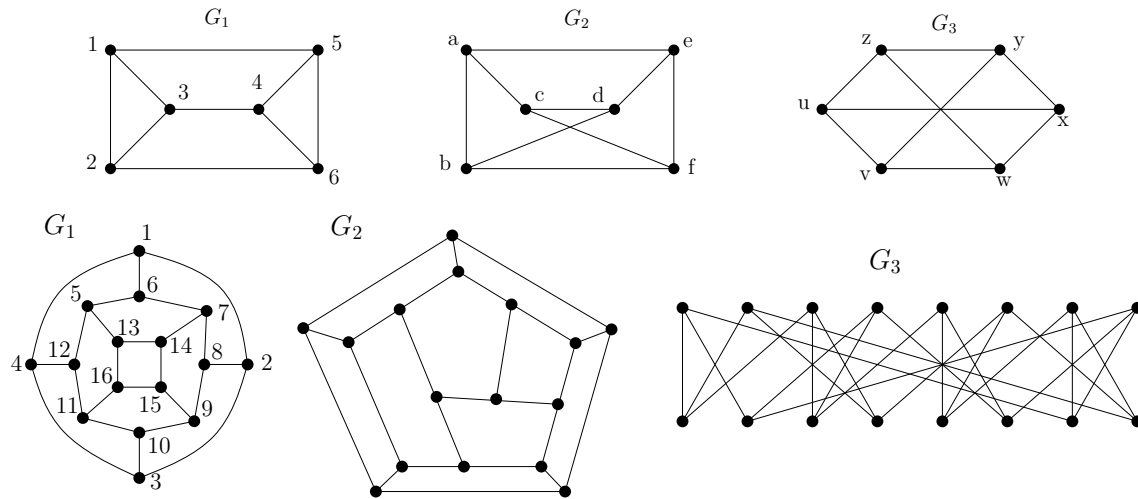


Revaluació de Matemàtiques 1 - Gener 2020  
GRAFS 1: Conceptes bàsics de grafs, recorreguts i connexió

1. Per a cadascuna de les seqüències següents, esbrineu si existeixen grafs d'ordre 6 de forma que els graus dels vèrtexs siguin els valors donats. Si existeixen, doneu-ne un exemple.

(a) 3, 3, 2, 2, 2, 1.      (b) 5, 4, 3, 3, 2, 1.      (c) 5, 5, 3, 2, 2, 1.      (d) 6, 4, 2, 2, 2, 1.

2. Demostreu que si un graf és d'ordre múltiple de 4 i mida senar, aleshores no és regular.
3. (F1-QT12) Esbrineu si són isomorfs els grafs següents; si ho són doneu un isomorfisme i si no ho són justifiqueu-ho.



4. Doneu tots els valors de  $n$  per als quals hi ha un graf regulars de mida 15 i ordre  $n$ . Justifiqueu la resposta.
5. Esbrineu quants grafs hi ha no isomorfs d'ordre 7 i mida 18.
6. Siguin  $G = (V, A)$  un graf i  $v \in V$  un vèrtex. Demostra que si per tot  $u \in V$  hi ha un  $v - u$  camí, aleshores el graf  $G$  és connex.
7. (F1-QT13) Sigui  $G$  un graf amb  $r$  components connexos. Demostreu que  $G^c$  conté un subgraf isomorf a  $K_r$ .
8. (F1-QT12) Esbrineu si existeix un graf connex amb seqüència de graus

5, 5, 5, 5, 5, 4, 4, 4, 4, 3, 3, 3, 2, 2, 1,  $\dots$ , 1 amb 30 1's.

9. Considerem el graf  $G = (V, A)$  on  $V = \{1, 2, \dots, 15\}$  i dos vèrtexs  $i, j$  són adjacents si, i només si, el seu màxim comú divisor és diferent de 1.
- (a) Doneu el component connex  $G_1$  de  $G$  on es troba el vèrtex 2 usant l'algorisme DFS. Indiqueu en quin ordre l'algorisme va passant pels vèrtexs.
- (b) Digueu quants components connexos té  $G$ .
- (c) Doneu un camí de longitud màxima.

10. (P-QT19) Sigui  $n \geq 2$ . Considereu el graf producte  $G_n = T_n \times K_4$ , on el conjunt de vèrtexs del graf trajecte  $T_n$  és  $\{1, 2, \dots, n\}$ , on 1 i  $n$  són els vèrtexs de grau 1, i el conjunt de vèrtexs del graf complet  $K_4$  és  $\{a, b, c, d\}$ .

- a) Calculeu l'ordre, la seqüència de graus i la mida del graf  $G_n$  en funció de  $n$ . És  $G_n$  regular per a algun valor de  $n$ ?
- b) Per a quins valors de  $n$  és bipartit el graf  $G_n$ ?
- c) Dibuixeu els arbres generadors de  $G_2$  obtinguts a l'aplicar els algorismes BFS i DFS al graf  $G_2$ . Preneu com a vèrtex inicial  $(1, a)$  considereu els vèrtexs ordenats de la forma següent:  $(1, a), (1, b), (1, c), (1, d), (2, a), (2, b), (2, c), (2, d)$ .  
Indiqueu en quin ordre s'obtenen els vèrtexs de l'arbre generador en cada cas. Són isomorfs els arbres obtinguts?

11. (F1-QT13) Siguin  $r, s \geq 1$ . Definim  $G(r, s)$  com el graf amb els conjunts de vèrtexs  $V$  i d'arestes  $A$  on

$$V = \{x_1, \dots, x_r, y_1, \dots, y_s\},$$

$$A = \{x_i x_j : 1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq r, i \neq j\} \cup \{x_i y_k : 1 \leq i \leq r, 1 \leq k \leq s\}.$$

Responen raonadament les preguntes següents.

- (a) Doneu l'ordre, la seqüència de graus i la mida de  $G(r, s)$ , per a tot  $r, s > 0$ .
  - (b) Esbrineu per a quins valors de  $r$  i  $s$  el graf  $G(r, s)$  és bipartit.
12. (F1-QP15) Quants components connexos té un graf acíclic d'ordre 120 i mida 10? Doneu dos grafs no isomorfs que satisfacin aquestes condicions. (No és del temari que repassem, però podem intentar resoldre'l.)