Capítulo 5

Fórmula de Taylor

5.1 Problemas

1. Empreu el polinomi de Taylor de grau 2 de la funció $f(x) = \sqrt[3]{1728+x}$ per tal d'avaluar $\sqrt[3]{1731}$. Fiteu l'error comès.

Solución.

El polinomio de Taylor de grado 2 de la función f en el punto x_0 y el residuo correspondiente en la forma de Lagrange son

$$P_2(x) = f(x_0)+f'(x_0)\,(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}\,(x-x_0)^2, \quad R_2(x) = \frac{f'''(c)}{3!}\,(x-x_0)^3, \quad \text{on } x_0 \lesseqgtr c \lesseqgtr x.$$

Como $f'(x) = \dfrac{1}{3}(1728+x)^{-2/3}$, $f''(x) = -\dfrac{2}{9}(1728+x)^{-5/3}$, $f'''(x) = \dfrac{10}{27}(1728+x)^{-8/3}$ y $\sqrt[3]{1728} = 12$, es lógico escoger el origen como x_0, es decir, $x_0 = 0$.

Entonces $f(0) = 12$, $f'(0) = \dfrac{1}{432}$, $f''(0) = \dfrac{1}{1119744}$ con lo cual

$$P_2(x) = 12 + \frac{x}{432} + \frac{x^2}{2239488}.$$

Observamos que $\sqrt[3]{1731} = \sqrt[3]{1728+3}$, entonces se trata de calcular el valor aproximado de $f(3)$. Según los enunciados del problema para esta aproximación podemos utilizar el polinomio de Taylor $P_2(x)$. Por lo tanto,

$$f(3) \simeq P_2(3) = 12 + \frac{3}{432} + \frac{3^2}{2239488} \simeq 12.00694042.$$

El error absoluto de esta aproximación, utilizando la fórmula de Taylor, se puede calcular del modo siguientes

$$\varepsilon = |\text{Valor exacto - Valor aproximado}| = |f(3)-P_2(3)| = |R_2(3)| = \left|\frac{f'''(c)(3-0)^3}{3!}\right| =$$

$$= \frac{10\cdot 3^3}{6\cdot 27(1728+c)^{8/3}} < \frac{10}{12^8} = 3.9\cdot 10^{-9}$$

ya que, como $0 < c < 3$, el valor máximo se obtiene cuando el denominador es más pequeño, es decir para $c = 0$.

2. Considereu la funció $f(x) = \ln(1-x)$.

a) Determineu els cinc primers termes no nuls del polinomi de Taylor centrat a l'origen i l'expressió del residu corresponent en la forma de Lagrange de la funció $f(x)$.

b) Determineu el grau del polinomi de Taylor de la funció $f(x)$ per obtenir el valor de $\ln 0.75$ amb error més petit que 10^{-3} .

Solución.

a) Calculamos las derivadas de f:
$f(x) = \ln(1-x), \quad f'(x) = -(1-x)^{-1}, \quad f''(x) = -(1-x)^{-2},$
$f'''(x) = -2(1-x)x^{-3}, \quad f''''(x) = -2\cdot 3(1-x)^{-4}, \ldots$
Luego $f^{(k)}(x) = -(k-1)!\,(1-x)^{-k}, \quad f^{(k)}(0) = -(k-1)! \quad \forall\, k \geq 1$
y $f(1) = \ln 1 = 0$.
El polinomio de Taylor de grado n de la función $\ln(1-x)$ en el punto $x_0 = 0$ y el resto correspondiente en la forma de Lagrange son

$$P_n(x) \;=\; \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\, x^k = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n,$$

$$R_n(x) \;=\; \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\, x^{n+1}, \text{ donde } c \text{ está entre } x \text{ y } 0 \quad (0 \gtrless c \gtrless x).$$

Por lo tanto los cinco primeros términos no nulos corresponden a

$$P_5(x) \;=\; \sum_{k=1}^{5} \frac{-(k-1)!}{k!}\, x^k \;=\; -\sum_{k=1}^{5} \frac{x^k}{k} = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5},$$

y el residuo correspondiente es

$$R_5(x) \;=\; \frac{-5!}{6!(1-c)^6}\, x^6 \;=\; -\frac{x^6}{6(1-c)^6}, \quad 0 \gtrless c \gtrless x.$$

b) Para determinar el grado del polinomio de Taylor, necesario para obtener el valor de $\ln 0.75$ con el error más pequeño que 10^{-3}, tenemos en cuenta que el error absoluto de la aproximación $\ln 0.75 = f(0.25) \approx P_n(0.25)$ y su cota superior se calculan de la forma siguiente

$$\epsilon = |f(0.25) - P_n(0.25)| = |R_n(0.25)| = \left| \frac{-n!}{(1-c)^{n+1}(n+1)!} 0.25^{n+1} \right| = \frac{0.25^{n+1}}{(1-c)^{n+1}(n+1)} \leq$$

$$\leq \frac{0.25^{n+1}}{0.75^{n+1}(n+1)} = \frac{1}{3^{n+1}(n+1)}$$

ya que, como $0 < c < 0.25$, el valor máximo se obtiene cuando el denominador es más pequeño, es decir para $c = 0.25$.

Determinaremos el grado del polinomio de Taylor para obtener el valor de $\ln 0.75$ con error menor que 10^{-3} resolviendo la siguiente desigualdad

$$\frac{1}{3^{n+1}(n+1)} < 10^{-3} \implies 3^{n+1}(n+1) > 10^3 \implies n \geq 4 \implies n_{\min} = 4$$

y $\ln 0.75 \approx P_4(0.25) = -\sum_{k=1}^{4} \dfrac{0.25^k}{k} = -0.25 - \dfrac{(0.25)^2}{2} - \dfrac{(0.25)^3}{3} - \dfrac{(0.25)^4}{4} \approx -0.2874$.

3. Doneu una cota superior de l'error en la fórmula $e \approx 2 + \dfrac{1}{2!} + \dfrac{1}{3!} + \dfrac{1}{4!}$ mitjançant la fórmula de Taylor de e^x.

Solución.

a) Consideremos la función $f(x) = e^x$ y calcularemos sus derivadas:
$f'(x) = e^x, \quad f''(x) = e^x, \quad \ldots \quad \Longrightarrow \quad f^{(k)}(x) = e^x$ y $f^{(k)}(0) = 1$.
Por lo tanto el polinomio de Taylor de grado n de la función $f(x) = e^x$ en el punto $x_0 = 0$ y el resto correspondiente en la forma de Lagrange son

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\, x^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!},$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\, x^{n+1} = \frac{e^c}{(n+1)!} x^{n+1} \text{ donde } c \text{ está entre } x \text{ y } 0 \quad (0 \gtreqless c \gtreqless x).$$

Según los enunciados del problema $e = f(1) \approx 2 + \dfrac{1}{2!} + \dfrac{1}{3!} + \dfrac{1}{4!} = P_4(1)$.
El error de esta aproximación y su cota superior se calculan del modo siguiente
$\varepsilon = |f(1) - P_4(1)| = |R_4(1)| = \left| \dfrac{f^{(5)}(c)1^5}{5!} \right| = \dfrac{e^c}{5!} < \dfrac{e}{5!} < \dfrac{3}{5!} = \dfrac{1}{40} = 0.025$
ya que, como $0 < c < 1$ y $f(x) = e^x$ es una función creciente, el valor máximo se obtiene cuando el numerador es más grande, es decir para $c = 1$.