1. *(2 punts)* Sigui $\{a_n\}$ una successió tal que $a_1 = \dfrac{3}{4}$ i $a_{n+1} = 1 - \sqrt{1 - a_n}$ si $n \geq 1$. Demostreu que:

a) $0 < a_n < 1, \quad \forall n \geq 1$; *c)* $\{a_n\}$ és convergent i calculeu-ne el límit;

b) $\{a_n\}$ és decreixent; *d)* $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2}$.

Solució. a) Utilizamos el método de la inducción matemática:

1) *Caso base.* Si $n = 1, \quad 0 < a_1 = \dfrac{3}{4} < 1$.

2) *Hipótesis.* Suponemos que $0 < a_n < 1$.

3) *Tesis.* Comprobaremos que $0 < a_{n+1} < 1$.
Partiendo de la hipótesis lo haremos del modo siguiente,
$0 < a_n < 1 \Longrightarrow 0 > -a_n > -1 \Longrightarrow 1 > 1 - a_n > 0 \Longrightarrow 1 > \sqrt{1 - a_n} > 0 \Longrightarrow$
$-1 < -\sqrt{1 - a_n} < 0 \Longrightarrow 0 < 1 - \sqrt{1 - a_n} < 1 \Longrightarrow 0 < a_{n+1} < 0.$

De 1) + 2) + 3) tenemos que $0 < a_n < 1, \quad \forall n \geq 1$.

b) $\{a_n\}$ es decreciente $\Longleftrightarrow a_{n+1} \leq a_n, \quad \forall n \geq 1$. Para demostrar esta desigualdad utilizamos el método de la inducción matemática:

1) *Caso base.* $a_2 = 1 - \sqrt{1 - a_1} = 1 - \sqrt{1 - \dfrac{3}{4}} = \dfrac{1}{2} \leq a_1 = \dfrac{3}{4}$.

2) *Hipótesis.* Suponemos que $a_n \leq a_{n-1}$.

3) *Tesis.* Comprobaremos que $a_{n+1} \leq a_n$.
Partiendo de la hipótesis lo haremos del modo siguiente,
$a_n \leq a_{n-1} < 1 \Longrightarrow -a_n \geq -a_{n-1} > -1 \Longrightarrow 1 - a_n \geq 1 - a_{n-1} > 0 \Longrightarrow$
$\sqrt{1 - a_n} \geq \sqrt{1 - a_{n-1}} \Longrightarrow -\sqrt{1 - a_n} \leq -\sqrt{1 - a_{n-1}} \Longrightarrow$
$1 - \sqrt{1 - a_n} \leq 1 - \sqrt{1 - a_{n-1}} \Longrightarrow a_{n+1} \leq a_n.$

De 1) + 2) + 3) tenemos que $a_{n+1} \leq a_n, \quad \forall n \leq 1 \Longrightarrow \{a_n\}$ es decreciente.

c) De a) y b) resulta que $\{a_n\}$ es decreciente y acotada inferiormente y por lo tanto, según el Teorema de la convergencia monótona, $\{a_n\}$ es convergente

$\Longrightarrow \exists \displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n = l \in \mathbb{R} \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \left(1 - \sqrt{1 - a_n}\right) \Longrightarrow l = 1 - \sqrt{1 - l} \Longrightarrow$
$l - 1 = -\sqrt{1 - l} \Longrightarrow (l - 1)^2 = 1 - l \Longrightarrow l^2 - l = 0 \Longrightarrow l = 0$ o $l = 1$.

Como $a_1 = \dfrac{3}{4}$ y $\{a_n\}$ és decreciente $\Longrightarrow \displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$.

d) $$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1 - \sqrt{1 - a_n}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(1 - \sqrt{1 - a_n})(1 + \sqrt{1 - a_n})}{a_n(1 + \sqrt{1 - a_n})} =$$
$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{1 - (1 - a_n)}{a_n(1 + \sqrt{1 - a_n})} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{1 + \sqrt{1 - a_n}} = \frac{1}{2}.$$

2. *(2.5 punts)* Considereu les funcions $f(x) = \ln(x-1)$ i $g(x) = 1-(x-2)^2$ i la regió S limitada per les rectes $x = 2$ i $x = 5/2$ i les corbes $y = f(x)$ i $y = g(x)$.

a) Demostreu que l'equació $f(x) = g(x)$ té solució i que la solució és única.

b) Doneu un interval de longitud menor que 0.2 que contingui la solució de l'apartat a).

c) Dibuixeu la regió S i calculeu-ne l'àrea.

Solució. a) El problema del apartado a) es equivalente a demostrar que una función auxiliar $F(x) = f(x) - g(x) = \ln(x-1) - 1 + (x-2)^2$ tiene un único cero.

Antes de todo observamos que la función f es continua y derivable $\forall x > 1$ por ser la composición de una función logarítmica y un polinomio, además la función g es continua y derivable $\forall x \in \mathbb{R}$ por ser polinómica. Por lo tanto F es continua y derivable $\forall x > 1$ por ser la diferencia de f y g.

Entonces, si aplicamos el teorema de Bolzano, basta con detectar un intérvalo

$[a, b] : b > a > 1$ en los extremos del cual F tiene signos contrarios para poder justificar que existe un cero de F o, lo que es lo mismo, una solución de la ecuación $F(x) = 0 \Longrightarrow$ una solución de la ecuación $f(x) = g(x)$.

Calculamos $F(2) = \ln 1 - 1 = -1 < 0$ y $F(3) = \ln 3 - 0 = \ln 3 > 0 \Longrightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} F \in \mathcal{C}\left([2,\, 3]\right) \\ F(2)\cdot F(3) < 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \exists\, c \in\ (2,3) :\ f(c) = 0.$$

Como ya se ha justificado antes, $F \in \mathcal{C}^1(x > 1)$. Para demostrar la únicidad del cero de F podemos aplicar el teorema de Rolle aplicando la reducción al absurdo. Suponemos que existen dos ceros α y β de F tales que $\beta > \alpha > 1$ y $F(\alpha) = F(\beta) = 0$. Entonces, según el teorema de Rolle,

$$\left.\begin{array}{l} F \in \mathcal{C}\left([\alpha,\, \beta]\right) \\ F \text{ derivable en } (\alpha, \beta) \\ F(\alpha) = F(\beta) \end{array}\right\} \Longrightarrow \exists\, p \in\ (\alpha, \beta) :\ f'(p) = 0.$$

Pero si calculamos la derivada obtenemos:

$$F'(x) = \frac{1}{x-1} + 2(x-2) = 0 \Longleftrightarrow 2(x-2) = -\frac{1}{x-1} \Longleftrightarrow 2(x-2)(x-1) = -1 \Longleftrightarrow$$

$2x^2 - 6x + 5 = 0 \Longleftrightarrow x = \dfrac{6 \pm \sqrt{36-40}}{4} \Longrightarrow$ la última ecuación no tiene ninguna solución real. Por tanto tenemos una contradicción y en consecuencia se deduce que la hipótesis de que hay 2 ceros de F es falsa. Puesto que antes ya se justificó que había un cero, se deduce que existe un único cero de F y, por lo tanto, una única solución de la ecuacion $f(x) = g(x)$.

b) Para resolver este problema utilizamos el método de la bisección. Evidentemente, el número de iteraciones que se necesitan con el método de bisección para dar un intervalo de longitud deseada dependerá de la longitud del intervalo inicial en el que acotemos la solución. Si usamos el intervalo de longitud 1 que se ha indicado antes entonces el número n de divisiones se calcula resolviendo respecto a n la desigualdad siguiente

$$\frac{b-a}{2^n} < 0.2 \Longrightarrow 2^n > \frac{b-a}{0.2} \Longrightarrow 2^n > \frac{1-0}{0.2} \Longrightarrow 2^n > 5 \Longrightarrow n \geq 3.$$

Entonces n, como mínimo, es 3.

Si tomamos $a = 2$ y $b = 3$ como valores iniciales para aplicar el método de bisección, teniendo en cuenta que $F(2) < 0$ y $F(3) > 0$ y designando la longitud del intervalo de la iteración n-esima como l_n, obtenemos que:

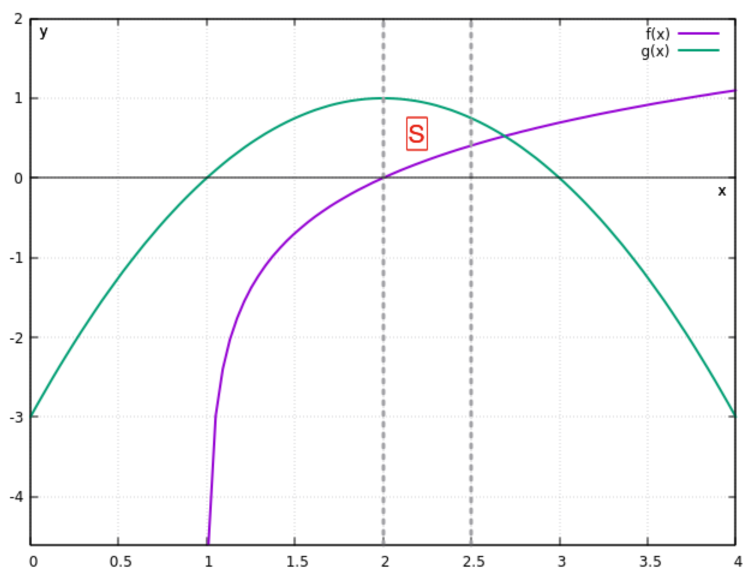
Primera iteración: $c_1 = \dfrac{2+3}{2} = 2.5,\ F(2.5) \approx -0.3445 < 0 \Longrightarrow c \in (2.5, 3)$ y $l_1 = 0.5$.

Segunda iteración: $c_2 = \dfrac{2.5+3}{2} = 2.75,\ F(2.75) \approx 0.122 > 0 \Longrightarrow c \in (2.5, 2.75)$ y $l_2 = 0.25$.

Tercera iteración: $c_3 = \dfrac{2.5+2.75}{2} = 2.625,\ F(2.625) \approx -0.124 < 0 \Longrightarrow$
$c \in (2.625, 2.75)$ y $l_3 = 0.125 < 0.2$.

La solución $c \in (2.625, 2.75)$ que es un intervalo de longitud menor a 0.02, obtenido en la última iteración.

c) Tenemos la siguiente gráfica para f y g donde se indica la región S:



Como $g(x) > f(x), \quad \forall x \in \left[2, \dfrac{5}{2}\right]$ el área de la región S es

$$S = \int_2^{\frac{5}{2}} \big(f(x) - g(x)\big) dx.$$

La primitiva de f calculamos utilizando la integración por partes

$$\int f(x)dx = \left(\begin{array}{ll} u = \ln(x-1), & v' = 1 \\ u' = \frac{1}{x-1}, & v = x \end{array} \right) = x\ln(x-1) - \int \frac{x}{x-1}\,dx =$$

$$= x\ln(x-1) - \int \left(1 + \frac{1}{x-1}\right) dx = x\ln(x-1) - x - \ln(x-1) = (x-1)\ln(x-1) - x.$$

La primitiva de g es $\displaystyle\int g(x)dx = \int \left(1-(x-2)^2\right)dx = x - \frac{(x-2)^3}{3}$.

Por lo tanto,

$$S = (x-1)\ln(x-1) - 2x + \frac{(x-2)^3}{3}\Big|_2^{\frac{5}{2}} = \left(\frac{3}{2}\ln\frac{3}{2} - 5 + \frac{1}{24}\right) - (\ln 1 - 4 + 0) = \frac{23}{24} - \frac{3}{2}\ln\frac{3}{2}.$$

$S \approx 0.350136$.

3. *(1.25 punts)* Considereu la funció $f(x) = \sqrt[5]{x+1}$.

a) Escriviu el polinomi de Taylor de grau 2 de la funció f en el punt $x_0 = 0$ i el residu corresponent en la forma de Lagrange.

b) Calculeu el valor aproximat de $\sqrt[5]{1.5}$ i una fita superior de l'error absolut d'aquesta aproximació utilitzant el polinomi i el residu de l'apartat a).

Solució. a) El polinomi de Taylor de grau 2 de la funció f en el punt $x_0 = 0$ i el residu corresponent en la forma de Lagrange són:

$$P_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)\,x + \frac{f''(x_0)}{2!}\,x^2; \quad R_2(x) = \frac{f'''(c)}{3!}\,x^3, \quad \text{on } 0 \leqslant c \leqslant x.$$

Com

$$f(x) = (x+1)^{\frac{1}{5}},\ \ f'(x) = \frac{1}{5}(x+1)^{-\frac{4}{5}},\ \ f''(x) = -\frac{4}{25}(x+1)^{-\frac{9}{5}},\ \ f'''(x) = \frac{36}{125}(x+1)^{-\frac{14}{5}}$$

aleshores:

$$P_2(x) = 1 + \frac{1}{5}\,x - \frac{2}{25}\,x^2; \quad R_2(x) = \frac{6}{125(c+1)^{\frac{14}{5}}}\,x^3, \quad \text{on } 0 \leqslant c \leqslant x.$$

b) $\sqrt[5]{1.5} = f(0.5) \approx P_2(0.5) = 1 + \dfrac{0.5}{5} - \dfrac{2}{25}\,0.25 = \dfrac{27}{25} = 1.08$.

Per tant una fita superior de l'error absolut d'aquesta aproximació és

$$\epsilon = |f(0.5) - P_2(0.5)| = |R_2(0.5)| = \left|\frac{6\cdot(0.5)^3}{125(c+1)^{\frac{14}{5}}}\right| = \frac{6\cdot 5^3\cdot 10^{-3}}{125(c+1)^{\frac{14}{5}}} = \frac{6\cdot 10^{-3}}{(c+1)^{\frac{14}{5}}} < 6\cdot 10^{-3} = 0.006$$

ja que, com $0 < c < 0.5$, el valor màxim s'obté quan el denominador és més petit, és a dir per $c = 0$.

4. *(2 punts)* Considereu la família de funcions

$$f(x,y) = k\big(2xy + y^2 + yx^2 + \cos(x+y)\big) + x^2(k^2 - y).$$

a) Demostreu que $\forall\, k \in \mathbb{R} - \{1\}$, $(0,0)$ és un punt crític, i classifiqueu-lo en funció del valor de k.

b) Demostreu que si $k = 1$ tots els punts de la recta $x + y = 0$ són crítics.

Solución. a) Les derivades parcials són

$$f'_x(x,y) = k\,(2\,y + 2\,yx - \sin{(x+y)}) + 2\,x\left(k^2 - y\right)$$
$$f'_y(x,y) = k\left(2\,x + 2\,y + x^2 - \sin{(x+y)}\right) - x^2$$

i ambdues s'anul.len en $(0,0)$. Per tant, es tracta en tots els casos d'un punt crític.

La matriu hessiana és

$$Hf(x,y) = \begin{bmatrix} k\,(2\,y - \cos{(x+y)}) + 2\,k^2 - 2\,y & k\,(2 + 2\,x - \cos{(x+y)}) - 2\,x \\ k\,(2 + 2\,x - \cos{(x+y)}) - 2\,x & k\,(2 - \cos{(x+y)}) \end{bmatrix}$$

i tenim

$$H = Hf(0,0) = \begin{bmatrix} 2\,k^2 - k & k \\ k & k \end{bmatrix}$$

El determinant de H és

$$\det(H) = 2\,k^2\,(k-1)$$

Si $k > 1$, el determinant és positiu i $(0,0)$ és extrem relatiu. El signe del coeficient $2\,k^2 - k = k(2k-1)$ és positiu i es tracta d'un mínim relatiu.

Si $k < 1$ i $k \neq 0$ el determinant de la matriu és negatiu i el $(0,0)$ és punt de sella.

En el cas $k = 0$, el criteri no decideix. En aquest cas la funció és $f(x,y) = -x^2y$. Tenim que $f(0,0) = 0$ i el signe de $f(x,y)$ és oposat al signe de y. Per tant, en tot entorn de $(0,0)$ hi ha punts amb imatge positiva i punts amb imatge negativa. $(0,0)$ és també en aquest cas un punt de sella.

b) Si $k = 1$, les derivades parcials són $f'_x(x,y) = f'_y(x,y) = 2\,(x+y) - \sin{(x+y)}$ i s'anul.len en tots els punts de la recta $x + y = 0$.

5. *(2.25 punts)* Considereu la funció $f(x,y) = 3x^2 + y^2$.

a) Determineu la direcció u en què la derivada direccional de f al punt (x,y), $D_uf(x,y)$, té el valor màxim i proveu que aquesta derivada direccional és la funció $F(x,y) = 2\sqrt{9x^2 + y^2}$.

b) Apliqueu el mètode dels multiplicadors de Lagrange per trobar els punts candidats a extrems de F si $x^2 + y^2 = 1$.

c) Considereu la regió $\quad K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1 \quad \text{i} \quad y \geq \dfrac{1}{2}(x+1)\}.$

Proveu que F té extrems absoluts a K i trobeu els punts de K on F té valor màxim absolut. Quin és el valor d'aquest màxim absolut?

Solució. a) La función f es polinómica, por lo tanto, $\;f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2) \implies \exists\, D_vf(x,y),\ \forall v$ y $\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Como se sabe, la derivada direccional de una función en el punto (x,y) tiene el valor máximo en la dirección del vector gradiente y el valor de esta derivada es igual a la norma del vector gradiente en este punto, es decir,

$$u = \nabla f(x,y) = \left(f'_x(x,y),\ f'_y(x,y)\right) = (6x,\ 2y),$$

$$\max_v D_v f(x,y) = D_u f(x,y) = D_{\nabla f(x,y)} f(x,y) = ||\nabla f(x,y)|| = \sqrt{(6x)^2+(2y)^2} = 2\sqrt{9x^2+y^2}.$$

b) Designamos $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = 1\}$ y $g(x,y) = x^2+y^2-1$.

$$F \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)),\ (0,0) \notin A \Longrightarrow F \in \mathcal{C}^1(A),$$

$$g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2) \text{ y } \nabla g(x,y) = (2x,2y) \neq (0,0),\ \forall (x,y) \in A,$$

por lo tanto, se puede aplicar el método de multiplicadores de Lagrange para encontrar los puntos candidatos de extremos de $F(x,y) = 2\sqrt{9x^2+y^2}$ si $x^2+y^2=1$.

En primer lugar definimos la función de Lagrange

$$L(x,y,\lambda) = F(x,y) + \lambda\, g(x,y) = 2\sqrt{9x^2+y^2} + \lambda(x^2+y^2-1),$$

después calculamos los puntos críticos de L, resolviendo el siguiente sistema de ecuaciones,

$$\begin{cases} L'_x(x,y,\lambda) = 2\dfrac{18x}{2\sqrt{9x^2+y^2}} + 2\lambda x = 2x\left(\dfrac{9}{\sqrt{9x^2+y^2}} + \lambda\right) = 0 & (1) \\ L'_y(x,y,\lambda) = 2\dfrac{2y}{2\sqrt{9x^2+y^2}} + 2\lambda y = 2y\left(\dfrac{1}{\sqrt{9x^2+y^2}} + \lambda\right) = 0 & (2) \\ L'_\lambda(x,y,\lambda) = x^2+y^2-1 = 0 & (3) \end{cases}$$

Si en (1) $x=0 \Longrightarrow$ de (3) $y = \pm 1 \Longrightarrow$ de (2) $\lambda = -1 \Longrightarrow$ los puntos críticos de L son $(0,\ \pm 1,\ -1)$.

Si en (2) $y=0 \Longrightarrow$ de (3) $x = \pm 1 \Longrightarrow$ de (2) $\lambda = -3 \Longrightarrow$ los puntos críticos de L son $(\pm 1,\ 0,\ -3)$.

Observamos que los factores $\left(\dfrac{9}{\sqrt{9x^2+y^2}} + \lambda\right)$ y $\left(\dfrac{1}{\sqrt{9x^2+y^2}} + \lambda\right)$ de (1) y (2) no se anulan al mismo tiempo, entonces no existen más puntos críticos de L.

Por consiguiente, eliminando la coordenada de los puntos críticos que corresponde a λ, obtenemos los candidatos requeridos: $(0,\ \pm 1)$ y $(\pm 1,\ 0)$.

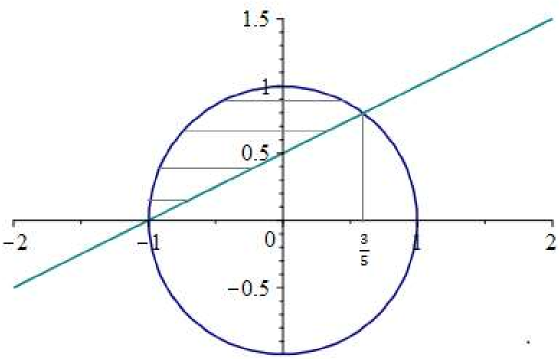
c) Los puntos de la intersección de la circunferencia $x^2+y^2=1$ y la recta $y = \dfrac{1}{2}(x+1)$ se calculan del modo siguiente:

$$y = \frac{1}{2}(x+1) \Longrightarrow x^2 + \left(\frac{1}{2}(x+1)\right)^2 = 1 \Longrightarrow 4x^2+(x+1)^2 = 4 \Longrightarrow 5x^2+2x-3 = 0 \Longrightarrow$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+60}}{10} = \frac{-2 \pm 8}{10} \Longrightarrow \begin{array}{l} x = \dfrac{3}{5} \Longrightarrow y = \dfrac{4}{5} \Longrightarrow (\dfrac{3}{5}, \dfrac{4}{5}), \\ x = -1 \Longrightarrow y = 0 \Longrightarrow (-1,0). \end{array}$$

La frontera de la región K es $\partial K = \partial_1 K \cup \partial_2 K$ donde

$$\partial_1 K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = 1,\ -1 \leq x \leq \frac{3}{5},\ y > 0\},$$



$$\partial_2 K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = \frac{1}{2}(x+1),\ -1 \le x \le \frac{3}{5}\}.$$

Observamos que

$$\left.\begin{array}{l} \partial K \in K \Longrightarrow K \text{ cerrado} \\ \exists\, B_2\big((0,0)\big) \supset K \Longrightarrow K \text{ acotado} \end{array}\right\} \Longrightarrow K \text{ compacto.}$$

Por el teorema de Weierstrass como

$$\left.\begin{array}{l} F \in \mathcal{C}(K) \\ K \text{ compacto} \end{array}\right\} \Longrightarrow \exists \text{ extremos absolutos de } F \text{ en } K.$$

Los puntos candidatos de extremos absolutos de F en K son

5.1) los puntos críticos de F en K; 5.2) puntos de la frontera $\partial_1 K$;
5.3) puntos de la frontera $\partial_2 K$; 5.4) puntos de la intersección de $x^2+y^2=1$ y $y = \frac{1}{2}(x+1)$.

• Empezamos con 5.1). Como $F \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2 \setminus (0,0))$, $(0,0) \notin K \Longrightarrow F \in \mathcal{C}^1(K)$ y los puntos críticos de F en K son puntos donde

$$\left\{\begin{array}{l} F'_x(x,y) = 2\,\dfrac{18x}{2\sqrt{9x^2+y^2}} = \dfrac{18x}{\sqrt{9x^2+y^2}} = 0 \\ F'_y(x,y) = 2\,\dfrac{2y}{2\sqrt{9x^2+y^2}} = \dfrac{2y}{\sqrt{9x^2+y^2}} = 0 \end{array}\right. .$$

Este sistema no tiene solución, por lo tanto, no existen puntos críticos de F en K.

• Seguimos con 5.2). Podemos utilizar el apartado b), comprobando si los puntos candidatos calculados en b) pertenecen a $\partial_1 K$. Esta claro que $(1,0)$, $(0,-1) \notin \partial_1 K$ y $(-1,0)$, $(0,1) \in \partial_1 K \Longrightarrow (-1,0)$, $(0,1)$ son candidatos de extremos absolutos de F en K.

• Acabamos con 5.3). En este caso utilizamos el método de sustitución.

$$F(x,y)\Big|_{y=\frac{1}{2}(x+1)} = 2\sqrt{9x^2 + \frac{1}{4}(x+1)^2} = \sqrt{36x^2+(x+1)^2} = \sqrt{37x^2+2x+1} = G(x).$$

$37x^2 + 2x + 1 \neq 0$, $\forall\, x \Longrightarrow$ los puntos críticos de G son puntos donde

$$G'(x) = \frac{37x + 1}{\sqrt{37x^2 + 2x + 1}} = 0 \Longrightarrow x = -\frac{1}{37} \Longrightarrow y = \frac{18}{37} \Longrightarrow \left(-\frac{1}{37}, \frac{18}{37}\right) \in \partial_2 K.$$

• Los puntos de 5.4) están calculados antes en c) y son $(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$, $(-1, 0)$.

En total tenemos cuatro puntos candidatos de extremos absolutos de F en K: $(-1, 0)$, $(1, 0)$, $\left(-\frac{1}{37}, \frac{18}{37}\right)$, $\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$. Para clasificarlos calculamos las imagenes de F en estos puntos

$$F(-1, 0) = 6; \quad F(0, 1) = 2; \quad F\left(-\frac{1}{37}, \frac{18}{37}\right) = \frac{6\sqrt{37}}{37}; \quad F\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right) = \frac{2}{5}\sqrt{97}.$$

Por lo tanto,

$$\max_D F(x, y) = F(-1, 0) = 6.$$

Resumen: en el punto $(-1, 0)$ en la dirección del vector $u = \nabla f(-1, 0) = (-6, 0)$ la derivada direccional de f tiene valor máximo en K y este valor es

$$\max_v D_v f(-1, 0) = D_{\nabla f(-1,0)} f(-1, 0) = ||\nabla f(-1, 0)|| = \max_K F(x, y) = F(-1, 0) = 6.$$