1. [2 punts]

   (a) (i) Sigui E un espai vectorial sobre $\mathbb{R}$ i $S \subseteq E$. Digueu quines condicions ha de satisfer S perquè sigui subespai vectorial d'E.

   (ii) Indiqueu si els conjunts següents són subespais de l'espai vectorial que s'indica (en aquest apartat responeu només sí o no en cada cas, no s'ha de justificar la resposta):

   1) $S_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 2a-b+3c \\ a-c \end{pmatrix} : a,b,c \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathbb{R}^2$.

   2) $S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : -x+y-3z = 0, 2x+3y-z+2 = 0 \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$.

   3) S_3 és el conjunt de les matrius triangulars superiors de l'espai vectorial $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ de les matrius quadrades 4×4.

   (b) Sigui f un endomorfisme d'un espai vectorial real E. Digueu què vol dir que u sigui vector propi de f de valor propi $\lambda \in \mathbb{R}$. Demostreu que si f té algun vector propi de valor propi 0, aleshores $\dim \operatorname{Ker}(f) \geq 1$.

2. [2 punts] Considereu el subespai S de $\mathbb{R}^4$

$$S_a = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} : x+y+z+3t = 0, x-y+2z-t = 0, x-y+az+(1-a)t = 0 \right\}$$

   (a) Calculeu la dimensió de S_a segons el valor del paràmetre a.

   (b) Doneu una base de S_2.

3. [2 punts] Considerem les bases $B = \{1+x+x^2, x+x^2, 2+x\}$ i $B' = \{1+x^2, -1+x, 2x+x^2\}$ de l'espai $P_2(\mathbb{R})$ de polinomis amb coeficients reals de grau com a molt 2.

   (a) Doneu la matriu de canvi de base de B a B', $P_{B'}^{B}$.

   (b) Doneu les coordenades del polinomi $1+x-x^2$ en la base B'.

4. [4 punts] Sigui $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x-2y \\ x-y \\ x+2y-3z \end{pmatrix}$.

   (a) Calculeu la dimensió i una base dels subespais nucli i imatge de f.

   (b) Doneu el polinomi característic i els valors propis de f. És f diagonalitzable?

   (c) Considerem l'aplicació lineal $g : \mathbb{R}^3 \to \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tal que $g \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y & y+z \\ z+x & y \end{pmatrix}$. Digueu si l'aplicació $g \circ f$ és injectiva, exhaustiva i/o bijectiva.

- Cal que **JUSTIFIQUEU TOTES LES RESPOSTES**.
- Les inverses s'han de calcular amb el mètode de Gauss-Jordan.
- Els sistemes d'equacions lineals s'han de resoldre amb el mètode de Gauss.
- La durada de l'examen és de 2h.
- No es poden utilitzar apunts, llibres, calculadores, mòbils,...

Model de solució

1. [2 punts]

   (a) (i) Sigui E un espai vectorial sobre $\mathbb{R}$ i $S \subseteq E$. Digueu quines condicions ha de satisfer S perquè sigui subespai vectorial d'E.

   Solució. S és subespai d'E si es compleixen les condicions següents:
   - $S \neq \emptyset$;
   - Per a tot $u, v \in E$, si $u, v \in S$, aleshores $u + v \in S$;
   - Per a tot $u \in E$ i per a tot $\alpha \in \mathbb{R}$, si $u \in S$ aleshores $\alpha\, u \in S$.

   (ii) Indiqueu si els conjunts següents són subespais de l'espai vectorial que s'indica (en aquest apartat responeu només sí o no en cada cas, no s'ha de justificar la resposta):

   1) $S_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 2a - b + 3c \\ a - c \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathbb{R}^2$.

   2) $S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : -x + y - 3z = 0, 2x + 3y - z + 2 = 0 \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$.

   3) S_3 és el conjunt de les matrius triangulars superiors de l'espai vectorial $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ de les matrius quadrades 4×4.

   Solució. S és subespai d'E si es compleixen les dues condicions següents:

   1) Sí (es pot veure fàcilment que $S_1 = \langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle$).

   2) No (S_2 no conté el vector zero).

   3) Sí (el conjunt de matrius triangulars superiors és no buit perquè conté, per exemple, la matriu nul·la; al sumar dues matrius triangulars s'obté una matriu triangular; al multiplicar una matriu triangular per un escalar, s'obté una matriu triangular).

   (b) Sigui f un endomorfisme d'un espai vectorial real E. Digueu què vol dir que u sigui vector propi de f de valor propi $\lambda \in \mathbb{R}$. Demostreu que si f té algun vector propi de valor propi 0, aleshores $\dim \mathrm{Ker}(f) \geq 1$.

   Solució. Un vector $u \in E$ és vector propi de f de valor propi $\lambda \in \mathbb{R}$ si $u \neq O_E$ i $f(u) = \lambda\, u$. Si f té algun vector propi de valor propi 0, aleshores existeix un vector $u \neq 0_E$ tal que $f(u) = 0 \cdot u = 0_E$. Per tant, $0_E \neq u \in \mathrm{Ker} f$. Això implica que el subespai $\mathrm{Ker} f$ té algun vector no nul. Per tant, $\dim \mathrm{Ker}(f) \geq 1$.

2. [2 punts] Considereu el subespai S de $\mathbb{R}^4$

$$S_a = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} : x + y + z + 3t = 0, x - y + 2z - t = 0, x - y + az + (1 - a)t = 0 \}$$

   (a) Calculeu la dimensió de S_a segons el valor del paràmetre a.

   Solució. La dimensió de S_a és el nombre de graus de llibertat del sistema, és a dir, 4 menys el rang de la matriu A de coeficients del sistema. Calculem el rang d'aquesta matriu fent transformacions elementals per files:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & a & 1-a \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & a-2 & 2-a \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & a-2 & 2-a \end{pmatrix}.$$

El rang de A és igual a 3 si $a \neq 2$ i igual a 2 si $a = 2$. Per tant,

$$\dim S_a = \begin{cases} 4 - 3 = 1, & \text{si } a \neq 2 \\ 4 - 2 = 2, & \text{si } a = 2 \end{cases}$$

(b) Doneu una base de S_2.

Solució. Sabem de l'apartat anterior que $\dim S_2 = 2$. Per a trobar una base, resolem el sistema d'equacions lineals homogeni que defineix el subespai S_2. De l'apartat anterior tenim que per en aquest cas el sistema és equivalent al sistema que té per matriu de coeficients:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 1 & -4 \end{pmatrix}.$$

Fem transformacions elementals per resoldre el sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 1 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1/2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3/2 & 1 \\ 0 & -1 & 1/2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3/2 & 1 \\ 0 & 1 & -1/2 & 2 \end{pmatrix}.$$

La solució del sistema és doncs:

$$x = -\frac{3}{2}z - t, y = \frac{1}{2}z - 2t, z, t \in \mathbb{R}.$$

Expressem la solució de forma paramètrica:

$$\begin{pmatrix} (-3/2)z - t \\ (1/2)z - 2t \\ z \\ t \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} -3/2 \\ 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Una base de S_2 és:

$$\left\{ \begin{pmatrix} -3/2 \\ 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

3. [2 punts] Considerem les bases $B = \{1 + x + x^2, x + x^2, 2 + x\}$ i $B' = \{1 + x^2, -1 + x, 2x + x^2\}$ de l'espai $P_2(\mathbb{R})$ de polinomis amb coeficients reals de grau com a molt 2.

(a) Doneu la matriu de canvi de base de B a B', $P^B_{B'}$.

Solució. La matriu $P^B_{B'}$ de canvi de base de B a B' té per columnes els vectors de B expressats en la base B'. Coneixem els vectors de B i de B' en la base $C = \{1, x, x^2\}$. Per tant, podem calcular $P^B_{B'}$ en funció d'aquestes matrius, concretament,

$$P^B_{B'} = P^C_{B'} P^B_C = (P^{B'}_C)^{-1} P^B_C$$

on

$$P^B_C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \ P^{B'}_C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Per tant,

$$P^B_{B'} = (P^{B'}_C)^{-1} P^B_C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculem la inversa de $P_C^{B'}$ per Gauss-Jordan:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right).$$

La matriu $P_{B'}^B$ és doncs:

$$P_{B'}^B = (P_C^{B'})^{-1} P_C^B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & -5 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(b) Doneu les coordenades del polinomi $1 + x - x^2$ en la base B'.

Solució. Si $(p)_C$ i $(p)_B$ són les coordenades d'un polinomi $p \in P_2(\mathbb{R})$ en les bases C i B' respectivament, sabem que $P_{B'}^C\ (p)_C = (p)_{B'}$. La matriu $P_{B'}^C$ és la matriu $(P_C^{B'})^{-1}$ calculada a l'apartat anterior. Per tant, les coordenades de $p = 1 + x + x^2$ en la base B' són:

$$(p)_{B'} = P_{B'}^C\ (p)_C = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

4. [4 punts] Sigui $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - 2y \\ x - y \\ x + 2y - 3z \end{pmatrix}$.

(a) Calculeu la dimensió i una base dels subespais nucli i imatge de f.

Solució. Calculem primer la matriu associada en la base canònica, M. Serà una matriu 3×3, ja que $\mathbb{R}^3$ té dimensió 3. La imatge dels vectors de la base canònica és

$$f \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, f \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, f \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix},$$

per tant,

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

La dimensió de la imatge és el rang de M. Caculem el rang de M fent transformacions elementals per files:

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Per tant, $\dim \mathrm{Im} f = \mathrm{rang} M = 2$. Una base de la imatge està formada per dues columnes de M linealment independents. Veiem que les dues primeres columnes no són proporcionals, per tant, una base de la imatge és: $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$.

La dimensió del nucli la calculem sabent que és la dimensió de l'espai de sortida menys la dimensió de la imatge:

$$\dim \mathrm{Ker} f = 3 - 2 = 1.$$

Una base del nucli la trobem resolent el sistema d'equacion lineal homogeni que té per matriu de coeficients la matriu M:

$$\begin{pmatrix}2 & -2 & 0\\ 1 & -1 & 0\\ 1 & 2 & -3\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 1 & 2 & -3\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 3 & -3\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}.$$

El conjunt de solucions del sistema és

$$\left\{ \begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} : x = z, y = z, z \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix}z\\ z\\ z\end{pmatrix} : z \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ z \begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix} : z \in \mathbb{R} \right\} = \langle \begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix} \rangle$$

Per tant, una base del nucli és $\left\{ \begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix} \right\}$

(b) Doneu el polinomi característic i els valors propis de f. És f diagonalitzable?

Solució. El polinomi característic és

$$\begin{aligned} p_f(x) = \det(M - xI) = \det \begin{pmatrix}2-x & -2 & 0\\ 1 & -1-x & 0\\ 1 & 2 & -3-x\end{pmatrix} &= (-3-x) \det \begin{pmatrix}2-x & -2\\ 1 & -1-x\end{pmatrix} \\ = (-3-x)\big((2-x)(-1-x) - (-2)\big) = (-3-x)(x^2 - x) &= x(x-1)(-3-x) \end{aligned}$$

els valors propis de f són les arrels de $p_f(x)$, és a dir, 0, 1 i -3. L'endomorfisme f diagonalitza perquè té 3 valors propis diferents i la dimensió de l'espai on està definit f és 3.

(c) Considerem l'aplicació lineal $g : \mathbb{R}^3 \to \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tal que $g \begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x+y & y+z\\ z+x & y\end{pmatrix}$. Digueu si l'aplicació $g \circ f$ és injectiva, exhaustiva i/o bijectiva.

Solució. Podem determinar si $g \circ f$ és injectiva o exhaustiva a partir del rang de la matriu associada a $g \circ f$. Calculem la matriu associada a $g \circ f$ en les bases canòniques respectives tenint en compte que $M(g \circ f) = M(g)M(f)$, i $M(f) = M$. Tenim que $M(g) = \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$,

ja que $g \begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $g \begin{pmatrix}0\\ 1\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $g \begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$. Per tant,

$$M(g \circ f) = M(g)M(f) = \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}2 & -2 & 0\\ 1 & -1 & 0\\ 1 & 2 & -3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3 & -3 & 0\\ 2 & 1 & -3\\ 3 & 0 & -3\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}$$

Veiem que les files primera i quarta són proporcionals, per tant,

$$\begin{aligned} rgM(g \circ f) = rg \begin{pmatrix}2 & 1 & -3\\ 3 & 0 & -3\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix} &= rg \begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 2 & 1 & -3\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix} = rg \begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 3 & -3\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix} \\ &= rg \begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} = 2 \end{aligned}$$

Aleshores $g \circ f$ no és injectiva perquè el rang de $M(g \circ f)$ és diferent de la dimensió de l'espai de sortida ($\dim \mathbb{R}^3 = 3$), i no és exhaustiva perquè el rang és diferent de la dimensió de l'espai d'arribada ($\dim \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) = 4$). I no és bijectiva perquè no és injectiva i exhaustiva alhora.

Solució alternativa. Observem que $g \circ f$ és una aplicació de $\mathbb{R}^3$ en $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$. L'aplicació $g \circ f$ no és bijectiva perquè els espais vectorials de sortida i d'arribada tenen dimensions diferents (3 i 4, respectivament) i no és exhaustiva perquè la dimensió de l'espai d'arribada és més gran que la dimensió de l'espai de sortida. Comprovem ara si és injectiva. Hem vist que en apartats anetriors que $f\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$, i la imatge del vector zero per una aplicació lineal és també el vector zero. Per tant, no és injectiva perquè el nucli de $g \circ f$ conté almenys un vector no nul:

$$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \in \operatorname{Ker}(g \circ f) \neq \left\{ \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \right\}.$$