Algorithmique Avancée

Antoine Genitrini

Antoine.Genitrini@Sorbonne-Universite.fr

Master Informatique 1

Moodle : UE MU4IN500

Année 2023-2024

CHAPITRE 3

MÉTHODES DE HACHAGE

- Fonctions de hachage et gestion des collisions
- Hachage avec chaînage et hachage avec calcul
- Filtres de Bloom
- Hachage dynamique et hachage extensible
- Comparaison avec la recherche arborescente
- Hachage universel et hachage parfait

Rappels : Structures et efficacité

Ensemble de n clés. Chaque clé représentée sur $\leq L$ caractères.

Nombre de comparaisons pour une recherche ou un ajout

Structure	au Pire	en Moyenne	Mémoire
ABR	$O(n)$	$O(\log n)$	n + 2n ref.
ABR équilibré	$O(\log n)$	$O(\log n)$	n + 2n ref.
Arbre Digital [1]	L	$O(\log n)$	n + 2n ref.
Trie [1, 2]	L	$O(\log n)$	n + Ln ref.
Hachage [3]	$O(n)$	$O(1)$	n

1. accès aux caractères de façon individuelle
2. comparaisons de caractères
3. calcul fonction de hachage

Plan du cours

Méthodes de hachage

Table T de taille m contenant des clés.

Opérations : Recherche, Insertion d'une clé x dans T
Suppression difficile

Fonction de hachage $h : \mathcal{U} \mapsto \{0, \ldots, m-1\}$
Accès direct dans T selon la valeur de hachage

Transformation de la clé en une adresse
(et pas d'accès aux bits de la clé comme dans les Tries)

```
def H-ajout(x, T, h):
    """ elt * Table * FonctionH -> Table
        Renvoie la table resultant de l'ajout de x."""

    v = h(x)
    if EstVide(T[v]):
        T[v] = x
    elif T[v] != x:
        GererCollision(x, T)

    return T
```

Fonctions de hachage

Fonction de hachage $h : \mathcal{C} \subset \mathcal{U} \mapsto \{0, \ldots, m-1\}$

- calcul de fonction de hachage
  - division : $h(x) = x \mod m$, (m premier)
  - multiplication : $h(x) = \lfloor m \cdot (\lambda x - \lfloor \lambda x \rfloor) \rfloor$, $\lambda = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$
- but : obtenir *répartition uniforme* des clés
  $\forall x \in \mathcal{C}, \forall i \in \{0, \ldots, m-1\}, \quad \mathbb{P}(h(x) = i) = \frac{1}{m}$
- mais il y a *toujours des collisions* : $x \neq y$ et $h(x) = h(y)$.

$$\mathbb{P}(0 \textit{ collision}) = \frac{\#\textit{injections de } [n] \textit{ dans } [m]}{\#\textit{fonctions de } [n] \textit{ dans } [m]} = \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{m^n}$$

$\Rightarrow$ nécessité de gérer les collisions

Analyse du nombre de collisions primaires

- Hypothèse d'uniformité de la fonction de hachage
  $\forall x \in \mathcal{C}, \forall i \in \{0, \ldots, m-1\}, \quad \mathbb{P}(h(x) = i) = \frac{1}{m}$

- Probabilité que k clés aient même valeur de hachage v

$$\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(|h^{-1}(v)| = k) = \binom{n}{k} \frac{1}{m^k} \left(\frac{m-1}{m}\right)^{n-k}.$$

- Moyenne nb clés par case :

$$\mathbb{E}(|h^{-1}(v)|) = \sum k \cdot \mathbb{P}(X = k) = \frac{n}{m}.$$

- Variance :

$$\mathbb{V}ar(|h^{-1}(v)|) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2) = \frac{n}{m}\left(1 - \frac{1}{m}\right).$$

Paradoxe des anniversaires

$\mathbb{P}$: Probabilité pour qu'il y ait au moins 1 collision

$$\begin{aligned}\mathbb{P} &= 1 - \prod_{i=0}^{n-1}\left(1 - \frac{i}{m}\right) \\ &= 1 - \exp\sum_{i=0}^{n-1}\ln\left(1 - \frac{i}{m}\right) \sim 1 - e^{-\frac{n^2}{2m}}.\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ pour $\mathbb{P} = 0.5$

$n \sim \sqrt{2m\ln 2}$, $(m = 365 \rightarrow n = 23)$

Paradoxe des anniversaires : étant donné un groupe de plus de 23 personnes, la probabilité qu'au moins 2 d'entre elles aient la même date anniversaire est supérieure à 1/2.

Gestion des collisions

Différentes méthodes pour gérer les collisions

- Hachage Chainage Séparé : toutes les clés ayant la même valeur de hachage sont dans une structure extérieure (LC)
  - coût moyen d'une recherche négative : $\frac{1}{m}\sum_{i=1..m} L_i = \frac{n}{m} =: \alpha$, ($\alpha$: taux de remplissage)
  - coût moyen d'une recherche positive : $\frac{1}{n}\sum_{i=0..n-1} \frac{i}{m} \sim \frac{\alpha}{2}$
  - coût pire $\sim n$: toutes clés ont la même valeur de hachage
- à l'intérieur de la table
  - par calcul : $(h_i(x))_{i=1..m}$ suite d'essais, couvrant la table
    - HLinéaire : $h_i(x) = h(x) + (i-1) \mod m$
    - Hquadratique : $h_i(x) = h(x) + (i-1)^2 \mod m$
    - HDouble : $h_i(x) = h(x) + d(x)(i-1) \mod m$
  - par chaînage (HCoalescent)

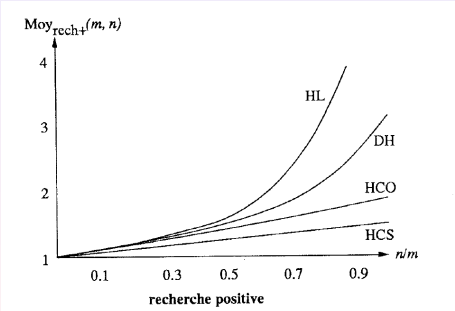
Caractéristiques des méthodes de Hachage

- *Taux de remplissage* $\alpha = \frac{n}{m} < 1$, (sauf pour HCS).
- Très bien adaptées à la gestion d'ensembles statiques (choisir $\alpha \sim 60\%$)
- Mal adaptées aux suppressions
- Si table trop pleine il faut la réorganiser en augmentant la mémoire allouée, et en "rehachant" tous les éléments
  ($\Rightarrow$ indisponibilité provisoire)

Comparaison des performances

Opération fondamentale = comparaison entre clés (on ne compte pas coût hachage)
Sous l'hypothèse de répartition uniforme des clés :

- HChainageSéparé a les meilleures performances, et la suppression est simple.
- HCoalescent très bon mais utilise place pour chaînages internes.
- DoubleH meilleur que HLinéaire, mais nécessite calcul de 2 fonctions de hachage.



Pour $\alpha < 60\%$, toutes méthodes en moyenne moins de 2 essais (mais au pire n).

Plan du cours

Exemple d'application : Filtres de Bloom

Si l'ensemble de clés à stocker est très grand (BD), alors il faut stocker en mémoire externe, et accès disque coûteux
$\rightarrow$ rajouter structure intermédiaire pour déterminer appartenance d'un élément à l'ensemble, avant d'aller le chercher effectivement par hachage.
Filtre de Bloom : algorithme probabiliste (basé aussi sur hachage !) avec faux positif possible (élément n'étant pas dans l'ensemble mais identifié comme y étant).

Filtre de Bloom pour ensemble S

F tableau de m bits, initialisé à 0.
k fonctions de hachage uniformes indépendantes $(h_i)_{i=1,\dots,k}$
$h_i : \mathcal{U} \rightarrow \{0, \dots, m-1\}$.
S ensemble de n éléments de $\mathcal{U}$ (card $(\mathcal{U}) \gg n$).
Construction du filtre : $\forall s \in S, \forall i = 1, \dots, k$, $F[h_i(s)] := 1$.

Test d'appartenance d'un élément x à S

si $\forall i = 1, \dots, k, \quad F[h_i(x)] = 1$, alors répondre OUI sinon NON

Faux positif : $x \notin S$ déclaré dans S possible, **mais pas le contraire**.

Probabilité d'erreur (faux positif)

Faux positif y : $h_i(y) = 1, \forall i = 1, \dots k$, alors que $y \notin S$

- La probabilité qu'un bit fixé de F soit toujours à 0 après avoir construit le filtre de Bloom associé à S est

$$\left(1 - \frac{1}{m}\right)^{kn} = \exp\left(kn \log\left(1 - \frac{1}{m}\right)\right) \sim e^{-kn/m}$$

- La probabilité que pour une clé y, on ait $h_i(y) = 1$, $\forall i = 1, \dots k$ est donc

$$\left(1 - \left(1 - \frac{1}{m}\right)^{kn}\right)^{k} \sim (1 - e^{-kn/m})^k$$

La probabilité d'erreur est donc de l'ordre de $(1 - e^{-kn/m})^k$.
Dimensionnement (voir TD)

Plan du cours

Hachage Externe

- Pour ne pas avoir à “rehacher”
- Pour traiter la recherche externe (mémoire secondaire)

La table est remplacée par un index (arbre lexicographique binaire), et les feuilles adressent vers des pages en mémoire secondaire.

Hachage dynamique et Hachage extensible

- analogie avec les B-arbres : éléments dans pages, qui éclatent quand elles sont pleines
- analogie avec Accès Séquentiel indexé : on maintient un index pour guider vers la page (et si index trop grand, on le pagine lui aussi)
- méthodes de hachage (fonctions de hachage pour disperser les clés) : clé $x \rightarrow h(x)$
- utilisent propriétés binaires des valeurs de hachage des clés (index sous la forme d’un arbre lexicographique)

Accès Séquentiel Indexé

Liste des clés triée.
Éléments rangés séquentiellement dans les pages.

Exemple : Encyclopédie Universalis

Index : Page i contient clés jusqu'à $F_i \Rightarrow$ Pour rechercher la clé x à partir de l'index D, on calcule (dichotomie) l'indice i tel que $F_{i-1} < x \leq F_i$, et on renvoie sur la page i.

Index sur plusieurs niveaux (Index des disques et sur chaque disque index des pages)

Performant pour la recherche, mais un ajout peut nécessiter le **recalcul de toutes les pages** !

Hachage dynamique

- Table de hachage remplacé par index = arbre lexicographique binaire
- Index fabriqué par raffinements successifs d'une fonction de hachage.
  clé $x \to h(x) \in \{0,1\}^*$

Pour rechercher un élément x

- on suit un chemin dans l'arbre lexicographique, qui mène à une feuille pointant sur la page contenant x,
- le chemin suivi est guidé par la valeur de hachage de x.

Les ajouts augmentent le nombre d'éléments dans une page

- allouer de nouvelles pages en mémoire secondaire
- répartir les éléments dans les pages en utilisant plus ou moins d'informations de la valeur binaire de leur fonction de hachage (selon qu'il y a plus ou moins de collisions)
- nouvelles pages référencées par nouvelles feuilles de l'arbre lexicographique (qui croît).

Exemple

Hachage dynamique des clés $E, X, T, F, R, N, C, L, S, G, B$, avec pages de capacité $C = 4$.

$h(E) = 00101, h(X) = 11000, h(T) = 10100, h(F) = 00110,$
$h(R) = 10010, h(N) = 01110, h(C) = 00011, h(L) = 01100,$
$h(S) = 10011, h(G) = 00111, h(B) = 00010$

Tri des éléments dans une page :
temps négligeable par rapport au temps d'accès.

Hachage Extensible

- index = arbre lexicographique parfait $\Rightarrow$ représentable par un tableau de 2^d mots
- chaque mot est une suite de d bits (nombre entre 0 et $2^d - 1$) qui adresse vers une page
- Pour rechercher la clé x, on utilise les d premiers bits de $h(x)$, pour accéder à une page
- plusieurs mots peuvent adresser la même page : (2^{d-k} si les clés de cette page ont les k mêmes premiers bits pour leurs valeurs de hachage)

Lors d'un ajout, les modifications peuvent être à plusieurs niveaux :

- insertion dans une page (si elle n'est pas pleine)
- éclatement d'une page avec redistribution des clés
  (si plusieurs pointeurs de l'index vers cette même page)
  et l'index n'est pas modifié
- doublement de l'index

Exemple

Hachage extensible des clés
$E, X, T, E, R, N, A, L, S, E, A, R, C, H, I, N, G, E, X, A, M, P, L, E$, avec pages de capacité $C = 4$.

$h(E) = 00101, h(X) = 11000, h(T) = 10100, h(R) = 10010,$
$h(N) = 01110, h(A) = 00001, h(L) = 01100, h(S) = 10011,$
$h(C) = 00011, h(H) = 01000, h(I) = 01001, h(G) = 00111,$
$h(M) = 01101, h(P) = 10000$

Hachage/Arbres de Recherche

- Mémoire centrale : Complexité en nombre de comparaisons

	ABR-Equilibré	Hachage
Recherche	$O(\log n)$	$O(1)$
Ajout	$O(\log n)$	$O(n)$
Suppression	$O(\log n)$	—
Recherche par intervalle (ou tris)	$O(\log n)$	—

- Mémoire secondaire paginée :
  - Complexité en nombre d'accès aux pages
    temps d'accès >> temps de traitement
  - Taux de remplissage des pages ($\alpha = n/Cm$)

	B-arbres	H-Extensible
Recherche, ajout, suppression	$O(1)$	$O(1)$
Taux de remplissage	70%	70%
Lectures séquentielles (tris)	Oui	Non
Accès concurrents	complexes	plus simples

Plan du cours

Hachage universel

Choix aléatoire fonction de hachage $\rightarrow \sim$ h uniforme

Ensemble universel de fonctions de hachage

- $\mathcal{H} : \{h : \mathcal{U} \longrightarrow \{0, \ldots, m-1\}\}$ ensemble fini ;
- $\mathcal{H}$ est *universel* ssi $\forall x, y \in \mathcal{U}, x \neq y$, $|\{h \in \mathcal{H}; h(x) = h(y)\}| \leq \frac{|\mathcal{H}|}{m}$

D'où pour $h \in \mathcal{H}$ aléatoire : $\forall x \neq y \in \mathcal{U}^2, \mathbb{P}(h(x) = h(y)) \leq \frac{|\mathcal{H}|}{m} \cdot \frac{1}{|\mathcal{H}|} = \frac{1}{m}$.

Propriété

Soit h fonction aléatoire dans $\mathcal{H}$ universel ; si h répartit n clés dans une table de taille m, alors $\forall x$, le nombre moyen de clés y telles que $h(y) = h(x)$ est inférieur à n/m.

$\sum_{y \neq x} \mathbb{P}(h(x) = h(y)) \leq \frac{n-1}{m}$

Tirer aléatoirement une fonction de hachage

On dispose d'une fonction de hachage uniforme $h : E \to [0, m-1]$, on peut créer alors une autre fonction h',

$$h'(x) = (a \times h(x) + b) \mod m$$

avec a, b deux entiers tirés aléatoirement entre 0 et $m-1$

En pratique : technique peu coûteuse + bons résultats

On appelle ces fonctions 1-universelle (voir TD).

Construction d'un ensemble universel

- on suppose m premier ;
- on écrit les clés en base m :
  $\forall x \in \mathcal{U}, x = (x_0, x_1, \ldots, x_r)$, avec $0 \leq x_i < m$
- randomisation : choisir $a = (a_0, a_1, \ldots, a_r)$,
  avec chaque a_i aléatoire dans $\{0, 1, \ldots, m-1\}$

Théorème

Soit $h_a : x \to \sum_{i=0}^{r} a_i x_i \mod m$.
L'ensemble $\mathcal{H} = \{h_a\}$ est universel, de cardinal m^{r+1}.

Exemple : adresses IP – 132.227.074.253 – 4 champs de 8 bits : $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$.

Pour hacher $\sim$ 250 adresses, choisir $m = 257$ (nb premier) et $\mathcal{H} = \{h_a; h_a(x) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4 \mod m, \quad \text{avec} \quad a_i \in [0..256]\}$

Preuve

Soient $x \neq y$, $x = (x_0, \ldots, x_r), y = (y_0, \ldots, y_r)$, avec $x_0 \neq y_0$.

Montrer que le nombre de h_a tq $h_a(x) = h_a(y)$ est m^r (i.e. $\|\mathcal{H}\|/m$)

$h_a(x) = h_a(y) \Longrightarrow \sum_{i=0}^{r} a_i x_i \equiv \sum_{i=0}^{r} a_i y_i (\mod m)$
$\Longrightarrow a_0(x_0 - y_0) + \sum_{i=1}^{r} a_i(x_i - y_i) \equiv O(\mod m)$
$\Longrightarrow a_0 = \left(-\sum_{i=1}^{r} a_i(x_i - y_i)\right).(x_0 - y_0)^{-1} (\mod m)$ (lemme)
Donc $\forall a_1, a_2, \ldots, a_r$, il existe un seul a_0 tel que $h_a(x) = h_a(y)$.
Et le choix des $a_1, a_2, \ldots, a_r$ donne m^r fonctions possibles.
Donc $\mathcal{H}$ est universel.

Lemme : Si m est premier, alors $\forall z \neq 0 \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, $\exists! z^{-1}$ tq. $z.z^{-1} = 1$
Ex. pour $m = 7$, $z = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, $z^{-1} = 1, 4, 5, 2, 3, 6$.

Hachage parfait

Ensemble statique de n clés : Pire cas $O(1)$, mémoire $O(n)$

Idée : deux niveaux de hachage universel

- choisir m premier, $m \sim n$ et $h_1 \in \mathcal{H}$ universel.
- pour $i = 1..m$, soit n_i le nombre de clés tq $h_1(x) = i$
- pour chaque i, choisir m_i premier, $m_i \sim n_i^2$ et $h_{2,i} \in \mathcal{H}$ universel.

Mémoire totale $O(n)$ en moyenne car $\sum \mathbb{E}(n_i^2) = O(n)$.

$\forall i, n_i^2 = n_i + 2\binom{n_i}{2}$, donc $\mathbb{E}[\sum n_i^2] = n + 2\mathbb{E}[\sum \binom{n_i}{2}]$. Or $\sum_i \binom{n_i}{2}$ = nb total collisions. Et comme $\mathcal{H}$ universel, $\mathbb{E}$[nb total collisions] = $\frac{1}{n}\binom{n}{2}$ = (n-1)/2.

Pas de collision au second niveau (proba $> 1/2$)

Preuve sur la page suivante.

Théorème

Soit $\mathcal{H}$ un ensemble universel pour une table de taille $m \sim n^2$; le nb de collisions pour hacher les n clés est $< \frac{1}{2}$ en moyenne.

$\forall (x, y), \mathbb{P}(h(x) = h(y)) \leq \frac{1}{m} \sim \frac{1}{n^2}$. Et le nombre de couple est $\binom{n}{2}$. Donc le nombre moyen de collisions est $\binom{n}{2}\frac{1}{n^2} < \frac{1}{2}$

Corollaire

Dans ces conditions, $\mathbb{P}$(aucune collision) $> \frac{1}{2}$.

appliquer l'inégalité de Markov : $\mathbb{P}(X > a) < \mathbb{E}[X]/a$, avec X = nb collisions et $a = 1$

Pour le hachage parfait il suffit donc d'essayer des fonctions de $\mathcal{H}$ jusqu'à ce qu'il n'y ait pas de collision (prétraitement) ; et ensuite on travaille avec ensemble statique (recherches uniquement).