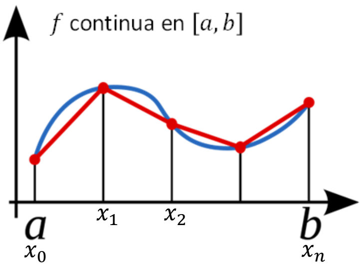
6.3. Integración aproximada: Regla de los trapecios y fórmula del error. Método de Simpson y fórmula del error.

$f: R \to R$ función
$a, b \epsilon R, a < b$
f continua y $f(x) \geq 0$ en $[a, b]$

Cálculo aproximado de $\int_a^b f(x)\,dx$ con la precisión deseada

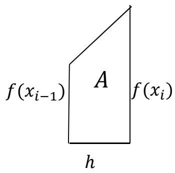
Regla de los trapecios



$P = \{x_0 = a, x_1, \dots, x_n = b\}$ partición tal que:

$$x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n} = h$$

$$x_i = a + i \cdot \frac{b-a}{n} = a + i \cdot h, \qquad i = 0, \dots, n$$



$$A = \frac{f(x_i) + f(x_{i-1})}{2} \cdot h$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \cong \sum_{i=1}^{n} \frac{f(x_i) + f(x_{i-1})}{2} \cdot h = h\left(\frac{f(x_0) + f(x_n)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right)$$

Fórmula de la regla de los trapecios para n subintervalos

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx \cong T_n = \frac{b-a}{n}\left(\frac{f(x_0) + f(x_n)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right) \qquad x_i = a + i \cdot \frac{b-a}{n}, \qquad i = 0, \dots, n}$$

Error

Si f es dos veces derivable en $[a, b] \Longrightarrow$

$$\exists c \in [a, b] \quad \left| T_n - \int_a^b f(x)\,dx \right| = \frac{(b-a)^3}{12n^2} \cdot |f''(c)|$$

Si $M_2 \geq \max\{|f''(x)|: \ x \in [a, b]\} \Longrightarrow$ $\boxed{\left| T_n - \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} \cdot M_2}$

Regla de Simpson

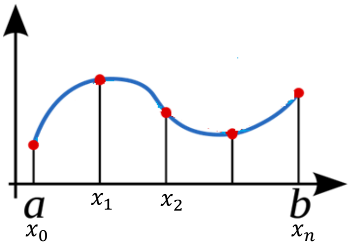
$f: R \rightarrow R$ función
$a, b \epsilon R, a < b$
f continua en $[a, b]$

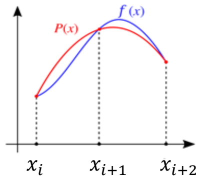
Cálculo aproximado de $\int_a^b f(x)\,dx$
con la precisión deseada

n par
$P = \{x_0 = a, x_1, \ldots, x_n = b\}$ partición tal que:

$$x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n} = h$$

$$x_i = a + i \cdot \frac{b-a}{n} = a + i \cdot h, \qquad i = 0, \ldots, n$$





$$\int_a^b f(x)\,dx \cong S_n = \frac{h}{3}\left(f(x_0) + f(x_n) + 4\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} f(x_{2i-1}) + 2\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-1} f(x_{2i})\right)$$

Fórmula de la regla de Simpson para n subintervalos

$$\boxed{\begin{array}{l} \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \cong S_n = \frac{b-a}{3n}\left(f(a) + f(b) + 4\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} f(x_{2i-1}) + 2\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-1} f(x_{2i})\right) \\ \displaystyle x_i = a + i \cdot \frac{b-a}{n}, \qquad i = 0, \ldots, n \\ \text{Atención: } n \text{ par} \end{array}}$$

Error

Si f es cuatro veces derivable en $[a, b] \Longrightarrow$

$$\exists c \in [a, b] \quad \left| S_n - \int_a^b f(x)\,dx \right| = \frac{(b-a)^5}{180n^4} \cdot |f^{(4)}(c)|$$

Si $M_4 \geq \max\{|f^{(4)}(x)|: \; x \in [a, b]\} \;\; \Longrightarrow \;\; \boxed{\left| S_n - \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \frac{(b-a)^5}{180n^4} \cdot M_4}$