n\}$ si existeixen els escalars λ_i de manera que $\vec{u} = \lambda_1\vec{v}_1 + \cdots + \lambda_n\vec{v}_n$.

3 Dependència i Independència Lineal

Donats tot un seguit de vectors, direm que són **linealment independents** (L.I.) quan no hi ha cap vector del conjunt que es pugui posar en combinació lineal de la resta.

Direm que són **linealment dependents** (L.D.) si, en una combinació igualada a zero, existeixen escalars que no cal que siguin zero per força (és el cas contrari de ser L.I.).

Observacions:

- L'únic vector que per si sol és L.D. és el $\vec{0}$.
- Si en el conjunt hi ha més vectors que la dimensió de l'espai vectorial, el conjunt segur que és L.D.

3.1 Rang d'un Conjunt de Vectors

El **rang** d'un conjunt de vectors és el nombre màxim de vectors L.I. que hi ha. Per calcular el rang farem servir un mètode que consisteix a col·locar tots els vectors com a columnes d'una matriu i fer operacions per files fins tenir una matriu esglaonada (Gauss). El nombre de graons (també a nomenats **pivots**) ens donarà el rang.

Exemple: Per saber quants vectors com a màxim són L.I. en el següent conjunt de vectors $\{(1,1,0),(1,0,1),(1,0,0),(0,1,0),(1,1,1)\}$ farem:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -f_1 \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ +f_2 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

El nombre de graons és 3, així que tenim tres vectors L.I. Com que només hi ha un vector a cada graó, els tres primers vectors són L.I. (ULL! Els vectors que agafarem són sempre els de la matriu original, no l'esglaonada!).

Les operacions de fila que podem fer són les 3 següents:
1.- Permutació (canviem una fila per una altra)
2.- Producte per un escalar $\lambda \neq 0$
3.- Combinació lineal (agafar una fila i sumar-li, per exemple, 4 vegades una altra).

4 Subespai Vectorial

Definirem un **subespai vectorial** ("sev") F, com un conjunt de vectors que compleixen les següents condicions:

1) Per a tot parell de vectors $\vec{x}, \vec{y}$ pertanyents al sev, la seva suma ha de pertànyer al sev.
2) Per a tot vector $\vec{x}$ pertanyent al sev i per a qualsevol escalar λ, el producte $\lambda \cdot \vec{x}$ ha de pertànyer al sev.

Resumint les dues condicions en una de sola:

$$\boxed{\forall \vec{x}, \vec{y} \in F, \forall \lambda \in \mathbb{R} \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda \vec{x} + \vec{y} \in F}$$

Propietat 1: Tots els sevs tenen infinits vectors EXCEPTE el $\{\vec{0}\}$ que només té aquest vector $\vec{0}$.
Propietat 2: Un espai vectorial E és sempre sev d'ell mateix.

4.1 Equacions, Generadors, Base

Un sev es pot definir de 2 maneres:

1) **PER EQUACIONS** lineals i homogènies (sense terme independent):

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x - y - z = 0\}$$

("{" i "}" volen dir **format per**)

2) **PER VECTORS**:

$$F = [(1, 0, 1), (1, 1, 0)]$$

("[" i "]" volen dir **generat per**)

Un conjunt de vectors són **generadors** d'un sev, si tot element del sev el podem obtenir com a combinació lineal d'ells (per exemple, en el cas anterior, $(3, 1, 2) \in F$ ja que $(3, 1, 2) = 2(1, 0, 1) + (1, 1, 0)$).

Un conjunt de vectors és **base** d'un sev, si són generadors del sev, i a més són L.I. La gràcia és que una base és el "mínim" conjunt de generadors que pot tenir el sev. Per aquest motiu ens sempre interessarà treballar amb bases.
Per a un cert sev F existeixen infinites bases possibles, tot i així, totes les bases tenen el mateix nombre de vectors.

Si ens donen un sev definit per un sistema de generadors i volem buscar una base, esglaonarem per Gauss una matriu on hi hagi els vectors per columnes (així trobarem uns vectors que seran L.I. i generadors, o sigui, base).

4.2 Dimensió d'un Subespai Vectorial

La **dimensió d'un sev** és el nombre de vectors d'una base qualsevol. La dimensió no depèn de la base, sino que és propi del subespai. Així, per saber la dimensió d'un sev $F \subset E$ tenim dues opcions:

- Si ens defineixen el sev per vectors generadors, busquem una base i **comptem els seus vectors**.
- Si ens defineixen el sev per equacions, calculem la dimensió segons la **formuleta**:

$$\boxed{dimF = dimE - \text{n}^\circ \text{ d'equacions L.I.}}$$

Per comprovar que les equacions són L.I. n'hi ha prou amb posar-les com a files d'una matriu i buscar el seu rang.
Exemple: $x + y - z = 0, \ 2y + 3z = 0, \ x - y - 4z = 0$ són L.D. ja que el rang de la següent matriu és 2:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -4 \end{pmatrix}$$

4.3 Pas de Base a Equacions

Caldrà esgraonar la matriu que resulti de posar els vectors de la base en columna juntament amb un vector genèric (variables) també en columna. Després de fer les operacions, les files on només quedin variables (la resta zero) després d'igualar-les a zero, seran les nostres equacions independents.

Exemple: Sigui $F = [(1,0,1),(1,1,0)]$. Busquem les equacions:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ 0 & 1 & y \\ 1 & 0 & z \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ 0 & 1 & y \\ 0 & -1 & z-x \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & z+y-x \end{pmatrix}$$

L'equació del subespai serà $z + y - x = 0$.

Fixem-nos que les dimensions coincideixen pels dos mètodes esmentats anteriorment, i que els dos vectors de la base compleixen l'equació, que és homogènia.

Ara podem definir doncs, $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z + y - x = 0\}$

4.4 Pas d'Equacions a Base

Només cal resoldre el sistema d'equacions, tenint present que no trobarem una única solució. Deixarem el sistema en funció de tantes variables com el número que resulti de restar la dimensió d'E amb el nombre d'eqs. L.I.

Exemple: Sigui $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = 0,\ x + z = 0\}$. La dimensió de F és 1, doncs la dimensió de l'espai on pertany és 3 i tenim dues equacions.

Caldrà doncs, deixar les variables en funció d'una (la dimensió de F és 1): $y = -x$ i $z = x$ (també podríem haver-ho deixat en funció de z o de y però hagués estat més laboriós).

Ara només cal escriure el nostre vector genèric utilitzant les noves equacions, de forma que ens quedi només depenent de x. (x,y,z) queda transformat, aplicant les equacions, en el vector $(x,-x,-x)$. Es tracta d'un vector genèric del nostre subespai i ara només cal treure la variable (en aquest cas només una) factor comú i obtindrem una base: $x \cdot (1,-1,-1)$.

Podem definir F com: $F = [(1,-1,-1)]$.

5 Operacions amb Subespais

5.1 Subespai Intersecció

Aquest subespai està constituït pels vectors que pertanyen a F i a G, és a dir, que són els vectors que compleixen les condicions de F i de G al mateix temps. Per trobar el subespai intersecció **ajuntarem les equacions** de F i les de G, treient les que siguin L.D.

Exemple: Siguin $F = [(1,1,0)]$ i $G = [(1,0,0),(0,1,0)]$. Busquem les equacions de F ($x - y = 0$ i $z = 0$) i les equacions de G ($z = 0$). Tenim doncs, $F \cap G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y = 0, z = 0, z = 0\}$. És fàcil observar que una equació sobra. Així doncs: $F \cap G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y = 0, z = 0\}$. I ja hem acabat.

5.2 Subespai Suma

Està constituït per tots els vectors que es poden formar com un de F més un de G. Per trobar el subespai suma **ajuntarem les bases** de F i de G. Després treurem els vectors que siguin L.D., i d'aquesta forma n'obtindrem una base.

Exemple: Sigui $F = [(1,1,0)]$ i $G = [(1,0,0),(0,1,0)]$.
Per trobar $F + G$, ajuntem les bases: $F + G = [(1,1,0),(1,0,0),(0,1,0)]$. Per trobar una base treiem els vectors L.D. i obtenim, per exemple: $F + G = [(1,1,0),(1,0,0)]$.

5.3 Fórmula de Grassman

Aquesta fórmula relaciona les dimensions de la suma i de la intersecció:

$$dim(F+G) = dimF + dimG - dimF \cap G \qquad \left\{\begin{array}{r l} F & \square\square\square\square \\ G & \square\square\square \\ F \cap G & \square \\ F+G & \square\square\square\square\square\square \end{array}\right.$$

5.4 Igualtat i Inclusió

Direm que un subespai està **inclòs** en l'altre ($F \subset G$) quan tots els vectors de F pertanyen a G.
Direm que dos subespais F i G són **iguals** ($F = G$) quan es verifiquin les dues propietats següents:

a) $F \subset G$. Això passa quan tots els vectors generadors de F pertanyen a G.
b) $dimG = dimF$

Propietat: $F \cap G \subset F$ (o G) $\subset F + G$ i també, $dim(F \cap G) \leq dimF$ (o $dimG$) $\leq dim(F+G)$.

6 Subespais Complementaris i Bases Adaptades

6.1 Suma Directa

Direm que la suma de dos sevs és **directa** quan la seva intersecció sigui zero (o també podem dir que **els dos sevs són linealment independents**), i ho notarem de la segent forma: $F \oplus G$.

6.2 Subespai Complementari

Siguin $F, G \subset E$. Aleshores, el sev **complementari** F és G si compleix la següent propietat:

$$F \oplus G = E$$

Nota: Existeixen **infinits** subespais complementaris per a un mateix subespai F EXCEPTE si $F = \{\vec{0}\}$ (que té per complementari tot l'espai) o F és tot l'espai vectorial E (que té per complementari el $\{\vec{0}\}$).

Càlcul d'un subespai complementari

Per calcular un sev complementari G d'un cert sev F farem servir el mètode dels **1 en cascada**. Aquest mètode consisteix en muntar una matriu amb els vectors d'una base de F i ampliar-la amb vectors senzills (formats per 0 i 1) fins obtenir una matriu quadrada i de rang màxim. Per saber on poden anar els 0 i els 1 cal determinar un menor no nul dels vectors inicials. Aquest menor determinarà quines files hem de muntar amb 0. A la resta de files hi posarem 1 en "cascada" i la resta de llocs els omplim amb 0.

Exemple: Busquem a $\mathbb{R}^5$ un subespai complementari de $F = [(1,2,3,0,1),(1,0,3,2,0),(0,1,0,0,2)]$:

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

I per tant $G = [(1,0,0,0,0),(0,0,0,0,1)]$.

També podem dir que:

• **"hem ampliat la base"** $\{(1,2,3,0,1),(1,0,3,2,0),(0,1,0,0,2)\}$ de F amb la base $\{(1,0,0,0,0),(0,0,0,0,1)\}$ fins obtenir una base de l'espai total $\mathbb{R}^5$.

o bé que:

• $\{(1,2,3,0,1),(1,0,3,2,0),(0,1,0,0,2),(1,0,0,0,0),(0,0,0,0,1)\}$ és una base de $\mathbb{R}^5$ **"adaptada al subespai vectorial"** F.

6.3 Bases Adaptades

Base adaptada a 1 subespai vectorial F

Tal i com acabem de veure, si volem calcular una base d'E adaptada a un cert subespai vectorial F buscarem un complementari de F pel mètode dels uns en cascada.

Base adaptada a 2 subespais vectorials F i G ("base de Grassman")

Passos a seguir:

1) Calculem una base de $F \cap G$: $\boxed{1}$
2) Calculem vectors de F que no siguin de $F \cap G$: $\boxed{2}$ (de manera que $\boxed{1}, \boxed{2}$ formin base de F)
3) Calculem vectors de G que no siguin de $F \cap G$: $\boxed{3}$ (de manera que $\boxed{1}, \boxed{3}$ formin base de G)
4) Ajuntem els tres paquets de vectors anteriors i tenim una base de $F+G = [\boxed{1}, \boxed{2}, \boxed{3}]$
5) Si $\dim(F+G) < \dim E$, busquem un complementari de $F+G$ pel mètode dels uns en cascada: $\boxed{4}$

La base demanada serà:

$$\{\boxed{1}, \boxed{2}, \boxed{3}, \boxed{4}\}$$

Exemple: Busquem a $\mathbb{R}^5$ adaptada a $F = [(1,2,3,0,1),(1,0,3,2,0),(0,1,0,0,2)]$ i $G = [(1,0,3,2,0),(1,0,0,0,0)]$:

$F \cap G = [(1,0,3,2,0)]$ i per tant, $\boxed{1} = (1,0,3,2,0)$
$\boxed{2} = (1,2,3,0,1),(0,1,0,0,2)$
$\boxed{3} = (1,0,0,0,0)$
$\boxed{4} = (0,0,0,0,1)$

I per tant, una base adaptada a F i G és $\{(1,0,3,2,0),(1,2,3,0,1),(0,1,0,0,2),(1,0,0,0,0),(0,0,0,0,1)\}$.

7 Canvis de base

7.1 Coordenades en una base

Per a un mateix espai existeixen infinites bases. Intentarem però, sempre que puguem, treballar en la **base natural** de l'espai. Utilitzarem les següents bases canòniques (o "naturals" o "trivials" o "ordinàries"):

• Base canònica de $\mathbb{R}^3$: $e = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$

• Base canònica de $M_2(\mathbb{R})$: $e = \left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$

• Base canònica de $\mathbb{R}_n[x]$: $e = \{1, x, x^2, x^3, ..., x^n\}$

Nota Important: Només existeixen bases canòniques d'espais vectorials **però no de subespais vectorials!**

Sigui $u = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n\}$ una base de l'espai vectorial E. Per pròpia definició, existeixen uns escalars $\lambda_1, ..., \lambda_n$ únics, de manera que qualsevol vector de l'espai es pot posar com a combinació lineal dels vectors de la base:

$$\forall \vec{x} \in E, \ \exists \lambda_1, ..., \lambda_n \ \text{ tals que } \ \vec{x} = \lambda_1 \vec{u}_1 + \cdots + \lambda_n \vec{u}_n$$

El vector $\vec{x}$ en la base u s'expressa de la següent manera:

$$\boxed{\vec{x} = (\lambda_1, ..., \lambda_n)_u \quad \text{o bé} \quad \vec{x}_u = (\lambda_1, ..., \lambda_n)}$$

Als escalars $\lambda_1, ..., \lambda_n$, se'ls anomena **coordenades del vector $\vec{x}$ en la base u**. En general, un vector té coordenades diferents en bases diferents.

Utilitat: Sovint és feixuc treballar amb polinomis o matrius degut a la nomenclatura. El que farem serà expressar-los en la base natural de l'espai. És a dir, "associarem" el polinomi o matriu original a un vector de $\mathbb{R}^n$. Farem els càlculs com si es tractés d'un vector de l'espai $\mathbb{R}^n$, i al final tornarem a posar el resultat en forma de polinomi o matriu.

Exemple: El vector $\vec{x} = (2,3)_e = (1,1)_u$, essent $u = \{(1,1),(1,2)\}$

Exemple: $3 + 2x - 5x^2 - x^3 = (3, 2, -5, -1)_e$

Exemple: $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a,b,c,d)_e$

7.2 Canvi de base

Veiem com podem transformar les coordenades d'un vector en una certa base en les seves coordenades en una altra base. La **base canònica** juga un paper molt important i per tant, distingirem entre la base canònica i la resta de bases. Utilitzarem per als següents exemples la base canònica $e = \{\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n\}$, i una altra base $u = \{\vec{u}_1, ..., \vec{u}_n\}$

• Pas d'una base qualsevol u a la base canònica:
Si tenim el vector $\vec{x}$ expressat en la base u significa que:

$$\vec{x} = (\lambda_1, ..., \lambda_n)_u = \lambda_1 \vec{u}_1 + \cdots + \lambda_n \vec{u}_n$$

Substituint els vectors $\vec{u}_i$ per les seves coordenades en base canònica obtindrem el vector $\vec{x}$ en base canònica.

Exemple: Sigui $u = \{(1,1),(1,-1)\}$. Trobeu les coordenades del vector $\vec{x} = (2,-2)_u$ en la base canònica de $\mathbb{R}^2$.

$$\vec{x} = (2,-2)_u = 2\vec{u}_1 - 2\vec{u}_2 = 2(1,1) - 2(1,-1) = (0,4) = (0,4)_e$$

• Pas de la base canònica a una base qualsevol u:
Tenint el vector $\vec{x}$ expressat en la base canònica, volem conèixer els escalars $\lambda_1, ..., \lambda_n$. Els trobarem resolent el sistema d'equacions resultant:

$$\vec{x} = (\lambda_1, ..., \lambda_n)_e = \lambda_1 \vec{u}_1 + \cdots + \lambda_n \vec{u}_n = (\lambda_1, ..., \lambda_n)_u$$

Exemple: Sigui $u = \{(1,1),(1,-1)\}$. Trobeu les coordenades del vector $\vec{x} = (1,3)_e$ en la base u.

$$\vec{x} = (1,3)_e = \lambda_1 \vec{u}_1 + \lambda_2 \vec{u}_2 = \lambda_1(1,1) + \lambda_2(1,-1) = (\lambda_1 + \lambda_2, \lambda_1 - \lambda_2)$$

$$\left.\begin{matrix} 1 = \lambda_1 + \lambda_2 \\ 3 = \lambda_1 - \lambda_2 \end{matrix}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{matrix} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = -1 \end{matrix}\right\} \Longrightarrow \quad \vec{x} = (1,3)_e = (2,-1)_u$$

• Pas d'una base qualsevol u a una altra base qualsevol v:

En aquest cas es pot realitzar la transformació en 2 passos, passant per la base canònica. Primer, d'u a e (**substitució**), i després d'e a v (**sistema**).