TEMA 3. FUNCIONES CONTINUAS DE UNA VARIABLE
3.1. Repaso del concepto de continuidad de funciones de una variable

Definiciones

1. $f\colon R \to R$ es una función real de variable real cuando $\forall x \in R$ existe como máximo un $y \in R$ tal que $y = f(x)$.

2. Dominio de una función: $Dom\ f = \{x \in \mathrm{R}\colon \exists f(x)\}$

3. Sean $f\colon R \to R$ función y $a \in R$, se dice que f es continua en a cuando:
   a. $\exists f(a)$ $(a \in Dom\ f)$
   b. $\exists \lim_{x \to a} f(x)$ y $\lim_{x \to a} f(x) \in R$
   c. $f(a) = \lim_{x \to a} f(x)$

4. Sean $f\colon R \to R$ función y A $\subseteq R$, se dice que f es continua en A cuando f es continua en a $\forall a \in A$.

Tipos de puntos de discontinuidad de una función $f\colon R \to R$

- Discontinuidad evitable $\Leftrightarrow \exists \lim_{x \to a} f(x)$ y $\lim_{x \to a} f(x) = l \in R$ y $l \neq f(a)$
- Discontinuidad esencial $\Leftrightarrow \nexists \lim_{x \to a} f(x)$ o $\lim_{x \to a} f(x) \notin R$
  - Si los dos límites laterales son finitos y distintos: discontinuidad de salto o de primera especie
  - Si no : discontinuidad de segunda especie
    Si $f\colon R \to R$ tiene en a una discontinuidad esencial de segunda especie y alguno de los límites laterales en a es un infinito, se llama discontinuidad asintótica (o de salto infinito).

Ejemplos

1. $f\colon R \to R, f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$ tiene una discontinuidad evitable en $x = 2$
2. $f\colon R \to R$
   $f(x) = \begin{cases} x^2, si\ x < 0 \\ x + 3, si\ x \geq 0 \end{cases}$ tiene una discontinuidad de salto en $x = 0$

3. $f\colon R \to R, f(x) = \frac{1}{x-3}$ tiene una discontinuidad asintótica en $x = 3$

IMPORTANTE: estudiar **Apéndice "Las funciones elementales"** del Resumen teoría tema 3 del Racó (funciones polinómicas, racionales, potenciales, trigonométricas y trigonométricas inversas, exponenciales, logarítmicas, hiperbólicas) .

Proposición 1 (continuidad de las funciones elementales)
$f\colon R \to R$ función elemental $\wedge\ a \in Dom\, f \implies f$ es continua en a

Proposición 2 (continuidad y operaciones con funciones)
$f, g\colon R \to R$ funciones $\wedge\ \ a \in Dom\, f \cap Dom\, g \wedge\ \ f, g$ $son\ continuas\ en\ a \implies$

$$\implies \begin{cases} \lambda \cdot f \\ f + g \\ f \cdot g \\ \frac{f}{g} si\ g(a) \neq 0 \end{cases} \text{ son continuas en } a$$

$$\boxed{\begin{gathered}(\lambda \cdot f)(x) = \lambda f(x) \\ (f+g)(x) = f(x) + g(x) \\ (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) \\ \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}\end{gathered}}$$

Proposición 3 (continuidad y composición de funciones)
$f, g\colon R \to R\ funciones \wedge\ a \in Dom\, f\ \wedge\ f(a) \in Dom\, g \wedge\ f\ es\ continua\ en\ a \wedge$ $g\ es\ continua\ en\ f(a) \implies g \circ f\ es\ continua\ en\ a$

$$\boxed{(g \circ f)(x) = g(f(x))}$$

3.2. Algunos teoremas básicos de funciones de una variable continuas: Teorema del signo. Teorema de Bolzano. Teorema de Weierstrass. Teorema del valor intermedio. Métodos de la bisección y de la secante para aproximar ceros de funciones

Teorema de conservación del signo

$$\left.\begin{array}{l} a,b \in R, a<b \\ f\colon R \to R \text{ función} \\ f \text{ continua en } [a,b] \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\text{Si } c \in (a,b) \text{ es tal que } f(c) \neq 0 \Longrightarrow \exists r>0 \;\; \forall x \in (c-r,c+r) \quad f(x)\cdot f(c)>0\right]$$

(interpretación)

Teorema de Bolzano

$$\left.\begin{array}{l} a,b \in R, a<b \\ f\colon R \to R \text{ función} \\ f \text{ continua en } [a,b] \\ f(a)\cdot f(b)<0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\exists c \in (a,b) \text{ tal que } f(c)=0\right]$$

(interpretación)
(Ejercicios: **3.1: 1, 2, 3,** empezar **4**)

Teorema de Weierstrass

$$\left.\begin{array}{l} a,b \in R, a<b \\ f\colon R \to R \text{ función} \\ f \text{ continua en } [a,b] \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\exists x_m, x_M \in [a,b] \;\; \forall x \in [a,b] \;\; (f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M)) \;\; \wedge \;\; f([a,b]) = [f(x_m), f(x_M)]\right]$$

(interpretación)

Teorema del valor intermedio

$$\left.\begin{array}{l} a,b \in R, a<b \\ f\colon R \to R \text{ función} \\ f \text{ continua en } [a,b] \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\forall y \text{ entre } f(a) \;\; y \;\; f(b) \quad \exists c \in [a,b] \text{ tal que } f(c)=y\right]$$

(demostración)

(Ejercicio: **3.1: 3**)

Tres métodos iterativos para el cálculo aproximado de ceros de funciones

Situación:

$a, b \in R, a < b$
$f\colon R \to R$ función $\quad (\Rightarrow \exists c \in (a,b)$ tal que $f(c) = 0)$
f continua en $[a,b]$
$f(a) \cdot f(b) < 0$

Objetivo: Cálculo de c de forma aproximada y con la precisión deseada

1. Método de la bisección

$$c_1 = \frac{a+b}{2} \to \begin{cases} f(a) \cdot f(c_1) = 0 \quad \Rightarrow c = c_1 \\ f(a) \cdot f(c_1) < 0 \quad \Rightarrow \exists c \in (a, c_1) \text{ tal que } f(c) = 0 \longrightarrow c_2 = \frac{a+c_1}{2} \\ f(a) \cdot f(c_1) > 0 \quad \Rightarrow \exists c \in (c_1, b) \text{ tal que } f(c) = 0 \longrightarrow c_2 = \frac{c_1+b}{2} \end{cases}$$

...

Error absoluto de la n-ésima iteración: $|c_n - c| < \frac{b-a}{2^n}$

2. Método de la secante

$$\begin{cases} x_0 = a, x_1 = b, \\ x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \cdot f(x_n), \quad \forall n \geq 1 \end{cases}$$

(interpretación)

Criterio de parada:
$|x_{n+1} - x_n| < \mathcal{E} \wedge |f(x_{n+1})| < \mathcal{E} \Longrightarrow |x_{n+1} - c| < \mathcal{E}$

3. Método de Newton-Raphson o de la tangente

$$\begin{cases} x_0 = a, \\ x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad \forall n \geq 1 \end{cases}$$

(interpretación)

Criterio de parada:
$|x_{n+1} - x_n| < \mathcal{E} \wedge |f(x_{n+1})| < \mathcal{E} \Longrightarrow |x_{n+1} - c| < \mathcal{E}$

Ejercicios: **3.1:** acabar **4, 5,**
4.1: 4 (d)