

1. (2.5 punts) Sigui $K = \int_1^2 \frac{1}{x} dx$.

- a) Fent ús de la regla de Barrow per calcular K .
- b) El valor aproximat de K es pot obtenir utilitzant la fórmula de Simpson per a la integral $\int_1^2 \frac{1}{x} dx$. Calculeu el nombre de subintervalos necessaris per obtenir el valor d'aquesta integral fent ús de la fórmula de Simpson amb un error més petit que 0.002.
- c) Doneu el valor aproximat de K amb el grau d'exactitud de l'apartat b).

Solución.

a) Por la regla de Barrow $K = \int_1^2 \frac{1}{x} dx = \ln x \Big|_1^2 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$.

b) El valor aproximado de K se obtiene con la fórmula de Simpson para n subintervalos del modo siguiente

$$K = \int_1^2 \frac{1}{x} dx \approx \frac{h}{3} \left(f(b) + f(a) + 2(f(x_2) + \dots + f(x_{n-2})) + 4(f(x_1) + \dots + f(x_{n-1})) \right),$$

donde $a = 1$, $b = 2$, $h = (b - a)/n = 1/n$, $x_i = a + ih = 1 + i/n$. El error de esta aproximación y su cota superior son

$$\varepsilon = \left| -\frac{(b-a)^5}{180n^4} f^{(4)}(c) \right| = \frac{24}{180n^4 c^5} < \frac{24}{180n^4}, \text{ ya que } f^{(4)}(x) = \frac{24}{x^5} \text{ y } 1 < c < 2.$$

Resolviendo la desigualdad $\frac{24}{180n^4} < 0.002$ resulta que $n > \sqrt[4]{\frac{24}{180 \cdot 0.002}} \approx 2.86$. Entonces, como n es par, $n_{\min} = 4$.

$$\begin{aligned} \text{c) } K &= \int_1^2 \frac{1}{x} dx \approx \frac{1}{12} \left(f(2) + f(1) + 2f(1.5) + 4f(1.25) + 4f(1.75) \right) = \\ &= \frac{1}{12} \left(1/2 + 1 + 2/1.5 + 4/1.25 + 4/1.75 \right) \approx 0.693. \end{aligned}$$

2. (2.5 punts) Donada la funció $f(x, y) = \sin x \cdot \sin y$.

- Escribiu el polinomi de Taylor de grau 2 per a f en el punt $(0, 0)$ i la resta de Taylor en forma de Lagrange corresponent.
- Utilitzant el polinomi obtingut, calculeu un valor aproximat per a $f(1/2, 1/2)$ i fiteu l'error comès.

Solución.

a) El polinomio de Taylor de grado 2 para f es

$$P_2(x, y) = f(0, 0) + f'_x(0, 0)x + f'_y(0, 0)y + \frac{1}{2!} \left(f''_{xx}(0, 0)x^2 + 2f''_{xy}(0, 0)xy + f''_{yy}(0, 0)y^2 \right)$$

y el resto de Taylor en forma de Lagrange correspondiente es

$$R_2(x, y) = \frac{1}{3!} \left(f'''_{xxx}(\alpha, \beta)x^3 + 3f'''_{xxy}(\alpha, \beta)x^2y + 3f'''_{xyy}(\alpha, \beta)xy^2 + f'''_{yyy}(\alpha, \beta)y^3 \right),$$

donde $0 \leq \alpha \leq x$ y $0 \leq \beta \leq y$.

Calculamos las siguientes derivadas

$$\begin{aligned} f(x, y) = \sin x \sin y &\Rightarrow f(0, 0) = 0; & f''_{xx}(x, y) = -\sin x \sin y &\Rightarrow f''_{xx}(0, 0) = 0; \\ f'_x(x, y) = \cos x \sin y &\Rightarrow f'_x(0, 0) = 0; & f''_{xy}(x, y) = \cos x \cos y &\Rightarrow f''_{xy}(0, 0) = 1; \\ f'_y(x, y) = \sin x \cos y &\Rightarrow f'_y(0, 0) = 0; & f''_{yy}(x, y) = -\sin x \sin y &\Rightarrow f''_{yy}(0, 0) = 0; \\ f'''_{xxx}(x, y) = -\cos x \sin y &\Rightarrow f'''_{xxx}(\alpha, \beta) = -\cos \alpha \sin \beta; \\ f'''_{xxy}(x, y) = -\sin x \cos y &\Rightarrow f'''_{xxy}(\alpha, \beta) = -\sin \alpha \cos \beta; \\ f'''_{xyy}(x, y) = -\cos x \sin y &\Rightarrow f'''_{xyy}(\alpha, \beta) = -\cos \alpha \sin \beta; \\ f'''_{yyy}(x, y) = -\sin x \cos y &\Rightarrow f'''_{yyy}(\alpha, \beta) = -\sin \alpha \cos \beta. \end{aligned}$$

Sustituyendo estas derivadas en las fórmulas de $P_2(x, y)$ y $R_2(x, y)$, obtenemos que

$$P_2(x, y) = xy \text{ y } R_2(x, y) = -\frac{1}{3!} \left(\cos \alpha \sin \beta x^3 + 3 \sin \alpha \cos \beta x^2 y + 3 \cos \alpha \sin \beta xy^2 + \sin \alpha \cos \beta y^3 \right).$$

b) $f(1/2, 1/2) \approx P_2(1/2, 1/2) = 1/2 \cdot 1/2 = 1/4$.

La cota del error absoluto de esta aproximación se puede calcular del modo siguiente

$$\begin{aligned} \varepsilon &= |f(1/2, 1/2) - P_2(1/2, 1/2)| = |R_2(1/2, 1/2)| = \\ &= \left| -\frac{1}{3!} \left(\cos \alpha \sin \beta (1/2)^3 + 3 \sin \alpha \cos \beta (1/2)^3 + 3 \cos \alpha \sin \beta (1/2)^3 + \sin \alpha \cos \beta (1/2)^3 \right) \right| = \\ &= \frac{1}{3! \cdot 8} \left| 4 \cos \alpha \sin \beta + 4 \sin \alpha \cos \beta y^3 \right| = \frac{4}{3! \cdot 8} \left(\cos \alpha \sin \beta + \sin \alpha \cos \beta \right) \leq \\ &\leq \frac{4}{3! \cdot 8} (1 \cdot 1 + 1 \cdot 1) = \frac{1}{6} = 0.1\bar{6} \quad \text{ya que } 0 \leq \sin t \leq 1 \text{ y } 0 \leq \cos t \leq 1 \text{ si } 0 \leq t \leq 1/2. \end{aligned}$$

3. (2.5 punts) Considereu el conjunt

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4, |y| \leq 1\}$$

i la funció $f(x, y) = (x - 1)^2 + y^2$.

- Trobeu els extrems relatius de la funció f .
- Dibuixeu el conjunt D , justifiqueu l'existència d'extrems absoluts de f en D i calculeu-los.

Solució.

a) La funció f és una funció polinòmica i per tant de classe C^2 en tot \mathbb{R}^2 . Per tant els punts crítics de f són les solucions del sistema d'equacions:

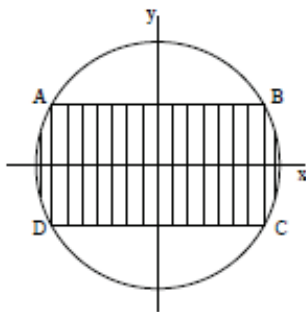
$$\begin{cases} f'_x(x, y) = 0 \\ f'_y(x, y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2 = 0 \\ 2y = 0 \end{cases}$$

Per tant f té un únic punt crític que és $(x, y) = (1, 0)$. Atés a que la matriu Hessiana de f és

$$Hf(1, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

es té $\det(Hf(1, 0)) = 4 > 0$ i $f''_{xx}(1, 0) = 2 > 0$ i per tant en el punt $(1, 0)$ existeix un mínim relatiu de f .

b) D és el conjunt de punts del cercle de centre $(0, 0)$ i radi 2 amb $-1 \leq y \leq 1$. Un esquema de la representació gràfica del recinte D és



El conjunt D és tancat, ja que conté la seva frontera:

conté els dos arcs AD i BC de la circumferència $x^2 + y^2 = 4$

i els dos segments AB i CD de les rectes $y = \pm 1$.

El conjunt D és acotat ja que està contingut en la bola de centre $(0, 0)$ i radi 3.

Per tant, D és compacte.

Com que f es contínua en D , el teorema de Weierstrass assegura l'existència d'extrems absoluts de f en D .

1) Punts crítics de f a l'interior de D :

el punt $(1, 0)$ trobat a l'apartat anterior pertany a l'interior de D , per tant hi ha un punt crític de f a l'interior de D : el $(1, 0)$.

2) Buscarem els punts crítics de f condicionats a ser en la frontera de D :

(i) Vèrtexs de D : $A = (-\sqrt{3}, 1)$, $B = (\sqrt{3}, 1)$, $C = (\sqrt{3}, -1)$ i $D = (-\sqrt{3}, -1)$.

(ii) Punts crítics de f condicionats a ser sobre el segment

$$DC = \{(x, y) \in \mathbb{R} : y = -1, -\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3}\} :$$

fent $y = -1$ tenim $f(x, -1) = (x - 1)^2 + 1$, que és una funció d'una variable $\varphi(x) = (x - 1)^2 + 1$. Per trobar els punts crítics igualem la seva derivada a 0 i resolem: $\varphi'(x) = 2x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1$. Així s'obté el punt crític $(1, -1)$.

(iii) Punts crítics de f condicionats a ser sobre el segment

$$AB = \{(x, y) \in \mathbb{R} : y = 1, -\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3}\} :$$

fent $y = 1$ tenim $f(x, 1) = (x - 1)^2 + 1$, que és una funció d'una variable $\varphi(x) = (x - 1)^2 + 1$. Per trobar els punts crítics igualem la seva derivada a 0 i resolem: $\varphi'(x) = 2x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1$. Així s'obté el punt crític $(1, 1)$.

(iv) Punts crítics de f condicionats a ser sobre els segments circulars AD i BC

$$\{(x, y) \in \mathbb{R} : x^2 + y^2 - 4 = 0, -1 \leq x \leq 1\} :$$

aplicant el mètode de Lagrange, construïm la funció de Lagrange

$$L(x, y, \lambda) = (x - 1)^2 + y^2 - \lambda(x^2 + y^2 - 4).$$

Igualem les seves tres derivades parcials a zero i resolem:

$$\begin{cases} L'_x(x, y, \lambda) = 0 \\ L'_y(x, y, \lambda) = 0 \\ L'_\lambda(x, y, \lambda) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(x - 1) + 2\lambda x = 0 \\ 2y + 2\lambda y = 2y(1 + \lambda) = 0 \\ x^2 + y^2 - 4 = 0 \end{cases}$$

La segona equació implica $y = 0$ o $\lambda = -1$, però $\lambda = -1$ és incompatible amb la primera equació, per tant ha de ser $y = 0$. Aleshores, de la tercera equació obtenim $x = \pm 2$ i de la primera $\lambda = -1/2$ si $x = 2$ i $\lambda = -3/2$ si $x = -2$. Per tant tenim dos punts crítics de la funció de Lagrange, $(2, 0, -1/2)$ i $(-2, 0, -3/2)$ i dos punts crítics de f condicionats sobre els segments circulars AD i BC, $(2, 0)$ i $(-2, 0)$.

Les imatges per f dels punts crítics trobats són:

$$\begin{aligned} f(\sqrt{3}, 1) &= 5 - 2\sqrt{3}; & f(\sqrt{3}, -1) &= 5 + 2\sqrt{3}; & f(2, 0) &= 1; & f(1, 1) &= 1; & f(1, 0) &= 0. \\ f(-\sqrt{3}, 1) &= 5 + 2\sqrt{3}; & f(-\sqrt{3}, -1) &= 5 - 2\sqrt{3}; & f(-2, 0) &= 9; & f(-1, 1) &= 1; \end{aligned}$$

Per tant el valor màxim absolut de f en D és 9 i l'assoleix al punt $(-2, 0)$ i el valor mínim absolut de f en D és 0 i l'assoleix al punt $(1, 0)$.

4. (2.5 punts) Donada la funció $f(x, y) = x^2 + y^2 + 10x$.

- a) Trobeu la direcció de màxim creixement de f en el punt $(0, 1)$ i el valor de la derivada direccional de f en aquesta direcció.
- b) Trobeu l'equació del pla tangent a la superfície $z = f(x, y)$ en el punt $(0, 1, 1)$.
- c) Trobeu els punts d'aquesta superfície en els quals la recta normal té la direcció del vector $(-1, -1, -1)$.

Solución.

a) La funció f és una funció polinòmica i per tant de classe C^1 en tot R^2 .

Donat que f és de classe C^1 en el punt $(0, 1)$, la direcció de màxim creixement de f en el punt $(0, 1)$ és la del vector gradient $\nabla f(0, 1)$ i el valor de la derivada direccional de f en aquesta direcció és $\|\nabla f(0, 1)\|$.

Les derivades parcials de f són $f'_x(x, y) = 2x + 10$ i $f'_y(x, y) = 2y$.

Per tant $f'_x(0, 1) = 10$, $f'_y(0, 1) = 2$, $\nabla f(0, 1) = (10, 2)$ i $\|\nabla f(0, 1)\| = 2\sqrt{26}$.

Aleshores la direcció de màxim creixement de f en el punt $(0, 1)$ és la del vector $(10, 2)$ i el valor de la derivada direccional de f en aquesta direcció és $2\sqrt{26}$.

b) El punt $(0, 1, 1)$ és un punt de la superfície $z = f(x, y)$, per tant l'equació del pla tangent a la superfície en el punt $(0, 1, 1)$ és

$$z = f(0, 1) + f'_x(0, 1)x + f'_y(0, 1)(y - 1)$$

es a dir, $z = 1 + 10x + 2(y - 1) \implies z = 10x + 2y - 1$.

c) La recta normal en un punt $(a, b, f(a, b))$ té vector director $(f'_x(a, b), f'_y(a, b), -1)$. Per tant els punts demanats són els punts tals que el vector $(2a + 10, 2b, -1)$ té la direcció del vector $(-1, -1, -1)$, i per tant

$$\begin{cases} 2a + 10 = -1 \\ 2b = -1 \end{cases}$$

es a dir, $a = -\frac{11}{2}$ i $b = -\frac{1}{2}$. D'on $f(a, b) = f(-\frac{11}{2}, -\frac{1}{2}) = -\frac{49}{2}$.

Per tant l'únic punt d'aquesta superfície en el qual la recta normal té la direcció del vector $(-1, -1, -1)$, és el punt $\left(-\frac{11}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{49}{2}\right)$.