# Àlgebra de límits

**1.-Límits finits:**

Si $\lim a_n = a$, i $\lim b_n = b$, $a, b \in \mathbf{R}$ aleshores

$$\lim(a_n \pm b_n) = a \pm b$$
$$\lim a_n b_n = ab$$
$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b} \text{ si } b \neq 0,\ b_n \neq 0\ \forall n$$
$$\lim b_n^{a_n} = b^a \text{ si } b, b_n > 0\ \forall n$$
$$\lim \log a_n = \log a \text{ si } a_n, a > 0\ \forall n$$

**2.-Límits infinits:**

Si $\lim a_n = a$, $\lim b_n = \lim c_n = +\infty$ i $\lim d_n = 0$, $a \in \mathbf{R}$ aleshores:

| | |
|---|---|
| $\lim(a_n \pm b_n) = \pm\infty$ | $\lim(\pm c_n \pm b_n) = \pm\infty$ |
| $\lim a_n b_n = \pm\infty$ si $a \neq 0$ | $\lim c_n b_n = +\infty$ |
| $\lim \frac{a_n}{b_n} = 0$ | $\lim \frac{a_n}{d_n} = \pm\infty$ |
| $\lim \frac{b_n}{a_n} = \pm\infty$ | $\lim \frac{b_n}{d_n} = \pm\infty$ |
| $\lim \frac{d_n}{a_n} = 0$ | $\lim \frac{d_n}{b_n} = 0$ |
| $\lim a_n^{b_n} = +\infty$ si $a > 1$ | $\lim a_n^{b_n} = 0$ si $0 < a < 1$ |
| $\lim b_n^{a_n} = +\infty$ si $a > 0$ | $\lim b_n^{a_n} = 0$ si $a < 0$ |
| $\lim c_n^{b_n} = +\infty$ | $\lim c_n^{-b_n} = 0$ |

(quan en el resultat posa $\pm\infty$, vol dir que és $+\infty$, $-\infty$, o $\infty$ depenent de les conegudes regles del producte de signes)

**3.-Indeterminacions:**

$$\infty - \infty\ ,\ 0 \cdot \infty\ ,\ \frac{\infty}{\infty}\ ,\ \frac{0}{0}\ ,\ 1^{\infty}\ ,\ 0^0\ ,\ \infty^0$$

## RESUM DE RESOLUCIÓ D'INDETERMINACIONS

$$\lim \quad (a_r n^r + a_{r-1}n^{r-1} + \cdots + a_1 n + a_0) = \lim \quad n^r(a_r + a_{r-1}\frac{1}{n} + \cdots + a_1\frac{1}{n^{r-1}} + a_0\frac{1}{n^r}) = \quad +\infty \cdot a_r = \begin{cases} +\infty \\ -\infty \end{cases}$$

$$\boxed{\frac{\infty}{\infty} \text{ o } \frac{0}{0}}$$

Si és $\dfrac{P(n)}{Q(n)}$:

- grau P(n) > grau Q(n) $\Rightarrow$ lim = +∞ o -∞
- grau P(n) < grau Q(n) $\Rightarrow$ lim = 0
- grau P(n) = grau Q(n) $\Rightarrow$ lim = quocient dels coeficients dels termes de major grau

Si no: dividir numerador i denominador pel terme dominant (el infinit més gran), simplificar,…

$$\boxed{\infty - \infty}$$

Si en el límit hi ha una resta d'arrels quadrades, es multiplica i es divideix per la suma de les arrels i s'aplica: $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

Es pot utilitzar:

$$a_n - b_n = a_n \cdot b_n \cdot \left(\frac{1}{b_n} - \frac{1}{a_n}\right)$$

$$\boxed{1^\infty} \qquad \lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

De la mateixa forma: $a_n \to 0 \quad \Rightarrow \quad \lim(1+a_n)^{\frac{1}{a_n}} = e$

Per tant:

$$\left.\begin{matrix} a_n \to 1 \\ b_n \to +\infty \end{matrix}\right\} \Rightarrow \lim a_n^{b_n} = \lim (1 + a_n - 1)^{b_n} = \lim \left[(1+a_n-1)^{\frac{1}{a_n-1}}\right]^{b_n \cdot (a_n - 1)} =$$

$$= e^{\lim b_n \cdot (a_n - 1)}$$

$$\boxed{\left.\begin{matrix} a_n \to 1 \\ b_n \to +\infty \end{matrix}\right\} \Rightarrow \lim a_n^{b_n} = e^{\lim b_n \cdot (a_n - 1)}}$$

$\boxed{0 \cdot \infty}$

Hi ha dues possibilitats:

i) Es passa a la forma $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$

ii) Es passa a la forma $1^{\infty}$:

$$\left.\begin{array}{l} a_n \to 0 \\ b_n \to \infty \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} 1+a_n \to 1 \\ b_n \to \infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim (1+a_n)^{b_n} = e^{\lim b_n \cdot (a_n)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim a_n b_n = \ln (\lim (1+a_n)^{b_n})$$

$\boxed{0^0 \text{ i } \infty^0}$

Es prenen logaritmes i es passa a la indeterminació $0 \cdot \infty$

$$0^0 \quad \left.\begin{array}{l} a_n \to 0 \\ b_n \to 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \ln a_n^{b_n} = b_n \cdot \ln a_n$$

$$\infty^0 \quad \left.\begin{array}{l} a_n \to +\infty \\ b_n \to 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \ln a_n^{b_n} = b_n \cdot \ln a_n$$

4 CRITERIS ÚTILS

Criteri arrel-quocient:

$$\left(a_n \neq 0, \forall n \geq n_0 \wedge \lim \frac{|a_n|}{|a_{n-1}|} = l\right) \Rightarrow \lim \sqrt[n]{|a_n|} = l$$

Criteri del quocient:

$$\left(a_n \neq 0, \forall n \geq n_0 \wedge \lim \frac{|a_n|}{|a_{n-1}|} = l < 1\right) \Rightarrow \lim a_n = 0 \text{ i}$$

Criteri de l’arrel: $\left(\lim \sqrt[n]{|a_n|} = l < 1\right) \Rightarrow \lim a_n = 0$

Criteri del sandwich:

$$a_n \leq b_n \leq c_n, \forall n \geq n_0 \Rightarrow \lim a_n = \lim c_n = l \Rightarrow \lim b_n = l$$