# APUNTES M2 TEMAS 1-5.pdf

*APUNTES M2*

# M2.

## TEMA 1 : LOS NÚMEROS REALES

### PROPIEDADES ELEMENTALES

1) Conjunto de los naturales $(\mathbb{N}) = \{1, 2, 3, \dots\}$

Dos operaciones
- $\oplus$ → Asociativa : $x+(y+z) = (x+y)+z$ , Conmutativa : $a+b = b+a$
- $\odot$ → Asociativa , conmutativa , Elemento neutro : $1$ , Distributiva respecto de la suma

2) Conjunto de los enteros $(\mathbb{Z}) = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$

+2 prop. en la suma : - Elemento neutro : $0$ $\quad a + 0 = a$

- Elemento opuesto : $-a$ $\quad a + (-a) = 0$

3) Conjunto de los racionales $(\mathbb{Q}) = \{ \frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Z} , b \neq 0 \}$

condición : $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \iff a \cdot d = b \cdot c$

+1 prop. en la mult : - Elemento inverso : $\frac{1}{a}$ $\quad a \cdot \frac{1}{a} = 1$

↳ Propiedades de los racionales :

1) Todo num. racional admite una expresión decimal exacta o periódica

2) Entre dos numeros racionales distintos existen infinitos racionales distintos

↳ $p, q \in \mathbb{Q}$ $\quad p < \frac{p+q}{2} < q \rightarrow p < \frac{p + \frac{p+q}{2}}{2} < \frac{p+q}{2} < \frac{\frac{p+q}{2} + q}{2} < q \rightarrow \dots$

4) Conjunto de los racionales $(\mathbb{R}) = \mathbb{Q} \cup \underbrace{(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})}_{\text{irracionales}}$

Tiene todas las propiedades de $\oplus$ y $\odot$ de los racionales.

Relación de orden en $\mathbb{R}$ : $x, y \in \mathbb{R}$ si $x \geq y \rightarrow \exists z \geq 0$ tq $x + z = y$

(estricto) $\quad (>) \quad (>)$

↳ Propiedades de los reales :

- $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$ $(x < y \Rightarrow x + z < y + z)$
- $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$ $(x < y \wedge z > 0 \Rightarrow x \cdot z < y \cdot z)$
- $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$ $(x < y \wedge z < 0 \Rightarrow x \cdot z > y \cdot z)$
- $\mathbb{Q}$ y $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ son densos en $\mathbb{R}$ : $\forall x, y \in \mathbb{R}$ si $x \neq y$ entonces existen infinitos numeros reales distintos entre x e y.


nocilla®
SIN ACEITE DE PALMA
LA MEJOR RECOMPENSA DESPUÉS
DE UNA TARDE DE ESTUDIO
¿NOCILLEAMOS?
nociyeah!

## COTAS

$A \subseteq \mathbb{R}$ , $A \neq \emptyset$ y $h, l, s, i \in \mathbb{R}$

1) $h$ es cota superior de $A \iff h \geq a$ , $\forall a \in A$

2) $l$ es cota inferior de $A \iff l \leq a$ , $\forall a \in A$

3) $s$ es el supremo de $A \iff$ $s$ es la menor de las cotas superiores de $A \iff \begin{cases} s \geq a , \forall a \in A \\ \forall h \text{ (h cota sup.) } s \leq h \end{cases}$

4) $i$ es el ínfimo de $A \iff i$ es el mayor de las cotas inferiores $\iff \begin{cases} i \leq a , \forall a \in A \\ \forall s \quad s \geq h \end{cases}$

5) El máximo de $A$ es $s \iff s = \sup A \wedge s \in A$

6) El mínimo de $A$ es $i \iff i = \inf A \wedge i \in A$

↳ Teorema del extremo : Todo conjunto de números reales acotado sup. / inf. tiene supremo / ínfimo.

## VALOR ABSOLUTO

$|a| = \begin{cases} a , & a \geq 0 \\ -a , & a < 0 \end{cases}$

→ Propiedades:

- $|x + y| \leq |x| + |y|$ , $\forall x,y \in \mathbb{R}$
- $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$ , $\forall x,y \in \mathbb{R}$
- $a > 0 \wedge |x| \underset{(\geq)}{<} a \iff -a \underset{(\geq)}{<} x \underset{(\geq)}{<} a$ , $\forall x,a \in \mathbb{R}$

La distancia en $\mathbb{R}$

$d(x,y) = |x - y|$

↳ Propiedades:

- $\forall x,y \in \mathbb{R} \quad d(x,y) \geq 0$
- $\forall x,y \in \mathbb{R} \quad d(x,y) = 0 \iff x = y$
- $\forall x,y,z \in \mathbb{R} \quad d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ ← Desigualdad triangular

## INTERVALOS

$a, b \in \mathbb{R}$ , $a < b$:

- Intervalo cerrado : $[a, b] = \{ x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b \}$
- Intervalo abierto : $(a, b) = \{ x \in \mathbb{R} : a < x < b \}$
- Intervalos semiabiertos: $(a, b]$ v $[a, b)$
- Intervalos semirectos : $(-\infty, a)$ , $(-\infty, a]$ , $(b, +\infty)$ , $[b, +\infty)$

# TEMA 2: SUCESIONES DE NOMBRES REALES

- Una sucesión es una aplicación $a: D \to \mathbb{R}$ cuyo dominio $D$ es un subconjunto infinito de $\mathbb{N}$.
- La imagen de un natural $n$ se denota $a_n$ $\begin{cases} n=1 \ , \ a_1 \to 1^{er} \text{ término} \\ \dots \\ n \ , \ a_n \to \text{término n-ésimo} \end{cases}$

## LÍMITES

### 1) Finitos

$\left.\begin{array}{l} a_n \text{ sucesión de números reales} \\ l \in \mathbb{R} \end{array}\right\}$ $l$ límite de $a_n \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \ (\forall n \geqslant n_\varepsilon \ \ |a_n - l| < \varepsilon)$

$\Rightarrow$ $a_n$ converge en $l$

↳ Dado un margen de error ($\varepsilon$) existe un punto del dominio a partir del cual la diferencia entre la imagen de $n$ y el límite es menor que $\varepsilon$.

**Ejemplo:**

$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$, aquí $l = 0 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \ (\forall n \geqslant n_\varepsilon \ \left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon)$

$\Rightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon \Rightarrow \frac{1}{\varepsilon} < n \overset{n \in \mathbb{N}}{\Rightarrow} \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1 \leqslant n \Rightarrow \boxed{n_\varepsilon \geqslant \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1}$

### 2) Infinitos

$+\infty)$ $\left.\begin{array}{l} a_n \text{ suc.} \\ \lim a_n = +\infty \end{array}\right\} \iff \forall K > 0 \ \exists n_K \in \mathbb{N} \ (\forall n \geqslant n_K \ \ a_n > K)$

$\Rightarrow$ $a_n$ diverge hacia $+\infty$

$-\infty)$ $\left.\begin{array}{l} a_n \text{ suc.} \\ \lim a_n = -\infty \end{array}\right\} \iff \forall K > 0 \ \exists n_K \in \mathbb{N} \ (\forall n \geqslant n_K \ \ a_n < -K)$

$\Rightarrow$ $a_n$ diverge hacia $-\infty$

$\infty)$ $\left.\begin{array}{l} a_n \text{ suc.} \\ \lim a_n = \infty \end{array}\right\} \iff \begin{cases} \forall K > 0 \ \exists n_K \in \mathbb{N} \ (\forall n \geqslant n_K \ \ |a_n| < K) \\ \forall K > 0 \ \exists n_1, n_2 \in \mathbb{N} \ (n_1, n_2 > K : a_{n_1} > 0 \text{ y } a_{n_2} < 0) \end{cases}$

↳ Una sucesión diverge hacia infinito sin signo cuando crece hacia $+\infty$ y $-\infty$ a la vez. P.e.: $a_n = (-1)^n \cdot n$

## Propiedades de los límites

1) $a_n$ suc. y tiene límite $\Rightarrow$ $\lim a_n$ es único

2) $\left.\begin{array}{l} a_n, b_n \text{ suc.} \\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \geqslant n_0 \ \ a_n \leqslant b_n \\ \exists \lim a_n, \exists \lim b_n \end{array}\right\} \Rightarrow \lim a_n \leqslant \lim b_n$

3) $\left.\begin{array}{l} a_n \text{ suc.} \\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n > n_0 \ \ a_n \geqslant 0 \\ \exists \lim a_n \end{array}\right\} \Rightarrow \lim a_n \geqslant 0$

4) Criterio del sandwich:

$\left.\begin{array}{l} a_n, b_n, c_n \text{ suc} \\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \geqslant n_0 \ \ a_n \leqslant b_n \leqslant c_n \\ \exists \underset{\downarrow}{\lim a_n}, \exists \underset{\downarrow}{\lim b_n}, \exists \underset{\downarrow}{\lim c_n} \\ \quad\ l \qquad\quad r \qquad\quad s \end{array}\right\} l \leqslant r \leqslant s$

## ÀLGEBRA DE LÍMITS (Indeterminacions)

$\frac{\infty}{\infty}$ o $\frac{0}{0}$ → Sigui $\frac{P(n)}{Q(n)}$ $\Rightarrow$ $\begin{cases} \text{grau } P(n) > \text{grau } Q(n) \to \lim = \pm\infty \\ \text{grau } P(n) < \text{grau } Q(n) \to \lim = 0 \\ \text{grau } P(n) = \text{grau } Q(n) \to \lim = \text{quocient termes major grau} \end{cases}$

↳ si no, dividir num. i den. entre el terme dominant, simplificar, ...

$\infty - \infty$ → si en el límit hi ha una resta d'arrels quadrades, es multiplica i es divideix per la suma de les arrels (conjugat)

Ex: $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{x-1} - \sqrt{x+3} = \lim_{x\to+\infty} (\sqrt{x-1} - \sqrt{x+3}) \cdot \frac{(\sqrt{x+1} - \sqrt{x+3})}{(\sqrt{x-1} - \sqrt{x+3})} = \lim_{n\to+\infty} \frac{x-1-x-3}{\sqrt{x-1} + \sqrt{x+3}} = 0$

$1^\infty$ → siguin dues successions $a_n$ ($\lim a_n \to 1$) i $b_n$ ($\lim b_n \to \infty$)

$$\lim (a_n)^{b_n} = 1^\infty = e^{\lim (a_n - 1)\cdot b_n}$$

$0 \cdot \infty$ → siguin $a_n$ ($\lim a_n \to 0$) i $b_n$ ($\lim b_n \to \infty$)

$$\lim a_n \cdot b_n = \begin{cases} \lim \frac{a_n}{1/b_n} = \frac{0}{0} \\ \lim \frac{b_n}{1/a_n} = \frac{\infty}{\infty} \\ \ln (\lim (1+a_n)^{b_n}) \end{cases}$$

$0^0$ i $\infty^0$ → siguin $a_n$ i $b_n$ successions:

$\left.\begin{array}{l} a_n \to 0 \\ b_n \to 0 \end{array}\right\} \ln a_n^{b_n} = \underbrace{b_n \cdot \ln a_n}_{0 \cdot (-\infty)}$ $\qquad$ $\left.\begin{array}{l} a_n \to +\infty \\ b_n \to 0 \end{array}\right\} \ln a_n^{b_n} = \underbrace{b_n \cdot \ln a_n}_{0 \cdot (+\infty)}$

## CRITERIS PER AL CÀLCUL DE LÍMITS

Criteri arrel-quocient: $a_n \neq 0$, $\forall n \geq n_0$ i $\lim \frac{|a_n|}{|a_{n-1}|} = \ell \Rightarrow \lim \sqrt[n]{|a_n|} = \ell$

↳ $\lim \sqrt[n]{n} = \lim \frac{n}{n-1} = 1$

Criteri del quocient: $a_n \neq 0, \forall n \geq n_0$ i $\lim \frac{|a_n|}{|a_{n-1}|} = \ell \Rightarrow \begin{cases} \ell < 1 \to \lim \to 0 \\ \ell = 1 \to \lim \to ? \\ \ell > 1 \to \lim \to \pm\infty \end{cases}$

↳ $\lim \frac{a^n}{n!} = ? \to \lim \frac{\frac{a^n}{n!}}{\frac{a^{n-1}}{(n-1)!}} = \lim \frac{|a|}{n!} = 0 \underset{0<1}{\to} \lim \frac{a^n}{n!} = 0$

Criteri de l'arrel: $\lim \sqrt[n]{|a_n|} = \ell < 1 \Rightarrow \lim a_n = 0$

Criteri del sandwich: $a_n \leq b_n \leq c_n$, $\forall n \geq n_0 \Rightarrow \lim a_n = \lim c_n = \ell \Rightarrow \lim b_n = \ell$

## SUCESIONES ACOTADAS

$a_n$ suc. de reales $\begin{cases} \text{acotada superiormente} \iff \exists K \in \mathbb{R} \ (\forall n \quad a_n \leq K) \\ \text{acotada inferiormente} \iff \exists \ell \in \mathbb{R} \ (\forall n \quad \ell \leq a_n) \\ \text{acotada} \iff \exists \ell, K \in \mathbb{R} \ (\ell \leq a_n \leq K, \forall n) \end{cases}$

**Ejemplo:** $a_n = -n \Rightarrow (-n)_{n \geq 1} = (-1, -2, \dots, -\infty)$

↳ Acotada superiormente, supremo $= -1$.

## SUCESIONES MONÓTONAS

$a_n$ suc de reales $\begin{cases} \text{creciente} \iff \forall n \quad a_{n-1} \leq a_n \\ \text{estrict. creciente} \iff \forall n \quad a_{n-1} < a_n \\ \text{decreciente} \iff \forall n \quad a_{n-1} \geq a_n \\ \text{estrict. decreciente} \iff \forall n \quad a_{n-1} > a_n \end{cases}$

**Ejemplos:** $a_n = \frac{1}{n} \rightarrow 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots \rightarrow$ Estrictamente decreciente

Teorema de la convergencia monótona

$a_n$ suc. de reales $\Rightarrow$

1) Si $a_n$ es creciente y acotada superiormente $\Rightarrow a_n$ es convergente y tiene límite $\lim_{n\to+\infty} a_n = \text{supremo}\{a_n : n \geq 1\}$

2) Si $a_n$ es decreciente y acotada inferiormente $\Rightarrow a_n$ es convergente y tiene límite $\lim_{n\to+\infty} a_n = \text{ínfimo}\{a_n : n \geq 1\}$

↳ Unión de 1) y 2):

$\boxed{a_n \text{ suc. monótona y acotada} \Rightarrow a_n \text{ es convergente}}$

## SUBSUCESIONES

Una subsucesión de una sucesión $a_n$ es una sucesión obtenida tomando infinitos términos de $a_n$ manteniendo su posición relativa en la sucesión.

$a_n = n^2 - 15 \rightarrow a_{2K} = (2K)^2 - 15$

↳ **Prop:** Una suc. $a_n$ es convergente y tiene límite $\ell \iff$ todas sus subsucesiones son convergentes y tienen límite $\ell$

↳ Se usa para demostrar que <u>no</u> es convergente viendo que dos subsucesiones diferentes tienen límite distinto.

# TEMA 3: FUNCIONES CONTINUAS DE UNA VARIABLE

## REPASO DE CONCEPTO DE CONTINUIDAD

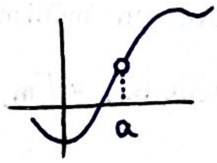
Una función es una aplicación $f: D \to \mathbb{R}$, donde $D \subseteq \mathbb{R}$ denominado dominio de $f$. La función hace corresponder a cada $x \in D$ exactamente un elemento $y \in \mathbb{R}$, denotado por $y = f(x)$.

**Estudio de la continuidad en un punto:**

$$\left.\begin{array}{l} f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ \quad x \to f(x) \\ \quad a \in \mathbb{R} \end{array}\right\} f \text{ es continua en } a \iff \begin{cases} 1)\ \exists f(a) \text{ tq } a \in D[f(x)] \\ 2)\ \exists \lim\limits_{x \to a} f(x) \\ 3)\ \lim\limits_{x \to a} = f(a) \end{cases}$$

$\hookrightarrow$ $f$ es continua en $D \iff f$ es continua en $a$, $\forall a \in D$, $D \subseteq \mathbb{R}$

**Tipos de discontinuidades**




**Punto de discontinuidad evitable**

$\exists \lim\limits_{x \to a} f(x)$ y $\lim\limits_{x \to a} f(x) \in \mathbb{R}$ $\to$ P.e: $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2}$ tiene disc. evit. en $x = 2$

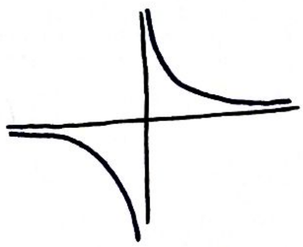
**Punto de discontinuidad esencial** $\to$ $\nexists \lim\limits_{x \to a} f(x)$ o $\lim\limits_{x \to a} f(x) \notin \mathbb{R}$

**1) Discontinuidad de salto**


$\lim\limits_{x \to a^+} f(x) \neq \lim\limits_{x \to a^-} f(x)$, y los dos límites $\in \mathbb{R}$

P.e: $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 0 \\ x+2, & x > 0 \end{cases}$

**2) Discontinuidad asintótica**



$\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \{+\infty, -\infty, \infty\}$ o $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \{+\infty, -\infty, \infty\}$

Es decir, los límites no pertenecen a $\mathbb{R}$

P.e.: $f(x) = \dfrac{1}{x}$

**Proposiciones relacionadas con la continuidad**

1) $f$: función elemental y $a \in D[f(x)] \Rightarrow f$ continua en $a$.

2) $f, g$: funciones continuas en $a \Rightarrow f+g,\ f-g,\ f \cdot g,\ f/g,\ f^g$ continuas en $a$.

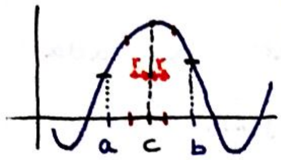
3) $f$ función $x \to f(x)$ y $g$ función $f(x) \to g(f(x))$, si $f$ continua en $a$ y $g$ continua en $f(a) \Rightarrow g \circ f$ continua en $a$

# TEOREMAS DE FUNCIONES CONTINUAS

## Teorema de conservación del signo

$f$: función
$a,b \in \mathbb{R}$ $(a<b)$
$f$ cont. $[a,b]$

Si $c \in (a,b)$ tq. $f(c) \neq 0 \Rightarrow \exists r>0$ $(\forall x \in (c-r, c+r)$ $f(x) \cdot f(c) > 0)$

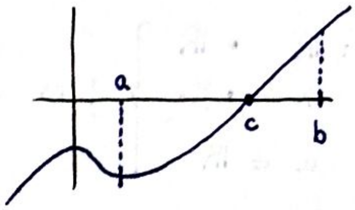



- El teorema explica que dada una función continua en un intervalo $[a,b]$ si la imagen $c$ es distinta de 0, entonces la imagen de $c \pm r$ también.

## Teorema de Bolzano

$f$: función
$a,b \in \mathbb{R}$ $a<b$
$f$ cont. $[a,b]$

Si $f(a) \cdot f(b) < 0 \Rightarrow \exists c \in (a,b)$ tq $f(c) = 0$

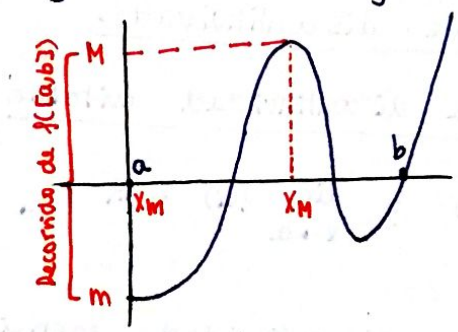



## Teorema de Weierstrass

$f$: función
$a,b \in \mathbb{R}$ $a<b$
$f$ cont. $[a,b]$

$\Rightarrow f([a,b])$ tiene un mínimo $m$ y un máximo $M$ y el recorrido de $f$ es $f([a,b]) = [m, M]$

$\hookrightarrow f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M)$




## Teorema del valor intermedio

$f$: función
$a,b \in \mathbb{R}$ $a<b$
$f$ cont. $[a,b]$

$\forall y$ $(f(a) \leq y \leq f(b))$ $\exists c \in [a,b]$ $f(c) = y$

El Teorema viene a decir que para toda $y$ entre $f(a)$ y $f(b)$ existe una $c \in D[f(x)]$ tal que $f(c) = y$
y $c \in [a,b]$

# RESOLUCIÓN APROXIMADA DE ECUACIONES

## Método de la bisección

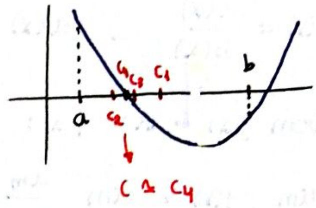
$f$: función
$a, b \in \mathbb{R}$ $a<b$
$f$ cont. $[a,b]$
$f(a) < f(b)$

Calcularemos un $c \in (a,b)$ con $f(c) = 0$ de forma aprox.

$c_1 = \frac{a+b}{2}$ → $f(c_1) = 0 \rightarrow c = c_1$
→ $f(c_1) \cdot f(a) < 0 \rightarrow c_2 = \frac{a+c_1}{2}$
→ $f(c_1) \cdot f(b) < 0 \rightarrow c_2 = \frac{c_1+b}{2}$

$c_n$ es la semisuma de los dos extremos del subintervalo en el que $f$ cambia de signo

↳ Error: $|c_n - c| \leq \frac{|b-a|}{2^n}$




* Sean $\alpha, a \in \mathbb{R}$

la precisión de la aprox. es $\varepsilon \iff |a-\alpha| \leq \varepsilon$

$a$ es una aprox. de $\alpha$ con $k$ cifras decimales $\iff |a-\alpha| \leq 0'5 \cdot 10^{-k}$

## Método de la secante

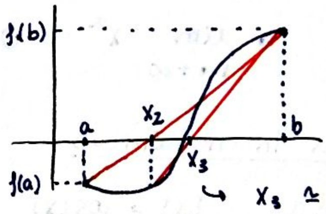
$f$: función
$a, b \in \mathbb{R}$ $a<b$
$f$. cont $[a,b]$
$f(a) < f(b)$

Calculamos $c \in (a,b)$ tal que $f(c) = 0$ de forma aprox

$x_0 = a$, $x_1 = b$ → $x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \cdot f(x_n)$, $n \geq 1$

Criterio de parada

$\left.\begin{array}{l} \cdot\ |x_n - x_{n-1}| < \varepsilon \\ |f(x_n)| < \varepsilon \end{array}\right\} |x_n - c| < \varepsilon$




↳ $x_3 \simeq c$

## Método de la tangente

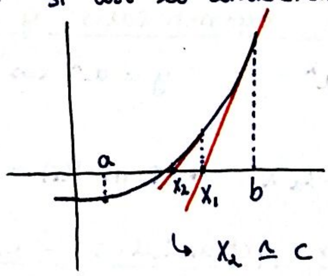
$f$: función
$a, b \in \mathbb{R}$ $a<b$
$f$. cont $[a,b]$
$f(a) < f(b)$
$f$. deriv. $[a,b]$

Calcularemos $c \in (a,b)$ tal que $f(c) = 0$ de forma aprox

$x_0 = a$ (puede ser $b$ o $\frac{a+b}{2}$ si así lo consideramos)

$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

↓
Mismo criterio de parada que el método de la secante




↳ $x_2 \simeq c$

(Aquí hemos empezado con la b)

# APÉNDICE: FUNCIONES ELEMENTALES

## Polinomios

$f(x) = a_n x^n + \dots + a_0$ , $\text{Dom } f(x) = \mathbb{R}$

$n \geq 1 \rightarrow$ par : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \begin{cases} +\infty & \text{si } a_n > 0 \\ -\infty & \text{si } a_n < 0 \end{cases}$

impar : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \begin{cases} -\infty & a_n>0 \\ +\infty & a_n<0 \end{cases}$ ; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \begin{cases} +\infty & a_n>0 \\ -\infty & a_n<0 \end{cases}$

## Funciones racionales

$f(x) = \dfrac{a(x)}{b(x)}$ , $a(x), b(x) \in \mathbb{R}[x]$ , $b(x) \neq 0$

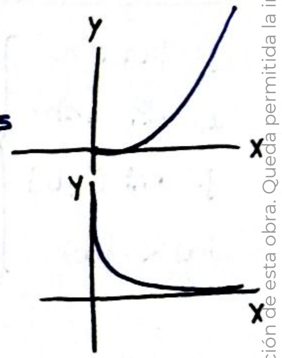
$\text{Dom } f(x) = \mathbb{R} \setminus \{x : b(x) = 0\}$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{a_m}{b_n} \cdot x^{m-n} \begin{cases} m>n \rightarrow \lim = \pm\infty \\ m=n \rightarrow \lim = a_m/b_n \\ m<n \rightarrow \lim = 0 \end{cases}$

## Funciones potenciales

$f(x) = x^a$ , $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N} \rightarrow \text{Dom } f(x) \begin{cases} a > 0 \rightarrow = [0, +\infty) \\ a < 0 \rightarrow = (0, +\infty) \end{cases}$

- $a > 0 \rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} x^a = +\infty$ y $\lim\limits_{x\to 0^+} x^a = 0 \Rightarrow x^{5/25}$
- $a < 0 \rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} x^a = 0$ y $\lim\limits_{x\to 0^+} x^a = +\infty \Rightarrow \dfrac{1}{x^{5/25}}$




## Funciones trigonométricas

$f(x) = \operatorname{sen}(x)$ $f(x) = \cos(x) \rightarrow \text{Dom } f(x) = [-1, 1]$ , Periódicas $2\pi$

$\tan(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)} \rightarrow \text{Dom}[\tan(x)] = \mathbb{R} - \{x : x = (2n+1)\frac{\pi}{2} , n \in \mathbb{Z}\}$ , Periódica $\pi$

## Funciones exponenciales y logarítmicas

$f(x) = a^x$ $y = a^x \Leftrightarrow x = \log_a y$ $\text{Dom } f(x) = \mathbb{R}$ , Recorrido $= (0, +\infty)$

$f(x) = \log_a x \rightarrow \text{Dom } f(x) = (0, +\infty)$ , Recorrido $= \mathbb{R}$

## Funciones potenciales - exponenciales

$f(x) = u(x)^{v(x)}$

$u(x)$ continua y $v(x)$ continua $\Rightarrow f(x)$ continua

# TEMA 4: FUNCIONES DERIVABLES DE UNA VARIABLE

## REPASO DEL CONCEPTO DE DERIVADA

$\left.\begin{array}{l} f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ a \in \text{Dom } f \end{array}\right\}$ $f$ derivable en $a \iff \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \in \mathbb{R} \Rightarrow$ Este límite es la derivada de $f$ en $a$

$$f'(a) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

- la derivada representa la recta tangente de una función $f$ en un punto $a$: $y = f(a) + f'(a) \cdot (x - a)$

## PROPIEDADES

- $A \subseteq \mathbb{R}$, $f$ derivable en $A \iff f$ derivable en $a$, $\forall a \in A$
- $f$ derivable en $a \Rightarrow f$ continua en $a$
- $f, g$ derivables en $a \Rightarrow f+g, f-g, f \cdot g, f/g, f^g$ son derivables en $a$
- Regla de la cadena: $f$ derivable en $a$, $g$ derivable en $f(a) \Rightarrow$

$g \circ f$ derivable en $a$: $g(f(a)) \to g(f(a))' = g'(f(a)) \cdot f'(a)$

## TABLA DE DERIVADAS

| $f$ | $f'$ | |
|---|---|---|
| $K$ | $0$ | $(k \in \mathbb{R})$ |
| $x^K$ | $K \cdot x^{K-1}$ | $(0 \neq K \in \mathbb{R})$ |
| $\log_a x$ | $\frac{1}{x \cdot \log a}$ | $(a > 0)$ |
| $K^x$ | $K^x \cdot \ln K$ | $(K > 0)$ |
| $\text{sen } x$ | $\cos x$ | |

| $f$ | $f'$ |
|---|---|
| $\cos x$ | $-\text{sen } x$ |
| $\tan x$ | $\frac{1}{\cos^2 x}$ |
| $\text{arc sen } x$ | $\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ |
| $\text{arc cos } x$ | $\frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$ |
| $\text{arc tg } x$ | $\frac{1}{1 + x^2}$ |

## FUNCIONES POTENCIALES-EXPONENCIALES

$f(x) = u(x)^{v(x)} \Rightarrow$ Tomamos logaritmos: $\ln(f(x)) = v(x) \cdot \ln(u(x)) \Rightarrow$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = v'(x) \cdot \ln(u(x)) + v(x) \cdot \frac{u'(x)}{u(x)} \xRightarrow{f(x) = u(x)^{v(x)}} f'(x) = u(x)^{v(x)} \left( v'(x) \cdot \ln(u(x)) + v(x) \cdot \frac{u'(x)}{u(x)} \right)$$

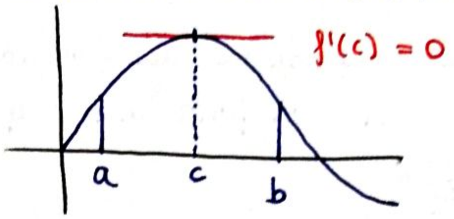
$$\Rightarrow f'(x) = u(x)^{v(x)} \cdot \ln(u(x)) \cdot v'(x) + v(x) \cdot u(x)^{v(x)-1} \cdot u(x)$$

# TEOREMAS BÁSICOS DE FUNCIONES DERIVABLES

## Teorema del extremo interior

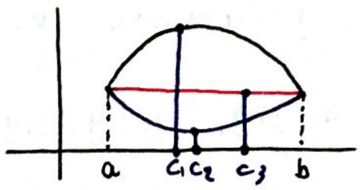
$$\left.\begin{array}{l} f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad a,b \in \mathbb{R} \quad a<b \\ f \text{ continua } [a,b], \text{ deriv. } (a,b) \\ \exists c \in (a,b) \text{ tq } f \text{ tiene extremo} \\ \quad \text{relativo en } c \end{array}\right\} \Rightarrow f'(c) = 0$$

- $f$ tiene máx. rel. en $c \Leftrightarrow \exists r>0 \ \forall x (c-r, c+r) \ f(x) \leq f(c)$
- $f$ tiene mín. rel. en $c \Leftrightarrow \exists r>0 \ \forall x (c-r, c+r) \ f(x) \geq f(c)$




## Teorema de Rolle

$$\left.\begin{array}{l} f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad a,b \in \mathbb{R} \quad a<b \\ f \text{ continua } [a,b], \text{ deriv. } (a,b) \\ f(a) = f(b) \end{array}\right\} \Rightarrow \exists c \in (a,b) \text{ tal que } f'(c) = 0$$




- $\exists c_1$ tq $f'(c_1) = 0$ $c_1$ máx
- $\exists c_3$ tq $f'(c_3) = 0$ $a-b$ recta
- $\exists c_2$ tq $f'(c_2) = 0$ $c_2$ mín

## Teorema de Cauchy

$$\left.\begin{array}{l} f,g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad a,b \in \mathbb{R} \quad a<b \\ f,g \text{ cont. } [a,b], \text{ deriv. } (a,b) \end{array}\right\} \Rightarrow \exists c \in (a,b) \text{ tq } g'(c)(f(b) - f(a)) = f'(c)(g(b) - g(a)) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \Rightarrow f'(c) = \alpha \, g'(c)$$

## Teorema del valor medio de Lagrange

$$\left.\begin{array}{l} f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad a,b \in \mathbb{R} \quad a<b \\ f \text{ continua } [a,b], \text{ deriv. } (a,b) \end{array}\right\} \Rightarrow \exists c \in (a,b) \text{ tal que } f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

## CONSECUENCIAS DEL T.V.M. de Lagrange

- $f'(c) > 0, \ \forall c \in (a,b) \Rightarrow f$ estrictamente creciente en $(a,b)$
- $f'(c) < 0, \ \forall c \in (a,b) \Rightarrow f$ estrictamente decreciente en $(a,b)$
- Fórmula de propagación del error:

  $\alpha, a \in \mathbb{R}$, sea $a$ una aproximación de $\alpha$

  error absoluto : $|\alpha - a|$

  Por el TVM $\Rightarrow f(\alpha) - f(a) = f'(c) \cdot (\alpha - a) \underset{\substack{a \cong \alpha \\ c \cong a}}{\Rightarrow} |f(\alpha) - f(a)| = |f'(a) \cdot (\alpha - a)|$



## LA REGLA DE L'HÔPITAL (Para el cálculo de límites)

- $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
- $a \in \mathbb{R} \vee a = \{+\infty, -\infty\}$
- $f, g$ derivables en un entorno de $a$
- $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = \{0, +\infty, -\infty\}$

$\Rightarrow$ si existe $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, también existe $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ y

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

- Sirve para calcular límites del tipo:

$- \frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$ $\quad - 0 \cdot \infty \to \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$ $\quad - 0^0 \text{ o } \infty^0 \to \frac{\ln(f(x))}{\frac{1}{g(x)}}$

## CONVEXIDAD

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$I \subseteq \operatorname{Dom} f$

$a, x, b \in I \quad a < x < b$

$f$ convexa $\iff \frac{f(x) - f(a)}{x - a} < \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

$f$ cóncava $\iff \frac{f(x) - f(a)}{x - a} > \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

- Si $f$ es derivable en $(a, b)$, entonces:
  - $f$ convexa en $I \iff f(x) > f(a) + f'(a)(x - a)$, $\forall a, x \in I \ (x \neq a)$
  - $f$ cóncava en $I \iff f(x) < f(a) + f'(a)(x - a)$, $\forall a, x \in I \ (x \neq a)$

- Si existe $f''$ en el intervalo $I$:
  - $f''(x) > 0 \quad (\forall x \in I) \Rightarrow f$ convexa en $I$
  - $f''(x) < 0 \quad (\forall x \in I) \Rightarrow f$ cóncava en $I$

  ↳ Si $a$ es un punto de inflexión de $f \Rightarrow f''(a) = 0$

# TEMA 5 : POLINOMIO DE TAYLOR

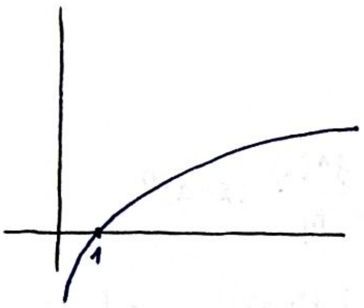
Sea $f$ una función $n$ veces derivable en un punto $a$. El polinomio de Taylor de grado $n$ para $f$ en $a$ es:

$$P_n(f,a,x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

que es una aproximación de $f(x)$ en el punto $a$.

La diferencia $R_n(f,a,x) = f(x) - P_n(f,a,x)$ se denomina resto n-ésimo de Taylor de la función $f$ en el punto $a$

Ejemplo: $f(x) = \ln x$




$$\left.\begin{array}{ll} a = 1 \rightarrow & f(1) = 0 \\ f'(x) = \frac{1}{x} \longrightarrow & f'(1) = 1 \\ f''(x) = -\frac{1}{x^2} \longrightarrow & f''(1) = -1 \\ f'''(x) = \frac{2}{x^3} \longrightarrow & f'''(1) = 2 \end{array}\right] \begin{array}{l} P_0(f,1,x) = f(1) = 0 \\ P_1(f,1,x) = 0 + \frac{1}{1!}(x-1) = x-1 \\ P_2(f,1,x) = (x-1) + \frac{-1}{2}(x-1)^2 \\ P_2(x) = x - 1 - \frac{(x-1)^2}{2} \end{array}$$

Nos sirve para calcular aproximadamente el valor de $f(x) = \ln x$

- $\ln(1) = 0 \longrightarrow P_2(1) = 0$
- $\ln(2) = 0'69 \longrightarrow P_2(2) = 0'5$

} Como mayor sea la $n$, mejor será la aprox.

Error:

$$|R_n(f,a,x)| = \left|\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}\right| \leq \frac{K}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

$a \leq c \leq x$

$\hookrightarrow K$ cota superior

## APLICACIONES DE LA FÓRMULA DE TAYLOR

### Crecimiento, decrecimiento y extremos relativos

$$\left.\begin{array}{l} f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R} \quad a \in \text{Dom } f \\ f'(a) = \dots = f^{(n-1)}(a) = 0 \\ f^{(n)}(a) \neq 0 \quad (n \geq 1) \end{array}\right\} \begin{array}{l} f(x) = P_n(f,a,x) + R_n(f,a,x) = f(a) + \frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n + \overbrace{R_n(f,a,x)}^{\text{Despreciable}} \Rightarrow \\ \Rightarrow \underbrace{f(x) - f(a)}_{\text{Signo}} = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \varepsilon \end{array}$$

Signo: Siempre $\oplus \rightarrow$ mínimo; Siempre $\ominus \rightarrow$ máximo

Sea $n$:

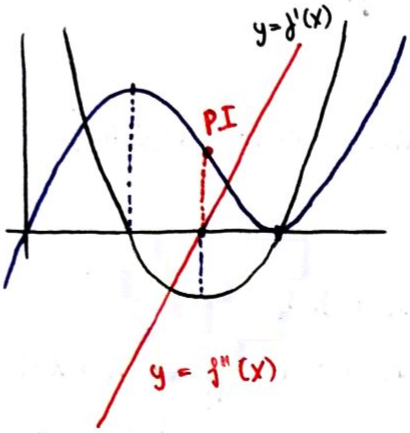
- Par
  - $f^n(a) > 0 \Rightarrow f(x) - f(a) = \frac{+}{+}\cdot + = \oplus \Rightarrow$ Mínimo relativo
  - $f^n(a) < 0 \Rightarrow f(x) - f(a) = \frac{-}{+}\cdot + = \ominus \Rightarrow$ Máximo relativo
- Impar
  - $f^n(a) > 0 \Rightarrow f$ estrictamente creciente en $a$
  - $f^n(a) < 0 \Rightarrow f$ estrictamente decreciente en $a$ ?

# Concavidad, convexidad y puntos de inflexión

$$\left.\begin{array}{l} f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad a \in \text{Dom } f \\ f'(a) = \dots = f^{(n-1)}(a) = 0 \\ f^{(n)}(a) \neq 0 \quad (n \geq 2) \end{array}\right\}$$

$$f(x) = P_n(f,a,x) + R_n(f,a,x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n + R_n \dots \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{f(x) - [f(a) + f'(a)(x-a)]}_{A} = \frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n + \varepsilon$$




Sea $n$

- Par $\begin{cases} f^n(a) > 0 \Rightarrow A > 0 \Rightarrow f(x) \text{ convexa en } a \\ f^n(a) < 0 \Rightarrow A < 0 \Rightarrow f(x) \text{ cóncava en } a \end{cases}$

- Impar $\begin{cases} f^n(a) < 0 \\ f^n(a) > 0 \end{cases}$ cuando cambia de signo significa que tiene un punto de inflexión. ($f^n(a) = 0$)

# Fórmula de propagación del error

$$\left.\begin{array}{l} a \text{ es una aprox. de } x \to |\text{error}| = |a - x| \\ f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(a) \text{ aprox. de } f(x) \to \text{error} = |f(x) - f(a)| \\ f'(a) = \dots = f^{n-1}(a) = 0 \qquad f^n(a) \neq 0 \quad (n \geq 1) \end{array}\right\}$$

$$f(x) \cong f(a) + \frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n$$

$$\Downarrow$$

$$|f(x) - f(a)| = \left| \frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n \right|$$