1. *(2 punts)* Trobeu tots els nombres reals x que satisfan la desigualtat següent:

$$|2x+8| \geq x^2.$$

Representeu el conjunt de solucions sobre la recta real y digueu si tal conjunt és fitat. En cas afirmatiu, trobeu-ne el suprem i l'ínfim. Digueu si tal conjunt té màxim o mínim. Quins són?

Solución.

a) Por definición:

$$|2x+8| = \begin{cases} 2x+8, & \text{si } x \geq -4 \\ -2x-8, & \text{si } x < -4 \end{cases} .$$

En el caso $x < -4$: $-2x-8 \geq x^2 \Leftrightarrow x^2+2x+8 \leq 0$. Para resolver esta inequación buscaremos las raices de la equación $x^2+2x+8=0$. Esta ecuación no tiene soluciones reales ya que $x = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4-32}}{2}$. La función $g(x) = x^2+2x+8 \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$, por ser polinómica, y no se anula en ningún punto, entonces tiene el mismo signo para $\forall x \in \mathbb{R}$. Como, por ejemplo, $g(-5) = 23 > 0$ resulta que $g(x) = x^2+2x+8 > 0$ siempre y por tanto la inequación $x^2+2x+8 \leq 0$ no tiene soluciones para $x < -4$.

En el caso $x \geq -4$: $2x+8 \geq x^2 \Leftrightarrow x^2-2x-8 \leq 0 \Longleftrightarrow (x+2)(x-4) \leq 0 \Longleftrightarrow$

$$a) \begin{cases} x+2 \leq 0 \\ x-4 \geq 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x \leq -2 \\ x \geq 4 \end{cases} \text{(incomp.)} \quad b) \begin{cases} x+2 \geq 0 \\ x-4 \leq 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x \leq 4 \end{cases} \Longleftrightarrow -2 \leq x \leq 4.$$

Por tanto, la solución de la inequación es el intervalo cerrado $A = [-2, 4]$.

b) A es acotado inferiormente ya que $\exists\, k \in \mathbb{R} : k \leq x,\ \forall x \in A$, por ejemplo, $k = -3$.

A es acotado superiormente ya que $\exists\, K \in \mathbb{R} : K \geq x,\ \forall x \in A$, por ejemplo, $K = 5$.

A es acotado ya que A es acotado superiormente e inferiormente.

La mayor de las cotas inferiores es $k = -2 \Longrightarrow \exists \inf A = -2$.

Como $\inf A = -2 \in A \Longrightarrow \exists \min A = -2$.

La menor de ls cotas superiores es $K = 4 \Longrightarrow \exists \sup A = 4$.

Como $\sup A = 4 \in A \Longrightarrow \exists \max A = 4$.

2. *(2 punts)* Sigui $\{a_n\}$ una successió tal que $a_1 = \dfrac{1}{2}$ i $a_{n+1} = \sqrt{a_n + 2}$ si $n \geq 1$.

a) Demostreu que $0 \leq a_n \leq 2, \quad \forall n \geq 1$.

b) Demostreu que $\{a_n\}$ és monótona.

c) Demostreu que $\{a_n\}$ és convergent i calculeu el seu límit.

d) Calculeu $\lim_{n\to+\infty}\left(a_n^2-3\right)^{\frac{1}{2a_n-4}}$.

Solución. La demostración de los apartados a) y b) la haremos con el método de la inducción matemática.

a) Paso base: $0 \leq a_1 = \dfrac{1}{2} \leq 2$.

Paso inducción: sea $n \geq 2$.

Hipótesis: $0 \leq a_n \leq 2$. Tesis: $0 \leq a_{n+1} \leq 2$.

Partiendo de la hipótesis y haciendo los cálculos siguientes

$0 \leq a_n \leq 2 \Longrightarrow 2 \leq a_n + 2 \leq 4 \Longrightarrow \sqrt{2} \leq \sqrt{a_n+2} \leq \sqrt{4} = 2 \Longrightarrow 0 \leq a_{n+1} \leq 2,$

llegamos a la tesis.

b) $a_1 = \dfrac{1}{2},\ a_2 = \sqrt{\dfrac{5}{2}} > a_1 \Longrightarrow \{a_n\}$ puede ser sólo monótona creciente.

$\{a_n\}$ és monótona creciente $\Longleftrightarrow a_{n+1} \geq a_n,\ \forall n \in \mathbb{N}$. Demostrémoslo.

Paso base: $a_2 \geq a_1$.

Paso inducción: sea $n \geq 2$.

Hipótesis: $a_n \geq a_{n-1}$. Tesis: $a_{n+1} \geq a_n$.

Partiendo de la hipótesis y haciendo los cálculos siguientes

$a_n \geq a_{n-1}. \Longrightarrow a_n + 2 \geq a_{n-1} + 2 \Longrightarrow \sqrt{a_n+2} \geq \sqrt{a_{n-1}+2} \Longrightarrow a_{n+1} \geq a_n,$

llegamos a la tesis.

c) $\left.\begin{array}{l}\{a_n\} \text{ mon. crec. (b)}\\ \{a_n\} \text{ acot. sup. (a)}\end{array}\right\} \Longrightarrow \{a_n\}$ es conv. (teorema de la conv. monót.) $\left(\exists \lim_{n\to+\infty} a_n = l\right)$.

Por lo tanto

$$\lim_{n\to+\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to+\infty}\sqrt{a_n+2} \Longrightarrow l = \sqrt{l+2} \Longrightarrow l^2 = l+2 \Longrightarrow l^2 - l - 2 = 0 \Longrightarrow l = 2 \text{ o } l = -1.$$

Como $\{a_n\}$ es monótona creciente y $a_1 = \dfrac{1}{2} \Longrightarrow l = 2$.

$$\text{d) } \lim_{n\to+\infty}\left(a_n^2-3\right)^{\dfrac{1}{2a_n-4}} = \left(1\right)^{\infty} = e^{\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{(a_n^2-3-1)}{2a_n-4}} = e^{\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{(a_n^2-4)}{2(a_n-2)}} =$$

$$= e^{\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{(a_n-2)(a_n+2)}{2(a_n-2)}} = e^{\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_n+2}{2}} = e^2.$$

3. *(3 punts)* Considerem la funció $f(x) = x^3 + x^2 + x + 2$.

a) Demostreu que la gràfica de la funció f talla exactament una vegada l'eix d'abscisses.

b) Trobeu un interval de longitud menor o igual a 1 que contingui el zero de f. Partint d'aquest interval i usant el mètode de la bisecció calculeu el zero de f amb un error absolut menor que 0.1 i el nombre d'iteracions necessàries.

Solución.

a)
$$\left.\begin{array}{l} f(-1) = 1 > 0 \\ f(-2) = -4 < 0 \\ f \in \mathcal{C}\big([-2,\, 0]\big) \text{ (polinómica)} \end{array}\right\} \Longrightarrow \text{(según el teorema de Bolzano)}\, \exists\, c \in (-2,\, -1) : \ f(c) = 0.$$

Por lo tanto la gráfica de la función f corta como mínimo una vez el eje OX.

Para demostrar que la gráfica de f corta exactamente una vez el eje OX utilizaremos la reducción al absurdo. Supongamos que lo corta dos veces, es decir, existen dos puntos a y b donde $f(a) = f(b) = 0$. Entonces

$$\left.\begin{array}{l} f \in \mathcal{C}\big([a,\, b]\big) \text{ (polinómica)} \\ f \text{ es derivable en } (a, b) \text{ (polinómica)} \\ f(a) = f(b) \end{array}\right\} \Longrightarrow \text{(según el teorema de Rolle)}\, \exists\, \alpha \in (a,\, b) : \ f'(\alpha) = 0.$$

Considerando que $f'(x) = 3x^2 + 2x + 1$ calculamos el punto α del modo siguiente:

$$f'(\alpha) = 3\alpha^2 + 2\alpha + 1 = 0 \iff \alpha = \frac{-2 \pm \sqrt{4-12}}{6} = \frac{-2 \pm \sqrt{-8}}{6} \notin \mathbb{R}.$$

Hemos llegado a una contradicción, entonces la suposición es falsa y la gráfica de f corta exactamente una vez el eje OX.

b) Del apartado a) se sabe que el cero de f pertenece al intervalo $(-2,\, -1)$ que tiene longitud 1. El número n de iteraciones necesarios para calcular el cero de f con el método de la bisección partiendo del intervalo $(a, b) = (-2,\, -1)$ con error absoluto ϵ menor que 0.1 se puede determinar del modo siguiente

$$\epsilon \leq \frac{b-a}{2^n} = \frac{1}{2^n} < 0.1 \Longrightarrow 2^n > 10 \Longrightarrow n \geq 4 \Longrightarrow n_{\min} = 4$$

y el valor aproximado $c \approx c_4$ del cero de f correspondiente de la siguiente tabla

n	a	b	f(a)	f(b)	c	f(c)
1	-2	-1	-4	1	-1.5	-0.625
2	-1.5	-1	-0.625	1	-1.25	0.359
3	-1.5	-1.25	-0.625	0.359	-1.375	-0.084
4	-1.375	-1.25	-0.084	0.359	-1.3125	

Por lo tanto, $c \approx c_4 = -1.3125$.

4. *(3 punts)* Siguin $f(x) = \ln x$.

a) Escriviu el polinomi de Taylor de grau n de la funció f en el punt $x_0 = 1$ i l'expressió del residu corresponent en la forma de Lagrange.

b) Determineu el grau del polinomi de Taylor de la funció f per obtenir el valor de $\ln 1.25$ amb error més petit que 10^{-3}.

c) Calculeu el valor aproximat de $\ln 1.25$ utilitzant el polinomi de l'apartat b).

Solución. a) El polinomio de Taylor de grado n de la función f en el punto $x_0 = 1$ y el resto correspondiente en la forma de Lagrange son

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(1)}{k!}(x-1)^k = f(1)+f'(1)(x-1)+\frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(1)}{n!}(x-1)^n,$$

$R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-1)^{n+1}$, donde c está entre x y 1.

Calcularemos las derivadas de f:

$f(x) = \ln x, \quad f'(x) = x^{-1}, \quad f''(x) = -x^{-2}, \quad f'''(x) = 2x^{-3}, \quad f''''(x) = 2 \cdot 3x^{-4}$

$\Longrightarrow f^{(k)}(x) = (-1)^{k+1}(k-1)!\,x^{-k} \Longrightarrow f^{(k)}(1) = (-1)^{k+1}(k-1)!$ y $f(1) = \ln 1 = 0.$

Por lo tanto el polinomio de Taylor de grado n de la función $\ln x$ en el punto $x_0 = 1$ y el resto correspondiente en la forma de Lagrange son

$$P_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}(k-1)!}{k!}(x-1)^k = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}(x-1)^k,$$

$$R_n(x) = \frac{(-1)^n\,n!}{c^{n+1}(n+1)!}(x-1)^{n+1} = \frac{(-1)^n}{c^{n+1}(n+1)}(x-1)^{n+1},$$

donde c está entre x y 1.

b) El error absoluto de la aproximación $\ln 1.25 = f(1.25) \approx P_n(1.25)$ y su cota superior se calcula de la forma siguiente

$$\epsilon = |f(1.25) - P_n(1.25)| = |R_n(1.25)| = \left|\frac{(-1)^n(0.25)^{n+1}}{c^{n+1}(n+1)}\right| = \frac{(0.25)^{n+1}}{c^{n+1}(n+1)} \leq$$

$$\leq \frac{(0.25)^{n+1}}{(n+1)} = \frac{1}{4^{n+1}(n+1)} \text{ (cota superior), por ser } 1 \leq c \leq 1.25.$$

Determinaremos el grado del polinomio de Taylor para obtener el valor de $\ln 1.25$ con error menor que 10^{-3} resolviendo la siguiente desigualdad

$$\frac{1}{4^{n+1}(n+1)} < 10^{-3} \Longrightarrow 4^{n+1}(n+1) > 10^3 \Longrightarrow n \geq 3 \Longrightarrow n_{\min} = 3.$$

c) $$\ln 1.25 \approx P_3(1.25) = \sum_{k=1}^{3} \frac{(-1)^{k+1}(0.25)^k}{k} = 0.25 - \frac{(0.25)^2}{2} + \frac{(0.25)^3}{3} \approx 0.224$$