4.2 Problemas de taller

Ejercicio 6

Sea $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ una función continua y derivable tal que $f'(x) \neq 1$ para todo $x \in [0,1]$.
Demostrar que existe un único $x_0 \in [0,1]$ t.q $f(x_0) = x_0$

Solución

Demostrar que existe x_0 unico en $[0,1]$ t.q $f(x_0) = x_0$ es equivalente a demostrar que $g(x) = f(x) - x$ tiene un cero único x_0 en $[0,1]$ t.q $g(x_0) = 0$

consideramos $g(x) = f(x) - x$

- g es continua y derivable en $[0,1]$.
- $g(0) > 0$ $\left(g(0) = f(0) - 0 \geq 0 \text{ ya que } 0 \leq f(x) \leq 1 \ \forall x \in [0,1] \right)$ (en el caso que $g(0) = 0$ ya esta solucionado el problema).
- $g(1) < 1$ $\left(g(1) = f(1) - 1 \leq 0 \text{ ya que } 0 \leq f(x) \leq 1 \ \forall x \in [0,1] \right)$ (en el caso que $g(1) = 0$ ya esta solucionado el problema).

Entonces Bolzano garantiza la existencia de como mínimo un cero $x_0 \in [0,1]$ t.q $g(x_0) = 0$.

Este cero x_0 es único ya que $g'(x) = f'(x) - 1 \neq 0$ esto quiere decir que g sea o creciente o decreciente en $[0,1]$ por lo tanta cortara OX una vez.

Scanned by CamScanner

7. consideramos la ecuación $e^x = \frac{1}{2}x + 2$ (2)

a) Demostrar que (2) tiene una solución positiva y otra negativa en $[-5, 2]$.

Solución consideramos $f(x) = e^x - \frac{1}{2}x - 2$

- f és continua en $\mathbb{R}$ y en particular en $[-5, 0]$
- $f(-5) > 0$ y $f(0) < 0$

Bolzano garantiza la existencia de $c \in (-5, 0)$ t.q $f(c) = 0$

- f és continua en $[0, 2]$
- $f(0) < 0$ y $f(2) > 0$
- existe $c' \in [0, 2]$ según Bolzano t.q $f(c') = 0$

b) Demostrar que la ecuación (2) tiene sólo dos soluciones reales. (supongamos que hay más soluciones) $\Rightarrow$

Solución en $[-5, 0]$ Según Roll, existe $A \in (-5, 0)$ t.q $f'(A) = 0$
en $[0, 2]$ " " , " $B \in (0, 2)$ t.q $f'(B) = 0$

pero si calculamos $f'(x) = e^x - \frac{1}{2}$

y resolvimos $f'(x) = 0 \Rightarrow x = \ln\frac{1}{2}$

f' sólo se anula una vez NO dos veces

Entonces NO hay más de dos soluciones

7.

c) Determinar, sin realizar ninguna iteración, el número de iteraciones necesarias para calcular, usando el método de la bisección, la solución positiva de (2) con error meno que 10^{-8}.

Solución se trata de buscar una aproximación del caso en $[0,2]$ con error menor que 10^{-8}.

la teoria dice $\frac{b-a}{2^n} < 10^{-8}$

$$\Rightarrow \frac{2-0}{2^n} < 10^{-8} \Rightarrow \frac{2}{10^{-8}} < 2^n \Rightarrow \log_2(2.10^8) < n$$

$$\Rightarrow n \geq 27$$

8. Calcular los siguientes limites usando la regla de l'Hôpital.

Solución a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^5} = \frac{\infty}{\infty}$ ind $\stackrel{H}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{5x^4} \stackrel{H}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{5.4.x^3} = \dots \stackrel{H}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{5!} = \boxed{+\infty}$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}} = (+\infty)^0$ ind $= \lim\limits_{x\to+\infty} e^{\ln x^{\frac{1}{x}}} = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x}\ln x} = e^{\lim \frac{\ln x}{x}} \stackrel{H}{=} e^{\lim \frac{1}{x}} = e^0 = \boxed{1}$

c) $\lim\limits_{x\to0^+} x^{\sin x} = 0^0$ ind $= \lim\limits_{x\to0^+} e^{\sin x \ln x} = e^{\lim\limits_{x\to0^+}\left(\frac{\ln x}{\frac{1}{\sin x}}\right)} \stackrel{H}{=} e^{\lim\limits_{x\to0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{\cos x}{\sin^2 x}}} = e^{\lim\limits_{x\to0^+} \frac{\sin^2 x}{x.\cos x}}$

$$= e^{\lim\limits_{x\to0^+} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\sin x}{\cos x}} = e^{\lim\limits_{x\to0^+} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim\limits_{x\to0^+} \frac{\sin x}{\cos x}} = e^{1.0} = \boxed{1}$$

(Recordar que $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$)

8. d) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = \left(\frac{a^0+b^0}{2}\right)^{\frac{1}{0}} = 1^{\infty} = \text{ind}$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}\ln\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)} = e^{\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)}{x}}$$

$$\overset{\hat{H}}{=} e^{\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{2}}{a^x+b^x}\cdot\frac{a^x\ln a+b^x\ln b}{\cancel{2}}} = e^{\frac{1}{a^0+b^0}\cdot(a^0\ln a+b^0\ln b)} = e^{\frac{\ln a+\ln b}{2}}$$

$$= \left(e^{\ln a+\ln b}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(e^{\ln a}\cdot e^{\ln b}\right)^{\frac{1}{2}} = \boxed{(a.b)^{\frac{1}{2}}}$$

e) $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{\ln 1}{0} = \frac{0}{0} = \text{ind}$

$$\overset{\hat{H}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{1}{1+x} = \boxed{1}$$

f) $\lim_{x\to 0}\underbrace{\frac{1}{x}\cdot\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{1/2}} = \frac{0}{0} = \text{ind}$

$$\overset{\hat{H}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)'}{(2x)'} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\cdot\frac{1-x}{1+x}\cdot\left(\frac{1+x}{1-x}\right)'$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\cdot\frac{\cancel{(1-x)}}{1+x}\cdot\frac{1-\cancel{x}+1+\cancel{x}}{(1-x)^{\cancel{2}}}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{2}}{(1+x)(1-x)} = \boxed{1}$$

g) $\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x}} = 1^{\infty} = \text{ind}$

$$e^{\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{x}} \overset{\hat{H}}{=} e^{\lim_{x\to 0}-\frac{\sin x}{\cos x}} = e^0 = \boxed{1}$$

8. h) $\lim_{x\to+\infty} x^{\tan\frac{1}{x}} = (+\infty)^0 = \text{ind}$

$$\hookrightarrow = e^{\lim_{x\to+\infty} \tan\frac{1}{x}\cdot \ln x} = e^{\lim\left(\frac{\ln x}{\frac{1}{\tan\frac{1}{x}}}\right)} \overset{\hat{H}}{=} e^{\lim \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{\sin^2\frac{1}{x}}}}$$

$$\left(\left(\frac{1}{tg x}\right)' = -\frac{1}{\sin^2 x}\right)$$

$$= e^{\lim \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{\sin\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{\sin\frac{1}{x}}}}$$

$$\left(\lim_{x\to\infty} \sin\frac{1}{x} = \sin 0 = 0\right)$$

$$\left(\lim_{x\to+\infty} \overbrace{-\frac{1}{x}}^{0}\cdot\overbrace{\sin\frac{1}{x}}^{\text{acotat}} = 0\right)$$

$$= e^{\left(\lim -\frac{1}{x}\cdot\sin\frac{1}{x}\right)\left(\lim \sin\frac{1}{x}\right)}$$

$$= e^{0\cdot 0} = \boxed{1}$$

i) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+x^\alpha)}{\ln(1+x^\beta)}$ amb $\alpha>\beta>0$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+x^\alpha)}{\ln(1+x^\beta)} = \frac{+\infty}{+\infty} = \text{ind}$$

$$\overset{\hat{H}}{\hookrightarrow} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{1+x^\alpha}\cdot\alpha x^{\alpha-1}}{\frac{1}{1+x^\beta}\cdot\beta x^{\beta-1}} = \frac{\alpha}{\beta}\lim_{x\to+\infty}\frac{(1+x^\beta)\cdot x^{\alpha-1-\beta+1}}{1+x^\alpha}$$

Distributiva

$$= \frac{\alpha}{\beta}\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\alpha-\beta}+x^\alpha}{1+x^\alpha} = \frac{\alpha}{\beta}\lim_{x\to+\infty}\cancel{\frac{x^\alpha}{x^\alpha}} = \boxed{\frac{\alpha}{\beta}}$$

Scanned by CamScanner

EX.9 Calcular los siguientes límites

a) $\lim_{x \to 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x} = \frac{0 \cdot \text{acotat}}{0} = \frac{0}{0}$ ind

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin x} \cdot x \cdot \sin \frac{1}{x}$$

$$= \underbrace{\lim_{x \to 0} \frac{1}{\frac{\sin x}{x}}}_{1} \cdot \underbrace{\lim x \cdot \overbrace{\sin \frac{1}{x}}^{\text{acotat}}}_{0}$$

$$= 1 \cdot 0$$

$$= \boxed{0}$$

b) $\lim_{x \to +\infty} \frac{x + \sin x}{x - \sin x} = \frac{+\infty}{+\infty}$ ind

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{x + \sin x}{x}}{\frac{x - \sin x}{x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1 + \frac{\sin x}{x}}{1 - \frac{\sin x}{x}}$$

$\lim \overset{0}{\frac{1}{x}} \cdot \overset{\text{acotat}}{\sin x} = 0$

0

$$= \boxed{1}$$

Scanned by CamScanner