1. *(2 punts)* Calculeu els límits següents:

$$a)\ \lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n^2+2n}-n\right); \qquad b)\ \lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n^2+2n}-n\right)^n.$$

Solución. $a)\ \lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n^2+2n}-n\right)=\lim_{n\to+\infty}\dfrac{\left(\sqrt{n^2+2n}-n\right)\left(\sqrt{n^2+2n}+n\right)}{\left(\sqrt{n^2+2n}+n\right)}=$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2+2n-n^2}{\left(\sqrt{n^2+2n}+n\right)}=\lim_{n\to+\infty}\frac{2n}{\left(\sqrt{n^2+2n}+n\right)}=\frac{2}{1+1}=1.$$

b) Del apartado a) resulta que

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n^2+2n}-n\right)^n=(1^\infty)=e^{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n^2+2n}-n-1\right)\cdot n}=$$

$$=e^{\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{n^2+2n}-(n+1)\right)\left(\sqrt{n^2+2n}+(n+1)\right)}{\left(\sqrt{n^2+2n}+(n+1)\right)}\cdot n}=e^{\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{(n^2+2n)-(n+1)^2}{\left(\sqrt{n^2+2n}+n+1\right)}\cdot n}=$$

$$=e^{\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{(n^2+2n-n^2-2n-1)}{\left(\sqrt{n^2+2n}+n+1\right)}\cdot n}=e^{\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{-n}{\left(\sqrt{n^2+2n}+n+1\right)}}=e^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{e}}.$$

2. *(2 punts)* Considereu la funció $f(x)=2x^3-x^2-6x+3$.

a) Demostreu que la funció $f(x)$ té exactament dos zeros en l'interval $[0,2]$.

b) Doneu un interval de longitud $l\le 0.5$ que contingui el major dels dos zeros de f de l'apartat a).

Solución. a) Primero, utilizando el teorema de Bolzano, demostramos que f tiene como mínimo dos ceros en el intervalo $[0,2]$ del modo siguiente

$$\left.\begin{array}{l} f(0)=3\ >\ 0\\ f(1)=-2\ <\ 0\\ f\in\mathcal{C}\big([0,\,1]\big)\ \text{(polinómica)}\end{array}\right\}\Longrightarrow \text{(según el teorema de Bolzano)}\ \exists\, c_1\in(0,\,1):\ f(c_1)=0,$$

$$\left.\begin{array}{l} f(1)=-2\ <\ 0\\ f(2)=3\ >\ 0\\ f\in\mathcal{C}\big([1,\,2]\big)\ \text{(polinómica)}\end{array}\right\}\Longrightarrow \text{(según el teorema de Bolzano)}\ \exists\, c_2\in(1,\,2):\ f(c_2)=0.$$

Por lo tanto la función f tiene como mínimo dos ceros en el intervalo $[0,2]$.

Para demostrar que f tiene exactamente dos ceros en el intervalo $[0,2]$ utilizaremos la reducción al absurdo. Supongamos que f tiene tres ceros en el intervalo $[0,2]$, es

decir, existen tres puntos a, b y c tales que $a < b < c$ donde $f(a) = f(b) = f(c) = 0$.
Entonces

$$\left.\begin{array}{l} f \in \mathcal{C}\big([a,\, b]\big) \text{ (polinómica)} \\ f \text{ es derivable en } (a, b) \text{ (polinómica)} \\ f(a) = f(b) \end{array}\right\} \Longrightarrow \text{(según el teorema de Rolle)}\, \exists\, \alpha_1 \in (a,\, b) :\ f'(\alpha_1) = 0$$

y

$$\left.\begin{array}{l} f \in \mathcal{C}\big([b,\, c]\big) \text{ (polinómica)} \\ f \text{ es derivable en } (b, c) \text{ (polinómica)} \\ f(b) = f(c) \end{array}\right\} \Longrightarrow \text{(según el teorema de Rolle)}\, \exists\, \alpha_2 \in (b,\, c) :\ f'(\alpha_2) = 0.$$

Calculamos los ceros de f'.

$f'(x) = 6x^2 - 2x - 6 = 0 \iff 3x^2 - x - 3 = 0 \iff x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+36}}{6} = \dfrac{1 \pm \sqrt{37}}{6}$.

De donde $\alpha_1 = \dfrac{1+\sqrt{37}}{6} \in [0, 2]$ y $\alpha_2 = \dfrac{1-\sqrt{37}}{6} < 0 \notin [0, 2]$.
Hemos llegado a una contradicción, entonces la suposición inicial es falsa y la función f tiene exactamente dos ceros en el intervalo $[0, 2]$.

b) Para determinar el intervalo de longitud $l \leq 0.5$ que contiene c_2, el mayor de los dos ceros de f del apartado a), utilizamos el método de la bisección partiendo del intervalo $[1, 2]$. El valor de f en el punto medio del intervalo $[1, 2]$ es

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = 2\left(\frac{3}{2}\right)^3 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 6 \cdot \frac{3}{2} + 3 = -\frac{3}{2} < 0.$$

Por lo tanto, como $f(2) > 0$, la función f tiene el mayor de los ceros del apartado a) en el intervalo $\left[\dfrac{3}{2}, 2\right]$ de longitud $l = \dfrac{1}{2}$.

3. *(2 punts)* Considereu les dues corbes: $y_1 = \dfrac{1}{1+x^2}$ i $y_2 = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

a) Comproveu que l'àrea A limitada per les corbes y_1, y_2 i les rectes $x = 0$, $x = 1$ és igual a $\dfrac{\pi}{2}$.

b) Calculeu el valor aproximat de l'àrea de l'apartat a) utilitzant el mètode dels trapezis amb 5 subintervals.

c) Calculeu la cota superior de l'error que es comet en el càlcul del apartat b) sabent que $0 \leq \left|\left(\dfrac{1}{1+x^2}\right)''\right| \leq 2$, $\forall x \in [0, 1]$.

Solución. a) Considerando que $y_1 = \dfrac{1}{1+x^2} > 0$ i $y_2 = -\dfrac{1}{1+x^2} < 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$ tenemos que el área

$$A = \int_0^1 (y_1(x) - y_2(x))\, dx = \int_0^1 \frac{2}{1+x^2} dx = 2\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = 2 \arctan x \Big|_0^1 =$$

$= 2(\arctan 1 - \arctan 0) = 2\left(\frac{\pi}{4} - 0\right) = \frac{\pi}{2}.$

b) El valor de la integral definida de la función f en el intervalo $[a, b]$ se aproxima por la fórmula de los trapecios con n subintervalos del modo siguiente

$$\int_a^b f(x)dx \approx T = h\left(\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right), \quad \text{donde } h = \frac{b-a}{n} \quad \text{y} \quad x_i = a + ih.$$

En nuestro caso:

$a = 0,\ b = 1,\ f(x) = \dfrac{2}{1+x^2},\ n = 5,\ h = 0.2,\ x_i = 0.2\,i.$

Entonces, $A = \displaystyle\int_0^1 \frac{2}{1+x^2}dx \approx T = h\left(\frac{f(0)+f(1)}{2} + \sum_{i=1}^{4} f(0.2i)\right) =$

$$= 0.2\left(\frac{2+1}{2} + \frac{2}{1+(0.2)^2} + \frac{2}{1+(0.4)^2} + \frac{2}{1+(0.6)^2} + \frac{2}{1+(0.8)^2}\right) \approx 1.5675.$$

c) Sabiendo que $0 \le \left|\left(\dfrac{1}{1+x^2}\right)''\right| \le 2$, $\forall x \in [0,1]$ concluimos que

$$0 \le |f''(x)| = \left|\left(\frac{2}{1+x^2}\right)''\right| = 2\left|\left(\frac{1}{1+x^2}\right)''\right| \le 4,\ \forall x \in [0,1].$$

Por lo tanto la cota superior del error cometido en el cálculo del apartado b) es

$$\varepsilon \le \frac{(b-a)^3}{12n^2} \max_{[a,b]} |f''(x)| = \frac{(1-0)^3}{12 \cdot 5^2} \cdot 4 = \frac{1}{75} = 0.01\overline{3}.$$

4. *(2 punts)* Trobeu i classifiqueu els punts crítics de la funció

$$f(x,y) = x^2\, e^{-x^2-y^2}.$$

Solució. La funció f és el producte d'una funció polinòmica amb la composició d'una funció polinòmica i una funció exponencial. Per tant, és de classe C^∞ en tot R^2. Les derivades parcials de f són:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xe^{-x^2-y^2} - 2x^3e^{-x^2-y^2} = 2x(1-x^2)e^{-x^2-y^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2x^2ye^{-x^2-y^2}.$$

Per tant, els punts crítics són les solucions del sistema:

$$\begin{cases} 2x(1-x^2)e^{-x^2-y^2} = 0 \\ -2x^2ye^{-x^2-y^2} = 0 \end{cases}$$

De la primera equació s'obté $x = 0$ o $x = 1$ o $x = -1$. Si $x = 0$, la segona equació es satisfà per a qualsevol valor de la y. Si $x = 1$, per la segona equació s'obté $y = 0$. Si $x = -1$, per la segona equació s'obté $y = 0$. Per tant, els punts crítics són el $(1,0)$, el $(-1,0)$ i els punts $(0,y)$, per a tot $y \in \mathbb{R}$.

Les segones derivades són:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2e^{-x^2-y^2}(2x^4 - 5x^2 + 1), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2x^2(2y^2-1)e^{-x^2-y^2},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 4xye^{-x^2-y^2}(x^2-1).$$

Aleshores:

$$Hf(1,0) = Hf(-1,0) = \begin{pmatrix} -4e^{-1} & 0 \\ 0 & -2e^{-1} \end{pmatrix}$$

que té determinat positiu y $h_{11} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\pm 1, 0) < 0$. Per tant, f té màxims relatius en els punts $(1,0)$ i $(-1,0)$.

D'altra banda:

$$Hf(0,y) = \begin{pmatrix} 2e^{-y^2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

que té determinant negatiu i per tant la matriu hessiana no decideix en aquests punts crítics. Però observem que $f(0,y) = 0$ per a tot $y \in \mathbb{R}$ i $f(x,y) \geq 0$ per a tot $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Per tant, f té mínims relatius en els punts $(0,y)$, per a tot $y \in \mathbb{R}$.

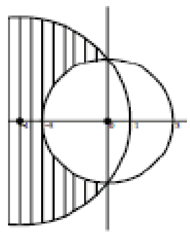
5. *(2 punts)* Expliqueu per què la funció $f(x,y) = x^2 + y^2 + 10x$ té extrems absoluts en el conjunt

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \big| \, (x+4)^2 + y^2 \leq 25, \; x^2 + y^2 \geq 9\}$$

i trobeu-los.

Solució.

El conjunt A és la regió de punts que són alhora del cercle de centre $(-4,0)$ i radi 5 i que són a la circumferència de centre $(0,0)$ i radi 3 o exteriors al cercle de centre $(0,0)$ i radi 3:



La frontera de A està formada per dos arcs de circumferència que pertanyen a A, per tant A és tancat. A més, A està contingut a la bola de centre $(0,0)$ i radi 10 i per tant A és acotat. Aleshores A és compacte. La funció f és una funció polinómica i per tant de classe C^∞ en tot R^2 i en particular f és contínua en A. Per tant, el teorema de Weierstrass assegura l'existència d'extrems absoluts de f en A.

1) Punts crítics de f a l'interior de A: Els punts crítics de f són les solucions del sistema d'equacions:

$$\begin{cases} f'_x(x,y) = 0 \\ f'_y(x,y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 10 = 0 \\ 2y = 0 \end{cases}$$

Per tant f té un únic punt crític que és: $(x,y) = (-5,0)$, que pertany a l'interior de A, per tant hi ha un punt crític de f a l'interior de D: el $(-5,0)$.

2) Buscarem els punts candidats a extrems condicionats de f en la frontera de A:

(i) Vèrtexs de A: $(0,3)$ i $(0,-3)$, que són els dos punts d'intersecció de les dues circumferències (s'obtenen resolent el sistema format per les equacions de les dues circumferències).

(ii) Punts candidats a extrems condicionats de f sobre la part de la frontera de A que és un arc de la circumferència gran $\{(x,y) \in \mathbb{R} : \quad (x+4)^2 + y^2 = 25,\ x^2 + y^2 \geq 9\}$: aplicant el mètode de Lagrange, construïm la funció de Lagrange:

$$L(x,y,\lambda) = x^2 + y^2 + 10x - \lambda((x+4)^2 + y^2 - 25).$$

Igualem les seves tres derivades parcials a zero i resolem:

$$\begin{cases} L'_x(x,y,\lambda) = 0 \\ L'_y(x,y,\lambda) = 0 \\ L'_\lambda(x,y,\lambda) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 10 - 2\lambda(x+4) = 0 \\ 2y - 2\lambda y = 0 \\ (x+4)^2 + y^2 - 25 = 0 \end{cases}$$

La segona equació implica $y = 0$ o $\lambda = 1$, però $\lambda = 1$ és incompatible amb la primera equació, per tant ha de ser $y = 0$. De la tercera equació obtenim $x = 1$ o $x = -9$, i de la primera equació tenim $\lambda = \dfrac{6}{5}$ o $\lambda = \dfrac{4}{5}$, respectivament. Aleshores, tenim dos punts crítics de la funció de Lagrange: $(1,0,\frac{6}{5})$, $(-9,0,-\frac{4}{5})$ i, eliminant la coordenada que correspon a λ, dos puntos candidats: $(1,0)$ i $(-9,0)$. Dels dos punts $(1,0)$ i $(-9,0)$, només el segon és en l'arc de circumferència frontera. Per tant, tenim el punt candidat de esta part de la frontera de A: $(-9,0)$.

(iii) Punts candidats a extrems condicionats de f sobre la part de la frontera de A que és un arc de la circumferència petita $\{(x,y) \in \mathbb{R} : \quad x^2 + y^2 = 9,\ (x+4)^2 + y^2 \leq 25\}$: aplicant el mètode de Lagrange, construïm la funció de Lagrange:

$$L(x,y,\lambda) = x^2 + y^2 + 10x - \lambda(x^2 + y^2 - 9).$$

Igualem les seves tres derivades parcials a zero i resolem:

$$\begin{cases} L'_x(x,y,\lambda)=0 \\ L'_y(x,y,\lambda)=0 \\ L'_\lambda(x,y,\lambda)=0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+10-2\lambda x=0 \\ 2y-2\lambda y=0 \\ x^2+y^2-9=0 \end{cases}$$

La segona equació implica $y=0$ o $\lambda=1$, però $\lambda=1$ és incompatible amb la primera equació, per tant ha de ser $y=0$. Aleshores, de la tercera equació obtenim $x=3$ o $x=-3$ i i de la primera equació tenim $\lambda=\frac{8}{3}$ o $\lambda=-\frac{2}{3}$, respectivament. Aleshores, tenim dos punts crítics de la funció de Lagrange: $(3,0,\frac{8}{3})$, $(-3,0,-\frac{2}{3})$ i, eliminant la coordenada que correspon a λ, dos puntos candidats: $(3,0)$ i $(-3,0)$. Dels dos punts crítics $(3,0)$ i $(-3,0)$, només el segon és en l'arc de circumferència frontera. Per tant, tenim el punt candidat de esta part de la frontera de A: $(-3,0)$.

Les imatges per f dels punts candidats a extrems absoluts de f en A trobats són:

$f(-5,0)=-25, \quad f(0,3)=f(0,-3)=9, \quad f(-9,0)=-9, \quad f(-3,0)=-21.$

Per tant el valor màxim absolut de f en A és 9 i l'assoleix als punts $(0,3)$ i $(0,-3)$ i i el valor mínim absolut de f en A és -25 i l'assoleix al punt $(-5,0)$.