Exemple 1

Discutiu en funció de a i b si la matriu següent diagonalitza sobre $\mathbb{R}$*:*

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}$$

Polinomi característic:

$$p(x) \;=\; \det(M - xI_2) = \begin{vmatrix} a-x & b \\ -b & -x \end{vmatrix} = x^2 - ax + b^2$$

Trobem els vap's i les seves multiplicitats:

$x^2 - ax + b^2 = 0 \to x = \frac{a \pm \sqrt{a^2-4b^2}}{2}$

(a) Si $a^2 - 4b^2 < 0$ el polinomi no té arrels reals
Per tant la matriu no diagonalitza

(b) Si $a^2 - 4b^2 > 0$, és a dir, $|a| > |2b|$, el polinomi té dues arrels diferents, és a dir, hi ha dos valors propis diferents
Per tant, la matriu **M diagonalitza**

(c) Si $a^2 - 4b^2 = 0$, és a dir, $|a| = |2b|$, el polinomi té una arrel: únic valor propi $a/2$ amb $m_{a/2} = 2$
Calculem $\dim(E_{a/2})$

- Si $b = a/2$ i $a \neq 0$:

$$\dim(E_{a/2}) = 2 - \text{rang}\begin{pmatrix} a - a/2 & a/2 \\ -a/2 & -a/2 \end{pmatrix} = 2 - 1 = 1$$

  $\dim(E_{a/2}) = 1 < m_{a/2} = 2 \longrightarrow$ la matriu **M no diagonalitza**
- Si $b = -a/2$ i $a \neq 0$ la matriu **M no diagonalitza** (es prodedeix com en el cas anterior)
- Si $a = 0$, $\dim(E_0) = 2 = m_0$ La matriu **M diagonalitza**

$$\boxed{\text{La matriu diagonalitza si i només si } a = b = 0 \text{ o } a^2 > 4b^2}$$

Exemple 2

Discutiu en funció de a i b si l'endomorfisme $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ amb matriu associada següent diagonalitza

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Polinomi característic:

$$p_f(x) = \det(M - xI_3) = \begin{vmatrix} 1-x & 0 & 0 \\ b & a-x & 0 \\ 0 & 0 & 2-x \end{vmatrix} = (1-x)(a-x)(2-x)$$

(a) $\boxed{a \neq 1, 2}$: l'endomorfisme **f diagonalitza**, ja que hi ha tres vaps diferents i $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$.

(b) $\boxed{a = 1}$: els vaps són 1 i 2, amb multiplicitats algebraiques $m_1 = 2$ i $m_2 = 1$.
Ja sabem que la $\dim(E_2) = 1$.
Ara estudiem la $\dim(E_1)$. Com que

$$E_1 = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : (M - I_3) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \},$$

aleshores

$$\dim(E_1) = 3 - \begin{pmatrix} 1-1 & 0 & 0 \\ b & 1-1 & 0 \\ 0 & 0 & 2-1 \end{pmatrix} = 3 - \text{rang} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Així, $\text{rang}(M - I_3) = 1$ si, i només si, $b = 0$.
Si $b = 0$, $\dim(E_1) = 2 = m_1$ i **f diagonalitza**.

(c) $\boxed{a=2}$: els vaps són 1 i 2, amb multiplicitats algebraiques $m_1 = 1$ i $m_2 = 2$.
Tenim que $\dim(E_1) = 1$, calculem ara la $\dim(E_2)$. Tenim

$$E_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : (M - 2I_3) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\},$$

aleshores

$$\dim(E_2) = 3 - \text{rang} \begin{pmatrix} 1-2 & 0 & 0 \\ b & 2-2 & 0 \\ 0 & 0 & 2-2 \end{pmatrix} = 3 - \text{rang} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Independentment del valor de b, $\text{rang}(M - 2I_3) = 1$.
Per tant, $\dim(E_2) = 2$ i **f diagonalitza.**

$\boxed{\text{En resum l'endomorfisme diagonalitza si } a \neq 1\text{, o bé si } a = 1 \text{ i } b = 0}$