Reavaluació de Matemàtiques 1 - Gener 2020
GRAFS : exercicis de complement

1. (F1-QT13) Siguin $r, s \geq 1$. Definim $G(r,s)$ com el graf amb els conjunts de vèrtexs V i d'arestes A on

$$V = \{x_1, \ldots, x_r, y_1, \ldots, y_s\},$$
$$A = \{x_i x_j : 1 \leq i \leq r,\ 1 \leq j \leq r,\ i \neq j\} \cup \{x_i y_k : 1 \leq i \leq r,\ 1 \leq k \leq s\}.$$

Responeu raonadament les preguntes següents.

a) Doneu la distància $d(u,v)$ entre cada parell de vèrtexs $u, v \in V$, el diàmetre i el radi de $G(r,s)$.

b) Determineu per a quins valors de r i s el graf $G(r,s)$ és eulerià.

c) Determineu per a quins valors de r i s és $G(r,s)$ hamiltonià.

d) Esbrineu si $G(r,s)$ té arestes pont.

2. (F1-QT14) Definiu la *cintura* $c(G)$ d'un graf G com la longitud del cicle més curt de G. Si el graf és acíclic, preneu $c(G) = \infty$.

(a) Determineu la cintura dels grafs $C_n, K_n, K_{r,s}$, i W_n, per a tots els valors possibles dels paràmetres.

(b) Doneu un graf 3-regular amb cintura igual a 4 i ordre el més petit possible.

(c) Demostreu que si G és bipartit, aleshores $c(G) > 3$. Esbrineu si el recíproc és cert.

(d) Demostreu que si G no és acíclic, aleshores $c(G) \leq 2D(G) + 1$.

(e) Calculeu l'ordre, el grau màxim i el grau mínim de G_r.

3. (F1-QT14) Sigui $r \geq 1$ enter. Denotem per V_r el conjunt de tots els subconjunts de $\{1, 2, \ldots, r\}$, inclòs el subconjunt buit. Sigui G_r el graf que té per conjunt de vèrtexs al conjunt V_r i on dos vèrtexs $A, B \in V_r$ (per tant, dos subconjunts de $\{1, 2, \ldots, r\}$) són adjacents si i només si $A \neq B$ i $A \cap B = \emptyset$.

(a) Dibuixeu els grafs G_2 i G_3.

(b) Calculeu l'ordre, el grau màxim i el grau mínim de G_r.

(c) Calculeu el radi i el diàmetre de G_r.

(d) Esbrineu si G_r és eulerià i/o hamiltonià.

(e) Si suprimim de G_r el vèrtex $\emptyset$, quants components connexos té el graf resultant?

4. (P-QP13) D'un graf G en sabem que té conjunt de vèrtexs $V = \{x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_{n-1}, z\}$, $n \geq 2$, que és connex, que els vèrtexs $\{x_1, \ldots, x_n\}$ indueixen un subgraf isomorf a K_n i que els vèrtexs $\{y_1, \ldots, y_{n-1}\}$ indueixen un subgraf isomorf a K_{n-1}.

a) Proveu que la mida de G és almenys $n^2 - 2n + 3$.

b) Proveu que el diàmetre de G és menor o igual que 4.

c) Esbrineu si, amb les dades que es tenen, es pot afirmar que G^c és connex.

d) Proveu que si G té mida $n^2 - 2n + 3$, aleshores no és eulerià.