1. [3 punts]

   (a) Doneu llevat d'isomorfismes tots els grafs eulerians d'ordre 5. Indicació: considereu les possibles seqüències de graus que pot tenir un graf eulerià d'ordre 5.

   (b) Enuncieu el Teorema de Dirac. Doneu un contraexemple que mostri que el recíproc no és cert. Doneu un exemple que mostri que la condició del teorema és ajustada.

   (c) Sigui G un graf d'ordre n i mida m amb exactament k components connexos. Demostreu que G és acíclic si i només si $m = n - k$.

2. [3 punts]

   (a) Doneu totes les seqüències de graus dels arbres d'ordre 8 amb almenys 5 fulles i almenys un vèrtex de grau 3.

   (b) Doneu l'arbre T que té per seqüència de Prüfer $(4, 4, 5, 1, 5, 4)$. Calculeu el radi, el diàmetre i els vèrtexs centrals de T.

   (c) Sigui G el graf de Petersen amb conjunt de vèrtexs $V = \{1, 2, 3, 4, 5\} \cup \{a, b, c, d, e\}$ i arestes $A = \{12, 23, 34, 45, 51\} \cup \{1a, 2b, 3c, 4d, 5e\} \cup \{ac, ce, be, bd, ad\}$. Dibuixeu els arbres generadors de G que s'obtenen aplicant els algorismes BFS i DFS respectivament si es comença amb el vèrtex 1 i considerant l'ordenació del conjunt de vèrtexs $(1, 2, 3, 4, 5, a, b, c, d, e)$. Indiqueu en quin ordre s'obtenen les arestes dels arbres en cada cas.

3. [4 punts] Sigui $G = (V, A)$ un graf d'ordre $n \geq 3$. Definim el graf $G^* = (V^*, A^*)$ tal que:

$$V^* = V$$
$$A^* = A \cup \{xy : x, y \in V \text{ i } d(x, y) = 2\}.$$

   on $d(x, y)$ és la distància entre x i y en G.

   (a) Sigui $K_{1,n-1}$ el graf estrella d'ordre n. Demostreu que $K^*_{1,n-1}$ és isomorf al graf complet K_n.

   (b) Sigui T_n el graf trajecte d'ordre n. Calculeu el diàmetre del graf T^*_n.

   (c) Sigui C_n el graf cicle d'ordre n. Per a quins valors de n és C^*_n eulerià?

   (d) Demostreu que si u és un vèrtex de tall d'un graf connex G, aleshores u no és vèrtex de tall en G^*.

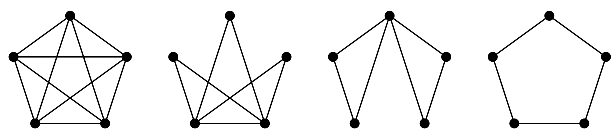
- Cal que **JUSTIFIQUEU TOTES LES RESPOSTES**.
- La durada de l'examen és de 1h 45m.
- No es poden utilitzar apunts, llibres, calculadores, mòbils,...

Model de solució

1. [3 punts]

   (a) Doneu llevat d'isomorfismes tots els grafs eulerians d'ordre 5. Indicació: considereu les possibles seqüències de graus que pot tenir un graf eulerià d'ordre 5.

   Solució. Un graf és eulerià si és connex i té tots els vèrtexs de grau parell. Per ser G d'ordre 5, el grau dels vèrtexs és com a molt 4, i no pot ser 0 perquè no pot tenir vèrtexs aïllats. Per tant, a les seqüències de graus del graf només hi pot haver els valors 2 i 4. Segons el nombre de quatres tenim les opcions $(4,4,4,4,4)$, $(4,4,4,4,2)$, $(4,4,4,2,2)$, $(4,4,2,2,2)$, $(4,2,2,2,2)$, $(2,2,2,2,2)$. La primera seqüència correspon al graf complet K_5 i l'última, al graf cicle C_5. Les seqüències $(4,4,4,4,2)$ i $(4,4,4,2,2)$ no són possibles, ja que si hi ha 3 vèrtexs de grau 4, tots els vèrtexs tenen grau almenys 3. La seqüència $(4,4,2,2,2)$ correspon a un graf amb dos vèrtexs de grau 4, que són adjacents cadascun a tots els altres vèrtexs del graf, i això ja fa que tots els vèrtexs tinguin el grau desitjat. La seqüència $(4,2,2,2,2)$ correspon a un graf amb un vèrtex de grau 4, adjacent als quatre restants, i l'única manera de que aquests tinguin grau 2 és afegint un parell d'arestes amb extrems no comuns. En tots els casos, el graf obtingut és connex i per tant, eulerià. Vegeu a la figura següent una representació dels 4 grafs possibles.



   (b) Enuncieu el Teorema de Dirac. Doneu un contraexemple que mostri que el recíproc no és cert. Doneu un exemple que mostri que la condició del teorema és ajustada.

   Solució.

   Teorema de Dirac. Si G és un graf d'ordre $n \geq 3$ tal que per a tot vèrtex v es compleix que $g(v) \geq n/2$, aleshores G és hamiltonià.

   Exemple que mostra que el recíproc no és cert. Qualsevol graf cicle C_n amb $n \geq 5$. En efecte, C_n és hamiltonià, però per a tot vèrtex u es compleix $g(u) = 2 < 5/2 \leq n/2$.

   Exemple que mostra que la desigualtat del teorema no es pot millorar. Per a n senar, considerem el graf G d'ordre n consistent en la reunió de dos grafs complets $K_{(n-1)/2}$ juntament amb un vèrtex addicional z que no és de cap d'ells però que és adjacent a tots els vèrtexs de cadascun dels complets.

   Els graus de tots els vèrtexs de G diferents de z són $(n-1)/2$ i el grau de z és $n-1$. Tots els graus són més grans o iguals que $(n-1)/2$ i, en canvi, no és un graf hamiltonià perquè z és un vèrtex de tall. Per tant, reduint de n a $n-1$, el teorema de Dirac deixa de ser cert.

   (c) Sigui G un graf d'ordre n i mida m amb exactament k components connexos. Demostreu que G és acíclic si i només si $m = n - k$.

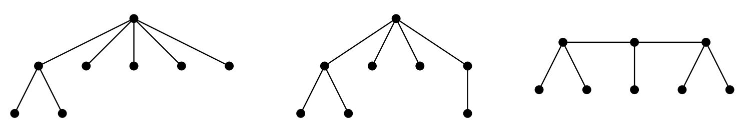
   Solució. Si G és acíclic, aleshores G és un bosc amb k components connexos, i sabem que en un bosc es compleix $m = n - k$.

Per a demostrar el recíproc, suposem que $m = n - k$ però G no és acíclic. Suposem que $G_1, \ldots, G_k$ són els components connexos de G i que, per a tot $i \in \{1, \ldots, k\}$, l'ordre de G_i és n_i i la mida de G_i és m_i. Aleshores es satisfà $n = n_1 + \cdots + n_k$ i $m = m_1 + \cdots + m_k$. Sabem que $m_i \geq n_1 - 1$ per a tot $i \in \{1, \ldots, k\}$, per ser G_i connex. Però almenys un component connex no és arbre, ja que G té algun cicle, d'on deduïm que $m_j > n_j - 1$, per a algun $j \in \{1, \ldots, k\}$. Per tant, $n - k = m = m_1 + \cdots + m_k > (n_1 - 1) + \cdots + (n_k - 1) = n - k$, que és una contradicció.

2. [3 punts]

(a) Doneu totes les seqüències de graus dels arbres d'ordre 8 amb almenys 5 fulles i almenys un vèrtex de grau 3.

Solució. A la seqüència de graus apareixen els valors $(3, 1, 1, 1, 1, 1, x, y)$, on $1 \leq x, y \leq 7$. Per altra banda, un arbre d'ordre 8 té mida 7. Pel Lema de les Encaixades, $8 + x + y = 14$. Per tant, $x + y = 6$. Les opcions possibles per a $\{x, y\}$ són $\{5, 1\}$, $\{4, 2\}$, $\{3, 3\}$, de manera que les seqüències possibles són $(5, 3, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$, $(4, 3, 2, 1, 1, 1, 1, 1)$ i $(3, 3, 3, 1, 1, 1, 1, 1)$. En els tres casos hi ha almenys un arbre amb aquestes seqüències de graus, com podem veure a la figura:



(b) Doneu l'arbre T que té per seqüència de Prüfer $(4, 4, 5, 1, 5, 4)$. Calculeu el radi, el diàmetre i els vèrtexs centrals de T.

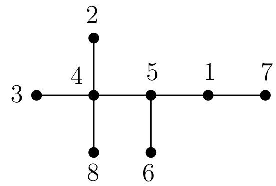
Solució. La seqüència donada té longitud 6, per tant es tracta d'un arbre d'ordre 8 amb conjunt de vèrtexs $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. El vèrtex més petit que no apareix a la seqüència és adjacent al primer vèrtex de la seqüència, és a dir, l'arbre tenia l'aresta 24. Eliminem el primer element de la seqüència i treiem el 2 del conjunt de vèrtexs disponibles, i repetim el procés fins que la seqüència és buida.

$V(T_i)$	seqüència de Prüfer	fulla més petita	aresta de T
$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$	(4,4,5,1,5,4)	2	24
$\{1, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$	(4,5,1,5,4)	3	34
$\{1, 4, 5, 6, 7, 8\}$	(5,1,5,4)	6	56
$\{1, 4, 5, 7, 8\}$	(1,5,4)	7	17
$\{1, 4, 5, 8\}$	(5,4)	1	15
$\{4, 5, 8\}$	(4)	5	45
$\{4, 8\}$	()	4	48

L'arbre amb seqüència de Prüfer $(4, 4, 5, 1, 5, 4)$ és doncs

$$T = (\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}, \{24, 34, 56, 17, 15, 45, 48\}).$$

Vegeu una representació de l'arbre a la pàgina següent.



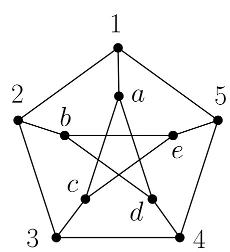
L'excentricitat dels vèrtexs de T és $e(2) = e(3) = e(7) = e(8) = 4$, $e(1) = e(4) = e(6) = 3$, $e(5) = 2$. El radi és el mínim de les excentricitats, o sigui 2; el diàmetre és el màxim de les excentricitats, o sigui 4; i els vèrtexs centrals són els vèrtexs de excentricitat igual al radi, o sigui el vèrtex 5.

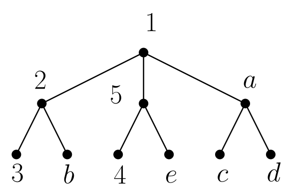
(c) Sigui G el graf de Petersen amb conjunt de vèrtexs $V = \{1, 2, 3, 4, 5\} \cup \{a, b, c, d, e\}$ i arestes $A = \{12, 23, 34, 45, 51\} \cup \{1a, 2b, 3c, 4d, 5e\} \cup \{ac, ce, be, bd, ad\}$. Dibuixeu els arbres generadors de G que s'obtenen aplicant els algorismes BFS i DFS respectivament si es comença amb el vèrtex 1 i considerant l'ordenació del conjunt de vèrtexs $(1, 2, 3, 4, 5, a, b, c, d, e)$. Indiqueu en quin ordre s'obtenen les arestes dels arbres en cada cas.

Solució. La taula d'adjacències de G és

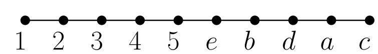
1	2	3	4	5	a	b	c	d	e
2	1	2	3	1	1	2	3	4	5
5	3	4	5	4	c	d	a	a	b
a	b	c	d	e	d	e	e	b	c

Les arestes de l'arbre que s'obté a l'aplicar BFS, en l'ordre en que les anem afegint, són: $12, 15, 1a, 23, 2b, 54, 5e, ac, ad$. Les arestes de l'arbre que s'obté a l'aplicar DFS, en l'ordre en que les anem afegint, són: $12, 23, 34, 45, 5e, eb, bd, da, ac$.





BFS



DFS

3. [4 punts] Sigui $G = (V, A)$ un graf d'ordre $n \geq 3$. Definim el graf $G^* = (V^*, A^*)$ tal que:

$$V^* = V$$
$$A^* = A \cup \{xy : x, y \in V \text{ i } d(x, y) = 2\}.$$

on $d(x, y)$ és la distància entre x i y en G.

(a) Demostreu que el graf $K^*_{1,n-1}$ és isomorf al graf complet K_n.

Solució. Per a demostrar que $K^*_{1,n-1}$ és isomorf al graf complet K_n veurem que dos vèrtexs diferents de $K^*_{1,n-1}$ són sempre adjacents a $K^*_{1,n-1}$. Siguin $x, y \in V^*(K_{1,n-1}) = V(K_{1,n-1})$, $x \neq y$. Si un dels dos vèrtexs x o y és el vèrtex de grau $n-1$ en $K_{1,n-1}$, aleshores x i y són adjacents a $K_{1,n-1}$, i per definició, també ho són a $K^*_{1,n-1}$. Si x, y

són vèrtexs de grau 1 en $K_{1,n-1}$, aleshores $d(x,y) = 2$ i, per tant, són adjacents a $K^*_{1,n-1}$.

(b) Calculeu el diàmetre del graf T^*_n.

Solució. El diàmetre és el màxim de les distàncies entre dos vèrtexs qualssevol de T^*_n. Suposem que $T_n = (V, A)$, on $V = \{u_1, \dots, u_n\}$ i $A = \{u_1u_2, u_2u_3, \dots, u_{n-1}u_n\}$. Aleshores $T^*_n = (V, A^*)$, on $A^* = A \cup \{u_1u_3, u_2u_4, u_3u_5, \dots, u_{n-3}u_{n-1}, u_{n-2}u_n\}$. La distància en T^*_n entre u_i i u_j, $i < j$, és doncs

$$d_{T^*_n}(u_i, u_j) = \begin{cases} \frac{j-i}{2}, & \text{si } j-i \text{ és parell,} \\ \\ \frac{j-i-1}{2} + 1, & \text{si } j-i \text{ és senar.} \end{cases}$$

La distància entre dos vèrtexs serà màxima en T^*_n quan $\{i,j\} = \{1,n\}$, i en aquest cas és

$$d_{T^*_n}(u_1, u_n) = \begin{cases} \frac{n-1}{2}, & \text{si } n-1 \text{ és parell,} \\ \\ \frac{n-1-1}{2} + 1 = \frac{n}{2} = \lceil \frac{n-1}{2} \rceil, & \text{si } n-1 \text{ és senar.} \end{cases}$$

El diàmetre de T^*_n és, doncs, $\lceil \frac{n-1}{2} \rceil$.

(c) Per a quins valors de n és C^*_n eulerià?

Solució. El graf C^*_n és eulerià si és connex i tots els vèrtexs tenen grau parell. Observem que C^*_n és connex, perquè C_n ho és i C^*_n s'obté afegint arestes a C_n. Per simetria, tots els vèrtexs de C^*_n tenen el mateix grau. Si $n \geq 5$, aquest grau és 4, ja que tot vèrtex és adjacent en C^*_n als dos vèrtexs anteriors i als dos vèrtexs posteriors seguint el cicle C_n, i són tots quatre diferents si $n \geq 5$. Si $n = 4$, aleshores C^*_4 és isomorf a K_4, ja que els vèrtexs a distància 2 en C_4 són els vèrtexs oposats. Si $n = 3$, aleshores $C^*_3 \cong C_3$, ja que no hi ha vèrtexs a distància 2 en C_3. Per tant, C^*_n és eulerià si i només si $n \neq 4$.

(d) Demostreu que si u és un vèrtex de tall d'un graf connex G, aleshores u no és vèrtex de tall en G^*.

Solució. Suposem que u és un vèrtex de tall en G. Siguin $x, y \in V^* - \{u\} = V - \{u\}$. Si x i y són del mateix component connex en $G - u$, aleshores hi ha un camí en G de x a y que no passa per u, per tant, és també un camí de x a y en $G^* - u$, ja que totes les arestes de G ho son també de G^*.

Si x i y són de dos components diferents en $G - u$, aleshores, per ser G connex, hi ha un camí de x a y en G que passa per u. Els vèrtexs v i w d'aquest camí que són adjacents a u no poden ser adjacents en G, ja que en cas contrari hi hauria un camí de x a y en $G - u$, és a dir, x, y serien del mateix component connex en $G - u$. Per tant, la distància entre v i w en G és 2, d'on deduïm que són adjacents en G^*. Substituint les arestes uv i uw per l'aresta vw, tenim un camí de x a y en G^* que no passa per u.

És a dir, $G^* - u$ és connex perquè per a qualsevol parell de vèrtexs x, y diferents de u, hi ha un camí de x a y en $G^* - u$. Per tant, u no és vèrtex de tall en G^*.