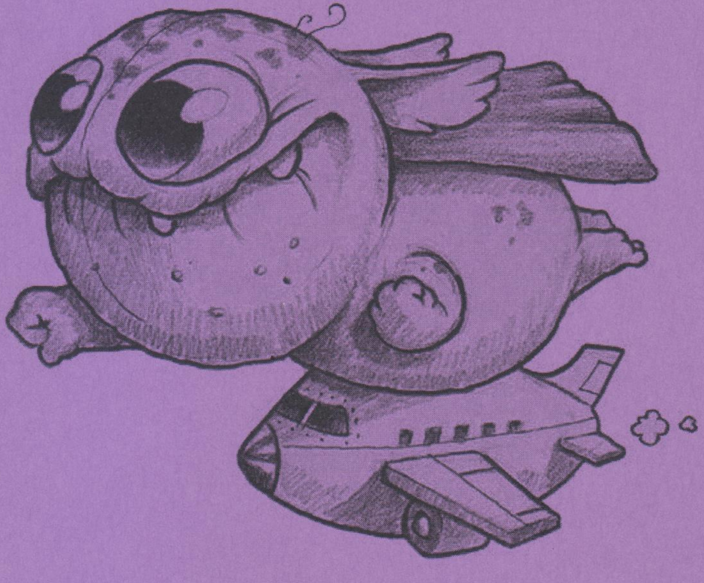
ÀLGEBRA LINEAL

DIAGONALITZACIÓ

1.- INTRODUCCIÓ.
2.- POLINOMI CARACTERÍSTIC.
3.- MULTIPLICITATS.
4.- PROPIETATS A VISTA.
5.- CAYLEY HAMILTON.
6.- POTÈNCIES DE MATRIUS.
7.- TRAÇA, DETERMINANT I RANG.



DEPARTAMENT D'ÀLGEBRA
ACADÈMIA CEUS
WWW.ACADEMIACEUS.CAT

1 Introducció

En aquest tema el nostre objectiu és trobar la matriu d'un endomorfismes en una certa base, de manera que ens quedi **diagonal**. És a dir, volem buscar una base $v = \{\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n\}$ on la matriu associada sigui:

$$M_v f = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Observeu que en aquesta base, llegint les columnes de $M_v f$, $f(\vec{v}_i) = \lambda_i \vec{v}_i, \ \forall i$.

Quan això passa, aleshores es diu que $\vec{v}_i$ és un **vector propi** (VEP) de **valor propi** λ_i (VAP).

Exemple: Sigui $f(x, y, z) = (x + 2z, 5x - y - 5z, 2x - y + z)$. Aleshores la matriu de l'aplicació en la base canònica és:

$$A = M_e f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 5 & -1 & -5 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Observeu què passa si busquem la imatge del vector $(1, 0, 1)$:
$f(1, 0, 1) = (3, 0, 3) = 3(1, 0, 1)$. Aleshores $(1, 0, 1)$ és un VEP de VAP 3.
Diagonalitzar un endomorfisme consisteix únicament en trobar aquests VAPs i VEPs. Observeu que els VAPs són els valors que quedaran a la matriu diagonal i els VEPs són la base en la qual la matriu és diagonal.

Atenció: No tots els endomorfismes diagonalitzen! Més endavant donarem les condicions que s'han de complir per tal que els endomorfismes diagonalitzin. En cas que no diagonalitzin es pot trobar una matriu quasi diagonal anomenada matriu de Jordan (següent tema).

Nota: D'ara endavant suposarem sempre que la base de l'espai de sortida i la base de l'espai d'arribada és la mateixa, i això ho podem fer perquè estem treballant amb endomorfismes. Moltes de les propietats que vindran a continuació **només són certes quan la base de l'espai de sortida és igual a la base de l'espai d'arribada**.

2 Polinomi Característic

Anomenem **polinomi característic de** f o simplement "**característic de** f" a:

$$Q_f(t) = det(f - tId)$$

Les arrels d'aquest polinomi són els VAPs (les λ) de l'aplicació. Això sempre que les arrels siguin del cos $\mathbb{K}$ que estiguem considerant.

Per trobar els VEPs associats a cada VAP ens fixarem amb el que hem vist a la introducció:

$$f(\vec{v}) = \lambda v \iff f(\vec{v}) - \lambda\vec{v} = 0 \iff (f - \lambda Id)\vec{v} = 0 \iff \vec{v} \in Ker(f - \lambda Id)$$

Amb això que acabem de veure observem que el conjunt de VEPs associats a un mateix VAP és el Nucli d'una aplicació, és a dir un **subespai vectorial**.

Calcular els VEPs doncs, voldrà dir trobar una base de cadascun d'aquests subespais (un subespai per a cada VAP).

Resum:

- Per trobar els VAPs, trobem les arrels del característic $Q_f(t) = det(f - tId) = 0$.
- Per trobar els VEPs de VAP λ, calculem $Ker(f - \lambda Id)$.

3 Multiplicitats

En aquest apartat enumerarem les condicions necessàries i suficients per a què la matriu A (o l'endomorfisme f) diagonalitzi.

• **multiplicitat algebraica** d'un VAP λ ($m_a(\lambda)$): multiplicitat com a arrel del polinomi $Q_A(t)$. És a dir, m_a és l'exponent del factor $(t-\lambda)^\alpha$ en la factorització del polinomi característic.

• **multiplicitat geomètrica** d'un VAP λ ($m_g(\lambda)$): dimensió del subespai $Ker(A-\lambda Id)$:

$$m_g(\lambda) = dimKer(A-\lambda Id) = n - rang(A-\lambda Id)$$

La multiplicitat geomètrica indica el nombre màxim de VEPs L.I. que hi ha per a cada vap.
L'endomorfisme diagonalitza quan:

$$m_g(\lambda) = m_a(\lambda)$$

per a TOTS els λ, VAPs de l'endomorfisme

▷*Nota 1:* Si alguna arrel del característic no és del cos amb el que treballem, no serà un VAP, i per tant tampoc diagonalitzarà.

Aquestes multiplicitats sempre satisfan la desigualtat:

$$\left[1 \le m_g(\lambda) \le m_a(\lambda)\right]$$

▷*Nota 2*: Observeu que quan el polinomi característic es descomposa en factors simples aleshores $m_a(\lambda) = 1\ \forall\lambda$. Per tant: $1 \le m_g(\lambda) \le m_a(\lambda) = 1$. Això vol dir que en aquest cas $m_g(\lambda) = m_a(\lambda) = 1$, i per tant sempre diagonalitza. Així, les matrius amb només VAPs simples (és a dir, tots els VAPs diferents) sempre diagonalitzen.

▷*Nota 3*: Alternativament també direm que f diagonalitza si podem aconseguir una base d'E (l'espai vectorial on està definit l'endomorfisme) formada exclusivament per veps.

▷*Exemple*: Sigui $f(x,y,z) = (3x+2y+2z, 2x+3y+2z, 2x+2y+3z)$. Diagonalitzeu la matriu.

Els passos que cal seguir són els següents:

(1) Trobar la matriu de l'aplicació en la base canònica:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

(2) Trobar el característic:

$$Q_f(t) = det(f - tId) = \begin{vmatrix} 3-t & 2 & 2 \\ 2 & 3-t & 2 \\ 2 & 2 & 3-t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7-t & 2 & 2 \\ 7-t & 3-t & 2 \\ 7-t & 2 & 3-t \end{vmatrix} = (7-t)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3-t & 2 \\ 1 & 2 & 3-t \end{vmatrix} =$$

$$= (7-t)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1-t & 0 \\ 0 & 0 & 1-t \end{vmatrix} = (7-t)(1-t)^2$$

Per tant $m_a(7) = 1$ i $m_a(1) = 2$.

(3) Calcular les multiplicitats dels VAPs que hem trobat.

$m_g(7) = dimKer(f - 7Id) = 3 - rang(f - 7Id) = 1$ (perquè el VAP és simple)

$$m_g(1) = dimKer(f - 1Id) = 3 - rang(f - 1Id) = 3 - rang \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} = 3 - 1 = 2$$

Per tant, veiem que

VAP	$m_a(\lambda)$	$m_g(\lambda)$
7	1	1
1	2	2

Com que $m_g(\lambda) = m_a(\lambda)\ \forall \lambda$, aleshores f diagonalitza.
Per trobar la matriu diagonal només cal posar els VAPs a la diagonal. En aquest cas és:

$$M_v f = D = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ara cal trobar una base v on l'aplicació adquireix la forma diagonal, és a dir, volem trobar els VEPs. Tal i com hem ordenat els VAPs a la matriu veiem que $\vec{v}_1$ és VEP de VAP 7 i $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$ són VEPs de VAP 1. Per tant:

$$\vec{v}_1 \in Ker(f - 7Id) = Ker \begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \implies \vec{v}_1 = (1,1,1)$$

$$\vec{v}_2, \vec{v}_3 \in Ker(f - 1Id) = Ker \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \implies \vec{v}_2 = (1,-1,0),\ \vec{v}_3 = (0,1,-1)$$

Observeu per tant que la matriu diagonal és $D = S^{-1} \cdot M_e f \cdot S$ on

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

4 Propietats

(parlarem indistintament de f o de $A = M_e f$)

vg no nzt

- A **no** és inversible $\iff$ 0 és VAP d'A $\iff$ 0 és arrel de $Q_A(t)$ (amb $m_g(0) = dimE - rangA$).
- VEPs associats a VAPs diferents són L.I.
- grau$[Q_A(t)] = n \iff Q_A(t)$ té n arrels (complexes).
- Cas particular $n = 2$: gran parell

suma dels nums de la diag

$$Q_A(t) = t^2 - (trA)t + \boxed{detA}$$

- Cas particular $n = 3$: gran imparell

$$Q_A(t) = -t^3 + (trA)t^2 - (\sum A_{ii})t + detA$$

On $\sum A_{ii}$ és la suma de tots els adjunts dels elements de la diagonal principal.

- El polinomi característic no depèn de la base de la matriu. Per tant, si $A = M_u f$ i $B = M_v f$ aleshores $Q_A(t) = Q_B(t)$.
- Si $B = \alpha A$ llavors VAPs de $B = \alpha\cdot$(VAPs d'A) (i els VEPs associats són els mateixos). $B = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}4 \end{pmatrix} \to \frac{1}{10}\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}}_{A}$
- Si $G = [\vec{x}]$ és un subespai invariant per f de dimensió 1, llavors $\vec{x}$ és un VEP de f.
- Els VAPs i els VEPs de qualsevol restricció de f també són VAPs i VEPs de f.
- Si $\vec{x}$ és un VEP de VAP λ i f té inversa, llavors $\vec{x}$ és un VEP de VAP $\frac{1}{\lambda}$ de f^{-1}.
- Si totes les **files** sumen el mateix número, aquest és un VAP.
- Si totes les **columnes** sumen el mateix número, aquest és un VAP i el vector $(1,1,1,...,1)$ n'és un VEP.
- Si en una fila (o columna) tots els elements són zero menys l'element que es troba a la diagonal, aquest és un VAP.
- $trA = \sum$ VAPs i $detA = \Pi$ VAPs Π=productori
- Si A és una matriu SIMÈTRICA, llavors diagonalitza.

5 Teorema de Cayley-Hamilton (permet fer A^{-1})

El teorema de Cayley-Hamilton diu que quan substituïm la variable t del característic $Q_f(t)$ per l'aplicació f (o la matriu A), aleshores queda l'aplicació nul·la (o la matriu nul·la).

$$Q_f(t) = q_o + q_1 t + \cdots + q_n t^n = \tilde{0} \iff q_o Id + q_1 + \cdots + q_n f^n = \tilde{0} \iff q_o Id + q_1 A + \cdots + q_n A^n = 0$$

△! Atenció: a cada constant cal afegir-li a la matriu Id.

Exemple: Sigui $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ la matriu de l'endomorfisme en la base canònica de l'exemple anterior, i

$Q_f(t) = (7-t)(1-t)^2 = -t^3 + 9t^2 - 15t + 7$ el seu polinomi característic.

Llavors, segons aquest teorema, $-A^3 + 9A^2 - 15A + 7Id = 0$.

Aplicació concreta del teorema: a l'exemple anterior, com que $det(A) = 7 \neq 0$ la matriu A és inversible, i **podem trobar la seva inversa amb aquest teorema** tot aïllant la Id:

$$Id = \frac{1}{7}(A^3 - 9A^2 + 15A) = A \cdot \left(\frac{1}{7}(A^2 - 9A + 15Id) \right) \implies A^{-1} = \frac{1}{7}(A^2 - 9A + 15Id)$$

6 Potències de matrius

Si A diagonalitza llavors $D = S^{-1} \cdot A \cdot S$, i per tant $A = S \cdot D \cdot S^{-1}$

$$\implies A^k = (S \cdot D \cdot S^{-1})(S \cdot D \cdot S^{-1}) \cdots (S \cdot D \cdot S^{-1}) = S \cdot D^k \cdot S^{-1} = S \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^k \end{pmatrix} \cdot S^{-1}$$

7 Traça, determinant i rang

La traça i el determinant d'un endomorfisme f són les mateixos valors en qualsevol base, sempre que la base de sortida i arribada són iguals (en canvi, el rang és el mateix en qualsevol matriu associada). És a dir:

$$tr(f) = tr(M_u f) = tr(M_v f) \neq tr(M_{uv} f)$$

$$det(f) = det(M_u f) = det(M_v f) \neq det(M_{uv} f)$$

$$rang(f) = rang(M_u f) = rang(M_v f) = rang(M_{uv} f)$$