TEMA 5. POLINOMIO DE TAYLOR

5.1. Aproximación polinómica. Polinomio de Taylor. Fórmula de Taylor. Teorema de Taylor y residuo de Lagrange.

Definición

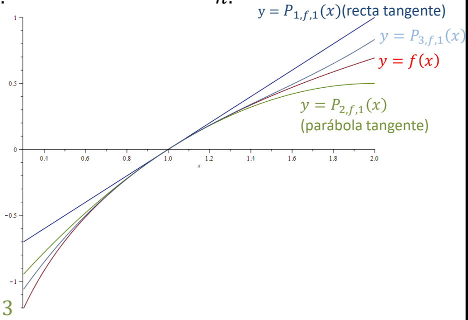
Sean $f: R \to R$ función, $n \in N$, $x_0 \in Dom\, f$ tal que f es n veces derivable en un entorno de x_0. **El polinomio de Taylor de orden n de la función f en el punto x_0** es:

$$P_{n,f,x_0}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

Ejemplo

$f(x) = \ln x\,, x_0 = 1$

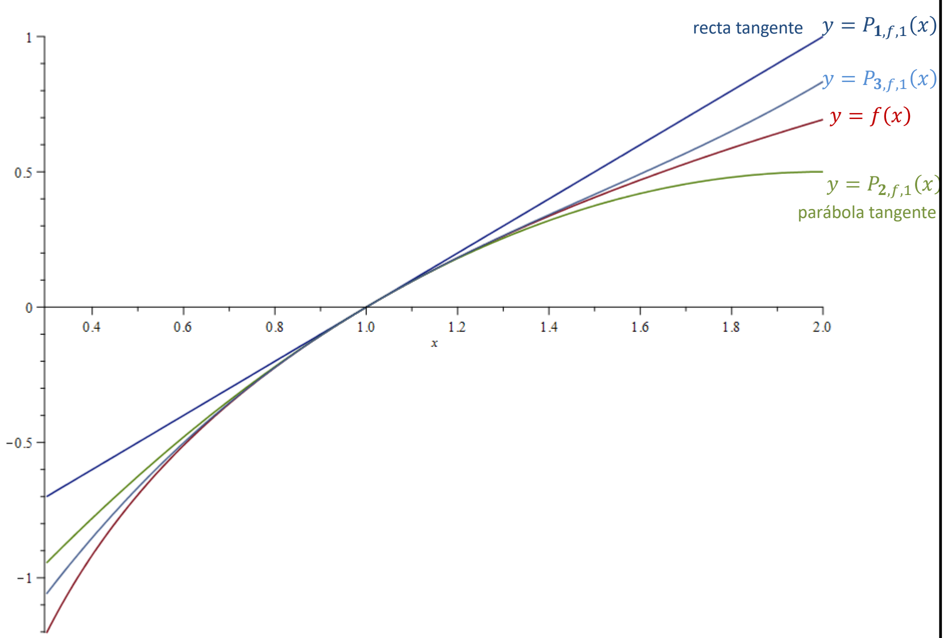
$f(x) = \ln x$	$f(1) = 0$
$f'(x) = \frac{1}{x}$	$f'(1) = 1$
$f''(x) = -\frac{1}{x^2}$	$f''(1) = -1$
$f'''(x) = \frac{2}{x^3}$	$f'''(1) = 2$



$P_{1,f,1}(x) = x - 1$

$P_{2,f,1}(x) = x - 1 - \frac{1}{2!}(x - 1)^2 = -\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{3}{2}$

$P_{3,f,1}(x) = x - 1 - \frac{1}{2!}(x - 1)^2 + \frac{2}{3!}(x - 1)^3 = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3x^2}{2} - 3x - \frac{11}{6}$



$$\left.\begin{array}{l} P_{n,f,x_0}(x_0) = f(x_0) \\ \forall i = 1, \dots n \;\; P_{n,f,x_0}{}^{(i)}(x_0) = f^{(i)}(x_0) \end{array}\right\}$$

"$P_{n,f,x_0}(x)$ y $f(x)$ son iguales hasta el orden n en x_0"

Definición

Se llama **término complementario, resto o residuo del polinomio de Taylor de orden n de la función f en el punto x_0** a:

$$R_{n,f,x_0}(x) = f(x) - P_{n,f,x_0}(x)$$

Teorema de Taylor (y Resto de Lagrange)

$$\left.\begin{array}{l} f\colon R \to R \text{ función} \\ f, f', f'', \dots f^{(n)} \text{ continuas en } [a,b] \\ \exists f^{(n+1)} \text{ en }]a,b[\\ x_0 \in]a,b[\end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{l} \forall x \in Dom\, f \;\; \exists c \;\; entre \;\; x \;\; y \;\; x_0 \; tal \; que: \\ f(x) = P_{n,f,x_0}(x) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \end{array}$$

Resto de Lagrange:

$R_{n,f,x_0}(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$, para cierto c entre x y x_0

Cuanto mayor es n y más cerca está x_0 de x mejor es la aproximación $f(x) \cong P_{n,f,x_0}(x)$

Fórmula de Taylor de orden n de la función f en el punto x_0:

$$\boxed{f(x) = P_{n,f,x_0}(x) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}, \text{ para cierto } c \text{ entre } x \text{ y } x_0}$$

función — polinomio — resto (en valor absoluto: error)

Aproximación de valores de funciones y acotación del error

$$\left.\begin{array}{l} f\colon R \to R \text{ función} \\ f, f', f'', \dots f^{(n)} \text{ continuas en } [a,b] \\ \exists f^{(n+1)} \text{ en} [a,b] \\ x_0 \in]a,b[\\ f^{(n+1)} \text{es continua en } [a,b] \end{array}\right\} \Longrightarrow \exists M_{n+1} = \max_{\substack{t \in [x,x_0] \\ \vee\, t \in [x_0,x]}} \left| f^{(n+1)}(t) \right|$$

Y entonces el error de la aproximación $f(x) \cong P_{n,f,x_0}(x)$ es:

$$\left| R_{n,f,x_0}(x) \right| = \left| \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \right| \leq \frac{M_{n+1}|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Ejercicios: **5.1: 1, 2, 3**

5.2. Aplicaciones de la Fórmula de Taylor. Estudio local de funciones y cálculo de extremos.
Estudio local de funciones

Monotonía y extremos

f función $n+1$ veces derivable en un entorno de a

$f'(a) = f''(a) = f'''(a) = \cdots f^{(n-1)}(a) = 0,\ f^{(n)}(a) \neq 0 \quad (n \geq 1)$

$$f(x) = P_{n,f,a}(x) + R_{n,f,a}(x)$$
$$= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_{n,f,a}(x) \Rightarrow$$
$$f(x) - f(a) = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_{n,f,a}(x)$$

signo

Para x suficientemente próximos a a:

Si n par y $f^{(n)}(a) > 0$: $f(x) - f(a) > 0 \Rightarrow f$ tiene un mínimo relativo en a

Si n par y $f^{(n)}(a) < 0$: $f(x) - f(a) < 0 \Rightarrow f$ tiene un máximo relativo en a

Si n impar y $f^{(n)}(a) > 0 \Rightarrow f$ es creciente en a

Si n impar y $f^{(n)}(a) < 0 \Rightarrow f$ es decreciente en a

Convexidad, concavidad y puntos de inflexión

f función $n+1$ veces derivable en un entorno de a

$f''(a) = f^{(3)}(a) = \cdots f^{(n-1)}(a) = 0,\ f^{(n)}(a) \neq 0 \quad (n \geq 2)$

$$f(x) = P_{n,f,a}(x) + R_{n,f,a}(x)$$
$$= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_{n,f,a}(x) \Rightarrow$$
$$f(x) - [f(a) + f'(a)(x-a)] = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_{n,f,a}(x)$$

signo

Para x suficientemente próximos a a:

Si n par y $f^{(n)}(a) > 0$: $\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n > 0 \Rightarrow f$ es convexa en a

Si n par y $f^{(n)}(a) < 0$: $\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n < 0 \Rightarrow f$ es cóncava en a

Si n impar y $f^{(n)}(a) > 0 \Rightarrow f$ tiene un punto de inflexión en a

Si n impar y $f^{(n)}(a) < 0 \Rightarrow f$ tiene un punto de inflexión en a