**1.** *(2 punts)* Sigui $\{a_n\}$ una successió tal que $a_1 = \dfrac{3}{4}$ i $a_{n+1} = 1 - \sqrt{1 - a_n}$ si $n \geq 1$. Demostreu que:

*a)* $0 < a_n < 1, \quad \forall n \geq 1$; *c)* $\{a_n\}$ és convergent i calculeu-ne el límit;

*b)* $\{a_n\}$ és decreixent; *d)* $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2}$.

**2.** *(2.5 punts)* Considereu les funcions $f(x) = \ln(x-1)$ i $g(x) = 1 - (x-2)^2$ i la regió $S$ limitada per les rectes $x = 2$ i $x = 5/2$ i les corbes $y = f(x)$ i $y = g(x)$.

a) Demostreu que l'equació $f(x) = g(x)$ té solució i que la solució és única.

b) Doneu un interval de longitud menor que 0.2 que contingui la solució de l'apartat a).

c) Dibuixeu la regió $S$ i calculeu-ne l'àrea.

**3.** *(1.25 punts)* Considereu la funció $f(x) = \sqrt[5]{x+1}$.

a) Escriviu el polinomi de Taylor de grau 2 de la funció $f$ en el punt $x_0 = 0$ i el residu corresponent en la forma de Lagrange.

b) Calculeu el valor aproximat de $\sqrt[5]{1.5}$ i una fita superior de l'error absolut d'aquesta aproximació utilitzant el polinomi i el residu de l'apartat a).

**4.** *(2 punts)* Considereu la família de funcions

$$f(x,y) = k\big(2xy + y^2 + yx^2 + \cos(x+y)\big) + x^2(k^2 - y).$$

a) Demostreu que $\forall\, k \in \mathbb{R} - \{1\}$, $(0,0)$ és un punt crític, i classifiqueu-lo en funció del valor de k.

b) Demostreu que si $k = 1$ tots els punts de la recta $x + y = 0$ són crítics.

**5.** *(2.25 punts)* Considereu la funció $f(x,y) = 3x^2 + y^2$.

a) Determineu la direcció $u$ en què la derivada direccional de $f$ al punt $(x,y)$, $D_u f(x,y)$, té el valor màxim i proveu que aquesta derivada direccional és la funció $F(x,y) = 2\sqrt{9x^2 + y^2}$.

b) Apliqueu el mètode dels multiplicadors de Lagrange per trobar els punts candidats a extrems de $F$ si $x^2 + y^2 = 1$.

c) Considereu la regió $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1 \;\text{ i }\; y \geq \frac{1}{2}(x+1)\}$. Proveu que $F$ té extrems absoluts a $K$ i trobeu els punts de $K$ on $F$ té valor màxim absolut. Quin és el valor d'aquest màxim absolut?

CAL JUSTIFICAR TOTES LES RESPOSTES I TAMBÉ ELS CÀLCULS